Izliektu funkciju nevienādības

Mazā matemātikas universitāte

Emīls Kalugins

Latvijas universitāte Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte

Rīga, 2021

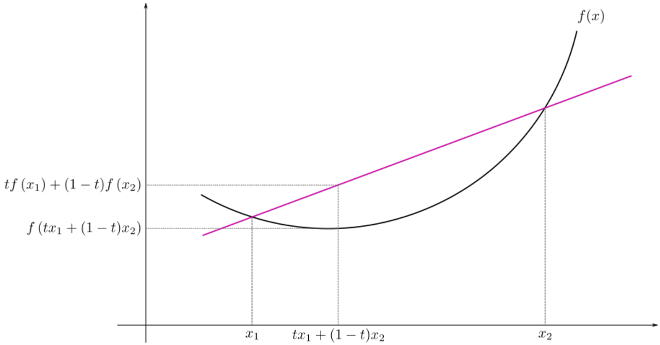
Ievads

Ievads

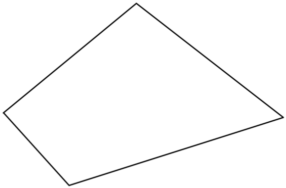
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

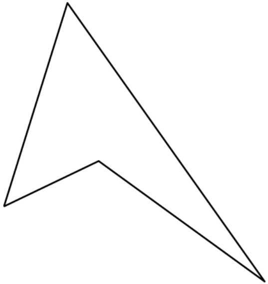
Ievads

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

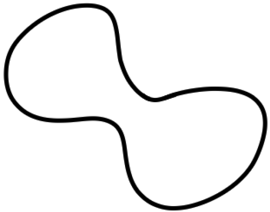


Figūru izliektība

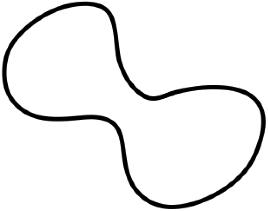


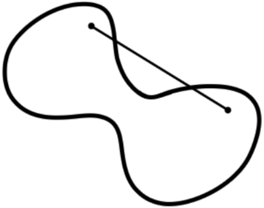


Figūru izliektība



Figūru izliektība



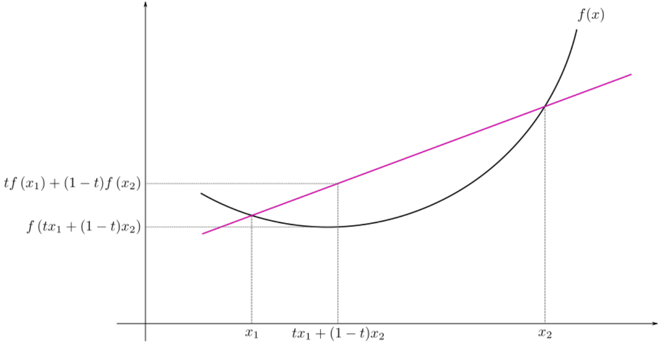


Izliekta funkcija

Izliekta funkcija

Funkciju $f(x)$ sauc par *izliektu* intervālā I, ja jebkuram punktam x_1 un x_2 no I un visiem $t \in [0;1]$ izpildās nevienādība

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

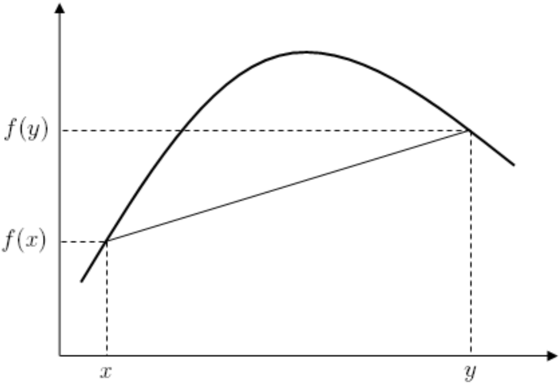


Ieliekta funkcija

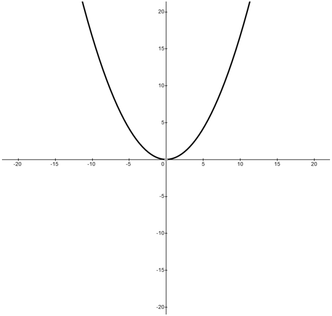
Ieliekta funkcija

Funkciju $f(x)$ sauc par *ieliektu* intervālā I, ja jebkuram punktam x_1 un x_2 no I un visiem $t \in [0; 1]$ izpildās nevienādība

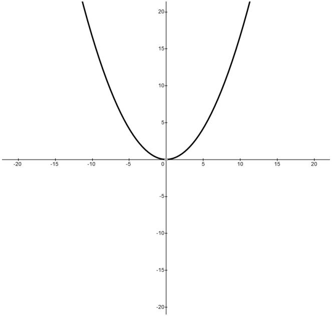
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

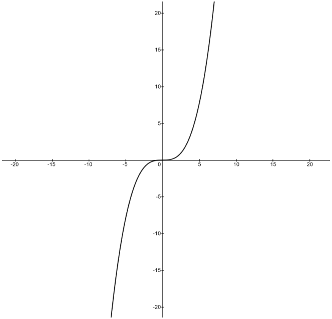


Funkciju piemēri

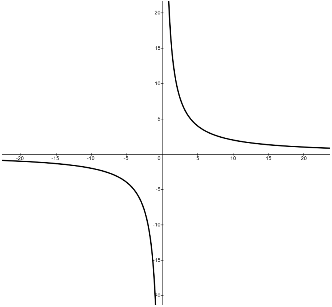


Funkciju piemēri

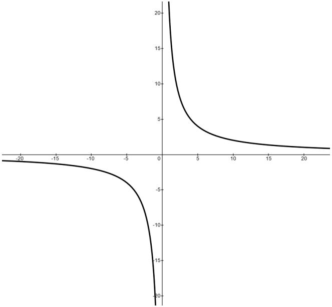


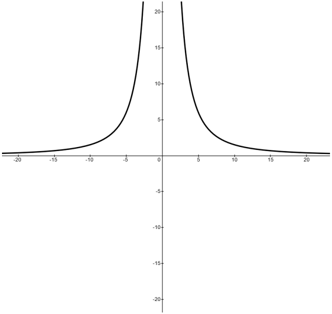


Funkciju piemēri

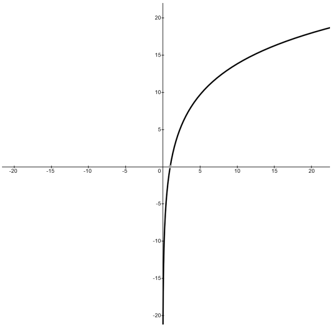


Funkciju piemēri

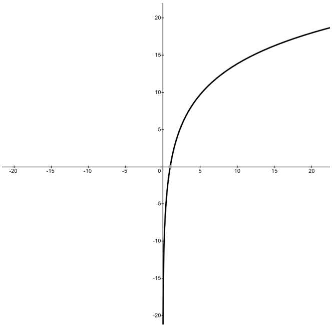


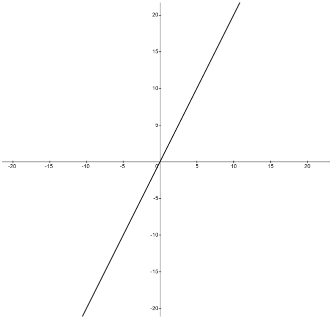


Funkciju piemēri



Funkciju piemēri





Vienkāršošana

Izliektība pēc viduspunkta

Funkciju $f(x)$ sauc par *izliektu pēc viduspunkta* intervālā I, ja jebkuram punktam x_1 un x_2 no I izpildās nevienādība

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}.$$

Ieliektība pēc viduspunkta

Funkciju $f(x)$ sauc par *ieliektu pēc viduspunkta* intervālā I, ja jebkuram punktam x_1 un x_2 no I izpildās nevienādība

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}.$$

Sekas nepārtrauktām funkcijām

Nepārtrauktu funkciju izliektība

Ja nepārtraukta funkcija $f(x)$ ir izliekta/ieliekta pēc viduspunkta intervālā I, tad tā ir izliekta/ieliekta intervālā I.

Jensena nevienādība

Jensena nevienādība

Ja $f(x)$ ir izliekta funkcija intervālā I, tad visiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no I ir spēkā

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n}.$$

Ieliektām funkcijām nevienādība mainās uz pretējo pusi.

Aritmētiskais vidējais - Kvadrātiskais vidējais

Funkcija $f(x) = x^2$ ir izliekta. Tātad visiem $x_i, i = 1, \dots, n$,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2}{n} + \frac{x_2^2}{n} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}.$$

Aritmētiskais vidējais - Kvadrātiskais vidējais

Funkcija $f(x) = x^2$ ir izliekta. Tātad visiem $x_i, i = 1, \dots, n$,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2}{n} + \frac{x_2^2}{n} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}.$$

Ņemot kvadrātsakni no abām pusēm, iegūstam

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Aritmētiskais vidējais - Ģeometriskais vidējais

Funkcija $f(x) = \ln x$ ir ieliekta. Tātad visiem $x_i > 0, i = 1, \dots, n$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1)}{n} + \frac{\ln(x_2)}{n} + \dots + \frac{\ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right).$$

Aritmētiskais vidējais - Ģeometriskais vidējais

Funkcija $f(x) = \ln x$ ir ieliekta. Tātad visiem $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1)}{n} + \frac{\ln(x_2)}{n} + \cdots + \frac{\ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right).$$

Abas nevienādības puses eksponējot, iegūstam

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Uzdevums

Pamatot, ka, ja $a, b, c > 0$, tad ir spēkā

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Uzdevums

Pamatot, ka, ja $a, b, c > 0$, tad ir spēkā

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Veicot apzīmējumu $S = a + b + c$, jāpārbauda, vai ir spēkā

$$\frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}.$$

Uzdevums

Pamatot, ka, ja $a, b, c > 0$, tad ir spēkā

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Veicot apzīmējumu $S = a + b + c$, jāpārbauda, vai ir spēkā

$$\frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}.$$

Šeit varam saskatīt, ka būtu jāpārbauda funkcija $f(x) = \frac{x}{S-x}$ uz izliektību.

Uzdevums

Pētāmo funkciju varam sadalīt, t.i., $f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$.

Uzdevums

Pētāmo funkciju varam sadalīt, t.i., $f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$.

Tātad funkcija $f(x)$ ir nobīdīta hiperbola, kas būs izliekta intervālā $[0; S)$.

Uzdevums

Pētāmo funkciju varam sadalīt, t.i., $f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$.

Tātad funkcija $f(x)$ ir nobīdīta hiperbola, kas būs izliekta intervālā $[0; S)$.

Tas nozīmē, ka varam pielietot Jensena nevienādību, t.i.,

$$\frac{\frac{a}{S-a}}{3} + \frac{\frac{b}{S-b}}{3} + \frac{\frac{c}{S-c}}{3} \geq \frac{\frac{S}{3}}{S - \frac{S}{3}},$$

Uzdevums

Pētāmo funkciju varam sadalīt, t.i., $f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$.

Tātad funkcija $f(x)$ ir nobīdīta hiperbola, kas būs izliekta intervālā $[0; S)$.

Tas nozīmē, ka varam pielietot Jensena nevienādību, t.i.,

$$\frac{\frac{a}{S-a}}{3} + \frac{\frac{b}{S-b}}{3} + \frac{\frac{c}{S-c}}{3} \geq \frac{\frac{S}{3}}{S - \frac{S}{3}},$$

kas arī noved pie prasītās nevienādības

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Kombinatorikas uzdevums

Simts bumbiņas ir izkrāsotas kādā no desmit iespējamām krāsām. Vismaz cik pāri bumbiņu būs izkrāsoti vienādās krāsās?

Kombinatorikas uzdevums

Simts bumbiņas ir izkrāsotas kādā no desmit iespējamām krāsām. Vismaz cik pāri bumbiņu būs izkrāsoti vienādās krāsās?

Ar $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ apzīmēsim bumbiņu skaitu, kas nokrāsotas ar pirmo, otro, ..., desmito krāsu. Tātad zināms, ka $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$.

Kombinatorikas uzdevums

Simts bumbiņas ir izkrāsotas kādā no desmit iespējamām krāsām. Vismaz cik pāri bumbiņu būs izkrāsoti vienādās krāsās?

Ar $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ apzīmēsim bumbiņu skaitu, kas nokrāsotas ar pirmo, otro, ..., desmito krāsu. Tātad zināms, ka $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 100$.

Ja krāsai i ir x_i bumbiņas, tad kopā var izveidot $\binom{x_i}{2} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$ pārus no krāsas i bumbiņām. Tātad, lai atrisinātu uzdevumu, mēs gribam atrast mazāko vērtību izteiksmei

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{10}}{2}.$$

Kombinatorikas uzdevums

Funkcija $f(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$ ir izliekta, tātad ir spēkā novērtējums

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{10}}{2} \geq 10 \cdot \binom{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}}{2} = 10 \cdot \binom{10}{2} = 450.$$

Kombinatorikas uzdevums

Funkcija $f(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$ ir izliekta, tātad ir spēkā novērtējums

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{10}}{2} \geq 10 \cdot \binom{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}}{2} = 10 \cdot \binom{10}{2} = 450.$$

Tātad vienmēr būs vismaz 450 pāri bumbiņu, kam ir vienāda krāsa. Šo varam sasniegt, ja no katras krāsas būs tieši 10 bumbiņas.

Ģeometrijas uzdevums

Ar A, B, C apzīmēsim trīsstūra $\triangle abc$ leņķus. Pierādīt, ka ir spēkā

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ģeometrijas uzdevums

Ar A, B, C apzīmēsim trīsstūra $\triangle abc$ leņķus. Pierādīt, ka ir spēkā

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Funkcija $f(x) = \sin(x)$ ir ieliekta intervālā $[0, \pi]$. Tātad pēc Jensena nevienādības.

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \cdot \sin \frac{A+B+C}{3} = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Virkņu mažorizācija

Mažorizācija

Saka, ka neaugošā secībā sakārtota skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *mažorizē* citu sakārtotu skaitļu virkni $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ja

$$
\begin{gathered}
a_1 \geq b_1 \\
a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\
a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2 + b_3 \\
\ldots \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n
\end{gathered}
$$

un apzīmē to ar $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Piemērs

Virkne $(4; 3; 1; 1)$ mažorizē virkni $(3; 3; 2; 2)$ jeb $(4; 3; 1; 1) \succ (3; 2; 2; 2)$, jo

$$
\begin{gathered}
4 \geq 4 \\
4 + 3 \geq 3 + 3 \\
4 + 3 + 1 \geq 3 + 2 + 2 \\
4 + 3 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 2.
\end{gathered}
$$

Karamatas nevienādība

Karamatas nevienādība

Ja $f(x)$ ir izliekta funkcija intervālā I un $\{a_i\}_n$ un $\{b_i\}_n$ ir divas skaitļu virknes ar n elementiem no kopas I, pie tam $(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (b_1, b_2, \dots, b_n)$, tad ir spēkā

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$

Gadījumā, ja funkcija $f(x)$ ir ieliekta, tad nevienādība mainās uz pretējo pusi.

Uzdevums

Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c vienmēr ir patiesa izteiksme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c}.$$

Uzdevums

Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c vienmēr ir patiesa izteiksme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c}.$$

Apskatīsim funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Šī funkcija iz izliekta pozitīviem skaitļiem.

Uzdevums

Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c vienmēr ir patiesa izteiksme

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}.$$

Apskatīsim funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$. Šī funkcija iz izliekta pozitīviem skaitļiem.

Tā kā vienādojums ir simetrisks, tad varam pieņemt, ka $a \geq b \geq c$. Pie šiem nosacījumiem virkne (a, b, c) mažorizē $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$.

Prasīto nevienādību tad iegūstam, pielietojot Karamatas nevienādību.

Uzdevums

Pamatot, ka pozitīviem x un k ir spēkā nevienādība

$$\left(1 + x^k\right)^{k+1} \geq \left(1 + x^{k+1}\right)^k .$$

Uzdevums

Pamatot, ka pozitīviem x un k ir spēkā nevienādība

$$\left(1+x^k\right)^{k+1} \geq \left(1+x^{k+1}\right)^k .$$

Apskatīsim funkciju $f(x) = x^\alpha$, kur $\alpha > 1$. Ar šādiem nosacījumiem $f(x)$ būs augoša funkcija. Pie tam, izvēloties pozitīvus a, b tādus, lai $a \geq b$, būs spēkā

$$(a+b, 0) \succ (a, b).$$

Uzdevums

Pamatot, ka pozitīviem x un k ir spēkā nevienādība

$$\left(1+x^k\right)^{k+1} \geq \left(1+x^{k+1}\right)^k .$$

Apskatīsim funkciju $f(x)=x^\alpha$, kur $\alpha>1$. Ar šādiem nosacījumiem $f(x)$ būs augoša funkcija. Pie tam, izvēloties pozitīvus a, b tādus, lai $a \geq b$, būs spēkā

$$(a+b, 0) \succ (a, b).$$

No Karamatas nevienādības seko, ka

$$(a+b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha.$$

Uzdevums

Pamatot, ka pozitīviem x un k ir spēkā nevienādība

$$\left(1+x^k\right)^{k+1} \geq \left(1+x^{k+1}\right)^k .$$

Apskatīsim funkciju $f(x) = x^\alpha$, kur $\alpha > 1$. Ar šādiem nosacījumiem $f(x)$ būs augoša funkcija. Pie tam, izvēloties pozitīvus a, b tādus, lai $a \geq b$, būs spēkā

$$(a+b, 0) \succ (a, b).$$

No Karamatas nevienādības seko, ka

$$(a+b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha.$$

Ievietojot $a = 1, b = x^k$un $\alpha = \frac{k+1}{k}$, iegūstam

$$\left(1+x^k\right)^{\frac{k+1}{k}} \geq 1 + x^{k+1}.$$

Uzdevums

Atrast vienādojuma $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$ reālās saknes.

Uzdevums

Atrast vienādojuma $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$ reālās saknes.

Nav grūti uzminēt saknes $x = 1$ un $x = 0$. Atliek tikai pārliecināties, ka citu nav.

Apskatīsim funkciju $f(t) = t^x$, kur $x > 1$ vai $x < 0$. Šādos intervālos $f(t)$ būs izliekta funkcija. Tā kā $(5; 2) \succ (4, 3)$, tad pēc Karamatas nevienādības

$$5^x + 2^x > 4^x + 3^x,$$

kas pasaka, ka šajā intervālā sakņu nav.

Uzdevums

Vēl jāapskata intervāls, kad $0 < x < 1$. Šajā gadījumā funkcija $f(t)$ būs ieliekta, tāpēc vēlreiz pēc Karamatas nevienādības

$$5^x + 2^x < 4^x + 3^x,$$

kas pasaka, ka šajā intervālā atrisinājumu nav.

Varam secināt, ka vienīgie atrisinājumi ir $x = 0$ un $x = 1$.

Paldies par uzmanību!

Jautājumi