Kompleksie skaitļi un darbības ar tiem

LU lektore

Elīna Buliņa

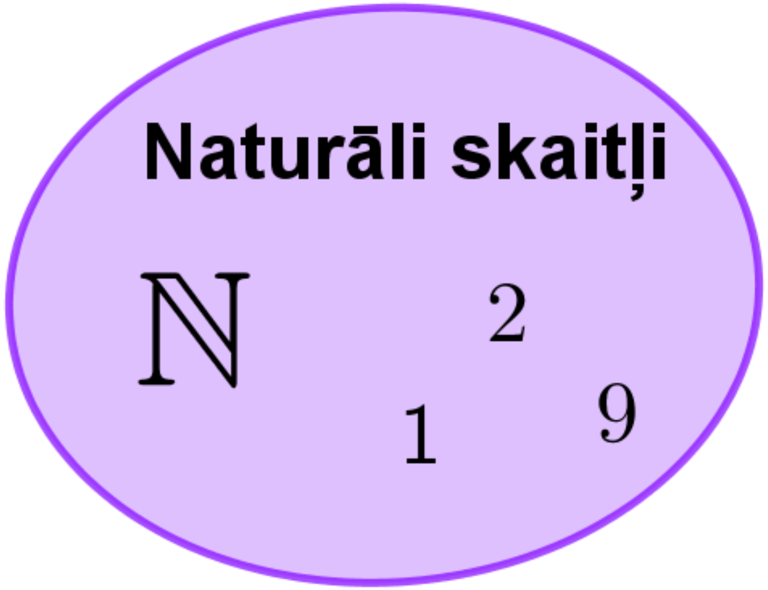
Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$

Naturāli skaitļi ir skaitļi, kas rodas skaitīšanas rezultātā.

$$1; 2; 3; 4; 5; \ldots$$

Naturālo skaitļu kopā ir definētas darbības:

- Saskaitīšana $(+)$
- Reizināšana $(\cdot)$



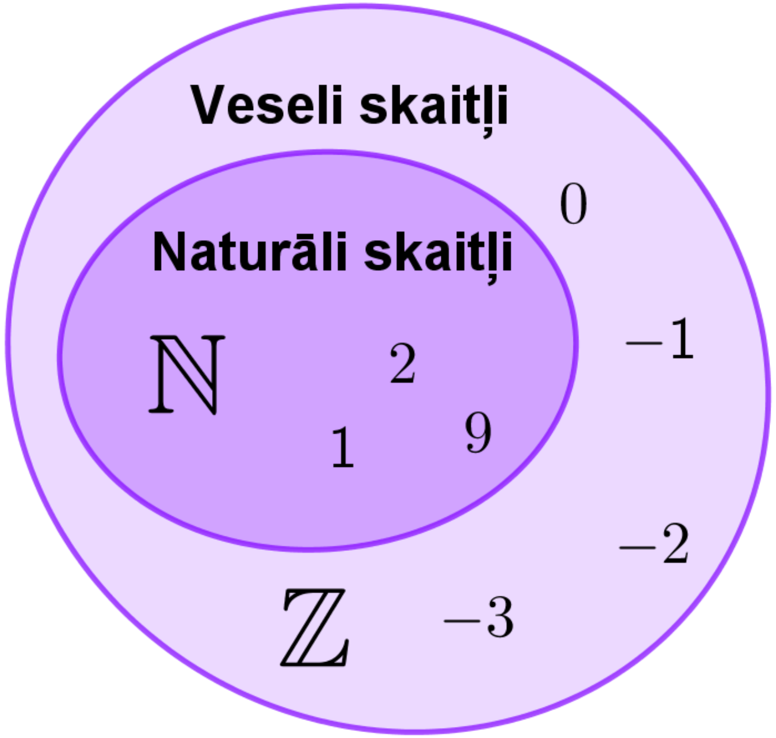
Veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$

Veselo skaitļu kopa satur naturālos skaitļus, tiem pretējos skaitļus un nulli.

$$\dots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots$$

Veselo skaitļu kopā ir definētas darbības:

- Saskaitīšana $(+)$
- Reizināšana $(\cdot)$
- Atņemšana $(-)$



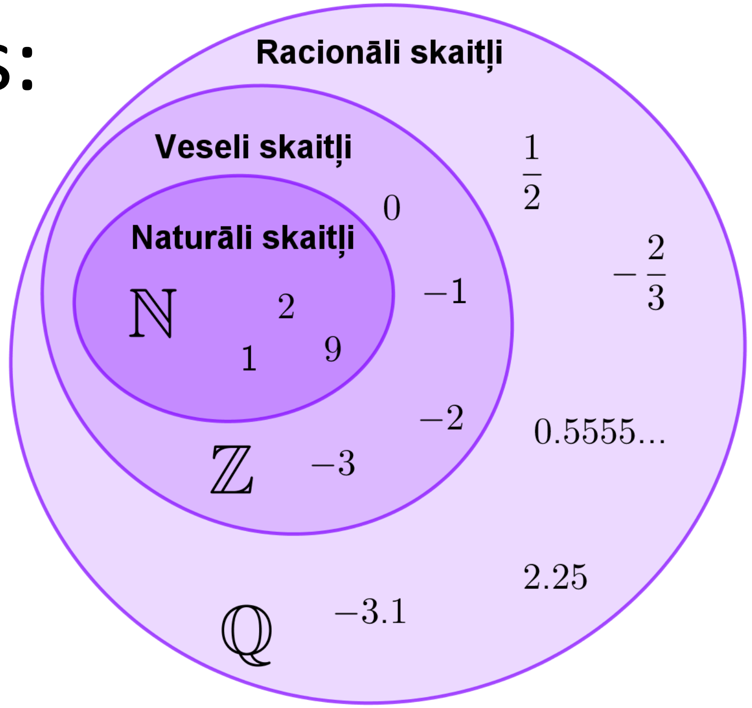
Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$

Par racionāliem skaitļiem sauc skaitļus, kurus var izteikt daļas $\frac{m}{n}$ veidā, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, \text{kur } m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}\right\}$$

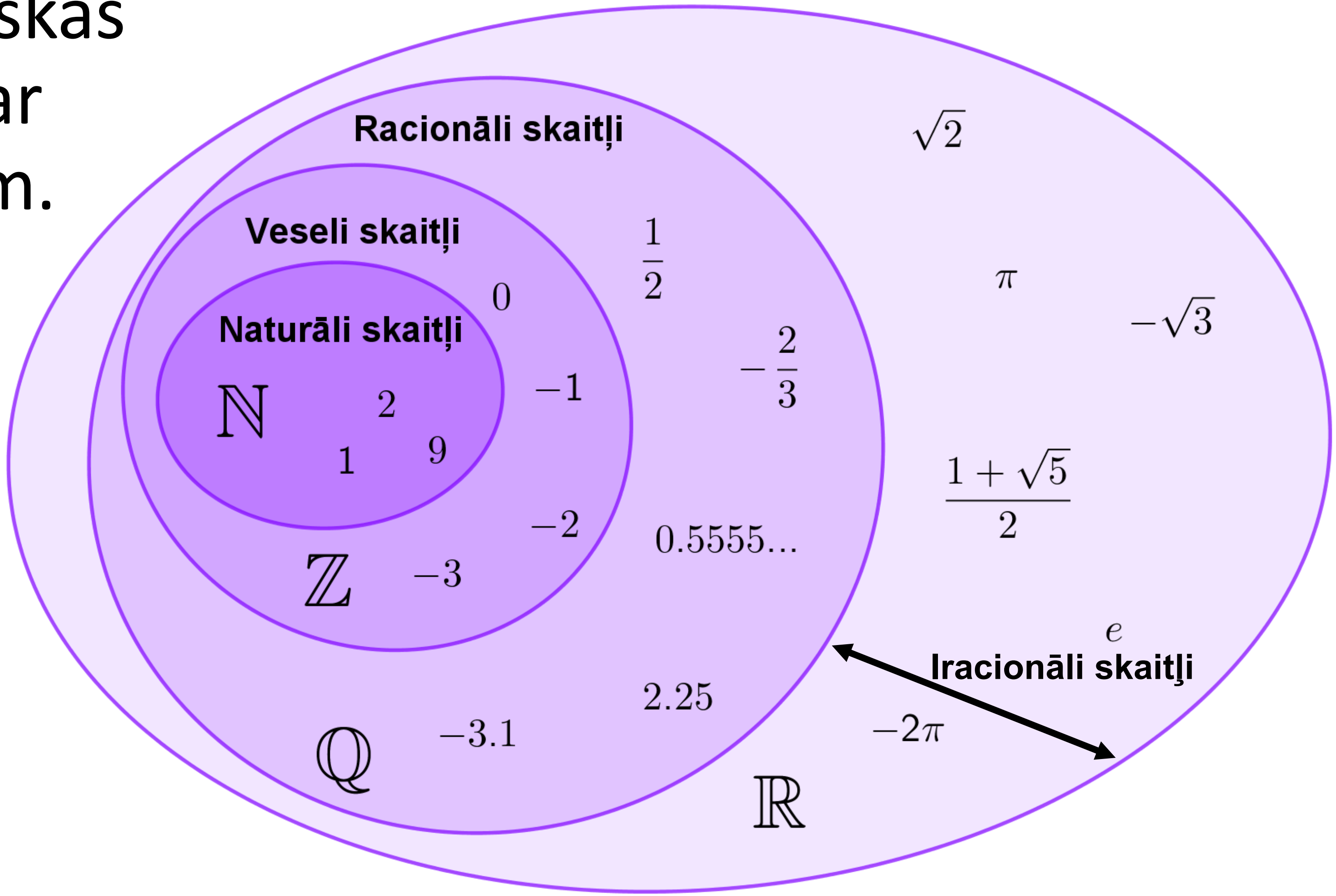
Racionālo skaitļu kopā ir definētas darbības:

- Saskaitīšana $(+)$
- Reizināšana $(\cdot)$
- Atņemšana $(-)$
- Dalīšana $(:)$



Iracionālo skaitļu kopa $\mathbb{I}$

Bezgalīgas neperiodiskas decimāldaļas sauc par iracionāliem skaitļiem.

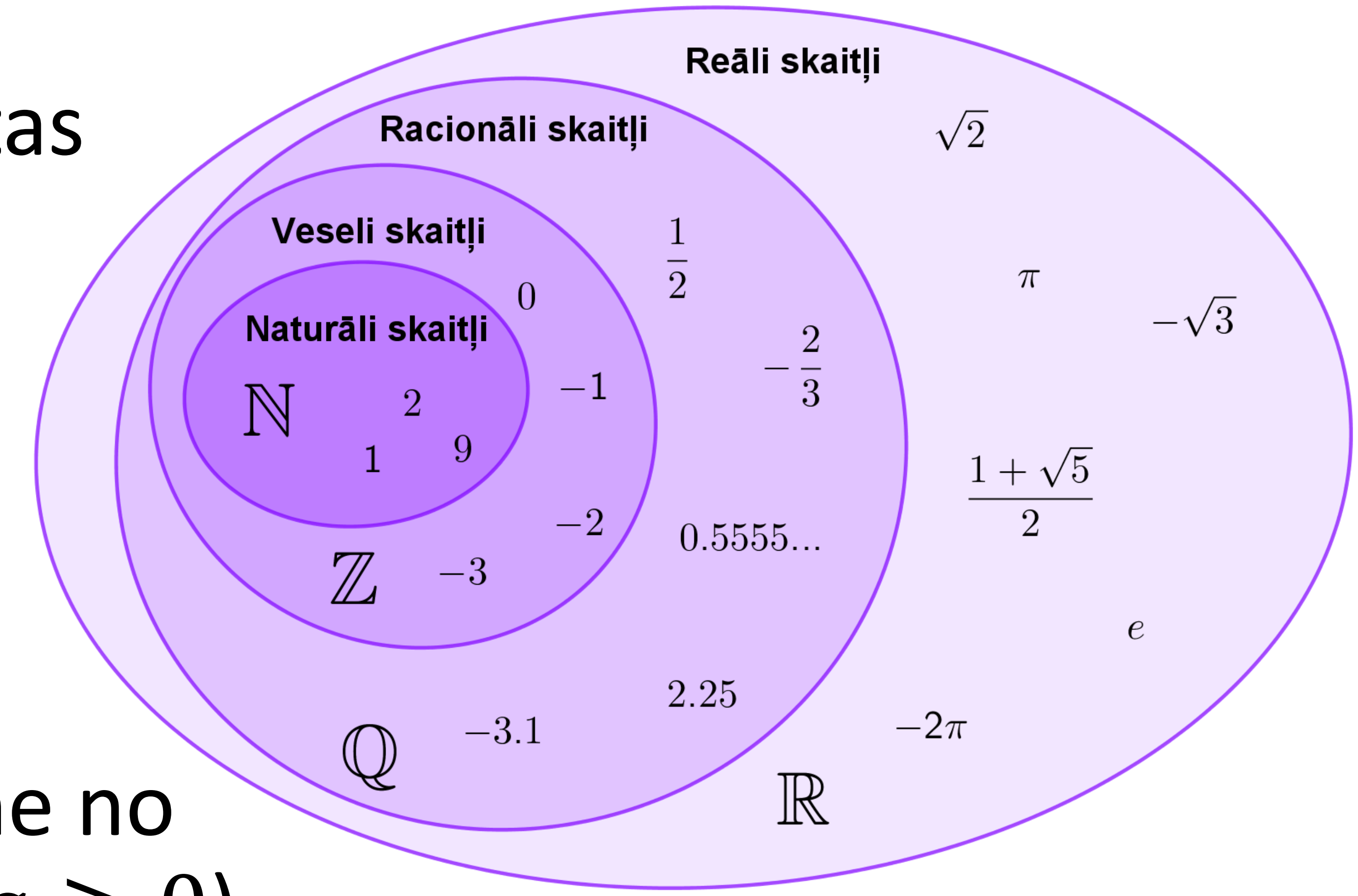


Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$

Racionālo un iracionālo skaitļu kopu apvienojumu sauc par reālo skaitļu kopu.

Reālo skaitļu kopā ir definētas darbības:

- Saskaitīšana $(+)$
- Reizināšana $(\cdot)$
- Atņemšana $(-)$
- Dalīšana $(:)$
- Aritmētiskā kvadrātsakne no nenegatīva skaitļa $(\sqrt{a}; a \geq 0)$



Aritmētiskā kvadrātsakne

Definīcija. Par skaitļa aritmētisko kvadrātsakni no skaitļa a sauc nenegatīvu skaitli, kura kvadrāts ir vienāds ar a.

$$x^2 + 1 = 0$$

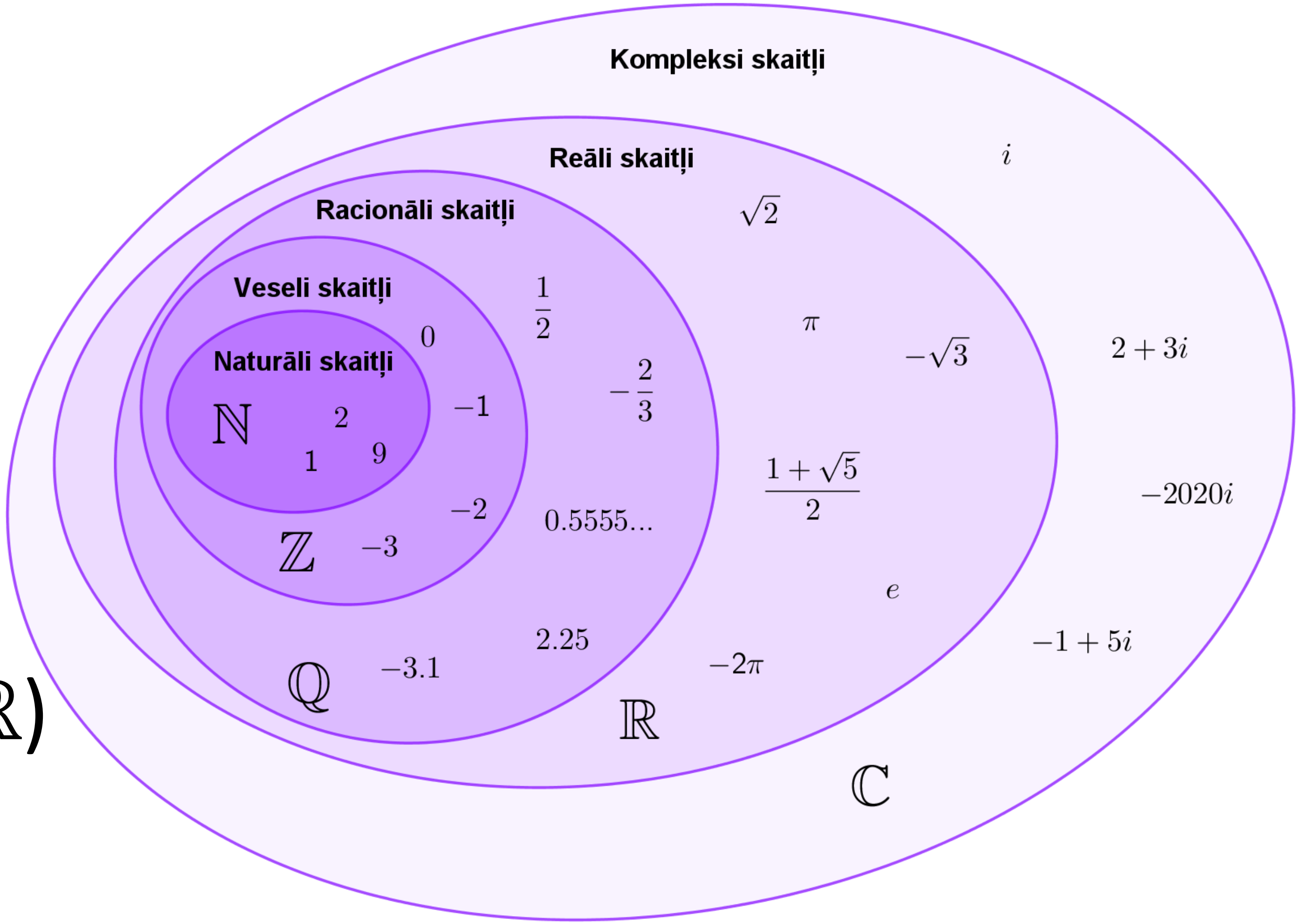
$$x^2 = -1$$

Komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$

Komplekso skaitļu kopa ir kopa, kuras elementi ir kompleksie skaitļi $z = a + bi$, kur $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$.

Komplekso skaitļu kopā ir definētas darbības:

- Saskaitīšana ($+$)
- Reizināšana ($\cdot$)
- Atņemšana ($-$)
- Dalīšana (:)
- Kvadrātsakne ($\sqrt{a}; a \in \mathbb{R}$)



Imaginārā vienība

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$i^2 = -1$$

$$\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$$

IMAGINĀRĀ VIENĪBA

$\sqrt{-1}$ ♥

MATH

Kvadrātsakne no negatīva skaitļa

$$\boldsymbol{\sqrt{-9}} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

$$\boldsymbol{\sqrt{-16}} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$$

$$\boldsymbol{\sqrt{-12}} = \sqrt{12 \cdot (-1)} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$$

$$\boldsymbol{\sqrt{-5}} = \sqrt{5 \cdot (-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i$$

Kompleksais skaitlis

$$\boldsymbol{z = a + bi}, \qquad \textbf{kur } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$$

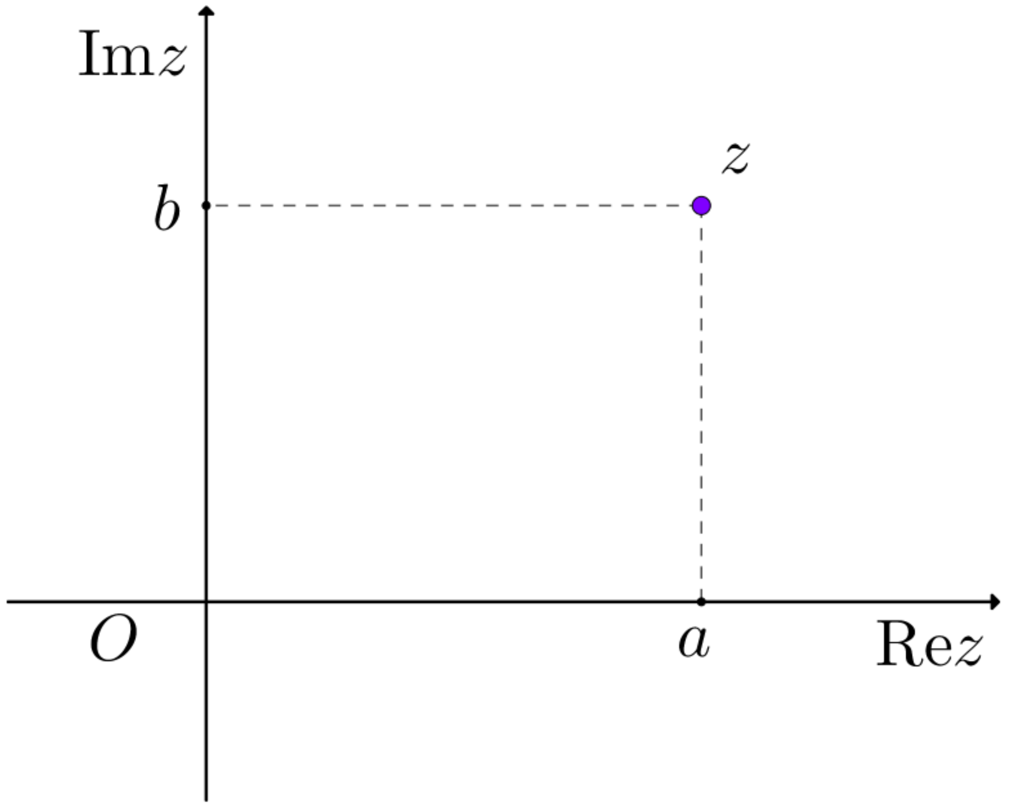
$Re(z) = a$ kompleksā skaitļa z reālā daļa
$Im(z) = b$ kompleksā skaitļa z imaginārā daļa

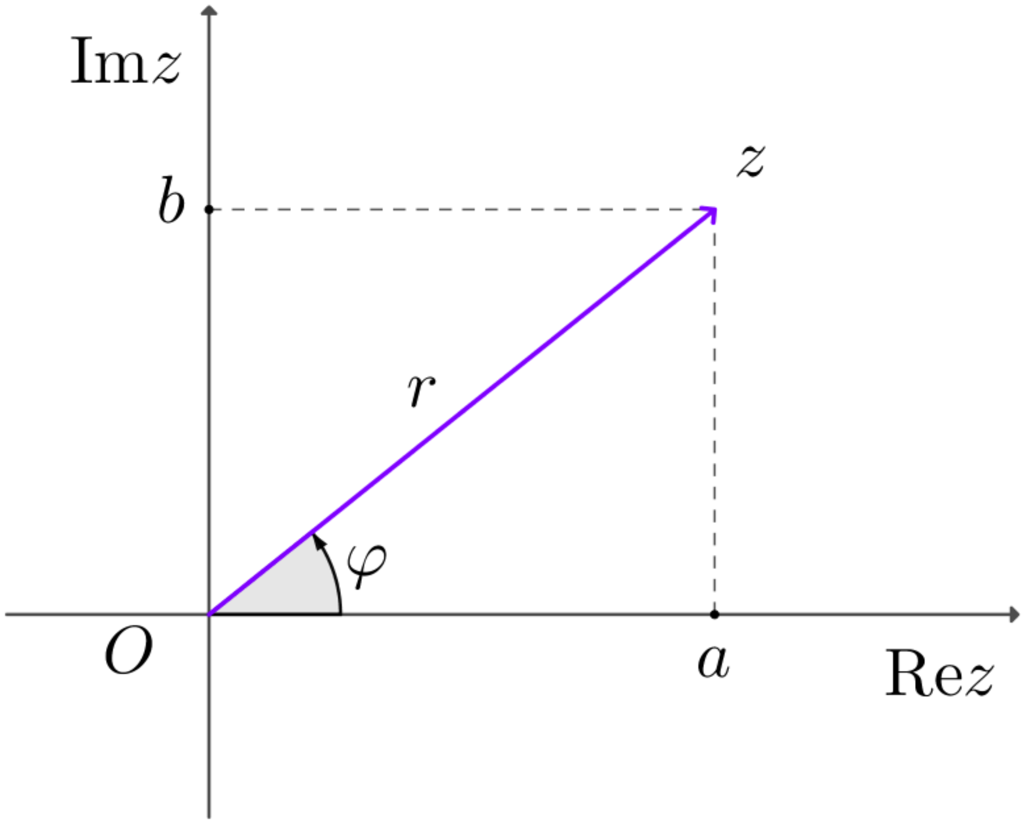
$$\boldsymbol{z = Re(z) + Im(z)i}$$

Ja $b = 0$, tad $z = a$ ir reāls skaitlis.
Ja $a = 0$, tad $z = bi$ ir imaginārs skaitlis.

Komplekso skaitļu attēlošana plaknē

$$\boldsymbol{z = a + bi}, \qquad \textbf{kur } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$$





$\boldsymbol{r = |z|}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\varphi = \arg z}$

Citas komplekso skaitļu uzdošanas formas

$$\boldsymbol{z = a + bi}, \qquad \textbf{kur } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$$

Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma

$$\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Kompleksā skaitļa eksponentforma

$$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$$

Vienādojumu risināšana komplekso skaitļu kopā

$$\boldsymbol{x^2 - 2x + 2 = 0}$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} = 1 \pm i$$

Algebras pamatteorēma

Katram n-tās pakāpes polinomam ir tieši n saknes.

Vienādojumu risināšana komplekso skaitļu kopā

$$\boldsymbol{x^3 - 8 = 0}$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$D = 4 - 16 = -12$$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$
$$= -1 \pm \sqrt{3}i$$

Vienādojumu risināšana komplekso skaitļu kopā

$$\boldsymbol{x^4 - 1 = 0}$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Vienādojumu risināšana komplekso skaitļu kopā

$$\boldsymbol{x^4 + 4 = 0}$$

$$(x^2)^2 + 2^2 = 0$$

$$(x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_{3,4} = -1 \pm i$$

Vienādojumu risināšana komplekso skaitļu kopā

Ja algebriskam vienādojumam ar reāliem koeficientiem ir sakne $a + bi$, tad noteikti būs arī sakne $a - bi$.

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

SASKAITĪŠANA

$$z_1 = a_1 + b_1 i; \;\; z_2 = a_2 + b_2 i;$$

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

Piemēram,

$$z_1 = -3 - 2i; \;\; z_2 = 4 - 5i$$

$$z_1 + z_2 =$$

$$= -3 + 4 + (-2 - 5)i =$$

$$= 1 - 7i$$

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

ATŅEMŠANA

$$z_1 = a_1 + b_1 i; \;\; z_2 = a_2 + b_2 i;$$

$$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

Piemēram,

$$z_1 = -3 - 2i; \;\; z_2 = 4 - 5i$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$= -3 - 4 + (-2 - (-5))i =$$

$$= -7 + 3i$$

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

REIZINĀŠANA

$$z_1 = a_1 + b_1 i; \;\; z_2 = a_2 + b_2 i;$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i}$$

Piemēram,

$$z_1 = -3 - 2i; \;\; z_2 = 4 - 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$= \big(-3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-5)\big) +$$

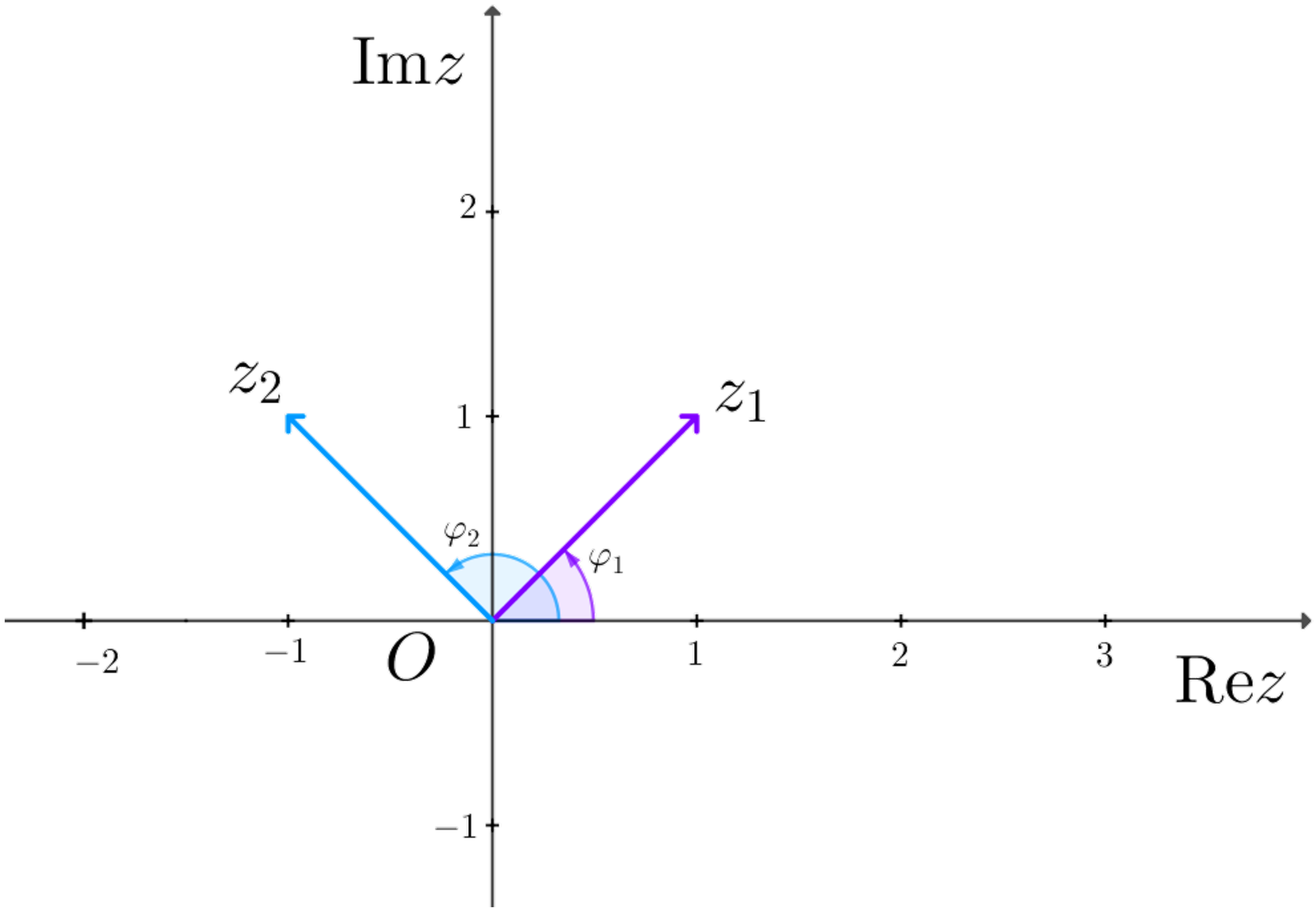
$$+(-3 \cdot (-5) + (-2) \cdot 4) i =$$

$$= (-12 - 10) + (15 - 8) i = -22 + 7i$$

Reizināšana kā rotācija

Sareizini kompleksos skaitļus $z_1 = 1 + i; \ \ z_2 = -1 + i$

Attēlosim tos plaknē



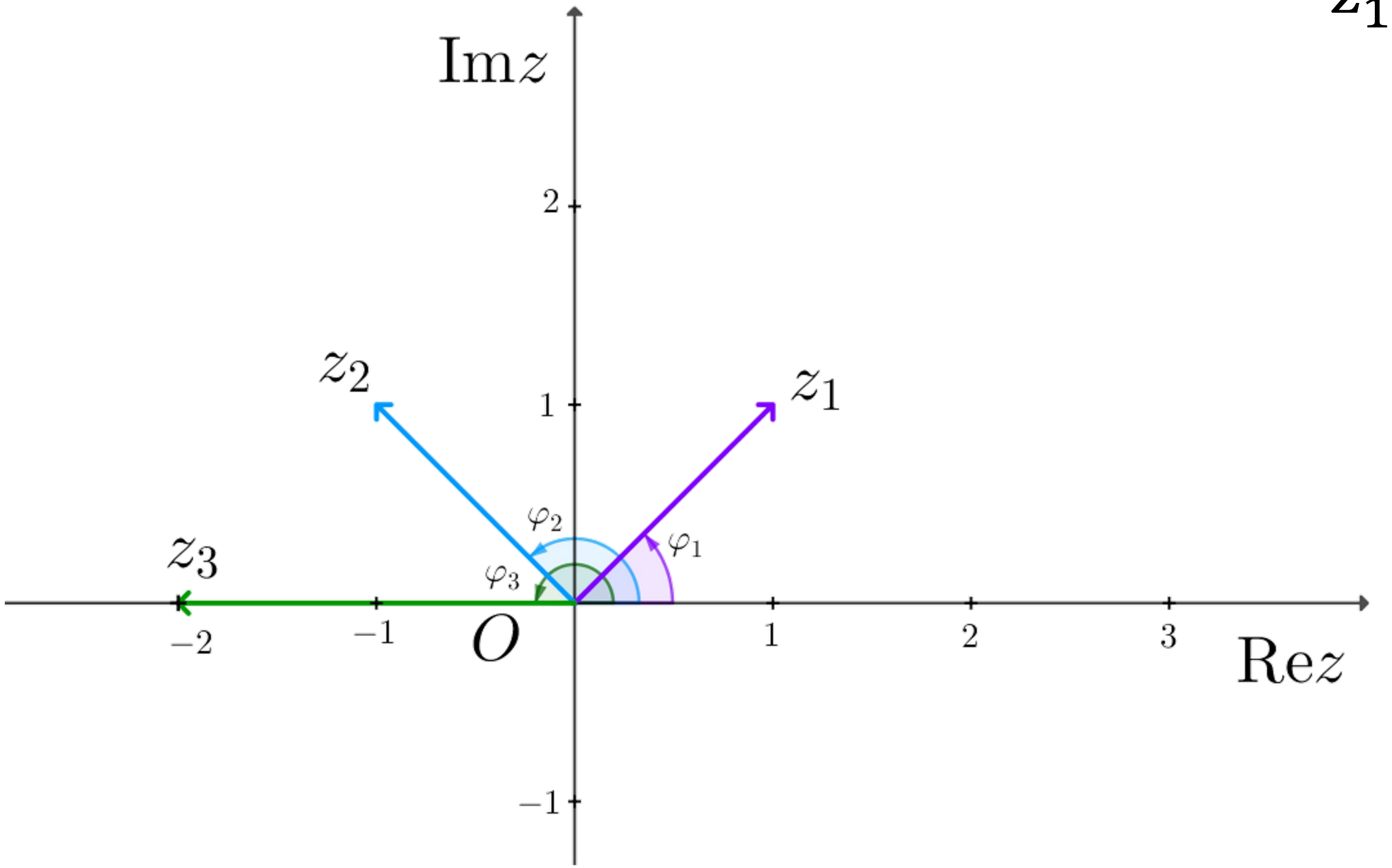
$$r_1 = \sqrt{2} \qquad r_2 = \sqrt{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Reizināšana kā rotācija

Sareizini kompleksos skaitļus $z_1 = 1 + i;\ \ z_2 = -1 + i$



$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$= 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i + \frac{3\pi}{4}i}$$

$$= 2 \cdot e^{\pi i}$$

$$r_3 = 2 \qquad \varphi_4 = \pi$$

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

Imaginārās vienības naturālās pakāpes

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

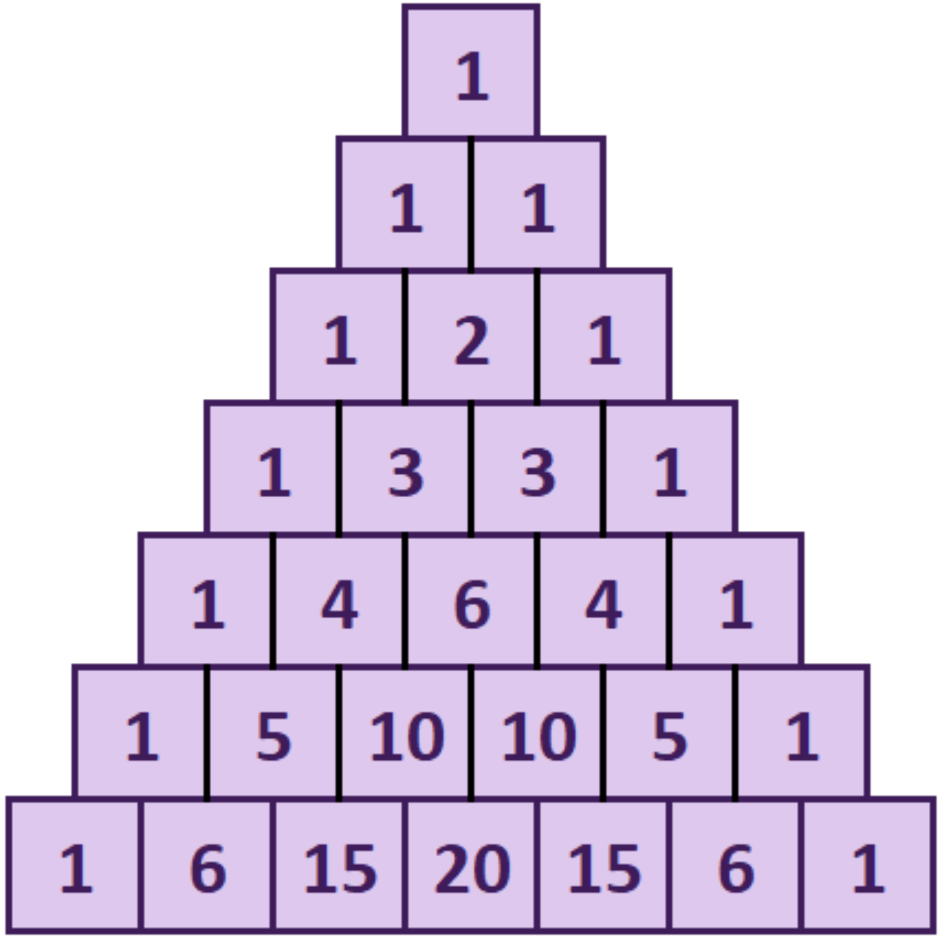
$$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i$$

$$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i$$

Kāpināšana naturālā pakāpē

$$(x+y)^6 =$$



Kompleksā skaitļa kāpināšana naturālā pakāpē

$$\boldsymbol{z = 1 + 2i}$$

$$z^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i + (2i)^2 = -3 + 4i$$

$$z^3 = (1 + 2i)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 =$$

$$= 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$$

Aprēķini $\boldsymbol{z^4}$ un $\boldsymbol{z^5}$:

$$z^4 = (1 + 2i)^4 = -7 - 24i$$

$$z^5 = (1 + 2i)^5 = 41 - 38i$$

Darbības ar kompleksiem skaitļiem

DALĪŠANA

$$z_1 = a_1 + b_1 i;\ \ z_2 = a_2 + b_2 i;$$

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}}$$

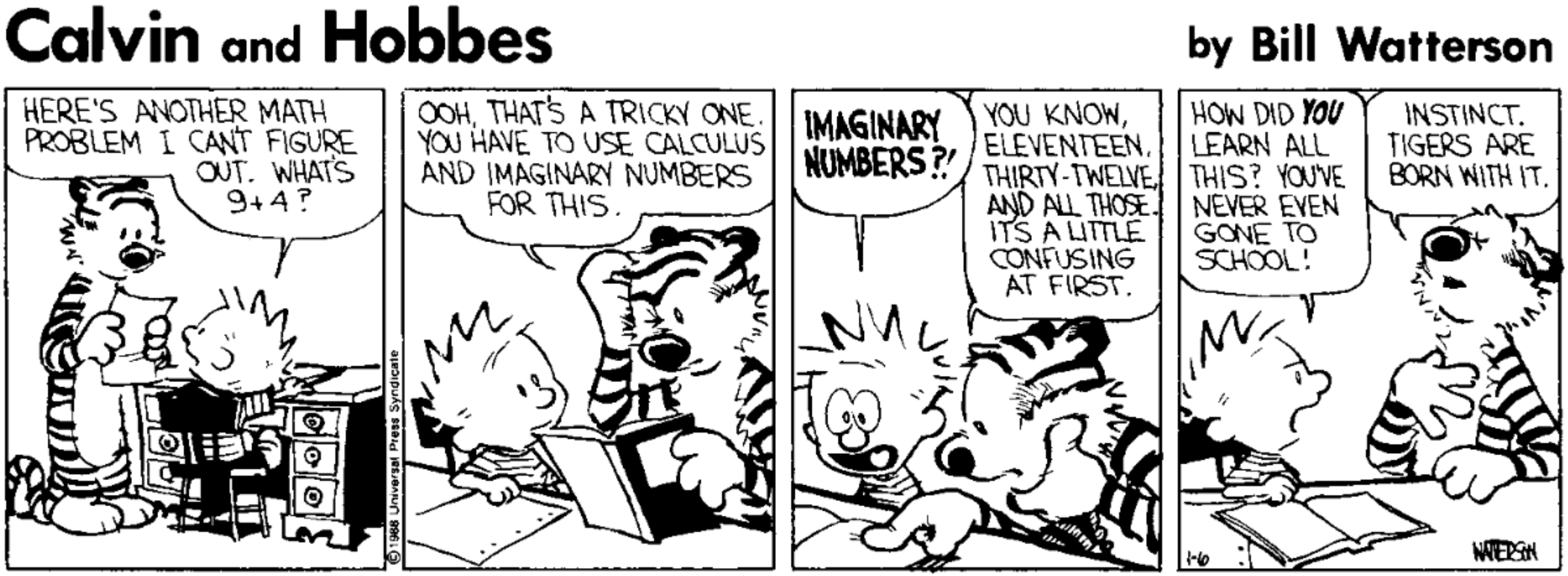
Piemēram,

$$z_1 = -3 - 2i;\ \ z_2 = 4 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 - 2i}{4 - 5i} = \frac{(-3 - 2i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} =$$

$$= \frac{(-3 - 2i)(4 + 5i)}{4^2 - (5i)^2} = \frac{-12 - 15i - 8i - 10i^2}{16 - 25 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{-12 - 23i + 10}{16 + 25} = \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41} i$$



Literatūra:

Paul J. Nahin, ***An Imaginary Tale The Story of $\sqrt{-1}$***, 1998, USA

Eilera vienādība

$$e^{i\pi} = -1$$

Vai var aprēķināt kvadrātsakni no negatīva skaitļa?

LU doktorante

Elīna Buliņa