Simetrija spēlēs

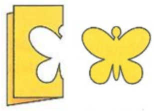
Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2018./2019. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Atklātajā matemātikas olimpiādē viens uzdevums 5.-12. klasei būs par tēmu "Simetrija spēlēs".
Skat. arī A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997; nodaļu "Invarianti spēlēs". Pieejams: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/mat_intvarianti.pdf

Katrs spēlētājs sāk spēli ar mērķi uzvarēt. Lai uzvarētu, ir labi balstīties uz spēles stratēģiju, tas ir, uz paņēmienu kopumu, kas balstās uz loģiskiem spriedumiem un nosaka katra spēlētāja rīcību spēles laikā.
Raksturīgākā pieļautā kļūda šādos uzdevumos ir viena vai dažu atsevišķu gadījumu apskatīšana, neņemot vērā visus iespējamos spēlētāju gājienus. Izstrādājot uzvarošo stratēģiju, tajā ir jāiekļauj visas iespējamās situācijas.
Katru no tālāk dotajām spēlēm spēlēs divi spēlētāji. Gājienus tie izdarīs pamīšus. Spēlētājs nedrīkst izlaist gājienu. Katrā šajā spēlē ir jānoskaidro, kurš no abiem spēlētājiem – pirmais spēlētājs (tas, kurš izdara pirmo gājienu) vai otrais spēlētājs (tas, kurš izdara otro gājienu) – vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kādus gājienus veic pretinieks.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums "Kurš vienmēr var uzvarēt?", tad atrisinājumā ir jāapskata, kā rīkoties **pilnīgi visās** iespējamajās situācijās, lai panāktu prasīto rezultātu. Nepietiek apskatīt tikai vienu vai dažus "labvēlīgākos" gadījumus.

Jau no sākumskolas zināms, ja figūru var pārlocīt (īstenībā vai iztēlē) tā, lai tās abas puses sakrīt (skat. 1. att.), tad tādu figūru sauc par simetrisku figūru. Locījuma līniju (taisni) sauc par simetrijas asi. Šo simetriju var saistīt arī ar spoguļattēlu. (Skat., piemēram, mācību grāmatu J. Mencis (sen.), J. Mencis (jun.) Matemātika 4. klasei.)



1. att.

Uzdevumu piemēri

1. Vienā horizontālā rindā savilktas **a)** 9 svītriņas (skat. 2. att.); **b)** 10 svītriņas (skat. 3. att.). Divi spēlētāji pamīšus izdara gājienus. Vienā gājienā var par krustiņu pārvērst

- vai nu vienu svītriņu,
- vai arī divas blakus esošas svītriņas.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, tas ir, nevar atbilstoši noteikumiem, svītriņu pārvērst par krustiņu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

– – – – – – – – –

2. att.

– – – – – – – – – –

3. att.

Atrisinājums. Šajā spēlē gan a), gan b) gadījumā vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.
Aprakstīsim, kā jārīkojas pirmajam spēlētājam, lai noteikti uzvarētu.
a) Pirmajam spēlētājam savā pirmajā gājienā par krustiņu jāpārvērš vidējā svītriņa (skat. 4. att.).

– – – – + – – – –

4. att.

Nākamos gājienus pirmais spēlētājs izdara simetriski pretinieka tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret vidējo krustiņu. Piemēram, ja pretinieks savā gājienā par krustiņu pārvērš vienu svītriņu, pirmais spēlētājs to pašu izdara ar simetrisko svītriņu otrā pusē no vidējā krustiņa (skat. 5. att.).

− + − − + − − + −

5. att.

Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

b) Pirmajam spēlētājam savā pirmajā gājienā par krustiņu jāpārvērš divas vidējās svītriņas (skat. 6. att.).

− − − − + + − − − −

6. att.

Nākamos gājienus pirmais spēlētājs izdara simetriski pretinieka tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret diviem vidējiem krustiņiem. Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

2. Uz galda ir divas konfekšu kaudzes. Divi spēlētāji pamīšus ņem konfektes. Vienā gājienā viens spēlētājs drīkst paņemt jebkuru konfekšu skaitu no vienas kaudzes un apēst. Zaudē tas spēlētājs, kuram vairs nav ko paņemt. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja sākumā **a)** abās konfekšu kaudzēs ir pa 10 konfektēm; **b)** vienā kaudzē ir 12 konfektes, bet otrā – 10 konfektes?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

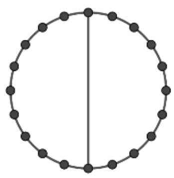
Katrā savā gājienā otrajam spēlētājam jāpaņem tikpat daudz konfekšu, cik tikko savā gājienā ir paņēmis pirmais spēlētājs, tikai otrajam spēlētājam konfektes jāņem no citas kaudzes, tas ir, ne no tās kaudzes, no kuras konfektes tikko paņēma pirmais spēlētājs. Ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.

b) Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs. Pirmajam spēlētājam jāpanāk, lai pēc katra viņa gājiena abās kaudzēs paliktu vienāds skaits konfekšu.

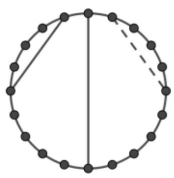
Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jāpaņem 2 konfektes no tās kaudzes, kurā ir 12 konfektes. Pēc šī gājiena katrā kaudzē paliek 10 konfektes. Katrā savā nākamajā gājienā pirmajam spēlētājam jāpaņem tikpat daudz konfekšu, cik tikko savā gājienā ir paņēmis otrais spēlētājs, tikai pirmajam spēlētājam konfektes jāņem no citas kaudzes. Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

3. Uz riņķa līnijas atlikti 20 punkti (skat. 7. att.). Divi spēlētāji pamīšus veic gājienus. Vienā gājienā spēlētājs drīkst savienot jebkurus divus punktus ar nogriezni, kas nekrusto jau novilktos nogriežņus. Zaudē tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

7. att.



8. att.



9. att.

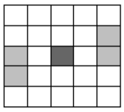
Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jānovelk nogrieznis tā, lai katrā pusē no šī nogriežņa paliktu 9 punkti (skat. 8. att.). Katrā savā nākamajā gājienā pirmajam spēlētājam jānovelk nogrieznis simetriski otrā spēlētāja tikko novilktajam nogrieznim attiecībā pret 8. att. novilkto nogriezni (skat., piemēram, 9. att., kur parādīts viens iespējamais pirmo trīs gājienu piemērs). Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 7.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

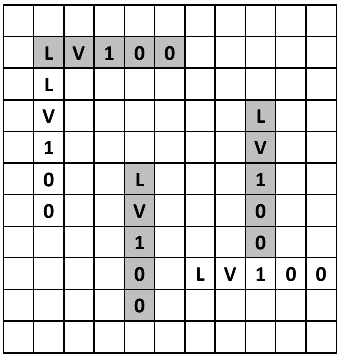
Atceries!
Punktus A un A_1 sauc par **simetriskiem attiecībā pret taisni** t, ja nogrieznis AA_1 ir perpendikulārs taisnei t un taisne t iet caur nogriežņa AA_1 viduspunktu.
Punktus A un A_1 sauc par **simetriskiem attiecībā pret punktu** O, ja punkts O ir nogriežņa AA_1 viduspunkts.

4. Divi spēlētāji izvieto žetonus kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Gājienus spēlētāji izdara pamīšus, turklāt vienā gājienā drīkst izvietot vai nu 1 žetonu vienā rūtiņā, vai arī 2 žetonus pa vienam divās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā, ja tās ir tukšas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?
Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.
Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jānovieto 1 žetons tā, lai tas atrastos kvadrāta centrā (skat. 10. att.)
Lai arī kur otrais spēlētājs novieto savu žetonu (vai arī divus žetonus) pirmajam spēlētājam jānovieto žetons (žetoni) simetriski otrā spēlētāja tikko novietotajam žetonam (žetoniem) attiecībā pret kvadrāta centru. Tā pirmais spēlētājs turpina rīkoties arī visos savos nākamajos gājienos.
Ja otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, tad pirmais spēlētājs var izdarīt tam simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.



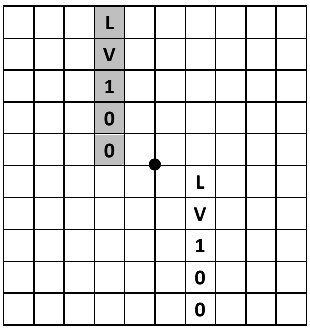
10. att.

5. Divi spēlētāji kvadrātā ar izmēriem **a)** 10×10; **b)** 11×11 rūtiņas pamīšus raksta tekstu **LV100** tā, ka šis teksts tiek ierakstīts piecās tukšās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, tas ir, ierakstīt tekstu atbilstoši noteikumiem. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?
Piemēram, skat. 11. att., kur parādīti kādas spēles pirmie pieci gājieni.

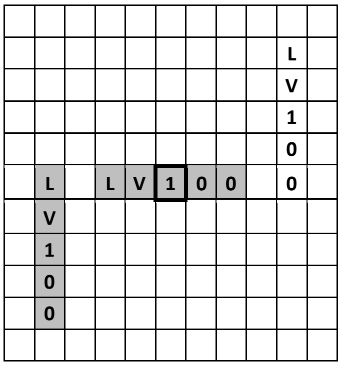


11. att.

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.
Otrajam spēlētājam katrā savā gājienā jāizdara pirmā spēlētāja gājienam simetrisks gājiens attiecībā pret kvadrāta centru (skat. 12. att., kur parādīts viens iespējams gājienu "pāris"). Ja pirmais spēlētājs varēs ierakstīt frāzi dotajā kvadrātā, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



12. att.



13. att.

b) Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Savā pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam **LV100** jāieraksta kvadrāta vidū, tas ir, tā, lai “1” atrodas kvadrāta centra rūtiņā (skat. 13. att., kur LV100 ierakstīts horizontāli), savukārt katrā nākamajā gājienā pirmajam spēlētājam jāizdara otrā spēlētāja gājienam simetrisks gājiens attiecībā pret kvadrāta centru (skat. 13. att., kur attēlots viens iespējams pirmo trīs gājienu piemērs). Ja otrais spēlētājs varēs ierakstīt frāzi, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

Jautājumi paškontrolei

1. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja 1. uzdevumā horizontālā rindā būtu savilktas a) 2018 svītriņas; b) 2019 svītriņas?
2. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja 2. uzdevumā būtu dots kvadrāts 6×6?
3. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja 3. uzdevumā a) katrā kaudzē ir 2019 konfektes; b) vienā kaudzē ir 2000 konfektes un otrā – 2019 konfektes?
4. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja 5. uzdevumā dots taisnstūris ar izmēriem 6×10 rūtiņas?

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

6. Divi spēlētāji uz 12×12 rūtiņas liela laukuma spēlē tālāk aprakstīto spēli. Spēlētāji gājienus izdara pamīšus, katrā gājienā novietojot baltu šaha zirdziņu uz neapdraudēta lauciņa. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Piezīme. Ja šaha zirdziņš atrodas rūtiņā A, tad tas apdraud visas ar * apzīmētās rūtiņas, skat. 14. att.

	*		*	
*				*
		A		
*				*
	*		*	

14. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

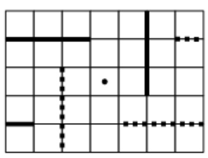
Pieņemsim, ka laukums ir izkrāsots šaha galdiņa veidā. Šādi nokrāsots kvadrāts ir centrāli simetrisks. Ievērojam, ka, šaha zirdziņu novietojot uz vienas krāsas lauciņa, tas apdraud pretējas krāsas lauciņus.

Neatkarīgi no tā, kāds ir pirmā spēlētāja pirmais gājiens, otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, kas simetrisks attiecībā pret laukuma centru – šis lauciņš ir tādā pašā krāsā kā lauciņš, uz kura tikko uzlikts šaha zirdziņš, tātad tikko izdarītais gājiens neapdraud šo lauciņu. Arī visos savos nākamajos gājienos otrais spēlētājs liek zirdziņu centrāli simetriski pirmā spēlētāja tikko novietotajam zirdziņam attiecībā pret kvadrāta centru. Līdz ar to, ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrajam spēlētājam būs iespējams izdarīt simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.

7. Dota rūtiņu lapa ar izmēriem 5×7 rūtiņas. Divi spēlētāji gājienus izdara pamīšus. Vienā gājienā atļauts veikt taisnu griezienu, kas sākas kādā lapas malā un iet pa rūtiņu malām, turklāt griezienam jābeidzas rūtiņu malu krustpunktā. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena lapa tiek sagriezta divos atsevišķos gabalos. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

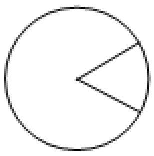
Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrais spēlētājs vienmēr var veikt griezienu, kas ir simetrisks pirmā spēlētāja tikko veiktajam griezienam attiecībā pret lapas centru (skat., piemēram, 15. att.). Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena lapa nebūs sadalīta divos atsevišķos gabalos, tad tā nebūs sadalīta divos atsevišķos gabalos arī pēc atbilstošā simetriskā otrā spēlētāja gājiena. Līdz ar to, ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrajam spēlētājam būs iespējams izdarīt simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



15. att.

8. Uz galda atrodas cilindrveida kūka. Divi spēlētāji pamīšus veic gājienus. Vienā gājienā var nogriezt vienu gabalu, kura virspuse ir dotās kūkas virspuses sektora formā, pie tam gabala virspuses laukumam jābūt ne mazākam kā $\frac{1}{100}$ un ne lielākam kā $\frac{1}{2}$ no sākotnēja kūkas virspuses laukuma (skat. 16. att.). Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar nogriezt nevienu atļautā lieluma gabalu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



16. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.
Pēc katra pirmā spēlētāja gājiena otrais spēlētājs nogriež kūkas sektoru, kas ir simetrisks tikko nogrieztajam pirmā spēlētāja sektoram attiecībā pret riņķa centru. Ievērojam, ka sektora laukums nav lielāks kā $\frac{1}{2}$, tāpēc simetriskie sektori nepārklājas. Ja pirmais spēlētājs var izdarīt gājienu, tad to var izdarīt arī otrais spēlētājs, nogriežot simetrisku sektoru attiecībā pret riņķa centru. Tā kā pēc katra gājiena riņķa laukums samazinās vismaz par $\frac{1}{100}$ no visa riņķa laukuma, tad pirmajam spēlētājam kādā brīdī vairs nevarēs izdarīt gājienu un būs zaudējis.

Jautājumi paškontrolei

1. Pieņemsim, ka 6. uzdevumā dots spēles laukums ar izmēriem $n \times n$. Kādām n vērtībām vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs un kādām – otrais spēlētājs?
2. Pieņemsim, ka 7. uzdevumā dota rūtiņu lapa ar izmēriem $m \times n$. Kādām m un n vērtībām vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs un kādām – otrais spēlētājs?

Uzdevumi

1. Vienā horizontālā rindā savilktas **a)** 9 svītriņas (skat. 17. att.); **b)** 10 svītriņas (skat. 18. att.). Divi spēlētāji pamīšus izdara gājienus. Vienā gājienā var par krustiņu pārvērst

- vai nu vienu svītriņu,
- vai arī divas blakus esošas svītriņas.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, tas ir, nevar atbilstoši noteikumiem, svītriņu pārvērst par krustiņu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

— — — — — — — — —

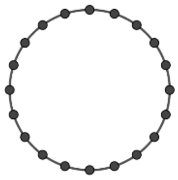
17. att.

— — — — — — — — — —

18. att.

2. Uz galda ir divas konfekšu kaudzes. Divi spēlētāji pamīšus ņem konfektes. Vienā gājienā viens spēlētājs drīkst paņemt jebkuru konfekšu skaitu no vienas kaudzes un apēst. Zaudē tas spēlētājs, kuram vairs nav ko paņemt. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt, ja sākumā **a)** abās konfekšu kaudzēs ir pa 10 konfektēm; **b)** vienā kaudzē ir 12 konfektes, bet otrā – 10 konfektes?

3. Uz riņķa līnijas atlikti 20 punkti (skat. 19. att.). Divi spēlētāji pamīšus veic gājienus. Vienā gājienā spēlētājs drīkst savienot jebkurus divus punktus ar nogriezni, kas nekrusto jau novilktos nogriežņus. Zaudē tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



19. att.

4. Divi spēlētāji izvieto žetonus kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Gājienus spēlētāji izdara pamīšus, turklāt vienā gājienā drīkst izvietot vai nu 1 žetonu vienā rūtiņā, vai arī 2 žetonus pa vienam divās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā, ja tās ir tukšas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

5. Divi spēlētāji kvadrātā ar izmēriem **a)** 10×10; **b)** 11×11 rūtiņas pamīšus raksta tekstu **LV100** tā, ka šis teksts tiek ierakstīts piecās tukšās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, tas ir, ierakstīt tekstu atbilstoši noteikumiem. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Piemēram, skat. 20. att., kur parādīti kādas spēles pirmie pieci gājieni.

	L	V	1	0	0					
	L									
	V							L		
	1							V		
	0			L				1		
	0			V				0		
				1				0		
				0		L	V	1	0	0
				0						

20. att.

6. Divi spēlētāji uz 12×12 rūtiņas liela laukuma spēlē tālāk aprakstīto spēli. Spēlētāji gājienus izdara pamīšus, katrā gājienā novietojot baltu šaha zirdziņu uz neapdraudēta laukuma. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

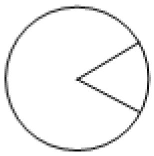
Piezīme. Ja šaha zirdziņš atrodas rūtiņā A, tad tas apdraud visas ar * apzīmētās rūtiņas, skat. 21. att.

	*		*	
*				*
		A		
*				*
	*		*	

21. att.

7. Dota rūtiņu lapa ar izmēriem 5×7 rūtiņas. Divi spēlētāji gājienus izdara pamīšus. Vienā gājienā atļauts veikt taisnu griezienu, kas sākas kādā lapas malā un iet pa rūtiņu malām, turklāt griezienam jābeidzas rūtiņu malu krustpunktā. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena lapa tiek sagriezta divos atsevišķos gabalos. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

8. Uz galda atrodas cilindrveida kūka. Divi spēlētāji pamīšus veic gājienus. Vienā gājienā var nogriezt vienu gabalu, kura virspuse ir dotās kūkas virspuses sektora formā, pie tam gabala virspuses laukumam jābūt ne mazākam kā $\frac{1}{100}$ un ne lielākam kā $\frac{1}{2}$ no sākotnēja kūkas virspuses laukuma (skat. 22. att.). Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar nogriezt nevienu atļautā lieluma gabalu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



22. att.