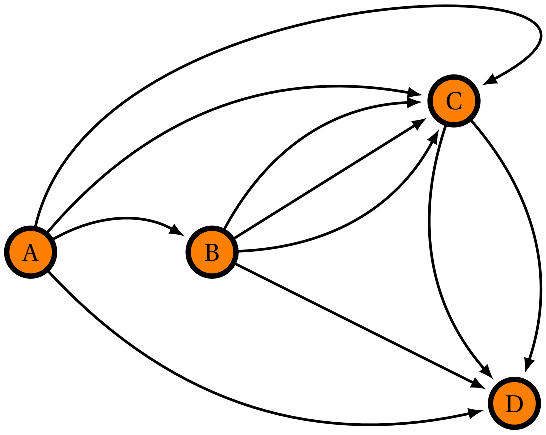
NNV 15/16 1. nodarbība

1-1.



1. zīm.

Pilsētā D var nokļūt, izmantojot vienu no četriem maršrutiem (ar $X \to Y$ apzīmēts brauciens no pilsētas X uz Y, nebraucot cauri nevienai citai pilsētai):

a) $A \to D$;

b) $A \to B \to D$;

c) $A \to C \to D$;

d) $A \to B \to C \to D$.

Apzīmēsim veidu skaitu, kā realizēt attiecīgo maršrutu, attiecīgi ar $V(A;D)$, $V(A;B;D)$, $V(A;C;D)$ un $V(A;B;C;D)$. Tad no saskaitīšanas likuma seko, ka meklējamais veidu skaits, kā nokļūt D, ir

$$V(A;D)+V(A;B;D)+V(A;C;D)+V(A;B;C;D).$$

Ar $v(X,Y)$ apzīmēsim veidu skaitu, kā no pilsētas X aizbraukt uz pilsētu Y (nebraucot cauri nevienai citai pilsētai). Tad no dotā zīmējuma redzams, ka

- $v(A,B)=1$;
- $v(A,C)=2$;
- $v(A,D)=1$;
- $v(B,C)=3$;
- $v(B,D)=1$;
- $v(C,D)=2$.

No reizināšanas likuma izriet, ka

- $V(A;D)=v(A,D)=1$;
- $V(A;B;D)=v(A,B)\cdot v(B,D)=1\cdot 1=1$;
- $V(A;C;D)=v(A,C)\cdot v(C,D)=2\cdot 2=4$;
- $V(A;B;C;D)=v(A,B)\cdot v(B,C)\cdot v(C,D)=1\cdot 3\cdot 2=6$.

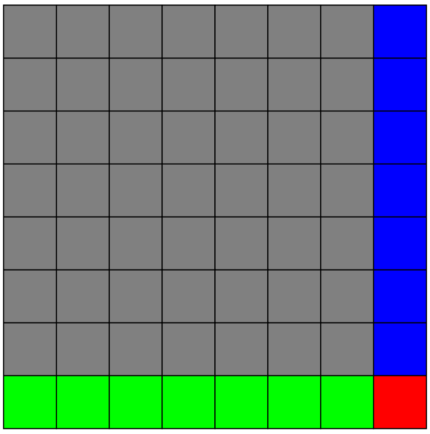
Līdz ar to pilsētā D no pilsētas A var nokļūt

$$1+1+4+6=12$$

veidos.

NNV 15/16 1. nodarbība

1-2.



2. zīm.

Apskata $7\text{m} \times 7\text{m}$ kvadrātu, kuru veido pirmajās septiņās rindās un septiņās kolonnās esošie skvēri (sk. 2. zīmējumā redzamo pelēko kvadrātu). Katrā no šiem 49 skvēriem dārznieks var patvaļīgi izvēlēties, vai iestādīt ābeli, vai ne (katrā skvērā līdz ar to ir divas iespējas: vai nu iestādīt ābeli, vai ne; no reizināšanas likuma izriet, ka iespējamo variantu skaits ir 2^{49}). Parādīsim, ka, tiklīdz ir aizpildīts šis $7\text{m} \times 7\text{m}$ kvadrāts, ir tieši viens veids, kā rīkoties ar atlikušajiem skvēriem, lai tiktu ievēroti uzdevuma nosacījumi.

Apskata jebkuru skvēru, kas 2. zīmējumā iekrāsots zils. Tajā noteikti ir jāiestāda ābele, ja atbilstošajā rindā jau ir iestādīts nepāra skaits ābeļu, un tajā noteikti nedrīkst stādīt ābeli, ja atbilstošajā rindā jau ir iestādīts pāra skaits ābeļu. Tātad ir tieši viens veids, kā aizpildīt šos 7 skvērus.

Apskata jebkuru skvēru, kas 2. zīmējumā iekrāsots zaļš. Tajā noteikti ir jāiestāda ābele, ja atbilstošajā kolonnā jau ir iestādīts nepāra skaits ābeļu, un tajā noteikti nedrīkst stādīt ābeli, ja atbilstošajā kolonnā jau ir iestādīts pāra skaits ābeļu. Tātad ir tieši viens veids, kā aizpildīt šos 7 skvērus.

Visbeidzot, aplūko atlikušo skvēru, kas 2. zīmējumā iekrāsots sarkans. Ar s apzīmēsim ābeļu skaitu, kas iestādīts pelēkajos skvēros, ar r apzīmēsim ābeļu skaitu, kas iestādītas zilajos skvēros, un ar k apzīmēsim ābeļu skaitu, kas iestādīts zaļajos skvēros. Tad $s+r$ ir ābeļu skaits, kas iestādīts pirmajās septiņās rindās (un tas ir pāra skaitlis kā septiņu pāra skaitļu summa); $s+k$ ir ābeļu skaits, kas iestādīts pirmajās septiņās kolonnās (arī tas ir pāra skaitlis kā septiņu pāra skaitļu summa). Līdz ar to arī $r-k=(s+r)-(s+k)$ ir pāra skaitlis kā divu pāra skaitļu starpība; tātad r un k ir ar vienādu paritāti. Līdz ar to:

- ja r un k ir pāra skaitļi, tad pēdējā skvērā ābeli stādīt nedrīkst;
- ja r un k ir nepāra skaitļi, tad pēdējā skvērā noteikti jāiestāda ābele.

Tātad, lai kā būtu aizpildīts pelēkais $7\text{m} \times 7\text{m}$ kvadrāts, ir tieši viens veids, kā pabeigt dārza apstādīšanu. Līdz ar to derīgo veidu skaits ir vienāds ar 2^{49}.

1-3. 1. risinājums.
Visas darba grupas varam sadalīt divos dažādos tipos:

a) darba grupas, kurās ir vismaz divi žurnālisti;

b) darba grupas, kurās ir tieši viens žurnālists.

Skaidrs, ka otrā veida darba grupā jābūt vismaz diviem operatoriem un pirmā veida darba grupās var būt arī tikai viens operators. No saskaitīšanas likuma izriet, ka kopējais darba grupu skaits iegūstams, saskaitot pirmā veida darba grupu skaitu un otrā veida darba grupu skaitu.

Ar A apzīmēsim žurnālistu kopu, ar B apzīmēsim operatoru kopu, tad no dotā izriet $|A|=n$ un $|B|=m$. Jebkura darba grupa ir kopas $A \cup B$ apakškopa.

Kopai A ir 2^n-1 netukšas apakškopas un tieši n no šīm apakškopām ir ar apjomu 1 (apakškopa, kurā iekļauts tieši viens no n žurnālistiem). Tātad A apakškopu skaits, kuru apjoms ir vismaz 2, ir vienāds ar 2^n-n-1. Līdzīgi, B apakškopu skaits, kuru apjoms ir vismaz 2, ir vienāds ar 2^m-m-1.

NNV 15/16 1. nodarbība

Jebkuru pirmā veida darba grupu var iegūt kā $A' \cup B'$, kur $B' \subset B$ ir netukša B apakškopa, bet $A' \subset A$ ir kopas A apakškopa ar apjomu vismaz 2. Kopu A' var izvēlēties $2^n - n - 1$ veidos, kopu B' var izvēlēties $2^m - 1$ veidos. No reizināšanas likuma izriet, ka pirmā veida darba grupu skaits ir vienāds ar

$$d_1 = (2^n - n - 1)(2^m - 1).$$

Jebkuru otrā veida darba grupu var iegūt kā $\{a\} \cup B'$, kur $B' \subset B$ ir kopas B apakškopa ar apjomu vismaz 2, bet $a \in A$ ir jebkurš no n žurnālistiem. Žurnālistu a var izvēlēties n veidos, kopu B' var izvēlēties $2^m - m - 1$ veidos. No reizināšanas likuma izriet, ka otrā veida darba grupu skaits ir vienāds ar

$$d_2 = n(2^m - m - 1).$$

Līdz ar to dažādo darba grupu skaits ir vienāds ar

$$d_1 + d_2 = (2^n - 1)(2^m - 1) - nm.$$

2. risinājums.
Jebkuru darba grupu var izteikt formā $A' \cup B'$, kur apakškopas $A' \subset A$ un $B' \subset B$ ir netukšas; taču ir jāatmet visi tie gadījumi, kad gan A', gan B' ir ar apjomu 1 (t.i., izvēlēts tikai viens žurnālists un viens operators). A' var izvēlēties $2^n - 1$ veidos, B' var izvēlēties $2^m - 1$ veidos. Tātad A' un B' kopā var izvēlēties $(2^n - 1)(2^m - 1)$ veidos.

Taču ir nm gadījumu, kad $|A'| = |B'| = 1$ (vienu žurnālistu var izvēlēties n veidos, vienu operatoru var izvēlēties m veidos, kopā ir nm varianti, kā izvēlēties vienu žurnālistu un vienu operatoru); šie gadījumi no kopējā skaita jāatmet. Līdz ar to derīgais darba grupu skaits ir vienāds ar

$$(2^n - 1)(2^m - 1) - nm.$$

1-4. Sākumā aplūkosim, cik vispār ir tādu funkciju, kas ir definētas kopā $\{1;2;3;4;5\}$ un katram šīs kopas elementam pieņem jebkuru no trim kopas $\{1;2;3\}$ vērtībām. No reizināšanas likuma izriet, ka tādu funkciju ir $3^5 = 243$.

Šajā skaitā ir iekļautas arī divu veidu funkcijas, kas mums neder, jo to vērtību apgabals nav kopa $\{1;2;3\}$:

a) funkcijas, kas pieņem tikai vienu no kopas $\{1;2;3\}$ vērtībām, t.i., katram kopas $\{1;2;3;4;5\}$ elementam piekārto vienu un to pašu vērtību;

b) funkcijas, kas pieņem tikai divas no kopas $\{1;2;3\}$ vērtībām.

Ja pirmā veida funkciju kopu apzīmējam ar A, bet otrā veida funkciju kopu ar B, tad derīgo funkciju skaits ir vienāds ar $243 - |A| - |B|$.

Ir trīs pirmā veida funkciju: funkcija f_1, kas katram $\{1;2;3;4;5\}$ elementam piekārto 1, funkcija f_2, kas katram $\{1;2;3;4;5\}$ elementam piekārto 2 un funkcija f_3, kas katram $\{1;2;3;4;5\}$ elementam piekārto 3. Tātad $|A| = 3$.

Lai atrastu, cik ir otrā veida funkciju, vispirms noskaidrosim, cik ir tādu funkciju g, kuru definīcijas apgabals ir kopa $\{1;2;3;4;5\}$ un vērtību apgabals ir kopa $\{1;2\}$. No reizināšanas likuma izriet, ka pavisam ir $2^5 = 32$ funkcijas, kas ir definētas kopā $\{1;2;3;4;5\}$ un katram šīs kopas elementam pieņem jebkuru no divām kopas $\{1;2\}$ vērtībām. Taču šajās 32 funkcijās iekļautas arī divas funkcijas, kuru vērtību apgabals nav kopa $\{1;2\}$: tās ir funkcijas, kas katram kopas $\{1;2;3;4;5\}$ elementam piekārto vienu un to pašu vērtību (1 vai 2). Līdz ar to funkciju g skaits ir $32 - 2 = 30$.

Kopā B iekļautas trīs dažādu veidu funkcijas: tām visām definīcijas apgabals ir kopa $\{1;2;3;4;5\}$, taču atšķiras vērtību apgabali:

- funkcijas, kuru vērtību apgabals ir kopa $\{1;2\}$;
- funkcijas, kuru vērtību apgabals ir kopa $\{1;3\}$;
- funkcijas, kuru vērtību apgabals ir kopa $\{2;3\}$.

Katra veida funkciju skaits ir 30 (to, ka pirmā veida funkciju skaits ir 30, jau parādījām, pārējiem veidiem pierādījums analoģisks); tātad $|B| = 3 \cdot 30 = 90$.

Secinām, ka meklētais funkciju skaits ir $243 - 3 - 90 = 150$.

NNV 15/16 1. nodarbība

1-5. Jā, noteikti ir iespējams atrast tādu partiju, kas būtu devusi vismaz 45 solījumus.

Apskatīsim, cik partijas var būt devušas vienu un to pašu solījumu. Ja katru solījumu ir devušas ne vairāk kā 44 partijas, tad jebkurai partijai P, lai tā būtu devusi kopīgu solījumu ar katru no 2014 citām partijām, ir nācies dot vismaz $\frac{2014}{43} > 46$ solījumus. Tātad ir iespējams atrast tādu partiju, kas būtu devusi vismaz 45 solījumus.

Aplūkosim gadījumu, kad ir tāds solījums s, kuru devušas vismaz 45 partijas. Apskata partiju Q, kas nav devusi solījumu s (tāda eksistē, jo, saskaņā ar doto, ne visas partijas ir devušas solījumu s) un jebkuras divas partijas A, B, kas ir sniegušas solījumu s.

Partijām Q un A ir kopīgs tieši viens solījums s' (kas ir atšķirīgs no s) un arī partijām Q un B ir kopīgs tieši viens solījums s'' (kas arī ir atšķirīgs no s). Solījumi s' un s'' ir dažādi, jo pretējā gadījumā A un B būtu abas devušas solījumus s un $s' = s''$, kas ir pretrunā ar doto. Tātad partijas Q sniegtie solījumi, kas ir kopīgi ar 45 partijām, kuras devušas solījumu s, visi ir dažādi; līdz ar to Q devusi vismaz 45 solījumus.