Svēršanas uzdevumi

Teorija un piemēri, gatavojoties Novada olimpiādei 2018./2019. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Novada matemātikas olimpiādē viens uzdevums 5.-12. klasei būs par tēmu "Svēršanas uzdevumi".

Svēršanas uzdevumos galvenokārt izmantosim sviras svarus. Svariem ir divi svaru kausi. Svēršanā **neizmantosim** atsvarus. Svari **neparādīs** ķermeņu masu. Mēs varēsim tikai redzēt, vai abi svaru kausi ir līdzsvarā.

Aplūkosim uzdevumus, kuros, izmantojot doto informāciju, galvenokārt tiks prasīts atrast vienu (vai vairākus) no pārējiem objektiem atšķirīgu objektu. Šo uzdevumu atrisinājumi lielākoties balstās uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām objektu grupēšanas metodēm.

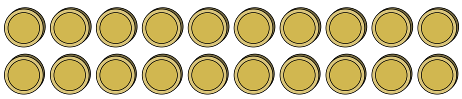
Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums "Kā…?", tad atrisinājumā ir jāapskata, kā rīkoties **pilnīgi visās** iespējamajās situācijās, lai panāktu prasīto rezultātu. Nepietiek apskatīt tikai vienu vai dažus "labvēlīgākos" gadījumus.

Uzdevumu piemēri

1. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20 : 2 = 10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas. (Skat. 1. att.) Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.
No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.
Analoģiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.
Līdz ar to ar $10 + 9 + 9 = 28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.

vieglākas
smagākas



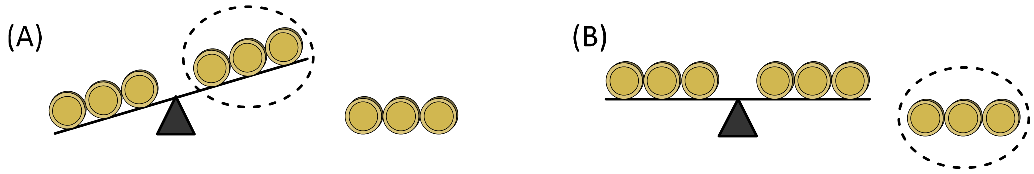
1. att.

2. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja zināms, ka visu īsto monētu masas ir vienādas?

Atrisinājums. Sadalām šīs monētas trīs kaudzītēs pa 3 monētām katrā. Skaidrs, ka viltotā monēta atrodas vienā no šīm kaudzītēm. Pirmajā svēršanā salīdzinām divas no šīm kaudzītēm.

(A) Ja viena kaudzīte ir vieglāka nekā otra, tad viltotā (vieglākā) monēta ir šajā kaudzītē (skat. 2. att. (A)).

(B) Ja abām kaudzītēm ir vienāda masa, tad viltotā monēta ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē (skat. 2. att. (B)).

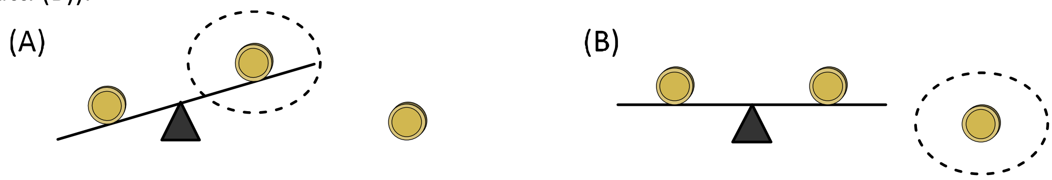


2. att.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai no šīs kaudzītes.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 3. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē netika svērta (skat. 3. att. (B)).



3. att.

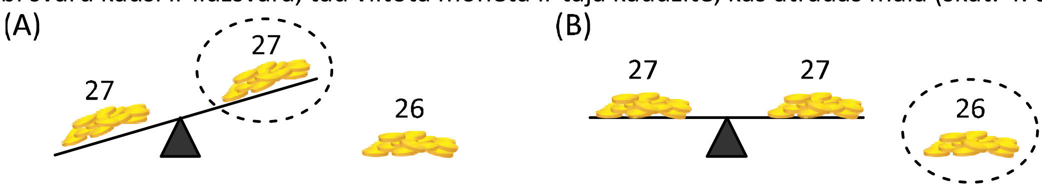
3. Zināms, ka no 80 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām ir vienāda masa. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas trīs kaudzītēs: divas kaudzītes pa 27 monētām katrā un viena kaudzīte, kurā ir 26 monētas.

Pirmajā svēršanā salīdzinām kaudzītes, kurās ir pa 27 monētām. Iespējami divi gadījumi.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 4. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas atradās malā (skat. 4. att. (B)).



4. att.

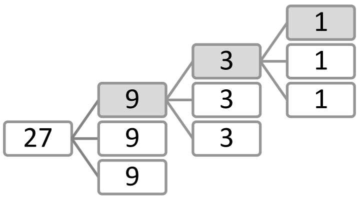
Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Tātad atlikušajās trīs svēršanās no 27 monētām jāatrod viltotā. (Ja viltotā monēta atradās kaudzītē, kurā bija 26 monētas, tad šai kaudzītei pievienojot vienu "īsto" monētu no citas kaudzītes, arī iegūstam kaudzīti, kurā ir 27 monētas.)

Sadalām 27 monētas trīs vienādās kaudzītēs pa 9 monētām katrā un otrajā svēršanā salīdzināsim savā starpā divas no šīm kaudzītēm. Atkārtojot tādus pašus spriedumus kā pēc pirmās svēršanas, atrodam to deviņu monētu kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.

Pirms trešās svēršanas atkal kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta sadalām trīs vienādās kaudzītēs pa trim monētām katrā un atkal salīdzinām divas no šīm kaudzītēm. Nosakām, kurā no šīm trīs monētu kaudzītēm atrodas viltotā monēta.

Ceturtajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē palika malā (netika svērta).

(Shematiski monētu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 5. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.)



5. att.

4. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

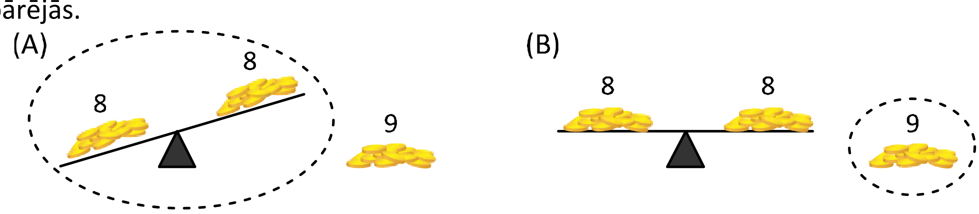
Atrisinājums. Uzliekam uz katra svaru kausa 8 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svariem (skat. 6. att. (A)). Otrajā svēršanā salīdzinām vieglākā kausa 8 monētas ar jebkurām 8 malā palikušajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “smagākā” kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “vieglākā” kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta palikusi malā (skat. 6. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinām malā palikušās 9 monētas ar jebkurām 9 jau svērtajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz leju, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka nekā pārējās.
- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz augšu, tad atšķirīgā monēta ir smagāka nekā pārējās.

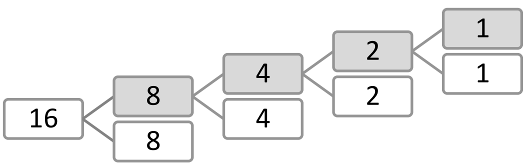


6. att.

5. Grozā ir 16 akmeņi – 15 parasti, 1 radioaktīvs. Tie visi izskatās vienādi. Ir dota ierīce, ar kuras palīdzību var noteikt, vai starp apskatāmajiem akmeņiem ir vai nav radioaktīvais akmens (ar ierīci var pārbaudīt arī vairākus akmeņus reizē, bet ierīce nenorāda, kurš tieši ir radioaktīvais akmens). Kā ar 4 pārbaudēm atrast radioaktīvo akmeni?

Atrisinājums. Sākumā sadalām visus 16 akmeņus divās kaudzītēs pa 8 akmeņiem katrā un pārbaudām vienu kaudzīti. Neatkarīgi no pārbaudes rezultāta, varēs pateikt, kurā kaudzītē ir meklētais akmens. Pēc tam to kaudzīti, kurā ir radioaktīvais akmens, atkal sadala divās daļās, pa 4 akmeņiem katrā un pārbauda vienu no tām. Tālāk kaudzīti, kurā ir meklētais akmens, atkal sadala divās daļās pa 2 akmeņiem katrā un atkal pārbauda vienu no tām. Beidzot pārbauda vienu no diviem akmeņiem, no kuriem viens ir radioaktīvais akmens, un noskaidro, kurš tieši tas ir.

(Shematiski akmeņu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 7. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas radioaktīvais akmens.)



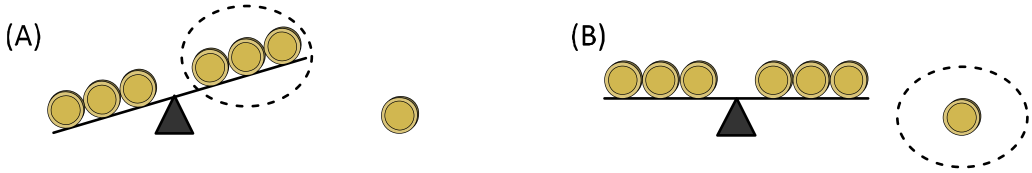
7. att.

6. No 7 monētām vienai monētai masa ir mazāka nekā pārējām. Kā ar divām svēršanām var noskaidrot, kura ir vieglākā monēta?

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 3 monētas.

(A) Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta atrodas uz "vieglākā" svaru kausa (skat. 8. att. (A)). Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa vienai monētai no "vieglākā" kausa.
- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir tā, kas palika malā.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta atrodas uz "vieglākā" svaru kausa.

(B) Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir tā, kas nebija uz svariem (skat. 8. att. (B)).



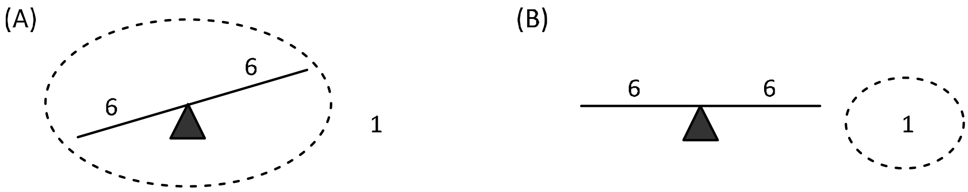
8. att.

7. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā, izmantojot divas svēršanas, noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 6 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svariem (skat. 9. att. (A)). Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa trīs monētām no "vieglākā" kausa.
- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "smagākā" kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "vieglākā" kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kas nebija uz svariem (skat. 9. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinot to ar kādu no svērtajām monētām, noskaidrojam, vai tā ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās monētas.



9. att.

Jautājumi paškontrolei

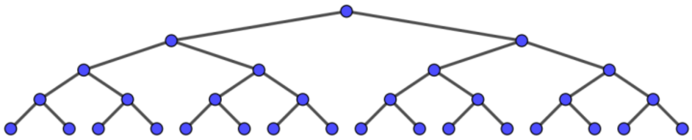
1) Cik svēršanas būtu nepieciešamas, lai atrastu pašu vieglāko monētu, ja dotas 30 pēc ārējā izskata vienādas monētas un katrā svaru kausā drīkst likt pa vienai monētai? Vai vari izdomāt vispārīgāku uzdevumu?
2) Kas kopīgs 2.-4. uzdevuma atrisinājumam? Cik svēršanas būtu nepieciešamas, ja 2. uzdevumā būtu dotas nevis 9, bet 25 monētas? Vai pats arī vari izmainīt monētu skaitu, lai iegūtu jaunu uzdevumu, kas risināms līdzīgā veidā?
3) Ar ko 5. uzdevums atšķiras no pārējiem? Vai vari izdomāt līdzīgu uzdevumu?
4) Kas kopīgs 6. un 7. uzdevuma atrisinājumam?
5) Kas kopīgs 4. un 7. uzdevumam? Vai 4. uzdevumu var atrisināt citādi?

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

8. Doti 16 akmeņi ar dažādām masām. Pierādiet, ka ar 18 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni!

Atrisinājums. Lai atrastu vissmagāko akmeni, ir nepieciešamas 15 svēršanas – rīkojamies pēc klasiskās olimpiskās shēmas, tas ir, sākumā sadalām visus akmeņus pāros un katrā pārī atrodam smagāko akmeni (8 svēršanas), tad šos 8 atrastos akmeņus sadalām četros pāros un katrā no tiem atrodam smagāko akmeni (4 svēršanas), pēc tam atrastos četrus akmeņus sadalām divos pāros un katrā pārī atrodam smagāko akmeni (2 svēršanas), visbeidzot salīdzinām pēdējos divus akmeņus (1 svēršana) (skat. 10. att.). Tātad ar 15 svēršanām jau esam atraduši pašu smagāko akmeni. Vēl jāatrod otrs smagākais akmens.

Otrs smagākais akmens var būt tikai kāds no tiem četriem akmeņiem, kas tika salīdzināts ar pašu smagāko akmeni. Smagākais akmens no četriem akmeņiem atrodams ar 3 svēršanām, piemēram, salīdzinām divus akmeņus (1 svēršana), smagāko atstājam svaros un to salīdzinām ar vienu no nesvērtajiem akmeņiem (1 svēršana), atkal svaros atstājot smagāko, tad šo pašu darbību atkārtojam vēlreiz (1 svēršana). Tas nozīmē, ka ar $15 + 3 = 18$ svēršanām var atrast pašu smagāko un otro smagāko akmeni no 16 akmeņu kaudzes.



10. att.

9. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas bumbas, kuru masas ir 1000 g, 1001 g, 1002 g, 1004 g un 1007 g. Doti arī elektroniskie svari, kas rāda masu gramos. Kā ar trīs svēršanām atrast bumbu, kuras masa ir 1000 g?

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz svariem liekam divas bumbas un noskaidrojam to kopējo masu. Otrajā svēršanā uz svariem liekam citas divas, vēl nesvērtas bumbas. Katrā no šīm divām svēršanām iegūstam vienu no tabulā parādītajiem svaru rādījumiem.

$2001 = 1000 + 1001$	$2006 = 1002 + 1004$
$2002 = 1000 + 1002$	$2007 = 1000 + 1007$
$2003 = 1001 + 1002$	$2008 = 1001 + 1007$
$2004 = 1000 + 1004$	$2009 = 1002 + 1007$
$2005 = 1001 + 1004$	$2011 = 1004 + 1007$

- Ja abās svēršanās nav iegūts neviens no izceltajiem rezultātiem, tad 1000 g bumba ir tā, kas netika svērta.
- Ja vienā no svēršanām ir iegūts kāds no izceltajiem rezultātiem, tad tas nozīmē, ka 1000 g bumba atrodas attiecīgajā pārī. Trešajā svēršanā nosveram vienu no šī pāra bumbām. Ja svari rāda 1000 g, tad meklētā bumba ir uz svariem, ja citu skaitli, tad 1000 g bumba ir otra šī pāra bumba.

10. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g un 4 g. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot katras monētas masu?

Atrisinājums. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām (1 svēršana).

- Ja pirmajā svēršanā svari atrodas līdzsvarā, tad šādu svaru stāvokli izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Ceturtajā svēršanā salīdzinām šīs smagākās monētas savā starpā, tas ir, noskaidrojam, kura no monētām ir 3 g, kura – 4 g. Monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 4 g monētu, sver 1 g, bet tā monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 3 g monētu, sver 2 g.
- Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad ir divas iespējas: vai nu $1 + 2 < 3 + 4$, vai $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no smagākā pāra – smagākā no tām ir 4 g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas – vieglākā no tām ir 1 g. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas monētas: vieglākā no tām ir 2 g, bet smagākā – 3 g.

11. Četru pēc ārējā izskata vienādu monētu masas veido ģeometrisko progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko monētu, veicot divas svēršanas uz sviru svariem bez atsvariem!

Atrisinājums. Apzīmējam monētu masas ar a, aq, aq^2, aq^3, kur $q > 1$. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa novietojam divas monētas. Pamatosim, ka smagākā monēta noteikti atradīsies kausā, kas nosveras uz leju. Iespējami trīs gadījumi:

- $aq^3 + aq^2 > aq + a$, jo $aq^3 > aq$ un $aq^2 > a$;
- $aq^3 + aq > aq^2 + a$, jo $aq^3 > aq^2$ un $aq > a$;
- $aq^3 + a > aq + aq^2$, jo, ekvivalenti pārveidojot, iegūstam patiesu nevienādību $q^3 - q^2 - q + 1 > 0$ jeb $(q+1)(q-1)^2 > 0$.

Tātad esam pamatojuši, ka smagākā monēta atrodas tajā kausā, kas nosveras uz leju. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no šī kausa un atrodam smagāko. Līdz ar to ar divām svēršanām esam atraduši smagāko monētu.

Jautājumi paškontrolei

1) Cik svēršanas būtu nepieciešamas smagākā un otra smagākā akmens atrašanai, ja 8. uzdevumā būtu doti nevis 16, bet 14 akmeņi?
2) Kas kopīgs 1. un 8. uzdevumam? Vai 1. uzdevuma atrisināšanai var lietot 8. uzdevuma risināšanas idejas?
3) Kas kopīgs 9.-11. uzdevuma atrisinājumam?
4) Vai noteikti smagākā monēta ir smagāka nekā trīs vieglākās monētas kopā? Atrodi pretpiemēru!

Citi avoti:

A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons “Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi”, Rīga, 1999. Pieejams: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2019/01/Gailitis_uc_Kartosanas-un-meklesanas-uzdevumi_1999.pdf

Svēršanas uzdevumi

1. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?
2. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja zināms, ka visu īsto monētu masas ir vienādas?
3. Zināms, ka no 80 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām ir vienāda masa. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?
4. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)
5. Grozā ir 16 akmeņi – 15 parasti, 1 radioaktīvs. Tie visi izskatās vienādi. Ir dota ierīce, ar kuras palīdzību var noteikt, vai starp apskatāmajiem akmeņiem ir vai nav radioaktīvais akmens (ar ierīci var pārbaudīt arī vairākus akmeņus reizē, bet ierīce nenorāda, kurš tieši ir radioaktīvais akmens). Kā ar 4 pārbaudēm atrast radioaktīvo akmeni?
6. No 7 monētām vienai monētai masa ir mazāka nekā pārējām. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, kura ir vieglākā monēta?
7. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā, izmantojot 2 svēršanas, noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

8. Doti 16 akmeņi ar dažādām masām. Pierādiet, ka ar 18 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni!
9. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas bumbas, kuru masas ir 1000 g, 1001 g, 1002 g, 1004 g un 1007 g. Doti arī elektroniskie svari, kas rāda masu gramos. Kā ar trīs svēršanām atrast bumbu, kuras masa ir 1000 g?
10. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g un 4 g. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot katras monētas masu?
11. Četru pēc ārējā izskata vienādu monētu masas veido ģeometrisko progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko monētu, veicot divas svēršanas uz sviru svariem bez atsvariem!