Rekurentās virknes

Rekursija ir metode, kā kaut ko definēt (visbiežāk virkni), izmantojot jau definētas vērtības. Vienkāršākais šādu sakarību piemērs ir **aritmētiskā** un **ģeometriskā progresija**, kuras mēdz aprakstīt attiecīgi kā "virkne, kurā katru nākamo locekli iegūst, ja iepriekšējam pieskaita vienu un to pašu skaitli (diferenci d)" un "virkne, kurā katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu skaitli (kvocientu q)".

Aritmētiskā progresija

Pieņemsim, ka d ir fiksēts skaitlis. Virkni $(a_n)_{n\geq 1}$, kas visiem $n \geq 1$ apmierina vienādību

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

sauc par **aritmētisko progresiju**; skaitli d sauc par šīs progresijas **diferenci**.

Atgādināsim, ka aritmētiskajai progresijai ir spēkā šādas īpašības:

1. Vispārīgā locekļa formula, kas ļauj aprēķināt a_n, neizmantojot virknes iepriekšējo locekļu vērtības:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

2. Pirmo n locekļu summas formula:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ģeometriskā progresija

Pieņemsim, ka q ir fiksēts skaitlis, turklāt $q \neq 0$. Virkni $(b_n)_{n\geq 1}$, kas visiem $n \geq 1$ apmierina vienādību

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

sauc par **ģeometrisko progresiju**; skaitli q sauc par šīs progresijas **kvocientu**.

Atgādināsim, ka ģeometriskajai progresijai ir spēkā šādas īpašības:

1. Vispārīgā locekļa formula, kas ļauj aprēķināt b_n, neizmantojot virknes iepriekšējo locekļu vērtības:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

2. Pirmo n locekļu summas formula:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Piezīme. Minētās aritmētiskās un ģeometriskās progresijas īpašības iespējams pierādīt ar matemātisko indukciju; arī daudzām citām rekurentām virknēm bieži vien dažādas īpašības ir ērti pierādīt, izmantojot matemātisko indukciju, tomēr šajā materiālā šāda tipa piemērus neaplūkosim.

Cits tipisks un labi pazīstams rekurentas virknes piemērs ir Fibonači skaitļu virkne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kuru definē ar sakarībām $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, t.i., virknes pirmie divi locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir iegūstams kā divu iepriekšējo locekļu summa. Viegli aprēķināt, ka nākamie virknes locekļi ir $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$ utt.

No otras puses, lai aprēķinātu šādā veidā definētas virknes, teiksim, 2016-to locekli, būtu vispirms jāaprēķina visi iepriekšējie virknes locekļi! Tādēļ reizēm ir izdevīgi rekursīvi definētai virknei atrast vispārīgā locekļa formulu (kas būtu atkarīga tikai no locekļa kārtas numura). Reizēm tas ir vienkārši (piemēram, ja virkne ir rekursīvi definēta ar $a_1 = 2$ un

$a_n = 2a_{n-1}$, tad virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^n$), reizēm – kā Fibonači virknes gadījumā – tas ir grūtāk, taču iespējami.

Paņēmienam, kā noteikta veida rekurentām virknēm atrast vispārīgā locekļa formulu, veltīta materiāla pēdējā sadaļa. Savukārt pirmajās divās sadaļās tiek demonstrēts, kā ir iespējams saskaitīt objektus vai veidus, definējot virkni (vai virknes) un pierādot, ka tā apmierina rekurentu sakarību.

Galvenie jēdzieni

- Par **rekurences sakarību** sauc vienādojumu, kas apraksta, kā iegūt virknes nākamo locekli, izmantojot virknes iepriekšējos locekļus. Piemēram, Fibonači virknes gadījumā rekurences sakarība ir $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Aritmētiskās progresijas gadījumā rekurences sakarība ir $a_{n+1} = a_n + d$, bet ģeometriskās progresijas gadījumā rekurences sakarība ir $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

- **Rekurences vienādojuma kārta** apraksta, cik iepriekšējie virknes locekļi ir izmantoti, lai definētu nākamo virknes locekli (precīzāk – cik tālu virknē ir "jāpakāpjas atpakaļ", lai aprēķinātu nākamo locekli). Piemēram, Fibonači virknē rekurences kārta ir 2; aritmētiskās un ģeometriskās progresijas kārta ir 1. Savukārt virknei, kura apmierina rekurences sakarību $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$, rekurences kārta ir 3 (lai arī izmantoti tikai divi locekļi, ir "jāpakāpjas atpakaļ" par trim locekļiem, lai aprēķinātu a_n)
  Rekurences kārta var arī vispār nebūt definēta; piemēram, t.s. Katalāna skaitļi apmierina rekurences sakarību
  $$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0,$$
  t.i., katrs loceklis ir atkarīgs no *visiem* iepriekšējiem locekļiem.

- Rekurences sakarība parāda tikai to, kā iegūt *nākamos* virknes locekļus; tā nepasaka, kā virkne *sākas*. Tāpēc nepieciešami **sākuma nosacījumi**, kas apraksta, kā virkne sākas. Piemēram, Fibonači virknes gadījumā sākuma nosacījumi ir $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Ja maina sākuma nosacījumus, tad parasti mainās arī pati virkne. Piemēram, ja virkni $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definē ar tādu pašu rekurences sakarību kā Fibonači virknei, t.i., $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$, taču ar citiem sākuma nosacījumiem $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, tad iegūstam t.s. Lukasa skaitļus: $L_3 = 4$, $L_4 = 7$, $L_5 = 11$ utt.
  Piezīme. Dažādos avotos virknes numerāciju mēdz sākt atšķirīgi, piemēram, Fibonači virkni mēdz uzdot ar sākuma nosacījumiem $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, vai pat $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$; abos gadījumos iegūstam vienu un to pašu virkni, jo no rekurences sakarības $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ izriet $F_1 = F_2 = 1$.

1. Vienkāršā rekurence

Ir daudz uzdevumu, kurus iespējams atrisināt, ja izdodas parādīt, ka uzdevuma atbilde ir rekurentas virknes loceklis, turklāt šai virknei var atrast gan rekurences sakarību, gan sākuma nosacījumus. Bieži vien tie ir uzdevumi, kuros tiek prasīts saskaitīt kādu objektu (konfigurāciju, veidu utt.), kas atkarīgi no parametra n, skaitu, turklāt

- ir iespējams parādīt, kā šos objektus var iegūt no tāda paša veida objektiem, taču ar mazāku parametra n vērtību;
- ja parametra n vērtība ir maza (teiksim, $n = 0$, $n = 1$ vai $n = 2$), tad ir viegli saskaitīt vajadzīgā veida objektus.

1. piemērs. Cik veidos taisnstūri 2×12 var sagriezt gabaliņos 1×2?

Risinājums

Ar a_k apzīmēsim, cik veidos var sagriezt taisnstūri $2 \times k$ gabaliņos 1×2 (sauksim 1×2 gabaliņu par horizontālu domino un 2×1 gabaliņu par vertikālu domino). Viegli redzēt, ka $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Aplūkosim taisnstūri $2 \times n$. Tā kreiso apakšējo rūtiņu var nosegt divos veidos:

1. ar vertikālu domino; tad pirmā kolonna ir nosegta un atliek noklāt taisnstūri $2 \times (n-1)$, ko var izdarīt a_{n-1} veidos;
2. ar horizontālu domino; bet tad obligāti virs tā jāievieto otrs horizontāls domino, un mums atliek noklāt taisnstūri $2 \times (n-2)$, ko var izdarīt a_{n-2} veidos.

No summas likuma izriet rekurences sakarība $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Izmantojot šo sakarību un atrastās sākuma vērtības $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, varam aprēķināt a_{12}:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Tātad taisnstūri 2×12 var sagriezt 1×2 gabaliņos 233 dažādos veidos.

2. piemērs. Dots, ka $n \geq 2$ ir naturāls skaitlis. Virkni, kurā pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot, sauksim par n-labu, ja tieši viens skaitlis ir lielāks par tam šajā virknē sekojošo skaitli. Cik ir n-labu virkņu?

Risinājums

Ar $f(n)$ apzīmēsim n-labu virkņu skaitu. Viegli pārbaudīt, ka $f(2) = 1$.

Apskatīsim $(n+1)$-labas virknes. Tās var iedalīt divās grupās:

- virknes, kurās pēdējais loceklis ir $n+1$. Skaidrs, ka šādu virkņu ir $f(n)$, jo šajā gadījumā pirmie n virknes locekļi veido n-labu virkni, tātad tos var izvēlēties $f(n)$ veidos.
- virknes, kurās $n+1$ atrodas 1., 2., ..., n-tajā vietā. Tad $n+1$ noteikti ir lielāks par tam sekojošo virknes locekli. Tāpēc gan pa kreisi, gan pa labi no $n+1$ skaitļi ir uzrakstīti augošā secībā. Tādā gadījumā šādu virkni viennozīmīgi nosaka to skaitļu kopa, kas atrodas pa kreisi no $n+1$; par šādu kopu var kalpot jebkura kopas $\{1;2;3;\ldots;n\}$ apakškopa (ieskaitot tukšo), kas nesakrīt ar pašu kopu $\{1;2;3;\ldots;n\}$. Tādu apakškopu ir $2^n - 1$, tātad arī šāda veida virkņu ir $2^n - 1$.

No summas likuma iegūstam, ka $(n+1)$-labu virkņu ir $f(n) + 2^n - 1$, t.i., visiem $n \geq 2$ izpildās sakarība

$$f(n+1) = f(n) + 2^n - 1.$$

Saskaitot vienādības

$$\begin{aligned}
&f(2) = 1;\\
&f(3) = f(2) + 2^2 - 1;\\
&f(4) = f(3) + 2^3 - 1;\\
&\ldots\\
&f(n-1) = f(n-2) + 2^{n-2} - 1;\\
&f(n) = f(n-1) + 2^{n-1} - 1,
\end{aligned}$$

iegūstam, ka

$$f(n) = 1 + \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1}\right) - (n-2).$$

Ievērojot, ka $2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 4$ (ģeometriskā progresija ar kvocientu 2), iegūstam atbildi:

$$f(n) = 2^n - n - 1.$$

3. piemērs. Deviņu ciparu virkni sauc par *labu*, ja tā vienlaicīgi apmierina šādus divus nosacījumus:

1. tā satur visus ciparus no 1 līdz 9,
2. neviens cipars, sākot ar otro, nav tieši par 1 lielāks nekā iepriekšējais cipars.

Cik ir *labu* virkņu?

Risinājums

Par n-labām virknēm, kur $n \in \{1,2,\ldots,9\}$, sauksim tādas virknes, kas satur katru no cipariem 1, 2, ..., 9 tieši vienu reizi un kurās neviens cipars, sākot ar otro, nav par 1 lielāks nekā iepriekšējais cipars. Ar $f(n)$ apzīmēsim n-labu virkņu skaitu. Tad uzdevumā prasīts aprēķināt $f(9)$.

Viegli saprast, ka $f(1) = f(2) = 1$ (attiecīgās labās virknes ir "1" un "2; 1"). Pierādīsim, ka visiem $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ izpildās rekurences sakarība

$$f(n+2) = (n+1)f(n+1) + nf(n).$$

Ja tas būs pierādīts, tad viegli aprēķināt $f(9)$:

$$\begin{aligned}
&f(3) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3;\\
&f(4) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11;\\
&f(5) = 4 \cdot 11 + 3 \cdot 3 = 53;\\
&f(6) = 5 \cdot 53 + 4 \cdot 11 = 309;\\
&f(7) = 6 \cdot 309 + 5 \cdot 53 = 2119;\\
&f(8) = 7 \cdot 2119 + 6 \cdot 309 = 16687;\\
&f(9) = 8 \cdot 16687 + 7 \cdot 2119 = 148329.
\end{aligned}$$

Atliek pierādīt rekurences sakarību.

Katru $(n+2)$-labu virkni var iegūt vienā no diviem veidiem:

- vai nu $(n+1)$-labai virknei pievienojot ciparu $n+2$ jebkurā no $n+1$ vietām (pirms pirmā cipara, starp jebkuriem diviem blakusesošiem cipariem, vai arī pēc pēdējā cipara, tikai ne tieši pēc cipara $n+1$); šādu $(n+2)$-labu virkņu skaits ir $(n+1)f(n+1)$. Var ievērot, ka šādām virknēm ir spēkā īpašība: **izsvītrojot ciparu $n+2$, iegūstam $(n+1)$-labu virkni**;
- vai arī ņemot tādu virkni α, kas pa reizei satur ciparus 1,2,3, ..., n, $n+1$ un kurā ir tieši viens "aizliegtais" blakusesošo ciparu pāris $(k; k+1)$, un ievietojot ciparu $n+2$ starp šiem cipariem k un $k+1$. Tā iegūstamas visas tās $(n+2)$-labās virknes, no kurām, **izsvītrojot ciparu $n+2$, neiegūst $(n+1)$-labu virkni**.

  Ievērosim, ka katram fiksētam k šādu virkņu α skaits ir vienāds ar n-labu virkņu skaitu, t.i., ar $f(n)$:
  - jebkurā n-labā virknē aiz k ievietojot $k+1$, bet "veco" $k+1$ aizstājot ar $k+2$, "veco" $k+2$ aizstājot ar $k+3$ utt., iegūstam derīgu virkni α;
  - no otras puses, ja ir dota virkne α, tad, izsvītrojot tajā $k+1$ un aizstājot $k+2$ ar $k+1$, $k+3$ ar $k+2$ utt., iegūstam n-labu virkni;
  - aprakstītajā veidā pārveidojot dažādas virknes α un α', iegūstam dažādas n-labas virknes un otrādi.

  Tā kā virknē α par ciparu k var ņemt jebkuru no cipariem 1, 2, ..., n, tad kopā šādu virkņu α ir $nf(n)$. Līdz ar to arī otrā veida $(n+2)$-labu virkņu skaits ir $nf(n)$.

Līdz ar to no summas likuma izriet vajadzīgā rekurences sakarība.

4. piemērs. Katram naturālam skaitlim n ar $f(n)$ apzīmēsim lielāko divnieka pakāpi, ar kuru dalās n. Piemēram, $f(20) = 4$, $f(16) = 16$, bet $f(3) = 1$.

Katram naturālam N ar S_N apzīmēsim summu

$$S_N = f(2) + f(4) + f(6) + \ldots + f(2^N - 2) + f(2^N).$$

Atrast tādu lielāko $N \leq 1000$, kam S_N ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Risinājums

Viegli aprēķināt, ka

$$\begin{aligned}
&S_1 = f(2) = 2;\\
&S_2 = f(2) + f(4) = 6.
\end{aligned}$$

Ievērojam, ka $f(n) = 1$, ja n ir nepāra, un $f(n) = 2f(n/2)$, ja n ir pāra. Tātad visiem $N \geq 2$ izpildās sakarība

$$S_N = f(2) + f(4) + \ldots + f(2^N) = 2\left(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^{N-1})\right) = 2\left(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{2^{N-2}\text{ saskaitāmie}} + S_{N-1}\right) = 2^{N-1} + 2S_{N-1};$$

šeit pirmspēdējā vienādība izriet no tā, ka starp skaitļiem $1, 2, \ldots, 2^{N-1}$ ir tieši 2^{N-2} nepāra skaitļi (kuriem f vērtība ir vienāda ar 1), savukārt pārējie saskaitāmie veido summu S_{N-1}.

Tātad S_N apmierina rekurences sakarību

$$S_N = 2S_{N-1} + 2^{N-1}.$$

Iegūstam, ka jebkuram $1 < k < N$ izpildās vienādība $S_k = 2S_{k-1} + 2^{k-1}$; reizinot šo vienādību ar 2^{N-k}, iegūstam

$$2^{N-k}S_k = 2^{N-k+1}S_{k-1} + 2^{N-1}.$$

Saskaitot iegūtās vienādības

$$\begin{aligned}
S_N &= 2S_{N-1} + 2^{N-1}; && (k = N)\\
2S_{N-1} &= 4S_{N-2} + 2^{N-1}; && (k = N-1)\\
4S_{N-2} &= 8S_{N-3} + 2^{N-1}; && (k = N-2)\\
&\ldots\\
2^{N-2}S_2 &= 2^{N-1}S_1 + 2^{N-1}; && (k = 2),
\end{aligned}$$

iegūstam

$$S_N = 2^{N-1}S_1 + 2^{N-1} \cdot (N-1).$$

Ņemot vērā, ka $S_1 = 2$, iegūstam S_N vispārīgo formulu:

$$S_N = 2^{N-1}(N+1).$$

Atliek noskaidrot, kādām $N \le 1000$ vērtībām skaitlis $2^{N-1}(N+1)$ ir naturāla skaitļa kvadrāts:

- ja $N-1$ ir nepāra skaitlis, tad arī reizinātājs $N+1$ ir nepāra skaitlis; taču tad pirmreizinātājs 2 skaitlī S_N ieiet ar nepāra kāpinātāju, tātad S_N nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad šis gadījums neder;
- ja $N-1$ ir pāra skaitlis, tad 2^{N-1} ir naturāla skaitļa kvadrāts, līdz ar to arī $N+1$ (kas arī ir pāra skaitlis) jābūt naturāla skaitļa kvadrātam. Lielākais pāra skaitlis, kas ir naturāla skaitļa kvadrāts un nepārsniedz 1001, ir $900 = 30^2$. Līdz ar to $N = 900 - 1 = 899$ ir lielākais skaitlis, kas nepārsniedz 1000 un kam S_N ir naturāla skaitļa kvadrāts.

2. Divkāršā un trīskāršā rekurence

Dažkārt rekurences sakarību ir daudz grūtāk pamatot nekā iepriekšējos piemēros. Reizēm ir izdevīgi apskatāmo problēmu sadalīt vairākās "apakšproblēmās", t.i., meklējamos objektus sadalīt vairākos tipos tā, lai viena tipa objektu skaitu būtu viegli aprakstīt ar rekurences sakarībām. Šādi tiek iegūtas vairākas virknes, kuras savā starpā ir saistītas ar rekurences sakarībām.

5. piemērs. Apskatām skaitļus, kuru decimālajā pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 2, 3, turklāt cipari 1 un 3 neatrodas blakus. Cik ir astoņciparu skaitļu ar šādu īpašību?

Risinājums

Ar s_n apzīmēsim n-ciparu skaitļu skaitu ar vajadzīgo īpašību; tad uzdevumā prasīts aprēķināt s_8.

Ar a_n apzīmēsim to n-ciparu skaitļu skaitu ar vajadzīgo īpašību, kam pēdējais cipars ir 1; ar b_n apzīmēsim to n-ciparu skaitļu skaitu ar vajadzīgo īpašību, kam pēdējais cipars ir 2; ar c_n apzīmēsim to n-ciparu skaitļu skaitu ar vajadzīgo īpašību, kam pēdējais cipars ir 3. Tādā gadījumā skaidrs, ka $s_n = a_n + b_n + c_n$.

Acīmredzami, ka $a_1 = b_1 = c_1 = 1$. Taču, ja $n > 1$, tad

- lai n-ciparu skaitlis beigtos ar ciparu 1, tā priekšpēdējais cipars var būt tikai 1 vai 2 (tas nevar būt 3, jo tad cipari 1 un 3 būtu blakus); tātad pirmo $n-1$ ciparu veidotais skaitlis ir ar vajadzīgo īpašību un beidzas vai nu ar 1 (tādus skaitļus var izvēlēties a_{n-1} veidos), vai ar ciparu 2 (tādus skaitļus var izvēlēties b_{n-1} veidos). No summas likuma izriet, ka n-ciparu skaitli, kas beidzas ar 1, var izvēlēties $a_{n-1}+b_{n-1}$ veidos., t.i.,

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1};$$

- ja n-ciparu skaitlis beigtos ar ciparu 2, tā priekšpēdējais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2 vai 3; tātad šādu skaitļu ir tikpat daudz, cik $(n-1)$-ciparu skaitļu ar vajadzīgo īpašību, t.i., $a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$. Tātad

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1};$$

- lai n-ciparu skaitlis beigtos ar ciparu 3, tā priekšpēdējais cipars var būt tikai 2 vai 3 (tas nevar būt 1, jo tad cipari 1 un 3 būtu blakus); tātad pirmo $n-1$ ciparu veidotais skaitlis ir ar vajadzīgo īpašību un beidzas vai nu ar 2 (tādus skaitļus var izvēlēties b_{n-1} veidos), vai ar ciparu 3 (tādus skaitļus var izvēlēties c_{n-1} veidos). No summas likuma izriet, ka n-ciparu skaitli, kas beidzas ar 3, var izvēlēties $b_{n-1}+c_{n-1}$ veidos., t.i.,

$$c_n = b_{n-1} + c_{n-1}.$$

Tātad esam ieguvuši trīs rekurentas skaitļu virknes, kuru pirmie locekļi ir $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ un kuras apmierina rekurences sakarības

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + c_{n-1}. \end{cases}$$

Līdz ar to varam aprēķināt a_n, b_n un c_n vērtības, izmantojot atrastās rekurences sakarības:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	2	5	12	29	70	169	408
b_n	1	3	7	17	41	99	239	577
c_n	1	2	5	12	29	70	169	408

Secinām, ka mūs interesējošo astoņciparu skaitļu skaits ir $s_8 = a_8 + b_8 + c_8 = 408 + 577 + 408 = 1393$.

Piezīme. Varēja iegūt arī vienu rekurences sakarību attiecībā pret s_n (tā pārejot uz vienkāršu rekurenci). Ievērosim, ka $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = s_{n-1}$; ja $n \geq 2$, tad

$$s_n = a_n + b_n + c_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 2c_{n-1} = 2s_{n-1} + b_{n-1} = 2s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Tā kā $s_1 = 3$ un (kā var viegli noskaidrot) $s_2 = 7$, tad s_8 vērtību var atrast arī ar šīs rekurences sakarības palīdzību:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
s_n	3	7	17	41	99	239	577	1393

3. Lineāras rekurentas virknes vispārīgais loceklis

Ja virkne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apmierina rekurences sakarību

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k} + b_n,$$

kur koeficienti $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_k$ var būt atkarīgi no n, bet ne no u_i, tad to sauc par **lineāru rekurences sakarību**. Nelineāras rekurences sakarības piemērs ir materiāla sākumā minētā sakarība Katalāna skaitļiem.

Lineāra rekurences sakarība ir **homogēna**, ja visiem n koeficients b_n ir nulle: $b_n = 0$; pretējā gadījumā to sauc par **nehomogēnu** lineāru rekurences sakarību. Ja koeficienti $a_1, \ldots, a_k$ nav atkarīgi no n, tad to sauc par lineāru rekurenci ar **konstantiem koeficientiem**; pretējā gadījumā rekurence ir ar **nekonstantiem koeficientiem**.

Piemēram,

- 2. piemērā pamatotā rekurences sakarība $f(n+1) = f(n) + 2^n - 1$ ir pirmās kārtas lineāra nehomogēna rekurences sakarība ar konstantiem koeficientiem;

- savukārt 3. piemērā iegūtā sakarība $f(n+2) = (n+1)f(n+1) + nf(n)$ ir otrās kārtas lineāra homogēna rekurences sakarība ar nekonstantiem koeficientiem.

Lineāra homogēna rekurences sakarība ar konstantiem koeficientiem ir viens no vienkāršākajiem rekurences sakarību veidiem, taču vienlaikus tas ir bieži sastopams un nozīmīgs veids; piemēram, Fibonači virknes apmierinātā sakarība ir otrās kārtas lineāra homogēna rekurences sakarība ar konstantiem koeficientiem. Šāda tipa rekurences sakarībām ir iespējams atrast vispārīgā locekļa formulu, izmantojot t.s. *raksturīgo* jeb *harakteristisko vienādojumu*:

Raksturīgais vienādojums

Par k-tās kārtas homogēnas lineāras rekurences sakarības

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_{k-1} u_{n-k+1} + a_k u_{n-k}$$

ar konstantiem koeficientiem $a_1, \ldots, a_k$ **raksturīgo vienādojumu** sauc vienādojumu

$$t^k - a_1 t^{k-1} - a_2 t^{k-2} - \ldots - a_{k-1} t - a_k = 0.$$

3.1. Otrās kārtas lineāras rekurentas virknes

Apskatīsim speciālgadījumu, kad $k = 2$, t.i., rekurences sakarība ir formā

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}.$$

Tad tās raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$. Atkarībā no atbilstošā diskriminanta vērtības, pastāv trīs iespējas:

- vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes t_1 un t_2;
- vienādojumam ir divas vienādas reālas saknes $t_1 = t_2$;
- vienādojumam nav reālu sakņu, taču ir divas dažādas kompleksas saknes.

Otrās kārtas lineāras rekurentas virknes vispārīgais loceklis

Ja raksturīgajam vienādojumam ir **divas dažādas** saknes t_1 un t_2, tad rekurentās virknes vispārīgais loceklis u_n ir formā

$$u_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n.$$

Šeit C_1 un C_2 ir konstantes (t.i., nav atkarīgas no n), kuras atrod, izmantojot sākuma nosacījumus.

Ja raksturīgajam vienādojumam ir **divas vienādas** saknes $t_1 = t_2$, tad rekurentās virknes vispārīgais loceklis u_n ir formā

$$u_n = C_1 t_1^n + C_2 \cdot n t_1^n.$$

Šeit C_1 un C_2 ir konstantes, kuras atrod, izmantojot sākuma nosacījumus.

Piezīme. Lai arī sīkāk šo gadījumu neaplūkosim, bet apgalvojums paliek spēkā arī tad, ja saknes t_1 un t_2 ir kompleksas (t.i., raksturīgā vienādojuma diskriminants ir negatīvs un vienādojumam nav reālu sakņu).

6. piemērs. Apskatīsim Fibonači virkni, kura apmierina rekurences sakarību $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ un kuras sākuma nosacījumus var uzdot kā $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Atbilstošais raksturīgais vienādojums ir $t^2 - t - 1 = 0$, kura saknes ir

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{un} \quad t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tātad eksistē tādas konstantes C_1 un C_2, ka

$$F_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n$$

jeb

$$F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Lai atrastu C_1 un C_2, izmantojam sākuma nosacījumus $F_0 = 0$ un $F_1 = 1$. Ievietojot iegūtajā izteiksmē $n = 0$ un $n = 1$, iegūstam vienādības

$$0 = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

un

$$1 = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

jeb

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

No pirmā vienādojuma iegūstam $C_2 = -C_1$; ievietojot to otrajā vienādojumā, iegūstam

$$1 = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

jeb

$$1 = -\sqrt{5}C_1,$$

no kurienes

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{un } C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tātad

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

jeb

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

Piezīme. Formula (1) ļauj definēt Fibonači skaitļu virkni, neizmantojot rekurences sakarības.

7. piemērs. Apskatīsim virkni, kura apmierina rekurences sakarību $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ un kuras sākuma nosacījumi ir $u_1 = 4$, $u_2 = 1$.

Atbilstošais raksturīgais vienādojums ir $t^2 - 2t + 1 = 0$, kuram abas saknes ir vienādas ar 1. Tātad eksistē tādas konstantes C_1 un C_2, ka

$$u_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n$$

jeb

$$u_n = C_1 + C_2 n.$$

Lai atrastu C_1 un C_2, izmantojam sākuma nosacījumus $u_1 = 4$ un $u_2 = 1$. Ievietojot iegūtajā izteiksmē $n = 1$ un $n = 2$, iegūstam vienādības

$$4 = C_1 + C_2 \cdot 1 \quad \text{un} \quad 1 = C_1 + C_2 \cdot 2$$

jeb

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1 + 2C_2. \end{cases}$$

No sistēmas iegūstam $C_1 = 7$, $C_2 = -3$. Tātad

$$u_n = 7 - 3n.$$

Piezīme. Šis risinājums parāda, ka ar šādu rekurences sakarību ir uzdota aritmētiskā progresija, kuras pirmais loceklis ir 4, diference -3 un vispārīgo locekli var pierakstīt formā $u_n = 4 - 3(n-1)$.