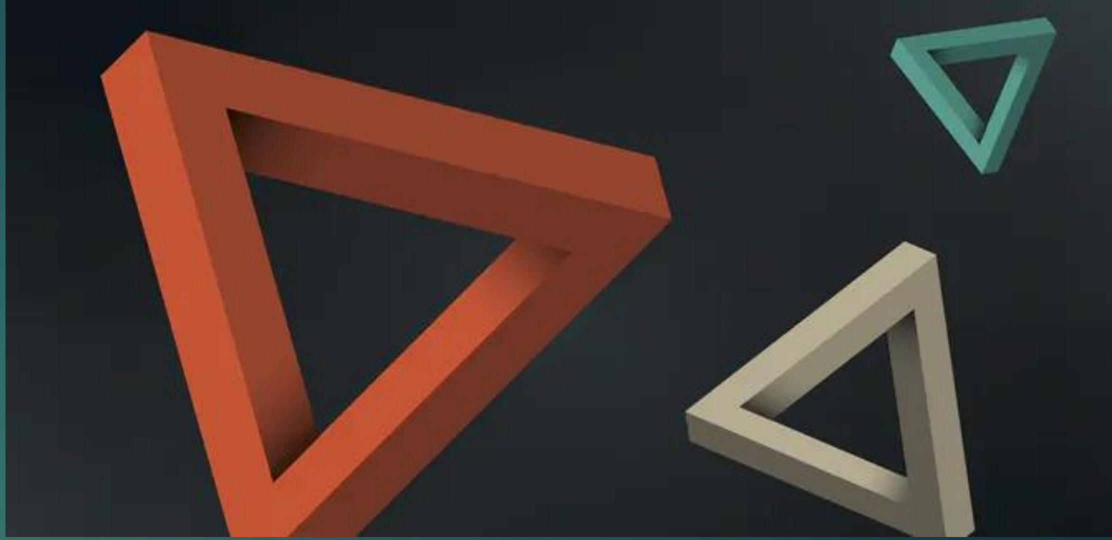


Ģeometrija senioriem

17.04.21.

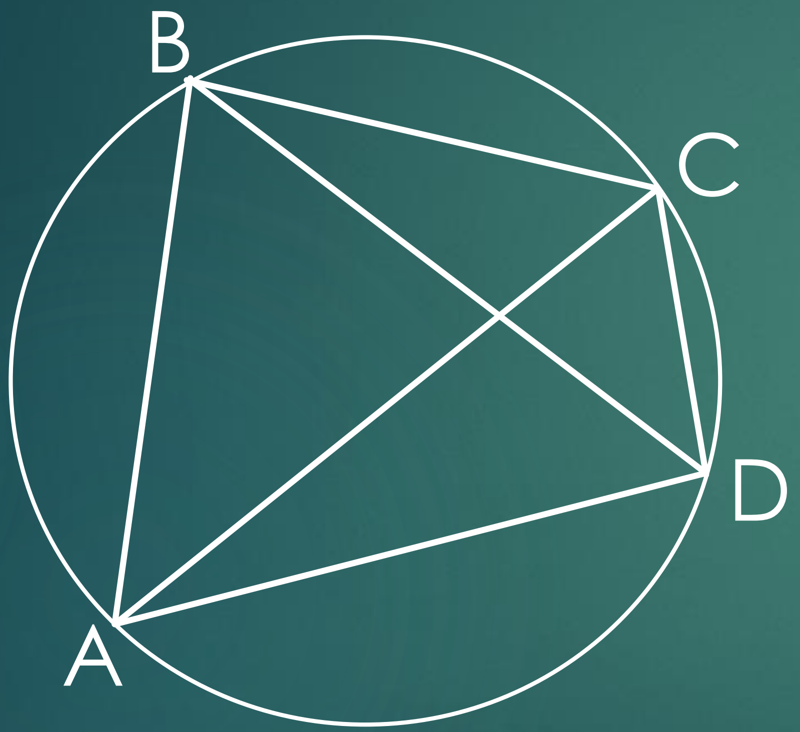
Ilze Ošiņa
osina.ilze@gmail.com

Teorēmas

- Ptolemaja teorēma
- Mikela teorēma

- Trijstūra laukums
- Karno teorēma
- Leņķu sakarības apvilktos četrstūros

Ptolemaja teorēma



Ievilkta četrstūra diagonāļu reizinājums ir vienāds ar pretējo malu reizinājumu summu.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Ptolemaja teorēma

- Ja ap četrstūri <u>nevar</u> apvilkt riņķa līniju, tad diagonāļu reizinājums ir mazāks par pretējo malu reizinājumu summu.

$$\boxed{AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

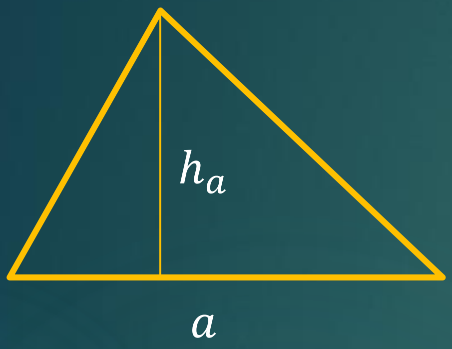
- Ja četrstūra diagonāļu reizinājums ir vienāds ar tā pretējo malu reizinājumu summu, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

1. Uzdevums

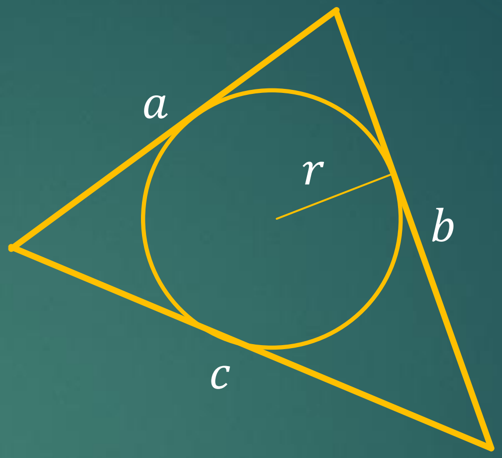
Izliekts četrstūris ar malu garumiem a, b, c, d ievilkts riņķa līnijā, kura rādiuss ir R.

Pierādīt: $S_{četrstūrim} = \frac{\sqrt{(bc+ad)(ac+bd)(ab+cd)}}{4R}$

Trijstūra laukums



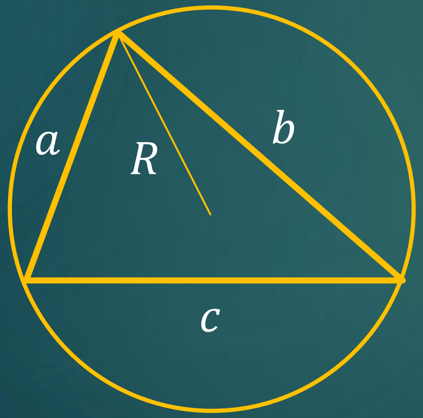
$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$



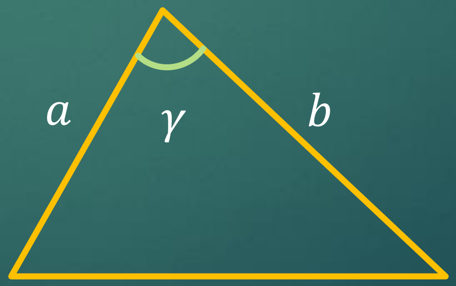
$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = p \cdot r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$$S = \frac{\mathrm{abc}}{4R}$$



$$S = \frac{1}{2} ab \cdot sin\gamma$$

2. Uzdevums

Kvadrātam $ABCD$ apvilkta riņķa līnija. Punkts P atrodas uz mazākā loka CD.

Pierādīt: $PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$

3. Uzdevums

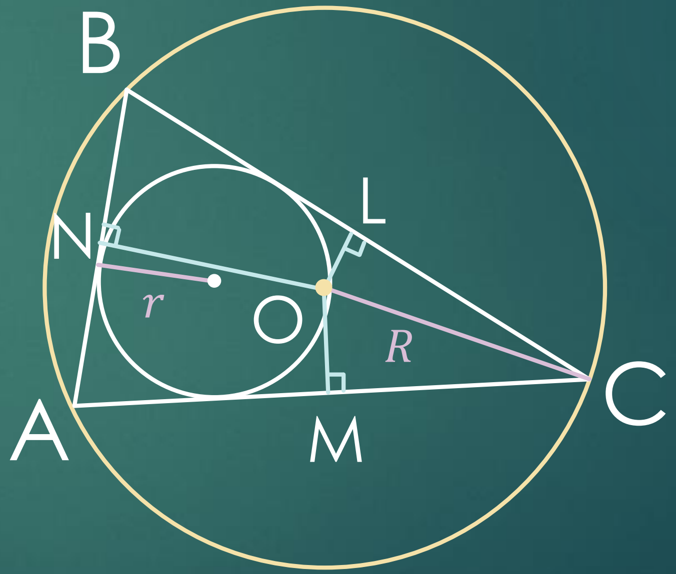
Riņķa līnijā ievilkts regulārs piecstūris $ABCDE$. Uz mazākā loka AE atzīmēts punkts P.

Pierādīt: $PA + PC + PE = PB + PD$

4. Uzdevums

Pierādīt, ka šaurleņķu trijstūrī attālumu summa no trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centra līdz trijstūra malām ir vienāda ar ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiusu summu.

Pierādīt: $ON + OL + OM = r + R$



Karno teorēma

MD Atrast sakarību starp šiem lielumiem platleņķa trijstūrī.

5. Uzdevums

Trapecē $ABCD$ malas AB un BC ir perpendikulāras, malas AB un CD ir paralēlas, $AB = BC$.

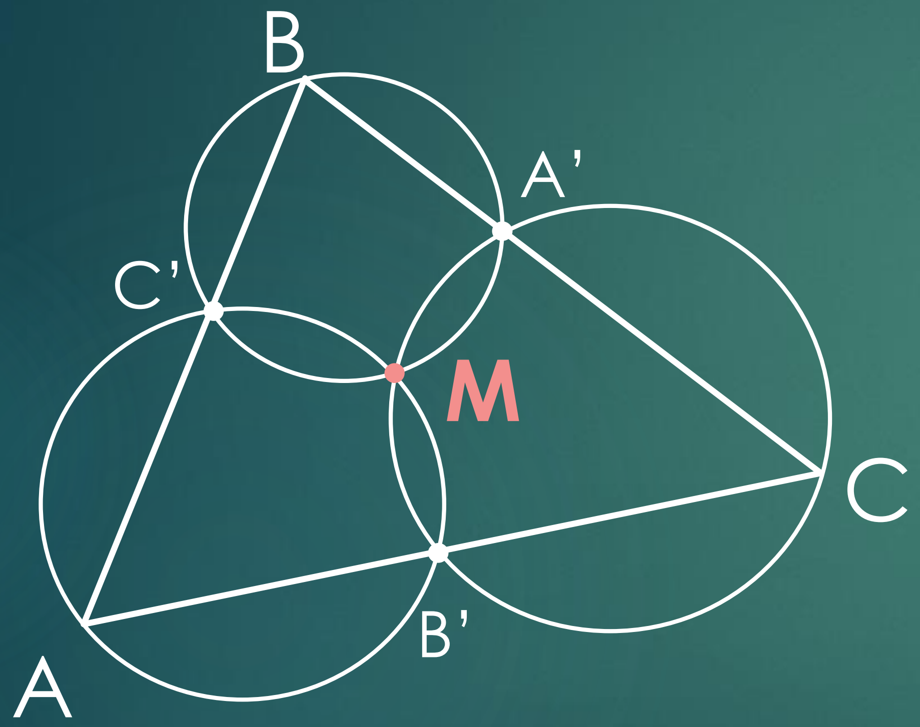
Pierādīt: $CD + AD \geq \sqrt{2(AB^2 + CD^2)}$

6. Uzdevums

Punkti M un N atrodas iekš trijstūra ΔABC tā, ka $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAC$ un $\sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC$

Pierādīt: $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$

Mikela teorēma



Ja uz katras no trijstūra ABC malām vai to pagarinājumiem ir atlikts punkts, tad trīs riņķi, kur katrs no tiem iet caur citu trijstūra ABC virsotni un abiem punktiem, kas atlikti uz attiecīgās virsotnes piemalām, krustojas vienā punktā $\boldsymbol{M}$.

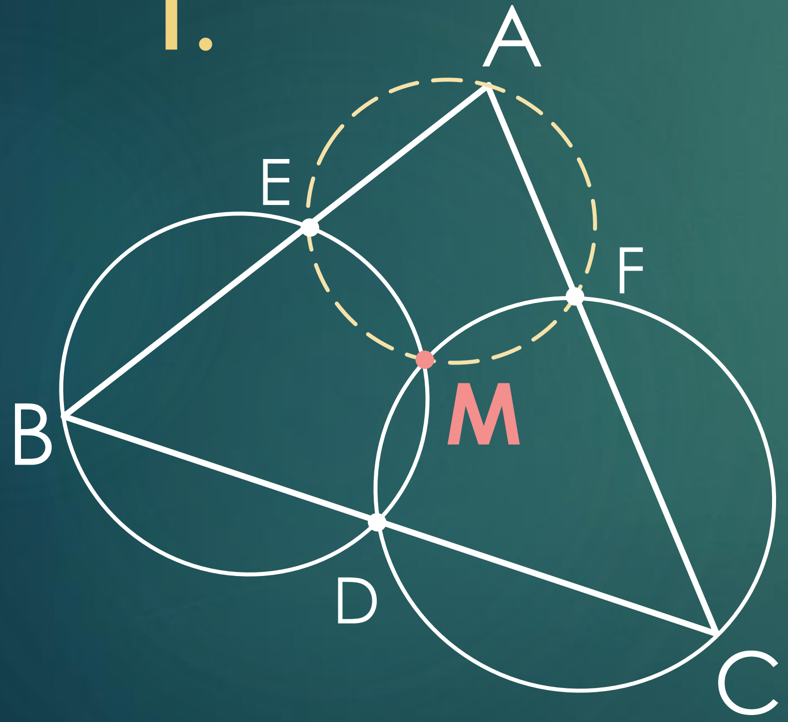
Punktu $\boldsymbol{M}$ sauc par **Mikela punktu**.

Trīs riņķus sauc par **Mikela riņķiem**.

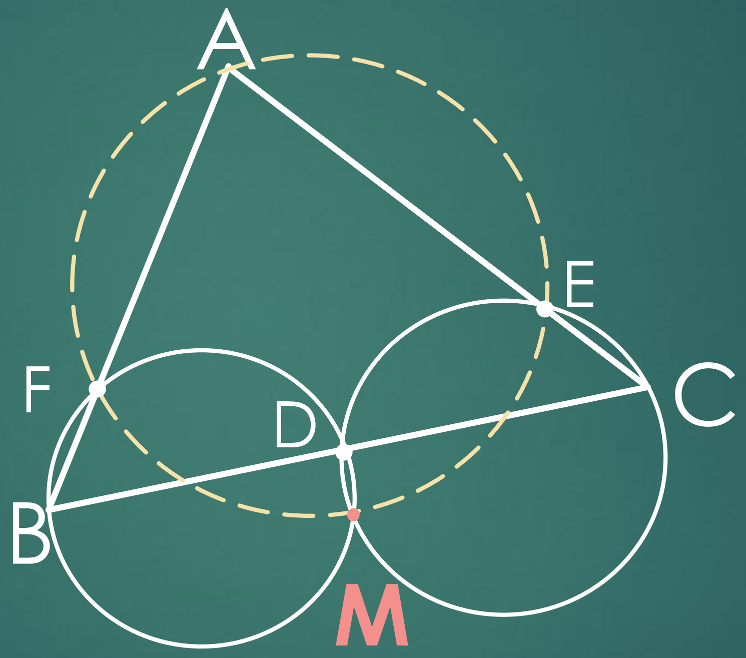
7. Uzdevums

Pierādīt Mikela teorēmu:

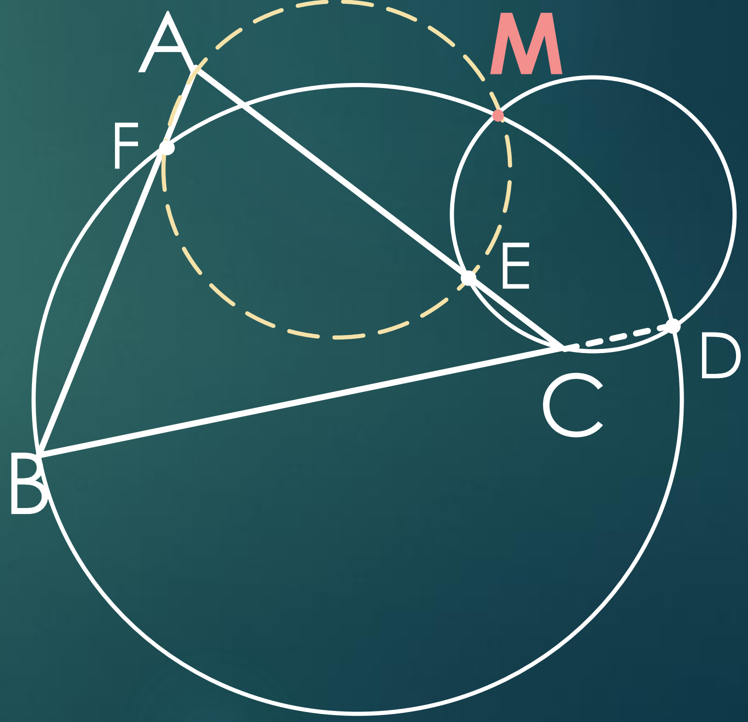
1.



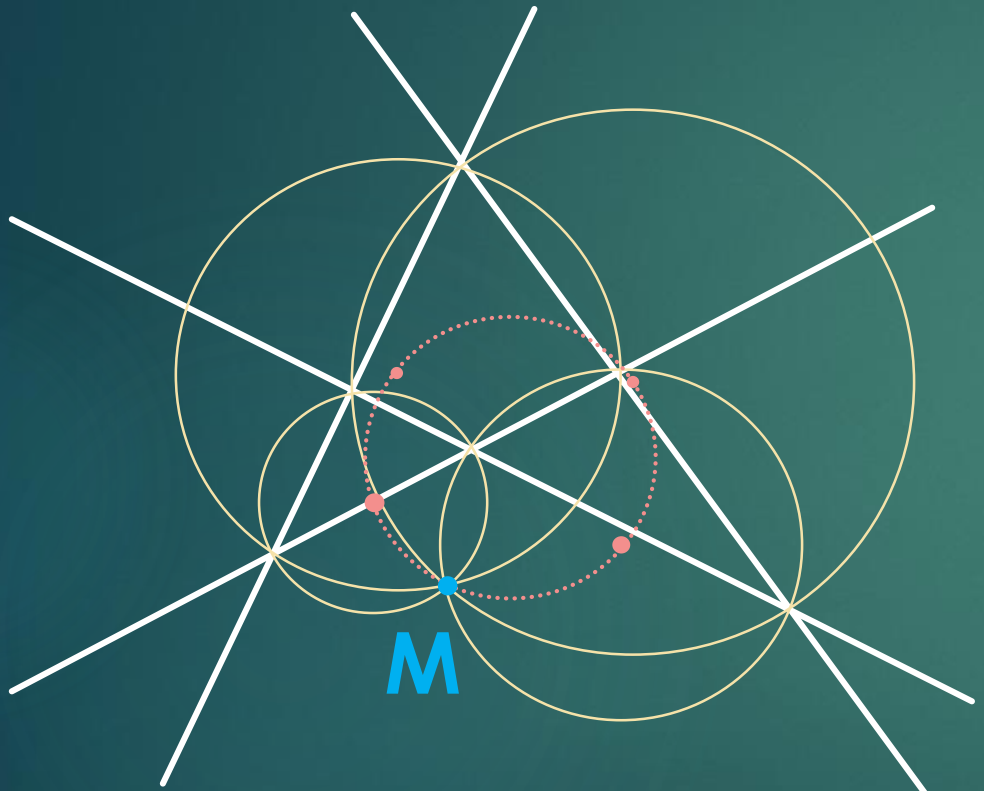
2.



3.



Mikela teorēma 4 taisnēm



Ja dotas četras taisnes l_1, l_2, l_3 un l_4, kur katra krustojas ar katru, un četri riņķi, kur katrs no tiem iet caur citiem trim taišņu l_1, l_2, l_3 un l_4 krustpunktiem, tad tās krustojas punktā $\boldsymbol{M}$.

Punktu $\boldsymbol{M}$ sauc par **Mikela ceturto punktu**.

Četrus riņķus sauc par **Mikela riņķiem**.

Šo četru Mikela riņķu centri atrodas uz vienas riņķa līnijas

8. Uzdevums

Riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos P un Q. Uz ω_1 atlikta horda AC un uz ω_2 atlikta horda BD tā, ka taisnes AB un CD krustojas punktā P. BD un AC krustojas punktā X. Punkts Y atrodas uz riņķa līnijas ω_1 tā, ka $PY \parallel BD$. Punkts Z atrodas uz riņķa līnijas ω_2 tā, ka $PZ \parallel AC$.

Pierādīt: punkti Q, X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes.

9. Uzdevums

Punkts H ir šaurleņķa trijstūra ABC augstumu krustpunkts, un W ir punkts uz malas BC starp punktiem B un C. Punkti M un N ir augstumu pamati, kas vilkti no virsotnēm B un C, attiecīgi. Apzīmēsim ar ω_1 ap trijstūri BWN apvilkto riņķa līniju, un ar X tādu punktu uz ω_1, ka WX ir ω_1 diametrs. Analoģiski, apzīmēsim ar ω_2 riņķa līniju, kas apvilkta ap trijstūri CWM, un ar Y tādu punktu uz ω_2, ka WY ir ω_2 diametrs.

Pierādīt: punkti X, Y, H atrodas uz vienas taisnes.