Konspekts "Vienādojumi un reizinājumi"

Vienādojumu klasifikācija un risināšanas metodes

Diofanta vienādojumi:

Polinomu ar veseliem koeficientiem no vairākiem mainīgajiem sauc par Diofanta vienādojumu. Skaitļu teorijā šiem vienādojumiem meklē naturālus vai veselus atrisinājumus.

Pitagora trijnieki:

Vienādojuma $x^2+y^2=z^2$ jebkurš naturāls risinājums (tādu ir bezgalīgi daudz) atbilst formai

$$\begin{cases} x = 2mn \cdot c \\ y = (m^2-n^2)\cdot c \\ z = (m^2+n^2)\cdot c \end{cases}$$

(m, n, c ir naturāli, x un y var mainīt vietām un vismaz viens no tiem ir pāra)

Pitagora četrinieki:

Vienādojuma $x^2+y^2+z^2=w^2$ jebkurš naturāls risinājums (tādu ir bezgalīgi daudz) atbilst formai

$$\begin{cases} x = 2m \cdot c \\ y = 2n \cdot c \\ z = \left(\frac{m^2+n^2}{k} - k\right)\cdot c \\ w = \left(\frac{m^2+n^2}{k} + k\right)\cdot c \end{cases}$$

(m, n, k, c ir naturāli, k ir skaitļa m^2+n^2 dalītājs, $k < m^2+n^2$; x, y un z var mainīt vietām un vismaz divi no tiem ir pāra)

Fermā lielā teorēma:

Ja $n > 2$ ir naturāls skaitlis, tad vienādojumam $x^n+y^n=z^n$ nav veselu atrisinājumu.

Lineārie Diofanta vienādojumi:

Vienādojumam $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ eksistē (un tādā gadījumā to ir bezgalīgi daudz) tad un tikai tad, ja $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dala b. Šim vienādojuma saknes atrod ar matricu metodi. Divu nezināmo gadījumā $a_1x+a_2y=b$, zinot vienu atrisinājumu, var iegūt visus citus, izmantojot formulu ar veselu parametru t:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{a_2}{\gcd(a_1,a_2)}\cdot t \\ y = y_0 + \frac{a_1}{\gcd(a_1,a_2)}\cdot t \end{cases}$$, bet pirmajam atrisinājuma pārim var izmantot formulu $$\begin{cases} x_0 = ba_1^{\varphi(a_2)-1} \\ y_0 = b\frac{1-a_1^{\varphi(a_2)}}{a_2} \end{cases}$$.

Dažas vienādojumu risināšanas metodes:

<u>Bezgalīga kritiena metode (vai Vjeta lēcieni).</u> Pieņēmums, ka atrisinājumam piemīt kaut kāda unikalitāte (minimāla summa, minimāls reizinājums, minimālā vērtība) un, izmantojot loģiskus spriedumus (vai Vjeta teorēmu), pamatot, ka pieņemtais apgalvojums ir aplams, jo eksistē vēl mazāks risinājums utt.

<u>Intervālu metode.</u> Pirmais piemērs: ja ir dota nevienādība $a^2 < x^2 < (a+1)^2$ un a ir naturāls, tad nav tāda naturāla x, kurš atbilstu dotajai nevienādībai. Otrais piemērs: ja $b < y < b+1$, tad vismaz viens no skaitļiem b, y nav vesels.

<u>Izteiksmes veidā $x \cdot y = z^n$.</u> Divi labi gadījumi. Pirmais: ja z ir pirmskaitlis vai tā pakāpe, tad x un y arī ir šī pirmskaitļa pakāpe. Otrais: ja $\gcd(x, y) = 1$, tad $x = x_0^n$ un $y = y_0^n$. Visi skaitļi (vai izteiksmes) ir naturāli.

<u>Cikliskā metode.</u> Parasti to izmanto vienādojumu sistēmās ar vairākiem mainīgiem, kuros ir iespējama nezināmo „rotācija" pa apli. Izdara pieņēmumu, piemēram, par to, ka $x < y$, no tā iegūst, ka $y < z$ un tālāk $z < x$, no kā var secināt, ka atrisinājumu nav, ja pastāv stingra nevienādība starp x un y. Šo metodi var Izmantot arī citādāk: ja x dalās ar a, tad arī y dalās ar a, un tāpēc arī z dalās ar a utt.

Konspekts "Vienādojumi un reizinājumi"

Pella vienādojumi

Pella-Fermā vienādojums:

Vienādojumam $x^2 - Dy^2 = 1$ (kur $D \in \mathbb{N}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$), ir bezgalīgi daudz naturālu atrisinājumu. Veselos skaitļos tam eksistē viens triviāls atrisinājums $(x, y) = (\pm 1, 0)$. Atrisinājumus naturālos skaitļos iespējams iegūt, zinot minimālo atrisinājumu:

$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$; $y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$

Darbojas arī rekursīva sakarība katram nākamajam atrisinājumam, ko var pierādīt ar matemātisko indukciju:

$x_{n+1} = (x_{\min}) \cdot x_n + (D \cdot y_{\min}) \cdot y_n$; $y_{n+1} = (y_{\min}) \cdot x_n + (x_{\min}) \cdot y_n$

Viegli pamanīt, ka atrisinājumiem piemīt skaistas īpašības:

$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$; $x_n - y_n\sqrt{D} = \left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^n$

Kā arī daļa $\frac{x_n}{y_n}$ ir laba racionāla aproksimācija (no augšas) skaitlim $\sqrt{D}$.

Negatīvais Pella vienādojums:

Vienādojumam $u^2 - Dv^2 = -1$ (kur $D \in \mathbb{N}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$), vai nu ir bezgalīgi daudz naturālu atrisinājumu, vai nu nav neviena.

NEATKARĪGI UN PIETIEKAMI NOSACĪJUMI:	
atrisinājumu NEeksistencei:	atrisinājumu eksistencei:
• D dalās ar 4; • D dalās ar nepāra dalītāju, kas izsakāms veidā $4m + 3$.	• D ir pirmskaitlis, kas izsakāms veidā $4m + 1$; • Eksistē kaut viens atrisinājums naturālos skaitļos.

Pārējos gadījumos nav vienkāršas universālas metodes, ka noskaidrot atrisinājumu eksistenci. Bet ir zināms, ka negatīvā Pella vienādojuma fundamentāls atrisinājums ir saistīts ar atbilstošu Pella-Fermā vienādojumu $x^2 - Dy^2 = 1$:

$u_{\min} + v_{\min}\sqrt{D} = \left(x_{\min} + y_{\min}\sqrt{D}\right)^2$; $u_{\min} - v_{\min}\sqrt{D} = \left(x_{\min} - y_{\min}\sqrt{D}\right)^2$

Atrisinājumi izsakāmi veidā:

$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{\min} + v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1} + \frac{1}{2}\left(u_{\min} - v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$; $v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(u_{\min} + v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1} - \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(u_{\min} - v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$

Darbojas arī rekursīva sakarība katram nākamajam atrisinājumam, ko var pierādīt ar matemātisko indukciju:

$u_{n+1} = (u_{\min}^2 + Dv_{\min}^2) \cdot u_n + (2Du_{\min}v_{\min}) \cdot v_n$; $v_{n+1} = (2Du_{\min}v_{\min}) \cdot u_n + (u_{\min}^2 + Dv_{\min}^2) \cdot v_n$

Viegli pamanīt, ka atrisinājumiem piemīt skaistas īpašības:

$u_n + v_n\sqrt{D} = \left(u_{\min} + v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$; $u_n - v_n\sqrt{D} = \left(u_{\min} - v_{\min}\sqrt{D}\right)^{2n-1}$

Kā arī daļa $\frac{u_n}{v_n}$ ir laba racionāla aproksimācija (no apakšas) skaitlim $\sqrt{D}$. Apakšā norādītas visas $D < 100$ vērtības, kurām eksistē atrisinājumi: 2, 5, 10, 13, 17, 26, 29, 37, 41, 50, 53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, 85, 89, 97.

AB-Pella vienādojums:

Vienādojumam $Ar^2 - Bs^2 = 1$ (kur $A, B \in \mathbb{N}$, $\sqrt{AB} \notin \mathbb{N}$, $\gcd(A, B) \neq 1$), vai nu ir bezgalīgi daudz naturālu atrisinājumu, vai nu nav neviena. Lai būtu bezgalīgi daudz atrisinājumu, pietiek ar vienu fundamentālo atrisinājumu.

Pārējos atrisinājumus iegūst, izmantojot sakarības ((x_n, y_n) ir vienādojuma $x^2 - ABy^2 = 1$ atrisinājumi):

$r_n = (r_{\min}) \cdot x_n + (s_{\min}B) \cdot y_n$; $s_n = (s_{\min}) \cdot x_n + (r_{\min}A) \cdot y_n$

Čakravala metode Pella-Fermā vienādojumu risināšanai:

Ir trijnieks (x, y, k), kur $x^2 - Dy^2 = k$. Tātad atrodam tādu m, ka $\left(\frac{mx+Dy}{k}\right)^2 - D \cdot \left(\frac{x+my}{k}\right)^2 = \left(\frac{m^2-D}{k}\right)_{\text{min.vērtība}}$

Iegūstam jauno trijnieku: $x' = \frac{mx+Dy}{|k|}$; $y' = \frac{x+my}{|k|}$; $k' = \frac{m^2-D}{k}$.

Atkārtojam jaunajam trijniekam (x', y', k') šo iterāciju tik ilgi, kamēr neiegūsim $k''^{\cdots\prime} = 1$.

Konspekts “Vienādojumi un reizinājumi”

Algebriskas izteiksmes un identitātes

Pakāpju summa un starpība:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + x^2y^{2n-2} - xy^{2n-1} + y^{2n})$$

Summas vai starpības kvadrāta, kuba, un citu izteiksmju formulas:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

$$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$$

$$(x \pm y)^5 = x^5 \pm 5x^4y + 10x^3y^2 \pm 10x^2y^3 + 4xy^4 \pm y^5$$

$$(x \pm y)^6 = x^6 \pm 6x^5y + 15x^4y^2 \pm 20x^3y^3 + 15x^2y^4 \pm 6xy^5 + y^6$$

$$(x \pm y)^7 = x^7 \pm 7x^6y + 21x^5y^2 \pm 35x^4y^3 + 35x^3y^4 \pm 21x^2y^5 + 7xy^6 \pm y^7$$

Brahmaguptas identitāte:

$$(a^2 \pm b^2)(c^2 \pm d^2) = (ac \mp bd)^2 \pm (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 \pm (ad \mp bc)^2$$

$$(x^2 \pm 1)(y^2 \pm 1) = (xy \mp 1)^2 \pm (x+y)^2$$

Sofī-Žermenas identitāte:

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$$

Dažas citas identitātes:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$x^4(x-y) + y^4(x-y) + z^4(z-x) = (x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$$

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

$$x^{4n} + x^{2n} + 1 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x+1)^2$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$$

Stirlinga tuvinājums faktoriālam:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$