SAKARĪBAS TRIJSTŪROS UN VIENĀDI TRIJSTŪRI

Teorija un piemēri 8.-9. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2023./2024. m. g.

Sakarības trijstūros

Trijstūra nevienādība. Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa un lielāks nekā abu pārējo malu garumu starpības.

Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.
Trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas.

Par **vienādsānu trijstūri** sauc trijstūri, kura divas malas ir vienāda garuma.

Vienādsānu trijstūra īpašības:
- vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi;
- vienādsānu trijstūrī mediāna, kas novilkta pret pamatu, ir arī šī trijstūra augstums un bisektrise.

Par **vienādmalu trijstūri** sauc trijstūri, kura visas malas ir vienāda garuma. Vienādmalu trijstūri sauc arī par regulāru trijstūri.

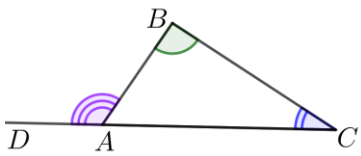
Vienādmalu trijstūra īpašības:
- vienādmalu trijstūrī visi leņķi ir vienādi un $60°$ lieli;
- vienādmalu trijstūrī katra bisektrise ir arī mediāna un augstums.

Teorēma. Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.

Lietderīgi zināt šādus apgalvojumus:
- ja trijstūrī viens leņķis ir plats, tad abi pārējie leņķi ir šauri;
- taisnleņķa trijstūra šauro leņķu summa ir $90°$;
- taisnleņķa trijstūra katetes, kas atrodas pret $30°$ leņķi, garums ir vienāda ar pusi no hipotenūzas garuma.

Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.

Teorēma. Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis, tas ir, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$ (skat. 1. att.).



1. att.

Vienādi trijstūri

Divus trijstūrus sauc par **vienādiem**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie pilnīgi sakrīt.

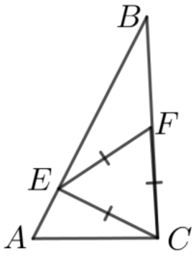
Trijstūru vienādības pazīmes
- Trijstūru vienādības pazīme **pēc trim malām** (mmm) – ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām, tad trijstūri ir vienādi.
- Trijstūru vienādības pazīme **pēc divām malām un leņķa starp tām** ($m\ell m$) – ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām, tad trijstūri ir vienādi.
- Trijstūru vienādības pazīme **pēc malas un tās pieleņķiem** ($\ell m\ell$) – ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem, tad trijstūri ir vienādi.

Uzdevumu piemēri

1. Trijstūrī ABC leņķis ABC ir $30°$ liels. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC punkts F tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts F ir malas BC viduspunkts!

Atrisinājums. Tā kā trijstūris CEF ir vienādmalu, tad $\sphericalangle FCE = \sphericalangle CEF = \sphericalangle EFC = 60°$ (skat. 2. att.).

Tad $\sphericalangle BFE = 180° - 60° = 120°$ (blakusleņķu īpašība) un $\sphericalangle BEF = 180° - 30° - 120° = 30°$, tātad ΔEBF ir vienādsānu un $BF = EF = FC$ jeb punkts F ir malas BC viduspunkts.

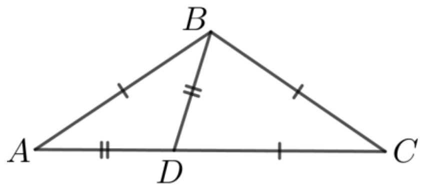


2. att.

2. Dots trijstūris ABC, uz tā malas AC atlikts punkts D tā, ka $AD = DB$. Vēl zināms, ka $AB = BC = CD$. Aprēķināt leņķa BAC lielumu!

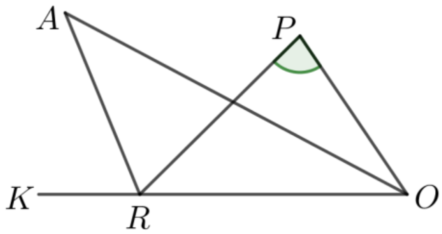
Atrisinājums. Apzīmēsim $\sphericalangle BAC = x$ (skat. 3. att.). Tā kā ΔABC ir vienādsānu, tad arī $\sphericalangle BCA = x$; arī ΔADB ir vienādsānu, tāpēc $\sphericalangle ABD = x$. Tālāk $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DBA = 2x$, jo $\sphericalangle CDB$ ir ΔADB ārējais leņķis. Tā kā $BC = CD$, tad arī ΔBCD ir vienādsānu, tāpēc $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = 2x$.

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$, tāpēc, apskatot trijstūra BCD leņķus, iegūstam, ka $2x + 2x + x = 180°$, tātad $5x = 180°$ un $x = 36°$. Līdz ar to $\sphericalangle BAC = 36°$.



3. att.

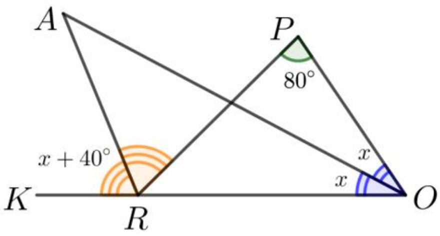
3. Nogrieznis AO sadala leņķi POR divos vienādos leņķos (skat. 4. att.), nogrieznis AR sadala leņķi KRP divos vienādos leņķus un $\sphericalangle RPO = 80°$. Aprēķināt leņķa RAO lielumu!



4. att.

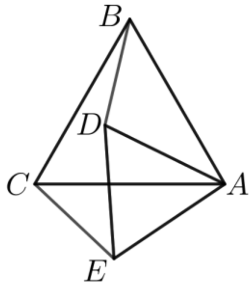
Atrisinājums. Apzīmēsim $\sphericalangle AOP = x$, tad arī $\sphericalangle AOR = x$ (skat. 5. att.), jo AO sadala leņķi POR divos vienādos leņķos.

Tā kā $\sphericalangle KRP$ ir trijstūra RPO ārējais leņķis, tad pēc iepriekš uzrakstītās īpašības $\sphericalangle KRP = 2x + 80°$. Tā kā AR sadala $\sphericalangle KRP$ divos vienādos leņķos, tad $\sphericalangle ARK = x + 40°$. Savukārt $\sphericalangle ARK$ ir trijstūra RAO ārējais leņķis, tāpēc tā lielums izsakāms arī kā $\sphericalangle ARK = x + \sphericalangle RAO$. No iegūtajām vienādībām izriet, ka $x + 40° = x + \sphericalangle RAO$, tātad $\sphericalangle RAO = 40°$.



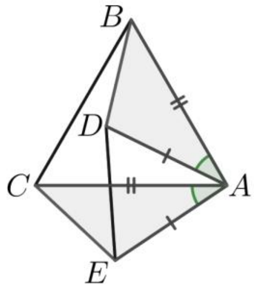
5. att.

4. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir $60°$ lieli (skat. 6. att.). Pierādīt, ka $BD = CE$!



6. att.

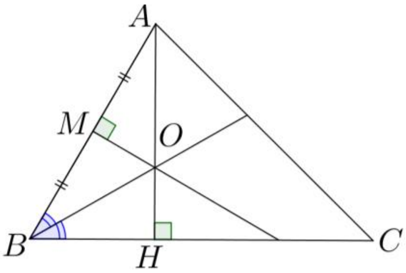
Atrisinājums. Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $AE = AD$ un $AC = AB$. Ievērojam, ka $\sphericalangle EAC = 60° - \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$ (skat. 7. att.). Tāpēc $\Delta EAC = \Delta DAB$ pēc pazīmes $m\ell m$, un no tā izriet, ka $EC = DB$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.



7. att.

5. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā O. Aprēķināt $\sphericalangle ABC$!

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle BAO = \alpha$ (skat. 8. att.). Ievērojam, ka $\Delta AMO = \Delta BMO$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $BM = MA$ (pēc vidusperpendikula definīcijas), $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO = 90°$ un mala MO kopīga. Tad $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = \alpha$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. No bisektrises definīcijas izriet, ka $\sphericalangle ABC = 2\alpha$. No ΔABH iekšējo leņķu summas iegūstam, ka $\alpha + 2\alpha + 90° = 180°$ jeb $\alpha = 30°$. Tātad $\sphericalangle ABC = 2\alpha = 60°$.

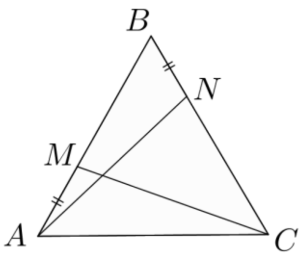


8. att.

6. Uz vienādmalu trijstūra ABC malām AB un BC attiecīgi atlikti punkti M un N tā, ka $MB + BN = AC$. Pierādīt, ka $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = 60°$.

Atrisinājums. Trijstūris ABC ir regulārs, tāpēc $AC = AB$. No nogriežņu garuma īpašībām iegūstam, ka $AB = AM + MB$. Tā kā $AC = MB + BN$, tad $AM + MB = MB + BN$ jeb $AM = BN$ (skat. 9. att.). Tāpēc $\Delta ABN = \Delta CAM$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $AM = BN$, $\sphericalangle ABN = \sphericalangle CAM = 60°$ un $AB = AC$. Tad $\sphericalangle BAN = \sphericalangle ACM$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Līdz ar to $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCN = \sphericalangle ACB = 60°$.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī pamatojot, ka $MB = NC$ un $\Delta MBC = \Delta NCA$.



9. att.

8. Uz taisna leņķa KLM malām atlikti punkti X un Y (katrs uz savas malas); uz tā bisektrises ņemts tāds punkts O, ka $\sphericalangle XOY = 90°$. Pierādīt, ka $OX = OY$!

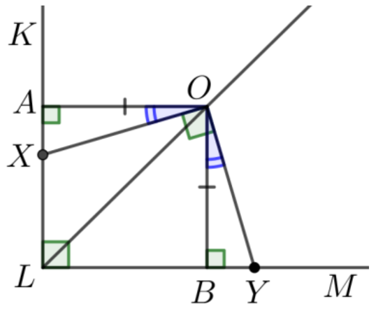
Atrisinājums. Novelkam no punkta O perpendikulus OA un OB pret leņķa KLM malām KL un LM (skat. 10. att.). Tā kā punkts O atrodas uz leņķa bisektrises, tad attālumi no O līdz leņķa malām ir vienādi, tātad $OA = OB$. Četrstūra $LAOB$ trīs leņķu lielumi ir 90°, tātad arī $\sphericalangle AOB = 90°$. Ievērojam, ka

- $\sphericalangle XOA = \sphericalangle AOY - \sphericalangle XOY = \sphericalangle AOY - 90°$;
- $\sphericalangle YOB = \sphericalangle AOY - \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOY - 90° = \sphericalangle XOA$.

Tad $\Delta XAO = \Delta YBO$ pēc pazīmes $\ell m\ell$, jo $\sphericalangle XAO = \sphericalangle YBO = 90°$, $OA = OB$, $\sphericalangle XOA = \sphericalangle YOB$.

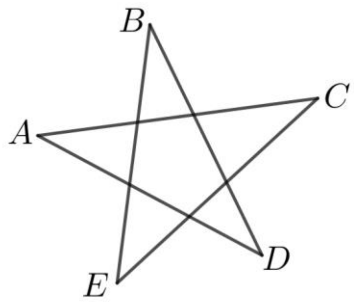
Līdz ar to $OX = OY$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas.

Piezīme. Risinājumā tika izmantota bisektrises īpašība – katrs leņķa bisektrises punkts atrodas vienādos attālumos no leņķa malām.



10. att.

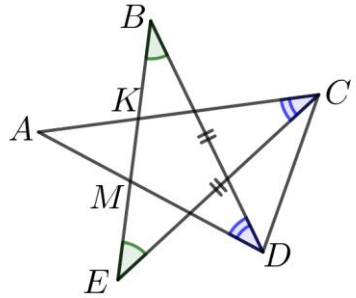
9. Dota piecstaru zvaigzne (skat. 11. att.), kurā $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADB$ un $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BEC$. Zināms arī, ka $BD = CE$. Pierādīt, ka $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$!



11. att.

Atrisinājums. Apzīmēsim ar K un M attiecīgi malu AC un AD krustpunktus ar malu BE (skat. 12. att.). No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka trijstūri CEK un DBM ir vienādi pēc pazīmes $\ell m\ell$. Tāpēc $CK = DM$ un $\sphericalangle CKE = \sphericalangle DMB$ kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi. Tad arī $\sphericalangle AKE = \sphericalangle AMB$ kā vienādu leņķu blakusleņķi. Esam ieguvuši, ka trijstūrim AMK malas MK pieleņķi ir vienādi; tā kā trijstūrī pretī vienādiem leņķiem ir vienādas malas, tad $AK = AM$.

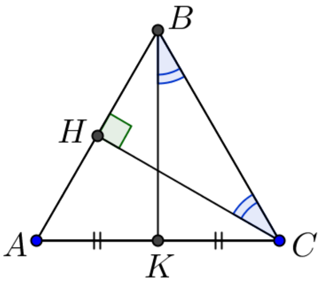
Izmantojot iegūtās sakarības, iegūstam $AC = AK + CK = AM + DM = AD$, tātad arī trijstūris ACD ir vienādsānu. Tāpēc $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$.



12. att.

9. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums CH un mediāna BK. Zināms, ka $CH = BK$ un $\sphericalangle HCB = \sphericalangle KBC$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādmalu trijstūris!

1. atrisinājums. Tā kā $BK = HC$, $\sphericalangle KBC = \sphericalangle HCB$ un BC – kopīga mala (skat. 13. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CHB = 90°$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Tātad BK ir gan augstums, gan mediāna, līdz ar to ΔABC ir vienādsānu trijstūris ($AB = BC$). Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu, iegūstam $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}AC \cdot BK$. Tā kā $CH = BK$, tad arī $AB = AC$. Tātad $AB = AC = BC$ un ΔABC ir vienādmalu trijstūris.



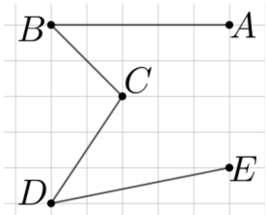
13. att.

2. atrisinājums. Tā kā $BK = HC$, $\sphericalangle KBC = \sphericalangle HCB$ un BC – kopīga mala (skat. 13. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CHB = 90°$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros) un BK ir augstums no virsotnes B pret malu AC. Tā kā $AK = KC$, $\sphericalangle AKB = \sphericalangle BKC = 90°$ un BK – kopīga mala, tad $\Delta AKB = \Delta BCK$ pēc pazīmes $m\ell m$. No kā izriet, ka $\sphericalangle ABK = \sphericalangle KBC$. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam

- no ΔHCB: $\sphericalangle HBC + \sphericalangle BCH + \sphericalangle CHB = 180°$;
  $2 \cdot \sphericalangle ABK + \sphericalangle ABK + 90° = 180°$;
  $3 \cdot \sphericalangle ABK = 90°$ jeb $\sphericalangle ABK = 30°$;
- no ΔABK: $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle ABK - \sphericalangle AKB = 180° - 30° - 90° = 60°$;
- no ΔABC: $\sphericalangle BCA = 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = 180° - 60° - 2 \cdot 30° = 60°$.

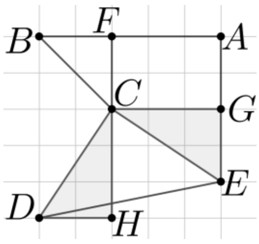
Esam ieguvuši, ka katrs trijstūra ABC leņķis ir $60°$, tātad ΔABC ir vienādmalu trijstūris.

10. Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti A, B, C, D, E un novilkti nogriežņi AB, BC, CD un DE (skat. 14. att.). Salīdzināt $\sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle CDE$!



14. att.

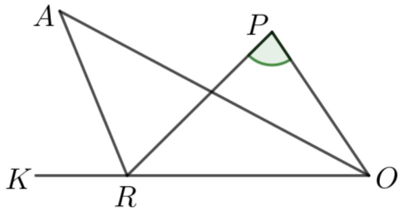
Atrisinājums. Ievērojam, ka trijstūris BFC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris (skat. 15. att.), tāpēc $\sphericalangle ABC = 45°$. Trijstūri DHC un EGC ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, jo $DH = EG$, $\sphericalangle DHC = \sphericalangle EGC = 90°$, $CH = GC$. Tātad $CD = CE$ un $\sphericalangle DCH = \sphericalangle ECG$ kā atbilstošās malas un leņķi vienādos trijstūros.
Iegūstam, ka $\sphericalangle DCE = \sphericalangle DCH + \sphericalangle HCE = \sphericalangle ECG + \sphericalangle HCE = 90°$. Tātad arī trijstūris DCE ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $\sphericalangle CDE = 45°$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 45°$.



15. att.

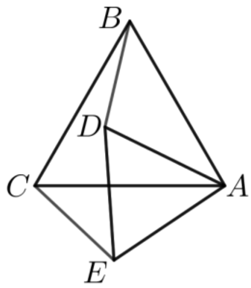
Uzdevumi

1. Trijstūrī ABC leņķis ABC ir $30°$ liels. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC punkts F tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts F ir malas BC viduspunkts!
2. Dots trijstūris ABC, uz tā malas AC atlikts punkts D tā, ka $AD = DB$. Vēl zināms, ka $AB = BC = CD$. Aprēķināt leņķa BAC lielumu!
3. Nogrieznis AO sadala leņķi POR divos vienādos leņķos (skat. 16. att.), nogrieznis AR sadala leņķi KRP divos vienādos leņķus un $\sphericalangle RPO = 80°$. Aprēķināt leņķa RAO lielumu!



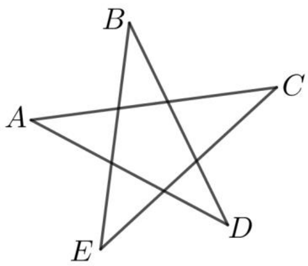
16. att.

4. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir $60°$ lieli (skat. 17. att.). Pierādīt, ka $BD = CE$!



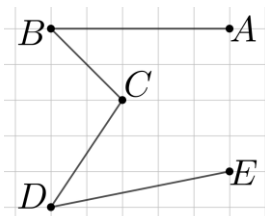
17. att.

5. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā O. Aprēķināt $\sphericalangle ABC$!
6. Uz vienādmalu trijstūra ABC malām AB un BC attiecīgi atlikti punkti M un N tā, ka $MB + BN = AC$. Pierādīt, ka $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = 60°$!
8. Uz taisna leņķa KLM malām atlikti punkti X un Y (katrs uz savas malas); uz tā bisektrises ņemts tāds punkts O, ka $\sphericalangle XOY = 90°$. Pierādīt, ka $OX = OY$!
9. Dota piecstaru zvaigzne (skat. 18. att.), kurā $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADB$ un $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BEC$. Zināms arī, ka $BD = CE$. Pierādīt, ka $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$!



18. att.

9. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums CH un mediāna BK. Zināms, ka $CH = BK$ un $\sphericalangle HCB = \sphericalangle KBC$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādmalu trijstūris!
10. Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti A, B, C, D, E un novilkti nogriežņi AB, BC, CD un DE (skat. 19. att.). Salīdzināt $\sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle CDE$!



19. att.