MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODE

Teorija un piemēri 10.-12. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2020. gadā

Jau skolas kursā 10. klasē tiek apgūta matemātiskās indukcijas metode jeb matemātiskās indukcijas princips, kas ir viens no biežāk lietotajiem un svarīgākajiem pierādījumu veidiem. Tas parasti tiek izmantots, lai pierādītu, ka kāds izteikums ir patiess visām naturālām n vērtībām.

Indukcija (no latīņu valodas "*inductio*" (uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kurā secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem. Šādā veidā iegūtos spriedumus sauc par induktīviem spriedumiem.

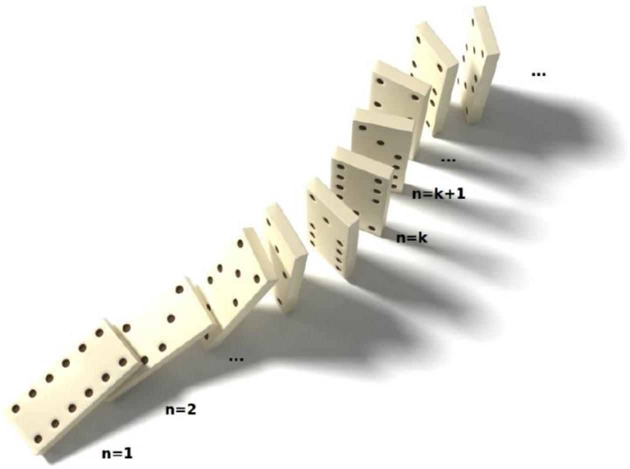
Domāšanas un spriešanas procesā tiek izteikti dažādi apgalvojumi. Tie var būt patiesi, aplami vai tādi, kuru patiesumu nav iespējams novērtēt.

Matemātiskās indukcijas metode ir viena no aritmētikas aksiomām, tāpēc tās patiesums nav jāpierāda. Pēc būtības indukcijas aksioma apgalvo, ka katru naturālo skaitli var iegūt, atkārtoti pieskaitot skaitlim 0 vieninieku.

Lietojot matemātiskās indukcijas metodi uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

1. pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (***indukcijas bāze***);
2. pieņem, ka šī īpašība ir spēkā k-tajam elementam (***induktīvais pieņēmums***);
3. pierāda, ka tad tā ir patiesa arī $(k+1)$-jam elementam (***induktīvā pāreja***).
4. secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Matemātiskās indukcijas metodes ilustrācija – iedomāsimies, ka rindā ir salikti bezgalīgi daudzi domino kauliņi. Ja krīt pirmais kauliņš, tad nokrīt arī otrais, tas savukārt nogāz nākamo utt. Šim procesam turpinoties, visi kauliņi tiek nogāzti.



Klasiskā veidā matemātiskās indukcijas metodi lieto:

- vienādību pierādīšanā;
- dalāmības pierādīšanā (tas ir, lai pamatotu dalīšanas atlikuma vai kāda cita invarianta saglabāšanos);
- rekurentas virknes vispārīgā locekļa formulas pierādīšanā.

Uzdevumu piemēri

1. Pierādīt, ka katram naturālam n ir patiesa vienādība

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $1 \cdot 4 = 1 \cdot 2^2$ jeb $4 = 4$.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n = k$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k \cdot (3k + 1) = k(k + 1)^2.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (k + 1) \cdot (3(k + 1) + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)^2 \text{ jeb}$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (k + 1) \cdot (3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k \cdot (3k + 1)}_{induktīvais\ pieņēmums} + (k + 1) \cdot (3k + 4) = k(k + 1)^2 + (k + 1) \cdot (3k + 4) =$$

$$= (k + 1)(k(k + 1) + 3k + 4) = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n = k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n = k + 1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

2. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izpildās

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Atrisinājums. Izmantojot aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas formulu, iegūstam, ka $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Tātad pietiek pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izpildās

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ jeb $1 = 1$.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n = k$, tas ir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3}_{induktīvais\ pieņēmums} + (k + 1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2}{4}\big(k^2 + 4(k + 1)\big) = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n = k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n = k + 1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

3. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $7^n + 3^{n+1}$ dalās ar 4.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $7^1 + 3^2 = 16$, kas dalās ar 4.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir, $7^k + 3^{k+1} \vdots 4$.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir, $7^{k+1} + 3^{k+2} \vdots 4$.
Pārveidojam izteiksmi:

$$7^{k+1} + 3^{k+2} = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 7 \cdot \underbrace{(7^k + 3^{k+1})}_{\vdots 4} - \underbrace{4}_{\vdots 4} \cdot 3^{k+1}$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī summa dalās ar 4.
Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

4. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $3 + 5 - 8 = 0$, kas dalās ar 10.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ja $n = k$, tad $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ja $n = k + 1$, tad $3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1)$ dalās ar 10.
Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1) =$$
$$= 3(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 5(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - 8(k + 1) =$$
$$= 3k^5 + 20k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 27k = 3k^5 + 5k^4 - 8k + 15k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 35k =$$
$$= (3k^5 + 5k^4 - 8k) + 5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7)$$

Saskaitāmais $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.
Saskaitāmais $5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7)$ dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo

- ja k ir pāra skaitlis, tad reizinātājs k dalās ar 2;
- ja k ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs $3k^3 + 10k^2 + 12k + 7$ ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 10, tad arī summa dalās ar 10.
No matemātiskās indukcijas metodes izriet, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

Dažreiz vajag izmantot citu induktīvā sprieduma shēmu – nevis pamatojam, ka no iepriekšējā loģiski izriet nākamais, bet gan – no diviem iepriekšējiem izriet nākamais. Tas ļauj rakstīt vairāk induktīvos pieņēmumus, bet tad arī induktīvo bāzi vajag plašāku – jāpamato gan $n = 1$, gan $n = 2$.

5. Virkne (x_n) dota rekurenti ar formulu $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ un $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Pierādīt, ka virknes vispārīgais loceklis ir formā $x_n = 3^n - 2^n$.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $x_1 = 3^1 - 2^1 = 1$. Ja $n = 2$, tad $x_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā ja $n = k$ un $n = k + 1$, tas ir,

$$x_k = 3^k - 2^k \quad \text{un} \quad x_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā arī tad, ja $n = k + 2$, tas ir, $x_{k+2} = 3^{k+2} - 2^{k+2}$.
Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam

$$x_{k+2} = 5x_{k+1} - 6x_k = 5 \cdot (3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6 \cdot (3^k - 2^k) = 5 \cdot 3^{k+1} - 5 \cdot 2^{k+1} - 6 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k =$$
$$= 15 \cdot 3^k - 10 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k = 9 \cdot 3^k - 4 \cdot 2^k = 3^{k+2} - 2^{k+2}$$

Secinājums. Tā kā formula ir patiesa, ja $n = 1$ un $n = 2$, un no tā, ka formula ir spēkā, ja $n = k$ un $n = k + 1$, izriet, ka formula ir spēkā arī $n = k + 2$, secinām, ka formula ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

6. Skaitļu virknei (a_n) visiem $n > 1$ ir spēkā sakarība $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$. Aprēķināt a_{50}, ja zināms, ka $a_1 = 1000$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka no dotās vienādības izriet, ka

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n^2 - 1} \qquad (*)$$

Aprēķinām dažu pirmo virknes elementu vērtības atkarībā no a_1 vērtības:

$$a_2 = a_1 \frac{1}{2^2-1};$$
$$a_1 + a_2 = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right) = a_3(3^2 - 1);$$
$$a_3 = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\frac{1}{3^2-1};$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2-1}\right) = a_4(4^2 - 1).$$

Pierādīsim formulu

$$a_n = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2-1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{(n-1)^2-1}\right)\frac{1}{n^2-1}$$

vispārīgā veidā, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad jau parādījām, ka $a_2 = a_1 \frac{1}{2^2-1}$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā arī, ja $n = k$

$$a_k = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2-1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā gadījumā, ja $n = k + 1$.

No vienādības (*) pie $n = k + 1$ iegūstam $a_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{(k+1)^2 - 1}$

No uzdevumā dotās vienādības izriet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k^2 a_k$, tātad

$$a_{k+1} = \frac{k^2 a_k}{(k+1)^2 - 1}$$

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam vajadzīgo

$$a_{k+1} = a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{k^2}{(k+1)^2-1} =$$
$$= a_1\left(1 + \frac{1}{2^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2-1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)\frac{1}{(k+1)^2-1}.$$

Pārveidojam pierādīto vienādību:

$$a_n = a_1 \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\ldots\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-1}\cdot\frac{1}{n^2-1} = a_1 \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2}{(2^2-1)(3^2-1)\ldots((n-1)^2-1)(n^2-1)}$$

Izmantojot formulu $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, pārveidojam iegūto vienādību:

$$a_n = a_1 \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot(n-1))\cdot(3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1))} = a_1 \frac{2}{n(n+1)}$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, iegūstam $a_{50} = 1000 \cdot \frac{2}{50 \cdot 51} = \frac{40}{51}$.

Citi avoti

A. Andžāns, P. Zariņš "Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi" – Rīga, Zvaigzne, 1983.

A. Andžāns, U. Kanders "Matemātiskās indukcijas metode" – Rīga, LU
Pieejams: http://www.lanet.lv/info/matind/index.html#s