Senioru IMO treniņš 2

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Kopā ir 8 uzdevumi, pa 2 no katras nozares (ğeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz (sestdienai) 23.05. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

1. uzdevums. Dotas divas bezgalīgas veselu skaitļu virknes $(a_n)_{n\geq 0}$ un $(b_n)_{n\geq 0}$, kas definētas ar $a_0 = b_0 = 2$, $a_1 = b_1 = 14$ un

$$a_n = 14a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$

katram $n \geq 2$. Pierādīt vai apgāzt apgalvojumu: eksistē bezgalīgi daudz veselu skaitļu, kas sastopamas abās virknēs.

2. uzdevums. Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Trijstūra ACI apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC otro reizi punktā X un trijstūra BCI apvilktā riņķa līnija krusto taisni AC otro reizi punktā Y. Pierādīt, ka $AY = BX$.

3. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Alise un Bobs spēlē spēli ar atlikumiem pēc moduļa n. Pašā sākumā uz lapas ir uzrakstīts atlikums 1. Ar vienu gājienu spēlētājs var nosvītrot skaitli x, kas uzrakstīts uz lapiņas, un tā vietā uzrakstīt vai nu atlikumu $x+1$, vai nu $2x$. Spēlētāji alternē gājienus, sāk Alise.

Alise vinnē, ja uz lapiņas tiek uzrakstīts atlikums 0. Bobs vinnē, ja viņš var vienmēr novērst šādu iznākumu.

Nosakiet katrai n vērtībai, kurš spēlētājs uzvar, ja abi spēlētāji spēlē optimāli.

4. uzdevums. Atrast visus reālo skaitļu pārus (a, b), kuriem ir spēkā

$$a \cdot \lfloor b \cdot n \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot n \rfloor$$

visiem naturāliem n.

5. uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām ir spēkā

$$f(2x + f(y)) = x + y + f(x)$$

visiem $x, y \in \mathbb{R}$.

6. uzdevums. Nepārzemē ir pastmarkas ar vērtībām 1 cents, 3 centi, 5 centi utt., katram nepāra naturālam skaitlim. Pēc Nepārzemes Pasta noteikumiem uz vienas vēstules pastmarku skaits ar lielāku vērtību nevar pārsniegt pastmarku skaitu ar mazāku vērtību.

Savukārt Kvadrātzemē pastmarku vērtības ir 1 cents, 4 centi, 9 centi utt., katram naturāla skaitļa kvadrātam. Kvadrātzemē pastmarkas var tikt saliktas uz vēstules jebkādā komplektā, bez papildus nosacījumiem.

Pierādīt, ka katram naturālam n gan Nepārzemē, gan Kvadrātzemē ir vienāds dažādu pastmarku komplektu skaits ar kopējo vērtību n. Pastmarku izkārtojumam uz vēstules nav nozīmes.

7. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrī ABC nogriežņi AD un BE ir augstumi. Punkti F un G atrodas uz nogriežņiem AD un BE, attiecīgi, un

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE}.$$

Taisne CF krusto BE punktā H un taisne CG krusto AD punktā I. Pierādīt, ka punkti F, G, H un I atrodas uz vienas riņķa līnijas.

8. uzdevums. Noteikt mazāko naturālo skaitli n tādu, kuram visiem naturāliem x, y un z ar $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ un $z \mid x^3$ izpildās $xyz \mid (x + y + z)^n$.