Varbūtību teorijas un gadījuma procesu elementi

Mazās matemātikas universitātes nodarbība

lekt. *Mg.math* Leonora Pahirko

Latvijas Universitāte, Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte

2022. gada 5. martā

Nodarbības saturs

Ievads

Definīcija.

Varbūtību teorija ir matemātikas zinātnes nozare, kas pēta likumsakarības norisēs, kurām piemīt gadījuma jeb stohastisks raksturs.

Klasiskās varbūtību teorijas pirmsākumi

Varbūtību teorijas pirmsākumi meklējami azartspēļu kontekstā - 1654.g. Ševaljē de Merē vēršas pie matemātiķiem Blēza Paskāla un Pjēra de Fermā ar jautājumu...

Ševaljē de Merē (*Chevalier de Méré*) problēma

- 1. spēles variants: met spēļu kauliņu 4 reizes, vismaz vienu reizi uzkritīs "6";
- 2. spēles variants: met 2 spēļu kauliņus $6 \cdot 4 = 24$ reizes, vismaz vienu reizi uzkritīs "6" uz abiem kauliņiem.

Varbūtība uzmest "6" ir $\frac{1}{6}$, varbūtība uzmest "6" uz diviem kauliņiem ir $\frac{1}{36}$, tad

$$6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Klasiskās varbūtību teorijas pirmsākumi

Varbūtību teorijas pirmsākumi meklējami azartspēļu kontekstā - 1654.g. Ševaljē de Merē vēršas pie matemātiķiem Blēza Paskāla un Pjēra de Fermā ar jautājumu...

Ševaljē de Merē (*Chevalier de Méré*) problēma

- 1. spēles variants: met spēļu kauliņu 4 reizes, vismaz vienu reizi uzkritīs "6";
- 2. spēles variants: met 2 spēļu kauliņus $6 \cdot 4 = 24$ reizes, vismaz vienu reizi uzkritīs "6" uz abiem kauliņiem.

Varbūtība uzmest "6" ir $\frac{1}{6}$, varbūtība uzmest "6" uz diviem kauliņiem ir $\frac{1}{36}$, tad

$$6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Otrajā spēles variantā nauda tika zaudēta arvien biežāk nekā pirmajā spēles variantā! Atrisinājums šeit.

Definīcija.

Varbūtību teorijas pamatjēdzieni ir:

1. **eksperiments (mēģinājums, mērījums)** - process, kura laikā tiek iegūts kāda (fizikāla) fenomena novērojams rezultāts;
2. **iznākums** - eksperimenta novērojuma rezultāts.

Definīcija.

Par **elementāru notikumu telpu (kopu)** Ω sauc kāda eksperimenta visu iespējamo iznākumu kopu.

Definīcija.

Par **notikumu** sauc kāda eksperimenta iznākumu kopu, t.i., jebkuru Ω apakškopu (ieskaitot Ω).

Klasiskais varbūtību aprēķināšanas princips

Klasiskais varbūtību aprēķināšanas princips

Pieņemsim, ka visi elementārie notikumi ir vienlīdz iespējami. Varbūtību notikumam A aprēķina pēc formulas

$$P(A) = \frac{M}{N}, \tag{1}$$

kur

- N - eksperimenta iespējamo iznākumu (elementāro notikumu) skaits,
- M - notikumam A labvēlīgo elementāro notikumu skaits.

Eksperiments: Met spēļu kauliņu 1 reizi.
Elementāro notikumu kopa: visi eksperimenta iespējamie iznākumi

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

kur

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

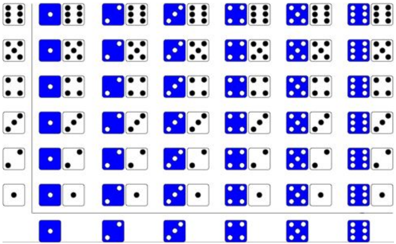
ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Notikums: uzkrīt "1", tad $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}$.
Notikums: uzkrīt nepāra skaitlis, tad $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ un $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Eksperiments: 2. piemērs

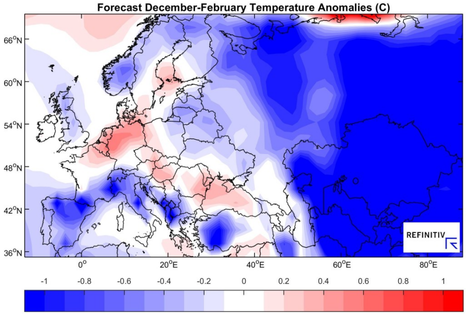
Eksperiments: Met divus spēļu kauliņus.
Elemtāro notikumu kopa: visi eksperimenta iespējamie iznākumi



Notikums: uzkrīt "6,6", tad $P(\{\omega_{66}\}) = \frac{1}{36}$.
Notikums: uzkritušo skaitļu summa ir lielāka par 6,
$A = \{\omega_{16}, \omega_{25}, \ldots, \omega_{52}, \omega_{62}, \omega_{61}\}$ un $P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Elementāro notikumu kopa Ω var būt arī bezgalīga.

1. **Eksperiments:** met monētu, kamēr uzmet ciparu.
   $\Omega = \{C, ĢC, ĢĢC, ĢĢĢC, \ldots\}$ - bezgalīga sanumurējama kopa.
2. **Eksperiments:** temperatūras mērījums.
   $\Omega = \mathbb{R}$ vai $\Omega = [-40, +40]$ - bezgalīga nesanumurējama kopa.



Kombinatorikas un kopu teorijas elementi

Kombinatorikas pamatprincips

Ja pēc kārtas ir jāizpilda m operācijas un ja pirmo operāciju var izpildīt k_1 dažādos veidos, otro k_2 dažādos veidos, $\ldots$, m-to k_m dažādos veidos, tad visu m operāciju virkni var izpildīt $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$ dažādos veidos.

Piemērs. Cik dažādus trīsciparu skaitļus var uzrakstīt, izmantojot ciparus $0, 1, 2, 3, 4$?

Dota n elementu kopa Ω.

Kombinācijas ir kopas Ω dažādu k-elementu apakškopu skaits

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Variācijas ir kopas Ω dažādu k-elementu sakārtotu apakškopu skaits

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Permutācijas ir kopas Ω dažādie pārkārtojumi jeb variācijas pa visiem n elementiem

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Uzdevums: Kombinatorikas elementu lietojums

Spēlē "Sportloto: 5 no 36" jāatmin, kuri 5 skaitļi tiks izlozēti no skaitļiem 1 līdz 36. Kāda varbūtība, ka pareizi tiks atminēti

1. 5 skaitļi,
2. 4 skaitļi,
3. 3 skaitļi?

Kopu teorijas elementi

- Notikums A ietilpst notikumā B, ja $A \subset B$.
- Notikumi A un B ir vienādi, ja $A \subset B \,\&\, B \subset A$.
- Notikuma A **pretējais** notikums $\bar{A}$ satur tos elementāros notikumus, kuri neietilpst notikumā A.
- $\emptyset$ sauc par **neiespējamu** notikumu, savukārt $A = \Omega$ sauc par **gandrīz drošu** notikumu.
  1. $P(\emptyset) = 0$,
  2. $P(\Omega) = 1$.

Kopu teorijas elementi

- Notikumu A un B **apvienojums** realizējas, ja realizējas vismaz viens no notikumiem A vai B. Raksta $A \cup B$ vai $A + B$.
- Notikumu A un B **šķēlums** realizējas tad, ja realizējas abi notikumi A un B vienlaicīgi. Raksta $A \cap B$, $A \cdot B$ vai AB.

Kopu teorijas elementi

- Notikumu A un B **apvienojums** realizējas, ja realizējas vismaz viens no notikumiem A vai B. Raksta $A \cup B$ vai $A + B$.
- Notikumu A un B **šķēlums** realizējas tad, ja realizējas abi notikumi A un B vienlaicīgi. Raksta $A \cap B$, $A \cdot B$ vai AB.

Notikumiem ir spēkā sekojošas īpašības

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
2. $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Kopu teorijas elementi

- Notikumu A un B **apvienojums** realizējas, ja realizējas vismaz viens no notikumiem A vai B. Raksta $A \cup B$ vai $A + B$.
- Notikumu A un B **šķēlums** realizējas tad, ja realizējas abi notikumi A un B vienlaicīgi. Raksta $A \cap B$, $A \cdot B$ vai AB.

Notikumiem ir spēkā sekojošas īpašības

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
2. $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Piemērs.. Met spēļu kauliņu. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Doti notikumi A - uzkrīt skaitlis mazāks par 3, un B - uzkrīt nepāra skaitlis.

- $A \cap B$?
- $A \cup B$?

Definīcija.

- Notikumi A un B ir **nesavienojami**, ja $A \cap B = \emptyset$.
- Notikumi $A_1, A_2, \ldots$ ir **pa pāriem nesavienojami**, ja $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.
- $A_1, \ldots, A_n$ sauc par **pilnu notikumu sistēmu**, ja notikumi ir pa pāriem nesavienojami un

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega.$$

Kopu teorijas elementi

Pieņemsim, ka A, B un C ir kādi notikumi no Ω. Tad ir spēkā

1. Komutativitāte

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A;$$

2. Asociativitāte

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3. Distributivitāte

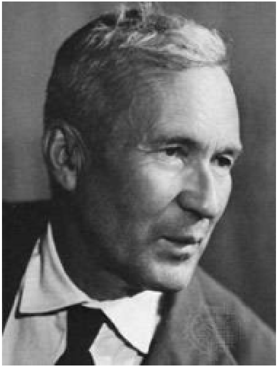
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

4. De Morgāna likumi

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Aksiomātiskā varbūtību teorija

Andrey Nikolayevich Kolmogorov



- krievu matemātiķis
- 25.04.1903 - 20.10.1987
- varbūtību teorija, gadījuma procesi, diferenciālvienādojumi, algoritmu teorija u.c.

Nozīmīgākais devums matemātikā **"Foundations of the Theory of Probability"**, 1933.g.
Atrodama, piemēram, šeit:
http://www.mathematik.com/Kolmogorov/0008.html

Aksiomātiskā varbūtību teorija

Definīcija.

Par **varbūtību** jeb **varbūtību mēru** sauc reālvērtīgu funkciju P, kurai izpildās

1. $P(\Omega) = 1$;
2. visiem notikumiem A ir spēkā $P(A) \geq 0$;
3. ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir pa pāriem nesavienojami notikumi, tad

$$P\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Piemērs. Tiek mesta monēta 2 reizes. Kāda ir varbūtība, ka uzkritīs vismaz viens cipars?

Aksiomātiskā varbūtību teorija

Piemērs. Tiek mesta monēta 2 reizes. Kāda ir varbūtība, ka uzkritīs vismaz viens cipars?

Elementāru notikumu kopa ir

$$\Omega = \{\text{CC}, \text{CĢ}, \text{ĢC}, \text{ĢĢ}\},$$

Tad notikums A - vismaz vienu reizi uzkrīt cipars,

$$A = \{\text{CC}, \text{CĢ}, \text{ĢC}\}.$$

Piemērs. Tiek mesta monēta 2 reizes. Kāda ir varbūtība, ka uzkritīs vismaz viens cipars?

Elementāru notikumu kopa ir

$$\Omega = \{\mathsf{CC}, \mathsf{CĢ}, \mathsf{ĢC}, \mathsf{ĢĢ}\},$$

Tad notikums A - vismaz vienu reizi uzkrīt cipars,

$$A = \{\mathsf{CC}, \mathsf{CĢ}, \mathsf{ĢC}\}.$$

Klasiskā varbūtība

$$N = 4,\ M = 3,\ P(A) = \frac{3}{4}$$

Aksiomātiskā varbūtība

$$P(A) = P(\mathsf{CC}) + P(\mathsf{CĢ}) + P(\mathsf{ĢC}) = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\ = \frac{3}{4}.$$

Varbūtību pamatformulas

Varbūtību pamatformulas balstās uz 3 Kolmogorova aksiomām.

Teorēma.

Ja P ir varbūtību mērs, A, B ir notikumi, tad

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(A) \leq 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. ja $A \subset B$, tad $P(A) \leq P(B)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **varbūtību saskaitīšanas likums**.

Uzdevums: varbūtību pamatformulu lietojums

Annai skolas brīvlaikā jāizlasa divas grāmatas. Pēc izlasīšanas viņai patiks pirmā grāmata ar varbūtību 0.5, otrā ar varbūtību 0.4, bet ar varbūtību 0.3 viņai patiks abas grāmatas. Aprēķināt, kāda varbūtība, ka viņai nepatiks neviena no līdzpaņemtajām grāmatām.

Nosacītā varbūtība un notikumu neatkarība

Nosacītās varbūtības formula

Definīcija.

Par nosacīto varbūtību notikumam A pie nosacījuma, ka B ir īstenojies, sauc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ ja } P(B) \neq 0.$$

Nosacītās varbūtības formula

Definīcija.

Par nosacīto varbūtību notikumam A pie nosacījuma, ka B ir īstenojies, sauc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ ja } P(B) \neq 0.$$

Piemērs. Met spēļu kauliņu, $P(\text{uzkrīt } 2) = \frac{1}{6}$. Zināms, ka uzkritis pāra skaitlis.

$$P(\text{uzkrīt } 2 | \text{ pāra skaitlis}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Nosacītās varbūtības formula

Definīcija.

Par nosacīto varbūtību notikumam A pie nosacījuma, ka B ir īstenojies, sauc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ ja } P(B) \neq 0.$$

Piemērs. Met spēļu kauliņu, $P(\text{uzkrīt } 2) = \frac{1}{6}$. Zināms, ka uzkritis pāra skaitlis.

$$P(\text{uzkrīt } 2|\text{ pāra skaitlis}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Teorēma

Varbūtību reizināšanas likums $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$.

Notikumu neatkarība

Definīcija.

Notikumus A un B sauc par neatkarīgiem, ja $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Pretējā gadījumā tos sauc par atkarīgiem.

Apgalvojums.

Ja A un B ir neatkarīgi un $P(B) > 0$, tad

$$P(A|B) = P(A).$$

Notikumu neatkarība

Definīcija.

Notikumus A un B sauc par neatkarīgiem, ja $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Pretējā gadījumā tos sauc par atkarīgiem.

Apgalvojums.

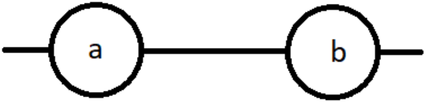
Ja A un B ir neatkarīgi un $P(B) > 0$, tad

$$P(A|B) = P(A).$$

Pierādījums.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = \\ &= P(A). \end{aligned}$$

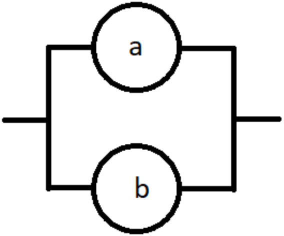
Piemērs. Dota elektriskā shēma. Katra spuldze strādā neatkarīgi viena no otras ar varbūtību p.



Spuldzes ķēdes slēgumā,
$P(\text{strāva plūst}) = ?$

Notikumu neatkarība (Elektriskā shēma)

Piemērs. Dota elektriskā shēma. Katra spuldze strādā neatkarīgi viena no otras ar varbūtību p.



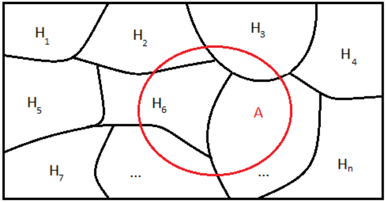
Spuldzes paralēlajā slēgumā,
$P(\text{strāva plūst}) = ?$

Pilnā varbūtību un Beijesa formula

Pieņemsim, ka $H_1, \ldots, H_n$ veido pilnu notikumu sistēmu, t.i.,

1. $H_i \cap H_k = \emptyset$ visiem $i \neq k$;
2. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.

H_k sauc par hipotēzēm.



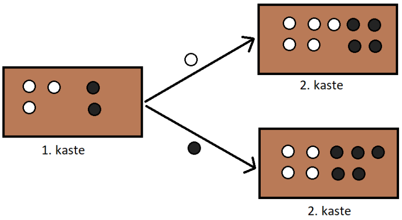
Teorēma [Pilnā varbūtību formula].

Ja $H_1, \ldots, H_n$ veido pilnu notikumu sistēmu un $A \subset \Omega$, tad

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots P(H_n)P(A|H_n).$$

Pilnā varbūtību formula

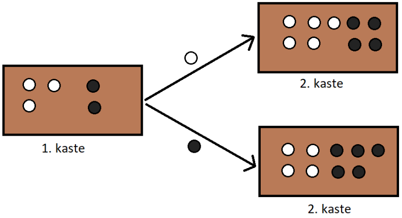
Piemērs. Pirmajā kastē ir 3 baltas un 2 melnas lodītes, otrajā - 4 baltas un 4 melnas lodītes. No pirmās kastes vienu lodīti pārliek otrajā, pēc tam no otrās kastes uz labu laimi izvēlas vienu lodīti. Aprēķināt varbūtību, ka tā būs balta.



H_1 - no 1.kastes izņem baltu lodīti;
H_2 - no 1.kastes izņem melnu lodīti;
A - otrā izņemtā lodīte ir balta.

Pilnā varbūtību formula

Piemērs. Pirmajā kastē ir 3 baltas un 2 melnas lodītes, otrajā - 4 baltas un 4 melnas lodītes. No pirmās kastes vienu lodīti pārliek otrajā, pēc tam no otrās kastes uz labu laimi izvēlas vienu lodīti. Aprēķināt varbūtību, ka tā būs balta.



H_1 - no 1.kastes izņem baltu lodīti;
H_2 - no 1.kastes izņem melnu lodīti;
A - otrā izņemtā lodīte ir balta.

$$P(H_1) = \frac{3}{5}, \quad P(H_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_1) = \frac{5}{9} \quad \text{un} \quad P(A|H_1) = \frac{4}{9},$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{23}{45}.$$

Beijesa formula

Teorēma [Beijesa formula].

Ja $H_1, \ldots, H_n$ veido pilnu notikumu sistēmu, tad

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Piemērs. Turpināsim iepriekšējo piemēru. Kāda varbūtība, ka pirmā izņemtā lodīte bija balta, ja zināms, ka otrā izņemtā lodīte ir balta?

Beijesa formula

Teorēma [Beijesa formula].

Ja $H_1, \dots, H_n$ veido pilnu notikumu sistēmu, tad

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Piemērs. Turpināsim iepriekšējo piemēru. Kāda varbūtība, ka pirmā izņemtā lodīte bija balta, ja zināms, ka otrā izņemtā lodīte ir balta?

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{5/9 \cdot 3/5}{23/45} = \frac{15}{23}.$$

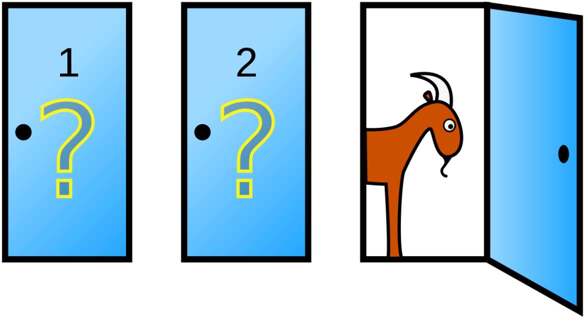
Uzdevums: Beijesa formulas lietojums

Students kārto eksāmenu, katrā jautājumā no 3 iespējamiem atbilžu variantiem jāizvēlās viena atbilde. Varbūtība, ka students zin atbildi uz jautājumu ir 0.5, ja atbildi nezin, tad izvēlās jebkuru no dotajiem atbilžu variantiem. Kāda ir varbūtība, ka students zināja atbildi uz jautājumu pie nosacījuma, ka tika atbildēts pareizi?

Monty Hall TV šovs

- Monty Hall ir kanādiešu-amerikāņu TV šova vadītājs, šova dalībniekam jāatmin, aiz kura no aizkariem atrodas balva.
- Kad dalībnieks nosauc savu izvēli, šova vadītājs atver citu aizkaru, aiz kura nav nekā, un piedāvā mainīt atbildi.

Vai šova dalībniekam jāmaina savs viedoklis?



Monty Hall problēmas matemātiskais formulējums

Apzīmēsim

- ar a to aizkaru, ko gribēja atvērt šova dalībnieks;
- ar b to aizkaru, ko atvēra šova vadītājs;
- ar c trešo atlikušo aizkaru;

Ar A, B un C apzīmēsim notikumus, ka balva atrodas attiecīgi aiz aizkariem a, b un c.
O - notikums, ka šova vadītājs atver aizkaru b.

Matemātiski problēmu var definēt šādi

Vai $P(A|O)=P(C|O)$?

Monty Hall problēmas atrisinājums

Aprēķināsim varbūtības $P(A|O)$ un $P(C|O)$, izmantojot pilno varbūtību un Beijesa formulas.

1. Varbūtības, ka balva atrodas attiecīgi aiz a, b vai c ir $P(A) = P(B) = P(c) = \frac{1}{3}$.
2. Nosacītās varbūtības O ir $P(O|A) = \frac{1}{2}$, $P(O|B) = 0$ un $P(O|C) = 1$.
3. Izmantojot pilno varbūtību formulu,
$$\begin{aligned} P(O) &= P(O|A)P(A) + P(O|B)P(B) + P(O|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
4. Pēc Beijesa formulas

$$P(A|O) = \frac{P(O|A)P(A)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad P(C|O) = \frac{P(O|C)P(C)}{P(O)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Bernulli eksperimentu shēma un binomiālā formula

Bernulli neatkarīgo eksperimentu shēma

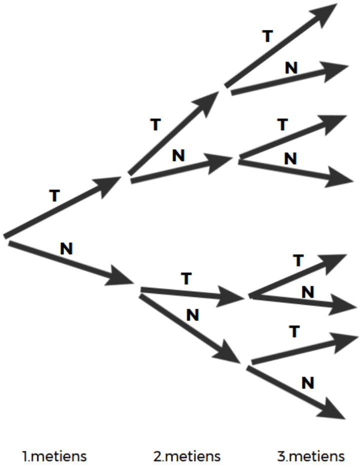
Pieņemsim, ka ka jebkuru eksperimentu var atkārtot bezgalīgi daudz reižu. Veicam n neatkarīgus eksperimenta mēģinājumus, kur katrā no tiem notikums A var iestāties ar varbūtību p (neiestāties ar varbūtību $1 - p = q$).

Definīcija.

- Par Bernulli eksperimentu sauc tādu eksperimentu, kuram ir tikai 2 iznākumi - notikums A iestājas vai neiestājas.
- Neatkarīgu Bernulli eksperimentu atkārtojumu n reizes sauc par Bernulli neatkarīgo eksperimentu (mēģinājumu) shēmu.

Ar $P_n(m)$ apzīmēsim varbūtību, ka n mēģinājumu virknē notikums A iestāsies tieši m reizes.

Piemērs. Basketbolists met pēc kārtas 3 neatkarīgus soda metienus ar varbūtību 0.7 trāpīt grozā. Kāds ir iespējamais trāpījumu skaits un ar kādām varbūtībām?



Binomiālā formula

Pielietojot Binomiālo formulu, var aprēķināt precīzu varbūtību $P_n(m)$.

Teorēma [Binomiālā formula].

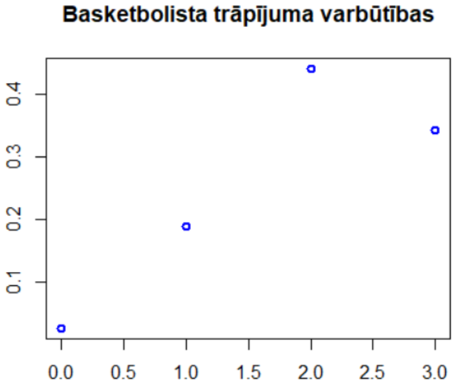
$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Piemērs. Turpināts iepriekšējais piemērs par basketbolistu. Aprēķināt varbūtības ar binomiālo formulu.

$$P_3(0) = C_3^0 0.7^0 0.3^3$$
$$P_3(1) = C_3^1 0.7^1 0.3^2$$
$$P_3(2) = C_3^2 0.7^2 0.3^1$$
$$P_3(3) = C_3^3 0.7^3 0.3^0$$

Visvarbūtiskākais notikuma izpildīšanās reižu skaits

Kāds ir notikuma izpildīšanās reižu skaits ar vislielāko varbūtību?



Pie lielām n vērtībām binomiālās varbūtības konverģē uz Gausa funkciju. To var ilustrēt ar Galtona dēļa palīdzību, demonstrācija šeit.

Ja vēlaties uzzināt vairāk par varbūtību teorijas praktisko pielietošanu, nāciet studēt LU FMOF profesionālā bakalaura studiju programmā

“Matemātiķis statistiķis”!

Paldies par uzmanību!