APVILKTI UN IEVILKTI ČETRSTŪRI

Guna Brenda Einberga, 16.12.2023.

10.-12. klasei NOL nepieciešamās zināšanas

https://www.nms.lu.lv/olimpiades/valsts-olimpiade/

Latvijas valsts mācību priekšmetu olimpiādes visos tās posmos reglamentē VISC izdots rīkojums "Par mācību priekšmetu olimpiāžu organizēšanu un norisi", kas tiek atjaunots katru gadu.

Matemātikas olimpiāžu uzdevumu sastādīšanā tiks izmantoti VISC mājas lapā publicētie mācību priekšmetu programmu paraugi un tur piedāvātā tematu secība. Sīkāk skat. šeit (programma atjaunota 2. decembrī).

Olimpiādes posms	Datums	Uzdevumi, atrisinājumi, cita informācija
1. posms (Izglītības iestādes		Uzdevumus izstrādā izglītības iestādes olimpiādes rīcības komisija.

- Valsts olimpiāde
- Atklātā olimpiāde
- Starptautiskas sacensības
- Olimpiāžu rašanās vēsture

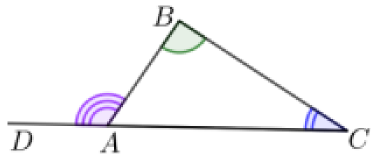
10.-12. klasei NOL nepieciešamās zināšanas

Ģeometrija

Šajā nodaļā uzskaitītas 10.-12. klasei Valsts matemātikas olimpiādes 2. un 3. posmam nepieciešamās ģeometrijas zināšanas, ko apgūst vidusskolā.

Trijstūri

Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis, tas ir, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$ (skat. 1. att.).



1. att.

Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

$$S_\Delta = \frac{ah_a}{2} = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kur a, b, c – trijstūra malas, γ – leņķis starp malām a un b, h_a – augstums, kas vilkts pret malu a, p – trijstūra pusperimetrs, r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Regulārs trijstūris. Ja regulāra trijstūra malas garums ir a, tad tā laukums $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, augstums $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ievilktās riņķa līnijas rādiuss $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, apvilktās riņķa līnijas rādiuss $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

1

Leņķi riņķa līnijā

Centra un ievilktie leņķi

- Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka lielumu, uz

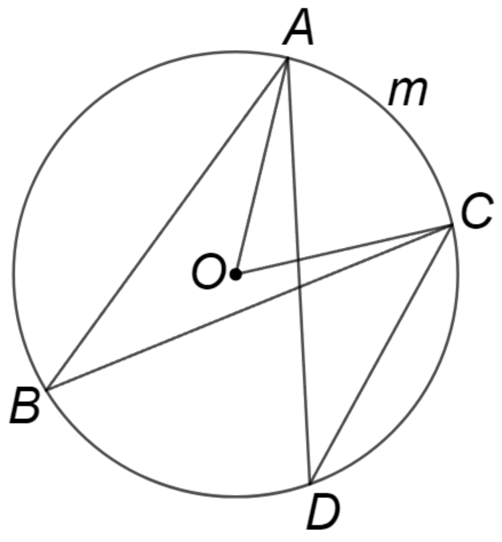
  kura tas balstās, leņķisko lielumu, tas ir, $\sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AmC}$.

- Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz

  kura tas balstās, leņķiskā lieluma, tas ir, $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmC}$.

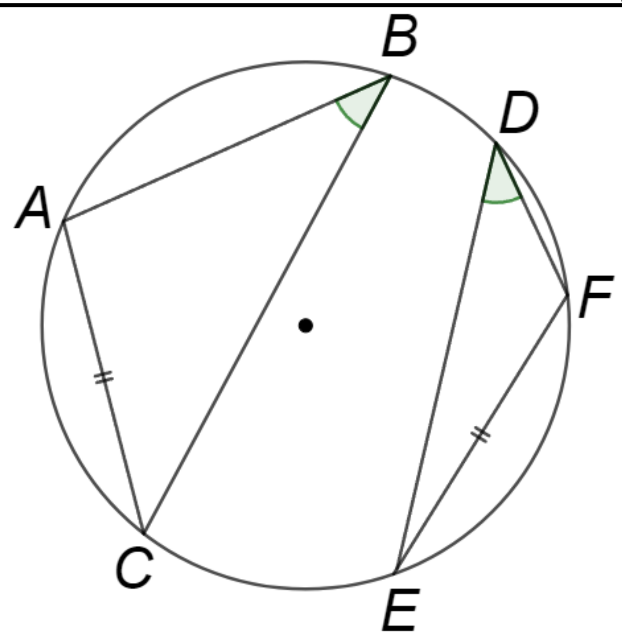
- **Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu**

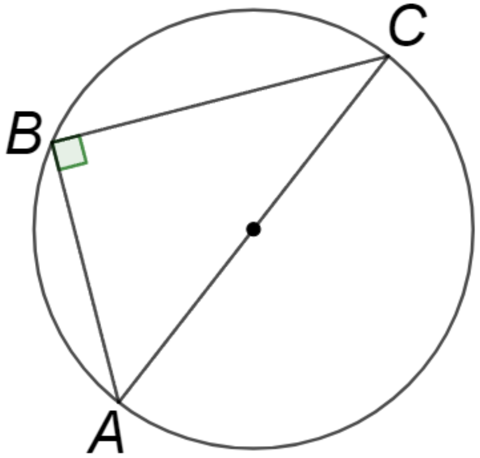
  loku, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.



Hordas un diametrs

- Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
- **Ievilkta leņķa, kas balstās uz diametra**, lielums ir 90°, un otrādi - ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametra.



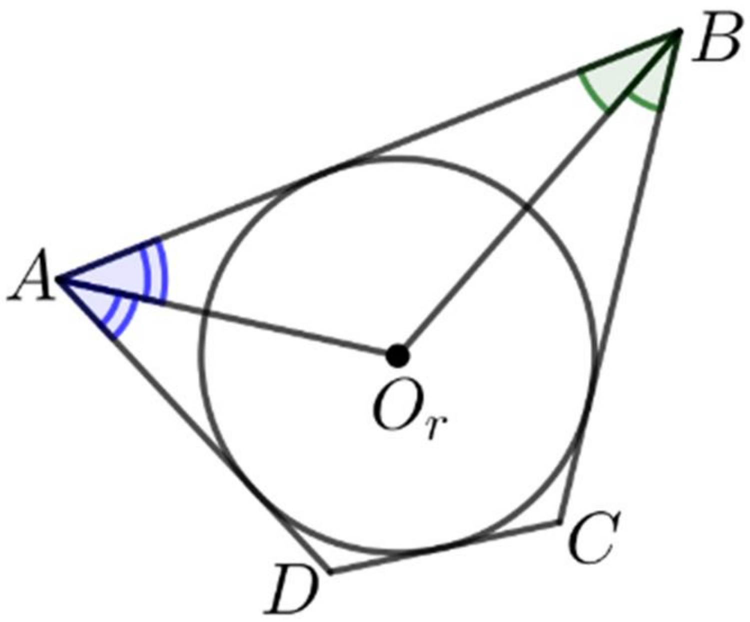


Apvilkts četrstūris

2

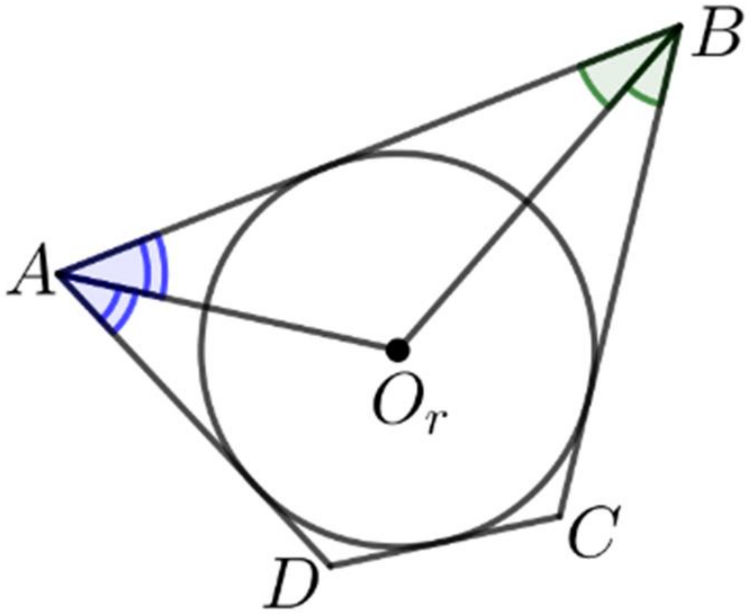
Apvilkts četrstūris

- Par **riņķa līnijai apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai.
- Saka arī: četrstūrī ievilkta riņķa līnija.
- Ievilktās riņķa līnijas **centrs** atrodas četrstūra leņķu **bisektrišu krustpunktā**.



Īpašība un pazīme

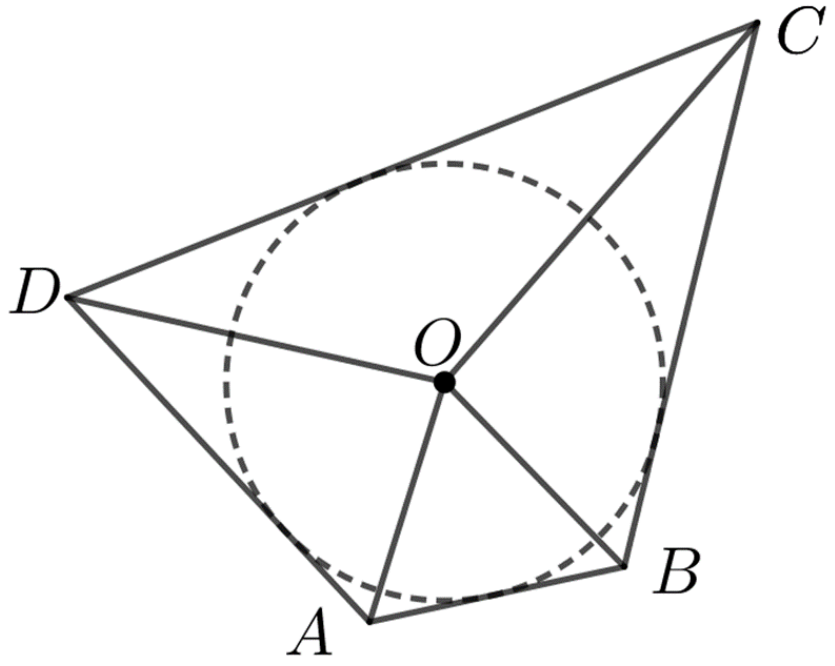
- **Izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju** tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas vienādas, tas ir, $AB + CD = AD + BC$.
- Bieži izdevīgi novilkt rādiusus pret pieskaršanās punktiem, jo tie veido 90° ar pieskarēm.



1. uzdevums

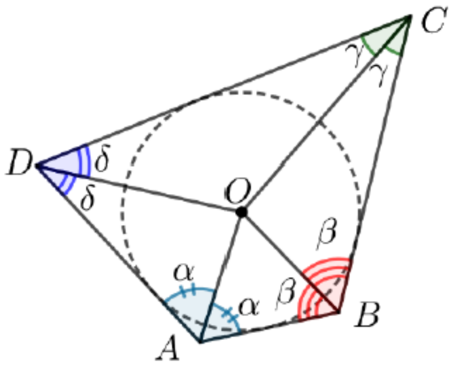
Četrstūrī $ABCD$ ievilkta riņķa līnija ar centru O. Pierādīt, ka

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180°.$$



1. uzdevums

Atrisinājums. Tā kā O ir bisektrišu krustpunkts, tad apzīmējam $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OAB = \alpha$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC = \beta$, $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCD = \gamma$ un $\sphericalangle ODC = \sphericalangle ODA = \delta$ (skat. 1. att.).



1. attēls

Ievērojam, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° : 2 = 180°$.

Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, aprēķinām leņķus:

- $\sphericalangle AOB = 180° - \alpha - \beta$;
- $\sphericalangle BOC = 180° - \beta - \gamma$;
- $\sphericalangle COD = 180° - \gamma - \delta$;
- $\sphericalangle AOD = 180° - \alpha - \delta$.

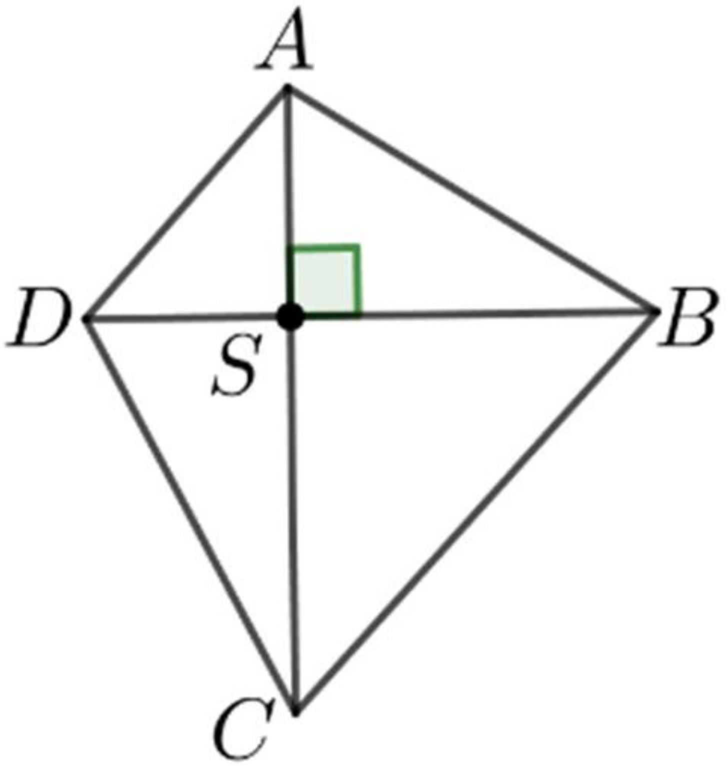
Līdz ar to iegūstam, ka

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180° - \alpha - \beta + 180° - \gamma - \delta = 360° - 180° = 180°;$$

$$\sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180° - \beta - \gamma + 180° - \alpha - \delta = 360° - 180° = 180°.$$

2. uzdevums

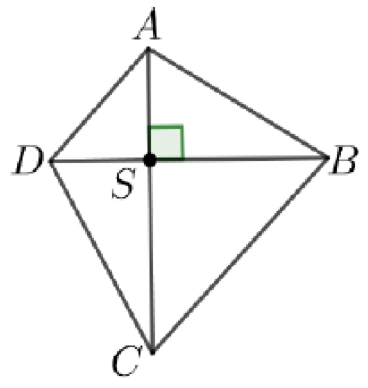
Apvilkta četrstūra $ABCD$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.



2. uzdevums

Atrisinājums. Četrstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu apzīmējam ar S (skat. 2. att.). No Pitagora teorēmas izriet, ka

$$AB^2 = SA^2 + SB^2;$$
$$CD^2 = SC^2 + SD^2;$$
$$AD^2 = SA^2 + SD^2;$$
$$BC^2 = SB^2 + SC^2.$$



2. attēls

Saskaitot pirmās divas vienādības un pēdējās divas vienādības, iegūstam

$$AB^2 + CD^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2;$$

$$AD^2 + BC^2 = SA^2 + SD^2 + SB^2 + SC^2.$$

Tātad $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Tā kā $ABCD$ ir apvilkts četrstūris, tad $AB + CD = AD + BC$. Kāpinām vienādības abas puses kvadrātā:

$$AB^2 + 2AB \cdot CD + CD^2 = AD^2 + 2AD \cdot BC + BC^2.$$

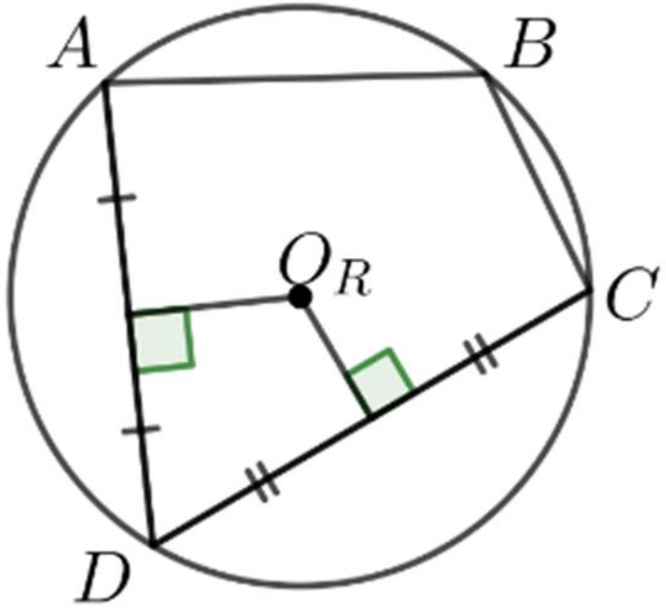
Ņemot vērā vienādību $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, iegūstam, ka $2AB \cdot CD = 2AD \cdot BC$ jeb $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

3

Ievilkts četrstūris

Ievilkts četrstūris

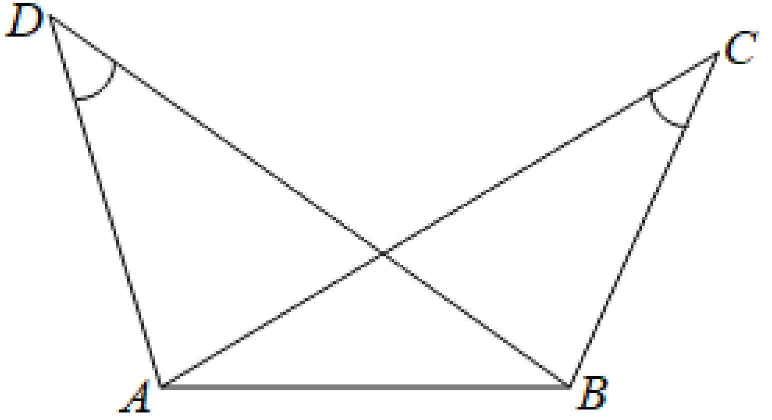
- Par **riņķa līnijā ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.
- Saka arī: četrstūrim apvilkta riņķa līnija.
- Apvilktās riņķa līnijas **centrs** atrodas četrstūra malu **vidusperpendikulu krustpunktā**.
- Bieži izdevīgi novilkt rādiusus, jo tie veido vienādsānu trijstūrus.

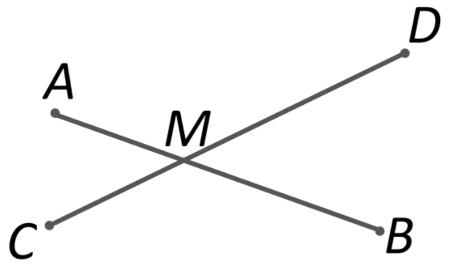


Īpašības un pazīmes

Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja

- četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°;
- izpildās vienādība $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$;
- ir spēkā vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (Ptolemaja teorēma);
- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AB un CD krustpunkts.



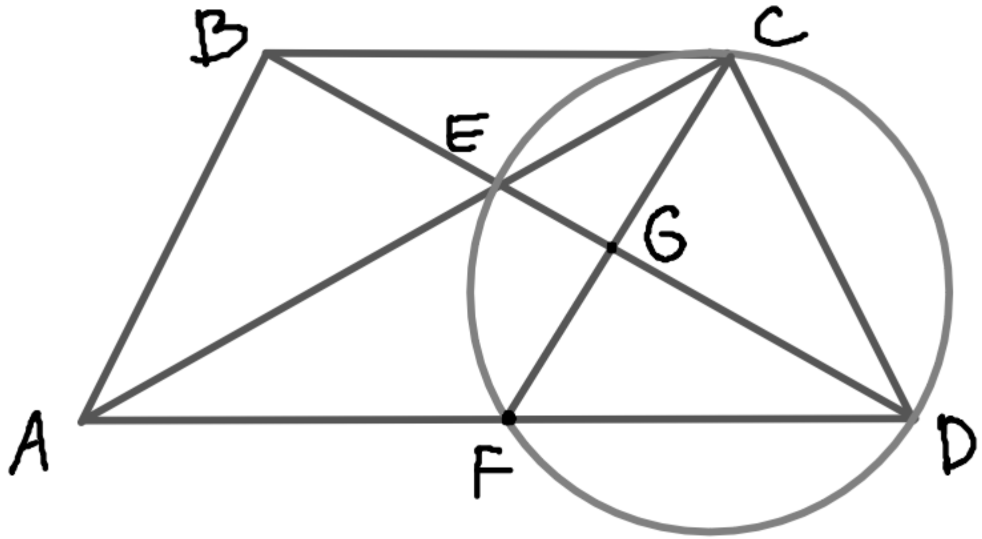


Pārējo uzdevumu atrisinājumus meklē NMS mājaslapā 2023./2024. m. g. Valsts olimpiādes teorijas materiālā

Olimpiādes posms	Datums	Uzdevumi, atrisinājumi, cita informācija
1. posms (Izglītības iestādes olimpiāde)		Uzdevumus izstrādā izglītības iestādes olimpiādes rīcības komisija.
2. posms 5.–8. klasei (Novada olimpiāde)	08.03.2024.	
2. posms 9.–12. klasei (Novada olimpiāde)	02.02.2024.	Teorijas materiāls tiks publicēts decembrī.

3. uzdevums

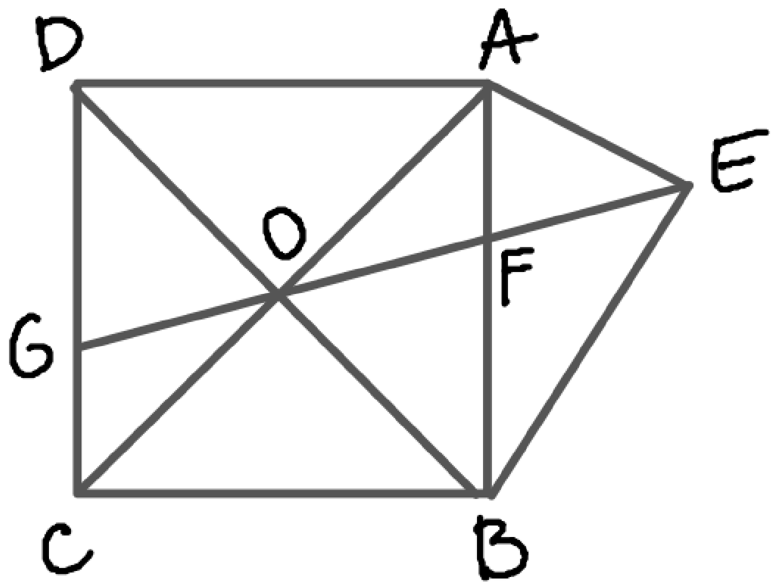
Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, bet diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri CDE apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu AD iekšējā punktā F. Nogriežņu CF un BD krustpunkts ir G. Nosaki $\sphericalangle CGD$ lielumu, ja $\sphericalangle CAD = \alpha$!



4. uzdevums

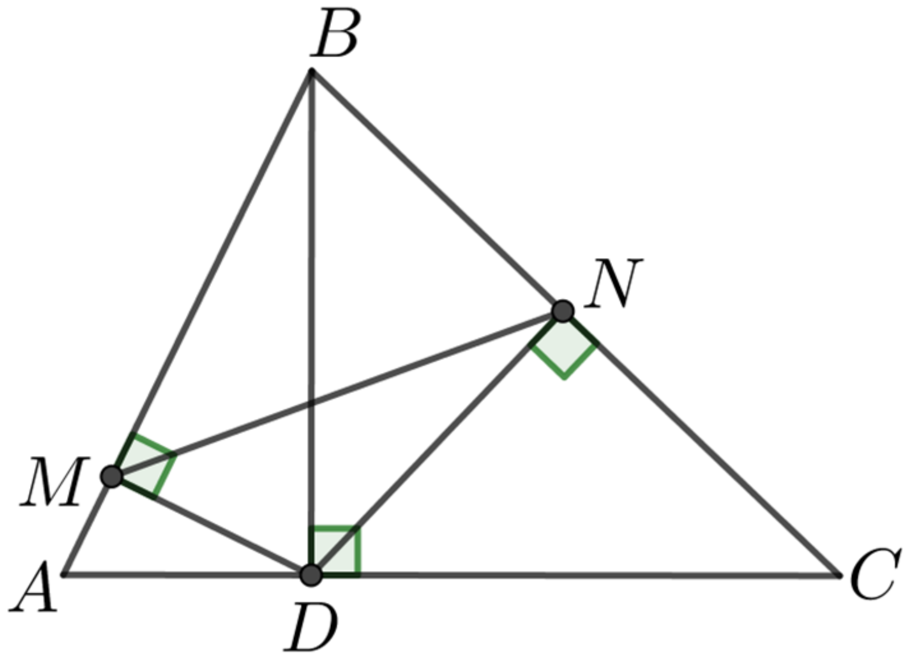
Uz kvadrāta $ABCD$ malas AB kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris AEB. Taisne, kas vilkta no E caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu O, krusto kvadrāta malu AB punktā F un malu DC – punktā G. Zināms, ka $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OCG$.

Pierādīt, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa!



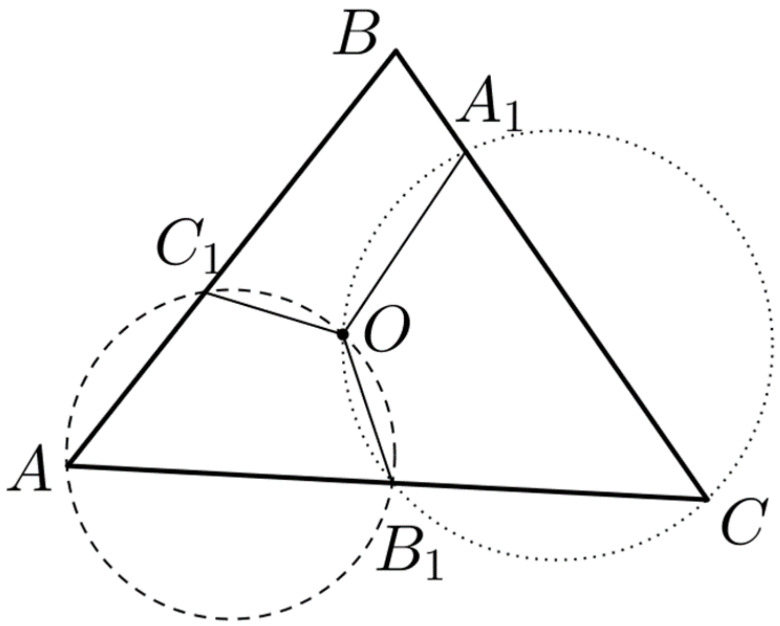
5. uzdevums

Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas!



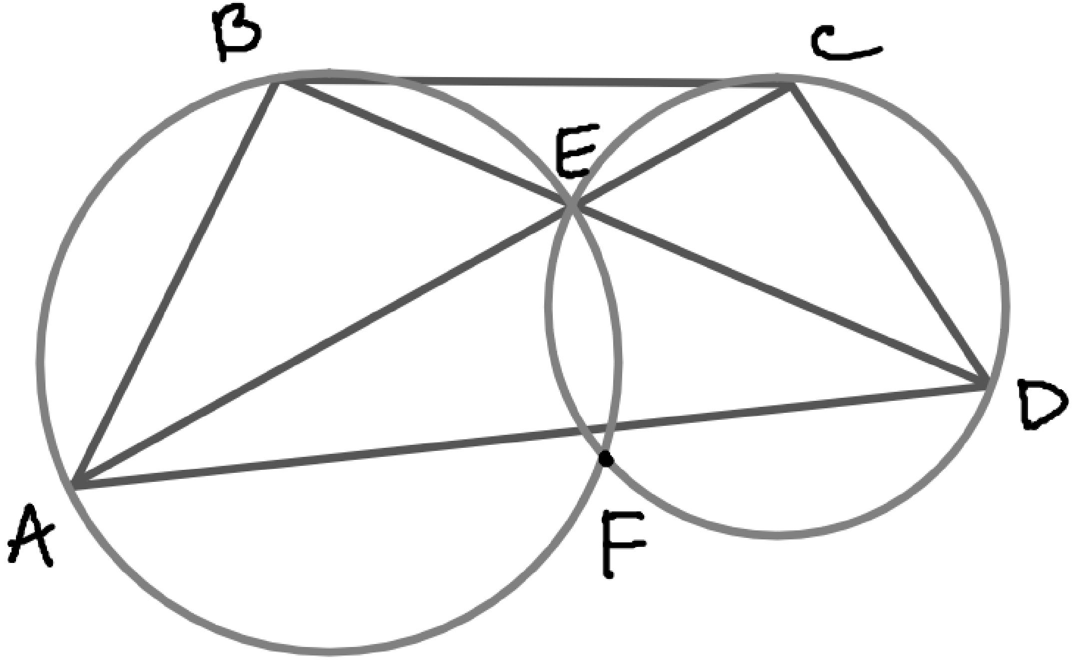
6. uzdevums

Trijstūrī ABC punkts A_1 ir malas BC iekšējs punkts, B_1 ir malas AC iekšējs punkts, C_1 ir malas AB iekšējs punkts. Ap trijstūriem AB_1C_1, CB_1A_1, BA_1C_1 apvilktas riņķa līnijas. Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā!



7. uzdevums

Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas arī krustojas punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi.

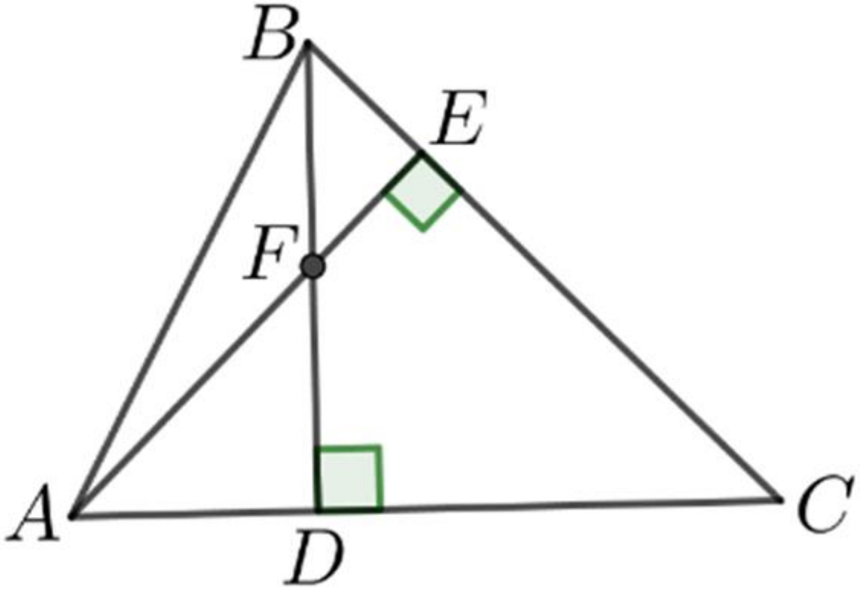


4

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

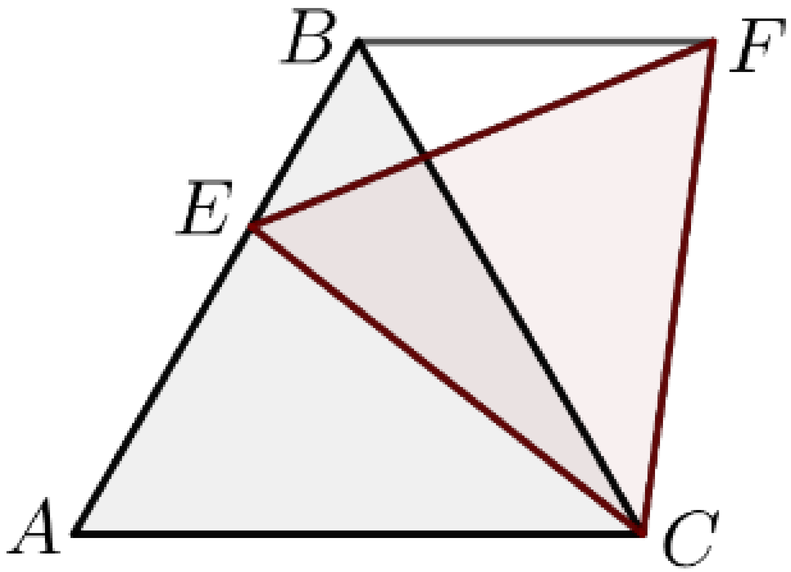
8. uzdevums

Šaurleņķu trijstūrī ABC novilktie augstumi BD un AE krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.



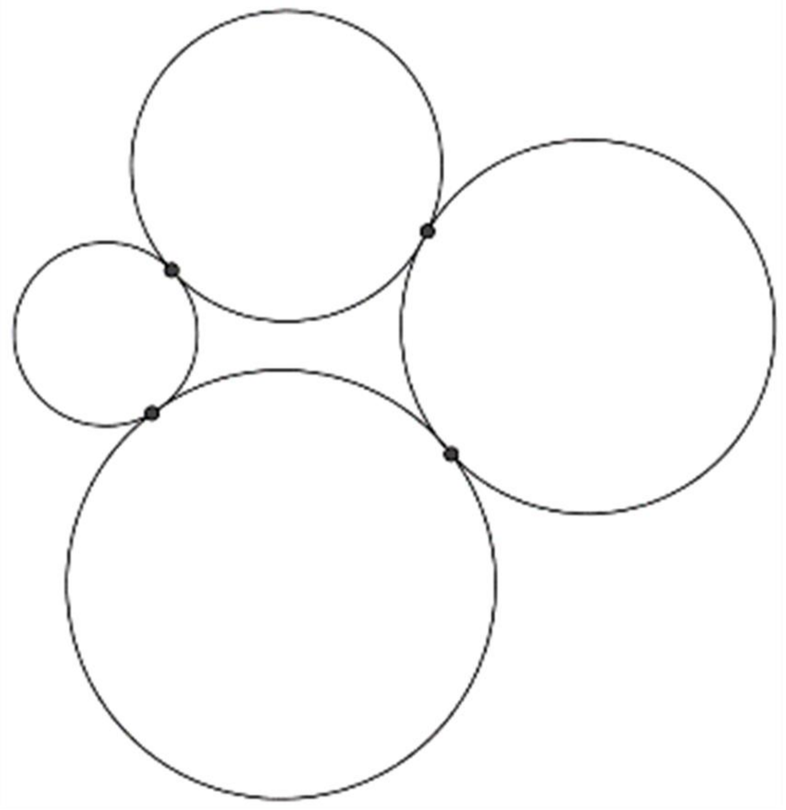
9. uzdevums

Trijstūri ABC un CEF ir vienādmalu trijstūri (skat. attēlu). Pierādīt, ka $BF||AC$.



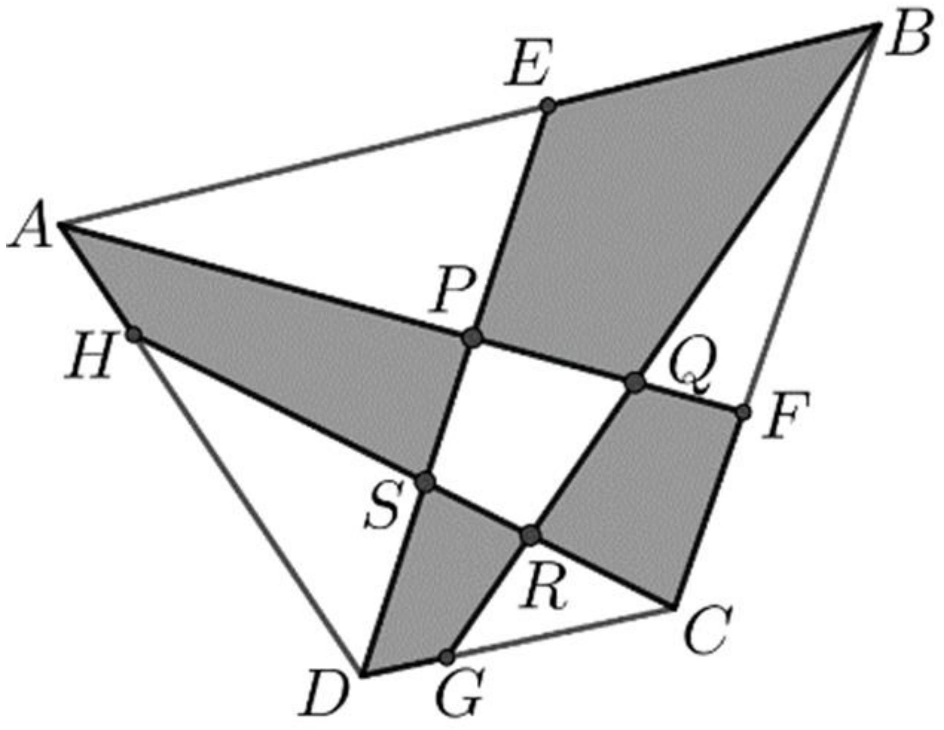
10. uzdevums

Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts attēlā. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju.



11. uzdevums

Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. attēlu). Vai iespējams ap katru iekrāsoto četrstūri apvilkt riņķa līniju?



Lai izdodas olimpiādē un ģeometrijas stundās!