# Polinoma sakņu noteikšana un to izmantošana augstāku pakāpju vienādojumu risināšanā

*Teorijas materiāls 10.-12. klasei Novada matemātikas olimpiādei 2021./2022. mācību gadā*

Šajā materiālā apskatīsim, kā atrast polinoma ar veseliem koeficientiem racionālās saknes un kā to izmantot augstāku pakāpju vienādojumu risināšanā.

Par $n$-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kur $x$ ir mainīgais, $n$ ir vesels nenegatīvs skaitlis un $a_n, \ \ldots, \ a_1, \ a_0$ – patvaļīgi reāli skaitļi ($a_n \neq 0$).

Ja koeficienti $a_n, \ldots, \ a_1, \ a_0$ ir veseli skaitļi, tad polinomu sauc par **polinomu ar veseliem koeficientiem**.

Mainīgā vērtību, ar kuru polinoma vērtība ir nulle, sauc par **polinoma sakni**.

## Polinoma racionālās saknes

Dažreiz (vai arī dažos uzdevumos) nav nepieciešams atrast visas polinoma saknes, bet ir jāatrod tikai viena vai dažas no tām. Nākamo teorēmu var izmantot, lai noskaidrotu polinoma racionālās saknes.

**Teorēma.** Ja daļa $\frac{p}{q}$ ($p$ un $q$ ir veseli skaitļi) nav saīsināma un tā ir sakne polinomam $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ar veseliem koeficientiem $a_n, \ \ldots, \ a_1, \ a_0$ ($a_n \neq 0$), tad $q$ ir skaitļa $a_n$ dalītājs un $p$ ir skaitļa $a_0$ dalītājs.

Teorēmas pierādījumu var atrast [2]. Šī teorēma ļauj atrast polinoma (arī atbilstošā algebriskā vienādojuma) racionālās saknes ar pārbaudes palīdzību. Racionālu skaitļu vispār ir bezgalīgi daudz, bet teorēma ļauj no tiem atlasīt galīgu skaitu "kandidātu", kurus pēc tam pārbauda, ievietojot polinomā.
Lai atrastu saknes polinomam, kura koeficients pie augstākās pakāpes ir 1, ērti lietot šādu secinājumu no 1. teorēmas.

**Secinājums.** Ja polinoma visi koeficienti ir veseli skaitļi un koeficients pie locekļa ar augstāko pakāpi ir 1, tad šī polinoma visas racionālās saknes ir veseli skaitļi, kas ir brīvā locekļa dalītāji.

**Piemēri**

**1.** Atrast polinoma $P(x) = x^3 - 5x + 4$ veselās saknes.
**Atrisinājums.** Tā kā koeficients pie $x^3$ ir 1, tad polinoma veselās saknes varbūt tikai brīvā locekļa 4 dalītāji, tas ir, saknes varētu būt $\pm 1$; $\pm 2$; $\pm 4$. Aprēķinot atbilstošās polinoma vērtības, pārbaudīsim, kuri no šiem skaitļiem ir polinoma saknes:

- $P(1) = 1^3 - 5 \cdot 1 + 4 = 0$, tātad $x = 1$ ir polinoma sakne;
- $P(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1) + 4 = 8 \neq 0$, tātad $x = -1$ nav polinoma sakne;
- $P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 4 = 2 \neq 0$, tātad $x = 2$ nav polinoma sakne;
- $P(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 4 = 6 \neq 0$, tātad $x = -2$ nav polinoma sakne;
- $P(4) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 4 \neq 0$, tātad $x = 4$ nav polinoma sakne;
- $P(-4) = (-4)^3 - 5 \cdot (-4) + 4 \neq 0$, tātad $x = -4$ nav polinoma sakne.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka polinomam ir tikai viena vesela sakne $x = 1$.

**2.** Atrast polinoma $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ racionālās saknes.
**Atrisinājums.** Tā kā koeficients pie $x^3$ ir 2 un brīvais loceklis ir 6, tad iespējamās $q$ vērtības ir $\pm 1$; $\pm 2$ un iespējamās $p$ vērtības ir $\pm 1$; $\pm 2$; $\pm 3$; $\pm 6$. Tātad $\frac{p}{q}$ vērtības jeb polinoma racionālās saknes varētu būt $\pm 1$; $\pm 2$; $\pm 3$; $\pm 6$; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{3}{2}$. Aprēķinot atbilstošās polinoma vērtības, pārbaudīsim, kuri no šiem skaitļiem ir polinoma saknes:

- $P(1) = 2 + 1 - 13 + 6 = 4 \neq 0$, tātad $x = 1$ nav polinoma sakne;
- $P(-1) = -2 + 1 + 13 + 6 \neq 0$, tātad $x = -1$ nav polinoma sakne;
- $P(2) = 16 + 4 - 26 + 6 = 0$, tātad $x = 2$ ir polinoma sakne;

- $P(-2) = -16 + 4 + 26 + 6 \neq 0$, tātad $x = -2$ nav polinoma sakne;
- $P(3) = 54 + 9 - 39 + 6 \neq 0$, tātad $x = 3$ nav polinoma sakne;
- $P(-3) = -54 + 9 + 39 + 6 = 0$, tātad $x = -3$ ir polinoma sakne;
- $P(6) = 2 \cdot 216 + 36 - 78 + 6 \neq 0$, tātad $x = 6$ nav polinoma sakne;
- $P(-6) = -2 \cdot 216 + 36 + 78 + 6 \neq 0$, tātad $x = -6$ nav polinoma sakne;
- $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{13}{2} + 6 = 0$, tātad $x = \frac{1}{2}$ ir polinoma sakne;
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{13}{2} + 6 \neq 0$, tātad $x = -\frac{1}{2}$ nav polinoma sakne;
- $P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{27}{8} + \frac{9}{4} - \frac{39}{2} + 6 = \frac{27+9}{4} - 19{,}5 + 6 = 9 - 13{,}5 \neq 0$, tātad $x = \frac{3}{2}$ nav polinoma sakne;
- $P\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-27+9}{4} - 19{,}5 + 6 \neq 0$, tātad $x = -\frac{3}{2}$ nav polinoma sakne.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka polinomam ir trīs racionālas saknes $x = 2$, $x = -3$ un $x = \frac{1}{2}$.

Polinoma kādas saknes uzminēšana ļoti noder augstāku pakāpju vienādojumu risināšanā, jo ļauj vienādojuma izteiksmi sadalīt reizinātājos. Ja $x = a$ ir polinoma $P(x)$ sakne, tad polinomu var pārveidot formā $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, kur polinoma $Q(x)$ pakāpe ir mazāka nekā polinoma $P(x)$ pakāpe. Lai atrastu polinomu $Q(x)$, dotais polinoms $P(x)$ ir jādala ar binomu $(x - a)$, tas ir, $Q(x) = P(x) : (x - a)$.
Tālāk apskatīsim, kā dalīt divus polinomus.

## Polinomu dalīšana

Lai uzsvērtu, kāda ir polinoma pakāpe, lieto pierakstu $P_n(x)$, kur apakšējais indekss apzīmē polinoma pakāpi.

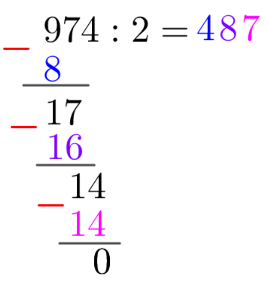
Par divu polinomu $Q_m(x)$ un $P_n(x)$ dalījumu sauc tādu polinomu $S_k(x)$, kuru reizinot ar $P_n(x)$ iegūst polinomu $Q_m(x)$, tas ir, $Q_m(x) : P_n(x) = S_k(x)$, ja $P_n(x) \cdot S_k(x) = Q_m(x)$.

Taču ne katriem diviem polinomiem dalījums eksistē. Dalīt polinomu $Q_m(x)$ ar $P_n(x)$ var tikai tad, ja $m \geq n$, tas ir, ja dalāmā polinoma pakāpe $m$ nav mazāka kā dalītāja polinoma pakāpe $n$, turklāt $k = m - n$.

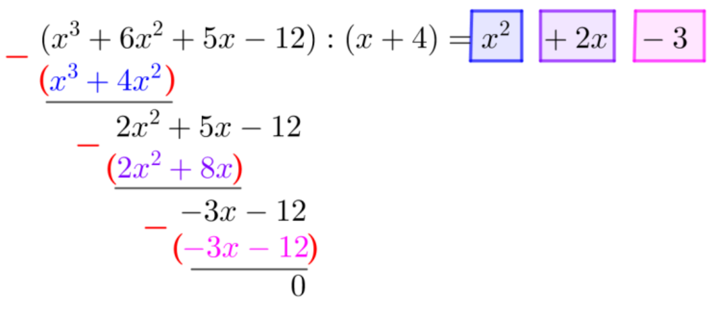
Ja $m \geq n$ un, polinomus dalot, iegūst polinomu $S_k(x)$ un dalīšanas atlikumu $R(x)$, tad dalīšanas rezultātu var izteikt šādi:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_k(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)} \quad \text{vai arī} \quad Q_m(x) = P_n(x) \cdot S_k(x) + R(x).$$

Polinomu dalīšanā var saskatīt analoģijas ar skaitļu dalīšanu rakstos (skat. 1. att.).



*1. att.*



*2. att.*

Apskatām piemēru (skat. 2. att.), kā dalīt polinomu $x^3 + 6 + 5x - 12$ (dalāmais) ar polinomu $x + 4$ (dalītājs).
Polinoma dalīšanas ar polinomu algoritms:

1) izdalām dalāmā augstākās pakāpes locekli $x^3$ un dalītāja augstākās pakāpes locekli $x$, tas ir, $x^3 : x = x^2$ un tas ir dalījuma pirmais saskaitāmais;
2) reizinām iegūto saskaitāmo $x^2$ ar dalītāju $x + 4$, rezultātu $x^3 + 4x^2$ rakstām zem dalāmā;
3) no dalāmā atņemam iegūto polinomu un iegūstam jaunu polinomu $2x^2 + 5x - 12$;
4) apskatot iegūto polinomu, turpinām dalīšanu, tas ir, izdalām $2x^2$ ar $x$ un iegūstam dalījuma otro saskaitāmo $2x$;

5) reizinām $2x$ ar dalītāju $x+4$ un rezultātu $2x^2+8x$ rakstām zem jaunā polinoma;
6) atņemam $(2x^2+5x-12)-(2x^2+8x)=-3x-12$;
7) izdalām $-3x$ ar $x$ un iegūstam dalījuma trešo saskaitāmo $(-3)$;
8) reizinām $(-3)$ ar dalītāju $x+4$ un rezultātu $(-3x-12)$ rakstām zem jaunā polinoma;
9) atņemam $(-3x-12)-(-3x-12)=0$.

Polinomu dalīšana ir pabeigta un esam ieguvuši, ka dalījums ir $x^2+2x-3$ un atlikums ir 0.
Polinomu dalīšana ir beigusies tajā brīdī, kad pēc atņemšanas iegūts polinoms, kura pakāpe ir mazāka nekā dalītāja polinoma pakāpe.

Apskatīsim, kā var iegūt polinomu dalījumu vēl citā veidā, tas ir, ekvivalenti pārveidojot algebrisko daļu un izmantojot daļu īpašību $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.
Ekvivalenti pārveidosim daļu:

$$\frac{x^3+6x^2+5x-12}{x+4}=\frac{x^2(x+4)+2x^2+5x-12}{x+4}=\frac{x^2(x+4)}{x+4}+\frac{2x^2+5x-12}{x+4}=$$
$$=x^2+\frac{2x(x+4)-3x-12}{x+4}=x^2+\frac{2x(x+4)}{x+4}+\frac{-3x-12}{x+4}=x^2+2x+\frac{-3(x+4)}{x+4}=x^2+2x-3$$

**Piemēri**

**3.** Izdalīt polinomu $6x^3+x^2+7x+6$ ar polinomu $2x^2-x+3$.

**1. atrisinājums**

$$\begin{array}{l} -\underline{\begin{array}{l}(6x^3+x^2+7x+6):(2x^2-x+3)=3x+2\\ 6x^3-3x^2+9x\end{array}}\\ \qquad -\underline{\begin{array}{r}4x^2-2x+6\\ 4x^2-2x+6\end{array}}\\ \qquad\qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

**2. atrisinājums.** Ekvivalenti pārveidosim daļu:

$$\frac{6x^3+x^2+7x+6}{2x^2-x+3}=\frac{3x(2x^2-x+3)+4x^2-2x+6}{2x^2-x+3}=\frac{3x(2x^2-x+3)}{2x^2-x+3}+\frac{4x^2-2x+6}{2x^2-x+3}=$$
$$=3x+\frac{2(2x^2-x+3)}{2x^2-x+3}=3x+2$$

**4.** Izdalīt polinomu $2x^4+5x^3-6x^2+x-4$ ar polinomu $x^2-2x+2$.

**1. atrisinājums**

$$\begin{array}{l} -\underline{\begin{array}{l}(2x^4+5x^3-6x^2+x-4):(x^2-2x+2)=2x^2+9x+8\\ 2x^4-4x^3+4x^2\end{array}}\\ \qquad -\underline{\begin{array}{l}9x^3-10x^2+x-4\\ 9x^3-18x^2+18x\end{array}}\\ \qquad\qquad -\underline{\begin{array}{l}8x^2-17x-4\\ 8x^2-16x+16\end{array}}\\ \qquad\qquad\qquad\quad -x-20\end{array}$$

**2. atrisinājums.** Ekvivalenti pārveidosim daļu:

$$\frac{2x^4+5x^3-6x^2+x-4}{x^2-2x+2}=\frac{2x^2(x^2-2x+2)+9x^3-10x^2+x-4}{x^2-2x+2}=$$
$$=2x^2+\frac{9x(x^2-2x+2)+8x^2-17x-4}{x^2-2x+2}=2x^2+9x+\frac{8(x^2-2x+2)-x-20}{x^2-2x+2}=$$
$$=2x^2+9x+8+\frac{-x-20}{x^2-2x+2}$$

**Vingrinājumi**

Atrodi polinomu dalījumu divos dažādos veidos!

**V1.** $(2x^3 - x^2 - 5x + 4) : (x - 3)$

**V2.** $(x^5 + 5x^3 + 6) : (x^2 + 2x + 3)$

**V3.** $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x - 2)$

**V4.** $(x^4 - x^2 + 3) : (x^2 - 3)$

**V5.** $(x^3 + x^2 - 4x + 2) : (x - 1)$

Tagad apskatām, kā var risināt augstāku pakāpju vienādojumus.
Risinot augstāku pakāpju vienādojumus, cenšas uzminēt kādu vienādojuma sakni $a$, pēc tam sadalīt atbilstošo polinomu reizinātājos un risināt vienādojumu, katru reizinātāju pielīdzinot nullei. Tādā veidā tiek pazemināta vienādojuma pakāpe.

**Piemēri**

**5.** Atrisināt vienādojumu $x^3 - 3x + 2 = 0$.

**1. atrisinājums.** Uzminam, ka $x = 1$ ir vienādojuma sakne, jo $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.
Lai sadalītu vienādojuma kreisās puses izteiksmi reizinātājos, dalām to ar binomu $x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
-\,(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 \\
\quad \underline{x^3 - x^2} \\
\qquad -\,x^2 - 3x + 2 \\
\qquad\quad \underline{x^2 - x} \\
\qquad\qquad -\,-2x + 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Tātad $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$ un doto vienādojumu varam pārrakstīt formā:

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0.$$

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x - 1 = 0$ vai $x^2 + x - 2 = 0$. Lineārā vienādojuma sakne ir $x = 1$ un kvadrātvienādojuma saknes ir $x = -2$ un $x = 1$.
Līdz ar to dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = x_2 = 1$ un $x_3 = -2$.
*Piezīme.* No teorēmas secinājuma varēja secināt, ka veselās saknes varētu būt tikai skaitļi $\pm 1$ un $\pm 2$.

**2. atrisinājums.** Uzminam, ka $x = 1$ ir vienādojuma sakne, jo $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.
Lai sadalītu vienādojuma kreisās puses izteiksmi reizinātājos, izmantosim grupēšanas paņēmiena ideju, ņemot vērā, ka viens no reizinātājiem būs binoms $x - 1$:

$$x^3 - 3x + 2 = x^2(x - 1) + x^2 - 3x + 2 = x^2(x - 1) + x(x - 1) - 2x + 2 =$$

$$= x^2(x - 1) + x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2).$$

Tātad doto vienādojumu varam pārrakstīt formā:

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0.$$

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x - 1 = 0$ vai $x^2 + x - 2 = 0$. Lineārā vienādojuma sakne ir $x = 1$ un kvadrātvienādojuma saknes ir $x = -2$ un $x = 1$.
Līdz ar to dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = x_2 = 1$ un $x_3 = -2$.

**6.** Atrisināt vienādojumu $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

**Atrisinājums.** Uzminam, ka $x = 1$ ir vienādojuma sakne, jo $1 - 3 + 1 + 3 - 2 = 0$.

Lai sadalītu vienādojuma kreisās puses izteiksmi reizinātājos, dalām to ar binomu $x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2) : (x - 1) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
-\underline{x^4 - x^3} \\
\quad -\; -2x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
\quad\quad \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
\quad\quad\quad -\; -x^2 + 3x - 2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-x^2 + x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad -\; 2x - 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{2x - 2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Tātad doto vienādojumu varam pārveidot formā:

$$(x - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0.$$

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x - 1 = 0$ vai $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Lineārā vienādojuma sakne ir $x = 1$, bet trešās pakāpes vienādojumu risinām, piemēram, ar grupēšanas paņēmienu:

$$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0,$$
$$(x - 2)(x^2 - 1) = 0.$$

Tātad $x = 2$ un $x = \pm 1$.

Līdz ar to dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$ un $x_4 = -1$.

*Piezīmes*

1. No teorēmas secinājuma var secināt, ka veselās saknes varētu būt tikai skaitļi $\pm 1$ un $\pm 2$.
2. Dotā vienādojuma kreiso pusi var sadalīt reizinātājos, ņemot vērā uzminēto sakni $x = 1$:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = x^3(x - 1) - 2x^3 + x^2 + 3x - 2 =$$
$$= x^3(x - 1) - 2x^2(x - 1) - x^2 + 3x - 2 = x^3(x - 1) - 2x^2(x - 1) - x(x - 1) + 2x - 2 =$$
$$= x^3(x - 1) - 2x^2(x - 1) - x(x - 1) + 2(x - 1) =$$
$$(x - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2).$$

3. Trešās pakāpes vienādojumu $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ atrisināšanā varēja arī nelietot grupēšanas paņēmienu, bet risināt līdzīgi kā iepriekš, tas ir, ievērojot, ka $x = 1$ ir šī vienādojuma sakne, un tad šo vienādojumu, dalot ar binomu $x - 1$.

**Vingrinājumu atbildes**

**V1.** $\frac{2x^3 - x^2 - 5x + 4}{x - 3} = 2x^2 + 5x + 10 + \frac{34}{x - 3}$

**V2.** $\frac{x^5 + 5x^3 + 6}{x^2 + 2x + 3} = x^2 - 2x^2 + 6x - 6 + \frac{-6x + 24}{x^2 + 2x + 3}$

**V3.** $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + x + 2 + \frac{5}{x - 2}$

**V4.** $\frac{x^4 - x^2 + 3}{x^2 - 3} = x^2 + 2 + \frac{9}{x^2 - 3}$

**V5.** $\frac{x^3 + x^2 - 4x + 2}{x - 1} = x^2 + 2x - 2$

---

***Izmantotā literatūra***

***1.*** *D. Kriķis, K. Šteiners. Algebra 10.-12. klasei, 1. daļa. Zvaigzne ABC, 1998.*

***2.*** *A. Andžāns. Algebra 10.-12. klasei, 2. daļa. Zvaigzne ABC, 1998.*

*Papildu uzdevumus treniņam var atrast grāmatā D. Kriķis, K. Šteiners, V. Ziobrovskis. Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa. Zvaigzne ABC, 1996. (12. nodaļa)*