Kombinatorikas pamati

1. Kopu teorijas elementi

1.1. Kopas jēdziens

Kopa ir matemātikas pamatjēdziens, kas netiek definēts. Ar kopu saprot dažādu objektu (skaitļu, priekšmetu u.c.) apkopojumu pēc kādas kopīgas pazīmes vai īpašības. Piemēram, olimpiādes dalībnieku kopa, naturālo skaitļu kopa, dotā riņķa līnijā ievilktu četrstūru kopa u.tml.

Par **kopas elementiem** sauc objektus, no kuriem sastāv kopa.

Kopu uzskata par uzdotu, ja par katru objektu var pateikt, vai tas šai kopai pieder vai nepieder. Kopu var uzdot, piemēram, uzskaitot visus tās elementus (iespējams tikai tad, ja šo elementu skaits ir galīgs), vai arī norādot tādu kopas elementu īpašību, kas ļauj pārbaudīt, vai kāds objekts pieder kopai.

Ja kopā vispār nav elementu, to sauc par **tukšo kopu** un apzīmē ar $\varnothing$. Ja kopa satur galīgu skaitu elementu, to sauc par **galīgu kopu** (piemēram, kādas klases visu skolēnu veidotā kopa), bet kopas, kurās elementu ir bezgalīgi daudz, sauc par **bezgalīgām kopām** (piemēram, reālo skaitļu kopa).

1. piemērs. Aplūkosim dažus kopu piemērus.

- $A = \{1;2;3\}$ – kopa, kas sastāv no trim elementiem: skaitļiem 1, 2 un 3. Šeit arī redzams veids, kā uzdot galīgu kopu: figūriekavās uzskaitot visus tās elementus.
- $B = \left\{n^2 \,\middle|\, n \text{ ir naturāls skaitlis}\right\}$ – kopa, kas sastāv no naturālo skaitļu kvadrātiem. Šeit redzams cits veids, kā uzdot kopu: ar raksturīgo pazīmi, t.i., norādot pazīmi, pēc kuras var noteikt, vai kāds objekts ir vai nav kopas elements. Šajā pierakstā zīme "|" nozīmē "kur", t.i., kopa B sastāv no skaitļiem formā n^2, kur n ir jebkurš naturāls skaitlis. Izmantojot naturālo skaitļu kopas apzīmējumu $\mathbb{N}$ (sk. nākamo nodaļu), kopu B var pierakstīt kā $B = \left\{n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
- $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 = x\right\}$ – kopa, kas sastāv no visiem tiem reālajiem skaitļiem (sk. nākamajā nodaļā apzīmējumu $\mathbb{R}$), kas ir vienādojuma $x^3 = x$ atrisinājumi. Var ievērot, ka $D = \{-1;0;1\}$.
- $E = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 1 = 0\right\}$ – kopa, kas sastāv no visiem tiem reālajiem skaitļiem, kas ir vienādojuma $x^2 + 1 = 0$ atrisinājumi. Tā kā tādu reālu skaitļu nav, tad $E = \varnothing$.
- $F = \left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, a^2 < 8\right\}$ – kopa, kas sastāv no tiem naturālajiem skaitļiem, kuru kvadrāti ir mazāki nekā 8. Tā kā tādi naturāli skaitļi ir tikai 1 un 2, tad $F = \{1;2\}$.
- $G = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 < x^3 \le 27\right\}$ – kopa, kas sastāv no visiem tiem reālajiem skaitļiem, kas ir divkāršās nevienādības $1 < x^3 \le 27$ atrisinājumi. Var ievērot, ka šī kopa ir intervāls: $G = (1;3]$.
- $P = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \text{ ir pirmskaitlis}\right\}$ – visu pirmskaitļu kopa.

Svarīgi ievērot, ka **kopā nav svarīga tās elementu secība**, t.i., mainot kopas pierakstā elementu secību, kopa nemainās. Piemēram, $\{1;2;3\} = \{3;1;2\}$.

Ja kopa A ir galīga, tās elementu skaitu sauc par šīs **kopas apjomu** un apzīmē ar $|A|$. Tukšās kopas apjomu uzskata par vienādu ar nulli: $|\varnothing| = 0$.

Lai norādītu, ka kāds objekts a ir kopas A elements (jeb ka objekts a **pieder** kopai A), lieto pierakstu $a \in A$. Lai norādītu, ka objekts a **nepieder** kopai A, lieto pierakstu $a \notin A$.

Pieņemsim, ka apskatām divas kopas A un B. Ja katrs kopas B elements ir arī kopas A elements, tad saka, ka B ir kopas A **apakškopa** un pieraksta $B \subset A$.

Divas kopas A un B sauc par **vienādām** (un pieraksta $A = B$) tad un tikai tad, ja tās sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem, t.i., katrs kopas A elements ir arī kopas B elements un katrs kopas B elements ir arī kopas A elements. Kopām A un B izpildās vienādība $A = B$ tad un tikai tad, ja $A \subset B$ un $B \subset A$.

> Turpinot iepriekšējo piemēru,
>
> - Kopas A un F ir galīgas; savukārt B un G ir bezgalīgas, jo gan B, gan G satur bezgalīgi daudzus elementus.
> - Kopas A apjoms ir 3, jo tā satur trīs elementus; arī D apjoms ir 3: $|A| = |D| = 3$, bet $A \neq D$. Kā redzams, kopas var būt dažādas pat tad, ja to apjomi ir vienādi. Savukārt $|F| = 2$, jo F satur divus elementus.
> - $2,5 \notin A$, taču $2,5 \in G$.
> - Kopa $\{2\}$ ir kopas A apakškopa (jo A satur elementu 2): $\{2\} \subset A$.

1.2. Nozīmīgākie kopu piemēri

Atgādināsim svarīgākās skaitļu kopas, dažas no kurām izmantojām jau iepriekšējā nodaļā:

- Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$ – sastāv no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...
- Veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$ – sastāv no naturālajiem skaitļiem, nulles un naturāliem skaitļiem pretējiem skaitļiem: ...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...
- Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ – sastāv no visiem skaitļiem, kurus var izteikt formā $\frac{k}{n}$, kur k ir vesels skaitlis, bet n ir naturāls skaitlis. Visus racionālos skaitļus var pierakstīt kā galīgus decimāldaļskaitļus vai arī bezgalīgus periodiskus decimāldaļskaitļus (varbūt ar priekšperiodu).
- Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ – visplašākā no šīm kopām; tajā ietilpst gan visi racionālie skaitļi, gan arī visi bezgalīgie neperiodiskie decimāldaļskaitļi (piemēram, π, e).

Ievērosim, ka katrs naturāls skaitlis ir arī vesels, tātad $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Katrs vesels skaitlis ir arī racionāls, tātad $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Katrs racionāls skaitlis ir arī reāls, tātad $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Līdz ar to

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Nozīmīgākās skaitļu kopas

- Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$;
- Veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\} = \{-n,\ 0,\ n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$;
- Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$.

No skolas kursa ir zināmas vēl tādas nozīmīgas skaitļu kopas kā **intervāli**: pieņemsim, ka $a < b$ ir reāli skaitļi, tad runā par šādiem galīga garuma intervāliem:

- slēgtais intervāls $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
- vaļējais intervāls $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- pusvaļējie intervāli $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ un $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Tāpat mēdz izmantot bezgalīgos intervālus: ja a ir reāls skaitlis, tad

- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ un $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ un $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

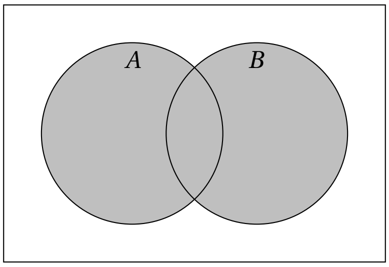
Visi intervāli ir reālo skaitļu apakškopas, turklāt visi šie intervāli ir bezgalīgas kopas (jo satur bezgalīgi daudzus elementus).

1.3. Darbības ar kopām

Kopu apvienojums

Par kopu A un B **apvienojumu** sauc kopu, kas sastāv no tiem elementiem, kas pieder vismaz vienai no kopām A vai B. Kopu A un B apvienojumu apzīmē ar $A \cup B$.

$$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ vai } x \in B \right\}.$$



1. zīm. Kopas A un B ir riņķi plaknē; iekrāsotā daļa – kopa $A \cup B$.

2. piemērs.

- Pieņemsim, ka kopa A ir visi tie veselie skaitļi, kuru kvadrāti ir mazāki nekā 10, bet kopa B ir visi tie naturālie skaitļi, kas ir robežās starp 2 un 7:

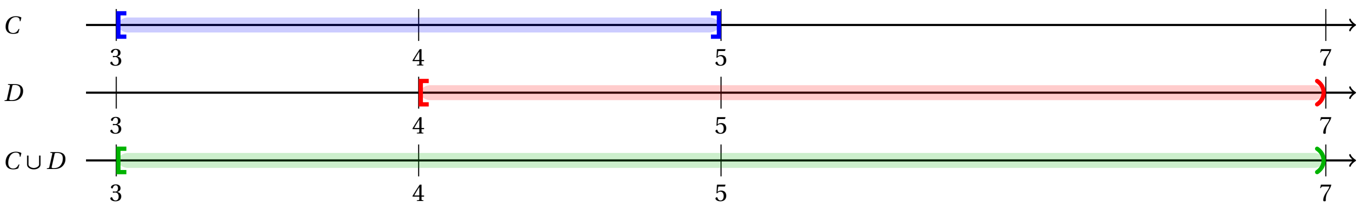
$$A = \left\{ a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, a^2 < 10 \right\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\};$$
$$B = \{ b \in \mathbb{N} \,|\, 2 \le b \le 7 \} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Tad šo kopu apvienojums ir $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

- Pieņemsim, ka C un D ir šādi intervāli:

$$C = [3; 5];$$
$$D = [4, 7).$$

Tad šo kopu apvienojums ir $C \cup D = [3; 7)$.



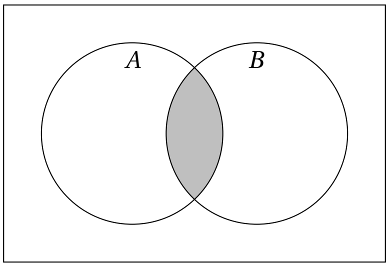
Var apvienot vairākas kopas; piemēram, par kopu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ apvienojumu sauc kopu, kas sastāv no tiem elementiem, kas pieder vismaz vienai no kopām A_1 vai $A_2, \ldots,$ vai A_n. Šo apvienojumu apzīmē ar $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ vai $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(x \,\middle|\, x \in A_1 \text{ vai } x \in A_2 \text{ vai } \ldots \text{ vai } x \in A_n \right).$$

Kopu šķēlums

Par kopu A un B **šķēlumu** sauc kopu, kas sastāv no tiem elementiem, kas pieder gan kopai A, gan kopai B. Kopu A un B šķēlumu apzīmē ar $A \cap B$.

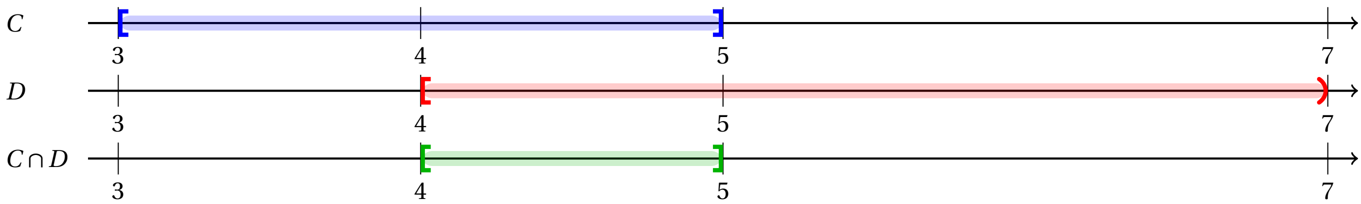
$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ un } x \in B \right\}.$$



2. zīm. Kopas A un B ir riņķi plaknē; iekrāsotā daļa – kopa $A \cap B$.

Turpināsim 2. piemēru.

- Pieņemsim, ka kopa $A = \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ ir visi tie veselie skaitļi, kuru kvadrāti ir mazāki nekā 10, bet kopa $B = \{2;3;4;5;6;7\}$ ir visi tie naturālie skaitļi, kas ir robežās starp 2 un 7. Tad šo kopu šķēlums ir $A \cap B = \{2;3\}$.
- Pieņemsim, ka $C = [3;5]$; un $D = [4,7)$. Tad šo kopu šķēlums ir $C \cap D = [4;5]$.

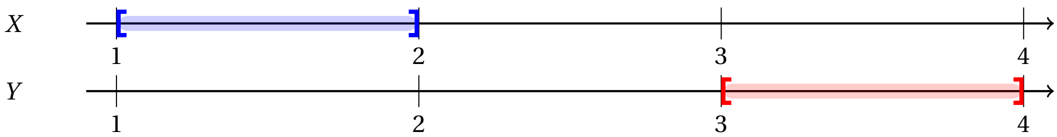


Var šķelt vairākas kopas; piemēram, par kopu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ šķēlumu sauc kopu, kas sastāv no tiem elementiem, kas pieder katrai no kopām A_1 un $A_2, \ldots,$ un A_n. Šo šķēlumu apzīmē ar $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ vai $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \,\middle|\, x \in A_1 \text{ un } x \in A_2 \text{ un } \ldots \text{ un } x \in A_n \right\}.$$

Gadījumā, ja kopu A un B šķēlums ir tukša kopa, t.i., $A \cap B = \emptyset$ (citiem vārdiem, kopām A un B nav kopīgu elementu), tad A un B sauc par **disjunktām** jeb **nešķeļošām** kopām.

Piemēram, ja $X = [1;2]$ un $Y = [3;4]$, tad X un Y ir disjunktas kopas, jo abiem intervāliem nav kopīgu elementu.

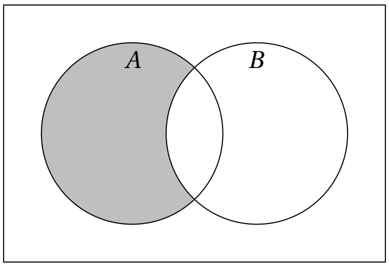


Ja ir vairākas kopas $A_1, \ldots, A_n$, un jebkuras divas no tām ir disjunktas (t.i., visiem $i, j = 1,2,\ldots,n$, ja $i \neq j$, tad $A_i \cap A_j = \emptyset$), tad kopas $A_1, \ldots, A_n$, sauc par **pa pāriem disjunktām**.

Kopu starpība

Par kopu A un B **starpību** sauc kopu, kas sastāv no tiem elementiem, kas pieder kopai A, bet nepieder kopai B. Kopu A un B starpību apzīmē ar $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ un } x \notin B \right\}.$$

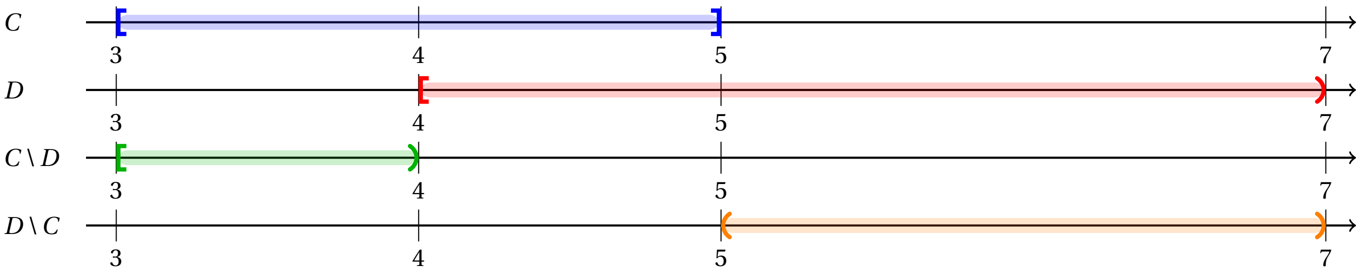


3. zīm. Kopas A un B ir riņķi plaknē; iekrāsotā daļa – kopa $A \setminus B$.

Kopu starpības definīcijā ir svarīga kopu secība. Vispārīgajā gadījumā $A \setminus B$ nesakrīt ar $B \setminus A$!

Turpināsim 2. piemēru.

- Pieņemsim, ka kopa $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ ir visi tie veselie skaitļi, kuru kvadrāti ir mazāki nekā 10, bet kopa $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ir visi tie naturālie skaitļi, kas ir robežās starp 2 un 7. Tad kopu starpība $A \setminus B$ ir $A \setminus B = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Savukārt starpība $B \setminus A$ ir $B \setminus A = \{4; 5; 6; 7\}$.
- Pieņemsim, ka $C = [3; 5]$; un $D = [4, 7)$. Tad $C \setminus D = [3; 4)$ un $D \setminus C = (5; 7)$.



2. Kombinatorikas pamatlikumi

2.1. Saskaitīšanas likums

Saskaitīšanas likums

Ja divās kopās nav vienādu elementu, un pirmā kopa satur m elementus, bet otra kopa satur n elementus, tad izvēlēties tādu elementu, kas pieder vienai no abām kopām, var izvēlēties $m + n$ veidos.

Matemātiski precīzāk šo likumu pieņemts formulēt ar kopu palīdzību:

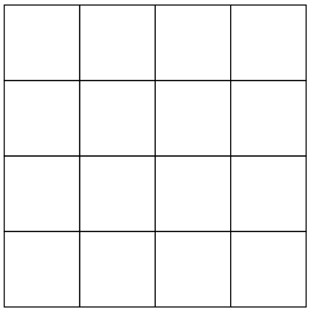
Ja dotas divas kopas A un B, kuras nesatur vienādus elementus (t.i., kopas A un B ir disjunktas), tad kopas $A \cup B$ apjoms vienāds ar kopu A un B apjomu summu: $|A \cup B| = |A| + |B|$.
Vispārīgāk, ja dotas n kopas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kuras ir pa pāriem disjunktas, tad kopas $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ apjoms vienāds ar kopu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ apjomu summu:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

3. piemērs. Uz šķīvja atrodas 8 zemenes un 7 avenes. Cik dažādos veidos var izvēlēties vienu ogu?

Risinājums. Viena oga ir vai nu viena avene, **vai** viena zemene. Vienu aveni var izvēlēties 7 veidos, vienu zemeni var izvēlēties 8 veidos; saskaņā ar saskaitīšanas likumu, vienu ogu (t.i., zemeni vai aveni) var izvēlēties 15 veidos.

4. piemērs. Kvadrāts ar malas garumu 4 ar paralēliem nogriežņiem ir sadalīts 16 vienādos kvadrātos, sk. 4. zīmējumu. Kāds ir kopējais kvadrātu skaits, kas attēloti 4. zīmējumā?



4. zīm.

Risinājums. Sadalīsim visus 4. zīmējumā redzamos kvadrātus četrās kopās A_1, A_2, A_3 un A_4 tā, lai kopa A_1 saturētu visus kvadrātus ar malas garumu 1, kopa A_2 – visus kvadrātus ar malas garumu 2, kopa A_3 – visus kvadrātus ar malas garumu 3 un kopa A_4 – visus kvadrātus ar malas garumu 4.

Ir tieši 16 kvadrāti ar malas garumu 1, tātad $|A_1| = 16$. Ir tikai viens kvadrāts ar malas garumu 4, tātad $|A_4| = 1$. Var ievērot, ka $|A_2| = 9$ un $|A_3| = 4$. Tātad no saskaitīšanas likuma izriet, ka kopējais kvadrātu skaits ir vienāds ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 16 + 9 + 4 + 1 = 30.$$

2.2. Reizināšanas likums

Reizināšanas likums

Dotas divas kopas, pirmā kopa satur m elementus, bet otrā kopa satur n elementus.
Pieņemsim, ka no pirmās kopas jāizvēlas elements a, bet no otrās kopas jāizvēlas elements b (neatkarīgi no a izvēles).
Tad abu elementu pāri "*a* **un** *b*" var izvēlēties $m \cdot n$ veidos.

Arī šo likumu ir iespējams formulēt precīzāk, izmantojot kopas jēdzienu:

Ja dotas divas kopas A un B un jāizvēlas tādu elementu pāri a un b, ka $a \in A$ un $b \in B$, tad šādu pāri ir iespējams izvēlēties $|A| \cdot |B|$ veidos.

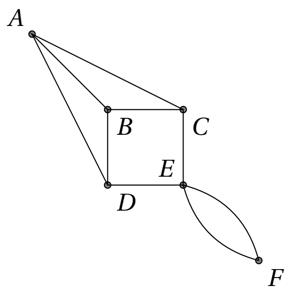
5. piemērs. Anete uz skolu (un atpakaļ no skolas) var aizbraukt vai nu ar trolejbusu, vai (bez pārsēšanās) ar kādu no diviem dažādiem autobusiem, vai (bez pārsēšanās) ar kādu no četriem tramvajiem.

1. Cik dažādos veidos Anete var aizbraukt uz skolu?
2. Cik dažādos veidos Anete var aizbraukt uz skolu un atpakaļ?
3. Cik dažādos veidos Anete var aizbraukt uz skolu un atpakaļ, ja atpakaļceļā viņa neizmanto to pašu transporta veidu, kuru turpceļā?

Risinājums.

1. No saskaitīšanas likuma izriet, ka uz skolu Anete var aizbraukt $1+2+4=7$ veidos.
2. Uz skolu viņa var aizbraukt 7 veidos un atpakaļ arī 7 veidos; no reizināšanas likuma izriet, ka dažādo veidu skaits, kā aizbraukt uz skolas un atpakaļ, ir $7 \cdot 7 = 49$.
3. Ja Anete dodas uz skolu ar trolejbusu (1 veidā), tad aizbraukt uz mājām viņa var $2+4=6$ veidos, kā doties; kopā šādu variantu (kad turpceļā tiek izmantots trolejbuss) skaits ir $1 \cdot 6 = 6$. Ja Anete dodas uz skolu ar autobusu (2 veidi), tad atpakaļ viņa var doties $1+4=5$ veidos; kopā šādu variantu (kad turpceļā tiek izmantots autobuss) skaits ir $2 \cdot 5 = 10$. Visbeidzot, ja Anete dodas uz skolu ar tramvaju (4 veidi), tad atpakaļ viņa var doties $1+2=3$ veidos; kopā šādu variantu (kad turpceļā tiek izmantots tramvajs) skaits ir $4 \cdot 3 = 12$. Tātad kopumā ir $6+10+12=28$ veidi, kā paveikt prasīto.

6. piemērs. 5. zīmējumā attēlota sešu pilsētu A, B, C, D, E, F un tās savienojošo ceļu karte. Pa ceļu, kas savieno B un D, drīkst braukt tikai virzienā no B uz D, pa citiem ceļiem drīkst braukt abos virzienos. Cik dažādos veidos var nokļūt no pilsētas A uz pilsētu F (ja no kādas pilsētas izbraukts, tajā atgriezties vairs nedrīkst)?



5. zīm. Pilsētu karte

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo veidu skaitu ar $V(F)$.

Pilsētā F var nokļūt tikai no E, ko var izdarīt 2 veidos (izbraukt no F vairs nedrīkst, jo tad E tiktu apmeklēta otrreiz); tātad, no reizināšanas likuma, $V(F) = 2 \cdot V(E)$, kur $V(E)$ ir veidu skaits, kā pie dotajiem nosacījumiem nokļūt no A uz E.

Ja esam iebraukuši pilsētā D, tad no tās jābrauc tālāk uz E (virzienā uz B nav atļauts braukt, bet pilsētā A jau esam bijuši). Pilsētā D var iebraukt trīs veidos:

- pa ceļu no A uz D;
- pa ceļiem no A uz B un no B uz D;
- pa ceļiem no A uz C, no C uz B un no B uz D.

Pilsētā E var iebraukt vai nu no D, vai C. Ja neizmanto pilsētu D, tad ir divi veidi:

- pa ceļiem no A uz C un no C uz E;
- pa ceļiem no A uz B, no B uz C un no C uz E.

No saskaitīšanas likuma izriet, ka $V(E) = 3+2 = 5$.

Tātad veidu skaits, kā aizbraukt no A līdz F, ir $2 \cdot 5 = 10$.

Galīgas kopas apakškopu skaits

Viegli pārliecināties, ka, piemēram, kopai $\{1;2\}$ ir iespējamas četras apakškopas: tukšā kopa $\varnothing$, divas apakškopas, kas satur pa vienam elementam ($\{1\}$ un $\{2\}$), kā arī sākotnējā kopa $\{1;2\}$. Viegli saprast: ja sākotnējā kopa sastāvētu no citiem diviem elementiem (piemēram, tā būtu kopa $\{a,b\}$), tad tai joprojām būtu četras apakškopas (tukšā kopa, divas apakškopas, kas satur pa vienam elementam, un sākotnējā kopa).

Vispārīgāk, galīgas kopas apakškopu skaits ir atkarīgs tikai no dotās kopas apjoma (bet ne no konkrētajiem elementiem):

Galīgas kopas apakškopu skaits

Ja A ir kopa, kuras apjoms ir $n \in \mathbb{N}$ (t.i., A satur tieši n elementus), tad

- kopas A visu apakškopu skaits ir 2^n;
- kopas A netukšo apakškopu skaits ir $2^n - 1$;
- kopas A netukšo apakškopu, kas turklāt nesakrīt ar A, skaits ir $2^n - 2$.

Pierādījums viegli iegūstams, izmantojot reizināšanas likumu.

Pierādījums. Apzīmēsim A elementus ar a_1 līdz a_n, t.i.,

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}.$$

Katra A apakškopa iegūstama, izvēloties dažus no šiem n elementiem (varbūt visus, tad iegūstam A, varbūt nevienu, tad iegūstam $\varnothing$). Turklāt, dažādām elementu izvēlēm atbilst dažādas apakškopas.

Apskatām elementu a_1. Iespējami divi gadījumi – iekļaut a_1 apakškopā vai neiekļaut. Tā kā katram a_i ir šādas divas iespējas, tad kopas A apakškopu skaits ir $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Piemēram, ja izvēlējāmies "a_i iekļaut" visiem a_i, tad iegūst $B = A$. Ja izvēlējāmies "a_i neiekļaut" visiem a_i, tad iegūst $B = \varnothing$. □

7. piemērs. Pieņemsim, ka $A = \{x; y; z\}$. Apskatīsim, kā var konstruēt šīs kopas visas netukšās apakškopas, kas nesakrīt ar pašu A.

- Izvēloties "x iekļaut", "y neiekļaut", "z neiekļaut", iegūst apakškopu $\{x\} \subset A$;
- izvēloties "x neiekļaut", "y iekļaut", "z neiekļaut", iegūst apakškopu $\{y\} \subset A$;
- izvēloties "x neiekļaut", "y neiekļaut", "z iekļaut", iegūst apakškopu $\{z\} \subset A$;
- izvēloties "x iekļaut", "y iekļaut", "z neiekļaut", iegūst apakškopu $\{x; y\} \subset A$;
- izvēloties "x iekļaut", "y neiekļaut", "z iekļaut", iegūst apakškopu $\{x; z\} \subset A$;
- izvēloties "x neiekļaut", "y iekļaut", "z iekļaut", iegūst apakškopu $\{y; z\} \subset A$.

Vēl divas iespējas: "x neiekļaut", "y neiekļaut", "z neiekļaut", kā arī "x iekļaut", "y iekļaut", "z iekļaut" palika neizmantotas, jo šajos gadījumos iegūstam attiecīgi tukšo kopu un A.

Naturāla skaitļa naturālo dalītāju skaits

Cits nozīmīgs piemērs, kur tiek izmantots reizināšanas likums, ir naturālo dalītāju skaita formula.

Pieņemsim, ka naturāls skaitlis $n > 1$ ir sadalīts pirmreizinātājos, t.i.,

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}, \quad \text{kur } p_1, p_2, \ldots, p_m \text{ – dažādi pirmskaitļi un } k_1, k_2, \ldots, k_m \text{ – naturāli skaitļi.}$$

Piezīme. Šādu pierakstu sauc par skaitļa n **kanonisko sadalījumu pirmreizinātājos**.

Aplūkosim, cik dažādu naturālo dalītāju ir skaitlim n. Skaidrs, ka katra n dalītāja d sadalījumā pirmreizinātājos nevar parādīties citi pirmskaitļi kā vien $p_1,\ \ldots,\ p_m$ (jo dalāmajam n jādalās ar katru dalītāja d pirmreizinātāju). No otras puses, dalītājam d nav obligāti jādalās ar katru skaitļa n pirmreizinātāju. Tātad

$$d = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m},$$

kur $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ievērosim: dažādām kāpinātāju komplekta $l_1, \ldots, l_m$ izvēlēm atbilst dažādi skaitļi d. Atliek noskaidrot, cik dažādos veidos var izvēlēties kāpinātājus $l_1, \ldots, l_m$, lai iegūtais skaitlis d būtu skaitļa n dalītājs.

Lai d būtu n dalītājs, nepieciešami, lai $l_1 \leq k_1$, $l_2 \leq k_2$, ..., $l_m \leq k_m$ (ja kāda no šīm nevienādībām neizpildās, tad n nedalās ar d). No otras puses, ja šīs m nevienādības izpildās, tad n dalās ar d un dalījums ir vienāds ar $p_1^{k_1-l_1} \cdot p_2^{k_2-l_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m-l_m}$. Tātad kāpinātāju komplekts $l_1, \ldots, l_m$ ir derīgs tad un tikai tad, ja visiem $i = 1, 2, \ldots, m$ skaitlis l_i ir vesels skaitlis, kas apmierina nevienādības $0 \leq l_i \leq k_i$.

Tas nozīmē, ka kāpinātāju l_1 var izvēlēties $k_1 + 1$ veidos (tik daudz ir veselo skaitļu, kas apmierina nevienādību $0 \leq l_1 \leq k_1$), neatkarīgi no l_1 izvēles kāpinātāju l_2 var izvēlēties $k_2 + 1$ veidos, neatkarīgi no l_1 un l_2 izvēles kāpinātāju l_3 var izvēlēties $k_3 + 1$ veidos utt., neatkarīgi no iepriekšējo reizinātāju izvēles kāpinātāju l_m var izvēlēties $k_m + 1$ veidos.

No reizināšanas likuma izriet, ka dažādo veidu skaits, kā var izvēlēties kāpinātājus $l_1, \ldots, l_m$, ir $(k_1+1)(k_2+1) \cdot \ldots \cdot (k_m+1)$, kas arī ir dažādo naturālo dalītāju d skaits.

Naturāla skaitļa naturālo dalītāju skaits

Ja

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}, \quad \text{kur } p_1, p_2, \ldots, p_m \text{ – dažādi pirmskaitļi un } k_1, k_2, \ldots, k_m \text{ – naturāli skaitļi,}$$

tad skaitļa n dažādo naturālo dalītāju skaits ir

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_m + 1).$$

8. piemērs. Pieņemsim, ka $n = 12$. Tā sadalījums pirmreizinātājos ir $12 = 2^2 \cdot 3^1$. No iepriekš pamatotā izriet, ka skaitlim 12 ir $3 \cdot 2 = 6$ dažādi dalītāji formā $2^{l_1} \cdot 3^{l_2}$; uzrakstīsim tos:

- Izvēloties $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, iegūst dalītāju $2^0 \cdot 3^0 = 1$;
- izvēloties $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, iegūst dalītāju $2^1 \cdot 3^0 = 2$;
- izvēloties $l_1 = 2$, $l_2 = 0$, iegūst dalītāju $2^2 \cdot 3^0 = 4$;
- izvēloties $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, iegūst dalītāju $2^0 \cdot 3^1 = 3$;
- izvēloties $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, iegūst dalītāju $2^1 \cdot 3^1 = 6$;
- izvēloties $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, iegūst dalītāju $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

3. Piemēri no matemātikas olimpiādēm

9. piemērs (Latvijas 50. mat. olimpiāde, 1. posms)**.** No 8 policistiem jāizveido 4 pāri nakts dežūrai (pāru secībai nav nozīmes). Cik daudzos dažādos veidos to iespējams izdarīt?

Risinājums. Ņemam vienu policistu A; tam var piekomandēt jebkuru no atlikušajiem policistiem (ko iespējams izdarīt 7 veidos). Tātad pirmo pāri var nokomplektēt 7 veidos. Kad tas izdarīts, ņemam jebkuru no atlikušajiem policistiem B; tam var piekārtot pārinieku 5 veidos. Tātad otro pāri (neatkarīgi no konkrēto cilvēku izvēles pirmajam pārim) var nokomplektēt 5 veidos. Tālāk ņemam jebkuru no atlikušajiem policistiem C; tam var piekārtot pārinieku 3 veidos. Atlikušie divi policisti veido ceturto pāri.

No reizināšanas likuma seko, ka četrus policistu pārus var izvēlēties $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$ dažādos veidos.

10. piemērs (Latvijas 39. mat. olimpiāde, 1. posms)**.** Cik daudz ir tādu funkciju, kurām definīcijas apgabals ir kopa $\{0;1;2\}$ (funkcija ir definēta visiem šīs kopas elementiem), bet vērtību apgabals ir kopa $\{0;1\}$ (funkcija pieņem katru no šīs kopas vērtībām)?

Risinājums. Sākumā aplūkosim, cik vispār ir tādu funkciju, kas ir definētas kopā $\{0;1;2\}$ un katram šīs kopas elementam pieņem jebkuru no divām kopas $\{0;1\}$ vērtībām.

Katrā no definīcijas apgabala punktiem funkcija var pieņemt jebkuru no divām vērtībām; t.i., punktā 0 ir divas iespējas (attiecīgi $f(0)=0$ vai $f(0)=1$), punktā 1 ir divas iespējas (attiecīgi $f(1)=0$ vai $f(1)=1$) un arī punktā 2 ir divas iespējas (attiecīgi $f(2)=0$ vai $f(2)=1$). Līdz ar to no reizināšanas likuma seko, ka ir $2\cdot 2\cdot 2=8$ dažādas funkcijas.

Šajā skaitā ir iekļautas arī divas funkcijas, kas mums neder, jo to vērtību apgabals nav kopa $\{0;1\}$: funkcija, kas visos definīcijas apgabala punktos pieņem vērtību 0, un funkcija, kas visos definīcijas apgabala punktos pieņem vērtību 1. Pārējām $8-2=6$ funkcijām vērtību apgabals ir kopa $\{0;1\}$.

Atbilde: ir sešas šādas funkcijas.

11. piemērs (Latvijas 63. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu).

Risinājums. No trīs uzdevumiem var izveidot $2^3=8$ dažādas uzdevumu kopas (tostarp tukšā kopa); tātad ir iespējami astoņi atrisināto uzdevumu "komplekti" (tostarp "neviens atrisināts uzdevums"). Ja katru "komplektu" būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad olimpiādes dalībnieku kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12\cdot 8=96<100$. Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus.

12. piemērs (Latvijas 64. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Gatavojoties vēlēšanām, politiskās partijas saviem vēlētājiem kopumā devušas $s\in\mathbb{N}$ solījumus. Zināms, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Tajā pašā laikā nav iespējams atrast divas partijas, kuru dotie solījumi sakristu pilnībā – ir iespējams atrast vismaz vienu solījumu, ko viena partija ir devusi, bet otra nē. Kāds ir lielākais iespējamais partiju skaits, kas gatavojas vēlēšanām?

Risinājums. Ar S apzīmēsim visu s doto solījumu kopu, tad $|S|=s$. Katrai partijai p atbilst kaut kāda kopas S apakškopa $A_p\subset S$. No dotā izriet, ka jebkurām divām partijām p un q

- doto solījumu kopas nav disjunktas, t.i., $\left|A_p\cap A_q\right|\neq\emptyset$;
- doto solījumu kopas ir dažādas, t.i., $A_p\neq A_q$.

Sadalīsim visas S apakškopas pāros: katrai $A\subset S$ pārī piekārtosim $S\setminus A$. Šādā veidā visas 2^s kopas S apakškopas tiek sadalītas 2^{s-1} pāros. Ievērojam: ja partijas p doto solījumu kopa ir A_p, tad nevienas partijas doto solījumu kopa nav $S\setminus A_p$; ja tā nebūtu un varētu atrast partiju q, kuras doto solījumu kopa ir $A_q=S\setminus A_p$, tad A_p un A_q būtu disjunktas kopas, taču tas ir pretrunā ar doto.

Tātad katrā pārī ne vairāk kā viena kopa atbilst kādai partijai; tā kā pāru skaits ir 2^{s-1} un dažādām partijām atbilst dažādas kopas, tad partiju skaits nevar būt lielāks kā pāru skaits, t.i., ir ne vairāk kā 2^{s-1} partijas.

Parādīsim, ka šāds partiju skaits ir iespējams. Pieņemsim, ka ir kāds solījums, kas ir kopīgs visām partijām. No atlikušajiem $s-1$ solījumiem var izveidot 2^{s-1} dažādus solījumu komplektus (visas 2^{s-1} dažādās apakškopas atlikušo $s-1$ solījumu kopai). Tādējādi iegūst 2^{s-1} dažādus solījumu komplektus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad lielākais iespējamais partiju skaits ir 2^{s-1}.

13. piemērs (Latvijas 58. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Universitātē strādā 12 profesori. No tiem sastādītas 2008 padomes (katra padome sastāv no dažiem (vismaz viena) profesora). Zināms, ka vienlaikus

1. nekādas divas padomes nesastāv no vieniem un tiem pašiem profesoriem;

2. katrām divām padomēm var atrast vismaz vienu profesoru, kas piedalās tajās abās.

Pierādīt, ka var nodibināt vismaz vēl vienu padomi tā, lai abi minētie nosacījumi joprojām izpildītos.

Risinājums. Pieņemsim, ka P ir minēto 12 profesoru kopa. Katra padome ir kopas P apakškopa. Ir pavisam $2^{12} = 4096$ profesoru kopas (kopas P apakškopas). Tās var apvienot pa 2048 pāriem (S, S') tā, ka $S \cup S' = P$ (katrai apakškopai S izvēlas $S' = P \setminus S$). Viens no šiem pāriem ir $(\emptyset, P)$; visos citos 2047 pāros abas pārī ietilpstošās kopas ir netukšas. Tā kā $2047 > 2008$, eksistē tāds apakškopu pāris (S, S'), ka gan S, gan S' ir netukšas kopas un ne S, ne S' vēl nav padomes.

Ja S var kalpot par jaundibināto padomi, tad uzdevums ir atrisināts. Pieņemsim, ka S nevar būt par padomi. Tad eksistē tāda padome A, ka nav neviena profesora, kas ietilpst gan A, gan S. Tas nozīmē, ka $A \cap S = \emptyset$ un, tā kā $S' = P \setminus S$, tad $A \subset S'$. Katrai padomei ir kopīgs profesors ar A, tātad katrai padomei ir kopīgs profesors ar S'. Secinām, ka līdz ar to par jaundibināto padomi var izvēlēties S'.

14. piemērs (Latvijas 58. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Klasē ir 10 skolēni. Viņiem jāreģistrējas 1023 eksāmenu kārtošanai, turklāt nedrīkst būt divu tādu eksāmenu, kurus kārto vieni un tie paši skolēni. Katru eksāmenu jākārto vismaz vienam skolēnam.

Dots, ka n – vesels skaitlis, $0 \le n \le 1023$. Pierādīt, ka eksāmenam reģistrējušos skolēnu sarakstus var nodrukāt uz baltām un zaļām lapām tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas prasības:

- ja divas lapas X un Y ir vienā krāsā, tad tā lapa, uz kuras pierakstīti visi skolēni, kas pierakstīti vismaz uz vienas no lapām X un Y (un neviens cits skolnieks nav pierakstīts), ir tādā pašā krāsā kā X un Y,
- ir tieši n baltas lapas.

Risinājums. Pieņemsim, ka S ir visu 10 skolēnu veidotā kopa. Tā kā uz katras no 1023 lapām jāuzraksta atšķirīga netukša skolēnu kopa (un ir tieši 1023 dažādas netukšas S apakškopas), tad uz lapām jāuzraksta visas netukšās S apakškopas.

Apzīmēsim skolēnus ar skaitļiem 0, 1, ..., 9; tad $S = \{0; 1; \ldots; 9\}$. Apskata netukšu apakškopu $A \subset S$. Parādīsim, kā izvēlēties krāsu lapai, uz kuras uzrakstīs kopu A.

1. gadījums: $n = 0$. Tad lapas krāsa ir zaļa.

2. gadījums: $n = 1023$. Tad lapas krāsa ir balta.

3. gadījums: $1 \le n \le 1022$. Izsakām skaitli n formā

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k},$$

kur $0 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le 9$ – dažādi nenegatīvi veseli skaitļi (t.i., skaitli n izsaka binārajā sistēmā). Sauksim skaitļus a_1, $\ldots$, a_k par baltiem, bet pārējos skaitļus no kopas $\{0; 1; \ldots; a_k\}$ – par zaļiem. **Krāsosim kopas** A **lapu tādā krāsā, kādā ir** A **lielākais elements.**

Pieņemsim, ka $X \subset S$ un $Y \subset S$ un kopām X un Y atbilstošās lapas ir vienā un tai pašā krāsā. Tad maksimālais X elements ir tādā pašā krāsā kā maksimālais Y elements. Lai izpildītos nosacījums par lapu krāsām, kopai $X \cup Y$ atbilstošajai lapai jābūt tādā pašā krāsā. Taču lielākais kopas $X \cup Y$ ir vai nu lielākais kopas X elements, vai lielākais kopas Y elements. Jebkurā gadījumā kopai $X \cup Y$ atbilstošā lapa ir tādā pašā krāsā kā X un Y atbilstošās lapas. Tātad pirmais nosacījums izpildās.

Atliek noskaidrot, cik ir balto lapu.

Lapa ir balta tad un tikai tad, ja tai atbilstošās kopas lielākais elements ir a_i, kur $1 \le i \le k$. Ir tieši 2^{a_i} kopas, kurām lielākais elements ir a_i (katru no skaitļiem 0;1; ...; $a_i - 1$ var iekļaut vai neiekļaut, skaitli a_i noteikti jāiekļauj un lielākus skaitļus iekļaut nedrīkst; no reizināšanas likuma izriet, ka ir 2^{a_i} iespējas sastādīt šādu kopu); no saskaitīšanas likuma izriet, ka balto lapu skaits ir vienāds ar $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}$. Tā kā $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k} = n$, tad ir pierādīts, ka lapas tiks izkrāsotas vajadzīgajā veidā.