Skaitļu pieraksts

Teorija un piemēri, gatavojoties Novada olimpiādei 2016./2017. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Novada matemātikas olimpiādē viens uzdevums 5.-8. klasei būs par tēmu "Skaitļu pieraksts".

5.-6. klase

Risinot uzdevumus jāzina atšķirība starp skaitli un ciparu, jāzina, kas ir naturāls skaitlis, jāprot salīdzināt divus naturālus skaitļus, novērtēt izteiksmes vērtību. Citus uzdevumu piemērus var meklēt http://nms.lu.lv/biblioteka/uzdevumu-krajumi/ pieejamās grāmatās, kurās dots uzdevumu sadalījums pa tēmām.

Atceries! Cipari ir simboli, kurus izmantojam skaitļu pierakstīšanai. Ir desmit cipari: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Līdzīgi kā no burtiem mēs veidojam vārdus, tā no cipariem mēs veidojam skaitļus. Piemēram, divciparu skaitlis 14, viencipara skaitlis 7.

Atceries! Naturāli skaitļi ir skaitļi, kas rodas skaitīšanas rezultātā: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; … Iegaumē, ka mazākais naturālais skaitlis ir 1, skaitlis 0 nav naturāls skaitlis.

Piemēri

1. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 2, 3, 7 un 8. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?
   Atrisinājums
   Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, 3, 7 vai 8, tad trīs reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 6, 9, 1 vai 4, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.
2. Atrodi vislielāko piecciparu skaitli, kuram ceturtais cipars (desmitu cipars) ir lielāks nekā piektais cipars (vienu cipars), trešais cipars lielāks nekā ceturtā un piektā cipara summa, otrais cipars ir lielāks nekā trešā, ceturtā un piektā cipara summa, bet pirmais cipars ir lielāks nekā visu pārējo ciparu summa!
   Atrisinājums
   Meklētais piecciparu skaitlis ir 95210. Pamatosim, ka vēl lielāku skaitli nevar iegūt. Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, tas ir, 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tūkstošu cipars nevar būt lielāks kā 5, jo jau $8-6=2$, ko nevar izteikt kā trīs dažādu ciparu summu. Tātad, lai atrastu lielāko piecciparu skaitli, tūkstošu ciparam jābūt 5 un tas nozīmē, ka simtu, desmitu un vienu cipars attiecīgi var būt tikai 2, 1 un 0. Līdz ar to lielākais piecciparu skaitlis, kam izpildās prasītās īpašības, ir 95210.
3. Vai ir tāds naturāls četrciparu skaitlis ar šādu īpašību: ja skaitļa pēdējo ciparu pārceļ uz skaitļa sākumu, tad iegūst četrciparu skaitli, kas ir 6 reizes mazāks nekā sākotnējais skaitlis?
   Atrisinājums
   Nē, nav tāds skaitlis. Apzīmēsim sākotnējo četrciparu skaitli ar x, bet iegūto četrciparu skaitli ar y. Tādā gadījumā $6\cdot y=x$. Tā kā vienādojuma kreisajā pusē iegūstam pāra skaitli, tad x ir pāra skaitlis. Tātad x pēdējais cipars ir pāra cipars. Tas nevar būt 0, jo tad y nebūtu četrciparu skaitlis. Tātad četrciparu skaitļa x pēdējā cipara mazākā iespējamā vērtība ir 2 un tas nozīmē, ka y pirmais cipars nav mazāks 2. Pat tādā gadījumā, ja mēs izvēlētos pašu mazāko četrciparu skaitli ar šādu īpašību, tas ir, skaitli 2000, to reizinot ar 6, jau iegūst piecciparu skaitli, bet x ir četrciparu skaitlis, tātad tas nav iespējams.

4. Līdzīgi kā rallijā katrai mašīnai piešķir sacensību numuru, tā Ziemassvētku vecītis arī saviem ātrajiem rikšotājiem ziemeļbriežiem ir piešķīris numurus.
   Ziemeļbriedis Rūdolfs zina, ka
   1) viņa numurs ir sešciparu skaitlis, kas vienādi lasāms gan no kreisās, gan no labās puses;
   2) tas dalās ar 3;
   3) nosvītrojot pirmo un pēdējo ciparu, iegūst četrciparu skaitli, kura visi pirmreizinātāji ir vienādi ar 11.
   Kāds numurs var būt piešķirts Rūdolfam?
   Atrisinājums
   Sāksim risinājumu ar 3) nosacījumu. Tā kā $11 \cdot 11 = 121$ ir trīsciparu skaitlis un $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 14641$ ir piecciparu skaitlis, tad vienīgā iespēja, ka iegūts četrciparu skaitlis $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$. Tad, izmantojot 1) nosacījumu, meklēto sešciparu skaitli varam pierakstīt $\overline{a1331a}$. No 2) nosacījuma šim skaitlim jādalās ar 3. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tātad $a + 1 + 3 + 3 + 1 + a = 8 + 2 \cdot a$ jādalās ar 3. Ja cipars a ir 0, 1, 3, 4, 6, 7 vai 9, tad $8 + 2 \cdot a$ nedalās ar 3; ja $a = 2$, tad $8 + 2 \cdot a = 12$, kas dalās ar 3; ja $a = 5$, tad $8 + 2 \cdot a = 18$, kas dalās ar 3; ja $a = 8$, tad $8 + 2 \cdot a = 24$, kas dalās ar 3. Tātad Rūdolfam var būt piešķirts vai nu numurs 213312, vai 513315, vai 813318.

Ievēro! Ja skaitlī nav zināmi kādi cipari, tos var apzīmēt ar burtiem, taču, lai nerastos pārpratumi, tādā gadījumā virs skaitļa tiek vilkta horizontāla svītra, piemēram, trīsciparu skaitlis $\overline{xyz}$, četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$.

5. Pierādi, ka, uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā šos pašus divciparu skaitļus sareizinot!
   Atrisinājums
   Pirmo divciparu skaitli apzīmēsim ar $\overline{ab}$, bet otro – ar $\overline{cd}$. Uzrakstot šos skaitļus vienu otram galā, iegūsim skaitli $\overline{abcd}$, kas ir lielāks nekā četrciparu skaitlis, kuram pēdējie divi cipari ir nulles, tas ir, $\overline{ab00}$. Skaitli, kuram pēdējie divi cipari ir nulles varam izteikt kā $\overline{ab00} = \overline{ab} \cdot 100$, bet divciparu skaitļa reizinājums ar trīsciparu skaitli ir lielāks nekā divu divciparu skaitļu reizinājums $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\overline{abcd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

7.-8. klase

Ievēro! Divciparu skatli varam izteikt kā $\overline{ab} = 10a + b$, trīsciparu skaitli – kā $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ utt. Piemēram, $2016 = 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 1 \cdot 6$.

Piemēri

6. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un tā ciparu reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodi visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība!
   Atrisinājums
   Apzīmējot meklētos divciparu skaitļus ar $\overline{ab}$, iegūstam vienādojumu $(a + b) + ab = 10a + b$ jeb $ab - 9a = 0$. Iznesot a pirms iekavām, iegūstam $a \cdot (b - 9) = 0$. Reizinājums ir vienāds ar 0, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar 0. Tā kā $a \neq 0$, jo tas ir divciparu skaitļa pirmais cipars, tad $b - 9 = 0$ jeb $b = 9$, bet a var būt jebkurš nenulles cipars. Tātad minētā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, tas ir, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.
7. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa iegūtais skaitlis noteikti dalās ar 23?
   Atrisinājums
   Jā, noteikti dalās. Apzīmējam sākotnējo skaitli ar $\overline{abc}$. Skaitlim $2 \cdot \overline{abc}$ pierakstīt galā $\overline{abc}$ ir tas pats, kas skaitli $2 \cdot \overline{abc}$ reizināt ar 1000 un tad tam pieskaitīt $\overline{abc}$. Tātad iegūstam skaitli $2 \cdot \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 2001 \cdot \overline{abc}$. Tā kā reizinātājs 2001 dalās ar 23 ($2001 : 23 = 87$), tātad arī iegūtais skaitlis $2001 \cdot \overline{abc}$ noteikti dalās ar 23.

8. Dots, ka A un B ir naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A. Zināms, ka $X-Y$ dalās ar 91. Pierādi, ka $A=B$.

Atrisinājums

Apzīmējam $A=\overline{ab}$, $B=\overline{cd}$, tad $X=\overline{abcd}$, bet $Y=\overline{cdab}$. Līdz ar to

$$X-Y=\overline{abcd}-\overline{cdab}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}-\overline{cd}\cdot 100-\overline{ab}=99\overline{ab}-99\overline{cd}=99\cdot(\overline{ab}-\overline{cd}).$$

No uzdevumā dotā $99\cdot(\overline{ab}-\overline{cd})$ dalās ar 91. Tā kā skaitļu 99 un 91 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $(\overline{ab}-\overline{cd})$ dalās ar 91. Ievērojam, ka $\overline{ab}-\overline{cd}\leq 89$ (89 iegūst, ja atņem no lielākā divciparu skaitļa mazāko divciparu skaitli). Tāpēc vienīgā iespēja, ka $\overline{ab}-\overline{cd}=0$ jeb $\overline{ab}=\overline{cd}$, kas arī bija jāpierāda.

9. Četrciparu skaitlim pārlika ciparus citā secībā. Pierādi, ka sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

Atrisinājums

Apzīmējam četrciparu skaitli ar $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$. Vienādības labajā pusē sadalām saskaitāmos $\overline{abcd}=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$. Uzrakstām citu četrciparu skaitli, kas sastāv no šiem pašiem cipariem un līdzīgā veidā sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu četru ciparu summa $(a+b+c+d)$. Aprēķinot abu šo skaitļu starpību, ievērojam, ka saskaitāmie $(a+b+c+d)$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās 9, jo katrs saskaitāmais satur kādu no reizinātājiem 9, 99, 999 un, ja viens no reizinātājiem dalās 9, tad arī reizinājums dalās ar 9. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 9, tad arī aprēķinātā starpība dalās ar 9.