

**Paspēlēsīmies ar poliformām:  
no skolēna līdz pat doktoranta līmenim**

**MMU**

[andrejs.cibulis@lu.lv](mailto:andrejs.cibulis@lu.lv)

7.10.2023.

# Ievads par poliformām

## To izmantošanas iespējas ZPD. (Tiling)

Biežāk lietotās poliformas (polimino, polimondi, poliheksi, polikubi)



Poliformu skaits (*mazām  $n$  vērtībām*)

Skolā, CE, spēļu instrukcijās atrodamo uzdevumu raksturojums

Par nekorektiem formulējumiem, vienveidību, ne(ilgtspēju), atsauču trūkumu,...

**Uzdevumu daudzveidība, idejas** ([big ideas in mathematics](#))

Transformācija, simetrija, invariants, paritāte, analogija, ekstremālais elements, vidējā vērtība.

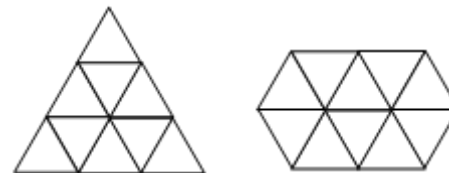
**Jauna spēle ar heksamondiem**

## VISC: nekorekti formulētu uzdevumu piemēri

### 14. uzdevums (1 punkts).

No 1m 17cm garas stieples jāizgatavo vienādmalu trijstūri, kuru malas garums ir 6 cm. Aprēķini lielāko skaitu trijstūru, kurus var izgatavot no šīs stieples. (2016, 8. klase).

Paši diagnostikas *eksperti* neprot(?) korekti formulēt uzdevumu. Atbilde "6" nav lielākais trijstūru skaits. Interesanti, kādu *diagnozi* iedotu skolēnam par risinājumu, kurā iegūti 9 vai 10 trijstūri, sk. 1. zīm. 10 vēl nav rekords. Var izveidot trīs tetraedrus un iegūt 12 trijstūrus. Arī 12 nav rekords.



1. zīm.

$117:18 = 6,5$   
Šādu skolēnu Valstī kopumā esot 6%)

Vēl viens vienkāršāks uzdevums no šī komplekta, bet par to nezkāpēc jau paredzēti 2 punkti.

### 13. uzdevums (2 punkti).

Nogrieznis AB ir vienādsānu trijstūra sānu mala.

Papildini zīmējumu, uzzīmējot vienādsānu trijstūri ABC.

b) Īsi paskaidro, kā tu varētu pārliecināties, ka esi uzzīmējis vienādsānu trijstūri

A \_\_\_\_\_ B



Nav izpratnes par matemātiku.  
Zīmējums tādu pārliecību principā nevar dot.

## Eksāmens matemātikā 9. klasei, 2023. gads.

<https://www.visc.gov.lv/lv/media/21087/download?attachment>

### 29. uzdevums (5 punkti)

No vienādiem kvadrātiem pēc noteiktas likumsakarības veido figūras (11. att.).



Kvadrātu skaita formula  $1 + 4k$  acīmredzama.

29.1. (1 punkts) Nosaki kvadrātu skaitu dotajās trīs figūrās, secini par kvadrātu skaitu 4. un 5. figūrā un aizpildi tabulu.

Figūras numurs	1.	2.	3.	4.	5.
Kvadrātu skaits					

Pieci punkti par tik vienkāršu uzdevumu. Turklāt, kas tā par attieksmi, vērtēšanu, ja par neatrisinātu uzdevumu var saņemt vairāk punktu nekā par atrisinātu, sk. 29.3.

29.2. (2 punkti) Aprēķini kvadrātu skaitu 50. figūrai.



29.3. (2 punkti) Uzraksti izteiksmi, kas izsaka kvadrātu skaitu  $n$ -tajai figūrai. Paskaidro vai parādi ar darbībām, kā ieguvu izteiksmi.



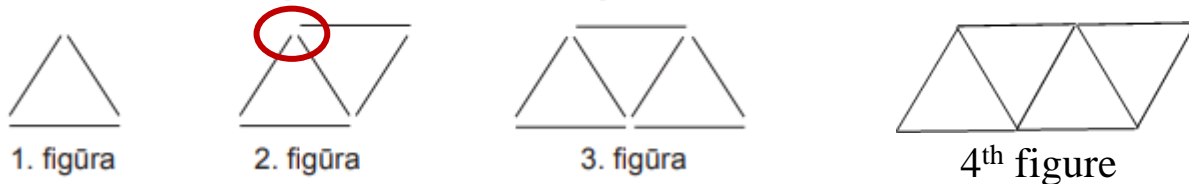
**K.** Risināšanai bez vajadzības atvēlētas 14 rūtiņu rindas

# Example of an incorrectly formulated task

## Exam in Mathematics, Grade 9, 2022, Latvia

### 8. uzdevums (7 punkti).

Zaiga no vienādiem 2,5 cm gariem kociņiem veido figūras (skat. zīm.).



8.1. Cik kociņu būs nepieciešams, lai izveidotu ceturto figūru?



$$s(n) = 2n + 1 \Rightarrow s(100) = 201.$$

**C1.** Formulation is mathematically incorrect

**C2.** In the picture endpoints of sticks are separated.

**C3.** Uneconomic solution.

$$\text{If } p(n) = 2.5(2 + n) = 105, \text{ then } 2,5n = 100, \text{ and } n = 40.$$



$$s(40) = 81.$$

Another way how 4<sup>th</sup>, 5<sup>th</sup>, 6<sup>th</sup>, 7<sup>th</sup> and 8<sup>th</sup> figure could have looked.

### 8. uzdevums (7 punkti).

Zaiga no vienādiem 2,5 cm gariem kociņiem veido figūras (skat. zīm.).



8.1. Cik kociņu būs nepieciešams, lai izveidotu ceturto figūru?

9 kociņi. (1 pt.)

8.2. Uzraksti izteiksmi un aprēķini, cik kociņu nepieciešams, lai izveidotu simto figūru.

3; 5; 7; 9...  $d = 2$  (1 pt.)  
 $a_1$   
 $a_{100} = a_1 + (n-1)d = 3 + (100-1) \cdot 2 = 201$  kociņi (1 pt.)

8.3. Aprēķini, kuras figūras apkārtmērs ir 105 cm.

$a_1 = 3 \cdot 2,5 = 7,5$  cm  
 $a_2 = 4 \cdot 2,5 = 10$  cm  
 $a_3 = 5 \cdot 2,5 = 12,5$  cm  
 $a_n = 105$  cm (2 pt.)  
 $d = 2,5$   
 $a_n = a_1 + (n-1)d$   
 $105 = 7,5 + (n-1) \cdot 2,5$   
 $105 = 7,5 + 2,5n - 2,5$   
 $-2,5n = 7,5 - 2,5 - 105$   
 $-2,5n = -100 \quad | \cdot (-2,5)$   
 $n = 40$

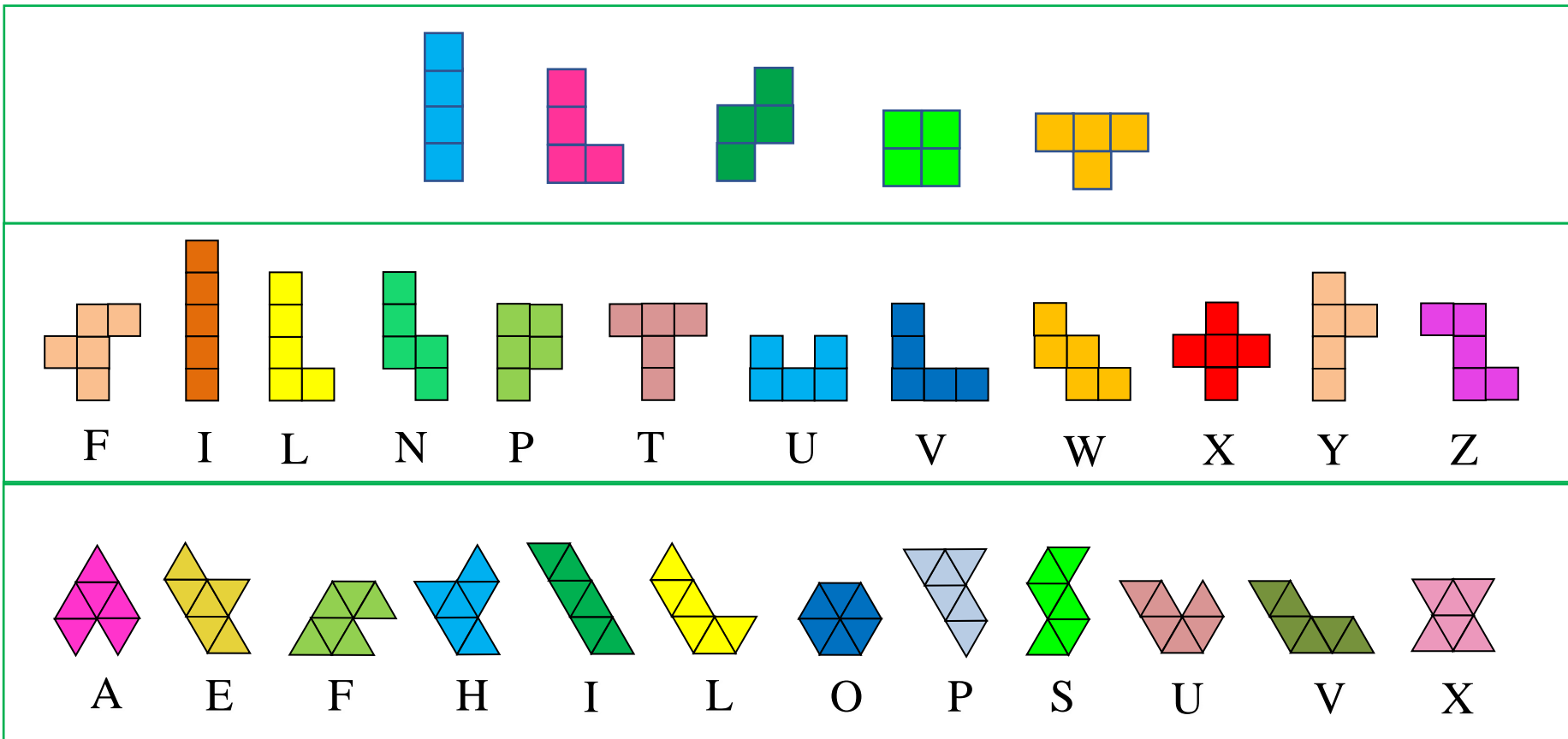
8.4. Aprēķini, no cik kociņiem veidojas figūra, kuras apkārtmērs ir 105 cm.

(1 pt.)  
 $a_{40} = a_1 + (n-1)d = 3 + (40-1) \cdot 2 = 3 + 78 = 81$  kociņi

Solution given by Krišs Jansons on YouTube:

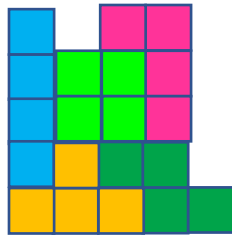
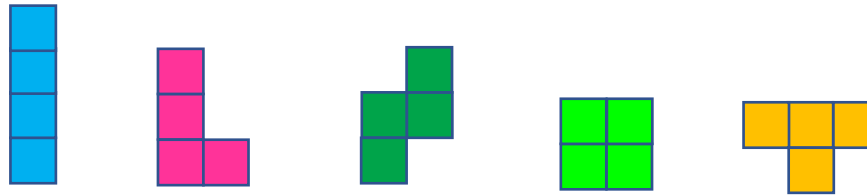
<https://www.youtube.com/watch?v=HErcj8CKfbw>

# Tetramino, pentamino un heksamondi



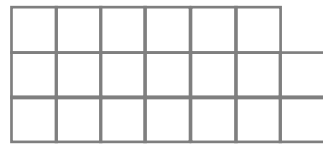
$$L = P$$

Salikt no zīmējumā parādītajām figūrām tādu daudzstūri, kuram laukums vienāds ar perimetru.

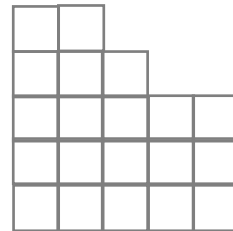


$$P = 22$$

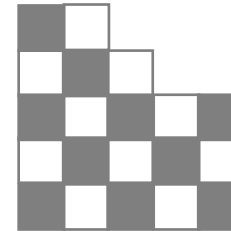
$$L = 20$$



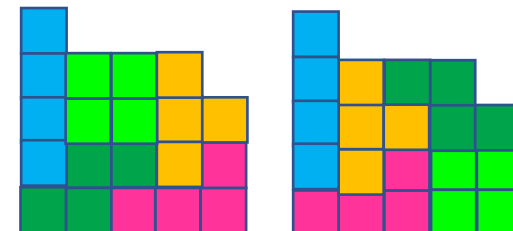
$$L = P = 20$$



$$L = P = 20$$



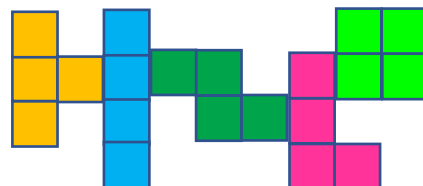
$$(10, 10)$$



$$P = 20$$

Kādām  $n$  vērtībām no tetramino var salikt  $n$ -stūri?

Maksimālā vērtība ir 30, jo  
 $4 + 4 + 6 + 8 + 8 = 30$ .









$$n = 30$$

**Noskaidrojiet, kāda ir  
 minimālā vērtība?**

# Polimondu nosaukumi un skaits

<https://en.wikipedia.org/wiki/Polyiamond>

Name	Number of forms	Forms
Monomonds Moniamond	1	
Dimonds Diamond	1	
Trimonds Triamond	1	
Tetramonds Tetramond	3	
Pentamonds Pentiamond	4	
Heksamonds Hexiamond	12	

K. Par izmēriem.



# Tessellations

Jennifer Li and Maggie Smith

Sonia Kovalevsky Day  
Mount Holyoke College  
Saturday, November 10, 2018

<https://web.math.princeton.edu/~jl5270/talks/tessellations.pdf>

**Tiles** are the building blocks of a tessellation.

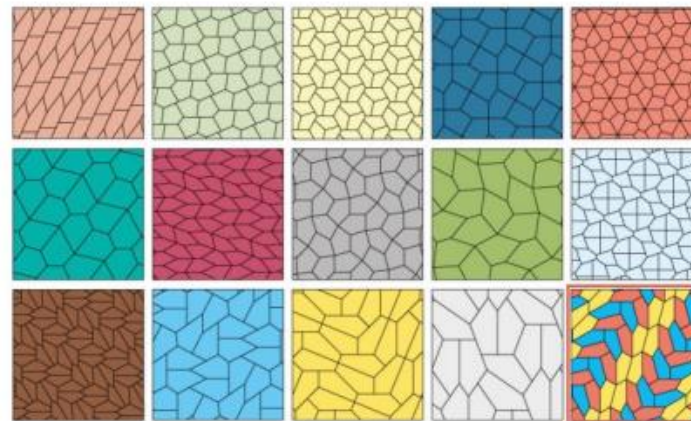
**Tiling, covering, packing, paving**  
**Pārklājums (plaknes), pārklāšana**

## Tessellations everywhere



## Pentagonal tiling in math research

There are 15 convex pentagons that tessellate the plane monohedrally.



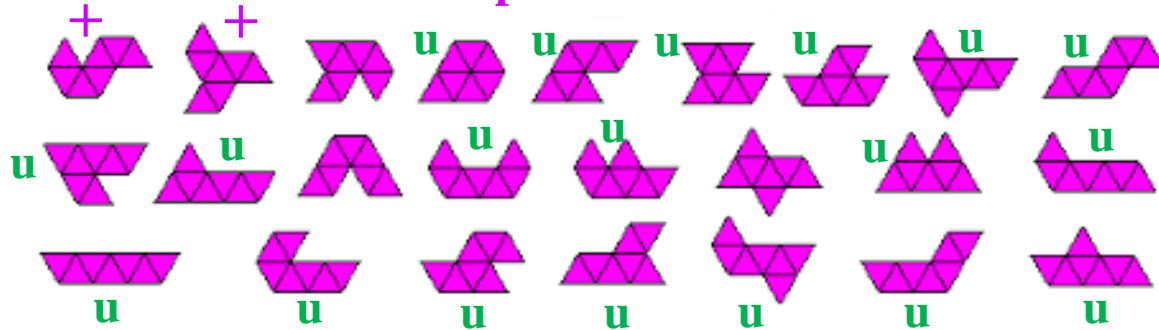
Ir **15** dažādi  
pārklājumi ar  
izliektiem 5-stūriem.

The most recent  
pentagonal tiling was  
discovered in **2015**:

## Activity: Which one does not belong?

Activity Sheet: A **heptiamond** is a shape that is created from seven equilateral triangles glued together. There are a total of twenty-four heptiamonds:

### Heptamondi



Only one does **not** give a monohedral tiling of the plane. Can you figure out which one it is?

Vai varat uzminēt, kurš ir tas vienīgais nederīgais?

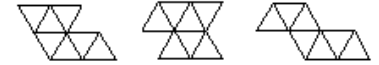
**Monohedral tiling** is a tessellation with only one prototile:  
all the times are congruent (the same size and shape).

Nav skaidrs, vai pieļaujams spoguļattēls?

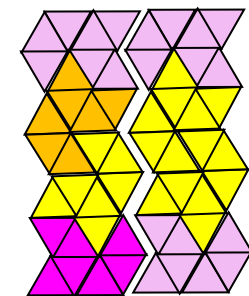
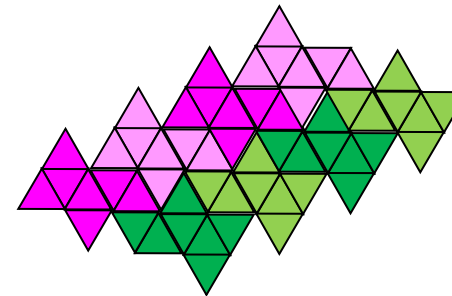
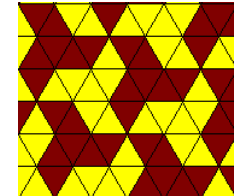
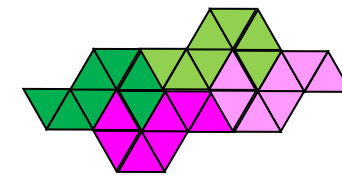
In geometry, two *figures* or objects are *congruent* if they have the same *shape* and size, or if one has the same *shape* and size as the mirror image of the other.

<https://www.mathpuzzle.com/heptes.html>

Uzrādīti 23 heptamondi,  
(vajadzēja būt 24),  
turklāt trīs nezkāpēc atkārtojas.



<http://www.jhhindriks.info/37/37sec816m.htm>



## Kas ir prezentācijas autori?

<https://web.math.princeton.edu/~jl5270/>

Jennifer Li

Email: [jenniferli@princeton.edu](mailto:jenniferli@princeton.edu)

I am an Instructor in the Department of Mathematics at Princeton University.

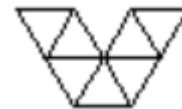
My area of research is algebraic geometry...I received my PhD from the University of Massachusetts. In my thesis I studied the Morrison cone conjecture for log Calabi-Yau surfaces.

All of the polyiamonds of order eight or less, with the exception of one of the heptiamonds will tessellate the plane. The exception is the V-shaped heptiamond. Gardner (6th book p.248) posed the problem of identifying this heptiamond and reproduced an impossibility proof of Gregory.

<http://www.mathpuzzle.com/Tessel.htm>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Polyiamond>

Pierādījums, ka neder simetriskais V  
ir samērā īss un vienkāršs.



# Challenging Puzzles with Shapes

The most exciting mathematics  
is not taught in school.

Mathematical toys (mechanical puzzles)  
is a good idea how to work with  
pupils not necessarily gifted.



Pentominoes

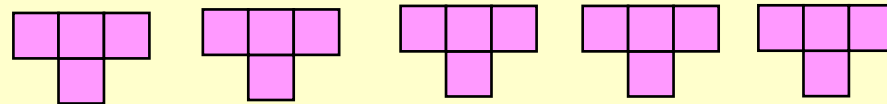
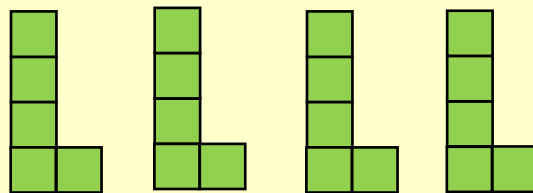


Hexiamonds

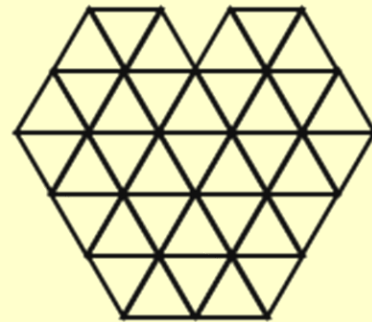
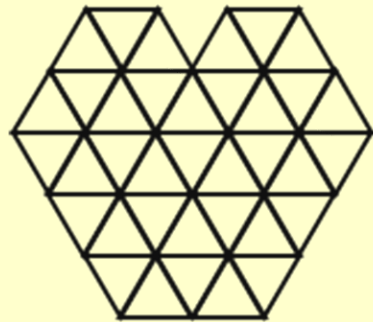
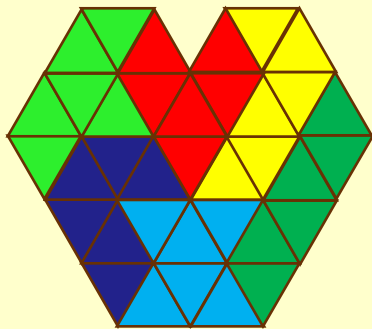
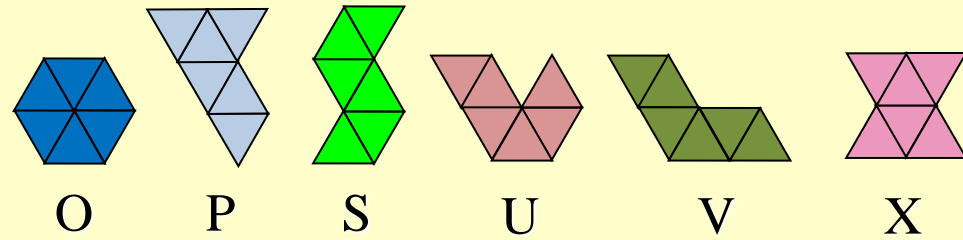
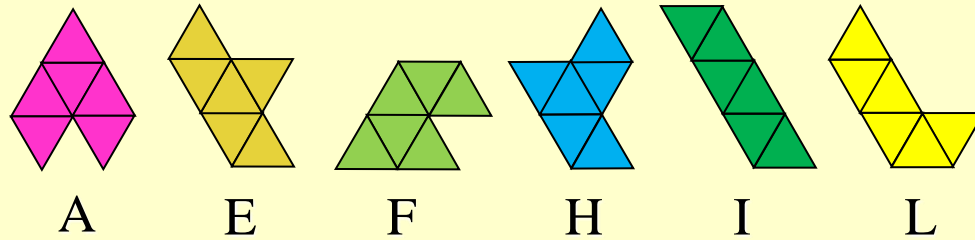
**C2.** Using four L and five T assemble:

1) a rectangle;

2) two equal shapes.



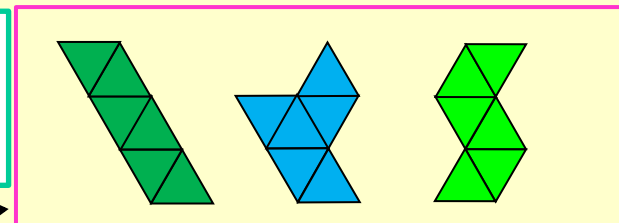
# How to Play with Hexiamonds



C4. Assemble two hearts.

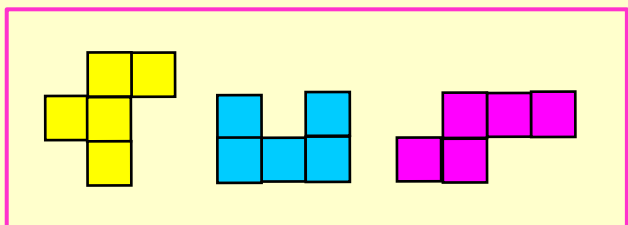
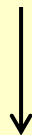
# Explore Symmetry

**C5.** Assemble a symmetric shape from the given three pieces. **It is not so easy.**



I H S

The solution is unique.

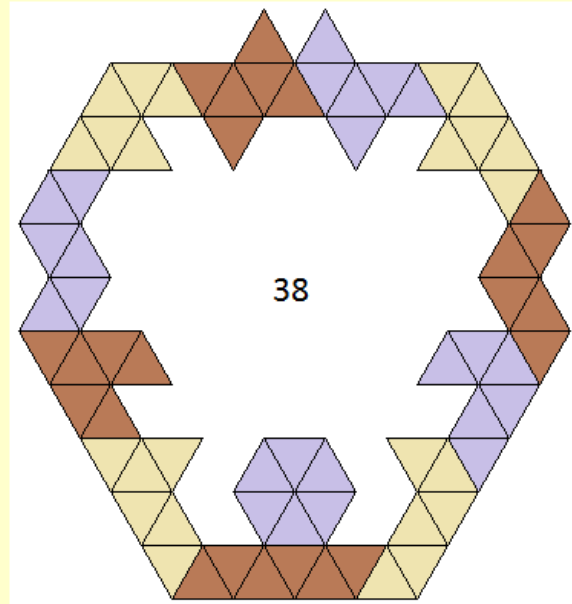


The abbreviation **IHS** is known in religion.

**IHS** denoting the first three letters of the Greek name of Jesus,  $\text{I}\text{H}\Sigma\text{O}\text{Y}\Sigma$ , iota-eta-sigma.

**C6.** Assemble a symmetrical 15-omino from these three pieces. (Difficult puzzle)

What does 38 mean?



**Assemble  
a symmetrical  
tower with a hole 37-gon  
or prove that it is not possible.**

[Sequences of Hexiamond Towers](#), Contest paper  
by Olita Brenča, Latvia, Ezernieki Secondary School, Form 12, 2017.



# Spēle ar heksamondiem

**Spēle.** Divi spēlētāji secīgi izvēlas pa vienam heksamondam, kamēr katrs ir paņēmis sešus heksamondus. Uzvar tas, kurš pirmais savus sešus heksamondus ievieto dotajā 6-stūrī.

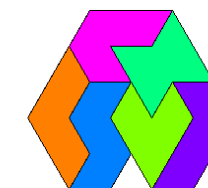
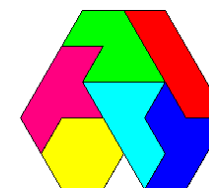
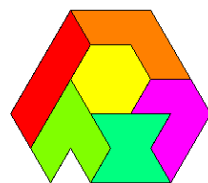
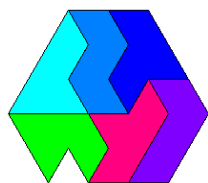
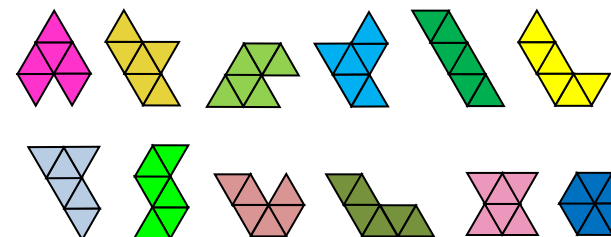
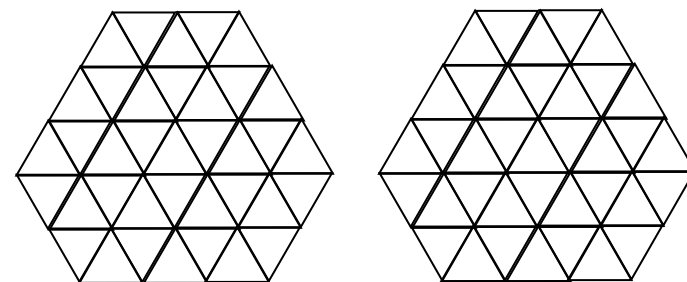
## Komentāri par spēli.

Aprobācija nometnē, Lietuvā. Bija tādi, kuri neatrada nevienu risinājumu (6 heksamonu izvietojumu 6-stūrī).

Labākais risinātājs (Naglis) atrada 14 derīgas kombinācijas.

Nākamais labākais (Nojus Baranauskas) – 10 kombinācijas.

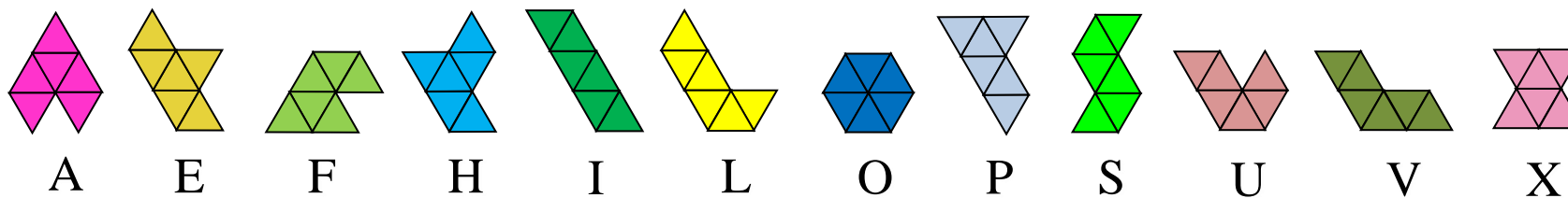
Kopā tika atrastas 140 derīgas kombinācijas:



Dators:  $S = 56$



# Spēles piemēri



<b>S1</b>				AEFHOV-
<b>S2</b>			AHOSUX -	LIPSUX-

Vai var gadīties, ka neviens nav ieguvis veiksmīgu kombināciju? Jā, var.

Kāda ir varbūtība, ka S1 iegūst veiksmīgu kombināciju?

Visu kombināciju skaits ir  $C_{12}^6 = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$ .  $\frac{v}{924}, v = ?$

# Vārdu veidošana

## AEFHILOPSUVX

Sastādīt vismaz sešas veiksmīgas kombinācijas, kuras ir arī kāds latviešu valodas vārds.

**LIEPAS-2**



APLIES, SAPELI

**PELAVU-11**

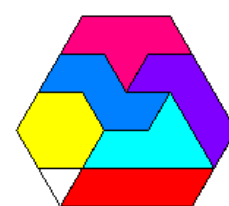


**PLAISU-3**



PAULIS

**POLISE-2**



ELPOSI, SPOLEI

**SAPUVI-1**



**SAULEI-1**

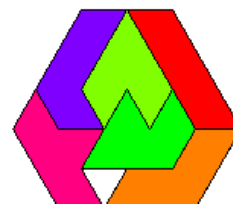


IELASU,  
IESALU, SEULAI

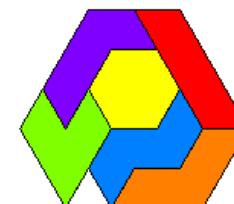
**SPALVU-5**



**VAFELI-1**



**VAISLO-1**



**VIELAS-7**



VELSAI  
SELAVI

APSOLU-0

APSOLI, LAPOSI-0

LAIPOS-0

POLISA-0

POLISU-2

SVILPE-0

# 6 letter words (71) you can make with aei fhlopsuvx

alephs aslope auspex avulse  
elfish eluvia elvish espial  
exuvia fauves filose  
flaxes fluish fluxes foveal  
foveas fusile haloes  
haoles holies  
houzel hovels isohel lavish  
lehuas lipase loaves louies  
loupes oafish ouphes  
ovules oxalis oxlips palish

pavise phials pilafs pilaus  
pileus pilose pilous  
plexus poilus poisha  
poleax poleis polies  
shavie sheila silvae  
silvex spavie sulphu  
uphove valise voiles

HALVES-1

HELIOS-6

OLIVES-8

POLISH-3

SEXUAL-1

SHOVEL-4

VALUES-5

VISUAL-2

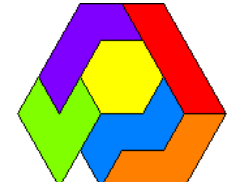
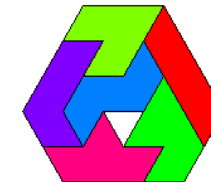
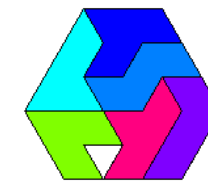
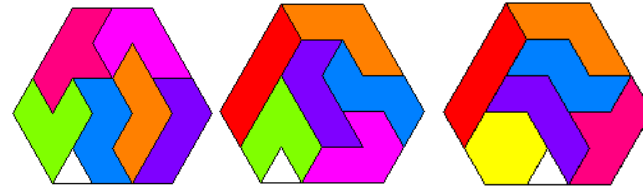
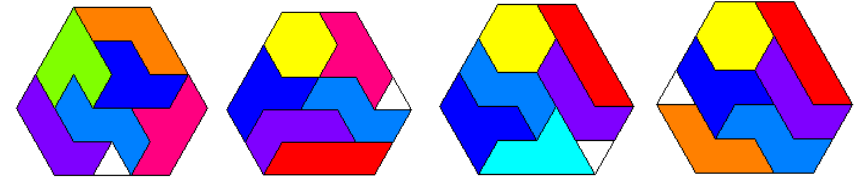
VIOLAS-1

hoaxes-0

pelvis-0

pixels-0

vexils-0

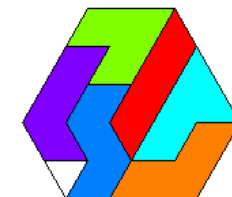


ALEPHS-3

FALSIE-1

VIOLAS-1

<https://tezaurs.lv/pilavs>  
pilavs – griķu pilavs (plovš)



PILAVS-2

<https://unscramblex.com/anagram/aeifhlops/?dictionary=nwl>

# Pāru stratēģija

AEFHILOPSUVX

EA-FH-IO-LS-PU-VX

S1

S2

EFILPV+

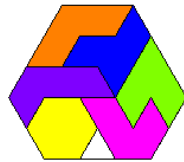
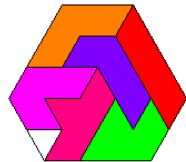
AHOSUX-

EFILUV+

AHOP SX-

EFISPX-

AHLOUV+



AX-EV-FU-HS-IP-LO

S1

S2

EFILPV+

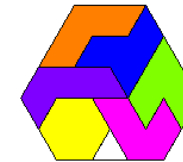
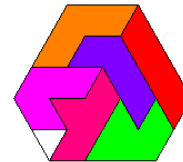
AHOSUX-

EFILUV+

AHOP SX-

EFISPX-

AHLOUV+



**Noskaidrot, vai pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša (nezaudējoša) pāru stratēģija.**

**Permutācijas stratēģija.** Vai eksistē tāda permutācija, kas nodrošina pirmajam spēlētājam veiksmīgu sešnieku?

**S1 vienmēr ņem pirmo atlikušās permutācijas heksamondū.**

## *Sirsniņu var salikt no 120 kombinācijām:*

AEFHOP, AEFHPU, AEFLOP, AEFLPU, AEFOPU, AEHLOU, AEHLOV, AEHLUV, AEHILO, AEHILU, AEHIOU, AEHLOU, AEHLSV, AEHLUV, AEILOU, AEILSV, AEILUX, AELOSU, AELOSV, AELOUV, AELOUX, AEOSUV, AFHLPU, AFHLPV, AFHPUV, AFILOP, AFILPS, AFILPU, AFLOPS, AFLPSU, AFLPUV, AHILOU, AHIOUV, AHIOUX, AHLOSU, AHLOSV, AHLLOUV, AHLLOUX, AHLUVX, AHLVUX, AILLOUX, AILLOUV, AIOSUV, ALOSUV, ALOSVX, ALSUVX

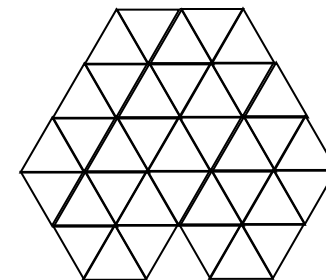
EFHILP, EFHIOP, EFHIPU, EFHLPU, EFHLPV, EFHPUV, EFILPU, EFILPV, EFILPX, EFIPSU, EFIPUV, EFLOPS, EFLPSU, EFLPUV, EHILOU, EHILOV, EHILSU, EHILUV, EHIOSU, EHIOUV, EHLOSU, EHLOUV, EHLSUV, EHLUVX, EHOSUV, EILOSV, EILOUX, EILSUV, EIOSUV, ELOSUV, ELOUVX, EOSUVX,

FHILOP, FHILPV, FHIOPS, FHIOPV, FHIOPX, FHIPSV, FHIPUV, FHLOPV, FHLPSU, FHLPSV, FHLPUV, FHLPUX, FHLPVX, FHOPUV, FHOPSU, FHOPSV, FHPSUV, FHPUVX, FILOPS, FILPSU, FILPUV, FILPUX, FIOPSU, FIOPSV, FIPSVX, FLOPUV, FLPSUV, FLPUVX, FOPSUV, FOPSUX, FOPSVX

HILOUV, HILSUV, HIOSUV, HIOUVX, HLOSUV, HLOSUX, HLOUVX, HLSUVX, IHLOVX, ILOSUX, LOSUVX.

Biežums. A -46, E-54, F-59, H-67, I-53, L-83, O-67, P-59, S-51, U-84, V-68 , X-29

**1. U-L**



# *Rijīgais algoritms*

## The greedy algorithm

### 1. U-L

AEFHPU, AEFOPU, AEHIOU, AEOSUV, AFHPUV, AHIOUV, AHIOUX, AIOSUV,  
EFHIPU, EFHPUV, EFIPSU, EFIPUV, EHIOSU, EHIOUV, EHOSUV, EIOSUV, EOSUVX  
FHIPUV, FHOPUV, FHOPSU, FHPSUV, FHPUVX, FIOPSU, FIOPSV, FOPSUV, FOPSUX,  
HIOSUV, HIOUVX

### 2. O-V

AEFOPU, AEHIOU, AHIOUX, EHIOSU, FHOPSU, FIOPSU, FOPSUX

### 3. H-I.

FHOPSU

### 3. I-H.

FIOPSU

### 3. S-P.

EHIOSU

### 3. F-P. Saraksts iztukšots.

## Piemēri no MO

**7.4.** Andris apgalvo, ka sapnī bijis kādā Ēģiptes piramīdā un kādā tās telpā redzējis tādu piecstūri, kas salikts no diviem vienādiem piecstūriem, kuri sastāvējuši no vienādiem regulāriem trijstūriem. Uzzīmē šādu piecstūri!

LAMO-46  
2018./2019. m.g.

**K.** Mazākais tāds piecstūris sastāv no sešiem trijstūriem un ir pazīstams ar nosaukumu heksamonds *sfinksa*.



~ 7 min Uzrādīt 7-stūri, kuru var sadalīt divos vienādos 7-stūros (polimondos).

Vai varat atrisināt uzdevuma vispārinājumu, kad  $n = 2023$ ?