Nevienādību pierādīšana – klasiskās nevienādības

Iepriekšējā nodarbībā aplūkojām paņēmienu, kā pierādīt nevienādības, atdalot pilnos kvadrātus un sadalot nevienādības vienu vai abas puses reizinātājos. Tomēr bieži vien sarežģītākas nevienādības neizdodas pierādīt izmantojot tikai šos paņēmienus, tāpēc ir lietderīgi zināt un prast pielietot dažas speciālas nevienādības.

Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

Iespējams, pati pazīstamākā un biežāk lietotā ir nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Bieži to saīsināti apzīmē kā $A \geq G$ (angliski: AM-GM, arithmetic mean - geometric mean).

Definīcija. Par n skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo aritmētisko sauc lielumu $\frac{a_1+a_2+\cdots a_{n-1}+a_n}{n}$.

Definīcija. Par n nenegatīvu skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo ģeometrisko sauc lielumu $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko
Ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir nenegatīvi skaitļi, tad

$$\frac{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}}{\boldsymbol{n}} \geq \sqrt[n]{\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}},$$

tas ir, skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar šo skaitļu vidējo ģeometrisko, turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi.

Secinājumi

- Ja $n = 2$, tad nevienādība apgalvo, ka $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ nenegatīviem skaitļiem x un y.
- Ja $n = 3$, tad nevienādība apgalvo, ka $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ nenegatīviem skaitļiem x, y un z.
- Dažreiz novērtējumu ir ērti lietot formā $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
- Pozitīviem skaitļiem x un y izpildās nevienādība $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, tas ir, skaitļa un tam apgrieztā skaitļa summa ir vismaz 2.
- Ja x ir pozitīvs skaitlis, tad $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Uzdevumi no matemātikas sacensībām

1. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $3a^8 + 5b^8 \geq 8a^3b^5$.
Atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$3a^8 + 5b^8 = a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 \geq 8 \cdot \sqrt[8]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8} =$$
$$= 8a^3b^5.$$

2. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x + \frac{2017}{x}$, ja $x > 0$?
Atrisinājums. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$x + \frac{2017}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2017}{x}} = 2\sqrt{2017}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja abi saskaitāmie ir vienādi, tas ir, $x = \frac{2017}{x}$ jeb $x^2 = 2017$ un $x = \sqrt{2017}$.

Ievēro! Uzdevuma, kurā jāatrod lielākā (mazākā) vērtība, atrisinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) jāpierāda, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

3. Dots, ka a, b un c ir pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $(1+ab)(1+ac)(1+bc) \geq 8abc$.
Atrisinājums. No nevienādības AM-GM izriet, ka

$$1+ab \geq 2\sqrt{ab}; \qquad 1+ac \geq 2\sqrt{ac}; \qquad 1+bc \geq 2\sqrt{bc}.$$

Sareizinot iegūtās nevienādības (to drīkst darīt, jo katras nevienādības abas puses ir pozitīvas), iegūstam

$$(1+ab)(1+ac)(1+bc) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{abacbc} = 8abc.$$

4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.
Atrisinājums. Reizinot abas nevienādības puses ar $a+b+c>0$, iegūstam

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Novērtēsim nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 3+2+2+2=9,$$

kas arī bija jāpierāda.

5. Pierādīt, ka visiem reāliem x un y pastāv nevienādība $x^2y^2(x^2+y^2-3) \geq -1$.
Atrisinājums. Ja $x=0$ vai $y=0$, tad $0 \geq -1$ un nevienādība ir patiesa.
Ja $x \neq 0$ un $y \neq 0$, tad, dalot nevienādības abas puses ar $x^2y^2>0$, iegūstam

$$x^2+y^2-3 \geq -\frac{1}{x^2y^2};$$
$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

Nevienādības kreisās puses izteiksmei lietojam nevienādību AM-GM un iegūstam vajadzīgo

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 3.$$

6. Dots, ka $0<a,b,c<1$. Pierādīt, ka $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$.
Atrisinājums. Ja $0<a,b,c<1$, tad $\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}$.
Izmantojot iepriekš iegūto novērtējumu un nevienādību AM-GM, iegūstam

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq$$
$$\leq \frac{a+b+c}{3}+\frac{1-a+1-b+1-c}{3}=1,$$

kas arī bija jāpierāda.

7. Dots, ka $a>b>c>d$. Pierādīt, ka $a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} \geq 6$.
Atrisinājums. Nevienādības kreisās puses izteiksmei pieskaitām un atņemam vienus un tos pašu saskaitāmos:

$$a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} = a-b+b-c+c-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} =$$
$$= (a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} =$$
$$= (a-b)+\frac{1}{a-b}+(b-c)+\frac{1}{b-c}+(c-d)+\frac{1}{c-d} \geq 2+2+2=6.$$

Citas nevienādības starp vidējiem

Pozitīviem skaitļiem a_i, $i = 1,2,\ldots,n$ izpildās nevienādības.
Nevienādība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko $\boldsymbol{Q \geq A}$**:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Nevienādība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko $\boldsymbol{A \geq H}$**:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

Piezīme. Ir spēkā nevienādības $Q \geq A \geq G \geq H$.

Košī nevienādība

Cita nozīmīga nevienādība ir Košī nevienādība (saukta arī par Košī-Švarca vai Košī-Buņakovska nevienādību).

Košī nevienādība
Ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir reāli skaitļi, tad

$$\boldsymbol{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2},$$

Turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja eksistē tāda konstante c, ka $y_1 = cx_1$, $y_2 = cx_2$, ..., $y_n = cx_n$ vai arī $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bieži izmantotas sekas no Košī nevienādības var formulēt šādi: Ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir nenegatīvi skaitļi, tad ir spēkā nevienādība

$$\left(\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \cdots + \sqrt{x_n y_n}\right)^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots y_n).$$

Piemērs. Pozitīvi skaitļi a, b, c apmierina vienādību $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

Atrisinājums. Reizinot nevienādību ar pozitīvu skaitli $\big((b+3c) + (c+3a) + (a+3b)\big) = 4(a+b+c)$, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$\big((b+3c) + (c+3a) + (a+3b)\big)\left(\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b}\right) \geq 4.$$

No Košī nevienādības izriet, ka

$$\big((b+3c) + (c+3a) + (a+3b)\big)\left(\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b}\right) \geq$$
$$\geq \left(\sqrt{(b+3c)\cdot\frac{a}{b+3c}} + \sqrt{(c+3a)\cdot\frac{b}{c+3a}} + \sqrt{(a+3b)\cdot\frac{c}{a+3b}}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

kas arī bija jāpierāda.

Literatūra

- A.Ločmele, I.Palma, L.Ramāna, A.Andžāns «Nevienādību pierādīšanas metodes», 1997 http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/Nvd_pier.pdf
- J.Herman, R.Kučera, J.Šimša «EQUATIONS AND INEQUALITIES. Elementary problems and Theorems in Algebra and Number Theory», Springer, 2000
- Mazās matemātikas universitātes lekcija "Nevienādības starp vidējiem" materiālu http://nms.lu.lv/mmu/m-g/