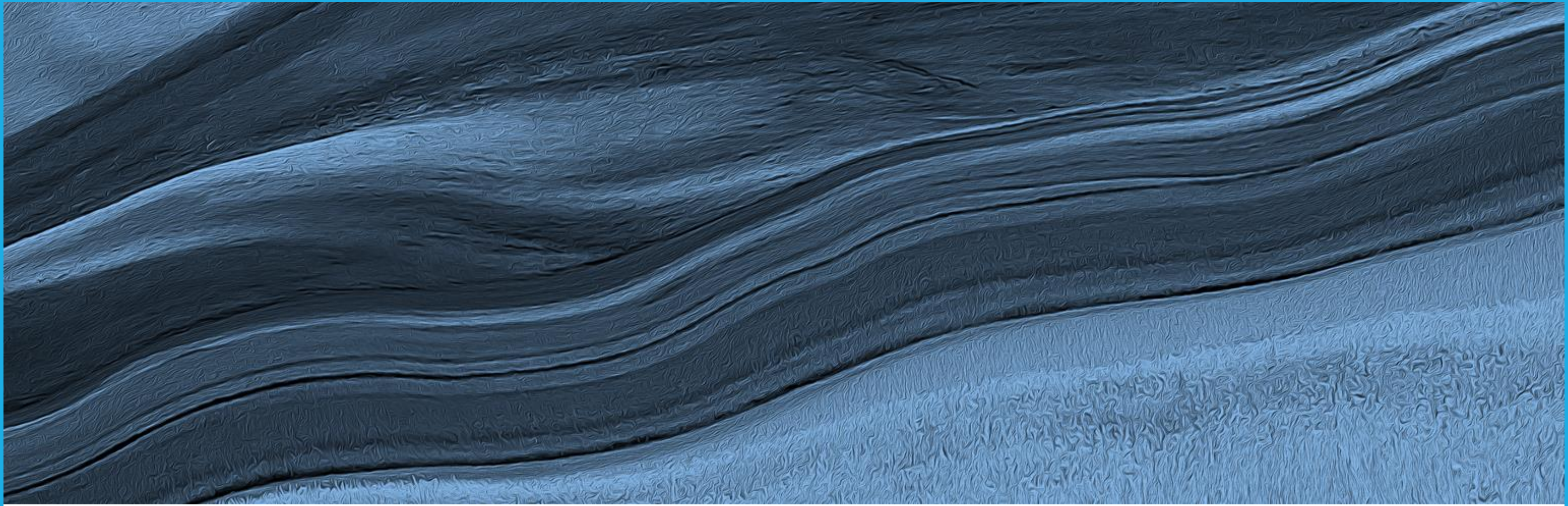


SKAITĻU TEORIJA SENIORIEM

27.02.2021.

Šodien:

Jādala viena izteiksme ar otru, jāmeklē lielākais kopīgais dalītājs

- Dalīšana stabiņā (reizēm ļoti līdzīga)
- Eiklīda algoritms

$$
\begin{array}{r|l}
1234 & 11 \\ \cline{2-2}
11 & 112 \\ \hline
13 & \\
11 & \\ \hline
24 & \\
22 & \\ \hline
2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2+3x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2 & x^2+x+2 \\ \hline
x^2+3x & \\
x^2+x & \\ \hline
2x+4 & \\
2x+2 & \\ \hline
2 &
\end{array}
$$

$$1234 = 112 \cdot 11 + 2, \qquad x^3+2x^2+3x+4 = (x^2+x+2)(x+1)+2.$$

Jāstrādā ar polinomiem

- Sadalīšana reizinātājos
- Saknes

Jāatrisina uzdevums, izmantojot Pella vienādojumu

- Bieži ir «īsā ceļa» risinājumus

PAMATDARBĪBAS

Polinomu dalīšana stabiņā

$$4x^3 + 2x - 11 \;\big|\; x + 5$$

$$4x^3 + 20x^2 \qquad 4x^2 - 20x + 102$$

$$-20x^2 + 2x - 11$$

$$-20x^2 - 100x$$

$$102x - 11$$

$$102x + 510$$

$$-521$$

$$10x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 2x + 5 \;\big|\; 5x^2 - x + 2$$

$$10x^5 - 2x^4 + 4x^3 \qquad 2x^3 + x^2 - 3x$$

$$5x^4 - 16x^3 + 25x^2 - 2x + 5$$

$$5x^4 - x^3 + 2x^2$$

$$-15x^3 + 23x^2 - 2x + 5$$

$$-15x^3 + 3x^2 - 6x$$

$$20x^2 + 4x + 5$$

WolframAlpha

Eiklīda algoritms

$$
\begin{array}{l|l}
20202021 & 1103 \\
\underline{1103} & 18316 \\
\;\;9172021 & \\
\;\;\underline{8824} & \\
\;\;\;\;348021 & \\
\;\;\;\;\underline{3309} & \\
\;\;\;\;\;\;18021 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{1103} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;6991 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{6618} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;373 \leftarrow \textit{atlikums} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1103 & 373 \\
\underline{746} & 21 \\
\;\;389 & \\
\;\;\underline{373} & \\
\;\;\;\;16 \leftarrow \textit{atlikums} &
\end{array}
$$

$$\gcd(20202021,\quad 1103)$$

$$\gcd(20202021,\quad 1103) = \gcd(373,\quad 1103)$$

$$\gcd(373,\quad 1103) = \gcd\Bigg(\underbrace{373}_{\textit{nedalās ar 2}},\quad \underbrace{16}_{\textit{divnieka pakāpe}}\Bigg) = 1$$

Eiklīds

Eiklīda algoritms

$$
\begin{array}{l|l}
10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5 & 5x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
10x^5-2x^4+4x^3 & 2x^3+x^2-3x+4 \\ \hline
\quad 5x^4-16x^3+25x^2-2x+5 & \\
\quad 5x^4-x^3 \quad +2x^2 & \\ \hline
\quad\quad -15x^3+23x^2-2x+5 & \\
\quad\quad -15x^3+3x^2 \quad -6x & \\ \hline
\quad\quad\quad 20x^2+4x+5 & \\
\quad\quad\quad 20x^2-4x+8 & \\ \hline
\quad\quad\quad\quad 8x-3 \leftarrow \textit{atlikums} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
40x^2-8x+16 & 8x-3 \\ \cline{2-2}
40x^2-15x & 5x \\ \hline
\quad 7x+16 \leftarrow \textit{atlikums} &
\end{array}
$$

Eiklīds

$$\gcd\left(10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5,\quad 5x^2-x+2\right)$$

$$\gcd\left(10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5,\quad 5x^2-x+2\right)=\gcd\left(8x-3,\quad 5x^2-x+2\right)=$$
$$=\gcd\left(\underbrace{8x-3}_{\textit{nedalās ar } 8},\quad 40x^2-8x+16\right)$$

$$\gcd\left(8x-3,\quad 40x^2-8x+16\right)=\gcd\left(8x-3,\quad 7x+16\right)=\gcd\left(8x-3-(7x+16),\quad 7x+16\right)=$$
$$\gcd\left(x-19,\quad \underbrace{7x-16}_{\textit{nedalās ar } 7}\right)=\gcd\left(7x-133,\quad 7x+16\right)=\gcd\left(-149,\quad 7x+16\right)=$$
$$=\gcd\left(\underbrace{149}_{\textit{pirmskaitlis}},\ 7x+16\right)\Rightarrow \boxed{\text{LKD ir vai nu 1, vai nu 149}}$$

Uzdevums

Vai skaitlis $x^9 + 2x^7 – 4x^5 – 8x^3 + x^2 + 2$ var būt naturāla skaitļa kvadrāts kādam veselam x?

POLINOMI AR VESELIEM KOEFICIENTIEM

Starp naturāliem skaitļiem daudzi ir tādi, kas dalās tikai ar 1 un ar sevi – tie saucās **pirmskaitļi**. Tie var būt bezgalīgi lieli.

Skaitļu teorijā mēs parasti strādājām ar veseliem, naturāliem un racionāliem skaitļiem.

Polinomu «pirmskaitļi» ir:

- binomi **$ax+b$** un
- tādi trinomi **ax^2+bx+c**, kuriem nav atrisinājumu reālos skaitļos.

Šiem «pirmskaitļiem» var arī nebūt veselo koeficientu – bet obligāti ir **reālie** koeficienti.

Tātad:

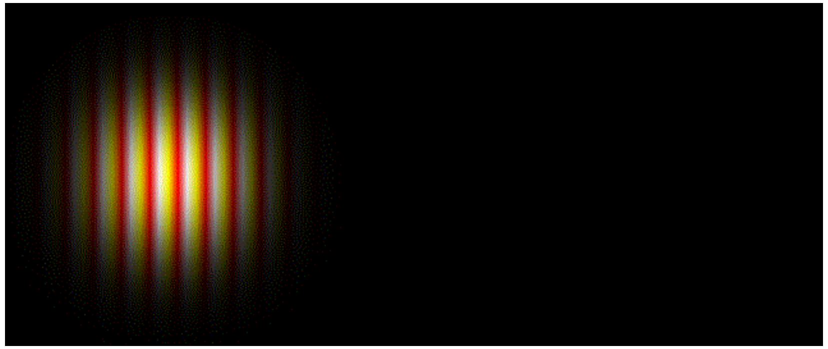
Jebkuru polinomu ar pakāpi vismaz 3 var sadalīt «reizinātājos» – mazākos polinomos (ar reāliem koeficientiem), kuru pakāpes ir vai nu 2, vai nu 1.

Polinomu sadalīšana «reizinātājos»

Veselu koeficientu polinomus, kurus var sadalīt veselu koeficientu polinomu reizinājumā, sauc par **reducējamiem**.

Bieži olimpiādes noder paņēmiens pierādīt, ka polinoms ir **nereducējams**. Šim nolūkam var izmantot dažādus kritērijus, kurus tūlīt apskatīsim.

Polinoma «duālā daba»



Ja ***n***-tās pakāpes polinomam ar veseliem koeficientiem ir ***n*** veselas saknes, tad to var sadalīt reizinātājos:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Eizenšteina kritērijs

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Pieņemsim, ka dots polinoms ar veseliem koeficientiem,

un eksistē tāds pirmskaitlis ***p***, ka:

- $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ visi dalās ar ***p***;
- a_n nedalās ar ***p***;
- a_0 nedalās ar p^2;

Eizenšteins

Tad var secināt:

- Šo polinomu nevar sadalīt veselu koeficientu polinomu reizinājumā;
- Šim polinomam **nav racionālo sakņu**.

Eizenšteina kritērijs

Vai dotais polinoms ir reducējams?
Vai dotajam polinomam ir racionālas saknes?

- $5x^7 - 6x^6 + 3x^3 - 15x^2 - 75 =$
- $3x^3 + 4x - 6 =$
- $4x^4 + 1 =$
- $x^8 + 8x^4 - 20 =$
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$

Eizenšteins

Polinomu starpība

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$P(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0$$

$$P(x) - P(y) = a_n\left(x^n - y^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right) + \ldots + a_1(x - y)$$

$$\text{bet } x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right)$$

$$P(x) - P(y) \text{ dalās ar } (x - y)$$

Bezū teorēma

Ja polinoms $\boldsymbol{a}$ ir polinoma sakne, tad polinoms dalās ar $(\boldsymbol{x - a})$.

Viens noderīgs secinājums:

Ja mums ir zināma polinoma vērtība kaut kādā punktā, piem., $\boldsymbol{P(a) = A}$, tad pāriesim pie jaunā polinoma:

$$\boldsymbol{Q(x) = P(x) - A}$$

Šim polinomam mēs zinām vienu sakni ($\boldsymbol{a}$), tātad $\boldsymbol{Q(x)}$ dalās ar izteiksmi $(\boldsymbol{x - a})$.

Bezū

Bezū teorēma

Zināms, ka kāds polinoms ar veseliem koeficientiem pieņem vērtību 2002 **sešiem dažādiem veseliem skaitļiem**.

Vai eksistē tāds **vesels** x, kuram šis polinoms pieņemtu vērtību 2020?

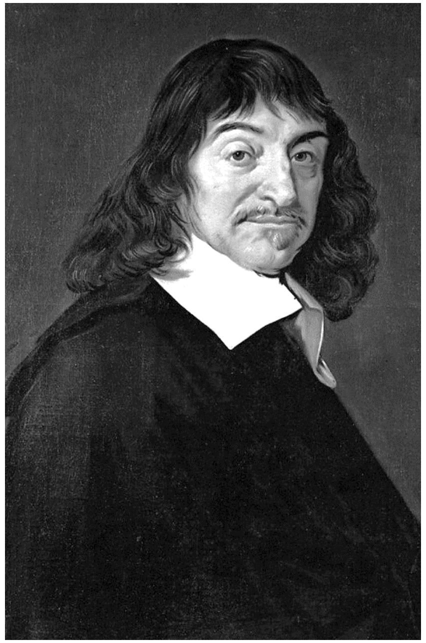
Bezū

Zīmju maiņu skaits

Dots ***n***-tās pakāpes polinoms.

Jautājums: cik daudz šim polinomam var būt <u>pozitīvo</u> sakņu?

(var noderēt, kad mēs meklējam naturālas saknes un gribam parādīt, ka to skaits ir kaut kāds konkrēts)



Dekarts

Ja pozitīvo sakņu skaits ir **X**, un polinoma koeficienti maina zīmi **ZMS** reizes, tad **(ZMS – X)** ir **<u>nenegatīvs pāra skaitlis</u>**.

$$10x^8 + x^7 - x^4 - 4x^3 + 4x - 6$$

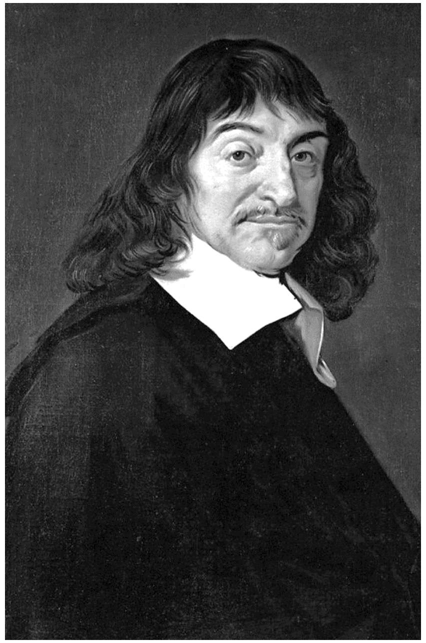
$$+10x^8 + x^7 - x^4 - 4x^3 + 4x - 6$$

ZMS = 3, tātad pozitīvo sakņu ir vai nu 3, vai nu 1.

Zīmju maiņu skaits

Kāds var būt pozitīvo sakņu skaits polinomiem:

- $2x^4 + x^2 - 7x$
- $2x^3 - 1 + 11x^2$
- $2019x^{2021} - 2020x^{2020} + 2021x^{2019} - 2020 + 2019$
- $5x^6 + x^4 + 3x^5 + 2x + 8$



Dekarts

Vjeta teorēma

Noteikti jūs visi zināt Vjeta teorēmu kvadrātvienādojumam:

$x^2 + px + q = 0$ vai $ax^2 + bx + c = 0$

Tam ir divas saknes x_1 un x_2, tad

- $x_1 + x_2 = -p$ vai $x_1 + x_2 = -b/a$
- $x_1 \cdot x_2 = q$ vai $x_1 \cdot x_2 = c/a$

Vjets

Vispārīgā gadījumā, ja ***n***-tās pakāpes polinomam ir ***n*** saknes, tad

- $x_1 + x_2 + \ldots x_n = -a_{n-1}/a_n$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0/a_n$

Ja $a_n = 1$, tad

- $x_1 + x_2 + \ldots x_n = -a_{n-1}$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Vjeta teorēma

Dots polinoms ar **veseliem** koeficientiem:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Zināms, ka tam ir **četras veselas saknes**.

a) Vai e un a var **vienlaicīgi būt pirmskaitļi**?

b) Vai e var būt **pirmskaitlis**, ja **visas četras saknes ir dažādas**?

Vjets

Racionālas saknes

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ja polinomam ***P*(*x*)** ar **veseliem** koeficientiem ir **racionāla** sakne $\frac{p}{q}$, tad:

a_0 dalās ar p
a_n dalās ar q

ja $a_n = 1$, tad polinomam nevar būt daļveida sakņu

visiem veseliem x skaitlis $P(x)$ ir vesels un dalās ar $(qx - p)$

PELLA VIENĀDOJUMS

Uzdevums par vēršiem

Compute, O friend, the number of the cattle of the sun which once grazed upon the plains of Sicily, divided according to color into four herds, one milk-white, one black, one dappled and one yellow. The number of bulls is greater than the number of cows, and the relations between them are as follows:

White bulls $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ black bulls + yellow bulls,

Black bulls $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ dappled bulls + yellow bulls,

Dappled bulls $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ white bulls + yellow bulls,

White cows $= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ black herd,

Black cows $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ dappled herd,

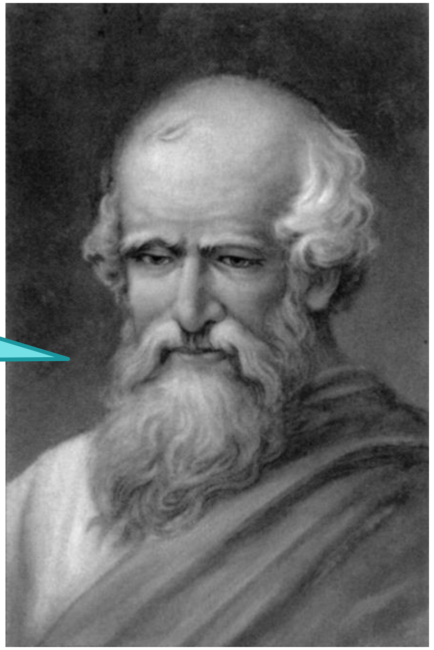
Dappled cows $= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ yellow herd,

Yellow cows $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ white herd.

If thou canst give, O friend, the number of each kind of bulls and cows, thou art no novice in numbers, yet can not be regarded as of high skill. Consider, however, the following additional relations between the bulls of the sun:

White bulls + black bulls = a square number,
Dappled bulls + yellow bulls = a triangular number.

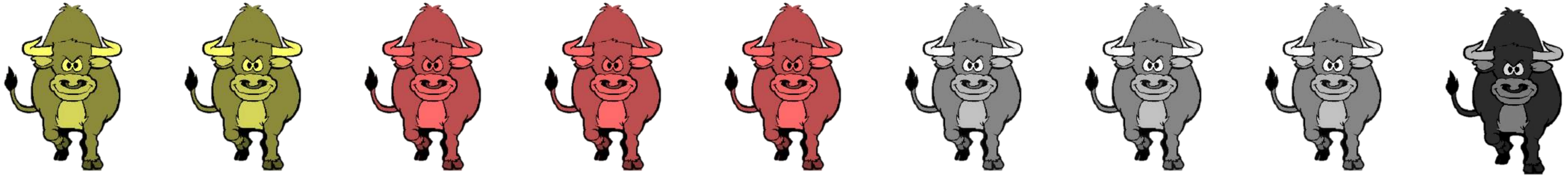
If thou hast computed these also, O friend, and found the total number of cattle, then exult as a conqueror, for thou hast proved thyself most skilled in numbers.



Arhimēds

Uzdevums ļoti sarežģīts;
risinājumā figurēja vienādojums: $x^2 - 4729494y^2 = 1$.

Lopu skaits pārsniedza **$7{,}7 \cdot 10^{206544}$**.



Pella vienādojums

Vienādojumam **$x^2 - Dy^2 = 1$** (kur D ir naturāls, bet nav kvadrāts), **ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos** (triviāls atrisinājums veselos skaitļos ir ***x* = ±1** un ***y* = 0**).

Visi pārējie atrisinājumi iegūstāmi, ja ir zināms minimāls netriviāls atrisinājums:

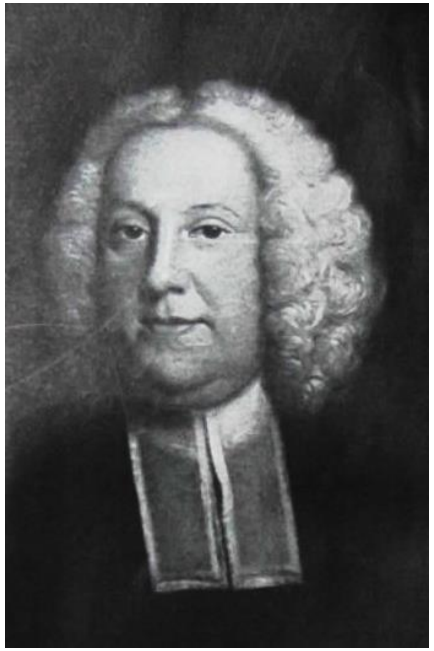
- $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$
- $y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$

Var arī izmantot rekursiju:

$x_{n+1} = (x_{\min}) \cdot x_n + (D \cdot y_{\min}) \cdot y_n$ $y_{n+1} = (y_{\min}) \cdot x_n + (x_{\min}) \cdot y_n$

Atrisinājumiem piemīt skaistā īpašība: $x_n \pm y_n\sqrt{D} = \left(x_{\min} \pm y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$;

vēl daļa $\frac{x_n}{y_n}$ ir laba racionāla aproksimācija (no augšas) skaitlim $\sqrt{D}$.



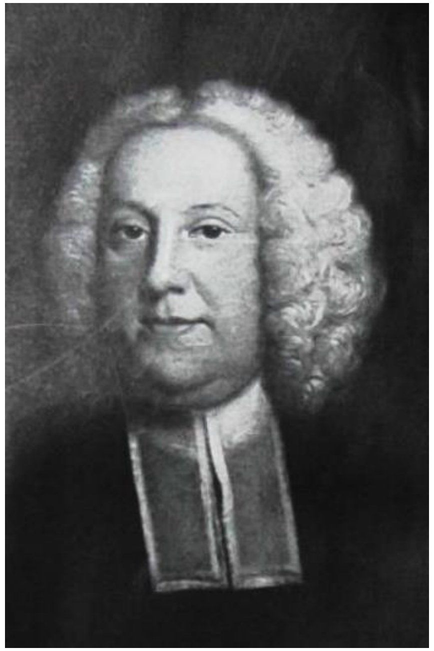
Pells

Negatīvais Pella vienādojums

Vienādojumam **$x^2 - Dy^2 = -1$** (kur D ir naturāls, bet nav kvadrāts)

- **vai nu nav neviena atrisinājuma,**
- **vai nu ir ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.**

Neatkarīgi un pietiekami nosacījumi	
atrisinājumu **NE**eksistencei:	atrisinājumu eksistencei:
• *D* dalās ar 4 • *D* dalās ar nepāra dalītāju, kas izsakāms veidā **4*m*+3**	• *D* ir pirmskaitlis, kas izsakāms veidā **4*m*+1** • Eksistē kaut viens atrisinājums naturālos skaitļos



Pells

Pella vienādojums **$u^2 - Dv^2 = 1$** ir saistīts ar tā negatīvo analogu ar formulu: $x_{\min} \pm y_{\min}\sqrt{D} = \left(u_{\min} \pm v_{\min}\sqrt{D}\right)^2$

Atrisinājumi izsakāmi veidā:

- $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1} + \frac{1}{2}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$
- $v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1} - \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$

Atrisinājumu skaistā īpašība : $x_n \pm y_n\sqrt{D} = \left(x_{\min} \pm y_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$; vēl daļa $\frac{x_n}{y_n}$ ir laba aproksimācija (no apakšas) skaitlim $\sqrt{D}$.

Apakšā norādītas visas *D* < 100 vērtības, kurām eksistē atrisinājumi: 2, 5, 10, 13, 17, 26, 29, 37, 41, 50, 53, 58, 61, 65, 73,74, 82, 85, 89, 97.

AB-Pella vienādojums

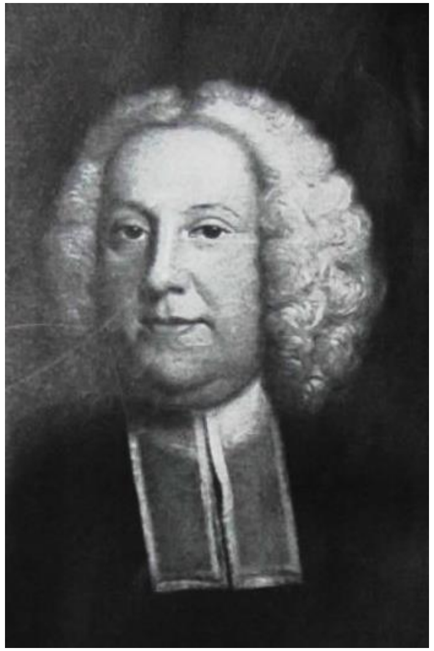
Vienādojumam **$Ax^2 - By^2 = 1$** (kur A, B ir naturāli, savukārt AB nav kvadrāts)

- **vai nu nav neviena atrisinājuma,**
- **vai nu ir ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.**

Pella vienādojums **$u^2 - ABv^2 = 1$** ir saistīts

ar tā AB-analogu caur šādu formulu:

- $x_n = (x_{\min}) \cdot u_n + (y_{\min}B) \cdot v_n$
- $y_n = (y_{\min}) \cdot u_n + (x_{\min}A) \cdot v_n$



Pells

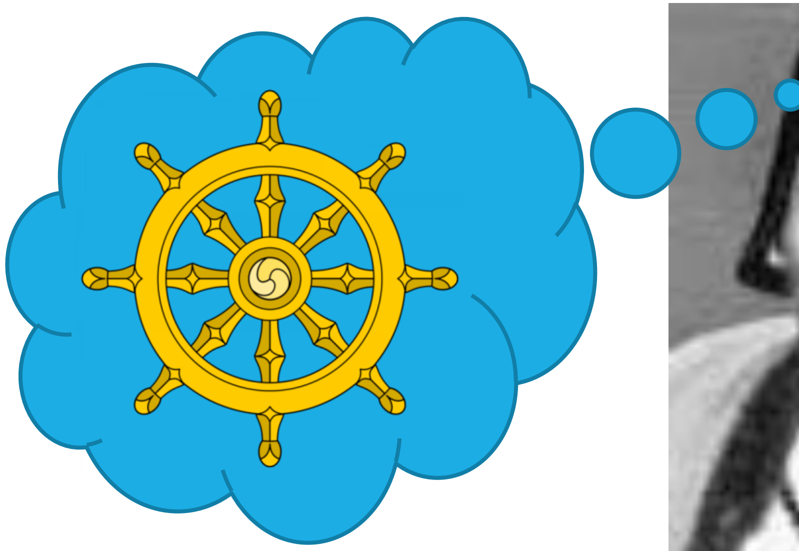
«Čakravala» metode

Sākums: ***k*** jāizvēlas pēc iespējas mazāks.

Skaitļu trijnieks (x, y, k) apmierina nosacījumu:

$$x^2 - Dy^2 = k$$

Meklējam tādu *m*, lai izteiksmes $\left(\frac{m^2 - D}{k}\right)$ vērtība būtu vesela un pēc absolūtas vērtības pēc iespējas mazāka.



Bhaskara

Beigas: izteiksmes vērtība ir $\pm$ 1.

Tādā gadījumā izpildās:

$$\left(\frac{mx + Dy}{k}\right)^2 - D \cdot \left(\frac{x + my}{k}\right)^2 = \left(\frac{m^2 - D}{k}\right)^2$$

Iegūstam jauno trijnieku:

$$x' = \frac{mx + Dy}{|k|} \qquad y' = \frac{x + my}{|k|}$$

$$k' = \frac{m^2 - D}{k}$$

Kā atrisināt Pella vienādojumu $x^2 - Dy^2 = \pm 1$?

PALDIES PAR UZMANĪBU!

Veiksmi olimpiādēs!