Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana

Skolas kursā galvenais uzsvars tiek likts uz nevienādību risināšanu, bet matemātikas olimpiādēs nevienādības ir jāpierāda. Svarīgi ir saprast atšķirību starp nevienādību risināšanu un pierādīšanu.

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām,** ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Piemēram, nevienādības $x+1>2017$ un $x>2016$ ir ekvivalentas.

Bieži vien nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Tādējādi iegūst nevienādību, kuras patiesums ir acīmredzams vai viegli noskaidrojams ar elementāru spriedumu palīdzību.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.
  Piemēram, $2x+3x<3+7 \quad \Rightarrow \quad 5x<10.$
- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu.
  Piemēram, $x-9<5 \quad \Rightarrow \quad x-9+\mathbf{9}<5+\mathbf{9}.$
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).
  Piemēram, $\frac{1}{x^2+3}\leq 5 \quad \left|\cdot\left(\boldsymbol{x^2+3}\right)>\mathbf{0}\right. \quad \Rightarrow \quad 1\leq 5(x^2+3).$
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).
  Piemēram, $-\frac{1}{3}x\geq 7 \quad |\cdot(-3) \quad \Rightarrow \quad x\leq -21.$
- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas apgabalā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls nepāra skaitlis.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls pāra skaitlis un definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu atdalīšana. Lai atdalītu pilno kvadrātu, izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

Bieži vien tikai ar formulu izmantošanu nepietiek, tāpēc jāizmanto arī spriedumi. Visbiežāk izmantotie ir šādi:

- ja A ir algebriska izteiksme, tad $A^2\geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes, tad $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2\geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad $c_1A_1^2+c_2A_2^2+\cdots+c_nA_n^2\geq 0.$

Piezīme. $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2=0$ tad un tikai tad, ja $A_1=A_2=\cdots=A_n=0.$

Nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos

Dažos gadījumos tikai ar pilno kvadrātu atdalīšanu nepietiek, tāpēc papildus izmanto citas metodes. Dažreiz nevienādību izdodas pierādīt, veicot visu nevienādības locekļu pārnešanu uz vienu pusi un iegūto izteiksmi sadalot reizinātājos. Turklāt šiem reizinātājiem jābūt tādiem, lai par tiem skaidri varētu pateikt, vai tie ir pozitīvi, nenegatīvi vai negatīvi.

Apgalvojumi

- Divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.
- Divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.
- Pozitīva un negatīva skaitļa reizinājums ir negatīvs.

Formulas

- $ab + bc = b(a + c)$;
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

Uzdevumi no matemātikas sacensībām

1. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c \geq 0;$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} \geq 0;$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0;$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem a, b un c.

2. Pierādīt, ka $\frac{a+b}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad arī abu daļu saucēji ir pozitīvi, t. i., $a^2 + b^2 > 0$ un $a^3 + b^3 > 0$, tāpēc nevienādības abas puses drīkst reizināt ar $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) > 0$ (šis ir ekvivalents pārveidojums):

$$(a + b)(a^3 + b^3) \geq (a^2 + b^2)(a^2 + b^2).$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^4 + ab^3 + a^3b + b^4 \geq a^4 + 2a^2b^2 + b^4;$$

$$ab^3 + a^3b - 2a^2b^2 \geq 0;$$

$$ab(b^2 + a^2 - 2ab) \geq 0;$$

$$ab(b - a)^2 \geq 0.$$

Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi un skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem a un b.

3. Kāda ir izteiksmes $x+\frac{2017}{x}$ mazākā iespējamā vērtība, ja $x>0$?

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$x+\frac{2017}{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{2017}+\left(\sqrt{\frac{2017}{x}}\right)^2+2\sqrt{2017}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2017}{x}}\right)^2+2\sqrt{2017}\geq 2\sqrt{2017},$$

jo skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Vienādība izpildās pie $x=\sqrt{2017}$. Tātad dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir $2\sqrt{2017}$.

Ievēro! Uzdevuma, kurā jāatrod lielākā (mazākā) vērtība, atrisinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) jāpierāda, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

4. Pierādīt, ka izteiksme $x^2y^2+x^2+y^2+2x+2y+2$ ir nenegatīva visām reālām x un y vērtībām!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$x^2y^2+x^2+y^2+2x+2y+2=(xy-1)^2+x^2+y^2+2xy+2x+2y+2=$$
$$=(xy-1)^2+(x+y+1)^2\geq 0.$$

kā reālu skaitļu kvadrātu summa.

5. Pierādīt, ka $2x^2+2\sqrt{x^3}-27x-22\sqrt{x}+130\geq 0$ visām nenegatīvām x vērtībām!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$2x^2+2\sqrt{x^3}-27x-22\sqrt{x}+130=(x^2-6x+9)+\left(x^2+2\sqrt{x^3}-21x-22\sqrt{x}+121\right)=$$
$$=(x-3)^2+(x^2-22x+121)+2\sqrt{x^3}+x-22\sqrt{x}=$$
$$=(x-3)^2+(x-11)^2+2\sqrt{x}\cdot(x-11)+x=(x-3)^2+\left(x+\sqrt{x}-11\right)^2\geq 0$$

kā reālu skaitļu kvadrātu summa.

6. Pierādīt, visiem reāliem skaitļiem x, y un z izpildās nevienādība

$$2x^2+\frac{y^2}{2}+z^2-2xy-2xz+yz-2y+4x-2z+2\geq 0.$$

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+2\left(x-\frac{y}{2}\right)(1-z)+(1-2z+z^2)+2\left(x-\frac{y}{2}\right)+1\geq 0;$$
$$\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{y}{2}\right)(1-z)+(1-z)^2\right)+\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{y}{2}\right)+1^2\right)\geq 0;$$
$$\left(x-\frac{y}{2}+1-z\right)^2+\left(x-\frac{y}{2}+1\right)^2\geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x, y un z.

Literatūra

- A.Ločmele, I.Palma, L.Ramāna, A.Andžāns «Nevienādību pierādīšanas metodes», 1997 http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/Nvd_pier.pdf
- J.Herman, R.Kučera, J.Šimša «EQUATIONS AND INEQUALITIES. Elementary problems and Theorems in Algebra and Number Theory», Springer, 2000
- Mazās matemātikas universitātes lekcija "Nevienādību pierādīšana" materiālu http://nms.lu.lv/mmu/m-g/
- Novada matemātikas olimpiādes teorijas materiāls http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/12/NOL_1617_teorija.pdf