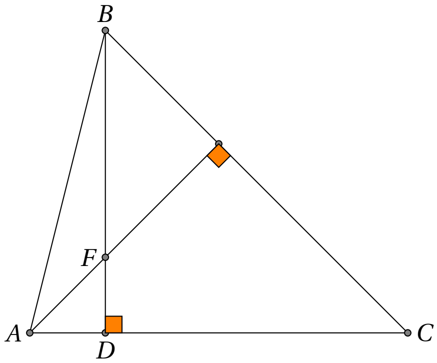
1. uzdevums. Šaurleņķu trīsstūrī ABC novilkti augstumi BD un AE, tie krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D un F atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Risinājums.



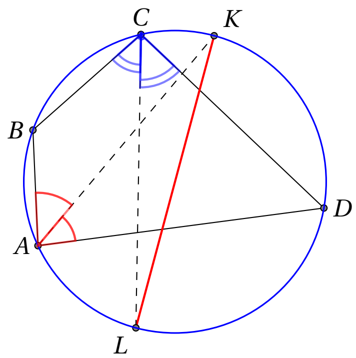
- $\sphericalangle FEC = 90°$ un $\sphericalangle FDC = 90°$, jo pēc dotā BD un AE ir augstumi.
- Līdz ar to četrstūra $FECD$ pretējo leņķu $\sphericalangle FEC$ un $\sphericalangle FDC$ summa ir

$$\sphericalangle FEC + \sphericalangle FDC = 90° + 90° = 180°.$$

- Tā kā četrstūra $FECD$ pretējo leņķu $\sphericalangle FEC$ un $\sphericalangle FDC$ summa ir $180°$, tad ap to var apvilkt riņķa līniju, t.i., punkti F, E, C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

2. uzdevums. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Leņķu BAC un BCD bisektrises šo riņķa līniju krusto atbilstoši punktos K un L. Pierādīt, ka KL ir šīs riņķa līnijas diametrs.

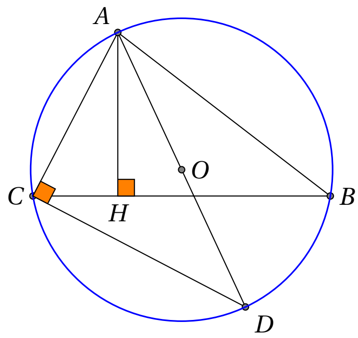
Risinājums.



- $\sphericalangle LAK = \sphericalangle LAD + \sphericalangle DAK$.
- $\sphericalangle LAD = \sphericalangle LCD$ (ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku LD).
- $\sphericalangle LCD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BCD$ (pēc dotā CL ir $\sphericalangle BCD$ bisektrise).
- $\sphericalangle KAD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAD$ (pēc dotā AK ir $\sphericalangle BAD$ bisektrise).
- Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle LAK = \dfrac{1}{2}(\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD)$.
- $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD = 180°$ (ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$).
- Tad $\sphericalangle LAK = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.
- Horda, uz kuru balstās taisns leņķis, ir diametrs. Tātad pierādīts, ka KL ir diametrs.

3. uzdevums. Šaurleņķu trīsstūrī ABC nogrieznis AH ir augstums pret BC, bet O ir ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka $\sphericalangle BAH = \sphericalangle OAC$.

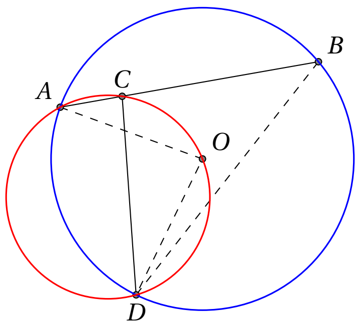
Risinājums. Novilksim diametru AD, tad $\sphericalangle ACD = 90° = \sphericalangle AHB$.



- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku AC.
- $\Delta DCA \sim \Delta BHA$ (pēc pazīmes ll);
- $\sphericalangle OAC = \sphericalangle BAH$ kā līdzīgu trīsstūru DCA un BHA atbilstošie leņķi.

4. uzdevums. Dota riņķa līnija ar centru O. Nogrieznis AB ir šīs riņķa līnijas horda, C ir hordas AB iekšējs punkts. Riņķa līnija, kas apvilkta trīsstūrim ACO, krusto pirmo riņķa līniju vēl punktā D. Pierādīt, ka $BC = CD$.

Risinājums.

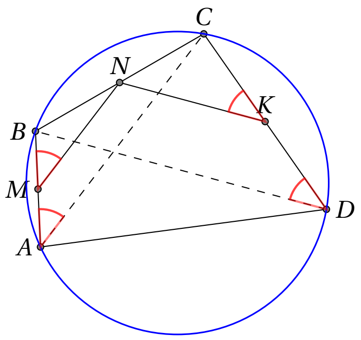


Pierādīsim, ka $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC$, tad no tā sekos, ka ΔBCD ir vienādsānu trīsstūris ar pamatu BD; līdz ar to $CB = CD$.

- $\sphericalangle CBD = 0.5\sphericalangle AOD$ (ievilktā leņķa lielums ir puse no atbilstošā centra leņķa lieluma).
- $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ACD$ (mazākajā riņķa līnijā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku AD).
- Seko, ka $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle CBD$.
- $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD + \sphericalangle CDB$ (trīsstūra CBD ārējais leņķis).
- Iegūts, ka $2\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC$ jeb $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC$.
- Tātad ΔCBD ir vienādsānu trīsstūris ar pamatu BD, kas pierāda vajadzīgo.

5. uzdevums. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$. Punkti M, N un K ir attiecīgi malu AB, BC un CD viduspunkti. Zināms, ka $\sphericalangle BMN = 40°$. Aprēķināt leņķi $\sphericalangle NKC$!

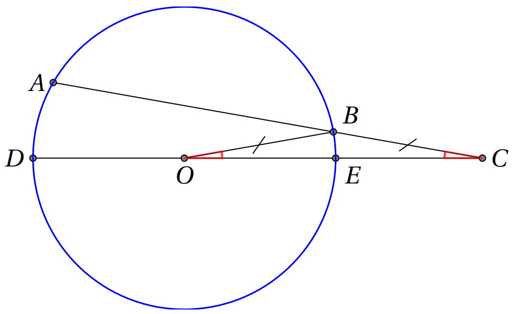
Risinājums.



- MN ir ΔBAC viduslīnija, tādēļ $MN \parallel AC$.
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BMN = 40°$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm MN un AC.
- $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 40°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku BC.
- KN ir ΔCDB viduslīnija, tādēļ $KN \parallel DB$.
- $\sphericalangle NKC = \sphericalangle BDC = 40°$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm NK un BD.
- Tātad $\sphericalangle NKC = 40°$.

6. uzdevums. Riņķa līnijā ar centru O novilkta horda AB, kas pagarināta aiz punkta B, novelkot nogriezni BC tā, lai $BC = OA$. Taisne OC krusto riņķa līniju punktā D (O atrodas starp C un D). Aprēķināt $\sphericalangle ACD$, ja $\sphericalangle AOD = 30°$.

Risinājums. Apzīmēsim otru OC krustpunktu ar riņķa līniju ar E.



- Apzīmēsim $\sphericalangle ACD = \alpha$.
- Pēc dotā $BC = OA$. Tā kā $OA = OB$ kā rādiusi, tad secinām, ka $BC = BO$ un ΔOBC ir vienādsānu.
- $\alpha = \sphericalangle BCO = \sphericalangle BOC$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trīsstūrī.
- Loka leņķiskais lielums vienāds ar atbilstošo centra leņķa lielumu; tātad

$$\overset{\frown}{AD} = \sphericalangle AOD = 30° \quad \text{un} \quad \overset{\frown}{BE} = \sphericalangle BOE = \alpha.$$

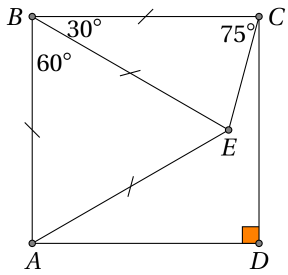
- Saskaņā ar apgalvojumu par ārējā leņķa lielumu, $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BE}\right)$ (ņemti tie loki, kas atrodas starp taisnēm CA un CD).
- Iegūta vienādība $\alpha = \frac{1}{2}\left(30° - \alpha\right)$. No šejienes izsakām α, iegūstot

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\alpha &= \frac{1}{2} \cdot 30° \\ 2\alpha &= 30° - \alpha \\ 3\alpha &= 30° \\ \alpha &= 10°. \end{aligned}$$

- Atbilde: $\sphericalangle ACD = 10°$.

7. uzdevums. Kvadrāta $ABCD$ iekšienē ņemts punkts E tā, lai ΔABE būtu regulārs. Aprēķināt $\sphericalangle ECD$.

Risinājums. **1. risinājums**

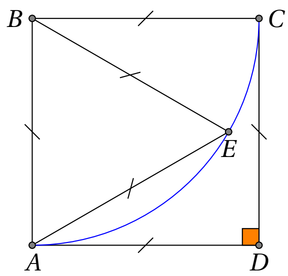


- $\sphericalangle ABE = 60^\circ$ kā regulāra trīsstūra leņķis.
- $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
- ΔEBC ir vienādsānu, jo $EB = BC$. Tāpēc pamata pieleņķi ir

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC = \frac{180^\circ - \sphericalangle EBC}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

- Tātad $\sphericalangle ECD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

2. risinājums

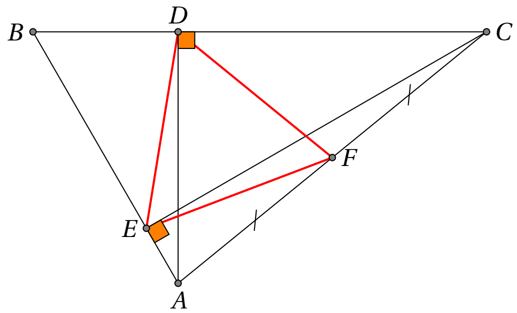


- Tā kā $BA = BE$ kā regulāra trīsstūra malas garumi un $BC = BA$ kā kvadrāta malas garumi, tad punkti A, E, C atrodas uz riņķa līnijas ω ar centru B.
- $BC \perp CD$ kā kvadrāta malas; tā kā BC ir ω rādiuss, tad CD ir ω pieskare.
- $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$ kā hordas-pieskares leņķis.
- $\overset{\frown}{EC} = \sphericalangle EBC$ (loka leņķiskais lielums vienāds ar atbilstošo centra leņķi).
- $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
- Secinām, ka

$$\sphericalangle ECD = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

8. uzdevums. Dots šaurleņķu trīsstūris ABC. Zināms, ka $\sphericalangle B = 60^\circ$, AD un CE ir augstumi, bet F ir malas AC viduspunkts. Pierādīt, ka ΔDEF ir regulārs.

Risinājums.

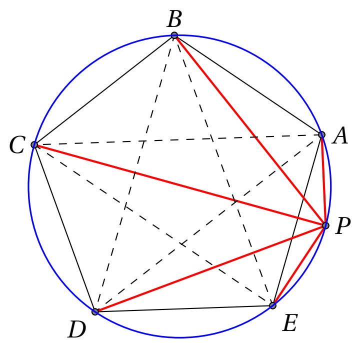


- Parādīsim, ka $FE = FD$ un $\sphericalangle DFE = 60^\circ$, tad no tā sekos, ka ΔDEF ir regulārs.
- Tā kā $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, tad ap četrstūri $AEDC$ var apvilkt riņķa līniju ω.
- Riņķa līnijas ω centrs ir F, jo ω ir apvilkta ap taisnleņķa trīsstūriem AEC un ADC, kam AC ir hipotenūza, taču taisnleņķa trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs ir hipotenūzas viduspunkts.
- Seko, ka $FE = FD$ kā rādiusi.
- $\sphericalangle EFD = 2\sphericalangle ECD$ (centra leņķis ir divreiz lielāks nekā ievilktais leņķis, kas balstās uz to pašu loku).
- No taisnleņķa trīsstūra ΔBEC seko $\sphericalangle ECB = 90^\circ - \sphericalangle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
- Pamatots, ka $FE = FD$ un $\sphericalangle EFD = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Tātad ΔDEF ir regulārs, kas arī bija jāpierāda.

9. uzdevums. Riņķa līnijā ievilkts regulārs piecstūris $ABCDE$. Uz mazākā loka AE atzīmēts punkts P. Izmantojot Ptolemaja teorēmu, pierādīt, ka

$$PA + PC + PE = PB + PD.$$

Risinājums.



- Visu regulārā piecstūra malu garumi ir vienādi; apzīmēsim tos ar a.
- Arī visu piecu regulārā piecstūra diagonāļu garumi ir vienādi (pierāda, izmantojot vienādus trīsstūrus ABE, BCA, CDB, DEC un EAD (pēc pazīmes mlm)); apzīmēsim diagonāles garumu ar d.
- No Ptolemaja teorēmas četrstūrī $PBCD$ seko, ka $PB \cdot CD + PD \cdot BC = PC \cdot BD$ jeb

$$PB \cdot a + PD \cdot a = PC \cdot d. \tag{1}$$

- No Ptolemaja teorēmas četrstūrī $PABD$ seko, ka $PA \cdot BD + PD \cdot AB = PB \cdot AD$ jeb

$$PA \cdot d + PD \cdot a = PB \cdot d. \tag{2}$$

- No Ptolemaja teorēmas četrstūrī $PBDE$ seko, ka $PB \cdot DE + PE \cdot BD = PD \cdot BE$ jeb

$$PB \cdot a + PE \cdot d = PD \cdot d. \tag{3}$$

- Saskaita vienādības (2) un (3) un atņem vienādību (1); iegūst

$$d\,(PA+PE) = d\,(PD+PB-PC)\,.$$

Dalot abas puses ar d, iegūst $PA+PE = PB+PD-PC$ jeb

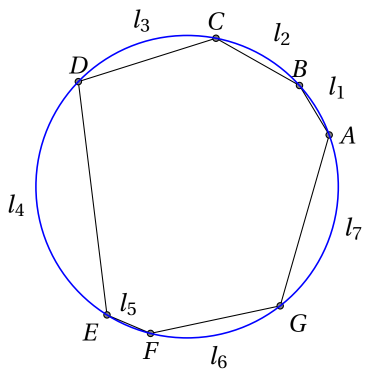
$$PA+PC+PE = PB+PD,$$

kas arī bija jāpierāda.

10. uzdevums. Septiņstūris $ABCDEFG$ ir ievilkts riņķa līnijā (t.i., visas septiņstūra virsotnes atrodas uz riņķa līnijas). Zināms, ka šīs riņķa līnijas centrs ir septiņstūra $ABCDEFG$ iekšējs punkts. Pierādīt, ka

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFG < 450°!$$

Risinājums. Ar $\overset{\frown}{l_1}, \overset{\frown}{l_2}, \ldots, \overset{\frown}{l_7}$ apzīmēsim attiecīgi lokus $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \ldots, \overset{\frown}{GA}$ (izvēlēti tie loki, kas nesatur citus septiņstūra punktus, skat. zīmējumu).



- Ievilktais leņķis ir vienāds ar pusi no tam atbilstošā loka leņķiskā lieluma; tātad

$$\sphericalangle ABC = \frac{\overset{\frown}{l_3}+\overset{\frown}{l_4}+\overset{\frown}{l_5}+\overset{\frown}{l_6}+\overset{\frown}{l_7}}{2};$$
$$\sphericalangle CDE = \frac{\overset{\frown}{l_5}+\overset{\frown}{l_6}+\overset{\frown}{l_7}+\overset{\frown}{l_1}+\overset{\frown}{l_2}}{2};$$
$$\sphericalangle EFG = \frac{\overset{\frown}{l_7}+\overset{\frown}{l_1}+\overset{\frown}{l_2}+\overset{\frown}{l_3}+\overset{\frown}{l_4}}{2}.$$

- Tātad jāpierāda, ka

$$\left(\overset{\frown}{l_3}+\overset{\frown}{l_4}+\overset{\frown}{l_5}+\overset{\frown}{l_6}+\overset{\frown}{l_7}\right)+\left(\overset{\frown}{l_5}+\overset{\frown}{l_6}+\overset{\frown}{l_7}+\overset{\frown}{l_1}+\overset{\frown}{l_2}\right)+\left(\overset{\frown}{l_7}+\overset{\frown}{l_1}+\overset{\frown}{l_2}+\overset{\frown}{l_3}+\overset{\frown}{l_4}\right) < 2\cdot 450° = 900°$$

jeb

$$2\left(\overset{\frown}{l_1}+\overset{\frown}{l_2}+\overset{\frown}{l_3}+\overset{\frown}{l_4}+\overset{\frown}{l_5}+\overset{\frown}{l_6}+\overset{\frown}{l_7}\right)+\overset{\frown}{l_7} < 900°. \tag{4}$$

- Visu septiņu loku $\overset{\frown}{l_1}, \ldots, \overset{\frown}{l_7}$ summa ir vienāda ar 360°; tātad nevienādība (4) ir ekvivalenta ar

$$2\cdot 360° + \overset{\frown}{l_7} < 900°$$

jeb

$$\overset{\frown}{l_7} < 180°. \tag{5}$$

- Tā kā riņķa līnijas centrs atrodas dotā septiņstūra iekšienē (pēc dotā), tad tas atrodas tajā pašā pusplaknē no taisnes AG kā citas septiņstūra virsotnes. Tātad horda AD ir mazāka par diametru, bet atbilstošais loks $\overset{\frown}{l_7} < 180°$.
- Pierādīta nevienādība (5), taču tas pierāda arī vajadzīgo apgalvojumu.