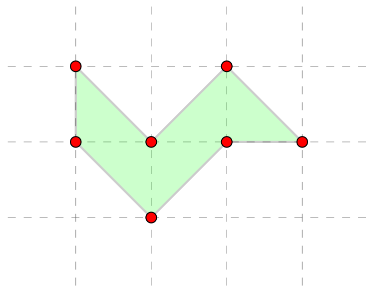
NNV 14/15 4. nodarbība

4-1. No dotā izriet, ka uz šāda daudzstūra kontūra atrodas visi $4^2 = 16$ režģa punkti; tātad neviens režģa punkts neatrodas līnijas iekšpusē. No Pīka formulas seko, ka daudzstūra laukums ir

$$S = i + \frac{r}{2} - 1 = 0 + \frac{16}{2} - 1 = 7.$$

4-2. Piemērs ar septiņstūri:



Ievērosim, ka septiņstūrī, kura virsotnes ir režģa punktos, uz kontūra ir vismaz 7 režģa punkti, tātad $r \geq 7$, bet iekšpusē var arī nebūt neviena punkta, tātad $i \geq 0$. Saskaņā ar Pīka formulu septiņstūra laukums ir

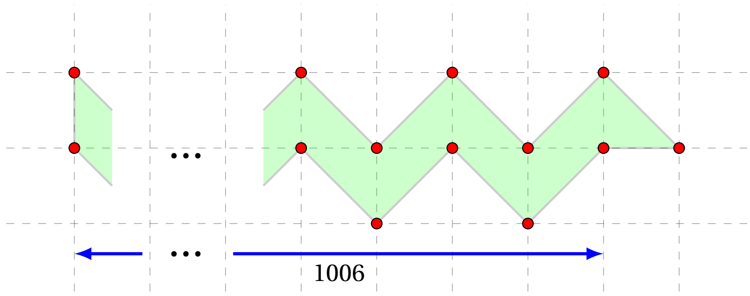
$$S_7 = i + \frac{r}{2} - 1 \geq 0 + \frac{7}{2} - 1 = 2.5\,.$$

Tā kā piemērā uzrādīts septiņstūris ar $r = 7$, $i = 0$, tad attēlotā septiņstūra laukums ir 2.5, kas arī ir mazākais iespējamais laukums šādiem septiņstūriem.

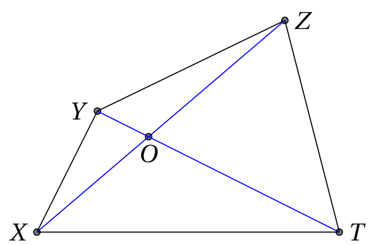
Analoģiski, 2015-stūriem uz kontūra ir vismaz 2015 režģa punkti, tātad $r \geq 2015$ un laukums ir vismaz

$$S_{2015} = i + \frac{r}{2} - 1 \geq 0 + \frac{2015}{2} - 1 = 1006.5\,.$$

Piemērs ar 2015-stūri, kura laukums ir 1006.5:



4-3.



Var pieņemt (citus gadījumus aplūko analoģiski), ka

$$S(XOY) = S(YOZ) = S(ZOT).$$

NNV 14/15 4. nodarbība

Trīsstūriem XOY un YOZ ir kopējs augstums (perpendikuls no Y pret taisni XZ) un vienādi laukumi, tāpēc šajos trīsstūros virsotnes Y pretējām malām jābūt vienādām, t.i.,

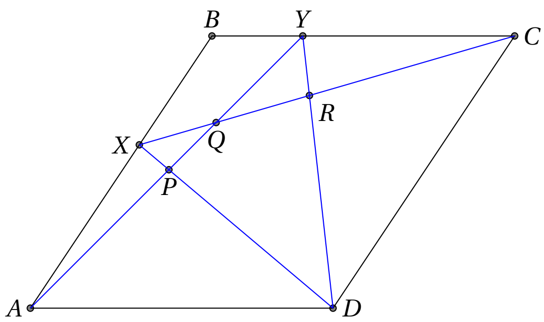
$$XO = OZ.$$

Trīsstūriem YOZ un ZOT ir kopējs augstums (perpendikuls no Z pret taisni YT) un vienādi laukumi, tāpēc šajos trīsstūros virsotnes Z pretējām malām jābūt vienādām, t.i.,

$$YO = OT.$$

Līdz ar to ir parādīts, ka $XYZT$ diagonāles krustpunktā O dalās uz pusēm; tātad $XYZT$ ir paralelograms, kas bija jāpierāda.

4-4.



Ievērosim, ka

$$S(AYD) = S(ABD) = \frac{1}{2}S(ABCD)$$

un

$$S(CXD) = S(CBD) = \frac{1}{2}S(ABCD).$$

No tā seko, ka

$$S(AYD) = S(CXD).$$

Tā kā ir spēkā arī

$$S(AXD) + S(XBC) = S(ABCD) - S(CXD) = S(ABCD) - \frac{1}{2}S(ABCD) = \frac{1}{2}S(ABCD) = S(CXD),$$

tad iegūstam vienādību

$$S(AYD) = S(AXD) + S(XBC). \tag{1}$$

Taču

$$\begin{aligned}
S(AYD) &= S(DPQR) + S(APD) + S(YQR),\\
S(AXD) &= S(APD) + S(AXP),\\
S(CXB) &= S(CYR) + S(YQR) + S(BYQX).
\end{aligned}$$

Tātad (1) var pārrakstīt kā

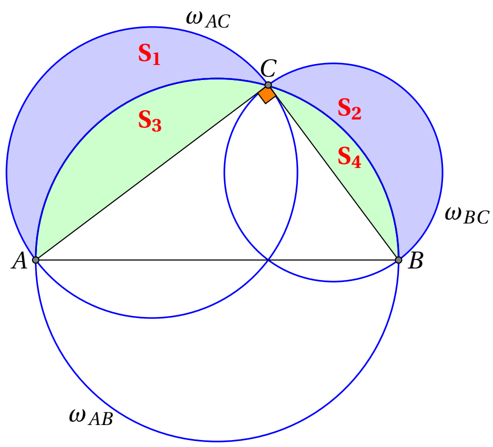
$$S(DPQR) + S(APD) + S(YQR) = S(APD) + S(AXP) + S(CYR) + S(YQR) + S(BYQX).$$

Atņemot no abām vienādības pusēm lielumu $S(APD) + S(YQR)$, iegūstam vajadzīgo.

4-5. Tā kā AB ir ω_{AB} diametrs, tad $S(ABC) + S_3 + S_4$ (skat. zīm.) ir vienāds ar pusi atbilstošā riņķa laukuma, t.i.,

$$S(ABC) + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2. \tag{2}$$

NNV 14/15 4. nodarbība



Tā kā AC ir ω_{AC} diametrs, tad $S_1 + S_3$ ir vienāds ar pusi atbilstošā riņķa laukuma, t.i.,

$$S_1 + S_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{AC}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Analoģiski iegūst

$$S_2 + S_4 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{CB}{2}\right)^2. \tag{4}$$

No (3) un (4) seko

$$S_1 + S_2 + (S_3 + S_4) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{CB}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2, \tag{5}$$

kur pēdējā vienādība izriet no Pitagora teorēmas.

No (2) un (5) izriet, ka

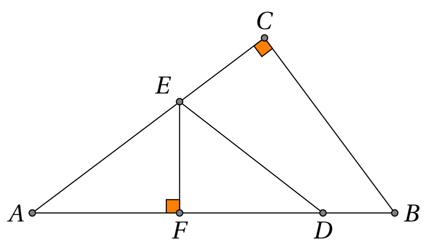
$$S(ABC) + (S_3 + S_4) = S_1 + S_2 + (S_3 + S_4),$$

jeb, ekvivalenti,

$$S(ABC) = S_1 + S_2,$$

kas arī bija jāpierāda.

4-6. No punkta E novelk perpendikulu EF pret malu AB.



No dotā izriet, ka

$$2 \cdot S(AED) = S(ABC).$$

Ievērojam, ka

$$S(AED) = \frac{1}{2}EF \cdot AD, \quad S(ABC) = \frac{1}{2}AC \cdot CB.$$

Tātad

$$EF \cdot AD = \frac{1}{2}AC \cdot CB.$$

Pēc dotā $AD = AC$, tātad, dalot iegūto vienādību ar AC, iegūstam

$$EF = \frac{1}{2}BC. \tag{6}$$

NNV 14/15 4. nodarbība

Trīsstūri AEF un ABC ir līdzīgi (pazīme ll), tātad

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}.$$

No (6) seko, ka $EF : BC = 1 : 2$, tātad iegūstam

$$AF = \frac{1}{2} AC. \tag{7}$$

un

$$AE = \frac{1}{2} AB. \tag{8}$$

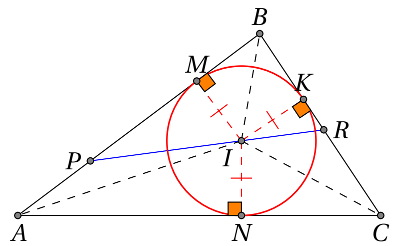
No vienādības (7) izriet, ka trīsstūrī AED nogrieznis AF ir gan mediāna, gan augstums pret AD; līdz ar to ΔAED ir vienādsānu un $AE = ED$. Ņemot vērā arī (8), secinām, ka

$$DE = AE = \frac{1}{2} AB,$$

jeb $2\,DE = AB$, kas bija jāpierāda.

4-7. Vispirms ievērosim, ka t nevar iet caur A, B vai C: pretējā gadījumā t būtu atbilstošā leņķa bisektrise un trīsstūra perimetrs tiktu dalīts uz pusēm tikai tad, ja šī leņķa piemalas būtu vienādas (kas neizpildās, saskaņā ar doto).

Varam pieņemt, ka t krusto malas AB un BC to iekšējos punktos P un R. Ar M, K, N apzīmēsim attiecīgi ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punktus malām AB, BC, CA.



Ievilktās riņķa līnijas centrs ir bisektrišu krustpunkts I; tad $IM = IN = IK = r$, kur r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, turklāt $IM \perp AB$, $IK \perp BC$ un $IN \perp AC$ (pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kas novilkts caur pieskaršanās punktu).

Tad

$$S(PBR) = S(IPB) + S(IBR) = \frac{1}{2} PB \cdot r + \frac{1}{2} BR \cdot r = \frac{PB + BR}{2}$$

un

$$S(APRC) = S(IRC) + S(ICA) + S(IAP) = \frac{1}{2} RC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} AP \cdot r = \frac{RC + CA + AP}{2} \cdot r.$$

Dots, ka t dala uz pusēm trīsstūra ABC perimetru; tātad

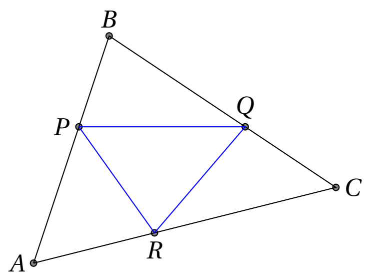
$$RC + CA + AP = PB + BR.$$

Secinām, ka

$$S(PBR) = \frac{PB + BR}{2} \cdot r = \frac{RC + CA + AP}{2} \cdot r = S(APRC),$$

kas arī bija jāpierāda.

4-8.



NNV 14/15 4. nodarbība

Apzīmēsim

$$x_1 = \frac{S(APR)}{S(ABC)}, \quad x_2 = \frac{S(BPQ)}{S(ABC)}, \quad x_3 = \frac{S(CQR)}{S(ABC)}.$$

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\frac{1}{2} AP \cdot AR \cdot \sin\sphericalangle BAC}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\sphericalangle BAC} = \frac{AP \cdot AR}{AB \cdot AC}; \\ x_2 &= \frac{\frac{1}{2} BP \cdot BQ \cdot \sin\sphericalangle ABC}{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle ABC} = \frac{BP \cdot BQ}{AB \cdot BC}; \\ x_3 &= \frac{\frac{1}{2} CR \cdot CQ \cdot \sin\sphericalangle ACB}{\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle ACB} = \frac{CR \cdot CQ}{AC \cdot BC}. \end{aligned}$$

No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$\frac{\frac{AP}{AB} + \frac{AR}{AC}}{2} \ge \sqrt{\frac{AP}{AB} \cdot \frac{AR}{AC}} = \sqrt{x_1}$$

jeb

$$2\sqrt{x_1} \le \frac{AP}{AB} + \frac{AR}{AC}.$$

Analoģiski iegūst nevienādības

$$2\sqrt{x_2} \le \frac{BP}{AB} + \frac{BQ}{BC}$$

un

$$2\sqrt{x_3} \le \frac{CQ}{BC} + \frac{CR}{AC}.$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam

$$2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right) \le \frac{AP}{AB} + \frac{AR}{AC} + \frac{BP}{AB} + \frac{BQ}{BC} + \frac{CQ}{BC} + \frac{CR}{AC}.$$

Ievērosim, ka iegūtās nevienādības labā puse ir vienāda ar

$$\left(\frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB}\right) + \left(\frac{AR}{AC} + \frac{RC}{AC}\right) + \left(\frac{BQ}{BC} + \frac{QC}{BC}\right) = \frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} + \frac{BC}{BC} = 3.$$

Tātad ir pierādīta nevienādība

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \le \frac{3}{2}.$$

Varam pieņemt, ka x_1 ir mazākais no skaitļiem x_1, x_2, x_3 (pārējos gadījumus apskata analogi); tad arī $\sqrt{x_1}$ ir mazākais no saskaitāmajiem nevienādības kreisajā pusē, līdz ar to tas nav lielāks kā $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_1} \le \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \le \frac{3}{2}; \\ &3\sqrt{x_1} \le \frac{3}{2}; \\ &\sqrt{x_1} \le \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kāpinot šo nevienādību kvadrātā, iegūstam

$$x_1 \le \frac{1}{4}.$$

Tā kā

$$x_1 = \frac{S(APR)}{S(ABC)},$$

tad ir pamatots, ka trīsstūra APR laukums ir ne lielāks kā ceturtdaļa no $S(ABC)$.

Piezīme: ja mazākais no skaitļiem x_1, x_2, x_3 būtu bijis x_2 vai x_3, tad attiecīgi tiktu iegūts, ka trīsstūra BPQ vai RQC laukums ir ne lielāks kā ceturtdaļa no $S(ABC)$.