Kombinatorisku sakarību pamatošana

1. Divējādā skaitīšana

Divējādā skaitīšana izmanto acīmredzamu faktu: ja vieni un tie paši objekti tiek skaitīti divos dažādos veidos, tad abos gadījumos tiek iegūta viena un tā pati atbilde.

Tipisks un labi zināms šī principa piemērs ir rindu / kolonnu summu saskaitīšana tabulā: ja tabulā ierakstīti skaitļi, tad, saskaitot visu rindu summas, iegūsim tādu pašu skaitli kā saskaitot visu kolonnu summas. Šī novērojuma iemesls, protams, ir tāds, ka abos gadījumos tiek iegūta visu tabulā esošo skaitļu summa.

1. piemērs. Dota tabula ar izmēriem 8×8; vai ir iespējams šajā tabulā katrā šūnā ierakstīt pa veselam skaitlim tā, lai vienlaikus

1. ir tieši trīs tādas kolonnas, ka katrā no tām ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis,
2. ir tieši četras tādas rindas, ka katrā no tām ierakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis?

Risinājums. Nē, tas nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka to ir izdevies izdarīt. Apzīmēsim i-tajā rindā ierakstīto skaitļu summu ar r_i un j-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu ar c_j. Tad no pieņēmuma izriet, ka starp skaitļiem c_1, c_2, $\ldots$, c_8 ir tieši trīs pāra skaitļi (un līdz ar to tieši pieci nepāra skaitļi), savukārt starp skaitļiem r_1, r_2, $\ldots$, r_8 ir tieši četri pāra un četri nepāra skaitļi.

Tātad $c_1 + c_2 + \ldots + c_8$ ir nepāra skaitlis (kā piecu nepāra un trīs pāra skaitļu summa), savukārt $r_1 + r_2 + \ldots + r_8$ ir pāra skaitlis (kā četru nepāra un četru pāra skaitļu summa). No otras puses $c_1 + c_2 + \ldots + c_8 = r_1 + r_2 + \ldots + r_8$, jo šīs vienādības abās pusēs ir visu tabulā ierakstīto skaitļu summa. Taču nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – pretruna. Tātad pieņēmums, ka tabulā var ierakstīt skaitļus prasītajā veidā, bijis aplams.

Cits tipisks šī principa piemērs ir t.s. *rokasspiedienu lemma.*

2. piemērs. Pieņemsim, ka kādā konferencē satikās n zinātnieki, daži no viņiem savā starpā sarokojās (jebkuri divi zinātnieki savā starpā sarokojās ne vairāk kā vienu reizi). Pierādīt, ka zinātnieku skaits, kas izdarīja nepāra skaitu rokasspiedienu, ir pāra skaitlis!

Risinājums. Apzīmēsim zinātniekus ar Z_1, Z_2, $\ldots$, Z_n. Saskaitīsim divos dažādos veidos, cik ir tādu sakārtotu pāru (Z_i, Z_j), ka Z_i ir sarokojies ar Z_j (tā kā mēs apskatām **sakārtotus** pārus, tad $(Z_i, Z_j) \neq (Z_j, Z_i)$, ja delegāti ir dažādi, t.i., $Z_i \neq Z_j$).

Ar x_i apzīmēsim cilvēku skaitu, ar ko sarokojies zinātnieks Z_i; ar y apzīmēsim kopējo izdarīto rokasspiedienu skaitu. Tad

1. no vienas puses, kopējais tādu sakārtotu pāru (Z_i, Z_j), ka Z_i ir sarokojies ar Z_j, skaits ir $2y$, jo pēc katra rokasspiediena (piemēram, starp diviem zinātniekiem Z_i un Z_j) rodas divi pāri (piemērā – (Z_i, Z_j) un (Z_j, Z_i));
2. no otras puses, no summas likuma izriet, ka šādu pāru skaits ir vienāds ar $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, jo katram zinātniekam Z_i tādu zinātnieku Z_j, ar kuru Z_i ir sarokojies, var izvēlēties x_i veidos.

Tātad $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2y$. Tā kā $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ir pāra skaitlis, tad ir pāra skaits tādu x_i vērtību, kas ir nepāra skaitlis, t.i., ir pāra skaits tādu zinātnieku Z_i, kas ir izdarījuši nepāra skaitu rokasspiedienu.

Šo uzdevumu arī var atrisināt, sastādot tabulu. Izveidosim $n \times n$ tabulu, kuras elementi ir 0 vai 1; tās i-tajā rindā un j-tajā kolonnā ierakstīto skaitli apzīmēsim ar $T_{i,j}$. Tabula tiek aizpildīta pēc sekojoša principa: ja zinātnieks Z_i ir sarokojies ar zinātnieku Z_j, tad $T_{i,j} = 1$, pretējā gadījumā $T_{i,j} = 0$.

Ievērosim, ka

- tabula ir simetriska, t.i., $T_{i,j} = T_{j,i}$, jo zinātnieki Z_i un Z_j vai nu ir sarokojušies (tad $T_{i,j} = T_{j,i} = 1$), vai nav (tad $T_{i,j} = T_{j,i} = 0$);
- tabulas diagonālē ierakstītas nulles: $T_{i,i} = 0$, jo zinātnieki nesarokojas paši ar sevi.

Tādā gadījumā skaitlis $x_i = T_{i,1} + T_{i,2} + \ldots + T_{i,n}$ ir vienāds ar zinātnieka Z_i izdarīto rokasspiedienu skaitu. Savukārt $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ir visu tabulā ierakstīto skaitļu summa. No otras puses, tā kā tabulā ierakstīts pāra skaits vieninieku, tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis, līdz ar to $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ir pāra skaitlis. Līdzīgi kā iepriekš, secinām, ka ir pāra skaits tādu zinātnieku Z_i, kas izdarījuši nepāra skaitu rokasspiedienu.

Divējādās skaitīšanas paņēmienam ir daudz lietojumu dažādos kombinatoriskos piemēros: ar to var

- pierādīt, ka neeksistē vajadzīgā objektu konfigurācija (skat. 1., 4., 6. un 8. piemērus);
- pierādīt dažādas identitātes: ja izdodas parādīt, ka pierādāmās vienādības $a = b$ abas puses apraksta viena un to pašu lielumu (t.i., parāda, ka $S = a$ un $S = b$, kur S ir kāds lielums, kuru aprēķinājām divos dažādos veidos), tad no tā izriet vienādības $a = b$ patiesums. Šī ideja izmantota, piemēram, nākamās nodaļas identitātes (6) pierādījumā.
- pierādīt nevienādības: ne vienmēr mūs interesējošo lielumu iespējams precīzi aprēķināt; taču, ja, skaitot vienā veidā, iegūstam, ka $S \geq a$, bet, skaitot citā veidā, iegūstam $S \leq b$ (kur S ir kāds nezināms lielums, kuru divos dažādos veidos novērtējām), tad ir pamatota nevienādība $a \leq b$. Šī ideja izmantota arī 7. piemērā.

2. Binomiālo koeficientu īpašības

Kombināciju skaitu C_n^k mēdz saukt par binomiālajiem koeficientiem, jo tie parādās kā koeficienti Ņūtona binoma (identitāte (3)) formulā. Šiem skaitļiem izpildās daudzas identitātes, no kurām pazīstamākās uzskaitītas tālāk:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad 0 \leq k \leq n \tag{1}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \qquad 0 \leq k < n \tag{2}$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n \tag{4}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \tag{5}$$

$$1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{6}$$

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n \tag{7}$$

Pierādījumi

Visbiežāk izmantotie paņēmieni dažādu binomiālo koeficientu identitāšu pierādīšanai ir šādi:

- vienādības $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ un algebrisku pārveidojumu izmantošana;
- matemātiskās indukcijas metode;
- konkrētu vērtību ievietošana a un b vietā Ņūtona binoma formulā (un dažādu pārveidojumu veikšana pirms vai pēc ievietošanas);
- interpretāciju metode: pamato, ka pierādāmās vienādības abas puses apraksta dažādo veidu skaitu, kā izpildīt kādu kombinatorisku uzdevumu.

Vienādība

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

1. pierādījums. Izmantojot formulu C_n^k aprēķināšanai, iegūstam

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

□

2. pierādījums. C_n^k ir vienāds ar dažādo veidu skaitu, kā no dotiem n elementiem izvēlēties k elementus, kurus iekļaut nesakārtotajā izlasē. Taču izvēlēties izlasē iekļaujamos k elementus ir tas pats, kas izvēlēties $n-k$ elementus, kurus **neiekļaut** izlasē. T.i., veidu skaits, kā izvēlēties k elementus (no n), ir vienāds ar veidu skaitu, kā neizvēlēties $n-k$ elementus. □

Vienādība

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \quad 0 \le k < n.$$

1. pierādījums. Izmantosim C_n^k formulu:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

□

2. pierādījums. C_{n+1}^{k+1} ir vienāds ar dažādo veidu skaitu, kā no $n+1$ elementiem izvēlēties $k+1$ elementu. Ar a apzīmē patvaļīgu elementu no dotajiem $n+1$ elementiem. Tad $k+1$ elementu nesakārtotu izlasi (no dotajiem $n+1$ elementiem) var izvēlēties vienā no diviem veidiem:

1. izvēlas tādu $k+1$ elementu izlasi, kas nesatur a; tad jāizvēlas $k+1$ elements no n atlikušajiem elementiem, ko var izdarīt C_n^{k+1} veidos;
2. izlasē iekļauj a un vēl k citus elementus; tad no n elementiem, kas atšķiras no a, jāizvēlas vēl k elementi, ko var izdarīt C_n^k veidos.

No saskaitīšanas likuma izriet, ka $k+1$ elementu izlasi var izvēlēties $C_n^{k+1} + C_n^k$ veidos. □

Vienādība

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ir t.s. **Ņūtona binoma formula**, kuru var pierādīt ar matemātisko indukciju.

Vienādība

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

1. pierādījums. Šādu vienādību iegūstam, ievietojot Ņūtona binoma formulā $a = b = 1$. □

2. pierādījums. Pieņemsim, ka dota kopa ar n elementiem. Skaitlis C_n^k ir vienāds ar šīs kopas visu to apakškopu skaitu, kuru apjoms ir k. Tad

- $C_n^0 + C_n^1$ ir visu to apakškopu skaits, kuru apjoms nepārsniedz 1;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$ ir visu to apakškopu skaits, kuru apjoms nepārsniedz 2;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ ir visu to apakškopu skaits, kuru apjoms nepārsniedz 3;

  ...
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ ir visu to (dotās kopas) apakškopu skaits, kuru apjoms nepārsniedz n.

No otras puses, dotās kopas jebkuras apakškopas apjoms nepārsniedz n. Tātad $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ ir visu dotās kopas apakškopu skaits. Iepriekšējā nodarbībā pamatojām, ka kopai ar apjomu n ir tieši 2^n apakškopas, no kā arī izriet vajadzīgā vienādība. □

Vienādība

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Pierādījums. Vienādība tiek iegūta, ja Ņūtona binoma formulā ievieto $a = 1, b = -1$. □

Vienādība

$$1\cdot C_n^1 + 2\cdot C_n^2 + \ldots + n\cdot C_n^n = n\cdot 2^{n-1}.$$

1. pierādījums. Kreisās puses izteiksme izsaka veidu skaitu, kā no n deputātiem var izvēlēties komisiju un pēc tam no komisijas locekļiem izvēlēties arī priekšsēdētāju:

1. ja komisijā ir k locekļi, tad tos no visiem n deputātiem var izvēlēties C_n^k veidos;
2. no k komisijas locekļiem priekšsēdētāju var izvēlēties $C_k^1 = k$ veidos;
3. tātad k locekļu komisiju **un** priekšsēdētāju var izvēlēties kC_n^k veidos;
4. komisijā var būt 1 **vai** 2, **vai** 3, **vai** ..., **vai** n locekļi, tātad no saskaitīšanas likuma izriet, ka komisiju ar priekšsēdētāju var sastādīt
$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$
dažādos veidos.

No otras puses, veidu skaitu, kā izvēlēties komisiju un priekšsēdētāju, var saskaitīt arī citādi: vispirms izvēlas priekšsēdētāju (to var izdarīt $C_n^1 = n$ veidos) un pēc tam – jebkuru apakškopu no atlikušajiem $n-1$ deputātiem (to var izdarīt 2^{n-1} veidos). Tātad komisiju ar priekšsēdētāju var sastādīt $n \cdot 2^{n-1}$ dažādos veidos. Secinām, ka
$$1 \cdot C_n^1 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Piezīme. Ekvivalenti pierādīto vienādību var pierakstīt formā
$$C_1^1 C_n^1 + C_2^1 C_n^2 + \ldots + C_k^1 C_n^k + \ldots + C_n^1 C_n^n = 2^{n-1} C_n^1.$$

□

2. pierādījums. Ņūtona binoma formulā ievietosim $a = 1$, $b = x$, iegūstot vienādību
$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-2} x^{n-2} + C^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$
Atvasinot vienādības abas puses pēc x, iegūstam vienādību
$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + (n-2)C_n^{n-2} x^{n-3} + (n-1)C^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}.$$
Ievietojot šajā vienādībā $x = 1$, iegūst vajadzīgo vienādību. □

Vienādība
$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Pierādījums. Doto nevienādību, saskaņā ar (1), var ekvivalenti pārveidot formā
$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \ldots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n.$$

Pieņemsim, ka parlamentā ir $2n$ deputāti (sanumurēsim viņus no 1 līdz $2n$), no kuriem ir jāizveido n deputātu komisija. To var izdarīt C_{2n}^n dažādos veidos. Parādīsim, ka arī vienādības kreisā puse apraksta, cik dažādos veidos var izveidot šādu komisiju.

Sauksim deputātus ar numuriem $1, 2, \ldots, n$ par *pirmo grupu*, bet deputātus ar numuriem $n+1, n+2, \ldots, 2n$ par *otro grupu*.

Ievērojam, ka izveidojamā komisijā var būt

- visi n deputāti no pirmās grupas (no pirmās grupas tos var izvēlēties C_n^n veidos) un neviens deputāts no otrās grupas (no otrās grupas neizvēlēties nevienu deputātu var C_n^0 veidos); kopējais šādu komisiju skaits, saskaņā ar reizināšanas likumu, ir $C_n^0 C_n^n$;
- $n-1$ deputāts no pirmās grupas (kurus var izvēlēties C_n^{n-1} veidos) un viens deputāts no otrās grupas (kuru var izvēlēties C_n^1 veidos); kopējais šādu komisiju skaits ir $C_n^1 C_n^{n-1}$;
- $n-2$ deputāti no pirmās grupas (kurus var izvēlēties C_n^{n-2} veidos) un divi deputāti no otrās grupas (kuru var izvēlēties C_n^2 veidos); kopējais šādu komisiju skaits ir $C_n^2 C_n^{n-2}$;

...

- viens deputāts no pirmās grupas (kuru var izvēlēties C_n^1 veidos) un $n-1$ deputāts no otrās grupas (kurus var izvēlēties C_n^{n-1} veidos); kopējais šādu komisiju skaits ir $C_n^1 C_n^{n-1}$;
- neviens deputāts no pirmās grupas (no pirmās grupas neizvēlēties nevienu deputātu var C_n^0 veidos) un visi n deputāti no otrās grupas (kurus var izvēlēties C_n^n veidos); kopējais šādu komisiju skaits ir $C_n^0 C_n^n$.

Tā kā jebkura n deputātu komisija var tikt sastādīta tieši vienā no aprakstītajiem veidiem, tad saskaņā ar saskaitīšanas likumu kopējais dažādo veidu skaits, kā izveidot šādu komisiju, ir
$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \ldots + C_n^n C_n^0.$$

□

3. Piemēri no matemātikas olimpiādēm

3. piemērs (Latvijas 53. mat. olimpiāde, 3. posms). "Tabulā"

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\ & & 8 & & 12 & & 16 & & \\ & & & 20 & & 28 & & & \\ & & & & 48 & & & & \end{array}$$

augšējā rindiņā ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 5; nākamajās rindiņās katrs skaitlis vienāds ar abu virs tā uzrakstīto skaitļu summu. Kāds skaitlis atrodas apakšējā "virsotnē" tabulā, kas veidota analoģiski un kuras augšējā rindiņā ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2003 ieskaitot?

Risinājums. Aplūkosim, kāds skaitlis ierakstīts tabulas virsotnē, ja augšējā rindiņā ierakstīti n skaitļi $x_1, \ldots, x_n$. Ja $n = 1$, tad tabula sastāv tikai no vienas rindiņas un viena skaitļa x_1 un tabulas virsotnē ierakstīts $x_1 = C_0^0 x_1$.

Ja $n = 2$, tad tabula ir

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ & x_1 + x_2 & \end{array}$$

un tās virsotnē ierakstīts $x_1 + x_2 = C_1^0 x_1 + C_1^1 x_2$.

Ja $n = 3$, tad tabula ir

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 \\ & x_1 + x_2 & & x_2 + x_3 & \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 & & \end{array}$$

un tās virsotnē ierakstīts $x_1 + 2x_2 + x_3 = C_2^0 x_1 + C_2^1 x_2 + C_2^2 x_3$.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim šādu apgalvojumu: ja augšējā rindiņā ierakstīti n skaitļi $x_1, \ldots, x_n$, tad tabulas apakšā ierakstītais skaitlis ir

$$C_{n-1}^0 x_1 + C_{n-1}^1 x_2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} x_n.$$

Indukcijas bāze jau ir parādīta. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess naturālam n un pamatosim to gadījumā, kad tabulas T pirmajā rindiņā ierakstīti $n+1$ skaitļi $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Noskaidrosim, kādi skaitļi ir ierakstīti šādas tabulas pirmspēdējā rindiņā (kur ierakstīti tikai divi skaitļi).

Ja tabulā T katrā rindiņā atmet skaitli, kas ierakstīts pirmajā pozīcijā pa kreisi, iegūst analoģiski sastādītu tabulu, kuras pirmajā rindiņā ierakstīti n skaitļi $x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, šādas tabulas virsotnē (kas ir sākotnējās tabulas T pirmspēdējās rindiņas pa labi ierakstītais skaitlis) ir ierakstīts skaitlis

$$L = C_{n-1}^0 x_2 + C_{n-1}^1 x_3 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} x_n + C_{n-1}^{n-1} x_{n+1}.$$

Ja tabulā T katrā rindiņā atmet skaitli, kas ierakstīts pirmajā pozīcijā pa labi, iegūst analoģiski sastādītu tabulu, kuras pirmajā rindiņā ierakstīti n skaitļi $x_1, \ldots, x_n$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, šādas tabulas virsotnē (kas ir sākotnējās tabulas T pirmspēdējās rindiņas pa kreisi ierakstītais skaitlis) ir ierakstīts skaitlis

$$K = C_{n-1}^0 x_1 + C_{n-1}^1 x_2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} x_n.$$

Tātad tabulas T pēdējā rindiņā ierakstīti skaitļi K un L; to summa, kas ierakstīta T virsotnē, ir

$$K + L = C_{n-1}^0 x_1 + \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) x_2 + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) x_3 + \ldots + \left(C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\right) x_n + C_{n-1}^{n-1} x_{n+1}.$$

Saskaņā ar binomiālo koeficientu īpašībām,

$$\begin{aligned} &C_{n-1}^0 = 1 = C_n^0, \\ &C_{n-1}^{n-1} = 1 = C_n^n, \\ &C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k, \quad \text{katram } k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Tātad T virsotnē ierakstītais skaitlis ir

$$K + L = C_n^0 x_1 + C_n^1 x_2 + C_n^2 x_3 + \ldots + C_n^{n-1} x_n + C_n^n x_{n+1}$$

un induktīvā pāreja ir pabeigta.

Līdz ar to, ja tabulā pirmajā rindiņā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 2003, tabulas virsotnē ierakstīts skaitlis

$$C_{2002}^0 + 2C_{2002}^1 + 3C_{2002}^2 + \ldots + 2002C_{2002}^{2001} + 2003C_{2002}^{2002}.$$

Vienkāršosim šo izteiksmi. Ievērosim, ka to var pierakstīt kā

$$\left(C_{2002}^0 + C_{2002}^1 + \ldots + C_{2002}^{2001} + C_{2002}^{2002}\right) + \left(C_{2002}^1 + 2C_{2002}^2 + \ldots + 2001C_{2002}^{2001} + 2002C_{2002}^{2002}\right).$$

Saskaņā ar identitātēm (4) un (6), pirmajās iekavās ierakstītais skaitlis ir 2^{2002}, bet otrajās ierakstīts skaitlis $2002 \cdot 2^{2001}$.

Līdz ar to aplūkojamās tabulas virsotnē ierakstītais skaitlis ir

$$2^{2002} + 2002 \cdot 2^{2001} = 2^{2002} + 1001 \cdot 2^{2002} = 1002 \cdot 2^{2002} = 501 \cdot 2^{2003}.$$

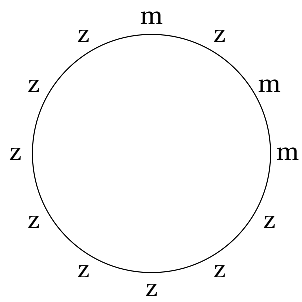
4. piemērs (Latvijas 61. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

Risinājums. Katra šķautne ir mala tieši divām skaldnēm, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu, tāpēc šī summa ir pāra skaitlis. Bet nepāra skaita nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis, pretruna. Tātad neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

5. piemērs (Latvijas 60. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Ap apaļu galdu sēž zēni un meitenes, zēnu ir trīs reizes vairāk nekā meiteņu. Tādu vietu, kur blakus sēž zēns un meitene, ir divreiz mazāk nekā pārējo vietu (t.i., tādu, kur blakus sēž vai nu zēns un zēns, vai meitene un meitene). Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits?

Risinājums. Apzīmēsim meiteņu un zēnu skaitu attiecīgi ar m un z, tad $z = 3m$ un kopējais bērnu skaits ir $4m$.

Ja ir a pāru "zēns-meitene" skaits, tad citu pāru ir $2a$, tātad pavisam ir $3a$ pāru. Tāpēc $3a = 4m$. Tātad m jādalās ar 3 un ir vismaz 12 bērni. Piemēru ar 12 bērniem sk. 1. zīm.:



1. zīm.

6. piemērs (Latvijas 41. atklātā mat. olimpiāde)**.** Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

Risinājums. Iedomāsimies, ka katram marsietim katrā rokā ir tik margrietiņu, cik viņam ir antenu. Tādā gadījumā margrietiņu kopējais skaits būs trīs reizes lielāks nekā kopējais antenu skaits, t.i., margrietiņu skaits būs $3 \cdot 2014$.

No otras puses pēc uzdevumā dotā ("antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes") katras divas savienotas rokas kopā tur margrietiņu skaitu, kas ir skaitļa 7 daudzkārtnis (ja vienam marsietim vienā rokā ir x margrietiņas, bet otram – $6x$ margrietiņas, tad abiem kopā ir $7x$ margrietiņas). Tātad margrietiņu kopējam skaitam jādalās ar 7, bet $3\cdot 2014 = 3\cdot 2\cdot 19\cdot 53$ nedalās ar 7. Līdz ar to esam parādījuši, ka kopējais antenu skaits nevar būt 2014.

7. piemērs (Latvijas 55. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Kādā universitātē strādā n profesori, $n \geq 2$. Katrs profesors lasa lekcijas. Daži no viņiem klausās citu profesoru lekcijas. Ir zināms, ka

- neviens neklausās savas lekcijas,
- ja A klausās B lekcijas, tad B neklausās A lekcijas,
- ja A ir profesors un B ir profesors, tad var atrast tādu profesoru C, kas klausās gan A lekcijas, gan B lekcijas.

1. Pierādīt: universitātē var strādāt 7 profesori.
2. Kādas vēl var būt n vērtības?

Risinājums

1. Apzīmēsim profesorus ar $p_1, p_2, \ldots, p_7$. Tad klausītāju kopas K_i (K_i – to profesoru kopa, kas klausās profesoru p_i) var būt šādas:

$$K_1 = \{p_2; p_3; p_4\}, K_2 = \{p_3; p_5; p_6\}, K_3 = \{p_4; p_5; p_7\}, K_4 = \{p_2; p_6; p_7\}, K_5 = \{p_1; p_4; p_6\}, K_6 = \{p_1; p_3; p_7\}, K_7 = \{p_1; p_2; p_5\}.$$

2. Ja n profesoriem prasītās kopas ir konstruētas, tad pievienojot vēl vienu profesoru, kuru klausās visi iepriekšējie n profesori, iegūstam "klausīšanās sistēmu" $n+1$ profesoram. Tātad var būt arī $n = 8; 9; \ldots$, t.i., der visi $n \geq 7$.

   Pamatosim, ka noteikti jābūt $n \geq 7$.

   Vispirms pierādīsim, ka katru profesoru A klausās vismaz 3 citi profesori:

   - ja profesoru A klausītos tikai B, tad neviens profesors neklausītos A un B (pretruna ar doto);
   - ja profesoru A klausītos tikai B un C, tad profesorus A un B varētu klausīties tikai C, bet profesorus A un C varētu klausīties tikai B. Taču tad B un C klausās viens otra lekcijas – pretruna ar doto.

   Divējādi novērtēsim, cik ir tādu **sakārtotu** profesoru pāru (A, B) ar īpašību "B klausās A lekcijas". No vienas puses, no nupat pierādītā izriet, ka šādu pāru ir vismaz $3n$ (jo par A var izvēlēties jebkuru no n profesoriem un ir vismaz trīs profesori, kurus var ņemt par B). No otras puses, šādu pāru nav vairāk kā kopējais **nesakārtotu** profesoru pāru skaits $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, jo nav divu profesoru, kas klausītos viens otru.

   Tātad $3n \leq \frac{n(n-1)}{2}$, no kurienes iegūstam, ka $n - 1 \geq 6$ jeb $n \geq 7$.

8. piemērs (Latvijas 57. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Katrā n-stūra prizmas virsotnē ierakstīts vai nu $+1$, vai -1. Zināms, ka katras skaldnes virsotnēs ierakstīto skaitļu reizinājums ir -1. Vai var būt, ka

1. $n = 4$,
2. $n = 10$?

Risinājums

1. Jā. Piemēram, divās pretējās kuba virsotnēs ieraksta -1, bet citās ieraksta $+1$.
2. Nē. Pieņemsim pretējo, ka ir izdevies to izdarīt. Divējādi aprēķināsim visu ierakstīto skaitļu reizinājumu P.

   No vienas puses, $P = P_1 \cdot P_2$, kur P_1 un P_2 ir attiecīgi prizmas pamatos ierakstīto skaitļu reizinājumi. No dotā izriet, ka $P_1 = P_2 = -1$, tātad $P = 1$.

   No otras puses, $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$, kur a_i ir piecu sānu skaldnēs ierakstīto skaitļu reizinājums (ņemot ik otro skaldni); no dotā izriet, ka $a_i = -1$, tāpēc $P = (-1)^5 = -1$.

   Iegūstam, ka $-1 = P = 1$ – pretruna. Tātad pieņēmums, ka $n = 10$ gadījumā ir iespējams skaitļus šādi ierakstīt, bijis aplams.