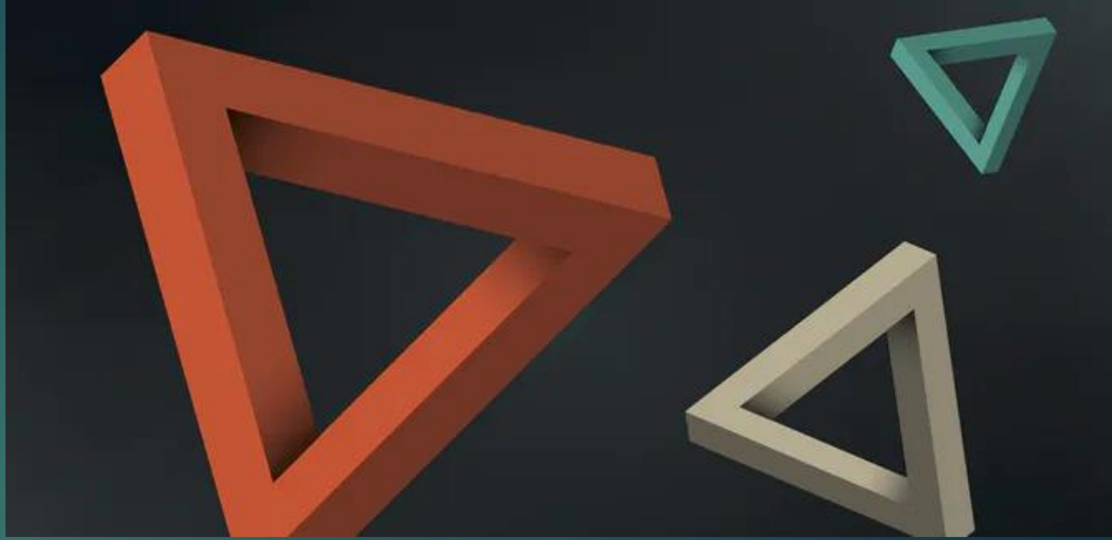


Ģeometrija senioriem

27.03.21.

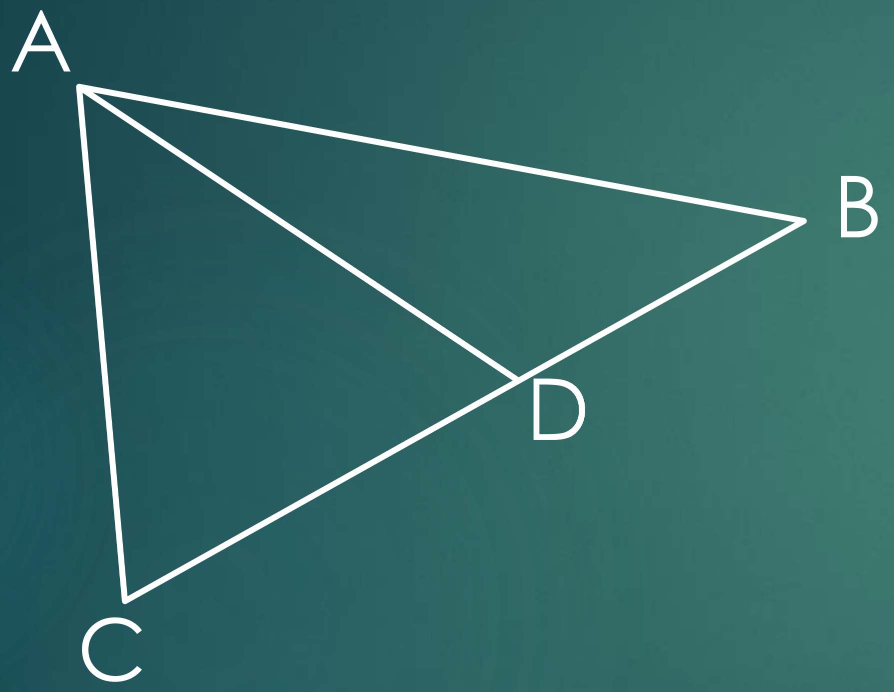
Ilze Ošiņa
osina.ilze@gmail.com

Teorēmas

- Stjuarta teorēma
- Čevas teorēma
- Menelāja teorēma

- Kosinusa teorēma
- Sinusa teorēma
- Bisektrises īpašība
- Eilera taisne
- Žergona punkts
- Nagela punkts
- Hordu īpašība
- Sekanšu īpašība
- Simsona taisne

Stjuarta teorēma



Ja punkts D atrodas uz ΔABC malas BC, tad:

$$AD^2 = AC^2 \frac{BD}{BC} + AB^2 \frac{CD}{BC} - BD \cdot CD$$

1. Uzdevums

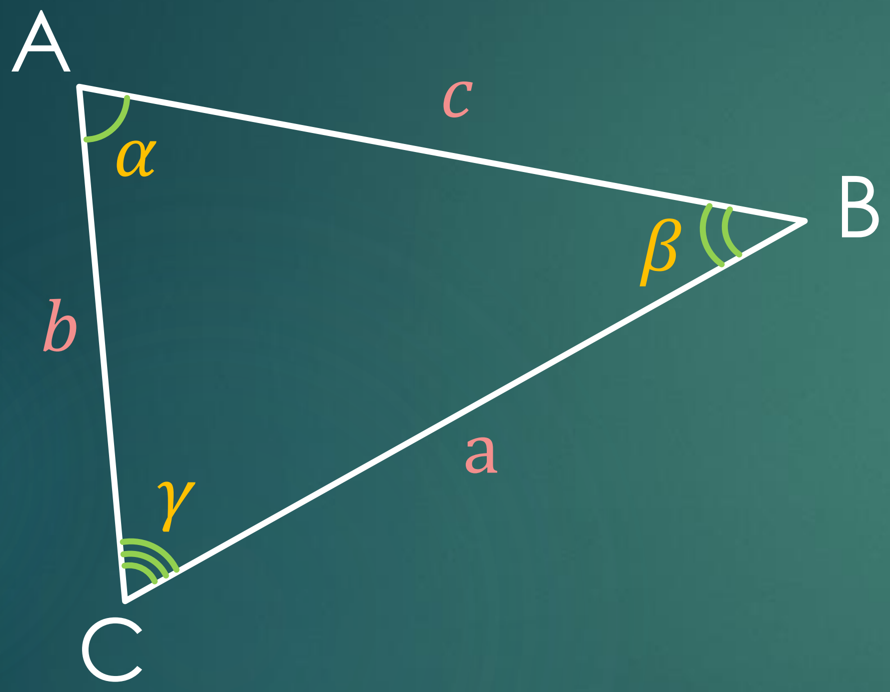
Dots ΔABC, AD – mediāna, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Pierādīt:

a) $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

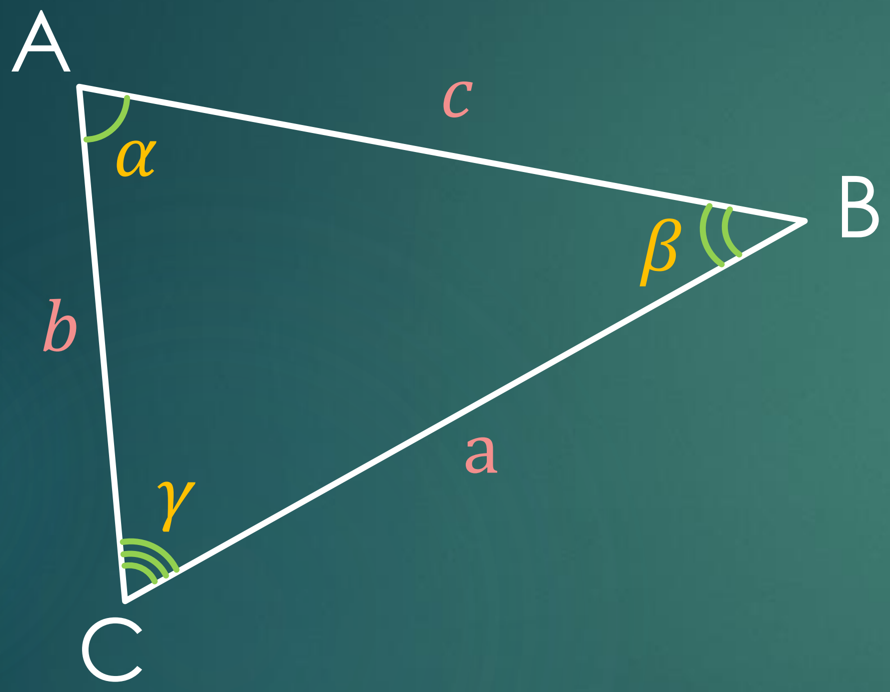
b) $AD = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot cosA}$

Kosinusa teorēma



$$c^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 - 2\mathrm{ab} \cdot cos\gamma$$

Sinusa teorēma



$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2\mathrm{R}$$

R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss

2. Uzdevums

Dots ΔABC, AD – bisektrise, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,
$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

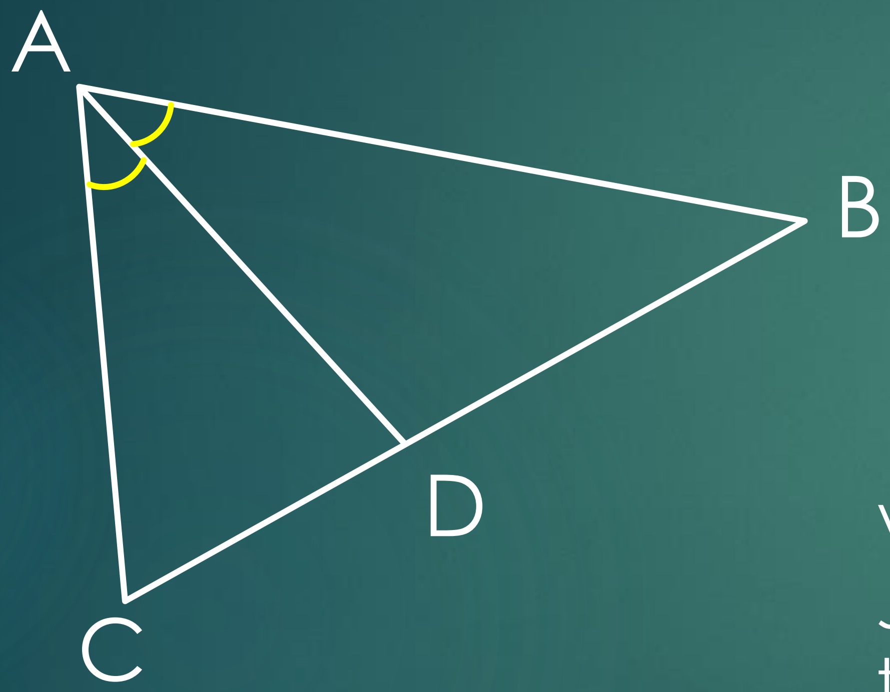
Pierādīt:

a) $AD = \frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}}{b+c}$

b) $AD = \frac{2\sqrt{bc(p-a)p}}{b+c}$

c) $AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC}$

Bisektrises īpašība

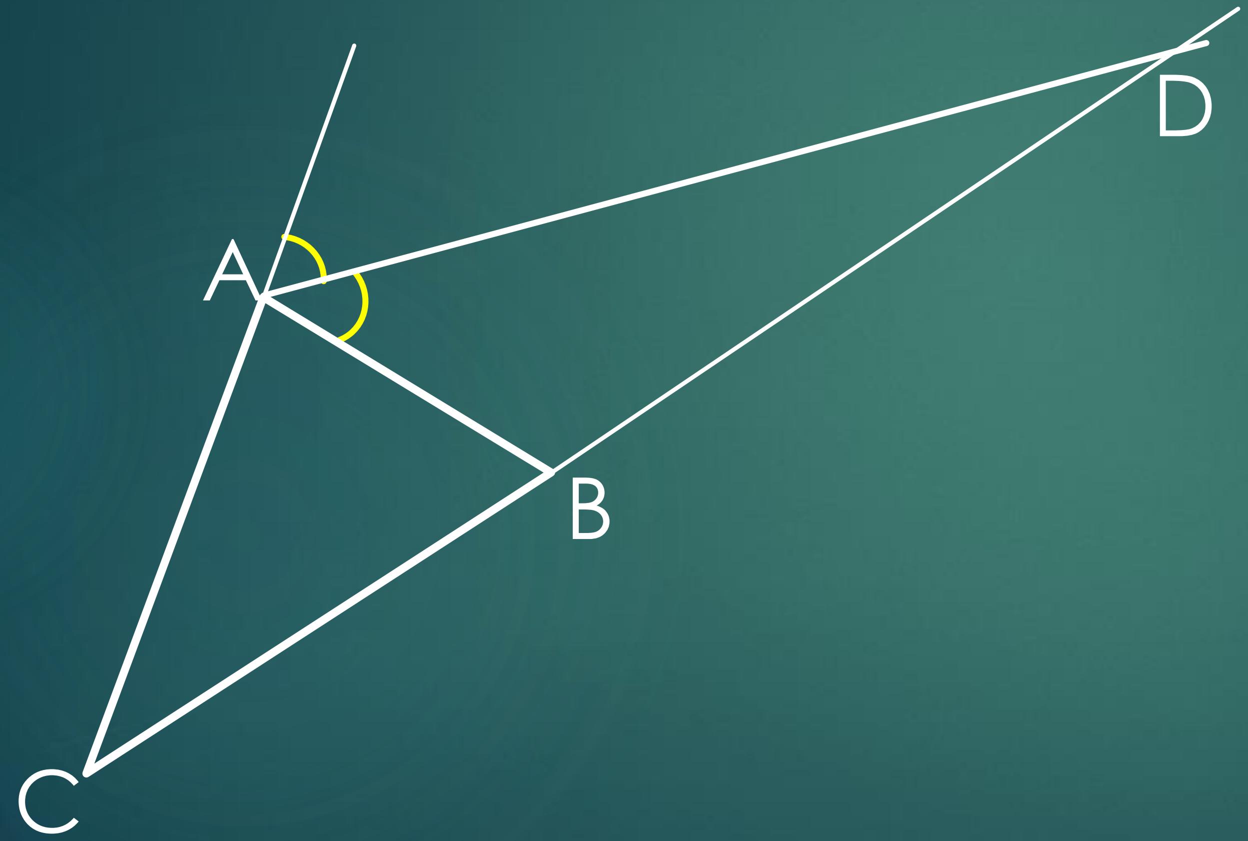


$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Vispārinājums:
Ja punkts D atrodas uz ΔABC malas BC, tad:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB| \cdot sin\sphericalangle DAB}{|AC| \cdot sin\sphericalangle DAC}$$

Ārējā leņķa bisektrises īpašība



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

3. Uzdevums

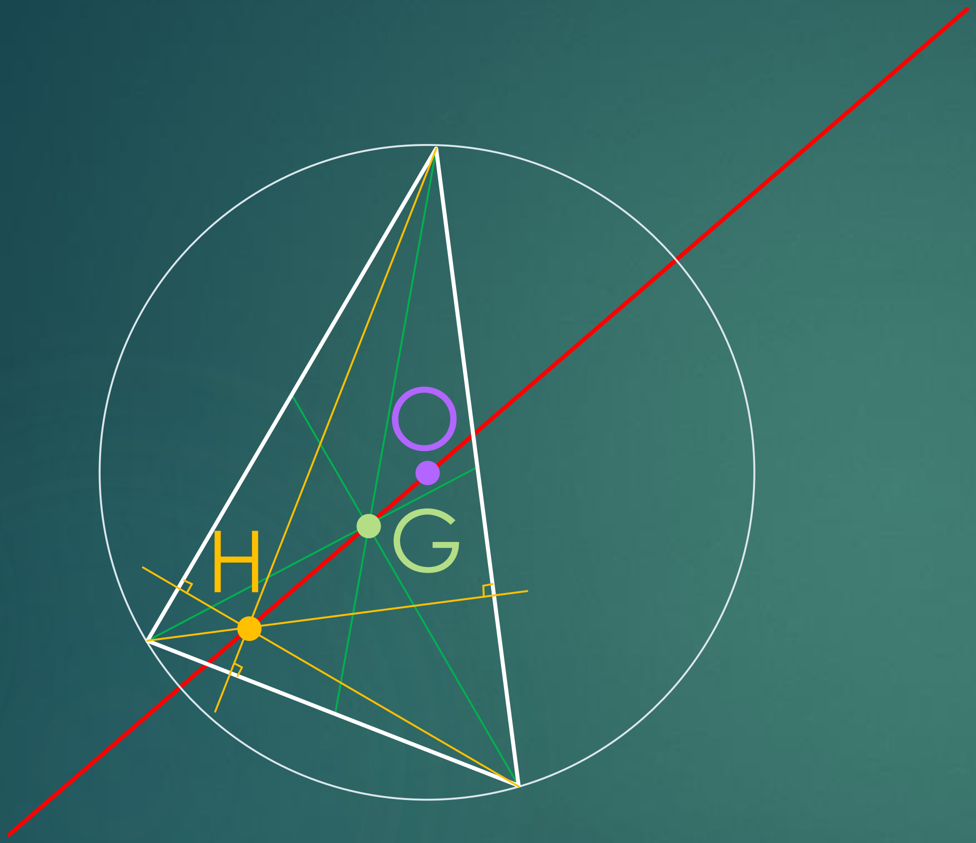
Dots ΔABC, O – apvilktās riņķa līnijas centrs, H – augstumu krustpunkts, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss,

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

Pierādīt:

$$OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Eilera taisne



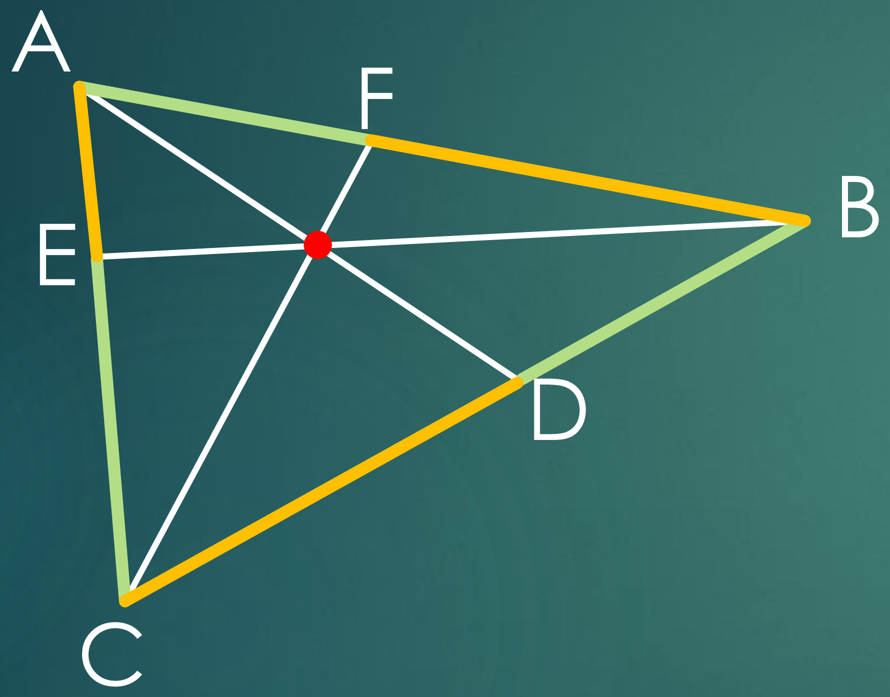
Trijstūra

- augstumu krustpunkts,
- mediānu krustpunkts,
- apvilktās riņķa līnijas centrs

atrodas uz vienas taisnes.

$$GH = 2GO$$
$$OH = 3GO$$

Čevas teorēma



Ja uz ΔABC malām AB, BC, CA vai to pagarinājumiem ņemti attiecīgi punkti F, D, E, tad taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja

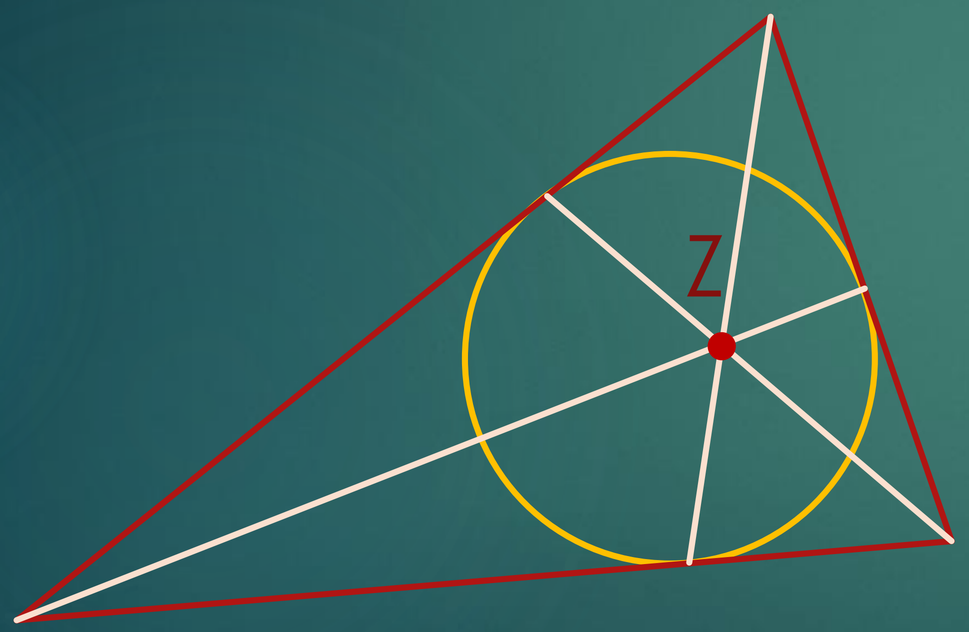
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

4. Uzdevums

Pierādīt: Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

5. Uzdevums

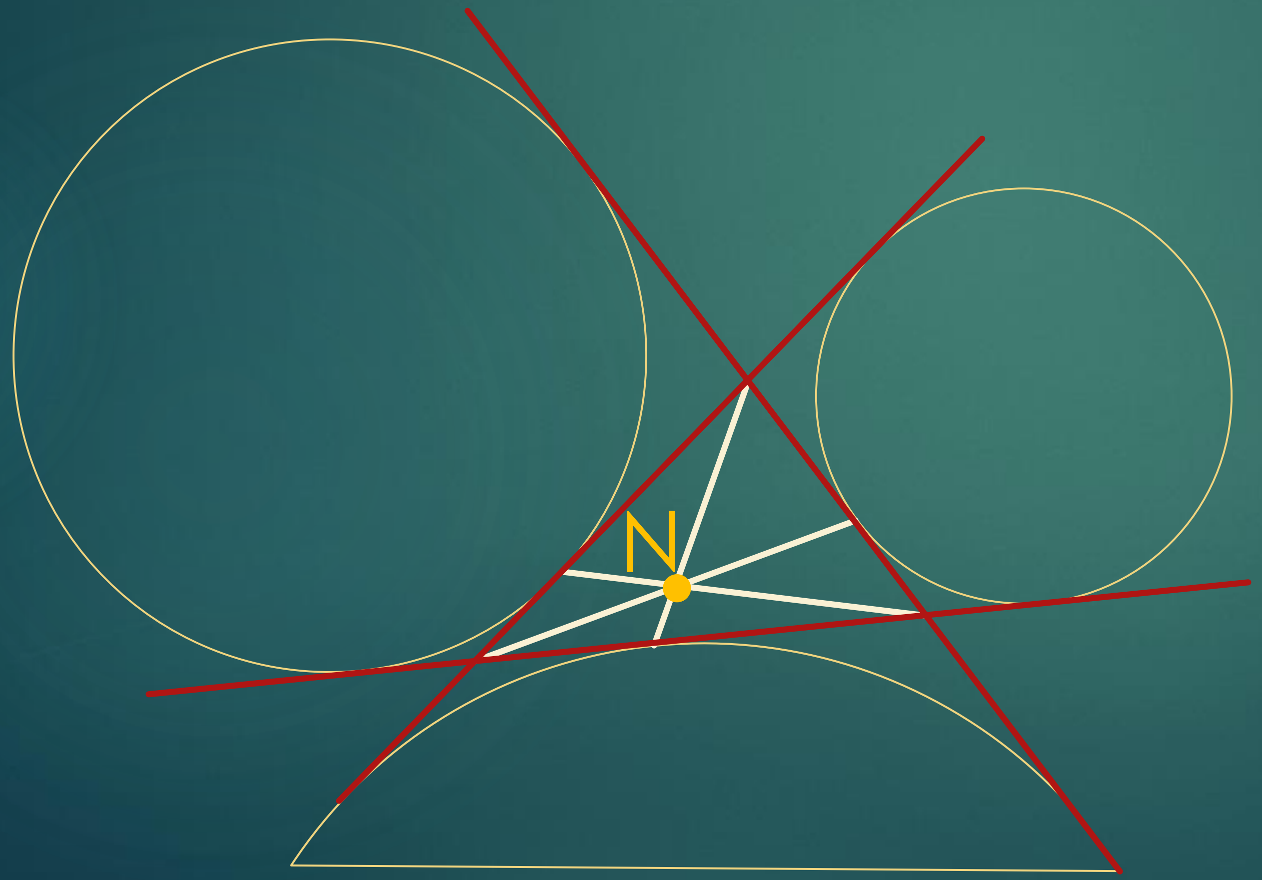
Pierādīt: Nogriežņi, kas savieno trijstūra virsotnes ar punktiem, kuros ievilktā riņķa līnija pieskaras pretējām malām, krustojas vienā punktā.



Z – Žergona punkts

6. Uzdevums

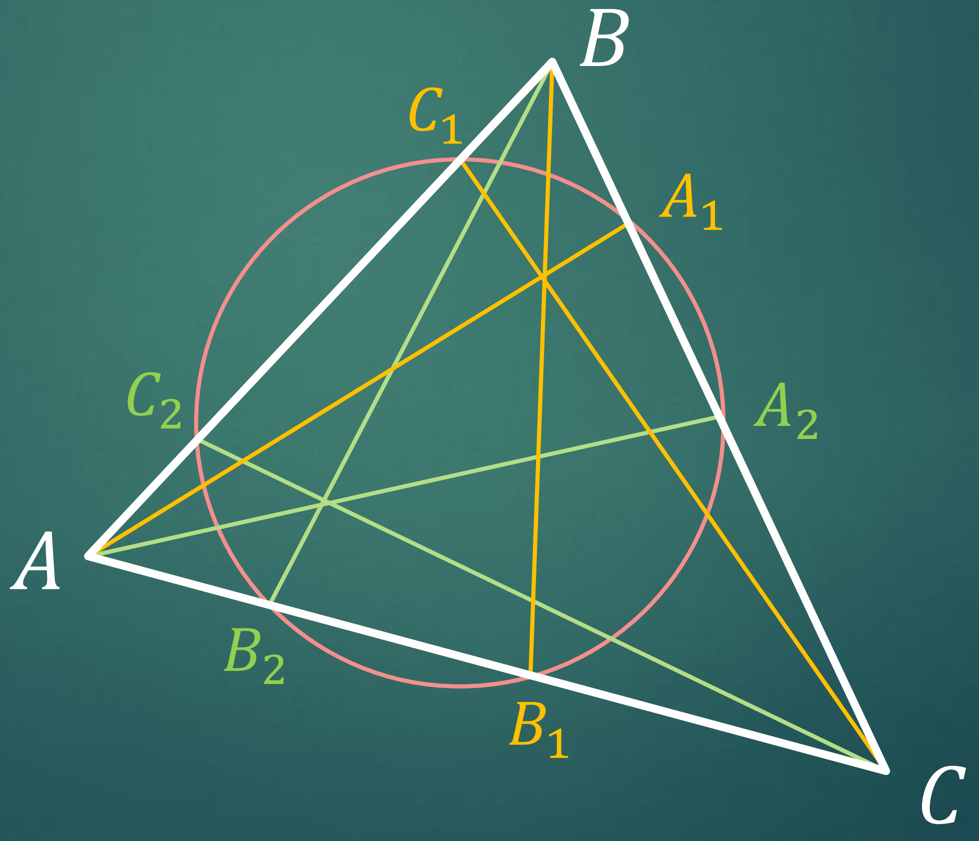
Pierādīt: Nogriežņi, kas savieno trijstūra virsotnes ar punktiem, kuros pretējām malām pieskaras pievilktā riņķa līnija, krustojas vienā punktā.



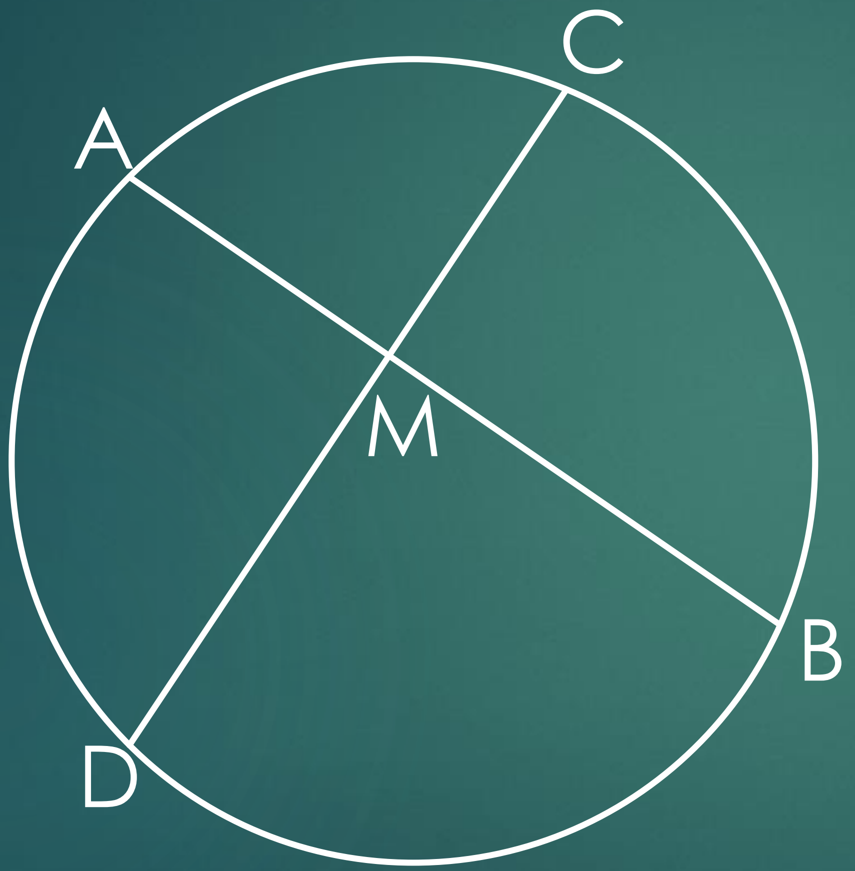
N – Nagela punkts

7. Uzdevums – mājas darbs uz 17.04.

Pierādīt: Ja taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā, tad arī AA_2, BB_2, CC_2 krustojas vienā punktā.

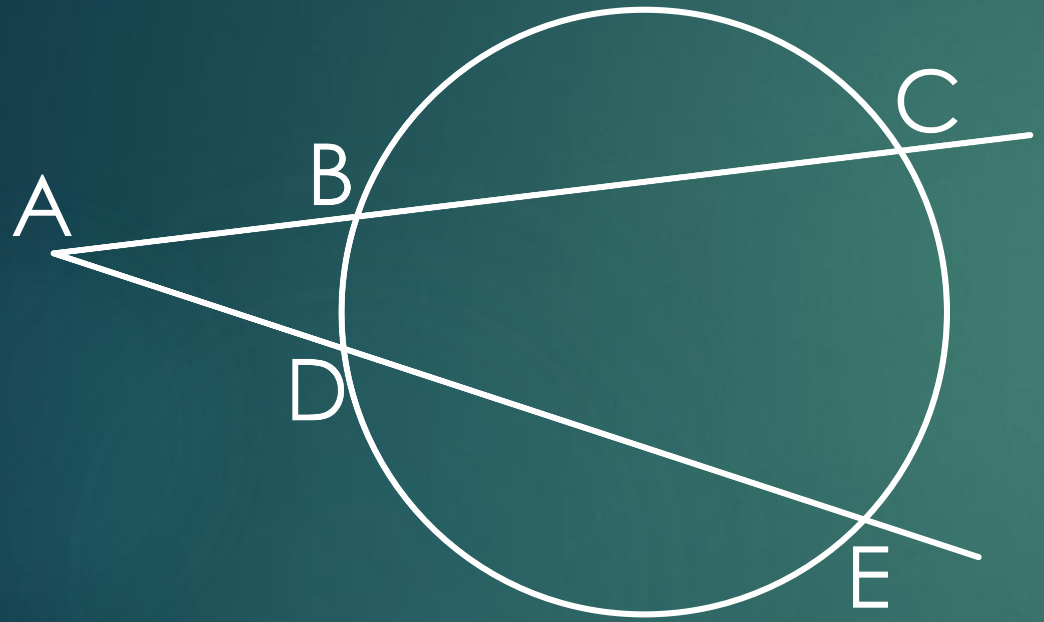


Hordu īpašība



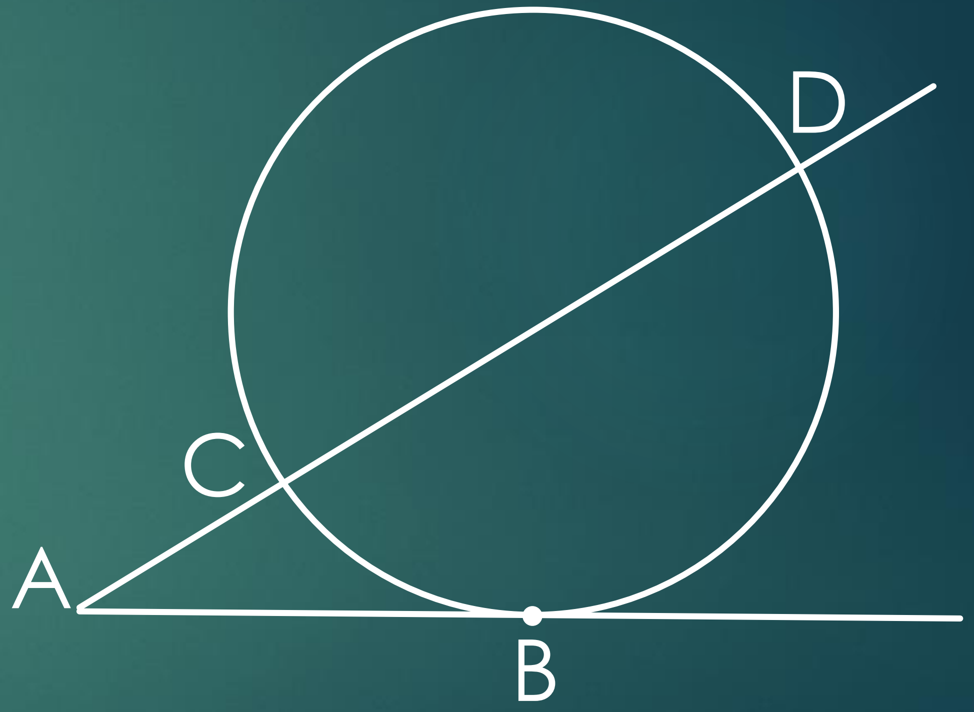
$$\boxed{AM \cdot MB = CM \cdot MD}$$

Sekanšu īpašība



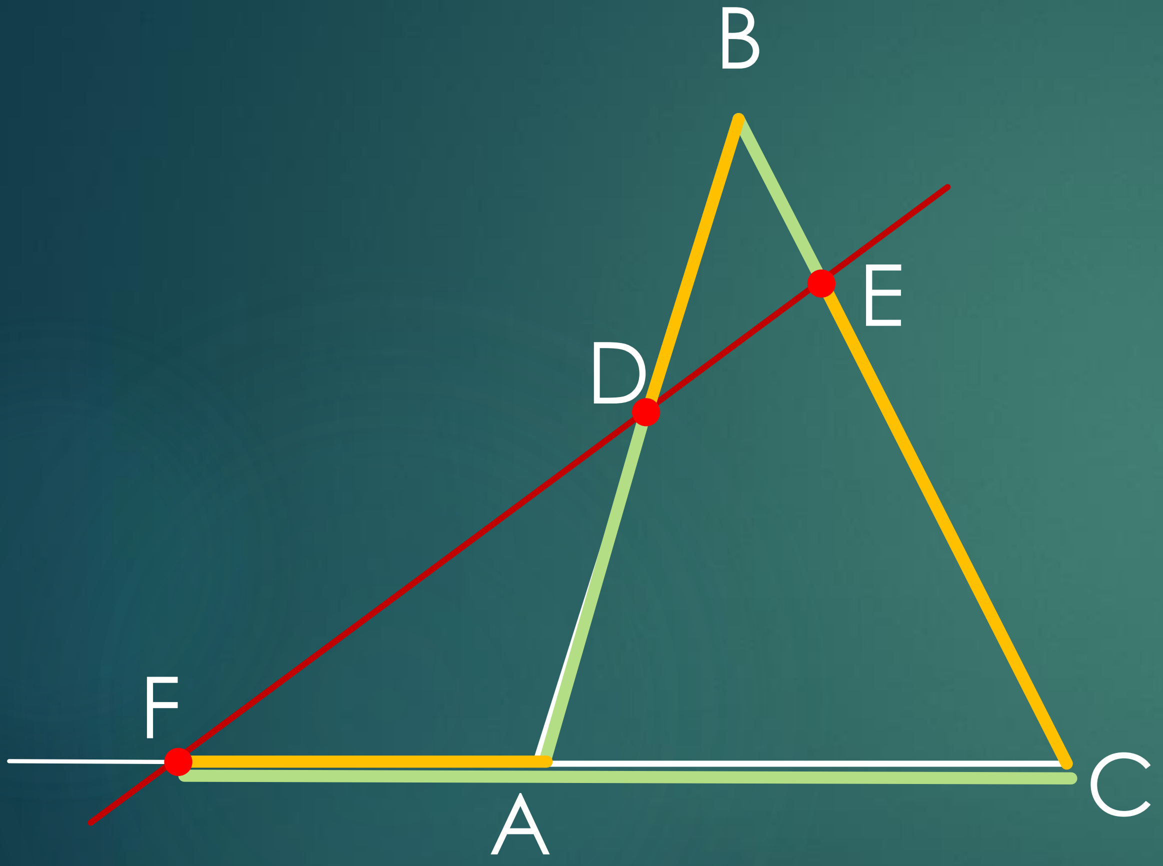
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

Pieskares-sekantes īpašība



$$AB^2 = AC \cdot AD$$

Menelāja teorēma



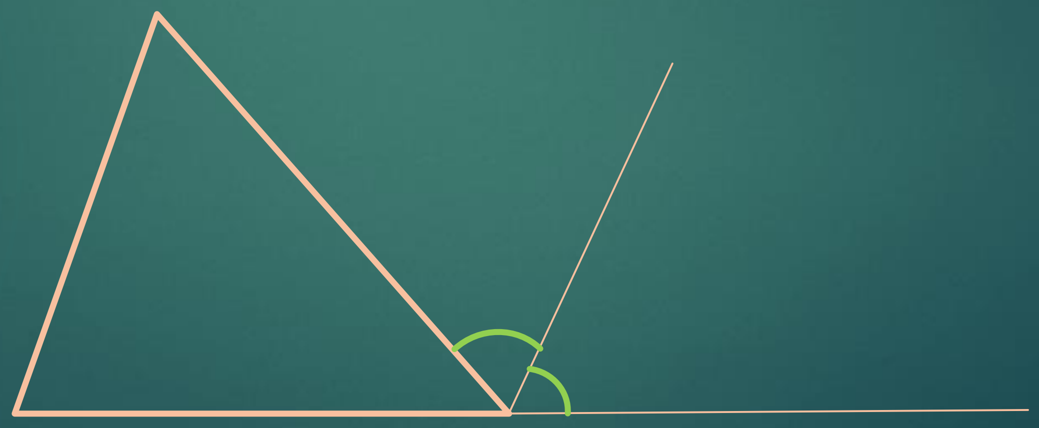
Ja uz ΔABC malām AB, BC, CA vai to pagarinājumiem ņemti attiecīgi punkti D, E, F, tad tie pieder vienai taisnei tad un tikai tad, ja

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

8. Uzdevums

Dažādmalu trijstūrī novilktas visas ārējo leņķu bisektrises.

Pierādīt: Ārējo leņķu bisektrišu krustpunkti ar pretējo malu pagarinājumiem atrodas uz vienas taisnes.



9. Uzdevums

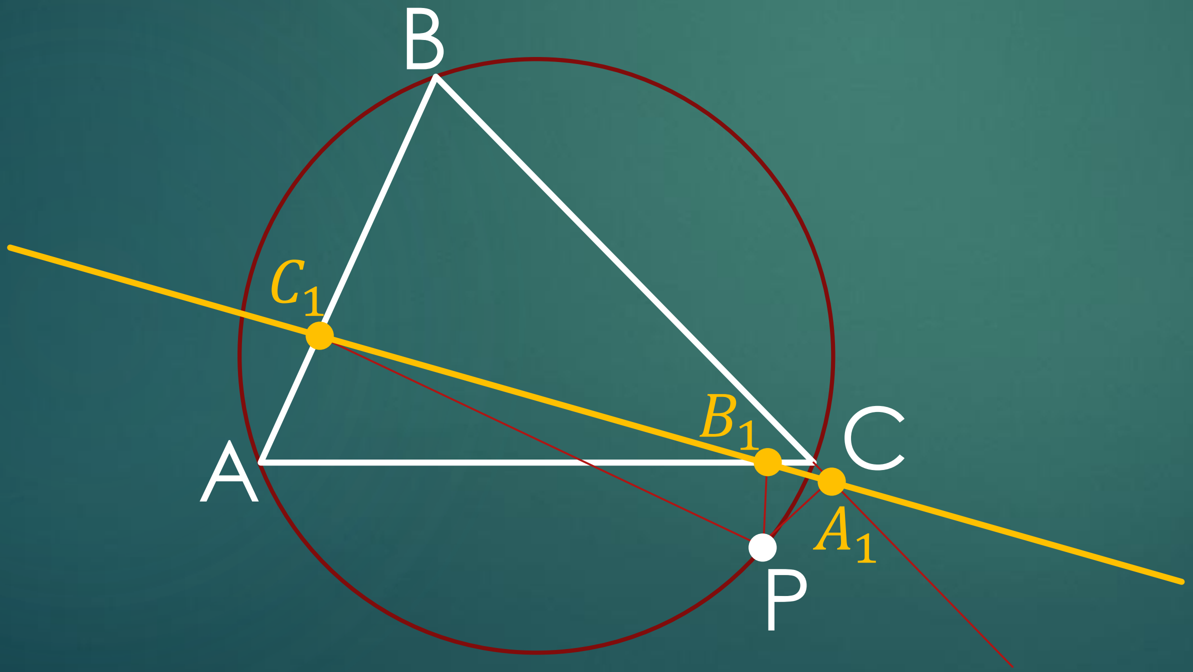
Dažādmalu trijstūrī novilktas divas iekšējo leņķu bisektrises.

Pierādīt: Šo iekšējo leņķu bisektrišu krustpunkti ar pretējām malām atrodas uz vienas taisnes ar punktu, kurā trešā leņķa blakusleņķa bisektrise krusto trešo malu.

10. Uzdevums – mājas darbs uz 17.04.

Punkts P atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas, A_1, B_1, C_1 ir to perpendikulu pamati, kas vilkti no punkta P pret taisnēm AB, BC, CA.

Pierādīt: Punkti A_1, B_1, C_1 atrodas uz vienas taisnes.



Simsona taisne

11. Uzdevums – mājas darbs uz 17.04.

Taisnleņķa trijstūrī ΔABC novilkts augstums CK, $\measuredangle C = 90°$, ΔACK novilkta bisektrise CE. Punkts D ir nogriežņa AC viduspunkts. Punkts F ir taišņu DE un CK krustpunkts.

Pierādīt: $BF \parallel CE$