NNV 15/16 2. nodarbība

2-1. Komisijā noteikti jāiekļauj mājas vecākais un viņa trīs vietnieki; atlikušos $10-4=6$ komisijas locekļus jāizraugās no pārējiem $104-4=100$ nama iemītniekiem, ko var izdarīt C_{100}^{6} veidos. Tātad dažādo veidu skaits, kā sastādīt komisiju, ir $C_{100}^{6}=1192052400$.

Piezīme. Analoģiski spriežot, iespējams parādīt: ja dotas kopas A un B, kam $|A|=a$, $|B|=b$ un $B\subset A$, tad izvēlēties tādu kopu T, ka $B\subset T\subset A$ un $|T|=t$, kur $b\le t\le a$, var C_{a-b}^{t-b} veidos.

2-2. Katrā šādā skaitlī ir viens cipars (apzīmēsim to ar a), kas skaitlī ir tikai vienu reizi un divi cipari (apzīmēsim tos ar b un c), kas katrs parādās šajā skaitlī divas reizes.

Ja $0\notin\{a,b,c\}$, tad, saskaņā ar piemēru teorijas materiālā, šādu piecciparu skaitļu ir 7560. Noskaidrosim, cik ir tādu piecciparu skaitļu, ja kāds no cipariem ir 0.

- Ja $a=0$, tad cipars a var būt kādā no 4 pozīcijām (tas nevar būt pirmais cipars, jo tad skaitlis nebūtu piecciparu); atlikušajās četrās pozīcijās jānovieto divi cipari b, ko var izdarīt $C_4^2=\frac{4\cdot3}{2}=6$ dažādos veidos; pēc tam ciparu c atlikušajās divās pozīcijās var ierakstīt tikai vienā veidā. No reizināšanas likuma izriet, ka pie konkrētām b,c vērtībām ir $4\cdot6\cdot1=24$ veidi, kā izveidot šādu trīsciparu skaitli (turklāt b un c secībai nav nozīmes). Ciparus b un c var izvēlēties $C_9^2=\frac{9\cdot8}{2}=36$ veidos, tātad ir $24\cdot36=864$ šādi piecciparu skaitļi.
- Ja $b=0$, tad cipars $a\neq0$ var būt kādā no 5 pozīcijām. Šķirosim divus gadījumus:
  - **a)** a ir pirmais cipars; tad atlikušajās četrās pozīcijās jānovieto divi cipari $b=0$, ko var izdarīt $C_4^2=\frac{4\cdot3}{2}=6$ dažādos veidos; pēc tam ciparu c atlikušajās divās pozīcijās var ierakstīt tikai vienā veidā. No reizināšanas likuma izriet, ka pie konkrētām a,c vērtībām ir $6\cdot1=6$ veidi, kā izveidot šādu trīsciparu skaitli. a var izvēlēties 9 veidos un pēc tam c var izvēlēties 8 veidos. Tātad šādu piecciparu skaitļu ir $9\cdot8\cdot6=432$.
  - **b)** a nav pirmais cipars; tā kā pirmais cipars nevar būt arī $b=0$, tad skaitļa pirmais cipars noteikti ir c. Ciparu a var ierakstīt kādā no četrām pozīcijām, atlikušajās trīs pozīcijās jāieraksta divus ciparus b, ko var izdarīt $C_3^2=3$ veidos. Vienā brīvajā pozīcijā jāieraksta vēl otrs c, ko var izdarīt tikai vienā veidā. No reizināšanas likuma izriet, ka pie konkrētām a,c vērtībām ir $4\cdot3=12$ veidi, kā izveidot šādu trīsciparu skaitli. a var izvēlēties 9 veidos un pēc tam c var izvēlēties 8 veidos. Tātad šādu piecciparu skaitļu ir $9\cdot8\cdot12=864$.

  No saskaitīšanas likuma izriet, ka vajadzīgo piecciparu skaitļu skaits, kam $b=0$, ir $864+432=1296$.
- Ja $c=0$, iegūstam tos pašus piecciparu skaitļus, kurus iepriekšējā gadījumā (jo b un c secībai nav nozīmes). Tātad šajā gadījumā papildu skaitļus neiegūstam.

No saskaitīšanas likuma izriet, ka vajadzīgo piecciparu skaitļu skaits, kam viens no cipariem ir 0, ir $864+1296=2160$.

Līdz ar to pavisam meklēto piecciparu skaitļu skaits ir $7560+2160=9720$.

2-3. Vispirms ievērosim, ka starp konferences dalībniekiem ir ne vairāk kā deviņi dažādi vecumi: ja būtu tādi desmit cilvēki, kuriem visiem ir dažādi vecumi, tad viņu veidotā kopa būtu pretrunā nosacījumam, ka starp jebkuriem desmit dažādiem dalībniekiem var atrast vismaz divus cilvēkus, kuriem ir vienāds vecums.

Tad,

- tā kā $505=7\cdot72+1$, tad, saskaņā ar Dirihlē principu, var atrast vismaz 73 konferences dalībniekus, kas visi ir no vienas un tās pašas valsts;
- tā kā $73=9\cdot8+1$, starp šiem 73 cilvēkiem var atrast vismaz deviņus tādus, kam ir vienāds vecums;
- tā kā $9=2\cdot4+1$, starp šiem deviņiem cilvēkiem var atrast vismaz piecus tādus, kas arī pārstāv vienu nozari.

Tātad noteikti ir iespējams atrast piecus konferences dalībniekus, kas visi ir no vienas un tās pašas valsts, ar vienādu vecumu un pārstāv vienu un to pašu nozari.

2-4. Vispirms parādīsim, ka S satur ne vairāk kā piecus elementus. Pretējā gadījumā kopai S ir vismaz seši elementi un vismaz

$$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$$

netukšas apakškopas, kurās ir ne vairāk kā četri elementi. No otras puses, katrā šādā apakškopā visu elementu summa nav lielāka kā $15+14+13+12=54$; tātad, saskaņā ar Dirihlē principu, var atrast divas apakškopas, kuru elementu summas ir vienādas, kas ir pretruna ar doto.

Kopa $S=\{8,11,13,14,15\}$, kas satur piecus elementus, apmierina uzdevumu nosacījumus un tās elementu summa ir 61. Skaidrs, ka jebkurai kopai, kas satur mazāk nekā piecus elementus, to summa nepārsniedz 54. Parādīsim, ka nevienai piecu elementu kopai, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, visu tās elementu summa nepārsniedz 61; tad būs pierādīts, ka 61 ir lielākā iespējamā vērtība.

Pieņemsim pretējo: ir tādi pieci skaitļi $1 \le a < b < c < d < e \le 15$, ka $S=\{a,b,c,d,e\}$ apmierina uzdevuma nosacījumus, turklāt $a+b+c+d+e$ (apzīmēsim šo skaitli ar s) ir vismaz 62. Tad $d+e \le 14+15=29$ un $c \le 13$.

Kopai S ir $C_5^2=10$ apakškopas ar diviem elementiem; starp tām lielākā elementu summa ir apakškopai $\{d,e\}$, bet mazākā – apakškopai $\{a,b\}$. Tātad $a+b \le d+e-9 \le 20$. Secinām, ka

$$s \le 20+13+29=62.$$

Tā kā pieņēmām, ka $s>61$, tad jābūt $s=62$ un visas iepriekš uzrakstītās nevienādības patiesībā ir vienādības: $a+b=20$, $c=13$, $d=14$, $e=15$. turklāt $a<b\le 12$.

Ja $b=12$, tad $b+e=12+15=13+14=c+d$ – pretruna. Tātad $b<12$. Ja $b\le 10$, tad $a+b\le 19$, taču secinājām, ka $a+b=20$. Līdz ar to $b=11$ un $a=9$. Taču tad $a+e=9+15=11+13=b+c$ – atkal iegūta pretruna. Līdz ar to pieņēmums, ka ir iespējams $s\ge 62$, bijis aplams.

2-5. Pamatosim, ka lielākais iespējamais partiju skaits ir $\frac{1}{2}C_{10}^5=126$.

Ar S apzīmēsim visu 10 doto solījumu kopu, tad $|S|=10$. Katrai partijai p atbilst kaut kāda kopas S apakškopa $A_p\subset S$, turklāt $\left|A_p\right|=5$. No dotā izriet, ka jebkurām divām partijām p un q

- doto solījumu kopas nav disjunktas, t.i., $\left|A_p\cap A_q\right|\ne\emptyset$;
- doto solījumu kopas ir dažādas, t.i., $A_p\ne A_q$.

Kopai S ir pavisam $C_{10}^5=252$ apakškopas ar apjomu 5. Sadalīsim visas šīs apakškopas pāros: katrai $A\subset S$, kam $|A|=5$, pārī piekārtosim $S\setminus A$ (ievērosim, ka arī $|S\setminus A|=5$). Šādā veidā visas 252 kopas S apakškopas tiek sadalītas 126 pāros. Ievērojam: ja partijas p doto solījumu kopa ir A_p, tad nevienas partijas doto solījumu kopa nav $S\setminus A_p$; ja tā nebūtu un varētu atrast partiju q, kuras doto solījumu kopa ir $A_q=S\setminus A_p$, tad A_p un A_q būtu disjunktas kopas, taču tas ir pretrunā ar doto.

Tātad katrā pārī ne vairāk kā viena kopa atbilst kādai partijai; tā kā pāru skaits ir 126 un dažādām partijām atbilst dažādas kopas, tad partiju skaits nevar būt lielāks kā pāru skaits, t.i., ir ne vairāk kā 126 partijas.

Atliek pamatot, ka šāds partiju skaits ir iespējams. Izvēlas patvaļīgu solījumu $s\in S$. Katrā no iepriekš aprakstītajiem kopu pāriem (A,B) ir tieši viena kopa, kas satur elementu s (jo $A\cup B=S$ un $A\cap B=\emptyset$). Tātad ir tieši 126 kopas ar apjomu 5, kas satur s, un 126 kopas, kas nesatur s.

Patvaļīgi sanumurēsim šos 126 kopu pārus (A_1,B_1), (A_2,B_2), …, (A_{126},B_{126}) tā, lai $s\in A_i$ un $s\notin B_i$, visiem $i=1,2,\ldots,126$. T.i, visas 252 kopas A_1, …, A_{126}, B_1, …, B_{126} ir dažādas kopas S piecu elementu apakškopas, turklāt $B_i=S\setminus A_i$ un $s\in A_i$ visiem $i=1,2,\ldots,126$.

Parādīsim, ka 126 kopas A_1, B_2, B_3, …, B_{126} ir tādi solījumu komplekti, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Jāpamato, ka katras divas šādas kopas šķeļas un neviens solījums neparādās vairāk kā $75<0.6\cdot 126$ no šīm kopām.

Jebkuras divas izvēlētās kopas šķeļas:

- jebkuru divu kopu B_i un B_j, $2\le i,j\le 126$, apvienojums satur kopumā ne vairāk kā deviņus elementus (jo s apvienojumam nepieder); tā kā abu kopu apjoms ir 5, no Dirihlē principa izriet, ka vismaz viens solījums ietilpst abās kopās;
- kopu A_1 un jebkuras B_i, $2\le i\le 126$, šķēlums nav tukšs. Lai to pamatotu, pieņem pretējo: $A_1\cap B_i=\emptyset$. Tā kā A_1 un B_i sastāv katra no pieciem elementiem (un starp šiem desmit elementiem nav vienādu, saskaņā ar pieņēmumu), to apvienojums ir visa kopa S (jo S sastāv no desmit elementiem). Tas nozīmē, ka $B_i=S\setminus A_1=B_1$, taču B_1 neparādās starp izvēlētajām 126 kopām – pretruna. Tātad pieņēmums bijis aplams un kopām A_1 un B_i ir kopīgs elements.

Jebkurš solījums parādās ne vairāk kā starp 75 izvēlētajām kopām: Izvēlēsimies patvaļīgu solījumu $a\in S$, $a\ne s$. Tad ir tieši $C_8^4=70$ kopas apjomā 5, kas satur solījumu a, bet nesatur s (jo atlikušos četrus kopas elementus var izvēlēties no astoņu elementu kopas $S\setminus\{a,s\}$). Tātad katrs solījums parādās tieši 70 no kopām B_1, B_2, …, B_{126}.

Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

- $a \in A_1$. Tad $a \notin B_1$ un a parādās tieši 71 no izvēlētajām kopām $B_1, B_2, \ldots, B_{126}$.
- $a \notin A_1$. Tad $a \in B_1$ un a parādās tieši 69 no izvēlētajām kopām $B_1, B_2, \ldots, B_{126}$.

Visbeidzot, solījums s parādās tikai kopā A_1. Līdz ar to ir pamatots, ka katrs solījums ir iekļauts vismaz vienā kopā, taču neviens solījums neparādās starp vairāk kā 71 kopām un $71 < 75 < 0.6 \cdot 126$.

Secinām, ka gadījumā, ja katra no 126 partijām ir devusi tieši vienu no šiem 126 solījumu komplektiem, tad tiek izpildīti uzdevuma nosacījumi.