INVARIANTU METODE

Teorija un piemēri 5.-12. klasei, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2021./2022. m. g.

Invariants – tas, kas paliek nemainīgs (kādā norisē, kādos apstākļos).

Piemēram,

- mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs jeb invariants;
- pulksteņa rādītāja spicā gala attālums līdz centram, kur tas ir piestiprināts, ir nemainīgs jeb invariants, bet spicā gala attālums līdz skaitlim 12, pulksteņa rādītājiem kustoties, nav nemainīgs.

Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem, un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Invariantu metode

Atrast piemērotu īpašību, kura

1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

Uzdevumu piemēri

1. Sākumā bija 10 papīra gabali. Dažus no tiem sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Visus iegūtos gabalus sajauca un dažus no tiem atkal sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Vai, tādā veidā turpinot, var iegūt tieši 999 papīra gabalus?

Atrisinājums. Aplūkosim, kā izmainās kopējais gabalu skaits, atkarībā no tā, cik daļās tiek sagriezts viens gabals.

Bija 1 gabals	Ieguva 5 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 4
Bija 1 gabals	Ieguva 7 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 6

Ievērojam, ka sākumā bija doti 10 papīra gabali – *pāra skaitlis*.

Ja papīra gabalu sagriež

- 5 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 7 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 6 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais papīra gabalu skaits *vienmēr būs pāra skaitlis*. Tā kā 999 ir *nepāra skaitlis*, tad tieši 999 papīra gabalus iegūt nevarēs. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – kopējais papīra gabalu skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

2. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 10. Vienā gājienā var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?
Atrisinājums. Sākumā doto skaitļu summa ir *nepāra skaitlis*:
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$
Katrā gājienā, pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, visu skaitļu summa palielinās par 2 (par *pāra skaitli*). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst *nepāra skaitli*. Tātad visu skaitļu summa pēc katra gājiena paliek *nepāra skaitlis*.
Beigās prasīts iegūt desmit vienādus skaitļus, bet desmit vienādu skaitļu summa $10 \cdot x$ ir *pāra skaitlis*. Tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi. Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – visu skaitļu summa vienmēr ir nepāra skaitlis.

3. Pamestā mājā dzīvo 2016 spoki. Spoku ķērājs vienā reizē var noķert vai nu tieši 33, vai tieši 17 spokus, bet tad uzreiz uzrodas attiecīgi vai nu 48, vai 14 jauni spoki. Vai iespējams, ka kādā brīdī šajā mājā būs tieši viens spoks?
Atrisinājums. Aplūkosim, kā izmainās kopējais spoku skaits, atkarībā no tā, cik spoki tiek noķerti.

Noķer	Uzrodas	Kopējais spoku skaits
33	48	palielinās par 15
17	14	pamazinās par 3

Ievērojam, ka kopējais spoku skaits izmainās par skaitli, kas dalās ar 3.

Atceries!
Viens skaitlis dalās ar otru skaitli, ja šos skaitļus var izdalīt bez atlikuma.

Sākumā bija 2016 spoki – skaitlis, kas dalās ar 3, jo skaitļa 2016 ciparu summa ir $2 + 0 + 1 + 6 = 9$, kas dalās ar 3, tātad arī pats skaitlis dalās ar 3.
Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k \pm 3m = 3 \cdot (k \pm m)$.
Tātad kopējais spoku skaits pēc katra ķēriena dalās ar 3. Tā kā skaitlis 1 nedalās ar 3, tad nav iespējams, ka kādā brīdī mājā būs tieši viens spoks. Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – kopējais spoku skaits vienmēr dalās ar 3.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir
- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

Paritāte
Apskatīsim uzdevumus, kuru atrisināšanas pamatā ir viens apsvērums – “būt pāra vai nepāra skaitlim”.

4. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo – melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās – melnas. Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?
Atrisinājums. Uzdevuma risinājumā gan rindiņas, gan kolonnas sauksim par līnijām.
Pieņemsim, ka kādā gājienā tiek izmainīts rūtiņu krāsojums līnijā t. Tabulā apskatīsim, kā gājiena rezultātā mainās melno rūtiņu skaits līnijā t un arī visā kvadrātā.
Apskatīsim visus gadījumus, kā var izvietot melnās rūtiņas uz līnijas t:

Melno rūtiņu skaits līnijā $\boldsymbol{t}$ pirms gājiena	Melno rūtiņu skaits līnijā $\boldsymbol{t}$ pēc gājiena	Melno rūtiņu skaita izmaiņa (starpība)
4	0	-4
3	1	-2
2	2	0
1	3	$+2$
0	4	$+4$

Secinām, ka jebkura gājiena rezultātā melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par pāra skaitli. Tā kā uzdevuma sākumā ir 4 melnās rūtiņas (pāra skaitlis), tad melno rūtiņu skaits nevar kļūt vienāds ar 3 (nepāra skaitlis). Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis.

5. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, ..., 2014. Vienā gājienā atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību. Vai iespējams, ka, veicot atļautos gājienus, uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

Atrisinājums. Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu:

$$1 + 2 + \cdots + 2014 = \frac{(1 + 2014) \cdot 2014}{2} = 2015 \cdot 1007$$

Šī summa ir nepāra skaitlis.

Ja tiek nodzēsti divi blakus esoši skaitļi a un b, $a > b$, un to vietā uzrakstīta šo skaitļu starpība $(a - b)$, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$, tas ir, par pāra skaitli.

Ja visu sākumā doto skaitļu summa ir NEPĀRA skaitlis, bet, nodzēšot divus blakus esošus skaitļus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par pāra skaitli, tad, katrreiz atņemot no nepāra skaitļa pāra skaitli, iegūsim NEPĀRA skaitli. Līdz ar to skaitli 0 nevar iegūt, jo nulle ir pāra skaitlis. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

6. Uz displeja ekrāna uzrakstīta burtu virkne XXOXOO. Burtu grupu XO var aizstāt ar OOXXOO, bet burtu grupu OOX var aizstāt ar burtu X. Vai, izpildot šādas operācijas, var iegūt burtu virkni OXOXOXOXOXOXOXO?

Atrisinājums. Aplūkosim burtu X un burtu O skaita starpību.

Sākumā virknē šī burtu skaita starpība ir nulle, bet beigu virknē tā ir (-1).

Izdarot pirmā veida aizvietošanu, šī starpība samazinās par 2, bet, izdarot otrā veida aizvietošanu, tā palielinās par 2 (skat. tabulu).

	Pirms aizvietošanas			Pēc aizvietošanas			
	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	Starpības izmaiņa
XO→OOXXOO	1	1	0	2	4	-2	$\mathbf{-2}$
OOX→X	1	2	-1	1	0	1	$\mathbf{+2}$

Redzam, ka ar katru pieļaujamo operāciju starpība starp burtu O skaitu un burtu X skaitu mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnējā burtu virknē šī starpība ir nulle (pāra skaitlis), tad tā nevar beigu virknē kļūt vienāda ar nepāra skaitli (-1). Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – X un O skaita starpība virknēs, ko var iegūt uz ekrāna, ir pāra skaitlis.

Dalāmība un specifiskas atlikumu vērtības

Dažreiz par invarianto īpašību var izvēlēties, piemēram, īpašību "dalīties ar 3", "dalot ar 3, dot atlikumu 1", "dalot ar 3, dot atlikumu 2", "dalīties ar 4" utt.

Iegaumē!

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2 (vai 5), ja tas beidzas ar pāra ciparu (ar 0 vai 5);
- skaitlis dalās ar 3 (vai 9), ja tā ciparu summa dalās ar 3 (vai 9);
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 3 (vai 9), ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 3 (vai 9) šī skaitļa ciparu summu.

7. Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

a) reizināt ar 2;

b) dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;

c) pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2015 var iegūt skaitli 20152015).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2015?

Atrisinājums. Izpētīsim vispirms abus skaitļus: doto un to, kuru jāiegūst. Skaitlim 24 izpildās īpašība "dalās ar 3", bet skaitlim 2015 šī īpašība nepiemīt.

Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, arī dalīsies ar 3. Tiešām:

a) ja n dalās ar 3, tad arī $2n$ dalās ar 3,

b) ja pāra skaitlis $2n$ dalās ar 3, tad n dalās ar 3,

c) apgalvojums par trešo operāciju izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa dalās ar 3, tad arī jauniegūtā skaitļa $\overline{nn}$ ciparu summa dalās ar 3, jo tā ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa. Tātad arī pats jauniegūtais skaitlis $\overline{nn}$ dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļi, kurus var iegūt no 24, dalās ar 3. Bet skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar uzdevumā dotajām operācijām skaitli 2015 nevarēs iegūt. Uzdevums atrisināts. INVARIANTS – visi iegūtie skaitļi dalās ar 3.

8. Uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 2, 3, 4, 5. Atļauts izvēlēties dažus no tiem un sastādīt no tiem skaitli A. Pēc tam skaitli A reizina ar 13, un ciparus, kurus iegūst reizināšanas rezultātā, uzraksta uz tāfeles izvēlēto ciparu vietā. (Piemēram, izvēloties ciparus 2, 3, 4, varam no tiem sastādīt skaitli $A = 324$ un iegūt skaitli $13 \cdot A = 13 \cdot 324 = 4212$, pie tam cipars 2 tiek iegūts divas reizes. Tagad uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 1, 2, 2, 4, 5). Vai ar aprakstīto operāciju palīdzību var panākt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti cipari: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ?

Atrisinājums. Izmantosim, ka naturāls skaitlis, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 3.

Ja vienas operācijas izpildes sākumā izvēlēto ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu r, tad tādu pašu atlikumu r dod arī no šiem cipariem izveidotais skaitlis A. Tā kā $13A = A + 12A$ un $12A$ dalās ar 3, tad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī jauniegūtais skaitlis $13A$; tātad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī to ciparu summa, kurus operācijas izpildes beigās uzraksta uz tāfeles sākumā izvēlēto ciparu vietā. Tātad operācijas izpildes gaitā nemainās uz tāfeles uzrakstīto ciparu summas atlikums, dalot to ar 3.

Ievērosim, ka sākumā uzrakstīto ciparu summa ir 14, un tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad visām ciparu virknēm, kas parādās uz tāfeles, ir atlikums 2, dalot to summu ar 3.

Bet galarezultātā prasītās virknes ciparu summa ir $2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 2 \cdot 27 = 54$; tā dod atlikumu 0, dalot ar 3. Tātad prasīto ciparu virkni nevar iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – uz tāfeles esošo ciparu summa, dalot to ar 3, dod atlikumu 2.

Periodiskums

9. Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākamais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

Atrisinājums. Pāra skaitļus apzīmēsim ar p, bet nepāra skaitļus – ar n.

Ievērojam, ka $n+n=p$; $n+p=n$; $p+n=n$; $p+p=p$.

Tā kā virknes locekļus nosaka divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars, tad tā veidojas šādi:

$$n;\ p;\ n;\ n;\ p;\ n;\ n;\ p;\ n;\ n;\ p;\ n; \ldots$$

Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa $(n;\ p;\ n)$. Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – virknē periodiski atkārtojas grupa $(n;\ p;\ n)$.

Sarežģītāki invarianti

10. Rindā uzrakstīti 2015 vieninieki. Atļauts nodzēst jebkurus divus uzrakstītus skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt vienu jaunu skaitli $\frac{a+b}{4}$. Tā turpina, kamēr paliek uzrakstīts viens skaitlis. Vai var gadīties, ka tas ir mazāks nekā $0{,}0001$?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka tiek nodzēsti skaitļi *a* un *b* un to vietā uzrakstīts skaitlis $\frac{a+b}{4}$.

Pierādīsim, ka

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{1}{\frac{a+b}{4}} \qquad (1)$$

tas ir, katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa nepalielinās.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam:

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$$
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$$
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī nevienādība (1) ir patiesa.

Sākumā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa ir $2015 \cdot \frac{1}{1} = 2015$; tātad arī beigās tā nav lielāka kā 2015. Ja beigās palikušo vienīgo skaitli apzīmējam ar x, tad šī summa ir $\frac{1}{x}$; tāpēc $\frac{1}{x} \leq 2015$ un $x \geq \frac{1}{2015} > \frac{1}{10000} = 0{,}0001$. Tātad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis nevar būt mazāks kā 0,0001. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visu ierakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa vienmēr lielāka vai vienāda ar 2015.

Par kādu bieži sastopamu kļūdu

Gadījumos, kad zināms, ka kāda īpašība piemīt sākotnējam lielumam, saglabājas izpildāmo gājienu rezultātā un piemīt arī beigās vajadzīgajam rezultātam, tad šī informācija vien vēl **neļauj secināt**, vai vajadzīgais beigu rezultāts iegūstams no sākotnējā lieluma, izpildot pieļautos gājienus. Tādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi – varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu, utt.

Ja izdodas atrast īpašību, kas

- piemīt sākumā dotajiem lielumiem,
- ir invarianta, t.i., saglabājas, veicot pieļaujamās operācijas,
- piemīt tiem lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā,

tad no tā vien vēl **nevar secināt**, ka galarezultātā vajadzīgos lielumus tiešām varēs iegūt.

11. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2016. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 1000?

Kurš no risinājumiem ir pareizs?

Jānīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 1000 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 1000 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša spriedums ir pareizs, bet Jānīša spriedums ir kļūdains.

Jānītis savā risinājumā koncentrējās uz īpašību "būt pāra skaitlim". Viņš atzīmējis, ka šī īpašība piemīt gan visiem skaitļiem, kurus var iegūt, gan arī skaitlim 1000, par kura iegūšanas iespējām jautāts uzdevumā. Tātad Jānītis konstatējis, ka ar skaitļa paritāti saistīti apsvērumi **netraucē** skaitļa 1000 iegūšanai. Bet no tā vēl neizriet, ka 1000 iegūšanai netraucē nekādi citi apsvērumi! Gluži otrādi, kā to savā risinājumā atradis Pēterītis, dalāmība ar 3 ir apsvērums, kas parāda, ka 1000 ar atļautajiem gājieniem nevar iegūt.

Situācija ir apmēram tāda pati, kāda rastos, ja Jānītim un Pēterītim būtu uzdots noskaidrot, vai celiņu cauri džungļiem no Mumbo ciema uz Tumbo ciemu neapdraud nekādas briesmas. Jānītis, ķīmiski analizējot gaisa sastāvu, nekļūdīgi noskaidro, ka celiņa tuvumā nav neviena lauvas, un no tā secina, ka var droši doties ceļā. Turpretī Pēterītis koncentrējas uz jaguāru meklēšanu un konstatē, ka 10 metrus no celiņa guļ vesela jaguāru saime. Kura zēna secinājums ir pareizs, varat saprast paši.

Avoti

Materiāla izstrādē izmantota grāmata A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997. Pieejams: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/mat_intvarianti.pdf

Uzdevumi treniņam

5.-8. klasei

1. Niknajam jūras laupītājam Smuidrim ir četras kaudzes ar zelta monētām. Viņš māk vienu kaudzi sadalīt 3 vai 5 mazākās kaudzēs. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Smuidris varēs iegūt tieši 2015 kaudzes, ko piešķirt saviem palīgiem?

2. Bagātajai Austrumu princesei Smuidrai zem gultas ir 6 lādes. Sākumā lādēs ir attiecīgi 1, 5, 0, 0, 2, 3 zelta monētas. Katru stundu viņa izvēlas 2 lādes un katrā no tām pieliek klāt 1 monētu. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, var panākt, ka kādā brīdī visās lādēs būs vienāds skaits monētu?

3. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus?

4. Autoservisā „Šrotiņš" ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 20. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā" kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas?

9.-12. klasei

5. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

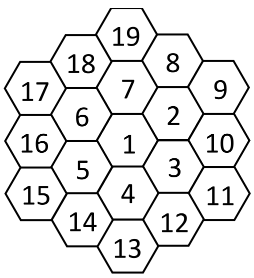
Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

6. Ar naturālu skaitli atļauts veikt šādas darbības:

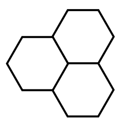
- pieskaitīt 6;
- dalīt ar 4, ja skaitlis dalās ar 4;
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 2015?

7. Vienā gājienā no 1. att. dotās figūras var izvēlēties jebkuru 2. att. redzamo figūru (figūru var arī pagriezt) un tajā ierakstītajiem skaitļiem vai nu pieskaitīt 1, vai arī atņemt 1. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka visās šūnās ir ierakstīts skaitlis 2015?



1. att.



2. att.

8. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas darbības:

- pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu;
- atņemt no skaitļa tā ciparu summu.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 139 var iegūt skaitli **a)** 63; **b)** 193?

Uzdevumu atrisinājumi

1. Niknajam jūras laupītājam Smuidrim ir četras kaudzes ar zelta monētām. Viņš māk vienu kaudzi sadalīt 3 vai 5 mazākās kaudzēs. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Smuidris varēs iegūt tieši 2015 kaudzes, ko piešķirt saviem palīgiem?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā bija 4 kaudzes – pāra skaitlis.

Ja vienu kaudzi sadala

3 daļās, tad kopējais kaudžu skaits palielinās par 2 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;

5 daļās, tad kopējais kaudžu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais kaudžu skaits vienmēr būs pāra skaitlis. Tā kā 2015 ir nepāra skaitlis, tad tieši 2015 kaudzes iegūt nevarēs.

2. Bagātajai Austrumu princesei Smuidrai zem gultas ir 6 lādes. Sākumā lādēs ir attiecīgi 1, 5, 0, 0, 2, 3 zelta monētas. Katru stundu viņa izvēlas 2 lādes un katrā no tām pieliek klāt 1 monētu. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, var panākt, ka kādā brīdī visās lādēs būs vienāds skaits monētu?

Atrisinājums. Sākumā lādēs esošo monētu kopējais skaits ir nepāra skaitlis:

$$1+5+0+0+2+3=11$$

Katrā stundā, pieliekot pa vienai monētai katrā no divām izvēlētajām lādēm, visu monētu kopējais skaits palielinās par 2 (par pāra skaitli). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst nepāra skaitli. Tātad visu monētu kopējais skaits pēc katras stundas paliek nepāra skaitlis.

Beigās prasīts iegūt, ka visās lādēs ir vienāds monētu skaits, bet sešu vienādu skaitļu summa ir pāra skaitlis. Tātad nevar panākt, ka visās lādēs ir vienāds monētu skaits.

3. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā kopējais mājlopu skaits ir $99+21=120$ – pāra skaitlis.

Aplūkojam, kā izmainās kopējais mājlopu skaits, atkarībā no tā, kurā pilsētā notiek maiņa:

ja par 4 kamieļiem pretī saņem 8 aitas, tad kopējais mājlopu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;

ja par 5 aitām pretī saņem 3 kamieļus, tad kopējais mājlopu skaits samazinās par 2 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais mājlopu skaits vienmēr būs pāra skaitlis. Tā kā 2015 ir nepāra skaitlis, tad tieši 2015 mājlopus iegūt nevarēs.

4. Autoservisā „Šrotiņš” ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 20. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā” kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā mašīnu skaits ir 39, kas dalās ar 3.

Aplūkosim, kā izmainās kopējais mašīnu skaits, atkarībā no tā, kuru darbību Maigonis veic:

- ja pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits palielinās par 9 (par skaitli, kas dalās ar 3);
- ja 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits samazinās par 15 (par skaitli, kas dalās ar 3).

Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k \pm 3m = 3 \cdot (k \pm m)$.

Tātad kopējais mašīnu skaits pēc katras darbības dalās ar 3.

Skaitļa 2015 ciparu summa ir $2+0+1+5=8$, kas nedalās ar 3, tātad arī pats skaitlis 2015 nedalās ar 3. Tātad nav iespējams, ka „Šrotiņā” kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas.

5. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

Atrisinājums. Visi skaitļi, kas uzrakstīti regulārā astoņstūra virsotnēs, sākumā ir nepāra skaitļi.
Ievērojam, ka
1) nepāra skaitlim pieskaitot divus nepāra skaitļus, iegūst nepāra skaitli;
2) no nepāra skaitļa atņemot divkāršotu nepāra skaitli, iegūst nepāra skaitli.
Tātad gan pēc pirmās, gan pēc otrās darbības astoņstūra virsotnē atkal būs ierakstīts nepāra skaitlis. Līdz ar to visi skaitļi, kas atrodas astoņstūra virsotnēs, vienmēr paliek nepāra. Bet skaitlis 2014 ir pāra skaitlis, tātad skaitli 2014 iegūt nevarēs.

6. Ar naturālu skaitli atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt 6;
- dalīt ar 4, ja skaitlis dalās ar 4;
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

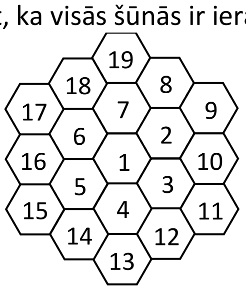
Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 2015?

Atrisinājums. Skaitlim 30 izpildās īpašība "dalās ar 3", bet skaitlim 2015 šī īpašība neizpildās.
Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī dalās ar 3.
Ievērojam, ka

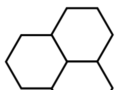
- ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī $(n+6)$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa dalās ar 3);
- ja pāra skaitlis $4n$ dalās ar 3, tad arī skaitlis n dalās ar 3 (n joprojām satur reizinātāju 3);
- apgalvojums „mainīt vietām skaitļa ciparus" izriet no dalāmības pazīmes ar 3 (ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī tā ciparu summa dalās ar 3, bet summa nemainās, ja maina saskaitāmo secību).

Tātad, ja dotais skaitlis dalās ar 3, tad pēc atļauto darbību izpildes arī jauniegūtais skaitlis dalīsies ar 3. Skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar atļautajām darbībām skaitli 2015 iegūt nevar.

7. Vienā gājienā no 3. att. dotās figūras var izvēlēties jebkuru 4. att. redzamo figūru (figūru var arī pagriezt) un tajā ierakstītajiem skaitļiem vai nu pieskaitīt 1, vai arī atņemt 1. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka visās šūnās ir ierakstīts skaitlis 2015?



3. att.


4. att.

Atrisinājums. Šūnās ierakstītie skaitļi 1, 2, …, 19 veido aritmētisko progresiju ar diferenci 1. Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām sākumā šūnās ierakstīto skaitļu summu $\frac{(1+19)\cdot 19}{2} = 190$.
Ja katrā šūnā ir ierakstīts skaitlis 2015, tad visu šo skaitļu summa ir $2015 \cdot 19 = 38285$.
Ievērojam, ka pēc katra gājiena visu šūnās ierakstīto skaitļu summa vai nu palielinās par 3, vai arī samazinās par 3. Tas nozīmē, ka visu šūnās ierakstīto skaitļu summas atlikums, dalot ar 3, visu laiku paliek nemainīgs. Sākumā doto skaitļu summa 190, dalot ar 3, dod atlikumu 1, bet beigās nepieciešamā summa 38285, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (skaitļa 38285 ciparu summa ir 26 un, dalot ar 3, tā dod tādu pašu atlikumu, kā skaitli dalot ar 3). Tā kā atlikumi ir dažādi, tad uzdevumā prasītais nav izpildāms, tas ir, nevar panākt, ka katrā šūnā būtu ierakstīts skaitlis 2015.

8. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas darbības:

- pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu;
- atņemt no skaitļa tā ciparu summu.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 139 var iegūt skaitli **a)** 63; **b)** 193?

Atrisinājums. a) Skaitli 63 var iegūt šādi:

$$139 \xrightarrow{-13} 126 \xrightarrow{-9} 117 \xrightarrow{-9} 108 \xrightarrow{-9} 99 \xrightarrow{-18} 81 \xrightarrow{-9} 72 \xrightarrow{-9} 63$$

b) Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 9, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 9 šī skaitļa ciparu summu. Tāpēc naturāla skaitļa un tā ciparu summas starpība noteikti dalīsies ar 9. Kaut vienu reizi izpildot atņemšanu, visi turpmāk iegūstamie skaitļi dalīsies ar 9.

Tā kā 193 nedalās ar 9, tad skaitli 193 varētu iegūt tikai tad, ja skaitlim visu laiku pieskaitīs tā ciparu summu. Tātad skaitļi pārveidosies šādi:

$$139 \xrightarrow{+13} 152 \xrightarrow{+8} 160 \xrightarrow{+7} 167 \xrightarrow{+14} 181 \xrightarrow{+10} 191 \xrightarrow{+11} 202 \rightarrow \ldots$$

Visi tālāk iegūstamie skaitļi ir lielāki nekā 193, tātad skaitli 193 nevarēs iegūt.