Senioru IMO treniņš 1

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Kopā ir 8 uzdevumi, pa 2 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz (sestdienai) 09.05. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

1. uzdevums. Kādā skolā katrā klasē ir nepāra skolēnu skaits. Katram skolēnam skolā ir tieši viens labākais draugs (kas var būt arī citā klasē). Katrs skolēns ir sava labāka drauga labākais draugs. Brīvdienās tiek organizēti divi braucieni, uz Romu un uz Parīzi. Katrs skolēns brauc tieši vienā no šīm pilsētām. Pierādīt, ka visus skolēnus var sadalīt divās grupās tā, lai

(i) katrs skolēns brauktu uz to pašu pilsētu, kā viņa labākais draugs;

(ii) katrai klasei absolūtā starpība starp skolēniem, kas brauc uz Romu un uz Parīzi ir tieši 1.

2. uzdevums. Atrast visus pozitīvu reālu skaitļu četriniekus (a,b,c,d), kuriem spēkā $a+b+c+d=1$ un

$$\max\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)\cdot\max\left(\frac{c^2}{d},\frac{d^2}{c}\right)=(\min(a+b,c+d))^4.$$

3. uzdevums. Dots šaurleņķa trijstūris ABC ar apvilktās riņķa līnijas centru O. Punkts Q atrodas uz trijstūra BOC apvilktās riņķa līnijas un OQ ir šīs riņķa līnijas diametrs. Punkts M atrodas uz CQ un punkts N atrodas nogriežņa BC iekšienē, pie tam $ANCM$ ir paralelograms. Pierādīt, ka trijstūra BOC apvilktā riņķa līnija un taisnes AQ un NM krustojas vienā punktā.

4. uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kas apmierina

(i) $f(p) > 0$ visiem pirmskaitļiem p,

(ii) $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ visiem $x \in \mathbb{Z}$ un visiem pirmskaitļiem p.

5. uzdevums. Trijstūrī ABC punkts I ir ievilktās riņķa līnijas centrs. Taisne, kas ir perpendikulāra AI un iet caur I, krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktos P un Q, pie tam P un B atrodas vienā pusē no AI. Trijstūru BIP un CIQ apvilktās riņķa līnijas krustojas vēlreiz punktā S. Pierādīt, ka SI ir $\angle PSQ$ bisektrise.

6. uzdevums. Dots, ka x un y ir pozitīvi reāli skaitļi. Pierādīt, ka

(1) ja $x^3 - y^3 \geq 4x$, tad $x^2 \geq 2y$;

(2) ja $x^5 - y^3 \geq 2x$, tad $x^3 \geq 2y$.

7. uzdevums. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis k un nekonstanta naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ka $a_n = \gcd(a_{n+k}, a_{n+k+1})$ visiem naturāliem n?

8. uzdevums. Kādā valstī ir 2018 pilsētas, dažas no kuriem ir savienotas ar ceļiem. Katra pilsēta ir savienota ar vismaz 3 citām pilsētām. No katras pilsētas ir iespējams nonākt uz jebkuru citu pilsētu pa šiem ceļiem. Aplūkojam īsākos maršrutus starp visiem pilsētu pāriem un izvēlāmies visgarāko. Kāds ir lielākais iespējamais šī maršruta garums? (Maršruta garums ir kopējais ceļu skaits šajā maršrutā.)