Mazā
matemātikas
universitāte

Matemātiskā modelēšana

Laura Leja

December 4, 2021

Vai krītoša monēta varētu nosist cilvēku?

Kā pielietot matemātiku?

Atrisinājums “NO SKOLAS”

No Ņūtona otrā likuma (1) un smaguma spēka (2) var iegūt pārvietojuma un ātruma vienādojumu brīvā kritienā esošam ķermenim (3)un (4):

$$F_{rez} = ma \tag{1}$$

$$F_g = mg \tag{2}$$

Atrisinājums “NO SKOLAS”

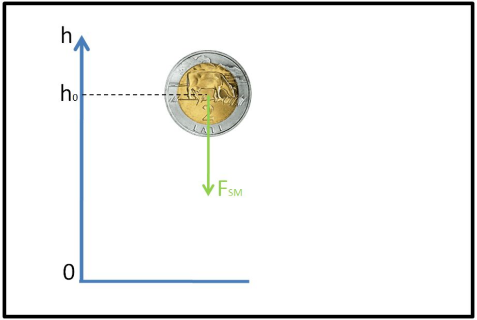
No Ņūtona otrā likuma (1) un smaguma spēka (2) var iegūt pārvietojuma un ātruma vienādojumu brīvā kritienā esošam ķermenim (3)un (4):

$$F_{rez} = ma \tag{3}$$

$$F_g = mg \tag{4}$$

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{5}$$

$$v(t) = v_0 + gt \tag{6}$$



$v(0) = 0$
$h(t) = 0$
Šādu pieņēmumu rezultātā vienādojumi (3) un (4) pārvēršas par

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_b^2 \tag{7}$$

$$v(t) = gt \tag{8}$$

1. Cik ilgi kritīs ķermenis? 2. Ar kādu ātrumu sasniegs monēta, kad būs sadurusies ar zemi?

$$t_b = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \tag{9}$$

$$v_b = gt_b = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2h_0 g} \tag{10}$$

Ja $g = 9.81 m/s$, $h(0) = 829.94m$ un $m = 9.5g$, tad beigu ātrums un spēks, ar kādu monēta krīt lejā ir:

$$t_b = \sqrt{2 * 829,94 * 9,81} = 127,61 m/s \tag{11}$$

$$F = \frac{\Delta mv}{\delta t} = \frac{0,0095 * 127,61}{0.01} = 121,23N \tag{12}$$

Ja tiek pieņemts cilvēka ādas stiprības robeža ir 20 MPa, tas nozīmē, ka jāatrod monētas spēka iedarbības laukums uz cilvēka ādas, lai uzzinātu, kas tad īsti varētu notikt. Tā kā spēka impuls sadursmes laikā ir vienāds ar impulsa izmaiņu, tad:

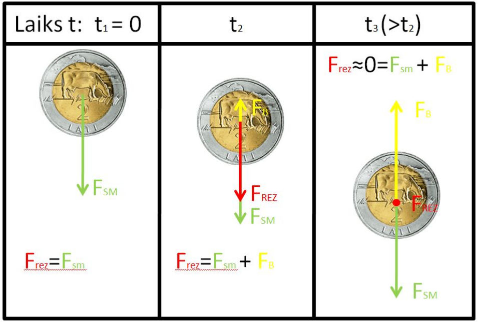
$$P = \frac{F}{S} = \frac{121,23}{2 * 5 * 10^{-6}} = 12,12MPa \tag{13}$$

Korektāks atrisinājums ar gaisa pretestību

Gaisa pretestība rada berzes spēku, kas komplicētākas fizikas dēļ netiks iztirzāts un ir šāds:

$$F_b = \frac{1}{2} C \rho A v^2 \tag{14}$$

Kur C – berzes koeficients, ρ – gaisa blīvums, A – efektīvais objekta šķērsgriezuma laukums, v – krišanas ātrums.



No otrā Ņūtona likuma izvedam:

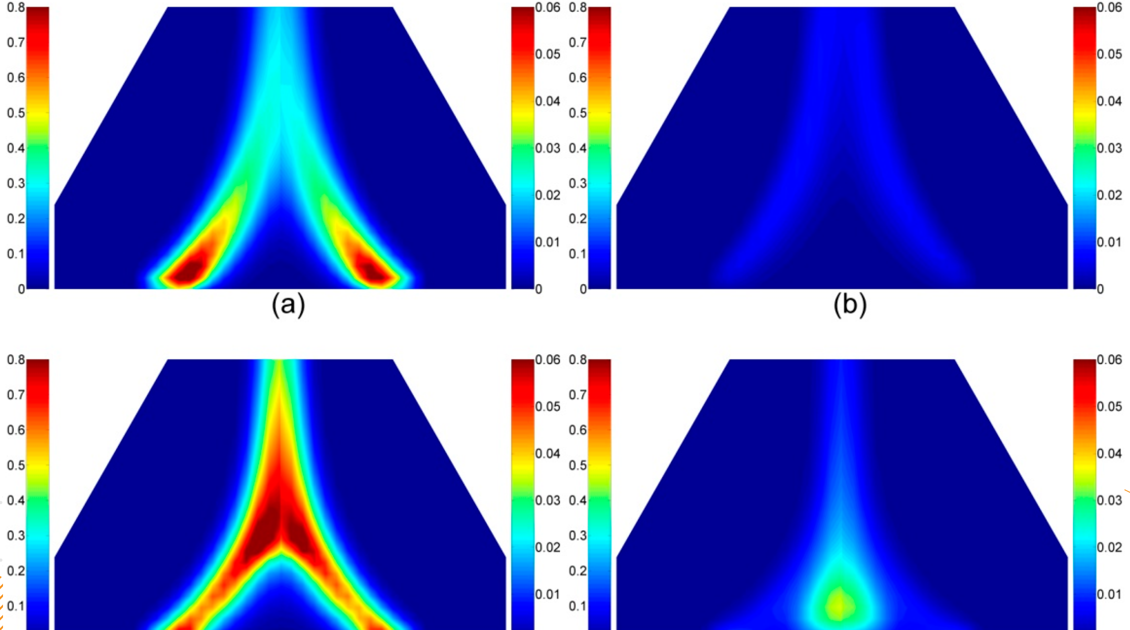
$$F_{rez} = F_{sm} - F_b \tag{15}$$

$$0 = F_{sm} - F_b \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} C \rho A v^2 = mg \tag{17}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{CA}} \tag{18}$$

- Gaisa blīvums pie zemes virsmas 20 grādu temp. ir $1,2\frac{kg}{m^3}$; efektīvais šķersgriezuma laukums ir $543.25mm^2$ un pieņemsim, ka berzes koeficients ir 1.15
- Rezultātā ir iegūts monētas galējais ātrums $v = 15.63\frac{m}{s}$.
- Izdarot līdzīgus aprēķinus kā iepriekš, kur nebija gaisa pretestības, iegūstam monētas spiedienu $P = 1,49MPa$, kas nu jau ir drošā attālumā no cilvēka ādas stiprības robežas $20MPa$.


0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0.06 0.05 0.04 0.03 0.02 0.01 0
(a)
0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0.06 0.05 0.04 0.03 0.02 0.01 0
(b)
0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
0.06 0.05 0.04 0.03 0.02 0.01
0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
0.06 0.05 0.04 0.03 0.02 0.01

Kas ir matemātiskā modelēšana?

Vai rīt būs saulains laiks?
Pēc cik ilga laika savairosies 8 reizes vairāk baktērijas?
Kāda būs pasaules populācija 2050. gadā?
Cik ātri izplatās vīrusi?

Reālas dzīves jautājumi var tik aprakstīti un atbildēti ar matemātiskiem modeļiem.

Kas ir matemātiskā modelēšana?

Modelis - vienkāršots pasaules objekts;
Modelēšana - parādības vai norises izzināšana ar modeļa palīdzību;
Matemātiskais modelis- sistēmas apraksts izmantojot matemātisko valodu un modelis ir vispārīgs precīzs un reāls vienlaicīgi
Matemātiskā modelēšana- ?

Kas ir matemātiskā modelēšana?

Process, kurā mēs izmantojam matemātiskas izteiksmes, lai aprakstītu un prognozētu reālu pasaules objektu uzvedību sauc par **matemātisko modelēšanu**.

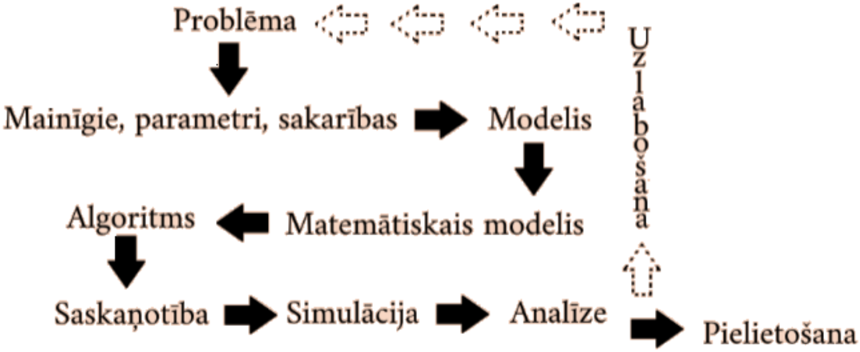
Matemātiski modelējamas sistēmas

Arhitektūrā, bioloģijā, datorzinātnē, valodniecībā, inženierzinātnes, meteoroloģijā, mūzikā, loģistikā, ģeoloģijā, ekonomikā, sportā...

Matemātiskajam modelim jābūt:

- Tik **vienkāršam**, cik iespējams;
- Tik **sarežģītam**, cik nepieciešams.

Modeļa cikls



Baktēriju vairošanas

Pēc cik ilga laika trauciņā būs 20 baktērijas?

Modelēt baktēriju vairošanos

Populāciija kādā dienā = populācija iepriekšējā dienā + 20%

$$x_1 = x_0 + cx_0 = (1+c)x_0 \tag{19}$$

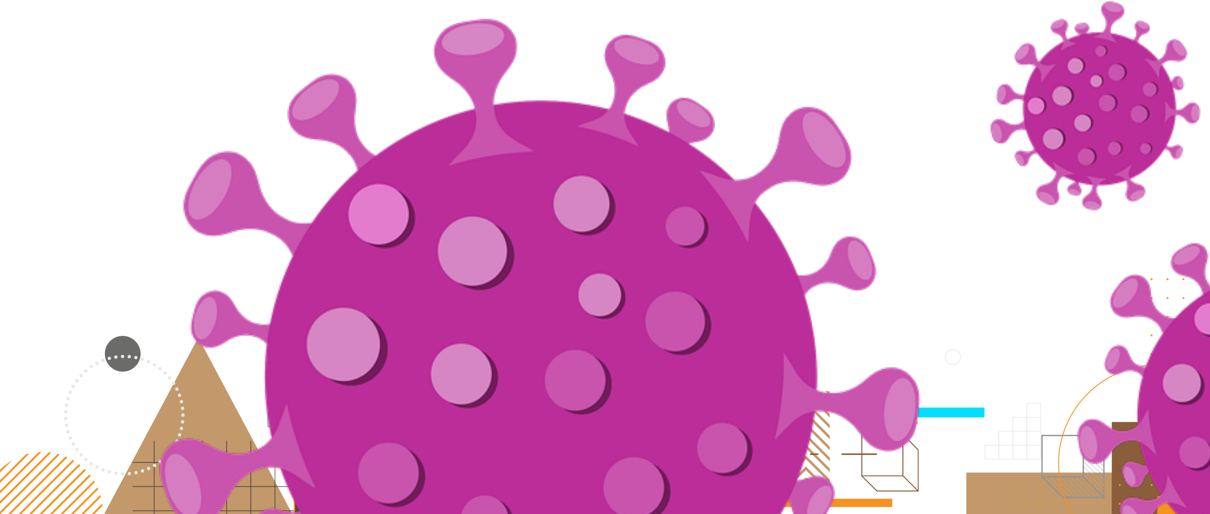
$$x_2 = x_1 + cx_1 = (1+c)x_1 = (1+c)(1+c)x_0 = (1+c)^2 x_0 \tag{20}$$

$$x_n = (1+c)^n x_0 \tag{21}$$

$$20 = (1+0,2)^n \cdot 10 \tag{22}$$

$$n \approx 3,80178 \tag{23}$$

Vīrusu izplatība



SI

N=S+I

S- vēl veseli(suspectible)
I= infekciozi (infected)
I_0 - zināms
β - vidējais aplipināšanas ātrums
γ - izveseļošanas ātrums

$$S_{t+1} = S_t - \beta I_t S_t + \gamma I_t \tag{24}$$

$$I_{t+1} = I_t + \beta I_t S_t - \gamma I_t \tag{25}$$

SIR

$$N=S+I+R$$

S- vēl veseli(suspectible)
I - infekciozi (infected)
R - atveseļojušies vai miruši (removed)
I_0 - zināms
β - vidējais aplipināšanas ātrums
γ - izveseļošanas ātrums

$$S_{t+1} = S_t - \beta I_t S_t \tag{26}$$

$$I_{t+1} = I_t + \beta I_t S_t - \gamma I_t \tag{27}$$

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t \tag{28}$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \tag{29}$$

SIR ar vakcīnām

N=S+I+R

S- vēl veseli(suspectible)
I -infekciozi (infected)
R - atveseļojušies vai vakcinēti (removed)
I_0 - zināms
β - vidējais aplipināšanas ātrums
γ - izveseļošanas ātrums
v - vakcīna

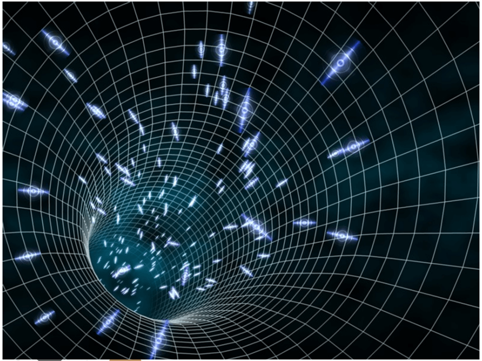
$$S_{t+1} = S_t - \beta I_t S_t - v S_t \tag{30}$$

$$I_{t+1} = I_t + \beta I_t S_t - \gamma I_t \tag{31}$$

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t + v S_t \tag{32}$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \tag{33}$$

Dezdimencionāli lielumi



Bekingema teorēma apgalvo:
Ja matemātisko problēma apraksta sistēma ar n fizikāliem lielumiem, kuriem ir k neatkarīgas mērvienības, tad kombinējot fizikālos lielumus, var iegūt skaitā n k.
bezdimensionālus lielumus - skaitļus.

Common Dimensionless No's.

- Reynolds Number (inertial to viscous forces) $\Re = \dfrac{\rho V d}{\mu}$
  - Important in all fluid flow problems
- Froude Number (inertial to gravitational forces) $F = \dfrac{V}{\sqrt{gh}}$
  - Important in problems with a free surface
- Euler Number (pressure to inertial forces) $C_p = \dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$
  - Important in problems with pressure differences
- Mach Number (inertial to elastic forces) $M = \dfrac{V}{\sqrt{E/\rho}} = \dfrac{V}{c}$
  - Important in problems with compressibility effects
- Weber Number (inertial to surface tension forces) $W = \dfrac{\rho L V^2}{\sigma}$
  - Important in problems with surface tension effects

Matemātika biznesā - institūtā

1. Pasūtītājs formulē uzdevumu; tiek izsludināts konkurss
2. Līguma slēgšana par projektiem
3. Tēmas apgūšana, plānošana
4. Modelēšana
5. Programmēšana
6. Simulācijas
7. Rezultātu interpretācija
8. Projekta turpināšana - kļūdu labošana, meklēšana, modeļa uzlabošana
9. prezentācija, zinātniska publikācija
10. Projektu nodošana izstrādātājam.

Paldies par uzmanību!