INDUKTĪVI SPRIEDUMI

Teorija un piemēri 5.-9. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2020. gadā

Indukcija (no latīņu valodas 'inductio' – uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kurā secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem. Šādā veidā iegūtos spriedumus sauc par induktīviem spriedumiem.

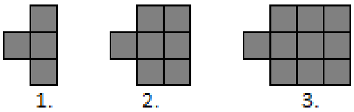
Domāšanas un spriešanas procesā tiek izteikti dažādi apgalvojumi. Tie var būt patiesi, aplami vai tādi, kuru patiesumu nav iespējams novērtēt.

Pieņemsim, ka kādam sportistam ir uzdevums aizlēkt tālumā 7 metrus. Ja viņš ir starptautiskas klases sporta meistars tāllēkšanā, tas viņam sevišķas grūtības nesagādās; ja turpretī viņš ar tāllēkšanu iepriekš nav nodarbojies, tad mēģinājums veikt uzdevumu uzreiz nevar beigties citādi kā ar neveiksmi. Lai izpildītu šo atsevišķo uzdevumu, sportists trenēsies un vispirms aizlēks tālumā 3 m, pēc tam 4 m, 5 m, 6 m, un tikai tad ķersies pie sākotnējā uzdevuma – aizlēkt 7 m tālu.

Līdzīga situācija bieži gadās arī matemātikā: lai atrisinātu kādu atsevišķu problēmu, tiek aplūkota problēmu virkne. Risinot citu pēc citas šīs virknes problēmas, galu galā izdodas saprast, kā risināt vispārīgo problēmu, un tā mēs nonākam pie interesējošās problēmas atrisinājuma.

Uzdevumu piemēri

1. Vilmārs savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 1. att. Pirmā figūra sastāv no četriem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 5 cm. Katru nākamo figūru Vilmārs iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt trīs kvadrātus, tā kā parādīts 1. att.



1. att.

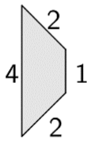
a) No cik vienādajiem kvadrātiem sastāv 10. figūra?
b) Nosaki 20. figūras perimetru!
c) Kāds ir kārtas numurs figūrai, kuras perimetrs ir 100 cm?

Atrisinājums. a) Ievērojam, ka, lai iegūtu nākamo figūru, iepriekšējai figūrai tiek pievienoti 3 kvadrāti. Pirmā figūrai ir viena kolonna, kurā ir 3 kvadrāti, otrai figūrai ir divas kolonnas, kurās ir 3 kvadrāti utt. Tātad desmitā figūra sastāvēs no $10 \cdot 3 + 1 = 31$ kvadrāta.
Ievērojam, ka pirmajai figūrai perimetru veido 10 rūtiņu malas un tās perimetrs ir 5 cm, tāpēc 1 rūtiņas malas garums ir $\frac{1}{2}$ cm. Apskatām, kā mainās katras nākamās figūras perimetrs:

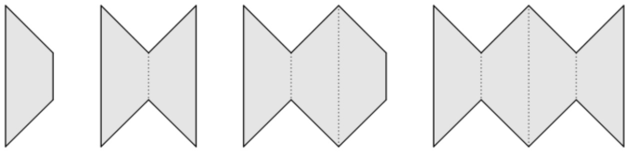
- pirmajai figūrai perimetrs ir $P_1 = 5$ cm,
- otrai figūrai perimetrs ir $P_2 = 5 + 1 = 6$ cm, jo pie pirmās figūras perimetra nāk klāt divas kvadrāta malas, kuru kopējais garums ir 1 cm,
- trešajai figūrai perimetrs ir $P_3 = 6 + 1 = 7$ cm, jo pie otrās figūras perimetra nāk klāt divas kvadrāta malas, kuru kopējais garums ir 1 cm,

Līdzīgi iegūst arī nākamo figūru perimetrus. Ievērojam, ka figūras perimetrs ir par 4 lielāks nekā figūras kārtas numurs, tas ir, $P_n = n + 4$, kur n ir figūras kārtas numurs.
Tātad **b)** 20. figūras perimetrs ir $P_{20} = 20 + 4 = 24$ cm, **c)** figūras, kuras perimetrs ir 100, kārtas numurs ir $100 - 4 = 96$.

2. Aurēlija uzzīmēja četrstūri, kura malu garumi ir 2, 1, 2 un 4 (skat. 2. att.). Malas, kuru garumi ir 1 un 4, ir paralēlas. Pēc tam viņa sāka zīmēt figūras, kas sastāv no 1; 2; 3; 4; … vienādiem dotajiem četrstūriem, katrā reizē piezīmējot klāt vienu tādu pašu četrstūri (skat. 3. att.).



2. att.



3. att.

a) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 6 četrstūri?

b) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 2019 četrstūri?

c) Cik četrstūri ir salikti kopā, ja figūras perimetrs ir 80?

d) Uzrakstīt sakarību, kas apraksta figūras perimetra garumu, ja kopā salikti n četrstūri!

Atrisinājums. Sāksim risināt uzdevumu ar **d)** gadījumu. Iegūtās figūras perimetru veido tās kreisā sāna mala (4 vienības), katra četrstūra augšējā un apakšējā mala ($2+2=4$ vienības) un vēl figūras labā sāna mala. Ja ir uzzīmēts nepāra skaits četrstūru, tad figūras labā sāna mala ir 1 vienību gara, ja pāra skaits četrstūru, tad labā sāna mala ir 4 vienības gara. Līdz ar to iegūstam sakarību perimetra aprēķināšanai:

- ja n ir nepāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 1$;
- ja n ir pāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 4$.

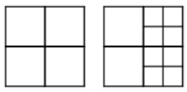
Ievērojam, ja n ir nepāra, tad figūras perimetrs vienmēr ir nepāra skaitlis, ja n ir pāra, tad – pāra skaitlis.

a) Ja kopā ir salikti 6 četrstūri jeb $n = 6$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 6 + 4 = 32$.

b) Ja kopā ir salikti 2019 četrstūri jeb $n = 2019$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 2019 + 1 = 8081$.

c) Ja figūras perimetrs ir 80 (pāra skaitlis), tad $80 = 4 + 4 \cdot n + 4$ jeb $n = (80 - 4 - 4) : 4 = 18$.

3. Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par jauku. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir jauki (4. att.).



4. att.

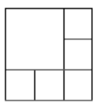
a) Pierādīt, ka skaitlis 6 ir *jauks*!

b) Pierādīt, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!

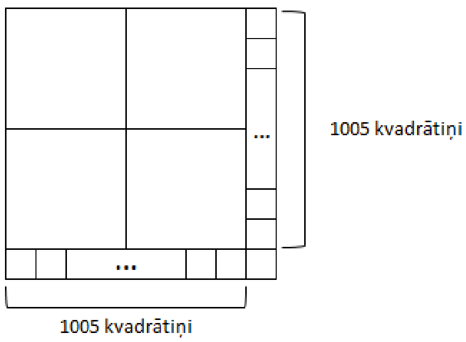
c) Pierādīt, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*!

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 5. att.

b) Skat., piemēram, 6. att. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām 1006 vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat. 6. att.). Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos mazākos kvadrātos.



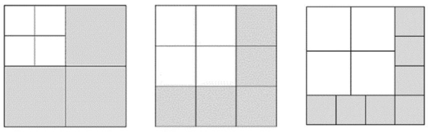
5. att.



6. att.

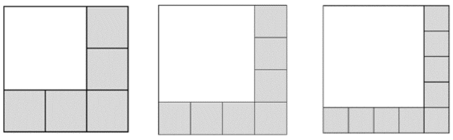
c) Šķirojam divus gadījumus.

- Ja n ir nepāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 5$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 7. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos kvadrātos (skat., piemēram, 7. att. baltos kvadrātus). Tātad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 5$ kvadrātos, līdz ar to skaitlis n ir *jauks*.



7. att.

- Ja n ir pāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 2$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 8. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Tā kā atlikusī dotā kvadrāta daļa arī ir kvadrāts, tad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 2$ kvadrātos un skaitlis n ir *jauks*.



8. att.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

4. Atrast skaitļa $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2$ pēdējo ciparu!

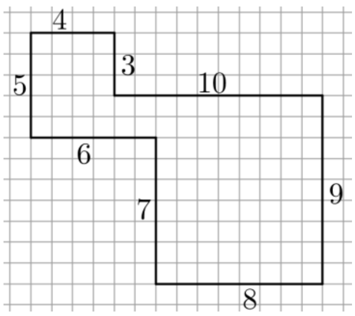
Atrisinājums. Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas summas pēdējo ciparu šādā veidā:

- $10^2 + 20^2 + \cdots + 90^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 0 un pavisam ir 9 šādi saskaitāmie.
- $1^2 + 11^2 + 21^2 + \cdots + 91^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $1^2 = 1$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $1 \cdot 10 = 10$.
- Līdzīgi $2^2 + 12^2 + 22^2 + \cdots + 92^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $2^2 = 4$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie.
- Tāpat secinām, ka arī visas pārējās saskaitāmo grupas ir 10 tādu skaitļu summas, kur visu saskaitāmo pēdējie cipari ir vienādi un visas summas pēdējais cipars ir 0.

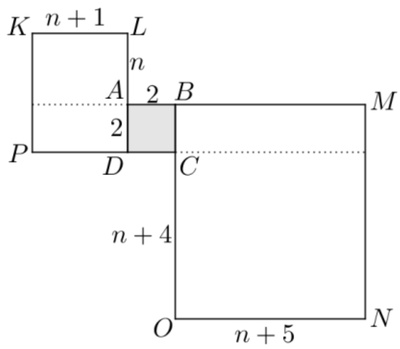
Ir 10 grupas, katrai no tām summas pēdējais cipars ir 0, tātad uzdevumā dotā skaitļa pēdējais cipars ir 0.

Tālāk dotie piemēri paredzēti 7.-9. klašu skolēniem.

5. a) Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmēt astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!
b) Pierādīt, ka katram naturālam n rūtiņu lapā, kurā rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām ir iespējams uzzīmēt astoņstūri tā, ka tā malu garumi pēc kārtas ir $n;\ n+1;\ n+2;\ n+3; n+4;\ n+5;\ n+6;\ n+7$.
Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 9. att. **b)** Parādīsim, kā katram naturālam n konstruēt astoņstūri $ALKPCONM$ (skat. 10. att.). Ja no A velk n vienības garu nogriezni uz augšu, tad turpina $n+1$ vienību horizontāli pa kreisi, tad $n+2$ – vertikāli uz leju, tad $n+3$ – horizontāli pa labi, būsim nonākuši punktā C. Velkot nogriezni no C ar garumu $n+4$ vertikāli uz leju, tad $n+5$ – horizontāli pa labi, tad $n+6$ – vertikāli uz augšu, tad $n+7$ – horizontāli pa kreisi, atgriezīsimies sākumpunktā A. Šī konstrukcija nav atkarīga no konkrētās n vērtības.



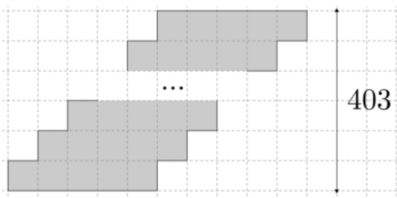
9. att.



10. att.

Piezīme. Lai atrisinātu b) gadījumu, var uzzīmēt vēl dažus astoņstūrus, izvēloties konkrētas n vērtības, un pēc tam mēģināt saskatīt, kā iegūt vispārinājumu patvaļīgam n.

6. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?
Atrisinājums. Jā, šādu daudzstūri var uzzīmēt (skat., piemēram, 11. att.).

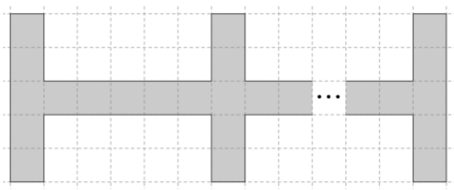


11. att.

Figūras salikšanai izmantoti 403 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas. Tātad iegūtā daudzstūra laukums ir $5 \cdot 403 = 2015$ rūtiņas. Tā kā katrs taisnstūris satur tieši četras iegūtā daudzstūra malas, tad uzzīmēts ir $4 \cdot 403 = 1612$-stūris.

Piezīmes

1. Lai atrisinātu doto uzdevumu, vispirms var mēģināt uzzīmēt kādu daudzstūri ar mazāku laukumu un mazāku malu (stūru) skaitu. Var ievērot, ka $2015 : 5 = 403$ un $1612 : 4 = 403$, no kā var secināt, ka par pamatu var ņemt četrstūri, kura laukums ir 5 rūtiņas.
2. Daudzstūri var uzzīmēt arī, piemēram, kā parādīts 12. att.



12. att.

7. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „+” vai „–” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

Atrisinājums. Tā kā visi uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir naturāli, tad rezultāts noteikti būs vesels skaitlis. Mazākais pozitīvais veselais skaitlis ir 1. Ja parādīsim, ka var iegūt vērtību 1, tad uzdevums būs atrisināts. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus skaitļus $n; n+1; n+2; n+3$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā „+” vai „–” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$$

Sagrupējam skaitļus no 1 līdz 2016 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 2017 un 2018 priekšā liekam attiecīgi „–” vai „+”:

$$\underbrace{+1-2-3+4}_{=0}\ \underbrace{+5-6-7+8}_{=0}\ +\ldots\ \underbrace{+2013-2014-2015+2016}_{=0}-2017+2018=1.$$

Līdz ar to esam parādījuši, kā salikt zīmes, lai iegūtu summu 1.

8. Pierādīt, ka $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{2019}{2020}$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Tāpēc pierādāmās vienādības kreisās puses izteiksmi var pārveidot formā:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)$$

Ievērojam, ka šajā izteiksmē parādās pretēji skaitļi, kuru summa ir 0, līdz ar to pēc vienkāršošanas paliek tikai divi saskaitāmie $\frac{1}{1}$ un $-\frac{1}{2020}$, tātad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020},$$

kas arī bija jāpierāda.

9. Vai var atrast tādus 2019 dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$, ka $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}}=1$?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Parādīsim, kā no n saskaitāmajiem var iegūt $(n+1)$ saskaitāmo. Dalām vienādības $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ abas puses ar 2:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.$$

Pēc tam abām iegūtās vienādības pusēm pieskaitām $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=1.$$

Esam ieguvuši četrus dažādus saskaitāmos, kuru summa ir 1.

Atkal dalot iegūtās vienādības abas puses ar 2 un pieskaitot $\frac{1}{2}$, palielinām saskaitāmo skaitu par 1, tas ir, iegūstam piecus dažādus saskaitāmos, kuru summa ir 1:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

Šādi turpinot, iegūsim 2019 dažādus saskaitāmos, kuru summa ir un tie visi būs dažādi.1.

Dažreiz, lai tiktu līdz interesējošajam skaitlim, mūsu apgalvojumu virknē ir jālec nevis par vienu vietu uz priekšu, bet gan par kādu citu skaitu (piemēram, par septiņām – kā to redzēsim 10. uzdevumā). Spriedumus, kur atsevišķi jāaplūko pāra un nepāra skaitļi, jau redzējām 3. uzdevumā.

10. Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

Atrisinājums. Parādīsim, ka 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Šajā summā ir ne vairāk kā piecas 13 centu pastmarkas. Aplūkosim, kāda summa atkarībā no izmantoto 13 centu pastmarku skaita būtu jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām.

13 centu pastmarku skaits	*Summa, kas apmaksāta ar 13 centu pastmarkām*	*Summa, kas jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām*
0	0	71
1	13	58
2	26	45
3	39	32
4	52	19
5	65	6

Nevienā no variantiem atlikusī summa nav 7 daudzkārtnis, tātad šo summu nav iespējams apmaksāt ar 7 centu pastmarkām. Tātad 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Pierādīsim, ka visas summas, kas ir lielākas nekā 71 cents, ir iespējams samaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Ievērojam, ja varam apmaksāt n centus, tad, pievienojot klāt vienu 7 centu pastmarku, varēsim apmaksāt arī $n+7$ centus. Tātad mums jāparāda, ka var apmaksāt 72, 73, 74, 75, 76, 76 un 78 centus (skat. tabulā zemāk).

Summa	**Kā apmaksāt**	**Kādas summas var apmaksāt ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$)**	**Kādas summas var apmaksāt**
72	$1 \cdot 7 + 5 \cdot 13$	$72 + 7n$	79; 86; 93; ...
73	$3 \cdot 7 + 4 \cdot 13$	$73 + 7n$	80; 87; 94; ...
74	$5 \cdot 7 + 3 \cdot 13$	$74 + 7n$	81; 88; 95; ...
75	$7 \cdot 7 + 2 \cdot 13$	$75 + 7n$	82; 89; 96; ...
76	$9 \cdot 7 + 1 \cdot 13$	$76 + 7n$	83; 90; 97; ...
77	$11 \cdot 7$	$77 + 7n$	84; 91; 98; ...
78	$6 \cdot 13$	$78 + 7n$	85; 92; 99; ...

Piezīmes

1. Lielāko summu, ko nevar apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām, var iegūt pārbaudot summas, sākot ar 1, 2, 3, 4 utt. centiem, kamēr nonākam pie vajadzīgās summas (pamatojot, ka lielākas summas varēs apmaksāt).
2. Lielākās summas atrašanai var izmantot arī faktu: ja a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lielākais skaitlis, ko nevar izteikt ar a un b, ir $ab - a - b$.