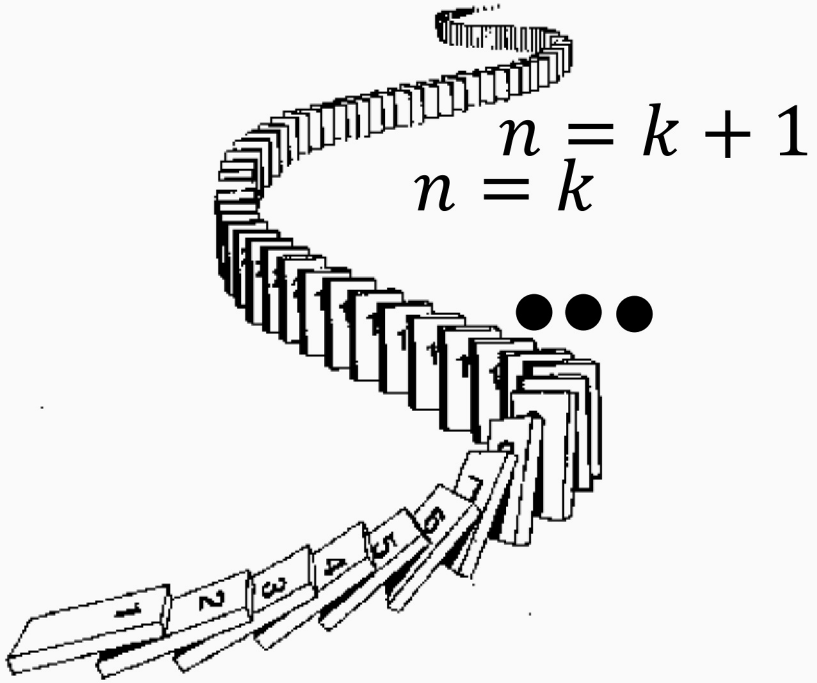
MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODE

Domino efekts



$n = 1$

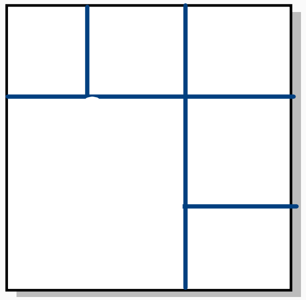
Kāpnes

Guna Brenda Pogule

30. 10. 2021.

1. uzdevums

Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt n $(n \geq 6)$ kvadrātos.



$n=6$

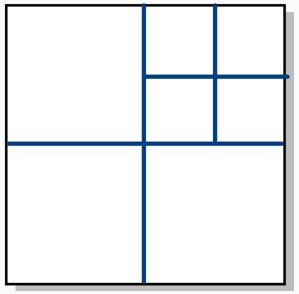
9

12

15

$\vdots$

+3



$n=7$

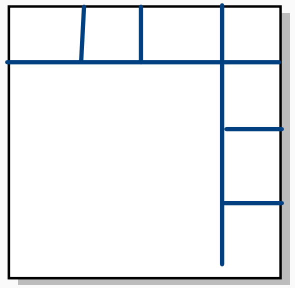
$4+3$

10

13

$\vdots$

+3



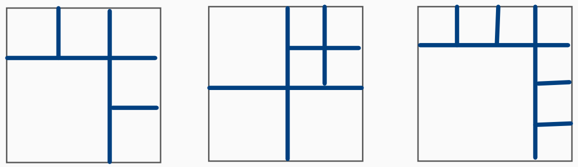
$n=8$

11

1. uzdevums

Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt n $(n \geq 6)$ kvadrātos.

Kvadrātu var sagriezt 6, 7 un 8 kvadrātos.



6 7 8

Bāze. $n=6$, $n=7$, $n=8$

Induktīvais pieņēmums. Kvadrātu var sagriezt k, $k+1$, $k+2$ kvadrātos.

Induktīvā pāreja. Kvadrātu var sagriezt $k+3$ kvadrātos.

Ja kvadrātu var sagriezt k kvadrātos, tad to var sagriezt arī $k+3$ kvadrātos, vienu no esošajiem kvadrātiem sagriežot 4 kvadrātos, kā rezultātā kvadrātu skaits palielinās par 3.

Secinājums. Pēc MIM kvadrātu var sagriezt n kvadrātos $(n \geq 6)$.

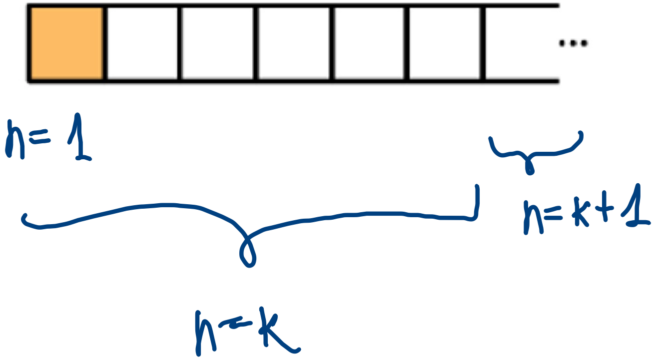
Klasiski matemātiskās indukcijas metodi lieto:

- ✓ vienādību pierādīšanā;
- ✓ dalāmības pierādīšanā;
- ✓ rekurentas virknes vispārīgā locekļa formulas pierādīšanā.

$k \Rightarrow k+1$

1) Bāze.

Pamato, ka izteikums *A* ir patiess, ja $n = 1$.



2) Induktīvais pieņēmums.

Pieņem, ka izteikums *A* ir patiess, ja $n = k$, kur $k \in \mathbb{N}$.

3) Induktīvā pāreja.

Pierāda, ka tādā gadījumā *A* ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$.

$$k \Rightarrow k + 1$$

4) Secinājums.

Secina, ka *A* ir patiess visiem $n \in \mathbb{N}$.

2. uzdevums

Pierādīt vienādību visiem naturāliem n!

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

1. Bāze: $n = 1$

$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$

2. Induktīvais pieņēmums: $n = k$. Izpildās, ka $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$

3. Induktīvā pāreja: $n = k + 1$. Jāpierāda, ka $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$.

$$\underbrace{1 + 3 + \dots + (2k - 1)}_{\text{pēc ind. pieņ.}} + (2(k+1) - 1) = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

4. Secinājums. Pierādīts MIpM, ka $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

3. uzdevums

Pierādīt vienādību visiem naturāliem n!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Bāze: $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

2. Induktīvais pieņēmums: $n = k$. Izpildās, ka $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Induktīvā pāreja: $n = k+1$. Jāpierāda, ka $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{\text{pēc ind. pieņ.}} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\,2\,(k+1{,}5)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

4. Secinājums. Pierādīts pēc MIM, ka $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$2k^2 + 7k + 6 =$
$= 2(k^2 + 1{,}5k + 3) =$
$= 2(k+2)(k+1{,}5)$

$k^2 + 1{,}5k + 3$
$k = -2$
$k = -1{,}5$

4. uzdevums

Pierādīt vienādību visiem naturāliem n!

$$\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(6n-1)(6n+5)} = \frac{n}{5(6n+5)}$$

1. Bāze: $n = 1$

$$\frac{1}{(6-1)(6+5)} = \frac{1}{5(6+5)}$$

2. Induktīvais pieņēmums: $n = k$. Izpildās, ka $\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \ldots \frac{1}{(6k-1)(6k+5)} = \frac{k}{5(6k+5)}$

$$\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6n+5)}$$

3. Induktīvā pāreja: $n=k+1$. Jāpierāda, ka $\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(6k+5)(6k+11)}=\frac{k+1}{5(6k+11)}$

$$\underbrace{\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(6k-1)(6k+5)}}_{\text{pēc ind. pieņ.}}+\frac{1}{(6k+5)(6k+11)}=\frac{k}{5(6k+5)}+\frac{1}{(6k+5)(6k+11)}=$$

$$=\frac{k(6k+11)+5}{5(6k+5)(6k+11)}=\frac{6k^2+11k+5}{5(6k+5)(6k+11)}=\frac{6\left(k+\frac{5}{6}\right)(k+1)}{5(6k+5)(6k+11)}=$$

$$=\frac{\cancel{(6k+5)}^{1}(k+1)}{5\cancel{(6k+5)}_{1}(6k+11)}=\frac{k+1}{5(6k+11)}$$

$$6k^2+11k+5=6\left(k^2+\frac{11}{6}k+\frac{5}{6}\right)$$

$$k=-\frac{5}{6}$$

$$k=-1$$

4. Secinājums: Pierādīts pēc MIM.

5. uzdevums

Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $n^3 - n$ dalās ar 6.

1. Bāze: $n=1$.

$1^3-1=0 \,\vdots\, 6$ (dalās ar 6 bez atlikuma).

2. Induktīvais pieņēmums: $n=k$. Izpildās, ka $(k^3-k) \,\vdots\, 6$

3. Induktīvā pāreja: $n=k+1$. Jāpierāda, ka $((k+1)^3-(k+1)) \,\vdots\, 6$.

$$(k+1)^3-(k+1) = k^3+3k^2+3k+\cancel{1}-k-\cancel{1} = k^3-k+3k^2+3k = \underbrace{k^3-k}_{\vdots 6 \text{ pēc ind. pieņ.}} + \underbrace{\overset{\vdots 3}{3}k\overset{\vdots 2}{(k+1)}}_{\vdots 6,\text{ jo } k \text{ un } k+1 \text{ ir pēc kārtas sekojoši sk., tātad } \vdots 2 \text{ un } \vdots 3}$$

4. Secinājums: Pierādīts pēc MIM.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

6. uzdevums

Pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izteiksme $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$ dalās ar 8.

1. Bāze: $n = 1$.

$$5^1 + 2\cdot 3^1 - 3 = 5 + 6 - 3 = 8 \;\vdots\; 8$$

2. Induktīvais pieņēmums: $n = k$. Izpildās, ka $(5^k + 2\cdot 3^k - 3) \;\vdots\; 8$.

3. Induktīvā pāreja: $n = k+1$. Jāpierāda, ka $(5^{k+1} + 2\cdot 3^{k+1} - 3) \;\vdots\; 8$

$$5^{k+1} + 2\cdot 3^{k+1} - 3 = 5^k\cdot 5 + \overbrace{2\cdot 3^k\cdot 3}^{6\cdot 3^k} - 3 = 5(5^k + \overbrace{2\cdot 3^k}^{10\cdot 3^k} - 3) - 4\cdot 3^k + 12 =$$

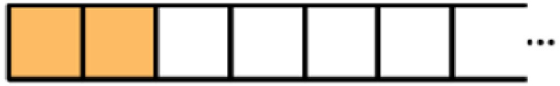
$$= \underbrace{5(5^k + 2\cdot 3^k - 3)}_{\vdots 8 \text{ pēc ind. pieņ.}} - \underbrace{4(3^k - 3)}_{\vdots 4 \text{ un } \vdots 2}$$

$\vdots 4$ un $\vdots 2$, jo $3^k - 3$ ir pāra skaitlis, tātad $\vdots 8$.

k un $k+1 \Rightarrow k+2$

1) Bāze.

Pamato, ka izteikums *A* ir patiess, ja $n = p$ un $n = p + 1$, kur $p \in \mathbb{N}$.



2) Induktīvais pieņēmums.

Pieņem, ka izteikums *A* ir patiess, ja $n = k$ un $n = k + 1$, kur $k \in \mathbb{N}$.

3) Induktīvā pāreja.

Pierāda, ka tādā gadījumā *A* ir patiess arī tad, ja $n = k + 2$.

k un $k+1 \Rightarrow k+2$

4) Secinājums.

Secina, ka *A* ir patiess visiem $n \geq p$.

1. uzd.

$n=6$
$n=7$
$n=8$

$n=k$
$n=k+1$
$n=k+2$

$n=k+3$

7. uzdevums

Skaitļu virkni $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ definē šādi:

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$

Pierādīt, ka $a_n = 2^{n-1} - 1.$

1. Bāze: $n=1$, tad $a_1 = 2^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0$

$n=2$, tad $a_2 = 2^{2-1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$

2. Induktīvais pieņēmums. $n=k$, $n=k+1$. Izpildās: $a_k = 2^{k-1} - 1$ un $a_{k+1} = 2^{k+1-1} - 1 = 2^k - 1$

3. Induktīvā pāreja: $n=k+2$. Jāpierāda, ka $a_{k+2} = 2^{k+2-1} - 1 = 2^{k+1} - 1$

$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k = 3(2^k - 1) - 2(2^{k-1} - 1) = 3\cdot 2^k - 3 - 2^1\cdot 2^{k-1} + 2 = 3\cdot 2^k - 2^k - 1 =$

$= 2\cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

$-1\cdot 2^k$

4. Secinājums: Pierādīts pēc MIM.

8. uzdevums

Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt, izmantojot tikai šīs pastmarkas?

71 nevar apmaksāt:

Ņem 13 centu pastmarkas:

13 centu pastmarku skaits	Summa, ko apmaksātu ar 13 centu pastmarkām	Summa, ko jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām
0	0	71
1	13	58
2	26	45
3	39	32
4	52	19
5	65	6

$2 \cdot 7 - 13 = 1$

$72 = 1 \cdot 7 + 5 \cdot 13$
$73 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 13$
$74 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 13$
$75 = 7 \cdot 7 + 2 \cdot 13$
$76 = 9 \cdot 7 + 1 \cdot 13$
$77 = 11 \cdot 7$
$78 = \quad 6 \cdot 13$

1. Bāze: $n = 72$ $\quad 72 + 7x$
$n = 73$ $\quad 73 + 7x$
$n = 74$ $\quad 74 + 7x$
$n = 75$ $\quad 75 + 7x$
$n = 76$ $\quad 76 + 7x$
$n = 77$ $\quad 77 + 7x$
$n = 78$ $\quad 78 + 7x$

2. Pieņēmums: $n = k$. Izpildās, ka summu $k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6$ iegūt kā 7 un 13 summu.
$n = k+1$
$n = k+2$, $n = k+3$
$n = k+4$, $n = k+5$, $n = k+6$

3. Induktīvā pāreja: $n = k+7$.

Var k izteikt kā 7 un 13 summu, tad arī $k+7$ varēs izteikt, jo pie esošajiem k jāpieliek vēl 7.

4. Secinājums. Jebkuru skaitli, kas ir vismaz 72, var izteikt kā 7 un 13 summu.

9. uzdevums

Pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildās

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

1. Bāze: $n=1$.

$1^3 = 1^2$

2. Induktīvais pieņēmums: $n=k$. Izpildās, ka $1^3+2^3+\ldots+k^3=(1+2+\ldots+k)^2$

3. Induktīvā pāreja: $n=k+1$. Jāpierāda, ka $1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\ldots+k+(k+1))^2$

$$\underbrace{1^3+2^3+\ldots+k^3}_{\text{pēc ind. pieņ.}}+(k+1)^3=(1+2+\ldots+k)^2+(k+1)^3=$$

$$=\frac{(1+k)^2k^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(1+k)^2k^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(1+k)^2(k^2+4k+4)}{4}=$$

$$=\frac{(1+k)^2(k+2)^2}{4}=(1+2+\ldots+(k+1))^2$$

Aritmētiskā progresija:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

$$(1+2+\ldots+k)^2=\left(\frac{(1+k)\cdot k}{2}\right)^2=\frac{(1+k)^2k^2}{4}$$

Paldies par uzmanību!