Ģeometriska rakstura ekstrēmu uzdevumi

andrejs.cibulis.@lu.lv

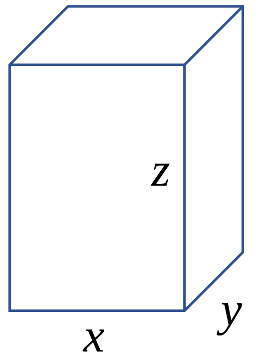
MMU, 5.2.2022.

CE uzdevums

CE-2020. Par taisnstūra paralēlskaldni zināms, ka tā pamata perimetrs ir 20 dm un tilpums ir 80 dm^3. Nosaki un pamato taisnstūra paralēlskaldņa sānu virsmas laukuma mazāko iespējamo skaitlisko vērtību. (6 punkti)

Liekvārdība

Minimālo (vismazāko)



$$2(x+y)=20$$
$$xyz=80$$
$$S=2(xz+yz)\mapsto \min.$$

1. $S=2(xz+yz)=2(x+y)z=20z=\dfrac{1600}{xy}=\dfrac{1600}{x(10-x)},$

Kvadrātfunkcijai $x(10-x)$ maksimums ir punktā $x=5$, tāpēc S minimālā vērtība ir $\dfrac{1600}{5\cdot 5}=16\cdot 4=64.$

$$G=\sqrt{xy},\quad A=\frac{x+y}{2}$$

2. $S=2(xz+yz)=2(x+y)z=20z=\dfrac{1600}{xy}\geq\dfrac{1600}{A^2}=\dfrac{1600}{25}=64.$

$$A\geq G,\quad \frac{1}{G^2}\geq\frac{1}{A^2}.$$

3. No visiem taisnstūriem ar fiksētu perimetru maksimālais laukums ir kvadrātam, t. i, ja $x=y=5$.

Nevienādība $A \geq G$

Daži tās lietojumi saistošu uzdevumu risināšanā

Eiklīda uzdevums, Keplera uzdevums, Tartaļjas uzdevums, Zēnodora uzdevums

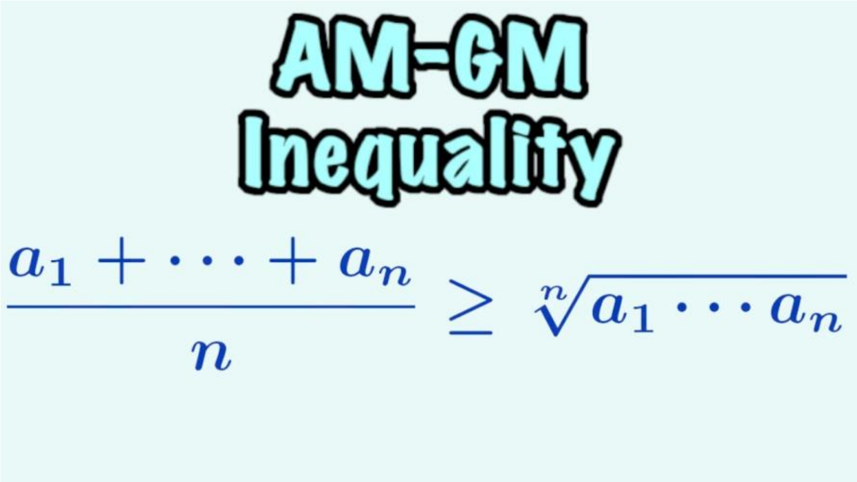
Optimālie konusi

Uzdevums par vislabāko apgaismojumu, uzdevums par visstiprāko siju

Uzdevums par optimālo reni. (Kādai trapecveida renei caurlaides spēja ir maksimālā?)

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$



Nevienādība $A \geq G$

Skolā

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

Vēl īsāk:

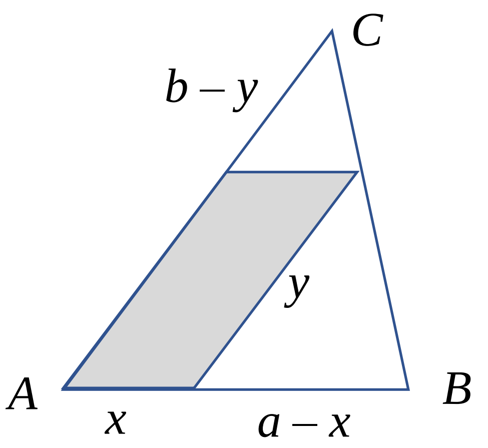
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2 \geq x^2-y^2$$

$$a = x+y$$

$$b = x-y$$

Eiklīda uzdevums

Dotajā trijstūrī ABC ievilkt paralelogramu ADEF (EF || AB, DE || AC), kuram ir vislielākais laukums.



$|AB| = a$

$|AC| = b$

$$L = xy\sin A \mapsto \max$$

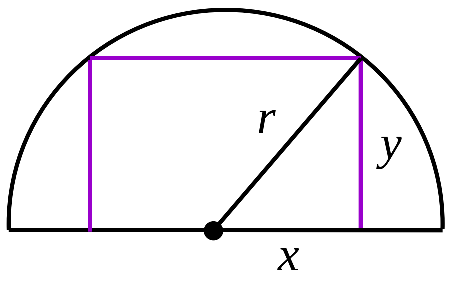
$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b(a-x)}{a} \Rightarrow L = kx(a-x) \Rightarrow x_{\max} = \frac{a}{2}.$$

Tātad maksimālo laukumu dod malu viduspunktu izvēle.

Sekas. Ja trīsstūrī ir ievilkts maksimālais taisnstūris, tad tā viena mala ir trīsstūra viduslīnija.

Keplera planimetriskais uzdevums

Dotajā riņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu.
Dotajā pusriņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu.



$$L = 2xy \Rightarrow L^2 = 4x^2y^2 = 4G^2 \leq 4A^2 = 4\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = r^4.$$

Vislielāko laukumu iegūst, ja $x = y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}.$

Vēl īsāks risinājums: $L = 2xy \leq x^2 + y^2 = r^2.$ (G ≤ K)

$A \geq G$

Grāmatas [BB] autori nevienādību $A \geq G$ raksturo kā *ārkārtīgi skaistu* un raksta, ka tā *bez šaubām ir viena no nevienādību teorijas pīlāriem*.

Uzrādīt īsu un vienkāršu nevienādības (3) pierādījumu:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad a,b,c>0. \tag{3}$$

Skaties:

$$a = x^3, b = y^3, c = z^3$$

~ 5 min.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\frac{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}{2} \geq 0.$$

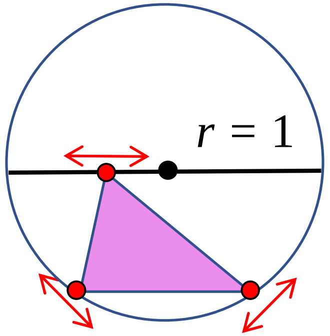
S. Nevienādība kļūst par vienādību, ja $x = y = z$ jeb $a = b = c$.

[BB] Беккенбах Э., Беллманн Р., Неравенства, Москва, Мир, 1965, 276 с.

Prasme salīdzināt

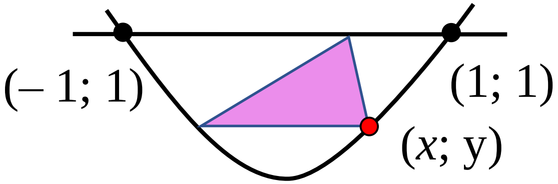
Kurā gadījumā maksimālā trīsstūra laukums ir lielāks, sk. zīmējumus ?

Kāda ir šo laukumu attiecība?



$$L_{\max} = ? = \frac{1}{2}$$

$y = x^2$



$$L_{\max} = ?$$

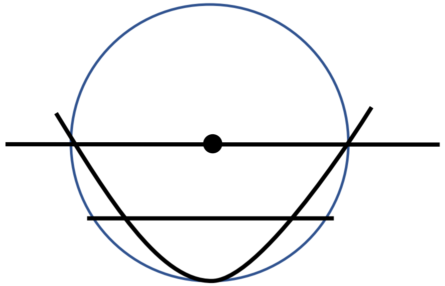
$$L = \frac{ah}{2} = x(1-x^2) \mapsto \max$$

$$2L^2 = (2x^2)(1-x^2)(1-x^2)$$

$$2x^2 = 1-x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3},\ L_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$y^2 + x^2 = 1$



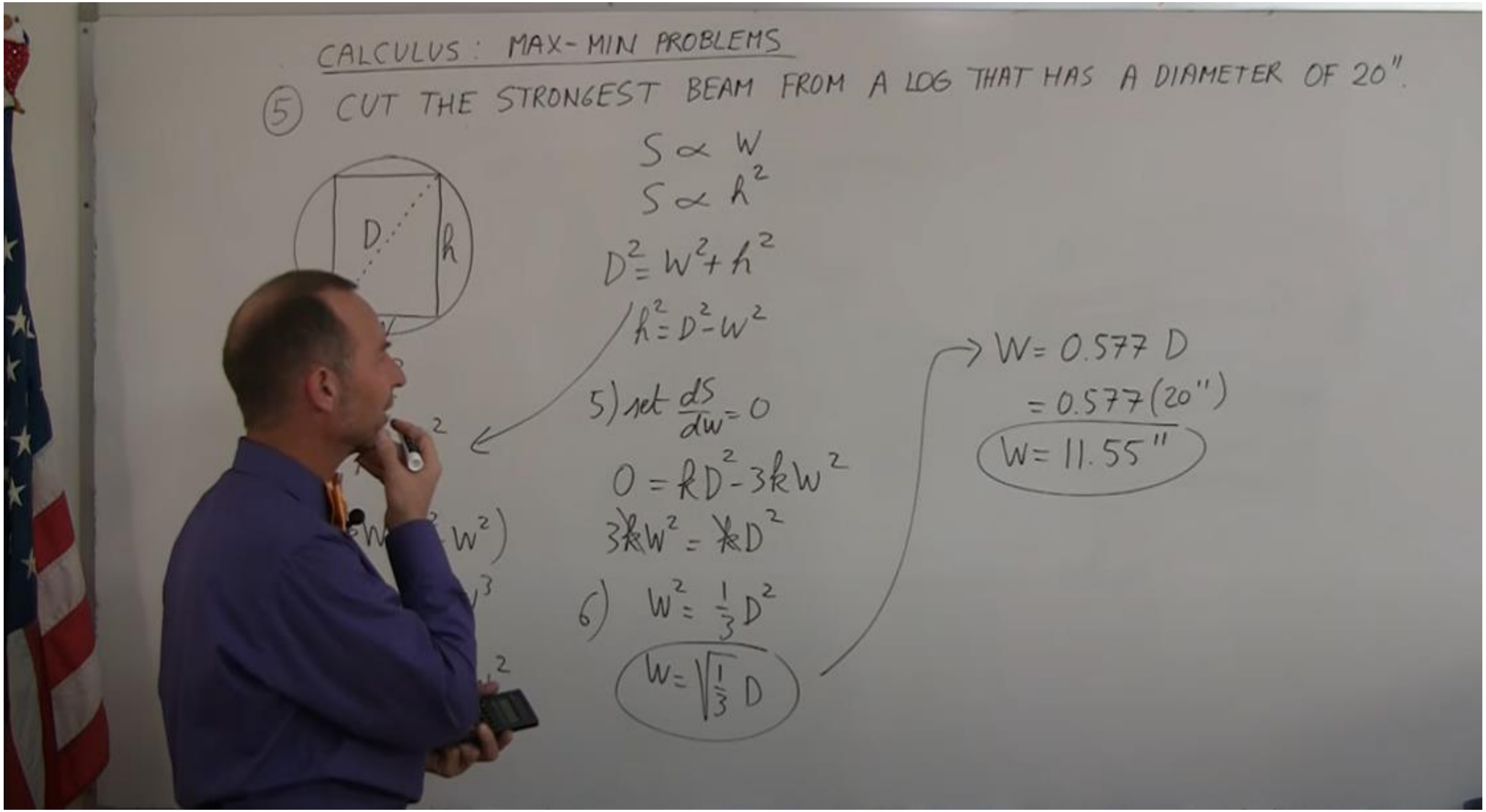
$y = x^2 - 1$ *aug straujāk* nekā

$$y = -\sqrt{1-x^2},$$

$$x^2 - 1 \geq -\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-x^2} \geq 1-x^2 \Leftrightarrow$$

$$1 \geq \sqrt{1-x^2}.$$

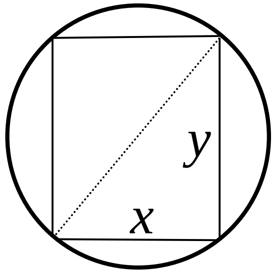


https://www.youtube.com/watch?v=VnRqQK2FwuQ

Trešās pakāpes polinoms

Visstiprākā sija. $G \leq A$

Baļķa šķērsgriezums ir riņķis ar diametru *d*. No baļķa tiek izzāģēta sija ar taisnstūra [*x* x *y*] šķērsgriezumu. Baļķa stiprība ir proporcionāla pamatam *x* un šķērsgriezuma augstuma *y* kvadrātam. Atrast *x* un *y*, kuriem sija ir visstiprākā.



$$xy^2 \to \max,$$
$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$P(x) = x(d^2 - x^2) \mapsto \max.$$

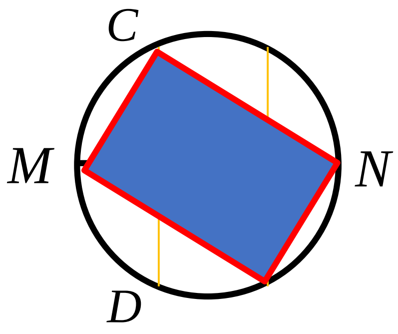
$$P^2 = x^2(d^2 - x^2)(d^2 - x^2), \quad 2P^2 = (2x^2)(d^2 - x^2)(d^2 - x^2),$$

Reizinātāju summa $2x^2 + (d^2 - x^2) + (d^2 - x^2) = 2d^2$

ir konstants lielums, tāpēc reizinājums ir maksimāls, ja $2x^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow 3x^2 = d^2,$

$$x^2 = \frac{d^2}{3}, \; y^2 = \frac{2d^2}{3} \;\Rightarrow y^2 : x^2 = 2 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \sqrt{2}.$$

Neliela apjoma grāmatā [Mil, 108] klasiskais uzdevums par sijas izzāģēšanu no apaļa baļķa papildināts ar šādu informāciju. *Par cik kļūdās namdari, kuri izzāģējot siju no baļķa, rīkojas šādi: šķērsgriezuma diametru MN sadala trīs vienādās daļās, no dalījuma punktiem novelk perpendikulus un atzīmē to krustpunktus C un D ar riņķa līniju diametra pretējās pusēs. Pēc tam punktus C, N, D un M savieno ar taisnām līnijām un iegūst vajadzīgo šķēlumu...*



Namdari nekļūdās!

[Mil] Милованова Л. Н., Функции и их исследование,
Москва, Изд . Академии пед. наук РСФСР, 1958, 124 с.

Dualitātes (saistītā uzdevuma) izmantošana

$$V = xyz \mapsto \max$$

$$S = 2(xy + xz + yz) = 2022$$

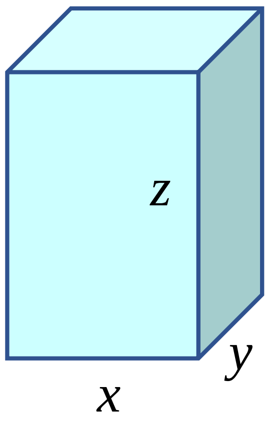
Ja reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tad reizinājums ir maksimāls, ja tie visi vienādi.

$x + y + z$ ir mainīgs lielums.

Skatāmies duālo uzdevumu.
Tajā būs *atslēga*, kā pārveidot tilpuma izteiksmi, lai varētu lietot vajadzīgo īpašību.

$$V^2 = x^2 y^2 z^2 = (xy)(xz)(yz)$$

Šeit reizinātāju summa ir nemainīgs lielums.



$$S = 2(xy + xz + yz) \mapsto \min$$

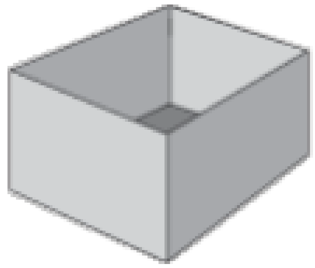
$$V = xyz = const.$$

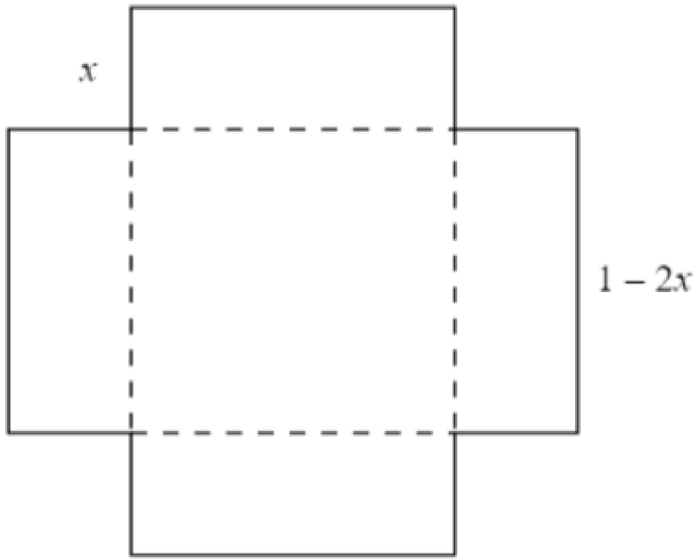
Summā S trīs skaitļu reizinājums ir nemainīgs lielums, tātad summa ir minimāla tad, kad tie visi vienādi:

$$xy = xz = yz \Rightarrow x = y = z.$$

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{xyxzyz} = 3\sqrt[3]{V^2}.$$

Maksimālā tilpuma kaste





Kastes tilpumu izsaka formula

$$V = x(a-2x)^2$$

$$4V = 4x(a-2x)(a-2x)$$

$$4x = a-2x \Rightarrow x_{\max} = \frac{a}{6}.$$

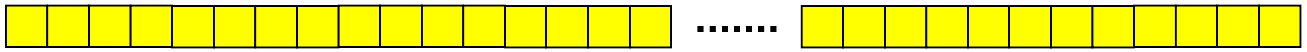
Open Box I: A rectangular box with a square base and no top is to be constructed using a total of 120 cm2 of cardboard.

Find the dimensions of the box of maximum volume.

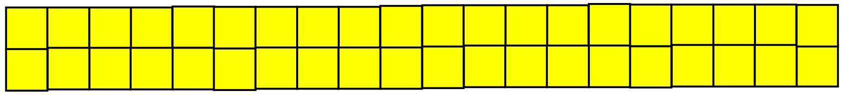
Daudzstūri ar minimālo perimetru

No **2022** vienādiem kvadrātiem salikta figūra, kurai ir vismazākais perimetrs. Cik liels ir perimetrs?

2022

1 

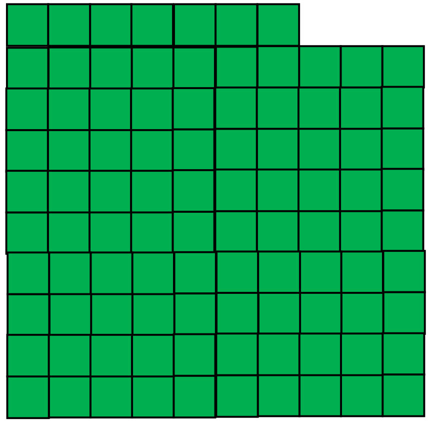
$$P_1 = (2022+1)2 = 2023 \cdot 2 = 4046.$$

2 

1011

$$P_2 = (1011+2)2 = 1013 \cdot 2 = 2026.$$

Izdariet minējumu, apmēram, cik liels būs minimālais perimetrs?

45  $45 \cdot 45 = 2025$

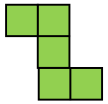
45

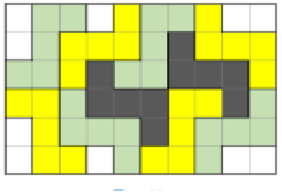
$$P_{45} = (45+45)2 = 180.$$

Pamatojums: $P = (a+b)2 \geq 4\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{2022} > 179.$

Piemērs, pretpiemērs

Vai no taisnstūra ar izmēriem 6 × 10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas attēlā? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi. (MO, NMS)

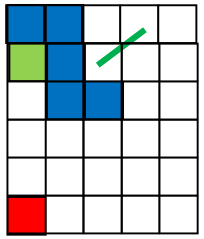


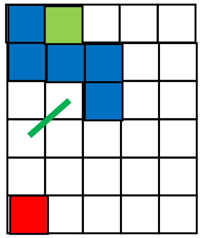


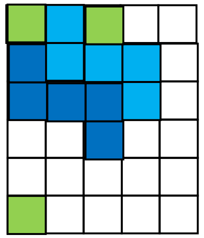
Piemērs.

Vai no taisnstūra ar izmēriem 6 × 10 rūtiņas var izgriezt 11 pentamino Z? Vai tagad ir piemērs?

Pieņem, ka var. Tad vienā no 6 × 5 ir ne vairāk kā divas nepārklātas rūtiņas.





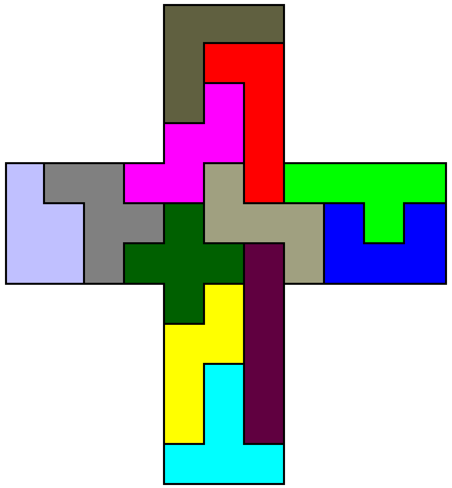


Jauns ekstrēmu uzdevums

Salikt no 12 pentamino tādu daudzstūri, kuram $|L - P| + |P - M|$ ir minimāls.

L – daudzstūra laukums ($L = 60$),
M – daudzstūra malu skaits,
P – daudzstūra perimetrs.

$$K := |L - P| + |P - M|$$



$M = 12$, $P = 46$, $K = 48$

Ja $L > P$, tad $K = L - M$. (Nav atkarības no perimetra).

Ja $L < P$, tad $K = 2P - L - M$.

Ja daudzstūris salikts no 12 pentamino,
tad $L = 60$ un K vienmēr ir pārskaitlis.

Problēma. Kādas vērtības var pieņemt lielums K ?

Vai eksistē no pentamino saliekams daudzstūris jeb *p*-daudzstūris, kuram $L = M = P$?

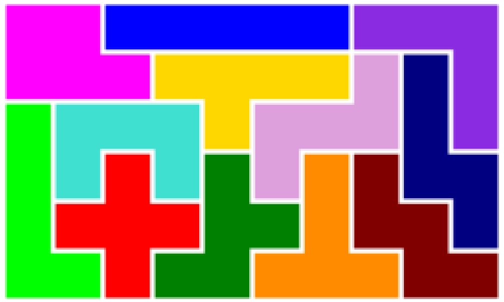
Vai eksistē *rūtiņu daudzstūris*, kuram $L = M = P$?

Nesen Novada MO (2022) bija uzdevums par tāda rūtiņu 6-stūra uzzīmēšanu, kuram $L = P = 60$.

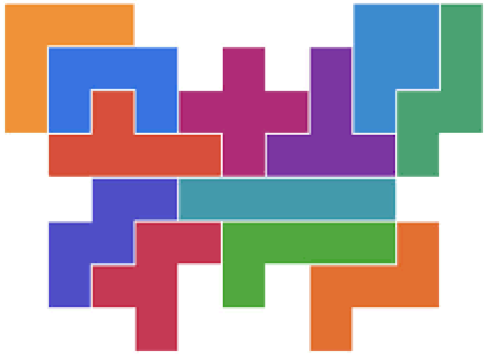
Kā risināt uzdevumu?

Viena iespēja ir meklēt un pārbaudīt avotos atrodamās bildes.

Internets

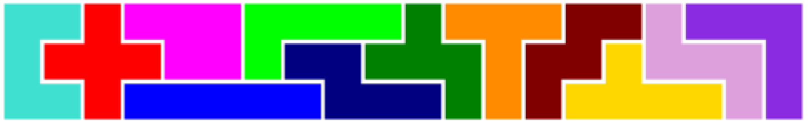


$M = 4$, $P = 32$, $\boldsymbol{K = 56}$



$M = 40$, $P = 54$, $K = 20$

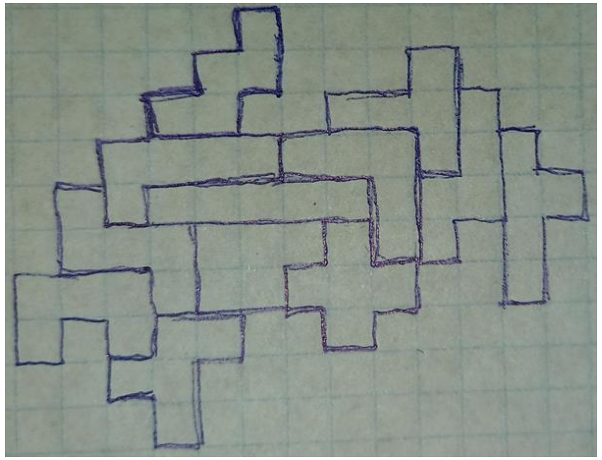
$M = 46$, $P = 54$, $K = 14$



$M = 4$, $P = 46$, $K = 56$

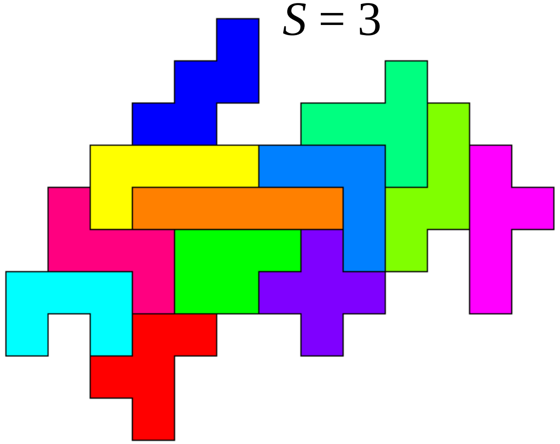
Kā ātrāk saskaitīt malas?
Pietiek saskaitīt tikai vertikālās malas un to skaitu pareizināt ar 2.

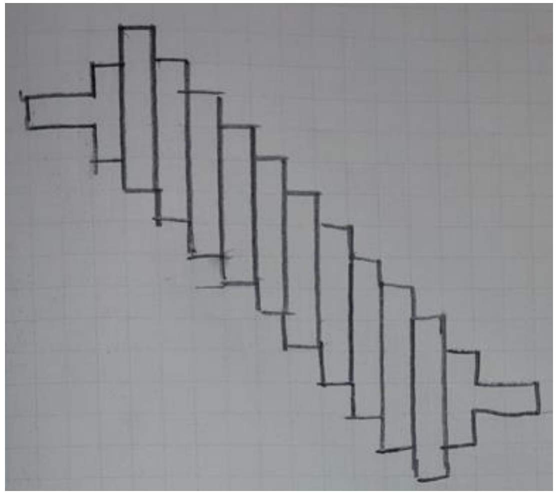
Skolēnu rezultāti



$M = 50$, $P = 60$, $K = 10$ (K. A.)

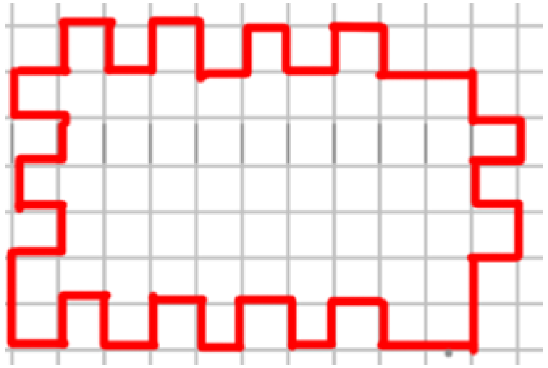
$S = 3$



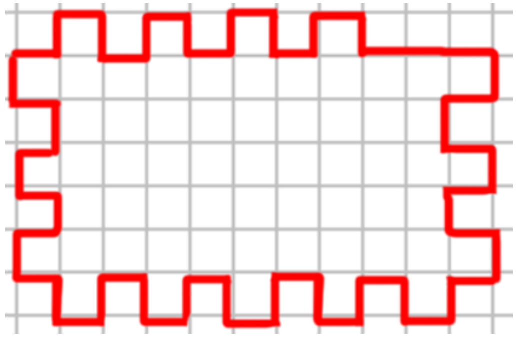


$M = 56$, $P = 60$, $K = 4$ (E.M.)

$S = 1$



$M = 52$, $P = 56$, $K = 8$



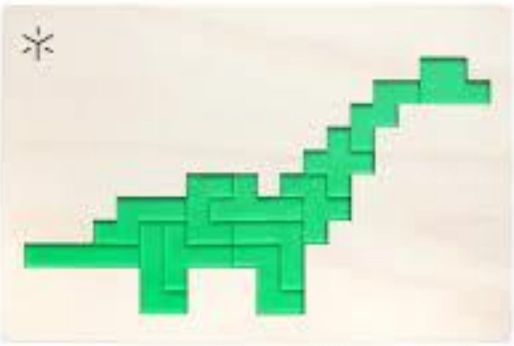
$M = 56$, $P = 58$, $K = 4$

$S = 0$
Figūra nav saliekama no pentamino

$|\boldsymbol{L} - \boldsymbol{P}| + |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{M}|$

K	**32**	**30**	**28**	**26**	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	**14**	**12**	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**
K. A.												+				
V. B.	+				+				+				+			
S3																
S4																
S5																

$M = 42$, $P = 62$, $K = 22$

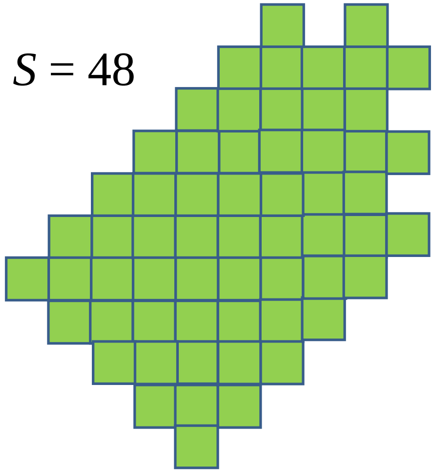


Vai eksistē polimino, kuram $L = M = P$?

Novada MO (2022, 9.2.) bija uzdevums uzzīmēt 6-stūri, kuram $L = P$. Uzdevums par $L = M = P$ ir daudz, daudz grūtāks, atbilst IMO līmenim.

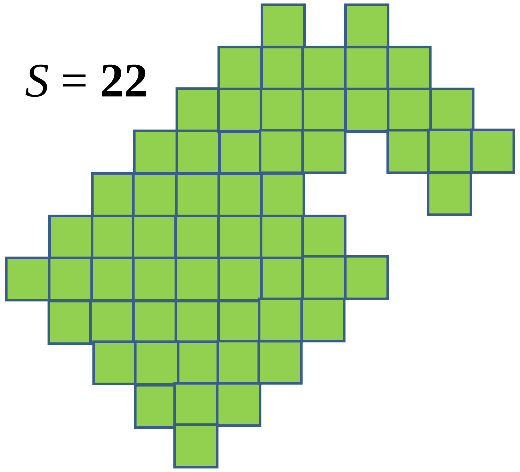
Neizmantotās iespējas

$S = 48$



$M = P = 48, \; K = 12$

$S = \mathbf{22}$

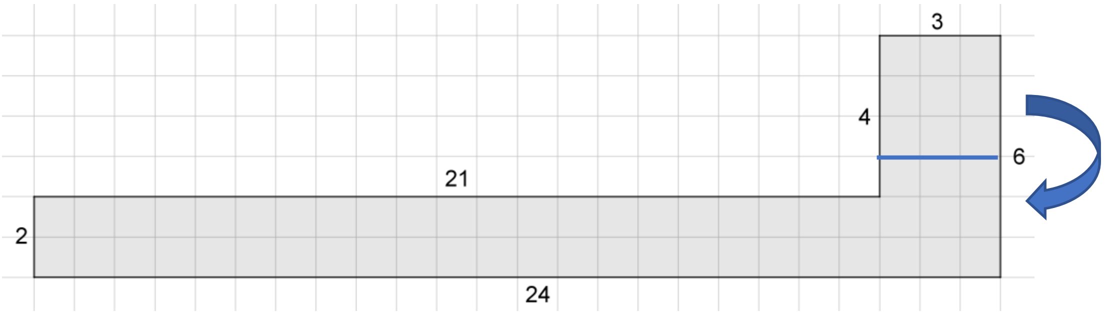


$M = P = 56, \; K = 4$

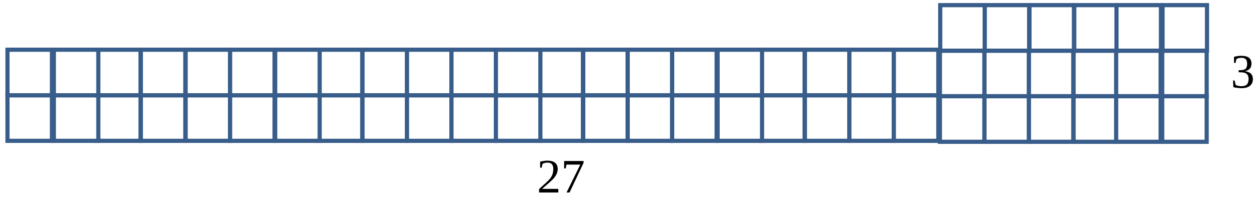
Laukumi un perimetri

9.2. Vai rūtiņu lapā, kur katras rūtiņas malas garums ir viena vienība, var uzzīmēt tādu sešstūri, kura malas sakrīt ar rūtiņu līnijām un kura perimetrs un laukums ir 60 vienības?

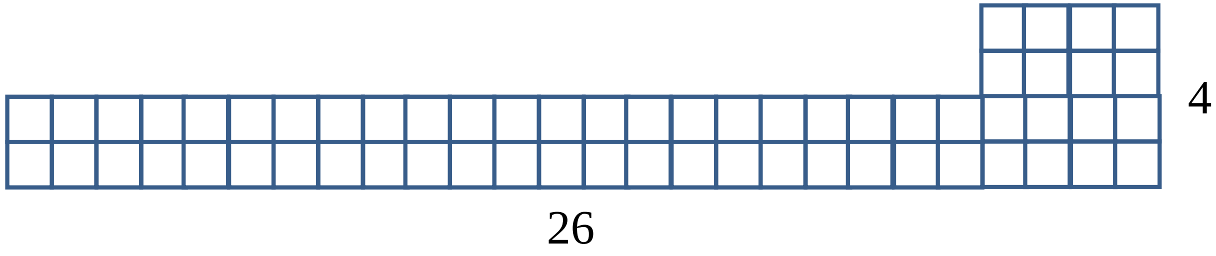
Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 1. att.,
kur sešstūra perimetrs
$P = 2 + 21 + 4 + 3 + 6 + 24 = 60$
Un laukums
$S = 2 \cdot 24 + 3 \cdot 4 = 60.$



Vai tas ir vienīgais atrisinājums?



$P = (27 + 3)2 = 60$
L: 2 x 27, 1 x 6.



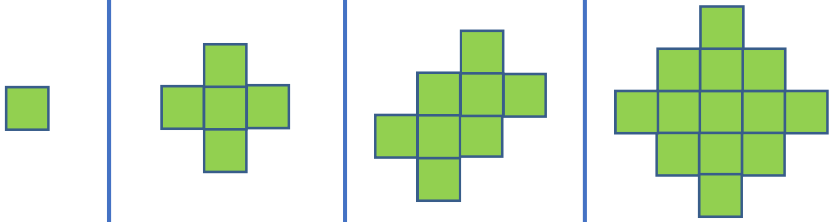
$P = (27 + 3)2 = 60$
L: 2 x 26, 2 x 4.

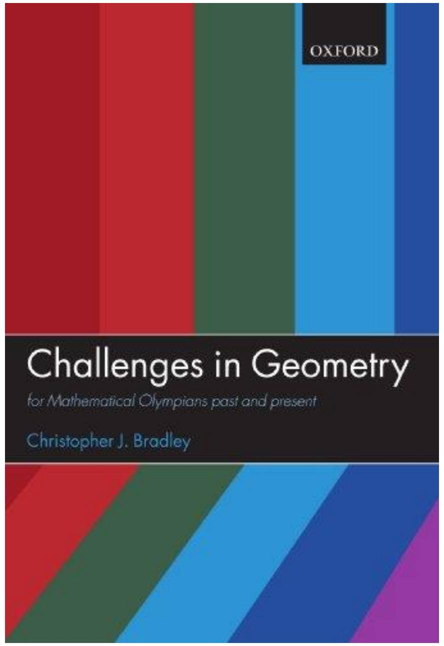
Vienādmalu polimino

Fiksētam perimetram ($P = M$) atrast polimino ar maksimālo laukumu.

A two-dimensional **equable shape** (or perfect shape) is one whose area is numerically equal to its perimeter For example, a right angled triangle with sides 5, 12 and 13 has area and perimeter both have a unitless numerical value of 30. https://en.wikipedia.org/wiki/Equable_shape

$P = 4$	$P = 12$	$P = 16$	$P = 20$
$L = 1$	$L = 5$	$L = 8$	$L = 13$





I disclaim responsibility for the use of the word ‘equable’, which I do not like. Nor did I like a GCSE coursework task (for UK pupils, aged 15–16) which asked pupils to study ‘equable shapes’. My reason for disliking the task was that, because the ratio has the dimension of length, every shape is similar to an equable shape! As far as I am aware, the problem about equable triangles first appeared in a USSR Olympiad, see Shklarsky et al. (1993).

Bradley, Christopher J. (2005). Challenges in Geometry: For Mathematical Olympians Past and Present. Oxford University Press. (205 p.)

Jēdziens equable shape nav skatīts polimino kontekstā. Polimino vispār šajā grāmata netiek aplūkoti.

Perimetri un laukumi

Henri Picciotto's MathEdPage
All sellers »

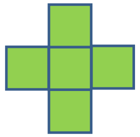
Laba grāmata skolotājiem

Geometry Labs

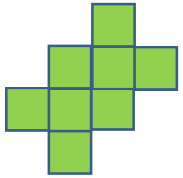
By Henri Picciotto

$L = M = P$

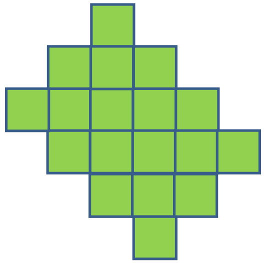
Atrast rūtiņu daudzstūrus (polimino), kuriem $L = M = P$.



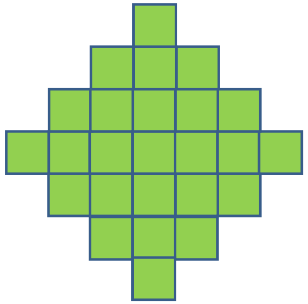
$L = 5$
$M = P = 12$



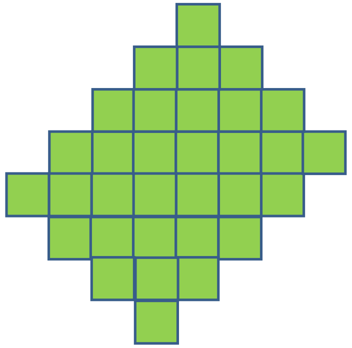
$L = 8$
$M = P = 12$



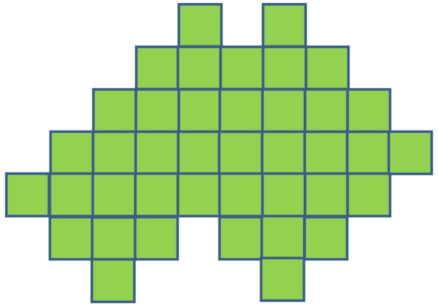
$L = 18$
$M = P = 24$



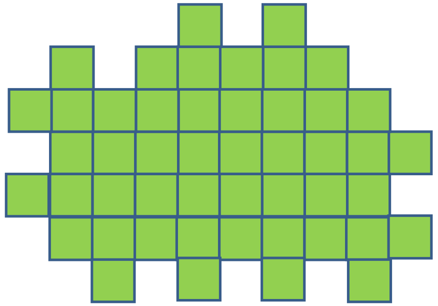
$L = 25$, $M = P = 28$



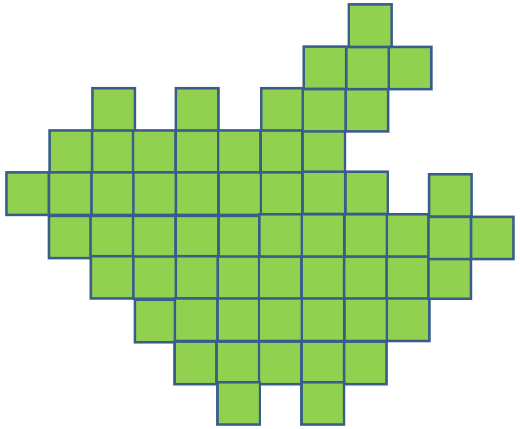
$\boldsymbol{L = M = P = 32}$



$L = M = P = 40$



$L = M = P = 48$

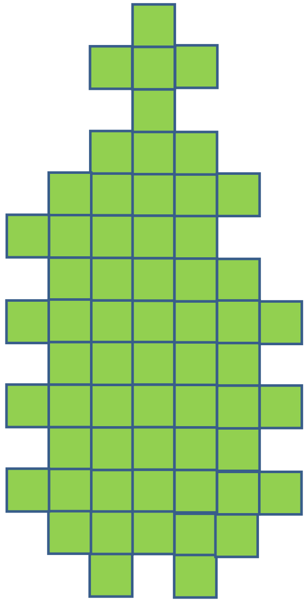


$L = 60$, $M = P = 56$

Vai 32 ir mazākais rūtiņu skaits šādam daudzstūrim?

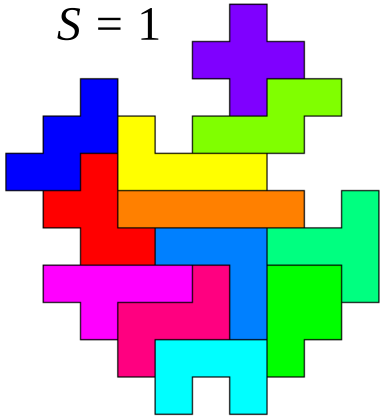
Rekordi

Ja figūra saliekama no pentamino, tad min$K$ = 2.



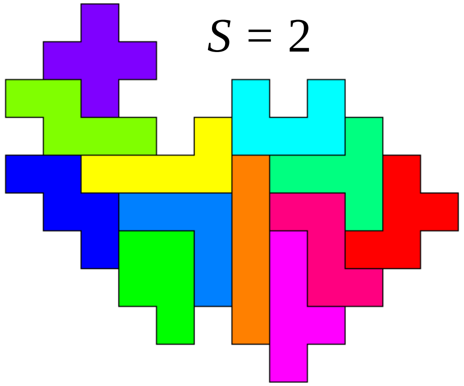
$M = P = 60$, $L = 61$, $K = 1$

$S = 1$

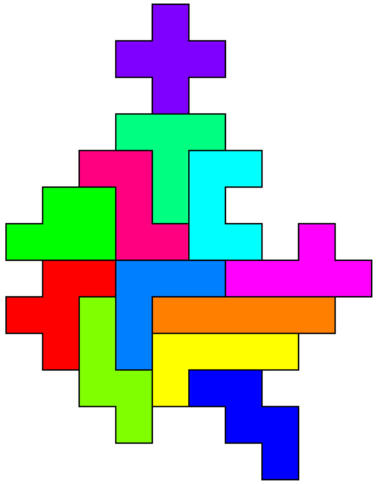


$M = 56$, $P = 58$, $K = 4$

$S = 2$



$M = P = 56$, $K = 4$



$L = P = 60$, $M = 58$, **$K = 2$**

Jāpierāda, ka jebkuram polimino ar $M = P = 60$ laukums ir nepārskaitlis.

Pārbaudes darbs

Dota vienādssānu trapece *SILE* ar augstumu $h = 5$, $|SI| = a$, $|ES| = |IL| = 13$.
Aprēķināt maksimālo laukumu taisnstūrim, kura divas virsotnes atrodas uz garākās malas *SI*.