1 Virknes robeža

Par virknes $a_1, a_2, \ldots$ robežu sauc skaitli a, ja n tiecoties uz bezgalību, a_n ar vien mazāk atšķiras no a. To pieraksta, kā

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Formāla virknes robežas definīcija ir šāda:

Definīcija 1 *Virknes $a_1, a_2, \ldots$ robeža ir a ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$), ja visiem $\varepsilon > 0$ var atrast tādu N, ka visiem $n > N$ izpildās $|a - a_n| < \varepsilon$.*

Šo formālo definīciju var interpretēt šādi - lai cik mazu ε mēs arī neizvēlētos, visi virknes locekļi, sākot no N-tā, atšķirsies no a ne vairāk kā par ε.

Piemēri

- Virknes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ robeža ir 0, jeb $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- Virknes $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ robeža ir 1, jeb $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
- Virknei $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ robeža neeksistē.
- Virknei $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ robeža neeksistē.

Uzdevumi Atrast robežu virknei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ t.i. aprēķināt $\lim_{n\to\infty} a_n$ (ja robeža eksistē) šādām virknēm:

a) $a_n = \frac{1}{3^n}$ b) $a_n = 4n - 3$
c) $a_n = 3(0,3)^n$ d) $a_n = \frac{6}{n}\sin(n)$
e) $a_n = \cos(7 - n^2)$ f) $a_n = \mathrm{arctg}(n)$

Risināšanas piemērs (a):

Virknes $\{\frac{1}{3^n}\}$ robeža ir 0, pierādīsim to. Jāpierāda, ka visiem $\varepsilon > 0$ var atrast tādu N, ka visiem $n > N$ izpildās $|0 - \frac{1}{3^n}| < \varepsilon$. Mums dots ε, izvēlamies N tā, lai $N > \log_3(\frac{1}{\varepsilon})$, tad visiem $n > N$

$$|0 - \frac{1}{3^n}| < \frac{1}{3^N} < \frac{1}{3^{\log_3(\frac{1}{\varepsilon})}} = \varepsilon$$

Var pierādīt, ka, ja virknēm $\{a_n\}$ un $\{b_n\}$ eksistē robeža, tad

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$ (ja $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

Uzdevumi Atrast robežu virknei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ t.i. aprēķināt $\lim_{n\to\infty} a_n$ (ja robeža eksistē) šādām virknēm:

a) $a_n = \frac{2}{n} - \frac{4n-1}{n}$ b) $a_n = 3 * \frac{n+2}{n}$
c) $a_n = \frac{3n}{2n-5}$ d) $a_n = \frac{6+3n-6n^2}{2n^2-1}$
e) $a_n = \frac{(n+1)(n-3)}{4n^2-1}$

Risināšanas piemērs:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$