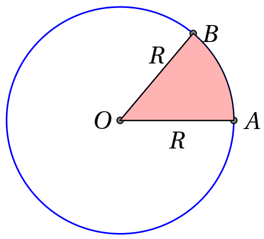
Riņķis

1. Vārdnīca

Vispārīgi

- Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no viena fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par **riņķa līnijas centru**, bet attiecīgo attālumu – par **riņķa līnijas rādiusu**.

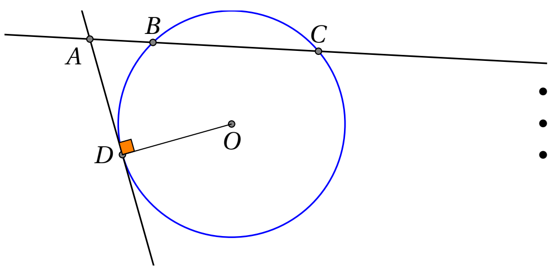
  Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
- Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
- Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.



- $OA = OB = R$ – rādiusi.
- Iekrāsotā daļa – sektors.

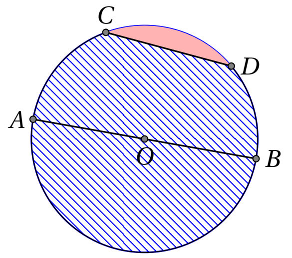
Taisnes un nogriežņi

- Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
- Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
- Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.



- Taisne AC – sekante.
- Taisne AD – pieskare.
- Nogrieznis BC – horda.

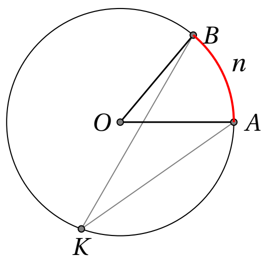
- Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
- Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.



- AB – diametrs.
- Iekrāsotā daļa – segments.
- Iesvītrotā daļa – segments.

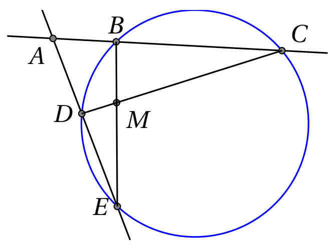
Loki un leņķi

- Par **riņķa līnijas loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
- Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, un malas krusto riņķa līniju.
- Par **loka leņķisko lielumu** sauc centra leņķa lielumu, kas balstās uz šo loku.
- Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, un malas krusto riņķa līniju.



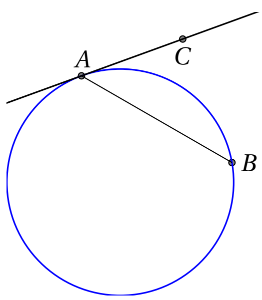
- Iekrāsotā kopa – loks $\widehat{A_nB}$.
- $\sphericalangle BOA$ – centra leņķis, kas balstās uz loka $\widehat{AnB}$.
- $\sphericalangle BKA$ – ievilkts leņķis, kas balstās uz loka $\widehat{AnB}$.

- Par riņķa līnijas **ārējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas ārpus riņķa un malas krusto riņķa līniju vai arī viena vai abas malas pieskaras riņķa līnijai.
- Par riņķa līnijas **iekšējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa iekšpusē un malas krusto riņķa līniju.



- $\sphericalangle CAE$ – ārējais leņķis.
- $\sphericalangle CME$ – iekšējais leņķis.

- Par **hordas-pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.



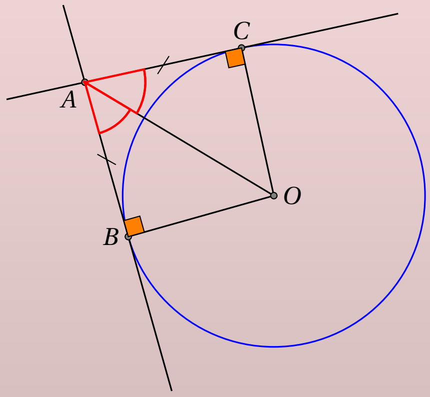
- $\sphericalangle CAB$ – hordas-pieskares leņķis.

2. Hordas, pieskares un sekantes

Par pieskarēm

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti B un C ir šo pieskaru pieskaršanās punkti riņķa līnijai un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs, tad

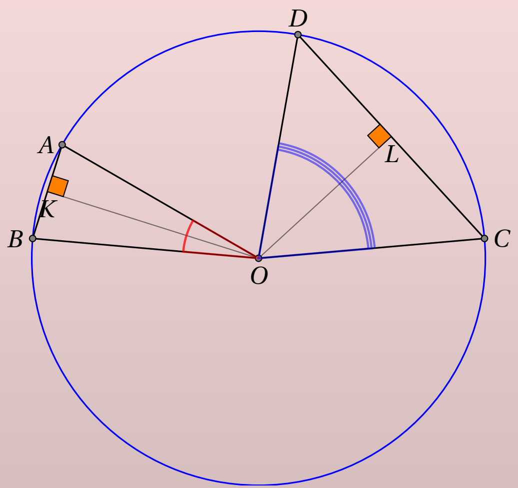
1. $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
2. AO ir $\sphericalangle BAC$ bisektrise;
3. $OB \perp AB$.



- $AB = AC$;
- $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OAC$;
- $OB \perp AB$, $OC \perp AC$.

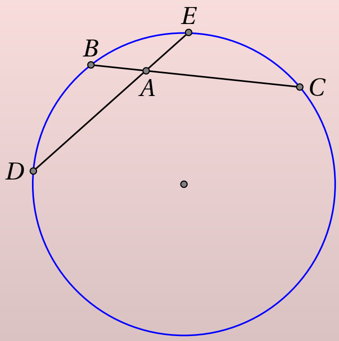
Par hordas garumu

1. Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
2. Jo lielāks loka leņķiskais lielums, uz kuru balstās horda, jo tā ir garāka.



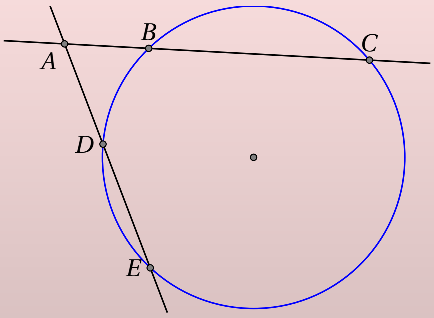
$$OK > OL \Leftrightarrow AB < CD \Leftrightarrow \sphericalangle AOB < \sphericalangle DOC$$

Hordu īpašība



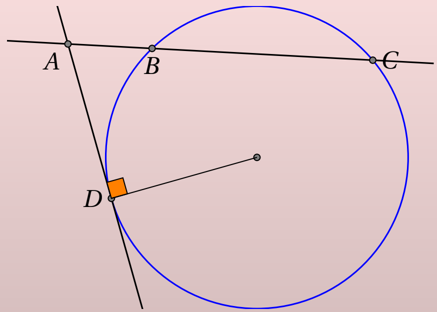
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

Sekanšu īpašība



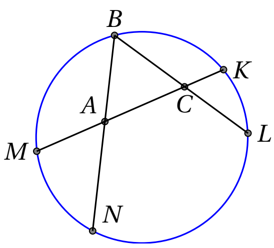
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

Pieskares – sekantes īpašība



$$AB \cdot AC = AD^2$$

1. piemērs. Regulāra trīsstūra ABC virsotne B atrodas uz riņķa līnijas, bet virsotnes A un C atrodas riņķa līnijas iekšienē. Malu BA un BC pagarinājumi krusto riņķa līniju punktos N un L. Taisne, uz kuras atrodas AC, krusto riņķa līniju punktos M un K (skat. zīmējumu). Pierādīt, ka $AM + CL = AN + CK$.



Saskaņā ar hordu īpašību, izpildās vienādības

$$AM \cdot AK = AN \cdot AB \quad \text{un} \quad CK \cdot CM = CL \cdot CB.$$

Apzīmēsim regulārā trīsstūra malas garumu ar a, tad iegūtās vienādības var pārrakstīt kā

$$AM \cdot (a + CK) = AN \cdot a;$$
$$CK \cdot (a + AM) = CL \cdot a.$$

Atverot iekavas un atņemot abas vienādības, iegūstam

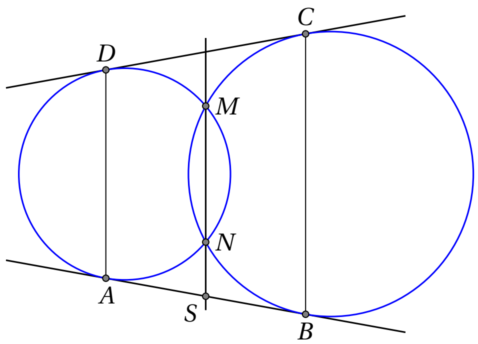
$$AM \cdot a - CK \cdot a = AN \cdot a - CL \cdot a,$$

jeb, ekvivalenti,

$$(AM + CL) \cdot a = (AN + CK) \cdot a.$$

Dalot abas vienādības puses ar a (kas ir pozitīvs skaitlis), iegūstam vajadzīgo vienādību.

2. piemērs. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Tām novilktas kopīgās ārējās pieskares; pieskaršanās punkti ir trapeces $ABCD$ virsotnes. Pierādīt, ka M un N atrodas uz šīs trapeces viduslīnijas.



Ar S apzīmēsim taisnes MN krustpunktu ar taisni AB. No pieskares-sekantes īpašības seko, ka

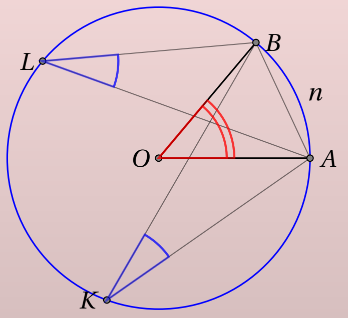
$$SA^2 = SM \cdot SN \quad \text{un} \quad SB^2 = SM \cdot SN.$$

Tātad $SA = SB$ un taisne MN krusto nogriezni AB tā viduspunktā. Analoģiski pamato, ka taisne MN krusto arī nogriezni CD tā viduspunktā; tātad MN ir trapeces $ABCD$ viduslīnija.

3. Loki un leņķi

Ievilktā leņķa lielums

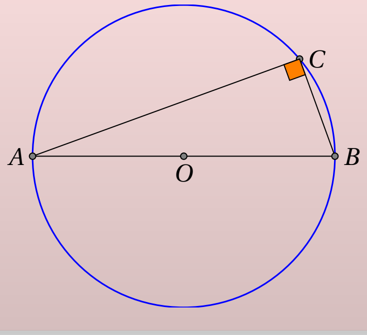
1. Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma.
2. Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi.
3. Ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.



$$\sphericalangle BLA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AnB} = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$$
$$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BLA$$
$$\sphericalangle BKA = \sphericalangle BLA$$

Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru

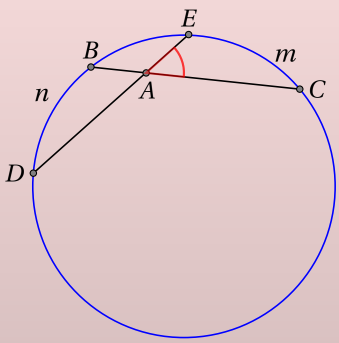
Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir 90° un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.



AB - diametrs $\Leftrightarrow \sphericalangle ACB = 90^\circ$

Iekšēja leņķa lielums

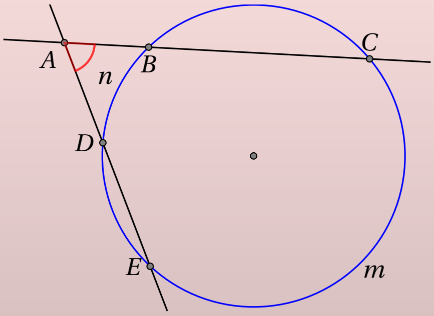
Iekšējā leņķa lielums ir vienāds ar to divu loku leņķisko lielumu pussummu, no kuriem viens ir starp leņķa malām, bet otrs ir starp leņķa malu pagarinājumiem.



$$\sphericalangle CAE = \frac{\overset{\frown}{C_m E} + \overset{\frown}{B_n D}}{2}$$

Ārējā leņķa lielums

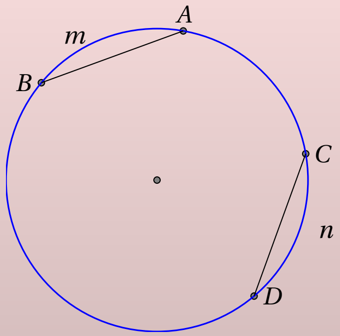
Ārējā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no to divu loku leņķisko lielumu starpības, kuri atrodas starp leņķa malām.



$$\sphericalangle CAE = \frac{\overset{\frown}{C_mE} - \overset{\frown}{B_nD}}{2}$$

Vienādas hordas un vienādi loki

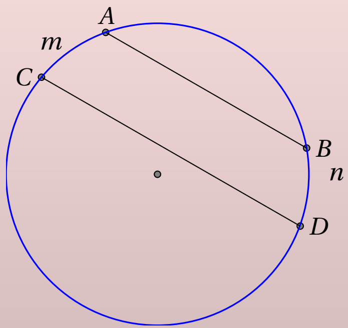
Vienāda garuma hordas balstās uz vienādiem lokiem.



$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{A_mB} = \overset{\frown}{C_nD}$$

Loki starp paralēlām hordām

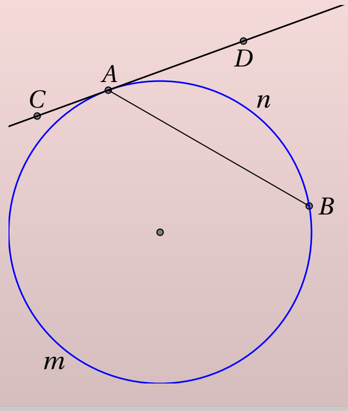
Loki starp divām hordām ir vienādi tad un tikai tad, ja šīs hordas ir paralēlas.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{A_mC} = \overset{\frown}{B_nD}$$

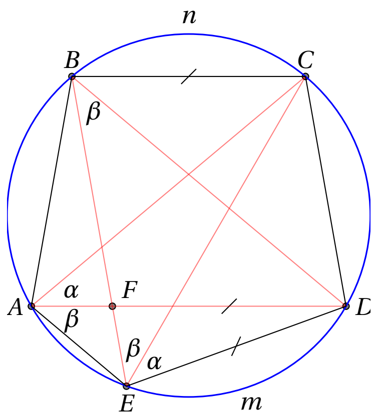
Hordas-pieskares leņķis

Hordas-pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.



$$\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_m B}$$
$$\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_n B}$$

3. piemērs. Piecstūris $ABCDE$ ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi AD un BE krustojas punktā F. Zināms, ka $BC = DF = DE$. Pierādīt, ka $AC = CE$.



Tā kā $BC = ED$, tad $\overset{\frown}{BnC} = \overset{\frown}{EmD}$.

Tā kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi, tad

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle BEC = \sphericalangle DAE = \beta$$

un

$$\sphericalangle DEC = \sphericalangle CAD = \alpha.$$

Vienādsānu trīsstūra DEF (pēc dotā $DF = DE$) leņķi pie pamata EF ir vienādi, t.i.,

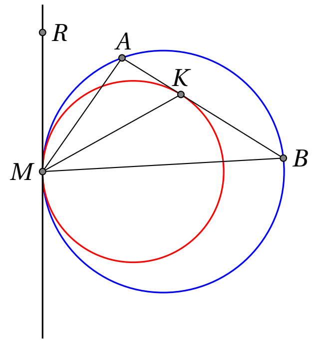
$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = \alpha + \beta.$$

Tad $\sphericalangle EFD = \sphericalangle FAE + \sphericalangle AEF$ kā trīsstūra ārējais leņķis. Tātad

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle EFD - \sphericalangle FAE = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle EAC = \sphericalangle AEC = \alpha + \beta$. Tātad ΔAEC ir vienādsānu un $AC = CE$, kas bija jāpierāda.

4. piemērs. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Lielākās riņķa līnijas horda AB pieskaras mazākajai riņķa līnijai punktā K. Pierādīt, ka MK ir $\sphericalangle AMB$ bisektrise.



Novelk riņķa līniju kopīgo pieskari punktā M un atliek uz tās punktu R. Tad

$$\sphericalangle AMK = \sphericalangle RMK - \sphericalangle RMA.$$

No hordas-pieskares leņķa īpašības seko, ka

- $\sphericalangle RMK = \sphericalangle AKM$, jo
  - $\sphericalangle RMK$ ir vienāds ar mazākās riņķa līnijas loka MK pusi kā hordas MK un pieskares RM leņķis;
  - $\sphericalangle AKM$ ir vienāds ar mazākās riņķa līnijas loka MK pusi kā hordas MK un pieskares AK leņķis.
- $\sphericalangle RMA = \sphericalangle ABM$, jo
  - $\sphericalangle RMA$ ir vienāds ar lielākās riņķa līnijas loka AM pusi kā hordas AM un pieskares RM leņķis;
  - $\sphericalangle ABM$ ir vienāds ar lielākās riņķa līnijas loka AM pusi kā ievilkts leņķis, kas balstās uz šo loku.

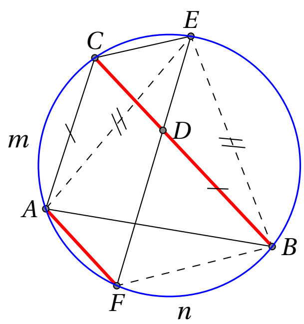
Tātad

$$\sphericalangle AMK = \sphericalangle RMK - \sphericalangle RMA = \sphericalangle AKM - \sphericalangle ABM = \sphericalangle KMB$$

(saskaņā ar ΔKMB ārēja leņķa $\sphericalangle AKM$ īpašību), kas arī pierāda, ka MK ir bisektrise.

5. piemērs. Trijstūrī ABC dots, ka $AC < BC$. Apzīmējam ΔABC apvilkto riņķa līniju ar ω. Punkts E ir viduspunkts tam no ω lokiem AB, kurš satur C. Punkts D atrodas uz nogriežņa BC un $BD = AC$. Stars ED krusto ω punktā F. Punkts F pieder lokam AB (tam, kurš nesatur C), taču nesakrīt ar loka galapunktiem.

Pierādīt, ka $AF \parallel BC$.



- No ievilktu leņķu īpašībām $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBE = \sphericalangle DBE$;
- tā kā loki, uz kuriem balstās hordas AE un BE, ir vienādi (jo E ir $\overset{\frown}{A_C B}$ viduspunkts), tad $AE = BE$;
- no dotā $AC = BD$.

Tātad $\Delta CAE = \Delta DBE$ (pazīme mlm). Seko, ka $\sphericalangle CEA = \sphericalangle DEB = \sphericalangle FEB$.

Tā kā vienādi ievilkti leņķi balstās uz vienādiem lokiem, tad loki $\overset{\frown}{AmC}$ un $\overset{\frown}{FnB}$ ir vienādi savā starpā.

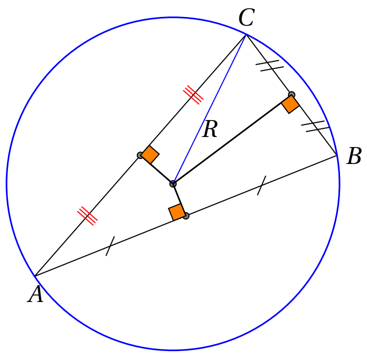
Ja loki starp divām hordām ir vienādi, tad hordas ir paralēlas; tātad $AF \parallel CB$, kas arī bija jāpierāda.

4. Trīsstūrī ievilktā un apvilktā riņķa līnija

Par **riņķa līnijā ievilktu trīsstūri** sauc trīsstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par **trīsstūrim apvilktu riņķa līniju**.

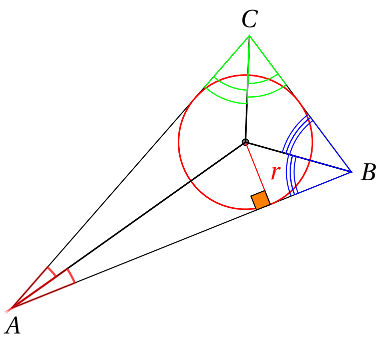
Katram trīsstūrim var apvilkt riņķa līniju. Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas trīsstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

1. Šaurleņķu trīsstūrī apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas trīsstūra iekšienē.
2. Taisnleņķa trīsstūrī apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā.
3. Platleņķa trīsstūrī apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas ārpus trīsstūra.



Par **riņķa līnijai apvilktu trīsstūri** sauc trīsstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par **trīsstūrī ievilktu riņķa līniju**.

Katrā trīsstūrī var ievilkt riņķa līniju. Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas trīsstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.

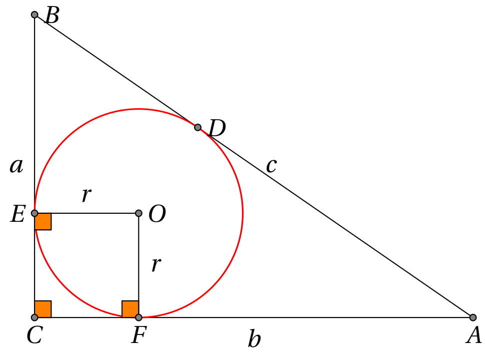


Trīsstūrim apvilkto un ievilkto riņķa līniju rādiusu garumi

Trīsstūra ABC malu garumus apzīmēsim ar a, b un c, laukumu ar S, bet pusperimetru ar p. Tad apvilktās riņķa līnijas rādiusu R un ievilktās riņķa līnijas rādiusu r var aprēķināt, izmantojot formulas:

1. $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, kur α ir malas a pretleņķis;
2. $R = \dfrac{abc}{4S}$;
3. $r = \dfrac{S}{p}$.

6. piemērs. Pierādīt, ka taisnleņķa trīsstūrī ievilktās riņķa līnijas garums r ir vienāds ar $\dfrac{a+b-c}{2}$, kur a un b ir dotā trīsstūra katešu garumi, bet c – hipotenūzas garums.



Pieņemsim, ka aplūko ΔABC, $\sphericalangle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Apzīmēsim ievilktās riņķa līnijas centru ar O un pieskaršanās punktus malām AB, BC, CA attiecīgi ar D, E un F.

Pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kas vilkts pret pieskaršanās punktu, tādēļ

$$\sphericalangle OFC = \sphericalangle OEC = 90^\circ.$$

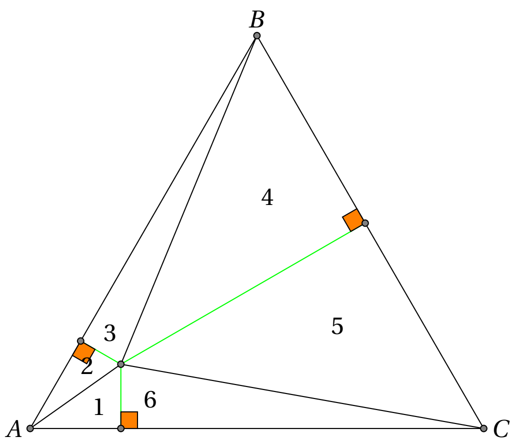
Līdz ar to četrstūrim $OECF$ ir trīs taisni leņķi, tātad tas ir taisnstūris. Blakusmalas $OE = OF$ kā rādiusi, tātad $OECF$ ir kvadrāts un

$$OE = EC = CF = OF = r.$$

Tad $EB = BC - EC = a - r$ un $AF = AC - CF = b - r$. Tā kā $EB = BD$, $AF = AD$ (kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no viena punkta) un $AB = BD + DA$, tad

$$c = a - r + b - r;$$
$$2r = a + b - c;$$
$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

7. piemērs. No patvaļīgi atlikta punkta regulāra trijstūra ABC iekšpusē vilkti perpendikuli pret tā malām. Šis punkts savienots arī ar trijstūra virsotnēm. Iegūtajos 6 taisnleņķa trijstūros ievilktas riņķa līnijas.



Apzīmēsim i-tajā trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar r_i. Pierādīt, ka $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 + r_6$.

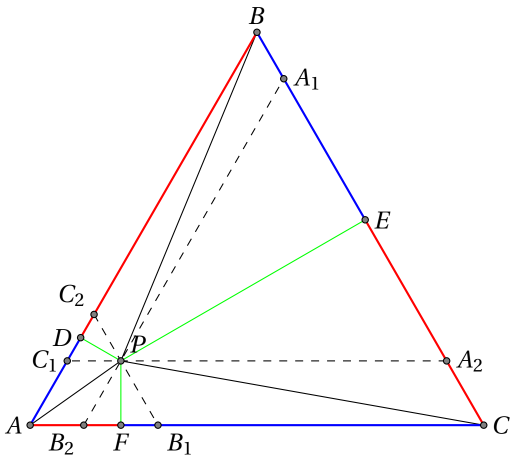
Ar P apzīmēsim doto punktu ΔABC iekšienē, bet ar D, E, F – attiecīgi perpendikulu pamatus no P pret malām AB, BC un CA. No iepriekšējā uzdevuma seko, ka jāpierāda vienādība

$$\frac{PF+FA-PA}{2} + \frac{PD+DB-PB}{2} + \frac{PE+EC-PC}{2} = \frac{PD+AD-PA}{2} + \frac{PE+EB-PB}{2} + \frac{PF+FC-PC}{2}$$

jeb, ekvivalenti,

$$FA + DB + EC = AD + EB + FC. \tag{1}$$

Caur P novilksim taisnes, kas paralēlas ΔABC malām; taišņu krustpunktus ar malām apzīmēsim attiecīgi ar A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 un C_2 (sk. zīm.):



Tad

- AB_2PD, PA_2CB_1 un PC_2BA_1 ir paralelogrami, jo to malas ir pa pāriem paralēlas;
- Trīsstūri PC_1C_2, PA_1A_2 un PB_1B_2 ir regulāri, jo to malas ir paralēlas vienādmalu trīsstūra ΔABC malām.

Seko, ka

- $AB_2 = BA_1$ (AB_2PD ir paralelograms, tātad pretējās malas AB_2 un PC_1 ir vienādas; $PC_1 = PC_2$ kā regulāra trīsstūra PC_1C_2 malas; $PC_2 = BA_1$ kā paralelograma PC_2BA_1 pretējās malas);
- $B_2F = FB_1$ (ΔB_2PB_1 ir vienādmalu un tajā PF ir augstums pret B_1B_2, tātad arī mediāna; līdz ar to F ir B_1B_2 viduspunkts);
- $B_1C = BC_2$ ($CB_1 = PA_2$ kā paralelograma pretējās malas; $PA_2 = PA_1$ kā regulāra trīsstūra malas; $PA_1 = BC_2$ kā paralelograma pretējās malas);
- $DC_1 = DC_2$ (ΔPC_1C_2 ir regulārs un PD ir mediāna pret C_1C_2);
- $CA_2 = AC_1$ ($CA_2 = PB_1$ kā paralelograma pretējās malas; $PB_1 = PB_2$ kā regulāra trīsstūra malas; $PB_2 = AC_1$ kā paralelograma pretējās malas);
- $EA_2 = EA_1$ (ΔPA_1A_2 ir regulārs un PE ir mediāna pret A_1A_2).

Līdz ar to

$$\begin{aligned}
FA + DB + EC = & \\
&= FB_2 + B_2A + DC_2 + C_2B + EA_2 + A_2C = \\
&= FB_1 + BA_1 + DC_1 + B_1C + EA_1 + AC_1 = \\
&= (FB_1 + B_1C) + (BA_1 + EA_1) + (DC_1 + AC_1) = \\
&= FC + EB + DA,
\end{aligned}$$

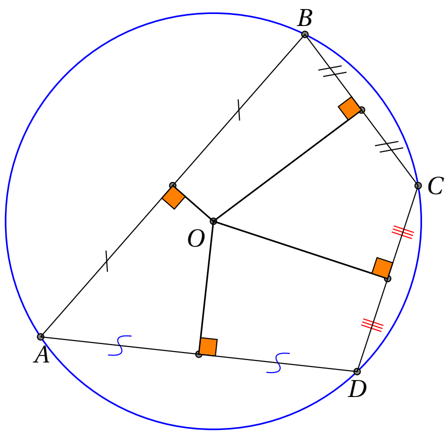
kas pierāda vajadzīgo vienādību.

5. Četrstūrī ievilktā un apvilktā riņķa līnija

5.1. Ievilkts četrstūris

Par **riņķa līnijā ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par **četrstūrim apvilktu riņķa līniju**.

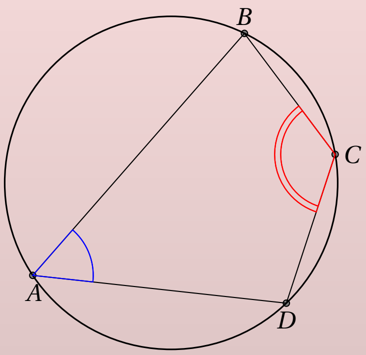
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.



Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, lai četrstūrim varētu apvilkt riņķa līniju

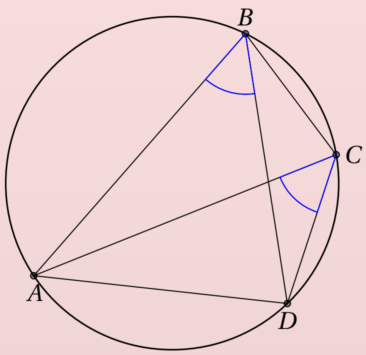
Ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja:

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;



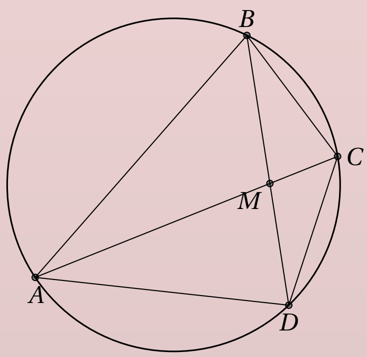
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$$

- izpildās vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$;



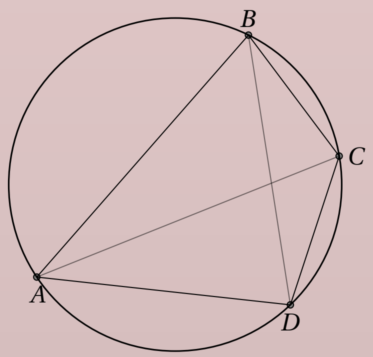
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$

- ir spēkā vienādība $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, kur M ir četrstūra diagonāļu AC un BD krustpunkts;



$AM \cdot MC = BM \cdot MD$

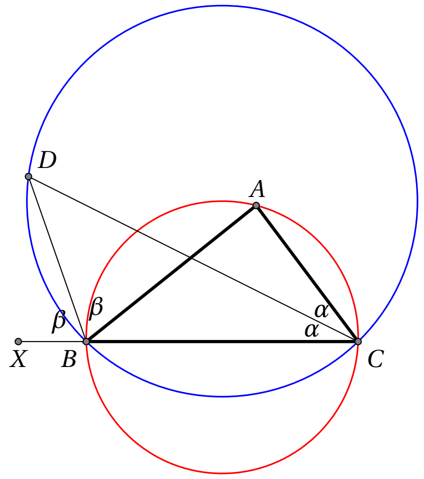
- izpildās vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ **(Ptolemaja teorēma un tās apgrieztā teorēma)** .



$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

8. piemērs. Trijstūra ABC leņķa ACB bisektrise un leņķa ABC blakusleņķa bisektrise krustojas punktā D.

Pierādīt, ka ΔBCD apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas.



Apzīmē $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = \alpha$ un $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBX = \beta$. Tad $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2\beta$ un

$$\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha).$$

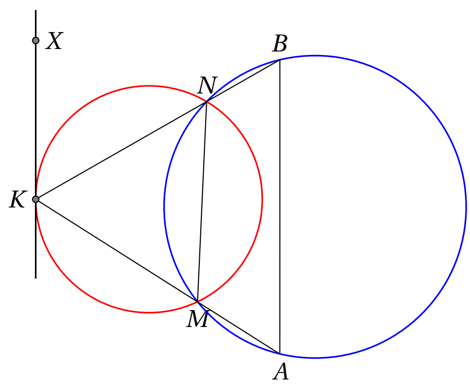
No otras puses,

$$\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle DBA - \sphericalangle ABC - \sphericalangle DCB = 180^\circ - \beta - (180^\circ - 2\beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Aplūko abas apvilktās riņķa līnijas. Abām ir kopīga horda BC. Trijstūrim BDC apvilktajā riņķa līnijā uz šīs hordas balstās ievilktais leņķis $\sphericalangle BDC = \beta - \alpha$. Tātad atbilstošajam centra leņķim jābūt divreiz lielākam, t.i., $\sphericalangle BOC = 2(\beta - \alpha)$, kur O ir ΔBCD apvilktās riņķa līnijas centrs.

Taču tad redzam, ka $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BAC = 2(\beta - \alpha)$, tātad punkti O, A, B un C atrodas uz vienas riņķa līnijas, t.i., O atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

9. piemērs. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Uz vienas no tām ārpus otras riņķa līnijas atlikts punkts K. Taisnes KM un KN krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos A un B tā, ka M atrodas starp A un K, bet N – starp B un K. Pierādīt, ka taisne AB paralēla pirmās riņķa līnijas pieskarei punktā K.

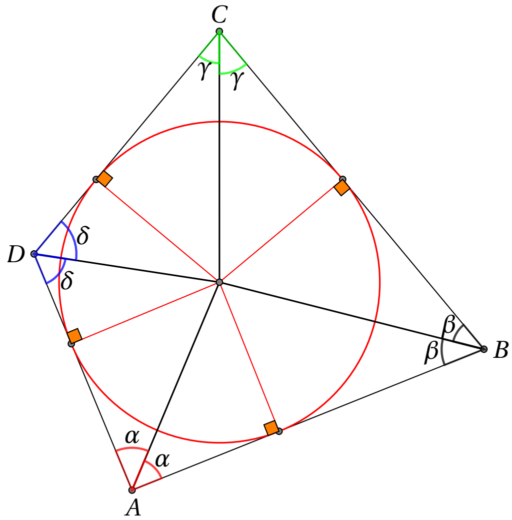


- No hordas-pieskares leņķa un ievilktā leņķa īpašībām seko, ka $\sphericalangle XKN = \sphericalangle KMN$.
- $\sphericalangle KMN = 180^\circ - \sphericalangle AMN$ kā blakusleņķi.
- Riņķī ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, tātad $180^\circ - \sphericalangle AMN = \sphericalangle ABN$.
- Tātad $\sphericalangle KMN = \sphericalangle ABN$.
- Secinām, ka $\sphericalangle XKN = \sphericalangle KMN = \sphericalangle ABN$; no tā, ka iekšējie šķērsleņķi ir vienādi, seko taišņu KX un AB paralelitāte.

5.2. Apvilkts četrstūris

Par **riņķa līnijai apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par **četrstūrī ievilktu riņķa līniju**.

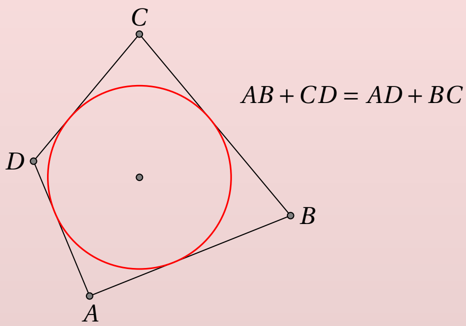
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.



Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, lai četrstūrī varētu ievilkt riņķa līniju

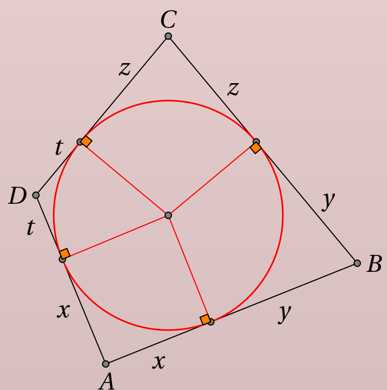
Izliektu četrstūri $ABCD$ var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja:

- tā pretējo malu garumu summas ir vienādas;

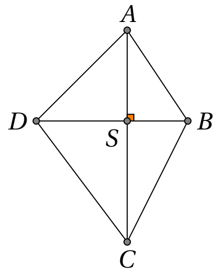


- eksistē tādi pozitīvi skaitļi x, y, z un t, ka vienlaikus izpildās vienādības

$$AB = x + y, \quad BC = y + z, \quad CD = z + t, \quad DA = t + x.$$



10. piemērs. Četrstūris $ABCD$ apvilkts ap riņķa līniju, un tā diagonāles AC un BD ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.



Apzīmēsim ar S diagonāļu AC un BD krustpunktu. No Pitagora teorēmas seko, ka

$$AB^2 = SA^2 + SB^2;$$
$$CD^2 = SC^2 + SD^2.$$

Saskaitot abas vienādības, iegūstam

$$AB^2 + CD^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2.$$

Analoģiski iegūst, ka

$$AD^2 + CB^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2.$$

Secinām, ka pastāv vienādība

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2. \tag{2}$$

Tā kā četrstūris ir apvilkts ap riņķa līniju, tad $AB + CD = AD + BC$. Kāpinot šo vienādību kvadrātā, iegūst

$$AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD = AD^2 + CB^2 + 2AD \cdot CB. \tag{3}$$

Atņemot no (3) vienādību (2), iegūstam

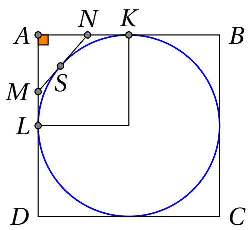
$$2AB \cdot CD = 2AD \cdot CB.$$

Dalot abas vienādības puses ar 2, iegūst vajadzīgo.

11. piemērs. Kvadrātā ievilkta riņķa līnija ar rādiusu R. Taisne, kas tai pieskaras, nošķeļ no kvadrāta taisnleņķa trijstūri.

Pierādīt, ka šī trīsstūra hipotenūza ir īsāka nekā R.

Taisni, kas no kvadrāta $ABCD$ atšķeļ taisnleņķa trīsstūri, apzīmējam ar MN, $M \in AD$, $N \in AB$. Taisnes MN pieskaršanās punktu riņķa līnijai apzīmējam ar S. Punkti K un L ir attiecīgi riņķa līnijas pieskaršanās punkti malām AB un AD (skat. zīmējumu).



No pieskaru, kas vilktas no viena punkta, īpašības seko vienādības $ML = MS$, $NS = NK$. Tātad ΔAMN perimetrs ir vienāds ar

$$AM + AN + MN = (AM + MS) + (AN + NS) = (AM + ML) + (AN + NK) = 2R.$$

Ievērosim, ka $AM + AN > MN$ (trīsstūra nevienādība); tātad

$$MN < \frac{AM + AN + MN}{2} = R,$$

kas arī bija jāpierāda.