Līdzīgi trijstūri

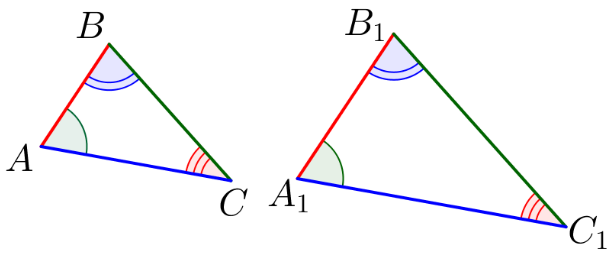
Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi.

Ja trijstūris ABC ir līdzīgs trijstūrim $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Piezīme. Pierakstot trijstūru līdzību, jāievēro arī burtu secība! Vienādiem leņķiem atbilst vienādi burti!

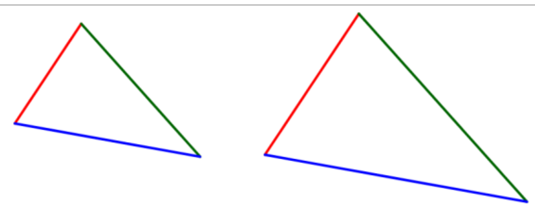
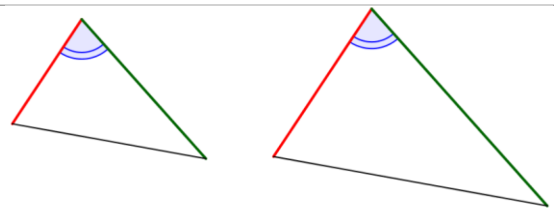
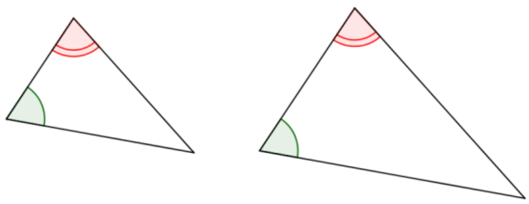
Ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

- $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$;
- $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$;
- $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$;
- $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



Lai noteiktu, vai trijstūri ir līdzīgi, nav jāzina visu malu garumus vai visu leņķu lielumus, to var izdarīt vienkāršāk, izmantojot trijstūru līdzības pazīmes.

Trijstūru līdzības pazīmes

Pazīme	Ilustrācija
„$\boldsymbol{mmm}$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām	
„$\boldsymbol{m\ell m}$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi	
„$\boldsymbol{\ell\ell}$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem	

Risinot uzdevumus, kuros lieto trijstūru līdzību, vispirms jāpārliecinās, vai trijstūri ir līdzīgi. Ja līdzība nav dota, tad tā ir jāpierāda – norādot līdzības pazīmi un atbilstošos elementus.

Talesa teorēma. Ja uz vienas leņķa malas atlikti vienādi nogriežņi un caur to galapunktiem novilktas savstarpēji paralēlas taisnes, kas krusto leņķa otru malu, tad tās arī uz leņķa otras malas atšķeļ savstarpēji vienādus nogriežņus.

Ja uz vienas leņķa malas atlikti nogriežņi, kas nav vienādi, un caur šo nogriežņu galapunktiem vilktas paralēlas taisnes, tad uz otra leņķa malas arī rodas proporcionāli nogriežņi.

Ērti ir lietot nākamo teorēmu, kas ir secinājums no Talesa teorēmas.

Teorēma. Taisne, kas krusto divas trijstūra malas un ir paralēla trešajai malai, atšķeļ trijstūri, kas ir līdzīgs dotajam trijstūrim.

Līdzības koeficients

Skaitli k, kas ir vienāds ar trijstūru atbilstošo malu attiecību, sauc par trijstūru līdzības koeficientu.

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu k), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k.$$

Līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2.$$

Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu k.

Taisnleņķa trijstūris

Eiklīda teorēma. Taisnleņķa trijstūra katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un šīs katetes projekciju uz hipotenūzas.
Taisnleņķa trijstūra augstums, kas novilkts no taisnā leņķa virsotnes, ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzas.

Dots: ΔABC, $\sphericalangle C = 90°$

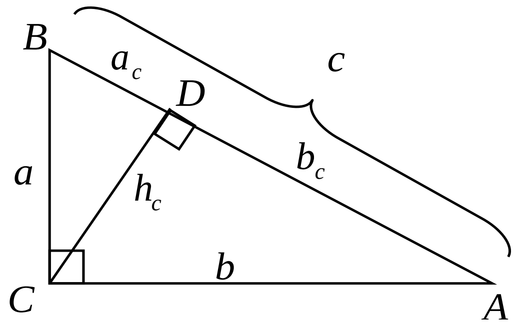
h_c – augstums, kas novilkts pret hipotenūzu

b_c – malas b projekcija uz malu c

a_c – malas a projekcija uz malu c

Jāpierāda:

$$b = \sqrt{c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad h = \sqrt{a_c b_c}$$



Pierādījums. Ievērojam, ka $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CDA = \sphericalangle BDC = 90°$ un $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$.

Līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas, tāpēc

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}$$

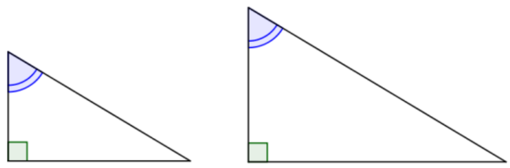
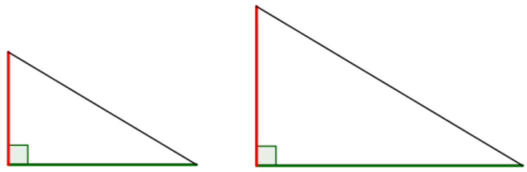
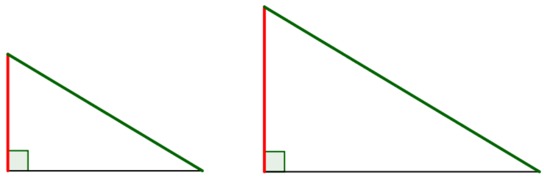
$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a_c b_c}$$

Teorēma pierādīta.

Teorēmas pierādījumā tika izmantots fakts, ko dažreiz ir izdevīgi lietot uzdevumu risināšanā:

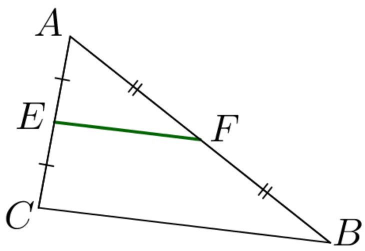
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim.

Taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes

Pazīme	Ilustrācija
Ja viena taisnleņķa trijstūra šaurais leņķis ir vienāds ar otra taisnleņķa trijstūra šauro leņķi, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	
Ja viena taisnleņķa trijstūra katetes ir proporcionālas otra taisnleņķa trijstūra katetēm, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	
Ja viena taisnleņķa trijstūra katete un hipotenūza ir proporcionāla otra taisnleņķa trijstūra katetei un hipotenūzai, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	

Trijstūra viduslīnija

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par **trijstūra viduslīniju.**



Viduslīnijas īpašības:

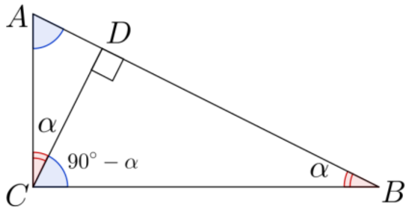
- trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- trijstūra viduslīnijas garums ir vienāds ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas garuma;
- trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

Par trijstūru līdzības pielietojumiem skat. Mazās matemātikas universitātes lekcijas “Atrodi līdzību!” materiālu http://nms.lu.lv/mmu/m-g/

Uzdevumi no matemātikas olimpiādēm

1. Vai jebkuru taisnstūri jebkurai naturālai n ($n \geq 2$) vērtībai var sagriezt n savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums. Taisnstūra diagonāle sadala taisnstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros. Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

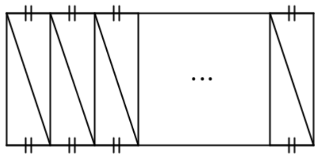


Ja taisnais leņķis ir $\sphericalangle ACB$ (skat. att.), tad no tā velk perpendikulu CD pret hipotenūzu AB. Trijstūri ABC, ACD un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo

- $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$;
- $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBC = \alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pat veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai n ($n \geq 2$) vērtībai.

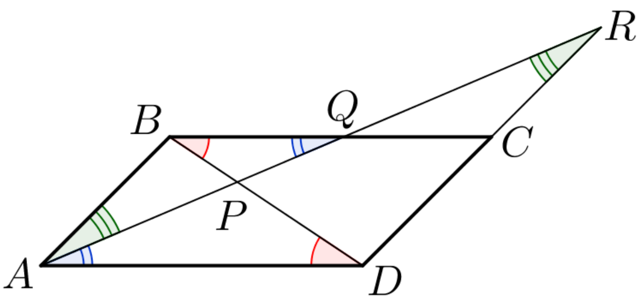
Piezīme. Ja n ir pāra skaitlis, tad doto taisnstūri var sadalīt n vienādos trijstūros (tie ir līdzīgi ar līdzības koeficientu 1). Vispirms doto taisnstūri sadala $\frac{n}{2}$ vienādos taisnstūros un pēc tam katru no iegūtajiem taisnstūriem sadala divos vienādos taisnleņķa trijstūros (skat. att.).



2. Dots paralelograms $ABCD$, uz diagonāles BD atlikts punkts P. Taisne AP krusto taisnes BC un CD atbilstoši punktos Q un R. Pierādīt vienādību $AP^2 = PQ \cdot PR$.

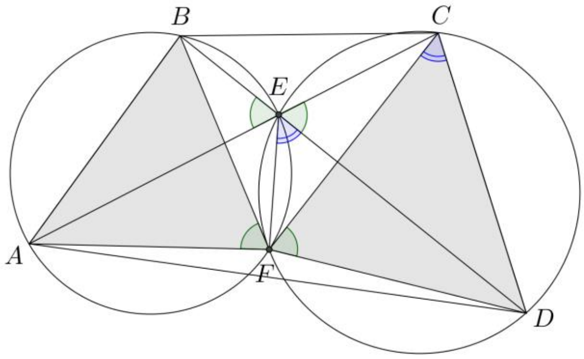
Atrisinājums. $\Delta ABP \sim \Delta RDP$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle APB = \sphericalangle RPD$ kā krustleņķi un $\sphericalangle PRD = \sphericalangle PAB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un CD, kuras šķērso taisne AR. Tā kā līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas, tad $\frac{AP}{PR} = \frac{BP}{PD}$.
$\Delta QPB \sim \Delta APD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle QPB = \sphericalangle APD$ kā krustleņķi un $\sphericalangle PQB = \sphericalangle PAD$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AD un BC, kuras šķērso taisne AR. Tā kā līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas, tad $\frac{PQ}{AP} = \frac{BP}{PD}$.
No iegūtajām malu attiecību vienādībām iegūstam, ka

$$\frac{AP}{PR} = \frac{BP}{PD} = \frac{PQ}{AP} \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{PR} = \frac{PQ}{AP} \quad \Rightarrow \quad AP^2 = PQ \cdot PR.$$



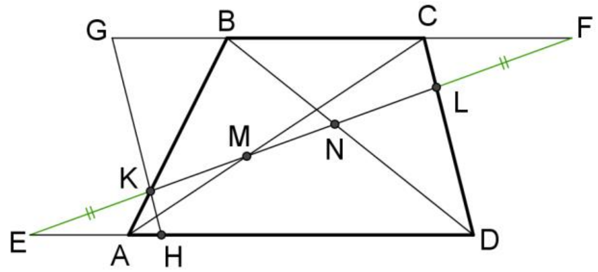
3. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas krustojas arī punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi!

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$ kā krustleņķi (skat. att.) un $\sphericalangle CFD = \sphericalangle DEC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku CD, un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku AB. Tātad $\sphericalangle CFD = \sphericalangle AFB$.
Ievilktie leņķi $\sphericalangle DCF$ un $\sphericalangle DEF$ ir vienādi, jo balstās uz vienu loku FD. No blakusleņķu īpašības izriet, ka $\sphericalangle BEF = 180° - \sphericalangle DEF$. Tā kā ap četrstūri $ABEF$ ir apvilkta riņķa līnija, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$, tāpēc $\sphericalangle BAF = 180° - \sphericalangle BEF = 180° - (180° - \sphericalangle DEF) = \sphericalangle DEF$. Esam ieguvuši, ka $\Delta CDF \sim \Delta ABF$ pēc pazīmes $\ell\ell$.



4. Dota trapece $ABCD$; uz tās pamatu AD un BC malu pagarinājumiem (attiecīgi aiz punktiem A un C) atlikti punkti E un F. Nogrieznis EF krusto malas AB un CD punktos K un L, bet diagonāles AC un BD – attiecīgi punktos M un N. Zināms, ka $EK = LF$. Pierādīt, ka $MK = LN$.

Atrisinājums. Caur punktu K novilksim taisni $t \parallel CD$; tās krustpunktus ar BC un AD apzīmēsim attiecīgi ar G un H (skat. att.).



Ievērojam, ka

- $GCDH$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas;
- $\Delta CLF = \Delta HKE$ pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo
  - $\sphericalangle CLF = \sphericalangle HKE$ kā ārējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm;
  - $\sphericalangle CFL = \sphericalangle KEH$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm;
  - $FL = EK$ pēc dotā;
- $\Delta MAE \sim \Delta MCF$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo
  - $\sphericalangle AME = \sphericalangle CMF$ kā krustleņķi;
  - $\sphericalangle MAE = \sphericalangle MCF$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm;
- $\Delta EAK \sim \Delta FBK$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo
  - $\sphericalangle BKF = \sphericalangle AKE$ kā krustleņķi;
  - $\sphericalangle KEA = \sphericalangle KFB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm;
- $\Delta EKH \sim \Delta FKG$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo
  - $\sphericalangle EKH = \sphericalangle FKG$ kā krustleņķi;
  - $\sphericalangle KEH = \sphericalangle KFG$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm;
- $\Delta NBF \sim \Delta NDE$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo
  - $\sphericalangle BNF = \sphericalangle DNE$ kā krustleņķi;
  - $\sphericalangle NBF = \sphericalangle NDE$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm.

Tātad izpildās šādas vienādības:

- $\frac{ME}{MF} = \frac{EA}{CF}$ (no $\Delta MAE \sim \Delta MCF$);
- $\frac{EA}{CF} = \frac{EA}{EH}$ (no $\Delta CLF = \Delta HKE$);
- $\frac{EA}{EH} = \frac{BF}{GF}$ (no $\frac{EA}{BF} = \frac{EK}{KF} = \frac{EH}{GF}$, kas izriet no līdzīgiem trijstūriem $\Delta EAK \sim \Delta FBK$ un $\Delta EKH \sim \Delta FKG$);
- $\frac{BF}{GF} = \frac{BF}{ED}$, jo $GC = HD$ kā paralelograma pretējās malas un $CF = EH$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas (tātad $GF = GC + CF = EH + HD = ED$);
- $\frac{BF}{ED} = \frac{NF}{NE}$ (no $\Delta NBF \sim \Delta NDE$).

Secinām, ka $\frac{ME}{MF} = \frac{NF}{NE}$. Tā kā $ME + MF = EF = NE + NF$, tas ir iespējams tikai tad, ja $EM = FN$. No otras puses, $EM = EK + KM$ un $NF = LN + LF$ un ir dots, ka $EK = LF$; tātad arī $MK = LN$, kas bija jāpierāda.