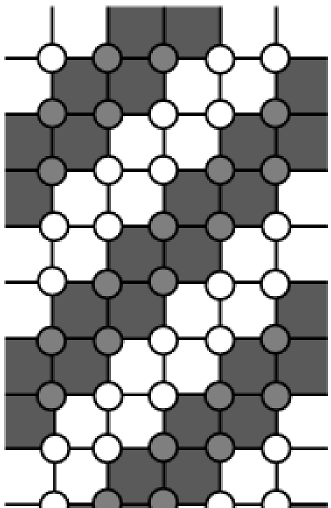
A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons

MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES „RĪGA – VIĻŅA – TALLINA”



LATVIJAS UNIVERSITĀTE
2008

UDK 51(075.2)
An 318

A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2008. – 88 lpp.

Grāmatā apkopoti matemātikas uzdevumi, kas 1988. – 2007. gados piedāvāti Rīgā notikušajās olimpiādēs „Rīga – Viļņa – Tallina”, un to atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Grāmata sagatavota LU projekta „LU FMF centra – A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas – darbība” ietvaros. Tā iekļauta Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-044-5

SATURS

IEVADS

Latvijā izveidotā matemātikas padziļinātas mācīšanas sistēma piedāvā plašas un bagātīgas iespējas jauniešiem izkopt savas spējas. Pastāv klātienes un neklātienes apmācība, kā arī klātienes un neklātienes sacensības, kurās pārbaudīt sava darba rezultātus. Dažādās formas atbilst dažādām skolēnu psiholoģiskām ievirzēm un darba paņēmieniem.

Liela daļa matemātikas skolotāju ir labi informēti par šīm iespējām un balstās uz tām savā darbā. Tomēr plaša daļa pedagogu vēl nepietiekami izmanto šīs iespējas.

Piedaloties minētajā apmācībā un sacensībās, skolēni iepazīstas ar matemātikas fragmentiem, kas nepietiekami tiek atspoguļoti oficiālajā skolas mācību programmā. Tas attiecas gan uz faktu materiālu, gan matemātiskās spriešanas metodēm. Šāda papildizglītība ir ļoti noderīga un vēlama ne tikai tiem, kas saistīs savu dzīvi ar eksaktajās zinātnēs sakņotām profesijām, bet arī visiem, kas vēlas kļūt par domājošiem un pilnvērtīgiem sabiedrības locekļiem.

Būtiskas matemātikas idejas var parādīt skolēniem ar relatīvi vienkāršu uzdevumu palīdzību, koncentrējoties nevis uz tehniski sarežģītām detaļām, bet uz spriedumu „mezgla punktiem”. Tas prasa rūpīgu skolotāja sagatavošanās darbu, kurā viņam lielu palīdzību var sniegt īpaši izstrādāti mācību līdzekļi un paraugi.

Laba mācību līdzekļu sistēma ir īpaši būtiska skolēniem, kuru skolotāji dažādu iemeslu dēļ vai nu nevar, vai nevēlas nodarboties ar padziļinātu apmācību. Tādos gadījumos laba grāmata (vienalga – papīra vai elektroniskā formātā) uzcītīga skolēna rokās ir varens ierocis sevis pilnveidošanā.

Bieži vien skolēni ar olimpiāžu uzdevumiem saskaras tikai reizi vai divas gadā – pirms skolas vai atklātās olimpiādes, kad skolotājs risināšanai iedod LU A. Liepas NMS sagatavotos iepriekšējā gada uzdevumus un atrisinājumus. Šie atrisinājumi galvenokārt ir rakstīti ļoti konspektīvi. Tie ir paredzēti skolotājiem, lai atvieglotu uzdevumu skaidrošanu skolēniem. Tajos sniegtas īsas norādes risināšanai, pareizā atbilde un – dažreiz – raksturīgākās skolēnu kļūdas. Bez skolotāja palīdzības saprast tik īsi uzrakstītus risinājumus ir ļoti grūti. Taču nereti laika vai pieredzes trūkuma dēļ skolotāji uzdevumus nevis izskaidro, bet liek skolēniem pašiem lasīt risināšanas norādes un censties saprast, kā tie risināmi. Rezultātā lielākā daļa skolēnu uzskata, ka olimpiāžu matemātika priekš viņiem ir pārāk sarežģīta un to saprast var tikai retais.

Tātad situāciju var raksturot šādi: lai skolēni attīstītu matemātisko domāšanu, viņiem vairāk vajadzētu risināt olimpiāžu uzdevumus. Taču skolēniem trūkst motivācijas to darīt, jo dažādu iemeslu dēļ no viņu puses pret šiem uzdevumiem ir negatīva attieksme un pastāv uzskats, ka tie tiek sastādīti tikai šauram skolēnu lokam.

Lai kliedētu tādu uzskatu, vajadzētu skolēnus regulāri trenēt olimpiāžu uzdevumu risināšanā. Svarīgi arī radīt labvēlīgus apstākļus tam, lai viņi trenētos patstāvīgi, bez skolotāja palīdzības. To vienkārši un efektīvi var panākt, izveidojot mācību materiālu, kas satur skolēniem vieglāk saprotamus piemērus no dažādām olimpiādēm, kuru risināšanas gaita ir paskaidrota skolēniem saprotamā valodā.

Kopš 1986. gada tiek rīkotas olimpiādes Baltijas valstu galvaspilsētu pirmo ģimnāziju skolēniem. Skolēni sacenšas matemātikā, fizikā, ķīmijā un informātikā. No katras skolas katrā mācību priekšmetā sacenšas divi skolēni katrā vidusskolas klašu grupā. Olimpiādes notiek reizi gadā pārmaiņus vienā no trim minētajām skolām. Uzdevumus sastāda tā valsts, kurā attiecīgajā gadā norisinās olimpiāde. Katra skola uzdevumus sastāda atbilstoši viņu pašu tradīcijām, un tās savā starpā ievērojami atšķiras.

Viļņas un Tallinas 1. ģimnāzijās, atšķirībā no Rīgas Valsts 1. ģimnāzijas, uzsvars nav likts uz matemātikas mācīšanu. Šajās skolās ir citas prioritātes. Tāpēc arī gados, kad olimpiādes notiek Rīgā, matemātikas uzdevumi atšķiras no tiem, kādi Latvijā tiek risināti Republikas un Atklātajās matemātikas olimpiādēs, jo tiek ņemtas vērā matemātikas mācīšanas īpatnības kaimiņvalstīs. Tādēļ uzdevumi tiek veidoti tā, ka nav nepieciešama dziļu matemātikas faktu zināšana, bet drīzāk tiek pārbaudīta skolēnu spēja veidot loģiskus spriedumus un savā starpā saistīt vienkāršus matemātikas likumus, kā arī tos pielietot dažādās situācijās. Arī grūtības pakāpe nav īpaši augsta.

Šādi uzdevumi der matemātiskās domāšanas attīstīšanai arī tādiem skolēniem, kas iepriekš nav daudz saskārušies ar olimpiāžu uzdevumiem un kas matemātiku skolā apgūst tikai pamatkursa līmenī, nevis padziļināti. Tieši tādēļ minētie uzdevumi ir piemēroti labi saprotama mācību materiāla izveidei arī tādiem skolēniem, kas matemātiku **neapgūst** padziļināti.

Parasti uzdevumi tiek izvēlēti tā, lai tie aptvertu visas svarīgākās nozares: algebru, ģeometriju, skaitļu teoriju, kombinatoriku un algoritmiku. Tiek iekļauti uzdevumi „pierādīt!”, „vai tiesa, ka...?”, „aprēķināt!” utt. Ir gan uzdevumi, kuru atrisinājumi balstās uz labi zināmām teorēmām, gan arī tādi uzdevumi, kuru risināšanā var izmantot metodes, kas skolas kursā netiek apskatītas.

Mācību līdzeklī atrodami Rīgā notikušo Rīgas, Tallinas un Viļņas 1. ģimnāziju olimpiāžu uzdevumi matemātikā un to atrisinājumi.

Uzdevumu atrisinājumi ir rakstīti tā, lai pēc iespējas tiktu sniegtas atbildes uz jebkuru jautājumu, kas risināšanas procesā varētu rasties. Šāda sīka uzdevuma atrisinājuma pierakstīšana ir svarīga, lai skolēnam iemācītu, ka katra darbība ir jāpamato (bieži vien olimpiādēs skolēni punktus zaudē tādēļ, ka ir uzrakstīts tikai gala rezultāts, bet trūkst risinājuma vai pamatojuma). Daļai uzdevumu mācību līdzeklī ir sniegti vairāki atšķirīgi risinājumu veidi. Tas skolēniem māca, ka uzdevumiem nav viena vienīga „pareiza risinājuma”, un mudina viņus meklēt citus veidus, kā atrisināt tos pašus uzdevumus. Arī matemātikā, tāpat kā dzīvē, ir dažādi, reizēm ļoti atšķirīgi ceļi, kā nonākt līdz patiesībai.

Autori

UZDEVUMI

1988. gads

9. klase

1. uzdevums

Dots, ka m un n – naturāli skaitļi, m+1 dalās ar n un n+1 dalās ar m. Aprēķināt m un n.

2. uzdevums

Dots, ka $a+b=c+d$ un $ab=cd$. Pierādīt, ka

$$(a-c)^2(a-d)^2+(b-c)^2(b-d)^2=0.$$

3. uzdevums

Četrstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas diagonāļu krustpunktā. Pierādīt, ka četrstūris ir rombs.

4. uzdevums

Plaknē doti 1988 punkti. No tiem nekādi 3 neatrodas uz vienas taisnes. Aplūkosim punktus, kuru attālumu summa līdz dotajiem 1988 punktiem ir vismazākā iespējamā. Pierādīt, ka tāds punkts ir viens vienīgs.

5. uzdevums

Vai ir iespējams aizpildīt kvadrātveida tabulu, kas sastāv no 1988x1988 rūtiņām, ar skaitļiem tā, ka ne visi skaitļi ir nulles, savukārt jebkuras rindas, kolonnas un diagonāles skaitļu summa ir nulle? (Par diagonālēm tiek uzskatītas arī mazās diagonāles, t.i. diagonāle – jebkura rūtiņu rinda, kura ir paralēla galvenajai diagonālei, tai skaitā viena stūra rūtiņa arī ir diagonāle).

10. klase

1. uzdevums

Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1+x^2=2y \\ 1+y^2=2x \end{cases}$$

2. uzdevums

Trijstūra divas mediānas ir vienādas. Pierādīt, ka tas ir vienādsānu trijstūris.

3. uzdevums

Atrisināt vienādojumu $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x$.

4. uzdevums
Diviem vienādiem regulāriem 100-stūriem katram ir izceltas 19 virsotnes. Pierādīt, ka tos iespējams uzlikt vienu uz otra tā, lai izceltās virsotnes sakristu ne vairāk kā trijās vietās.

5. uzdevums
Vai iespējams skaitli $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1987 \cdot 1989$ izteikt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu?

11. klase

1. uzdevums
Atrisināt vienādojumu $x^4 + x^2 - 2x + 1 = 0$.

2. uzdevums
Trijstūrī augstumu garumu summa ir vienāda ar mediānu garumu summu. Pierādīt, ka tas ir regulārs trijstūris.

3. uzdevums
Polinomam P(x) ir spēkā identitāte: $P(x^2+1) = \left(P(x)\right)^2 + 1$; bez tam P(0) = 0. Atrast P(x).

4. uzdevums
Izliektam daudzskaldnim katrā virsotnē sanāk kopā 4 šķautnes. Pierādīt, ka uz malām var izvietot bultas, kuras pārvērš šķautnes vektoros tā, ka visu iegūto vektoru summa būs $\vec{O}$.

5. uzdevums
Regulārā trijstūrī ar malas garumu 5 izvietots 101 punkts. Pierādīt, ka no šiem punktiem atradīsies 5 tādi punkti, kurus var nosegt ar apli, kura rādiuss ir 0,58.

1991. gads
10. klase

1. uzdevums
Dotas 4 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas viena otrai. Nav tāda punkta, caur kuru ietu 3 no šīm taisnēm. Vai var visos taišņu krustpunktos ierakstīt pa skaitlim tā, lai uz katras taisnes veidotos aritmētiskā progresija un lai visi ierakstītie skaitļi būtu dažādi?

2. uzdevums
Ciparnīca ar fosforizējošiem punktiem sadalīta 60 vienādās daļās, 19 no šiem punktiem tiek noņemti nost. Pierādīt, ka no palikušajiem punktiem trīs punkti ir regulāra trijstūra virsotnes.

3. uzdevums
Pierādīt, ka $2r \leq R$, kur *r* – trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss, bet R – ap trijstūri apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

4. uzdevums
Vai vienādība $9^{111} + 10^{111} = 12^{99} + 1$ ir patiesa?

5. uzdevums
Daudzstūra diagonāli sauc par labu, ja kaut viens tās punkts atrodas daudzstūra iekšpusē. Vai eksistē astoņstūris, kuram ir tieši 5 labas diagonāles?

11. klase

1.uzdevums
Nevienam no vienādojumiem $x^2 + p_i x + q_i = 0$, i = 1; 2; 3, nav reālu sakņu. Pierādīt, ka vienādojumam, ko iegūst, tos saskaitot, arī nav reālu sakņu.

2. uzdevums
Plaknē atrodas sešas taisnes. Starp tām nav divu paralēlu. Nekādas trīs no šīm taisnēm neiet caur vienu punktu. Kādam daudzstūrim visas malas pilnībā atrodas uz šīm taisnēm. Kāds ir lielākais iespējamais šī daudzstūra malu skaits?

3. uzdevums
Figūras M laukumu apzīmēsim ar [M]. Izliekta četrstūra ABCD diagonāles krustojas punktā O. Pierādīt, ka
$\sqrt{[ABCD]} \geq \sqrt{[ABO]} + \sqrt{[CDO]}$.

4. uzdevums
Dots naturāls skaitlis n. Vai skaitlis $n^2 + 1$ var būt pierakstāms ar tieši 10 dažādiem cipariem?

5. uzdevums
Plakne sadalīta vienādās kvadrātiskās rūtiņās kā rūtiņu lapa. Vai var dažās rūtiņās novietot pa dāmai tā, lai tās viena otru neapdraudētu un katrā vertikālē un katrā horizontālē būtu tieši viena dāma?

12. klase

1. uzdevums
Atrisināt vienādojumu
sin(cosx)=1.

2. uzdevums
Valūtas maiņas punkts „Blēdis" maina 1 dolāru pret 4 vācu markām, bet maiņas punkts „Mafija" – 3 vācu markas pret 2 dolāriem. Kādam cilvēkam ir 1 dolārs un 3 vācu markas. Vai viņš ar šo maiņas punktu palīdzību var panākt, ka viņam dolāru ir tikpat, cik vācu marku?

3. uzdevums
Riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kā arī ω_2 un ω_3 krustojas, taču riņķa līnijas ω_1 un ω_3 nekrustojas. Taisne, kas iet caur ω_1 un ω_2 krustpunktiem, un taisne, kas iet caur ω_2 un ω_3 krustpunktiem, krustojas punktā S. Pierādīt, ka pieskare, kas vilkta no punkta S pret ω_1, ir tikpat gara kā pieskare, kas vilkta no S pret ω_3.

4. uzdevums
Skaitlis A ir 1991-cipara skaitlis, kas dalās ar 9. Skaitļa A ciparu summa ir B, savukārt B ciparu summa ir C. Aprēķināt skaitļa C ciparu summu.

5. uzdevums
Vai plaknē var uzrādīt tādu nogriežņu sistēmu (nogrieznī ieskaitīt arī galapunktus), ka katrs plaknes punkts pieder tieši diviem nogriežņiem? (Viens punkts nav nogrieznis.)

1995. gads
10. klase

1. uzdevums
Doti 1995 akmeņi, kas sver attiecīgi 1 kg, 2 kg, … , 1995 kg. Vai tos var sadalīt trīs kaudzēs tā, lai visās kaudzēs būtu gan vienāds akmeņu skaits, gan vienāda kopējā masa? Akmeņus skaldīt nedrīkst.

2. uzdevums
Kādu lielāko daudzumu skaitļu var izvēlēties no kopas {1; 2; 3; …; 100} tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nedalītos ar 5?

3. uzdevums
Vai izliektā daudzstūrī var būt 3 malas, kas garākas par visām diagonālēm? Bet divas šādas malas?

4. uzdevums
Dots, ka $0 \leq x, y, z \leq 1$. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \leq 1$.

5. uzdevums
Dots, ka ABC – vienādmalu trijstūris, R – malas BC iekšējs punkts. Stars AR krusto ap ABC apvilkto riņķa līniju punktā P. Pierādīt, ka $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PR}$.

11. klase

1. uzdevums
Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $8^m - 3^n = 1$.

2. uzdevums
Izliektā četrstūrī ABCD punkti M un N ir attiecīgi malu BC un AD viduspunkti; AB = CD. Pierādīt: ja taisne MN krusto taisnes AB un CD, tad MN veido ar AB un CD vienādus leņķus.

3. uzdevums
Naturālu skaitli sauc par **sevišķu**, ja to var izsacīt formā n^2+1, n=1; 2; 3… . (Tātad sevišķi ir, piemēram, skaitļi 2; 5; 10; … .)
Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu sevišķu skaitļu, kurus var izsacīt kā divu sevišķu skaitļu reizinājumu.

4.uzdevums
Katrs plaknes punkts nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka eksistē tāds ΔABC, ka punkti A, B un C nokrāsoti vienādi, AB = 1, ∢A = 30˚ un ∢C = 90˚.

5. uzdevums
Dots, ka $-1 \le a, b, c, d, e \le 1$ un $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1$.
Pierādīt, ka $a + b + c + d + e \le 3$.

12. klase

1. uzdevums
Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \le \frac{a+b+c}{2}$$

2. uzdevums
Dots, ka α, β, γ - šaurleņķu trijstūra leņķi. Pierādīt, ka
sinα + sinβ + sinγ $\geq$ sin 2α + sin 2β + sin 2γ .

3. uzdevums
Dots, ka $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{66} + \frac{1}{67} = \frac{p}{q}$, p, q – naturāli skaitļi.
Pierādīt, ka p dalās ar 101 .

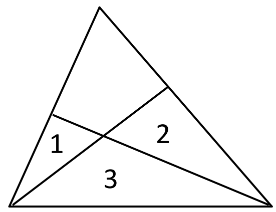
4. uzdevums
Vai eksistē daudzskaldnis ar 8 virsotnēm A, B, C, D, E, F, G, H, kura šķautņu kopa ir {AB, BD, DG, GF, FE, EH, HC, EG, FH, AC, BC, AD } ?

5. uzdevums
Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 3 un 4. Ja uz tāfeles jau atrodas skaitļi a un b, tad uz tās var vēl uzrakstīt skaitli $ab - a - b + 2$ (skaitļi a un b netiek nodzēsti).
Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles parādītos skaitlis 199419951996 ?

1998. gads
10. klase

1. uzdevums
Vienādībā $yx + y^2 = 14$ samainīt divus simbolus vietām tā, lai tā kļūtu patiesa vērtībām $x = 3$, $y = 2$. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

2. uzdevums
Zīmējumā (1. att.) norādīti trijstūra triju daļu laukumi. Aprēķināt ceturtās daļas laukumu.



1. att.

3. uzdevums
Pierādīt, ka skaitlis $11 \cdot 29^n + 1$ ir salikts skaitlis jebkuram naturālam skaitlim n.

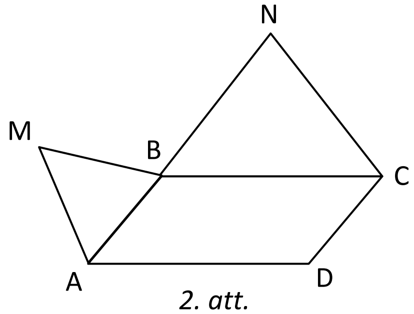
4. uzdevums
Vienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir saknes x_1 un x_2, bet vienādojumam $x^2 + ax + b = 0$ ir saknes x_2 un x_3 (skaitļi x_1, x_2 un x_3 ir dažādi). Izteikt x_1, x_2 un x_3 ar p, q, a un b, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

5. uzdevums
Uz galda stāv 1998 konfektes. Divi spēles dalībnieki pārmaiņus ņem 1, 2 vai 3 konfektes; pie tam nedrīkst ņemt tikpat konfekšu, cik iepriekšējā gājienā paņēmis pretinieks. Zaudē tas, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot?

11. klase

1. uzdevums
Pozitīvi skaitļi x, y un z šajā kārtībā veido aritmētisko progresiju. Tas pats attiecas uz skaitļiem x^2, y^2 un z^2. Pierādīt, ka skaitļi x^3, y^3 un z^3 arī veido aritmētisko progresiju.

2. uzdevums
Dots, ka ABCD – paralelograms, bet trijstūri ABM un BCN – regulāri (skatīt 2. att.). Pierādīt, ka trijstūris MND – regulārs.



2. att.

3. uzdevums
Vai iespējams atrast tādus 3 atšķirīgus nenulles ciparus, lai visi no tiem sastādītie trīsciparu skaitļi būtu pirmskaitļi?

4. uzdevums
Kvadrāts sastāv no *n*x*n* rūtiņām. Katru rūtiņu nokrāso baltu vai sarkanu. Pie tam katrs 2x2 rūtiņu kvadrāts satur tieši 3 vienādi nokrāsotas rūtiņas. Cik ir dažādu šādu krāsojumu?

5. uzdevums
Ir 10 pēc izskata vienādas monētas. Deviņām no tām masas ir vienādas, bet desmitajai – atšķirīga. Kā ar divu svēršanu palīdzību uz sviras svariem bez atsvariem var noteikt, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka? (Pašu atšķirīgo monētu atrast nav prasīts.)

12. klase

1. uzdevums
Kādas vērtības var pieņemt izteiksme sinx – cosx, ja x – patvaļīgs reāls skaitlis?

2. uzdevums
Kuba šķautnes garums ir 1. Kubs ortogonāli projicējas uz plakni un uz asi, kas perpendikulāra šai plaknei. Pierādīt, ka abu projekciju skaitliskās vērtības ir vienādas.

3. uzdevums
Atrast kādu tādu veselu pozitīvu skaitli n, ka katrs no skaitļiem n, 2n, 3n, 4n, 5n ir naturāla skaitļa vesela pakāpe ar pakāpes rādītāju, kas lielāks nekā 1.

4. uzdevums
Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem *a, b, c* ir spēkā nevienādība $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{c+a}\leq\frac{1}{8}$.

5. uzdevums
Vai iespējams uzbūvēt bezgalīgi daudzas bezgalīgas aritmētiskas progresijas, kas sastāv no naturāliem skaitļiem, tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādi nosacījumi:

a) nekādām divām progresijām diferences nesakrīt;

b) katrs naturāls skaitlis pieder tieši vienai no šīm progresijām?

2001. gads
10. klase

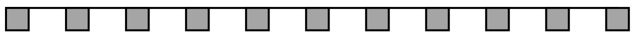
1. uzdevums
Izteiksmē
$$x^2 * (x+1)^2 * (x+2)^2 * (x+3)^2 * (x+4)^2 * (x+5)^2 * (x+6)^2 * (x+7)^2$$
zvaigznīšu vietā ievietot „+” un „-” zīmes tā, lai izteiksmes vērtība būtu 0 visiem x.

2. uzdevums
Pa riņķa līniju uzrakstīti 7 reāli skaitļi, kuru summa ir 7. Pierādīt, ka var atrast četrus pēc kārtas izrakstītus skaitļus, kuru summa ir vismaz 4.

3. uzdevums
Šaurleņķu trijstūrī ievilkta riņķa līnija ortogonāli projicēta uz visām trijstūra malām. Pierādīt, ka triju iegūto projekciju nogriežņu seši galapunkti atrodas uz vienas riņķa līnijas.

4. uzdevums
Kādiem naturāliem n skaitlis $(2n+1)(6n+5)$ ir vesela skaitļa kvadrāts?

5. uzdevums
Pagrabā, kas sastāv no 11 telpām (skat. 3. att.), slēpjas noziedznieks.



3. att.

Policija katru dienu pārmeklē vienu telpu un naktī aiziet mājās atpūsties. Noziedznieks katru nakti pāriet uz vienu no telpām, kas atrodas blakus viņa iepriekšējai apmešanās vietai. Kā policija var notvert noziedznieku?

11. klase

1. uzdevums
Dots, ka 5a+4b dalās ar 7 un arī 4a+3b dalās ar 7. Pierādīt, ka ab dalās ar 49.

2. uzdevums
Sapulces sākumā katrs no 10 dalībniekiem sarokojās ar dažiem citiem. Vai var gadīties, ka cilvēku daudzumi, ar kuriem viņi sarokojās, ir $9;\ 9;\ 9;\ 8;\ 8;\ 8;\ 7;\ 6;\ 4;\ 4?$

3. uzdevums
Desmit punkti sadala riņķa līniju ar rādiusu R 10 vienādās daļās. Zināms, ka A; B; C; D ir četri pēc kārtas ņemti no šiem punktiem. Pierādīt, ka $AD - BC = R$.

4. uzdevums

Dots, ka $a_1; a_2; \dots; a_n$ un $b_1; b_2; \dots; b_n$ ir pozitīvi skaitļi. Vai daļa $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ var būt lielāka par visām daļām $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}$?

5. uzdevums

Vienā kaudzē ir m konfektes, otrā – n konfektes. Divi spēlētāji pamīšus izdara gājienus. Ar vienu gājienu tiek pilnībā apēsta viena kaudze, bet otra kaudze tiek sadalīta divās (konfektes lauzt nedrīkst). Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot?

12. klase

1. uzdevums

Kādiem reāliem parametriem a nevienādība $x^2 + y^2 + z^2 \geq a(xy + yz)$ ir patiesa visām reālām x, y, z vērtībām?

2. uzdevums

Koordinātu plaknē konstruēja funkcijas $y = \cos^2 x$ grafiku. Ar A apzīmēja punktu (0; 1). Katram grafika punktam P piekārto punktu P_1 tā, ka P ir nogriežņa AP_1 viduspunkts (punktam A piekārto viņu pašu). Kādas funkcijas grafiku veido visi šādi iegūtie punkti P_1?

3. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $1;\ 2;\ 4;\ 8; \dots; 2^{n-1}; 2^n$. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst divus uz tāfeles esošus skaitļus un uzrakstīt nodzēsto skaitļu starpības absolūto vērtību. Tā turpina, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis. Kāds tas var būt?

4. uzdevums

Dots, ka $\sphericalangle MON = 120°$. Regulārs trijstūris ABC ar malas garumu 1 novietots tā, ka virsotne A pieder staram OM, virsotne B – staram ON, bet virsotne C atrodas ∢MON iekšpusē. Pierādīt, ka visas iespējamās punkta C pozīcijas atrodas uz vienas taisnes.

5. uzdevums

Vai var izvēlēties 2001 pēc kārtas esošu naturālu skaitli tā, lai tieši 17 no izvēlētajiem būtu pirmskaitļi?

2004. gads

10. klase

1. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts kvadrāttrinoms $x^2 + px + q$. Divi spēlētāji pamīšus maina par 1 vai nu p, vai q; pie tam aizliegts tūlīt pēc pretinieka gājiena izdarīt tam pretējo gājienu, t.i., divi viens otram sekojoši gājieni nevar būt $p \to p-1$ un $p \ \to p+1$ vai $q \to \ q-1$ un $q \to q+1$. Vai pirmais spēlētājs noteikti var panākt, lai uz tāfeles kādreiz parādītos kvadrāttrinoms, kuram ir reālas saknes? (Visi koeficienti ir reāli skaitļi.)

2. uzdevums
Dots, ka x^2+y^2, x^3+y^3 un x^4+y^4 ir racionāli skaitļi. Pierādīt, ka $x+y$ un xy arī ir racionāli skaitļi.

3. uzdevums
Dots, ka ABC – regulārs trijstūris, M – tā centrs, P – iekšējs punkts, kas atšķiras no M, V – MP viduspunkts. Zināms, ka MP nav ne paralēls, ne perpendikulārs nevienai no ΔABC malām. Caur P novilkti trīs nogriežņi, kas paralēli ABC malām; šo nogriežņu galapunkti atrodas uz ABC kontūra. Pierādīt, ka šo nogriežņu viduspunkti veido regulāru trijstūri ar centru V.

4. uzdevums
Uz gara taisna galda vienas malas novietotas 17 zelta monētas; tām visām ir dažādas vērtības. Pierādiet, ka var vienu reizi noiet gar galdu (iešanas virzienu var izvēlēties) un paņemt 5 monētas tā, ka katra paņemtā monēta, sākot ar otro, ir vērtīgāka par iepriekšējo paņemto monētu.

5. uzdevums
Pieņemsim, ka x un y – veseli pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka 5^x+5^y ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa tad un tikai tad, ja $(x-y)$ ir pāra skaitlis.

11. klase

1. uzdevums
Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

2. uzdevums
Dots, ka $a>0$, $b>0$, $c>0$ un $ab+bc+ca=1$.
Pierādiet, ka $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$.

3. uzdevums
Dots, ka $p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} < p_{31}$ – pirmskaitļi un $p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{31}^4$ dalās ar 30. Pierādīt, ka trīs no šiem pirmskaitļiem ir viens otram sekojoši pirmskaitļi.

4. uzdevums
Divas riņķa līnijas ar dažādiem rādiusiem krustojas punktos A un B. Pirmās riņķa līnijas pieskare punktā A un otrās riņķa līnijas pieskare punktā B krustojas punktā P. Pierādiet: abas riņķa līnijas no punkta P redzamas vienādos leņķos.

5. uzdevums
Regulāra n-stūra virsotnēs atrodas k sienāži (k>n). Katru sekundi kaut kādi divi sienāži, kas atrodas vienā virsotnē, aizlec uz **dažādām** kaimiņu virsotnēm. Pēc x sekundēm izrādījās, ka katrā virsotnē ir tikpat sienāžu, cik tur bija sākumā. Pierādīt, ka x dalās ar n.

12. klase

1. uzdevums
Noskaidrojiet, cik dažādu reālu sakņu ir vienādojumam $x^3 - 3x = a$ atkarībā no reāla parametra a.

2. uzdevums
Vai vienādojumam $x^2 + xy = y^2 + 1$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos?

3. uzdevums
Dots, ka ABC – regulārs trijstūris, bet P – tāds punkts, ka $\sphericalangle APC = 30°$, $\sphericalangle BPA = 40°$, $\sphericalangle ABP > 90°$. Aprēķināt $\sphericalangle PBC$.

4. uzdevums
Definējam $a_1 = \alpha \in R$ un $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ pie $n = 1; 2; 3; \dots$. Cik dažādām α vērtībām pastāv vienādība $a_{2004} = 0$?

5. uzdevums
Aplūkojam visas virknes garumā 6, kas izveidotas no nullēm un vieniniekiem (tai skaitā arī virknes 000000 un 111111). Pierādīt, ka sešas virknes var pasludināt par izcilām, lai izpildītos sekojošais: katrai virknei *a* var atrast tādu izcilu virkni, kas atšķiras no *a* **tieši** trīs pozīcijās.

2007. gads
10. klase

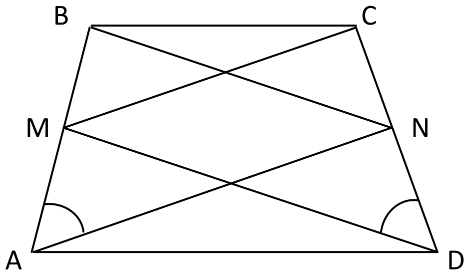
1. uzdevums
Iedomāsimies, ka izteiksmē $(x^3 - 7x + 6)^2 \cdot (x^2 + 4x + 3)^3$ atvērtas iekavas un savilkti līdzīgie locekļi. Aprēķināt:
1) iegūtā polinoma koeficientu summu;
2) to koeficientu summu, kas ir pie pāra pakāpēm.

2. uzdevums
Skaitlis n ir naturāls, n>2. To dala ar atlikumu ar $1, 2, \dots, n-1$. Visu atlikumu summa ir n. Aprēķināt skaitli n.

3. uzdevums

Dota trapece ABCD. Uz tās sānu malām atrodas punkti M un N (skat. 4. att.). Zināms, ka $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MDN$.

Pierādīt, ka $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MCN$.



4. att.

4. uzdevums

Kvadrāts sastāv no 5x5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. No tām 16 ir nokrāsotas. Pierādīt, ka eksistē tāds 2x2 rūtiņas liels kvadrāts, kurā ir nokrāsotas vismaz 3 rūtiņas.

5. uzdevums

Ir n naturālu skaitļu virkne. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru skaitli, kas neatrodas pašā labajā galā, un aizstāt to ar skaitļu summu, kas atrodas pa labi no šī skaitļa. Pierādīt: ja gājienus izpilda neierobežoti ilgi, tad kāda no iegūtajām virknēm sakritīs ar iepriekšējo.

11. klase

1. uzdevums

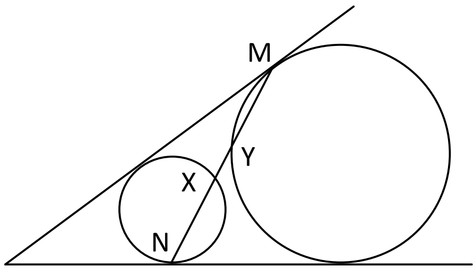
Kādiem naturāliem skaitļiem m un n izpildās sekojošais: ja $m \leq x \leq n$ un $m \leq y \leq n$, tad $m \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq n$?

2. uzdevums

Deviņciparu naturāla skaitļa n ciparu summa ir 3. Kāda var būt n^3 ciparu summa?

3. uzdevums

Divas riņķa līnijas ievilktas leņķī. Punkti M un N ir pieskāršanās punkti (skat. 5. att.) Pierādīt, ka NX=MY.



5. att.

4. uzdevums

Pa riņķa līniju izrakstīti 50 veseli skaitļi, kuru summa ir 1. Virkni, kas sastāv no viena vai vairākiem pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem (ne vairāk kā 50), sauc par labu, ja tās visu locekļu summa ir pozitīva. Cik var būt labu virkņu? Virknes apskata pulksteņrādītāja kustības virzienā.

5. uzdevums

Naturālu skaitļu komplektā $a_1, a_2, \ldots, a_n$ daži skaitļi, iespējams, ir vienādi savā starpā. Katram naturālam skaitlim k ar b_k apzīmē tādu komplekta skaitļu daudzumu, kuri nav mazāki par k. Pierādīt, ka $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

12. klase

1. uzdevums
Dots, ka $x + y = x^2 + y^2$. Pierādīt, ka $x + y \leq 2$.

2. uzdevums
Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 - 7y^3 - 49z^3 = 0$.

3. uzdevums
Četrstūris ABCD ir ievilkts riņķa līnijā. Ir spēkā sakarība AB:BC=AD:DC, K – diagonāles AC viduspunkts. Stars BK krusto riņķa līniju punktā M. Jāpierāda: AM=CD.

4. uzdevums
Kvadrāts sastāv no nxn ($n \geq 2$) vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Dažas rūtiņas ir nokrāsotas. Sauksim nokrāsotu rūtiņu par īpašu, ja tā ir vai nu vienīgā nokrāsotā savā rindā vai kolonnā, vai arī vienīgā nokrāsotā gan savā rindā, gan kolonnā. Kāds ir lielākais iespējamais īpašo rūtiņu skaits?

5. uzdevums
Funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir visur definētas un tām eksistē atvasinājumi. Visiem x izpildās $f' g + 3f g' \geq 0$. Zināms, ka $f(1) = f(2007) = 1$.
Pierādīt, ka $g(2007) \geq g(1)$.

Atrisinājumi
1988. gads
9. klase

1. uzdevums

Ja $m+1$ dalās ar n, tad $m+1 \geq n$ jeb $m \geq n-1$. Ja $n+1$ dalās ar m, tad $n+1 \geq m$. Esam ieguvuši, ka $n-1 \leq m \leq n+1$. Tas nozīmē, ka $m=n-1$ vai $m=n$, vai arī $m=n+1$.
Ja $m=n$, tad skaitlis $n+1$ dalās ar n. Pierakstīsim šo skaitli šādā formā: $n+1=An, A \in N$. Ar ekvivalentiem pārveidojumiem iegūsim, ka $n(A-1)=1$. Tā kā n ir naturāls skaitlis un $A-1$ – vesels skaitlis, tad vienīgās vērtības, kas apmierina šādu vienādojumu, ir $n=1$ un $A-1=1$; $A=2$. Viegli pārliecināties, ka ar vērtībām $m=n=1$ uzdevumā prasītais izpildās.
Ja $m=n+1$, tad skaitlim $m+1=n+2$ jādalās ar n. Tādā gadījumā $n+2$ var pierakstīt kā $n+2=Bn; B \in N$. No šīs sakarības varam iegūstam, ka $n(B-1)=2$. Tā kā n ir naturāls, bet $B-1$ – vesels skaitlis, tad vienīgās pieļaujamās n vērtības ir 1 un 2. Attiecīgi m vērtības ir 2 un 3. Varam pārbaudīt šīs vērtības un pārliecināties, ka tās der kā uzdevuma atrisinājums.
Ja $m=n-1$, rīkojamies līdzīgi kā iepriekš. Šajā gadījumā iegūsim vērtības $m=1$, $n=2$ un $m=2, n=3$.

2. uzdevums

Ieviesīsim šādus apzīmējumus: $a+b=c+d=\alpha$ un $ab=cd=\beta$.
Apskatīsim kvadrātvienādojumu $x^2-\alpha x+\beta=0$. Šī vienādojuma saknes ir skaitļi a un b, kā arī c un d. Tā kā apskatītajam vienādojumam ir divas saknes, tad $a=c$ un $b=d$ vai $a=d$ un $b=c$.
Ja $a=c$ un $b=d$, tad $a-c=0$ un $b-d=0$, tātad arī
$(a-c)^2(a-d)^2+(b-c)^2(b-d)^2=0$.
Ja $a=d$ un $b=c$, tad $a-d=0$ un $b-c=0$. Arī šajā gadījumā
$(a-c)^2(a-d)^2+(b-c)^2(b-d)^2=0$.

3. uzdevums

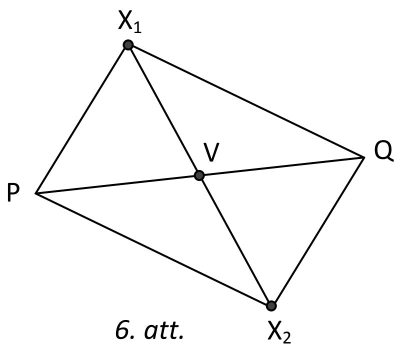
Dotā četrstūra malas ir pieskares tajā ievilktajai riņķa līnijai. Ja šī četrstūra diagonāle iet caur ievilktās riņķa līnijas centru, tad tā sadala attiecīgos četrstūra virsotņu leņķus uz pusēm. Aplūkosim četrstūri ABCD, kuram izpildās uzdevumā dotais. Novelkam diagonāli AC. Iegūstam, ka $\sphericalangle DAC=\sphericalangle BAC$ un $\sphericalangle DCA=\sphericalangle BCA$. Trijstūri ACD un ACB ir vienādi (lml), tāpēc AD=AB un CD=CB.
Novelkot diagonāli BD un veicot līdzīgus spriedumus, iegūsim, ka BA=BC un DA=DC. Līdz ar to esam pierādījuši, ka visas četrstūra malas ir vienādi garas, tātad četrstūris ir rombs.

4. uzdevums

Apzīmēsim dotos 1988 punktus ar $P_1,\ P_2,\ P_3,\ \dots\ ,P_{1988}$ un pieņemsim no pretējā, ka izteiksmes $XP_1 + XP_2 +\ XP_3 \dots + XP_{1988}$ mazākā vērtība tiek sasniegta vismaz divos gadījumos: ja X ir X_1 un ja X ir X_2. Apzīmēsim nogriežņa X_1X_2 viduspunktu ar V un pierādīsim, ka $VP_1 +\ VP_2 + \cdots + VP_{1988} < X_1P_1 + X_1P_2 + \cdots + X_1P_{1988}$. Tā būs pretruna ar X_1 izvēli (izrādās, ka pie $X = X_1$ netiek sasniegta summas mazākā vērtība, jo pie $X = V$ summa ir vēl mazāka). Tātad pieņēmums nepareizs, un uzdevums būs atrisināts.

Vismaz viens no punktiem $P_1, P_2, \dots\ , P_{1988}$ (apzīmēsim to ar P) neatrodas uz taisnes X_1X_2. Papildinām trijstūri X_1PX_2 līdz paralelogramam PX_1QX_2; tā diagonāļu krustpunkts ir V. Tad $2VP = PQ < PX_1 + QX_1 = PX_1 + PX_2$, tātad

$$VP < \frac{1}{2}(X_1P + X_2P) \qquad (*)$$



6. att.

Ja punkts P ir nogriežņa X_1X_2 iekšējs punkts, nevienādība $(*)$ ir acīmredzama. Ja punkts P atrodas uz taisnes X_1X_2, bet nav nogriežņa X_1X_2 iekšējs punkts, tad acīmredzami ir spēkā

$$VP = \frac{1}{2}(X_1P + X_2P) \qquad (**)$$

Tātad katram *i*, $1 \le i \le 1988$, pastāv nevienādība

$$VP_i \le \frac{1}{2}(X_1P_i + X_2P_i) \qquad (***),$$

turklāt vismaz vienam *i* tā ir stipra. Saskaitot $(***)$ pie $i = 1; 2; 3; \dots; 1988$, iegūstam

$$VP_1 + VP_2 + \cdots + VP_{1988} < \frac{1}{2}\left((X_1P + \cdots + X_1P_{1988}) + (X_2P_1 + \cdots + XP_{1988})\right).$$

Tā kā saskaņā ar mūsu pieņēmumu $X_1P_1 + \cdots + X_1P_{1988} = X_2P_1 + \cdots + X_2P_{1988}$, tad seko, ka $VP_1 +\ VP_2 + \cdots + VP_{1988} < X_1P_1 + X_1P_2 + \cdots + X_1P_{1988}$, k.b.j.

5. uzdevums

Apskatīsim šādu kvadrātu, kas sastāv no 4x4 rūtiņām:

0	1	- 1	0
- 1	0	0	1
1	0	0	- 1
0	- 1	1	0

7.att.

Šajā tabulā katras rindas, katras kolonnas un katras diagonāles locekļu summa ir nulle. Šādu fragmentu ievietojot 1988x1988 rūtiņas lielajā kvadrātā un pārējās rūtiņās sarakstot nulles, iegūsim uzdevumā prasīto situāciju.

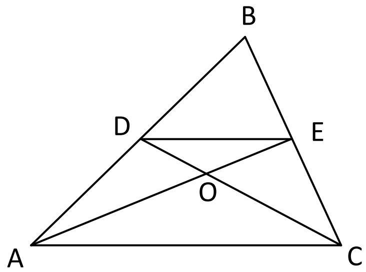
10. klase

1. uzdevums

Saskaitot abus vienādojumus, iegūsim $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 0$. Šis vienādojums ekvivalents vienādojumam $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$. Tā kā izteiksmes $(x-1)^2$ un $(y-1)^2$ ir nenegatīvas, bet to summa ir 0, tad $(x-1)^2 = (y-1)^2 = 0$. Tāpēc $x = 1$ un $y = 1$.

2. uzdevums

Uzzīmēsim trijstūri ABC, kura mediānas AE un CD ir vienādi garas. Punkti D un E ir attiecīgi malu AB un BC viduspunkti, tāpēc DE ir trijstūra viduslīnija; tātad $DE||AC$. Tas nozīmē, ka $\sphericalangle EAC = \sphericalangle AED$ un $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CDE$. Leņķi DOE un COA ir vienādi kā krustleņķi. Tātad trijstūri DEO un CAO ir līdzīgi. Tā kā DE:CA=1:2, tad arī DO:CO=EO:AO=1:2. No tā izriet, ka DO=EO un AO=CO. Apskatīsim trijstūrus AOD un COE. Leņķi DOA un EOA ir vienādi. Līdz ar to paši trijstūri ir vienādi (mlm). No tā seko, ka AD=CE. Tā kā CD un AE – mediānas, tad DB=AD=CE=EB un AB=CB, tātad trijstūris ABC ir vienādsānu.



8. att.

3. uzdevums

Pārveidosim doto vienādojumu:

$$1^3 + \sin^3 x + \cos^3 x \; = \frac{3}{2} \cdot 2\sin x \; \cdot \cos x$$

$$1^3 + \sin^3 x + \cos^3 x \; - 3 \cdot 1 \cdot \sin x \; \cdot \cos x = 0$$

$$(1 + \sin x + \cos x)(1^2 + \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x) = 0$$

No iegūtā vienādojuma seko, ka

$\mathbf{1 + \sin x + \cos x = 0}$ vai

$\mathbf{1^2 + \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0}$

Ja $1 + \sin x + \cos x = 0$, tad

$$\sin x + \cos x = -1 \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \mp\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}} \mp \frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{2\pi n}, n \in Z$$

Ja $1^2 + \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0$, tad
$$1 + 1 - \sin x - \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0$$
$$\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2$$
$$\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x = 2$$
Izteiksmes $\frac{1}{2}\sin 2x$ vērtība nepārsniedz $\frac{1}{2}$. No iepriekš rēķinātā zinām, ka
$$\sin x + \cos x = \cos(x - \frac{\pi}{4}) : \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \tfrac{\pi}{4}).$$
Tas nozīmē, ka $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$. Tātad $\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2.$
Līdz ar to vienādojumam
$$1^2 + \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0$$
nav atrisinājumu.

4. uzdevums

Pieņemsim pretējo uzdevumā prasītajam – ka jebkurā 100-stūru novietojumā sakrīt vismaz pa 4 izceltām virsotnēm.
Apskatīsim visus veidus, kā savstarpēji novietot dotos 100-stūrus vienu otram virsū, un izskaitīsim, cik pavisam pastāv dažādu izcelto virsotņu sakritību. Ja katram 100-stūrim ir izceltas 19 virsotnes, tad pavisam iespējami $19 \cdot 19 = 361$ veidi, kā divas izceltas virsotnes varētu sakrist. Taču pavisam pastāv 100 dažādi veidi, kā savstarpēji novietot 100-stūrus. Lai mūsu pieņēmums būtu patiess, vajadzīgas vismaz
$4 \cdot 100 = 400$ dažādas izcelto virsotņu sakritības. Taču 361<400, tātad pieņēmums ir aplams. Tas nozīmē, ka eksistē tāds 100-stūru novietojums, kurā sakrīt ne vairāk kā 3 izceltās virsotnes.

5. uzdevums

Apskatīsim, kādu atlikumu iegūsim, skaitli $(4n+1)(4n+3)(4n+5)(4n+7)$ dalot ar 4 (šajā risinājumā visi ieviestie burtu apzīmējumi lietoti veselu skaitļu apzīmēšanai). Atverot iekavas, iegūsim polinomu, kurā saskaitīti vairāki locekļi, kas dalās ar 4, un skaitlis $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 = 4 \cdot 26 + 1$. Tātad skaitli $(4n+1)(4n+3)(4n+5)(4n+7)$, dalot ar 4, dod atlikumu 1.
Apskatāmais reizinājums sastāv no 995 reizinātājiem. Viegli pārliecināties, ka pirmos 992 reizinātājus varam sagrupēt 248 grupās, kuras pierakstāmas formā $(4n+1)(4n+3)(4n+5)(4n+7)$. Sareizinot 248 izteiksmes, no kurām katra,

dalot ar 4, dod atlikumu 1, iegūsim izteiksmi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu $1^{248} = 1$. Tāpēc sākotnējo reizinājumu varam pierakstīt formā $(4A+1) \cdot 1985 \cdot 1987 \cdot 1989 = (4A+1)(4k+1)(4k+3)(4k+5)$. Šis skaitlis, dalot ar 4, dod tādu pašu atlikumu kā skaitlis $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, tātad atlikumu 3.
Esam ieguvuši, ka skaitlis $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1987 \cdot 1989$, dalot ar 4, dod atlikumu 3.
Apskatīsim, kādus atlikumus, dalot ar 4, var dot divu skaitļu kvadrātu summa $n = a^2 + b^2$. Šķirosim trīs gadījumus:

1) abi skaitļi ir pāra skaitļi;
2) viens no skaitļiem ir pāra, otrs – nepāra;
3) abi skaitļi ir nepāra.

1) Skaitļus a un b var pierakstīt formā $a = 2a_1$ un $b = 2b_1$. Tad
$$n = (2a_1)^2 + (2b_1)^2 = 4a_1^2 + 4b_1^2 = 4(a_1^2 + b_1^2).$$
2) Pieņemsim, ka skaitlis a ir pāra, bet b – nepāra. Pierakstīsim tos šādi: $a = 2a_1$ un $b = 2b_1 + 1$. Tad
$$n = (2a_1)^2 + (2b_1+1)^2 = 4a_1^2 + 4b_1^2 + 4b_1 + 1 = 4(a_1^2 + b_1^2 + b_1) + 1.$$
3) Apzīmēsim a un b attiecīgi ar $2a_1 + 1$ un $2b_1 + 1$. Tad
$$\begin{aligned} n = (2a_1+1)^2 + (2b_1+1)^2 &= 4a_1^2 + 4a_1 + 1 + 4b_1^2 + 4b_1 + 1 \\ &= 4(a_1^2 + a_1 + b_1^2 + b_1) + 2. \end{aligned}$$
Redzam, ka divu naturālu skaitļu kvadrātu summa, dalot ar 4, nevar dot atlikumu 3, tāpēc skaitli $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1987 \cdot 1989$ nav iespējams uzrakstīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu.

11. klase

1. uzdevums

Dotais vienādojums ekvivalents vienādojumam $(x^2)^2 + (x-1)^2 = 0$. Tā kā izteiksmes $(x^2)^2$ un $(x-1)^2$ ir nenegatīvas, bet to summa ir 0, tad $(x^2)^2 = (x-1)^2 = 0$. No tā seko, ka $x = 0$ un $x = 1$, taču x nevar vienlaicīgi pieņemt divas dažādas vērtības. Tas nozīmē, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājumu.

2. uzdevums

Trijstūrī augstums ir īsākais nogrieznis, kas savieno virsotni ar tai pretējo malu saturošas taisnes punktu. Tas nozīmē, ka neviena mediāna nevar būt mazāka par attiecīgo augstumu. Tāpēc arī mediānu summa nevar būt īsāka par visu augstumu summu. Vienīgais gadījums, kad šīs summas ir vienādas, ir tad, ja mediānas un augstumi sakrīt. Un trijstūris, kurā mediānas un augstumi sakrīt, ir regulārs trijstūris. Līdz ar to esam pierādījuši uzdevumā prasīto.

3. uzdevums

Dotajā sakarībā ievietosim vērtību x=0. Iegūsim, ka $P(0+1) = 0+1$ jeb $P(1) = 1$. Savukārt, ja sakarībā x vietā ievietosim skaitli 1, tad iegūsim, ka $P(2) = 2$. Ievietojot vērtību x=2, iegūsim $P(5) = 5$. Šādi turpinot, iegūsim, ka $P(26) = 26$, utt., t.i.,

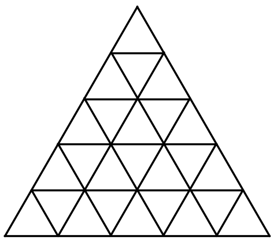
$P(x) = x$ bezgalīgi daudzām x vērtībām: ja $P(a) = a$, tad arī $P(a^2 + 1) = = \left(P(a)\right)^2 + 1 = a^2 + 1$. Tātad polinomam $P(x) - x$ ir bezgalīgi daudz sakņu. (Visas iegūtās saknes ir dažādas, jo $a^2 + 1 > a$.) Kā zinām, bezgalīgi daudz sakņu ir tikai nulles polinomam, tāpēc $P(x) - x = 0$ visiem x, un $P(x) = x$ visiem x.
Pārbaude parāda, ka polinoms $P(x) = x$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

4. uzdevums

Uz labu laimi izvēlēsimies virsotni A. Sākot no šīs virsotnes, „iesim" pa šķautnēm tā, ka katra šķautne tiek izmantota augstākais vienu reizi. Izmantotās šķautnes atbilstoši iešanas virzienam apzīmēsim ar vektoriem. Darām to, kamēr ir kur iet. Tā kā katrā virsotnē savienots pāra daudzums šķautņu, tad, aizejot uz kādu virsotni, vienmēr pastāv iespēja no šīs virsotnes iziet. Izņēmums ir A: tajā mēs sākām nevis ar ieiešanu, bet ar iziešanu. Tātad mūsu staigāšana noslēdzas punktā A.
Atgriežoties punktā A, visu iegūto vektoru summa būs $\vec{O}$. Katrā virsotnē būs atlicis pāra skaits neapzīmētu šķautņu. Atkārtojam procesu, līdz visas šķautnes būs „izlietotas".

5. uzdevums

Sadalīsim trijstūri 25 mazos regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. 9. att.)



9.att.

Tā kā $25 \cdot 4 = 100 < 101$, tad vismaz viens no šiem trijstūriem satur ne mazāk kā $4 + 1$, t.i., ne mazāk kā 5 no izvietotajiem punktiem. Bet šī trijstūra apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{1{,}74}{3} = 0{,}58$.

1991. gads
10. klase

1. uzdevums

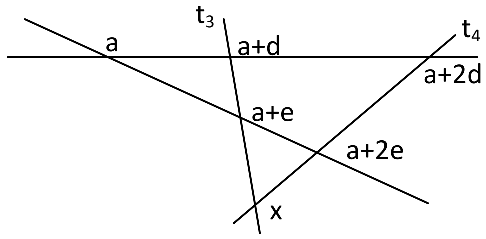
Pieņemsim, ka taišņu krustpunktos ir sarakstīti dažādi skaitļi un ka uz katras taisnes sarakstītie skaitļi veido aritmētisko progresiju. Mazāko no skaitļiem apzīmēsim ar a, bet taisnes, kas iet caur attiecīgo punktu – ar t_1 un t_2. Gan taisni t_1, gan t_2 krusto vēl divas taisnes, tātad uz katras no tām ir uzrakstīti vēl divi skaitļi. Bez tam tie ir lielāki par a. Šos skaitļus uz taisnes t_1 apzīmēsim ar $a+d$ un $a+2d$, bet uz taisnes t_2 – ar $a+e$ un $a+2e$.

Aplūkosim, kā novietotas pārējās divas taisnes. Šķirosim divus gadījumus:

1) Viena no taisnēm (apzīmēsim ar t_3) iet caur punktiem, kur ierakstīti skaitļi $a+d$ un $a+e$, bet otra (t_4) – caur $a+2d$ un $a+2e$;
2) Uz vienas no taisnēm (apzīmēsim ar t_3) rakstīti skaitļi $a+d$ un $a+2e$, bet uz otras (t_4) $-$ $a+2d$ un $a+e$.

Abos gadījumos taišņu t_3 un t_4 krustpunktā ierakstīto skaitli apzīmēsim ar x.

1) Ja skaitļi $a+d$, $a+e$ un x, kā arī $a+2d$, $a+2e$ un x veido aritmētisko progresiju, tad



10. att.

$$a+e=\frac{a+d+x}{2};$$

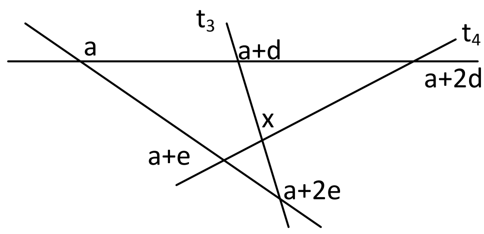
$$2a+2e=a+d+x \qquad (1)$$

un $a+2e=\dfrac{a+2d+x}{2}$;

$$2a+4e=a+2d+x \qquad (2)$$

No vienādības (2) atņemot vienādību (1), iegūsim, ka $2e=d$. Līdz ar to $a+d=a+2e$, tātad divos punktos ierakstīti vienādi skaitļi.

2) Ja $a+d$, x un $a+2e$, kā arī $a+2d$, x un $a+e$ veido aritmētiskās progresijas, tad



11. att.

$$\frac{a+d+a+2e}{2}=x=\frac{a+2d+a+e}{2};$$

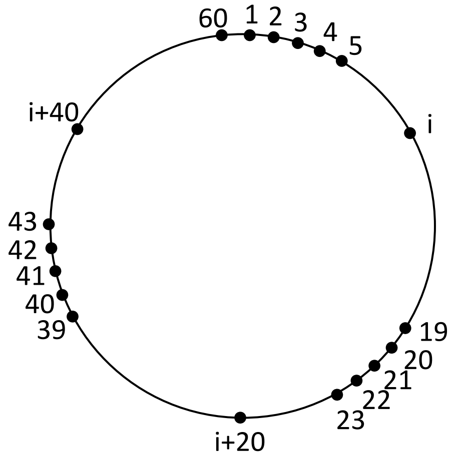
$$a+d+a+2e=a+2d+a+e;$$

$$a+e=a+d\ .$$

Divos krustpunktos ierakstītie skaitļi ir vienādi.

Esam ieguvuši, ka nav iespējams krustpunktos sarakstīt dažādus skaitļus tā, lai uz katras taisnes tie veidotu aritmētisko progresiju.

2. uzdevums

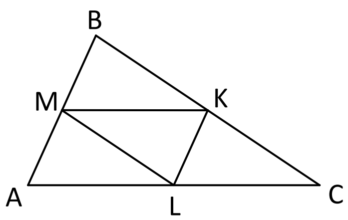


12. att.

Dotais uzdevums ir līdzīgs šādam uzdevumam: „Uz riņķa līnijas atlikti 60 punkti, kas to sadala 60 vienādos lokos. Tiek izdzēsti 19 punkti. Pierādīt, ka iespējams izveidot trijstūri, kura virsotnes ir 3 no pārējiem punktiem."

Sanumurēsim visus 60 punktus pēc kārtas. Ar i apzīmēsim naturālu skaitli robežās no 1 līdz 20. Trijstūris, kura virsotnes atrodas punktos i, i+20 un i+40, ir regulārs, jo starp punktiem i un i+20, kā arī starp i+20 un i+40 un starp punktiem i+40 un i ir 20 vienādi loki. Šādi esam aprakstījusi 20 regulārus trijstūrus, kuru virsotnes atrodas atliktajos punktos. Turklāt katrs no 60 punktiem ir virsotne tieši vienā trijstūrī. Līdz ar to izdzēstie 19 punkti ir virsotnes ne vairāk kā 19 regulārajos trijstūros. Tā kā 19<20, ir iespējams izveidot vismaz vienu regulāru trijstūri, kura virsotnes ir 3 no neizdzēstajiem punktiem.
Esam atrisinājuši pārveidoto uzdevumu, līdz ar to esam arī pierādījuši uzdevumā prasīto.

3. uzdevums



13. att.

Apskatīsim patvaļīgu trijstūri ABC. Novilksim tajā visas trīs viduslīnijas un apzīmēsim tās, kā parādīts 13. attēlā. Trijstūri ABC un KLM ir līdzīgi, jo $AB = 2KL$, $BC = 2LM$ un $AC = 2KM$. Apzīmēsim ap trijstūri ABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu ar R. Balstoties uz trijstūru ABC un KLM līdzību, varam apgalvot, ka ap trijstūri KLM apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir $\frac{R}{2}$.

Riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri KLM, iet caur punktiem K, L un M, tātad tai ir kopīgi punkti ar visām trijstūra ABC malām.
Trijstūrī ievilktā riņķa līnija ir mazākā riņķa līnija, kurai ar visām trijstūra malām var būt kopīgi punkti, jo riņķa līnija, kas mazāka par trijstūrī ievilkto riņķa līniju, var pieskarties vai krustot ne vairāk kā divas trijstūra malas. Apzīmēsim trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar *r*. Tā kā ap trijstūri KLM apvilktajai riņķa līnijai ir kopīgi punkti ar visām trijstūra ABC malām, tad šī riņķa līnija nav mazāka par trijstūrī ABC ievilkto riņķa līniju. Tas nozīmē, ka $\frac{R}{2} \geq r$, k.b.j.

4. uzdevums

Pieņemsim, ka $9^{111}+10^{111}=12^{99}+1$. Tādā gadījumā $12^{99}+1-9^{111}-10^{111}=0$. Vienādības labā puse dalās ar 11, tāpēc ar 11 ir jādalās arī kreisajai pusei. Pārrakstīsim vienādības kreiso pusi:

$$12^{99}+1-9^{111}-10^{111}=(11+1)^{99}-(11-2)^{111}-(11-1)^{111}+1=$$
$$=C_{99}^{0}11^{99}\cdot 1^{0}+C_{99}^{1}11^{98}\cdot 1^{1}+C_{99}^{2}11^{97}\cdot 1^{2}+\dots+C_{99}^{98}11^{1}\cdot 1^{98}+C_{99}^{99}11^{0}\cdot 1^{99}-$$
$$-C_{111}^{0}11^{111}(-2)^{0}-C_{111}^{1}11^{110}(-2)^{1}-\dots-C_{111}^{110}11^{1}(-2)^{110}-C_{111}^{111}11^{0}(-2)^{111}-$$
$$-C_{111}^{0}11^{111}(-1)^{0}-C_{111}^{1}11^{110}(-1)^{1}-\dots-C_{111}^{110}11^{1}\cdot(-1)^{110}-C_{111}^{111}11^{0}\cdot(-1)^{111}+1$$

Kā redzam, liela daļa saskaitāmo dalās ar 11, tāpēc mums ir izdevīgi izteiksmi pārrakstīt formā

$$K\cdot 11+C_{99}^{99}11^{0}\cdot 1^{99}-L\cdot 11-C_{111}^{111}11^{0}(-2)^{111}-M\cdot 11-C_{111}^{111}11^{0}(-1)^{111}+1=$$
$$=K\cdot 11+1-L\cdot 11+2^{111}-M\cdot 11+1+1=$$
$$=(K-L-M)\cdot 11+2^{111}+3,$$

kur K, L un M – veseli skaitļi. Ja $(K-L-M)\cdot 11+2^{111}+3$ dalās ar 11, tad arī $2^{111}+3$ dalās ar 11. Ar identiskiem pārveidojumiem iegūstam, ka

$$2^{111}+3=2^{110}\cdot 2+3=(2^{10})^{11}\cdot 2+3=1024^{11}\cdot 2+3=$$
$$=(1023+1)^{11}\cdot 2+3=(93\cdot 11+1)^{11}\cdot 2+3.$$

Atverot iekšējās iekavas un veidojot apzīmēšanu līdzīgi kā iepriekš, iegūstam izteiksmi $(11\cdot A+1)\cdot 2+3$, kur A ir vesels skaitlis. Un $(11\cdot A+1)\cdot 2+3=11\cdot 2A+2+3$.

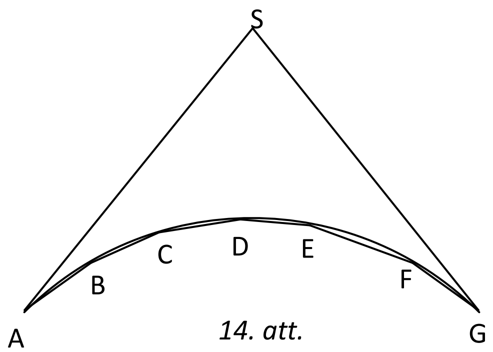
Ja $11\cdot 2A+2+3$ dalās ar 11, tad arī $2+3$ jādalās ar 11, taču 5 ar 11 nedalās. Līdz ar to varam apgalvot, ka ar 11 nedalās arī $11\cdot 2A+2+3$; $2^{111}+3$; $(K-L-M)\cdot 11+2^{111}+3$ un $12^{99}+1-9^{111}-10^{111}$.

Tas nozīmē, ka $9^{111}+10^{111}\neq 12^{99}+1$.

5. uzdevums

Atbilde: jā, eksistē.

Apskatīsim uzskatāmu piemēru. Novilksim riņķa līnijas loku, kura leņķiskais lielums ir mazāks nekā 180 grādi. Uz šī loka atliksim 7 punktus. Apzīmēsim tos pēc kārtas ar A, B, C, D, E, F un G. Caur punktiem A un G novilksim riņķa līnijas pieskares. To krustpunktu apzīmēsim ar S (skat. 14.att.).



14. att.

Astoņstūrim ABCDEFGS ir tieši 5 labas diagonāles – visas diagonāles, kas iziet no punkta S. Savukārt pārējās diagonāles atrodas astoņstūra ārpusē.

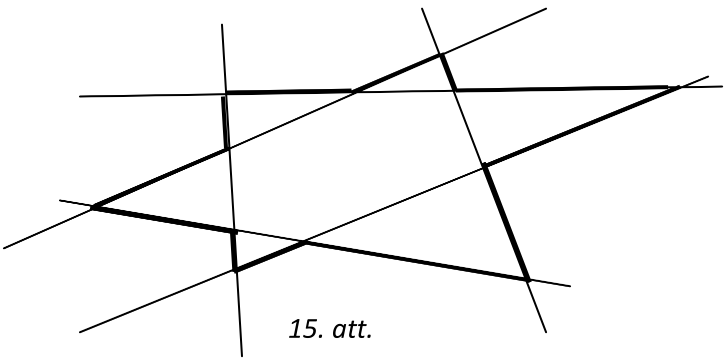
11. klase

1. uzdevums

Izveidosim funkcijas $f_i = x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1; 2; 3$. Tā kā vienādojumiem $x^2 + p_i x + q_i = 0$ nav reālu sakņu, tad neviens no funkciju f_i grafikiem nekrusto Ox asi. Bez tam visas trīs mūsu izveidotās funkcijas ir kvadrātiskas un visās koeficients pie x^2 ir pozitīvs. Tas nozīmē, ka šo funkciju grafiki ir parabolas, kuru zari ir vērsti uz augšu. No tā varam secināt, ka šie grafiki atrodas virs Ox ass. Saskaitot šīs funkcijas, iegūsim jaunu funkciju $f = f_1 + f_2 + f_3$. Tā kā visu trīs funkciju f_i grafiki atrodas virs Ox ass, tad arī funkcijas f grafiks atrodas virs šīs ass. Tātad funkcijas f grafikam un taisnei Ox nav kopīgu punktu un vienādojumam $f = 0$ nav atrisinājuma.

2. uzdevums

Ir iespējams iegūt daudzstūri ar 12 malām (sk. 15.att.) Šajā gadījumā uz katras no sešām taisnēm atrodas tieši divas daudzstūra malas. Pārbaudīsim, vai ir iespējams iegūt daudzstūri, kura malu skaits ir lielāks par 12 un kuram izpildās uzdevumā prasītais. Pieņemsim, ka ir. Tad šādam daudzstūrim ir vismaz 13 malas. Tā kā $13 > 6 \cdot 2$, tad uz kādas no sešām taisnēm jābūt vismaz 3 daudzstūra malām, tātad arī sešām virsotnēm. Tā kā virsotnes atrodas taišņu krustpunktos, tad šāda situācija nav iespējama, jo katru no sešām taisnēm krusto augstākais piecas citas taisnes. Līdz ar to esam ieguvuši, ka lielākais iespējamais daudzstūra malu skaits uzdevumā aprakstītajā situācijā ir 12.



15. att.

3. uzdevums

Pierādāmās nevienādības abas puses ir pozitīvi lielumi. Kāpināsim tās kvadrātā. Iegūsim, ka pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $[ABCD] \geq [ABO] + [CDO] + 2\sqrt{[ABO] \cdot [CDO]}$. Pārveidosim iegūto nevienādību šādi: $[ABCD] - [ABO] - [CDO] \geq 2\sqrt{[ABO] \cdot [CDO]}$;

$$[BOC] + [AOD] \geq 2\sqrt{[ABO] \cdot [CDO]} \qquad (1)$$

Ja mums izdotos pierādīt, ka $[BOC] \cdot [AOD] = [ABO] \cdot [CDO]$, tad nevienādību (1) varētu aizstāt ar nevienādību $[BOC] + [AOD] \geq 2\sqrt{[BOC] \cdot [AOD]}$.

Pārveidosim to šādi:

$[BOC] - 2\sqrt{[BOC] \cdot [AOD]} + [AOD] \geq 0;$

$\left(\sqrt{[BOC]} - \sqrt{[AOD]}\right)^2 \geq 0.$

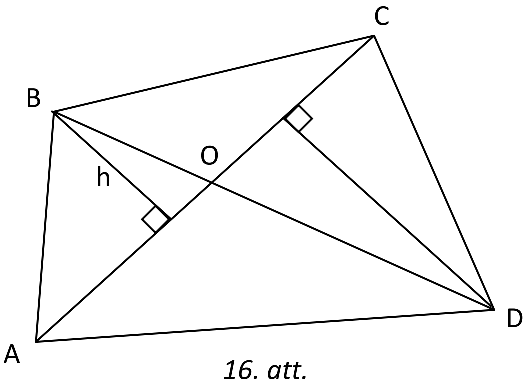
Pēdējā nevienādība ir patiesa. Tātad, lai izdarītu uzdevumā prasīto, mums atliek pierādīt, ka

$[BOC] \cdot [AOD] = [ABO] \cdot [CDO].$

Aplūkosim trijstūrus ABO un OBC (skat. 16.att.).

$[ABO] = \frac{1}{2} h \cdot AO$ un $[OBC] = \frac{1}{2} h \cdot OC.$

Šo trijstūru laukumu attiecība ir $\frac{[ABO]}{[OBC]} = \frac{AO}{OC}$. Līdzīgi varam apskatīt trijstūrus ADO un ODC; iegūsim, ka $\frac{[ADO]}{[ODC]} = \frac{AO}{OC}$.



16. att.

Tātad $\frac{[ABO]}{[OBC]} = \frac{AO}{OC} = \frac{[ADO]}{[ODC]}$. No tā seko, ka $[OBC] \cdot [ADO] = [ABO] \cdot [ODC]$. Līdz ar to arī varam apgalvot, ka visas iepriekš apskatītās nevienādības ir patiesas, un esam pierādījuši uzdevumā prasīto.

4. uzdevums

Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums. Pierādīsim no pretējā. Pieņemsim, ka $n^2 + 1$ var būt pierakstīts ar tieši 10 dažādiem cipariem. Tādā gadījumā $n^2 + 1$ ciparu summa ir $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Tā kā 45 dalās ar 3, tad arī skaitlis $n^2 + 1$ dalās ar 3.

Katru naturālu skaitli n var pierakstīt vai nu formā $n = 3a$, vai $n = 3a + 1$ vai arī $n = 3a + 2$, kur a ir vesels, nenegatīvs skaitlis.

Ja $n = 3a$, tad $n^2 + 1 = 9a^2 + 1 = 3 \cdot (3a^2) + 1.$

Ja $n = 3a + 1$, tad $n^2 + 1 = 9a^2 + 6a + 1 + 1 = 3 \cdot (3a^2 + 2a) + 2.$

Ja $n = 3a + 2$, tad $n^2 + 1 = 9a^2 + 12a + 4 + 1 = 3 \cdot (3a^2 + 4a + 1) + 2$

Kā redzam, neeksistē tāds naturāls skaitlis n, kuram $n^2 + 1$ dalītos ar 3. Esam ieguvuši pretrunu, kas radusies, izdarot nepareizu pieņēmumu. Tātad skaitlis $n^2 + 1$ nevar būt pierakstāms ar tieši 10 dažādiem cipariem.

5. uzdevums

Pirmo dāmu novietojam brīvi izraudzītā lauciņā. Turpmāk šo lauciņu sauksim par pirmo lauciņu. Iekrāsojam horizontāli, vertikāli un abas diagonāles, kurās atrodas pirmais lauciņš. Nākamo dāmu, lai tā neapdraudētu iepriekšējo un arī pati netiktu apdraudēta, jānovieto neiekrāsotā lauciņā. Atrodam pirmajam lauciņam tuvāko horizontāli (vai izvēlamies vienu no divām tuvākajām), kurā ne visi lauciņi ir iekrāsoti. Novietojam dāmu kādā brīvi izraudzītā šīs horizontāles lauciņā, kas vēl nav

iekrāsots. Iekrāsojam horizontāli, vertikāli un abas diagonāles, kurās atrodas izvēlētais lauciņš.
Līdzīgi kā iepriekš, nākamo dāmu jānovieto neiekrāsotā lauciņā, lai novietotās dāmas viena otru neapdraudētu. Tālāk rīkojamies līdzīgi kā iepriekš, tikai tagad meklējam pirmajam lauciņam tuvāko (vai vienu no divām tuvākajām) vertikālēm, kurā ne visi lauciņi ir iekrāsoti. Kad trešā dāma ir novietota un attiecīgā horizontāle, vertikāle un diagonāles iekrāsotas, atkal meklējam pirmajam lauciņam tuvāko vēl neiekrāsoto horizontāli utt.
Bezgalīgi daudzas reizes atkārtojot iepriekš aprakstītās darbības, iespējams iegūt uzdevumā prasīto situāciju.

12. klase

1. uzdevums

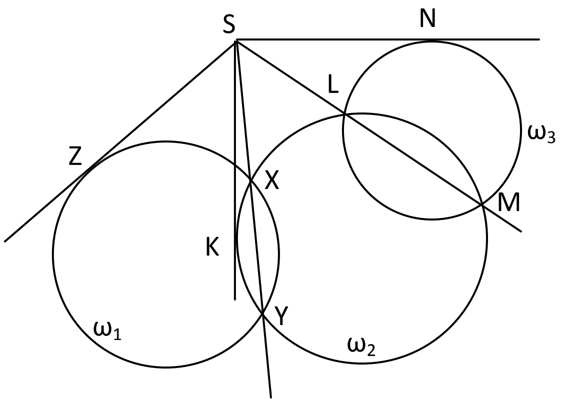
Ja $sin(cosx) = 1$ad $\cos x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.
Kā zināms, $\cos x \in [-1; 1]$. Aplūkosim izteiksmes $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ vērtību atkarībā no n vērtības.
Ja $n = 0$, tad $\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1$
Ja $n > 0$, tad $\frac{\pi}{2} + 2\pi n > \frac{\pi}{2} > 1$
Ja $n = -1$, tad $\frac{\pi}{2} + 2\pi n = -\frac{3\pi}{2} < \frac{-3 \cdot 3}{2} < -1$
Ja $n < -1$, tad $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < -\frac{3\pi}{2} < -1$
Redzam, ka neeksistē tāds vesels skaitlis n, kuram izteiksmes $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ vērtība būtu intervālā [-1; 1]. Tātad vienādojumam $sin(cosx) = 1$ nav atrisinājuma.

2. uzdevums

Pieņemsim, ka kādam cilvēkam sākumā ir D dolāru un V vācu marku. Pēc valūtas maiņas punkta apmeklējuma viņam ir
$D - x$ dolāru un $V + 4x$ vācu marku vai
$D + 2x$ dolāru un $V - 3x$ vācu marku
(x ir vesels skaitlis).
Apskatīsim, kā šim cilvēkam ir izmainījusies dolāru un vācu marku daudzumu starpība. Sākumā tā bija $D - V$. Pēc valūtas maiņas punkta apmeklējuma tā ir $(D - x) - (V + 4x) = (D - V) - 5x$ vai $(D + 2x) - (V - 3x) = (D - V) + 5x$. Tātad valūtas maiņas rezultātā starpība izmainās par skaitli, kas dalās ar 5.
Uzdevumā aprakstītajā situācijā cilvēkam sākumā dolāru un vācu marku starpība ir $1 - 3 = -2$. Ja viņam dolāru būtu tikpat, cik vācu marku, tad starpība būtu 0. Tā kā no skaitļa (-2), tam pieskaitot un no tā atņemot 5, nevar iegūt 0 (visi iegūtie skaitļi

dod atlikumu 3, dalot ar 5), tad nav iespējams panākt, lai cilvēkam dolāri un vācu markas būtu vienādā skaitā.

3. uzdevums



17. att.

No punkta S riņķa līnijai ω_2 novilksim pieskari. Apzīmēsim punktus, kā parādīts 17. attēlā.
Riņķa līnijai ω_1 taisne SZ ir pieskare, bet SX – sekante, tāpēc
$SZ^2 = SX \cdot SY$.
Riņķa līnijai ω_2 taisne SK ir pieskare, bet SX un SL – sekantes, tāpēc $SX \cdot SY = SK^2 = SL \cdot SM$.
Riņķa līnijai ω_3 taisne SN ir pieskare, bet SL – sekante, tāpēc
$SN^2 = SL \cdot SM$.
Tātad $SZ^2 = SX \cdot SY = SL \cdot SM = SN^2$. No tā seko, ka $SZ = SN$, kas bija jāpierāda.

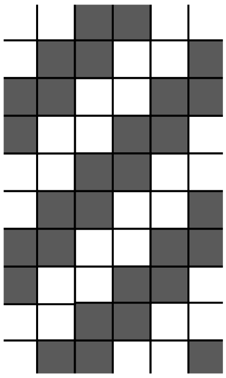
4. uzdevums

Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x ciparu summu.
Skaitlis A dalās ar 9, tāpēc arī $B = S(A)$, $C = S(B)$ un $S(C)$ dalās ar 9. Skaidrs, ka skaitļa A ciparu summa ir lielāka par 0, tāpēc arī skaitļu B un C ciparu summas ir pozitīvas.
Lielākā iespējamā skaitļa A vērtība ir skaitlis, kas pierakstāms ar 1991 devītnieku. Acīmredzami, ka $B = S(A) \leq 1991 \cdot 9 = 17919$. Apskatīsim skaitli B. Lielākā summa, ko var veidot pirmie divi skaitļa B cipari, ir $1 + 7 = 8$. Pārējo ciparu summa nevar pārsniegt $9 + 9 + 9$.Tātad $C = S(B) \leq 8 + 3 \cdot 9 = 35$. Skaitļa C pirmais cipars noteikti nepārsniedz 3, bet otrs nevar būt lielāks par 9, tātad
$S(C) \leq 3 + 9 = 12$. Tā kā $S(C)$ dalās ar 9 un $0 < S(C) \leq 12$, tad skaitļa C ciparu summa ir 9.

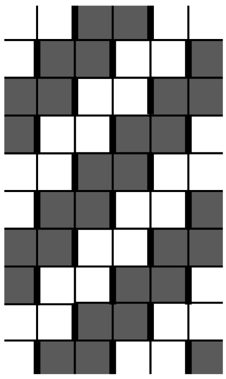
5. uzdevums

Atbilde: var.
Risinājums.
Sākumā parādīsim, ka ir iespējams plaknē uzrādīt tādu nogriežņu sistēmu, ka katrs plaknes punkts pieder tieši vienam nogrieznim.
Sadalīsim plakni vienādās kvadrātiskās rūtiņās, kuru malas garums ir 1 vienība. Izkrāsosim plakni tā, kā parādīts 18.attēlā. Izvēlēsimies visus iespējamos nogriežņus, kam izpildās visi tālāk aprakstītie nosacījumi:
1) nogrieznis vilkts horizontāli;

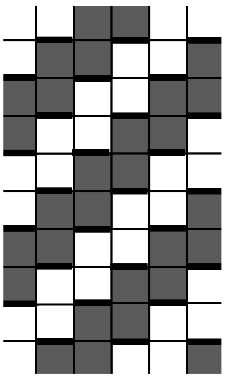
2) tā galapunkti atrodas uz treknajām, melnajām līnijām (skat. 19.att.);
3) viens nogriežņa iekšējais punkts atrodas uz divu pelēko rūtiņu kopīgās malas, bet pārējie iekšējie punkti atrodas pelēko rūtiņu iekšpusē.
Vēl izvēlēsimies tos nogriežņus, kam izpildās trīs tālāk aprakstītie nosacījumi:
1) nogrieznis vilkts vertikāli;
2) tā galapunkti atrodas uz treknajām, melnajām līnijām (skat. 20.att.);
3) viens nogriežņa iekšējais punkts atrodas uz divu balto rūtiņu kopīgās malas, bet pārējie iekšējie punkti atrodas balto rūtiņu iekšpusē.
Šajā gadījumā jebkurš punkts, kas atrodas rūtiņu iekšpusē, pieder tieši vienam nogrieznim. Apskatīsim rūtiņu stūrus un malas (skat. 21.att.). Teiksim, ka punkti atrodas blakus, ja tie ir divu rūtiņu kopīgas malas galapunkti. Redzam, ka katram punktam blakus atrodas tieši viens balts un viens pelēks punkts horizontālā virzienā un tieši viens balts un viens pelēks punkts vertikālā virzienā. Tos pelēkos punktus, kas atrodas viens otram blakus horizontālā virzienā, savienosim ar nogriežņiem. Savienosim arī tos baltos punktus, kas atrodas viens otram blakus vertikālā virzienā. Apskatīsim tos nogriežņus, kas savieno divus vertikālā virzienā blakus esošus pelēkus punktus (divus horizontālā virzienā blakus esošus baltus punktus). Gan šo nogriežņu galapunkti, gan visi iekšējie punkti pieder katrs tieši vienam no jau izvēlētajiem nogriežņiem. Tātad arī visi pelēkie (un visi baltie) punkti iekļauti katrs tieši vienā nogrieznī. Vēl atliek apskatīt tikai tās rūtiņu malas, kuru galos ievilkti atšķirīgu krāsu punkti. Ievērosim, ka katra no šīm malām 19. vai 20. attēlā apzīmēta ar treknu līniju. Pirmīt nogriežņus izvēlējāmies tā, ka visi šo malu iekšējie punkti tika iekļauti tieši vienā nogrieznī. Tātad esam izveidojuši tādu nogriežņu sistēmu, kurā katrs no plaknes punktiem pieder tieši vienam nogrieznim.



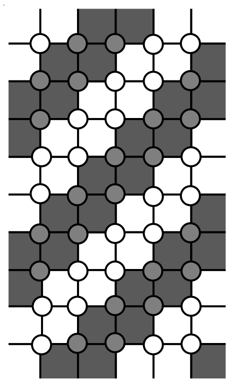
18. att.



19. att.



20. att.



21. att.

Otru nogriežņu sistēmu veidosim līdzīgi kā pirmo, tikai pagrieztu par $\alpha \in (0; 90)$ grādus lielu leņķi. Arī šajā jaunajā nogriežņu sistēmā katrs punkts pieder tieši vienam nogrieznim. Bez tam nav tāda nogriežņa, kas būtu gan pirmajā, gan otrajā nogriežņu sistēmā, jo visi pirmās nogriežņu sistēmas nogriežņi ir horizontāli vai vertikāli, bet otrās nogriežņu sistēmas nogriežņi nav ne horizontāli, ne vertikāli. Apvienojot šādas divas nogriežņu sistēmas, iegūsim uzdevumā prasīto situāciju, jo katrs plaknes punkts pieder tieši vienam nogrieznim no pirmās nogriežņu sistēmas un tieši vienam nogrieznim no otrās nogriežņu sistēmas.

1995. gads
10. klase

1. uzdevums

Akmeņus, kuru masa lielāka par 9 kg, sadalīsim pa pāriem šādi: 10kg un 1995kg; 11kg un 1994kg; 12kg un 1993kg; … ; 1002kg un 1003kg. Esam izveidojuši 993 pārus, kuros akmeņu kopējā masa ir vienāda. Šos akmeņus sadalīsim pa trim kaudzēm, katrā liekot vienalga kurus 993:3=331 izveidotos akmeņu pārus. Pagaidām visās kaudzēs ir vienāds akmeņu skaits un kopējā masa. Vēl šajās kaudzēs jāpievieno tie akmeņi, kuru masa nepārsniedz 9 kg.
Deviņus vieglākos akmeņus sadalīsim trijos akmeņu komplektos – pa trim akmeņiem katrā. Vienā komplektā liksim akmeņus ar masām 1kg, 5kg un 9kg, otrā – 2kg, 6kg un 7kg, bet trešajā – 3kg, 4kg un 8kg. Katra akmeņu komplekta kopējā masa ir 15kg un akmeņu skaiti komplektos ir vienādi. Tātad katrai no akmeņu kaudzēm pievienojot pa vienam akmeņu komplektam, iegūsim uzdevumā prasīto situāciju. Esam parādījuši veidu, kā visus 1995 akmeņus sadalīt trīs kaudzēs tā, lai visās kaudzēs būtu vienāds akmeņu skaits un kopīgā masa.

2. uzdevums

Sadalīsim dotās kopas elementus piecās apakškopās pēc atlikuma, kas rodas, dalot ar 5. Tātad kopā A_1 ietilpst tie kopas {1, 2, … , 100} elementi, kas dod atlikumu 1, kopā A_2 – kas dod atlikumu 2, kopā A_3 – kas dod atlikumu 3, kopā A_4 – kas dod atlikumu 4, bet kopā A_5 – kas dalās ar 5. Katrā no apakškopām ir 20 elementi. No kopas A_5 nevar izvēlēties vairāk kā 1 elementu, citādi tiktu izvēlēti divi skaitļi, kas dalās ar 5, tātad skaitļi, kuru summa dalās ar 5. Taču, saskaitot jebkuru skaitli no kopas A_5 ar jebkuru skaitli no A_1, A_2, A_3 vai A_4, iegūtā summa ar 5 nedalās. Starp izvēlētajiem skaitļiem nedrīkst vienlaicīgi būt skaitlis no kopas A_1 un skaitlis no kopas A_4, jo šādu skaitļu atlikumi, dalot ar 5, ir 1 un 4, atlikumu summa ir 5, tātad abu skaitļu summa dalās ar 5. Tāpat starp izvēlētajiem skaitļiem nedrīkst būt vienlaicīgi skaitlis no kopas A_2 un skaitlis no kopas A_3. Tātad, apskatot kopas A_1, A_2, A_3 un A_4 , nevar izvēlēties elementus no 3 kopām tā, lai nekādu divu summa nedalītos ar 5. Savukārt, izvēloties kopas A_1 un A_2 visus elementus, redzēsim, ka jebkuru divu summa, dalot ar 5, dod atlikumā 1+1=2, 1+2=3 vai 2+2=4. Tātad mēs varam izvēlēties, piemēram, visus elementus no kopām A_1 un A_2 un vienu elementu no kopas A_5. Tā kā visu izveidoto apakškopu apjomi ir vienādi, tad lielākais iespējamais izvēlamo elementu skaits ir 20+20+1=41.

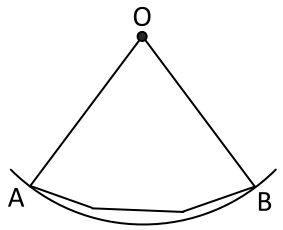
3. uzdevums

Lai noskaidrotu, vai divas izliekta daudzstūra malas var būt garākas par visām tā diagonālēm, apskatīsim divus gadījumus:

1) šīm malām ir kopīga virsotne;

2) šīm malām kopīgu virsotņu nav.

1) Uzzīmēsim riņķa līniju ar centru punktā O. Šajā riņķa līnijā novilksim rādiusus OA un OB tā, lai leņķis starp tiem būtu mazāks par 60 grādiem. Punkti O, A un B būs mūsu veidotā daudzstūra virsotnes. Pārējās daudzstūra virsotnes atliksim tā, lai tās atrastos starp nogriezni AB un riņķa līniju un lai daudzstūris būtu izliekts. Šajā gadījumā visas diagonāles, kas vilktas no punkta O, ir mazākas par rādiusu, tātad arī par OA un OB. No pārējām diagonālēm garākā ir AB. Apskatīsim trijstūri AOB: OA=OB, tātad trijstūris AOB ir vienādsānu un $\sphericalangle \mathrm{OAB} = \sphericalangle \mathrm{OBA}$. Tā kā $\sphericalangle \mathrm{AOB} < 60°$, tad

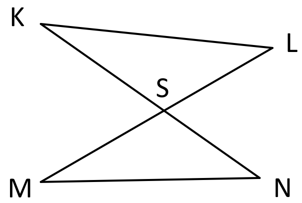


22. att.

$\sphericalangle \mathrm{OAB} = \sphericalangle \mathrm{OBA} = \dfrac{180° - \sphericalangle \mathrm{AOB}}{2} > \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$, tāpēc arī $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} > AB$.

Līdz ar to arī visas pārējās daudzstūra diagonāles ir īsākas par malām OA un OB. Esam ieguvuši izliektu daudzstūri, kura divas malas ir garākas par visām tā diagonālēm.

2) Pieņemsim, ka izliektā daudzstūrī ir divas malas, kurām nav kopīgu virsotņu un kuras ir garākas par visām diagonālēm. Apzīmēsim tās ar KL un MN, kā parādīts 23. attēlā. Novilksim diagonāles KN un LM, to krustpunktu apzīmēsim ar S. Apskatīsim trijstūrus NMS un KLS. Pēc trijstūru nevienādības $\mathrm{MS} + \mathrm{SN} > MN$ un $\mathrm{KS} + \mathrm{SL} > KL$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam:



23. att.

$\mathrm{MS} + \mathrm{SL} + \mathrm{KS} + \mathrm{SN} > MN + KL$; $\mathrm{ML} + \mathrm{KN} > MN + KL$.

Ja malas KL un MN ir garākas par visām diagonālēm, tad $\mathrm{MN} > ML$ un $\mathrm{KL} > KN$, tātad

MN + KL > ML + KN. Esam ieguvuši pretrunu, kas radusies, izdarot nepareizu pieņēmumu. Tātad izliektā daudzstūrī nevar būt divas tādas malas, kam nav kopīgu virsotņu, bet kuras ir garākas par visām daudzstūra diagonālēm.

Apskatīsim, vai izliektā daudzstūrī var būt trīs malas, kas garākas par visām diagonālēm. Daudzstūriem, kuru malu skaits mazāks par 4, nav diagonāļu, tātad mūsu apskatīto daudzstūru malu skaits ir vismaz 4. No jebkurām trijām šāda daudzstūra malām iespējams izvēlēties divas tādas, kurām nav kopīgu virsotņu. Kā iepriekš pierādījām, šādas malas nevar būt garākas par visām daudzstūra diagonālēm. Tātad izliektā daudzstūrī nevar būt trīs malas, kas garākas par visām tā diagonālēm.

4. uzdevums

Fiksējam skaitļu y un z vērtības. Izveidojam funkciju

$F_1(x) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = x^2 - x(y+z) + (y^2 + z^2 - yz)$

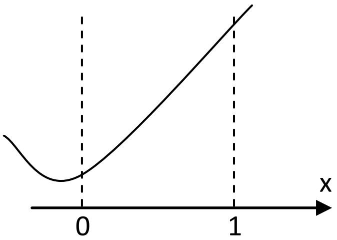
Ieguvām kvadrātisku funkciju . Tās grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz augšu .

Apskatīsim funkcijas grafika izmaiņas intervālā [0 ; 1] . Pastāv trīs iespējas :

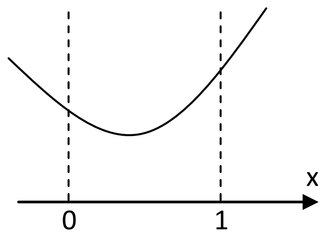
1. funkcija intervālā [0 ; 1] ir monotoni augoša (24. att.)
2. funkcija intervālā [0 ; x_0] dilst, bet intervālā [x_0 ; 1] – aug (25. att.)

3. funkcija intervālā [0 ; 1] monotoni dilst (26. att.)

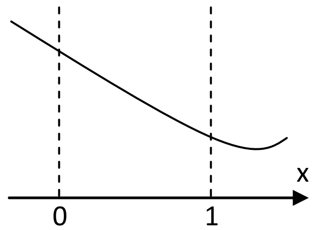
Visos gadījumos funkcijas lielākā vērtība dotajā intervālā tiek sasniegta, kad x=0 vai x=1.



24. att.



25. att.



26. att.

Fiksējam mainīgo x un z vērtības. Izveidosim kvadrātisku funkciju $F_2(y) = x^2 + v^2 + z^2 - xy - xz - yz = y^2 - y(x+z) + (x^2 + z^2 - xz)$. Tās grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz augšu. Funkcijas F_2(y) lielākā vērtība intervālā [0; 1] tiek sasniegta, kad y=0 vai y=1.

Fiksējot mainīgo x un y vērtības, izveidojot līdzīgu funkciju $F_3(z)$ un izdarot līdzīgus spriedumus kā iepriekš, iegūsim, ka funkcija F_3(z) lielāko vērtību intervālā [0; 1] sasniedz, kad z=0 vai z=1.

Esam ieguvuši, ka izteiksmes $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ (kur $0 \leq x, y, z \leq 1$) vērtība ir vislielākā, ja

$$\begin{cases} x=0 \text{ vai } x=1 \\ y=0 \text{ vai } y=1 \\ z=0 \text{ vai } z=1 \end{cases}$$

Atliek izrēķināt izteiksmes $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ vērtību astoņos gadījumos.

Ja x=y=z=0, tad $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0 - 0 = 0.$

Ja $\begin{cases} x = 1 \\ y = z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 1 \\ x = z = 0 \end{cases}$ vai $\begin{cases} z = 1 \\ x = y = 0 \end{cases}$,

tad $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 1 - 0 = 1$.

Ja $\begin{cases} x = 0 \\ y = z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ x = z = 1 \end{cases}$ vai $\begin{cases} z = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$,

tad $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 2 - 1 = 1$.

Ja x=y=z=1 , tad $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3 - 3 = 0$.

Lielākā izteiksmes vērtība, kādu ieguvām, ir 1, tātad

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \leq 1$.

5. uzdevums

Novelkam taisni CP un uz tās atliekam punktu S tā, ka PS=BP un S atrodas ap trijstūri ABC apvilktās riņķa līnijas ārpusē. Trijstūrī ABC $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 60°$, jo ΔABC – regulārs. Arī $\sphericalangle BPA = \sphericalangle BCA = 60°$, jo $\sphericalangle BPA$ un $\sphericalangle BCA$ balstās uz vienu loku. Tāpat $\sphericalangle APC = \sphericalangle ABC = 60°$.

Savukārt $\sphericalangle SPB = 180° - \sphericalangle APC - \sphericalangle BPA = 180° - 60° - 60° = 60°$. Trijstūrī BPS $\sphericalangle BPS = 60°$ un $BP = SP$, tāpēc tas ir regulārs trijstūris un $\sphericalangle BSP = 60°$.

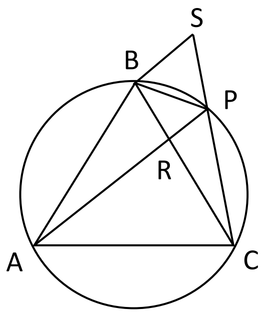
Apskatīsim trijstūrus CRP un CBS. Tie ir līdzīgi, jo $\sphericalangle BSC = 60° = \sphericalangle RPC$ un $\sphericalangle BCS$ ir kopīgs leņķis.
No tā seko, ka

$$\frac{SC}{PC} = \frac{SB}{PR};$$

$$\frac{PC+SP}{PC} = \frac{SB}{PR};$$

$$\frac{PC}{PC} + \frac{SP}{PC} = \frac{SB}{PR};$$

$$1 + \frac{SP}{PC} = \frac{SB}{PR}.$$



27. att.

Tā kā $SB = SP = PB$, tad $1 + \frac{PB}{PC} = \frac{PB}{PR}$. Dalot abas vienādības puses ar nogriežņa PB garumu, iegūsim, ka $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PR}$, k.b.j.

11. klase

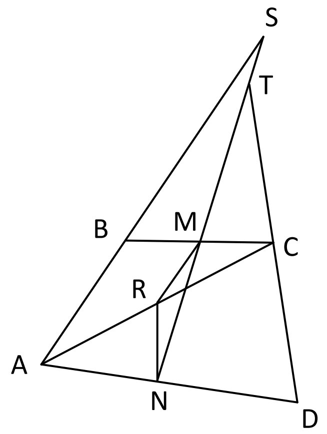
1. uzdevums

Ja m ir nepāra skaitlis, tad to iespējams uzrakstīt kā 2k+1, kur k ir naturāls skaitlis vai 0 (viegli pārbaudīt, ka neder k=0). Tad $8^m = 8^{2k+1} = 8^{2k} \cdot 8 = 64^k \cdot 8 = = (63+1)^k \cdot (6+2)$.
Apskatīsim atlikumu, kas rodas, šo skaitli dalot ar 3. Pārrakstīsim izteiksmi $(63+1)^k$, izmantojot Ņūtona binoma formulu:

$$(63+1)^k = C_k^0 63^k + C_k^1 63^{k-1} + C_k^2 63^{k-2} + \dots + C_k^{k-1} 63 + C_k^k .$$

Kā redzam, šajā izvirzījumā pirmie k saskaitāmie dalās ar 3, taču pēdējais saskaitāmais ir $C_k^k = 1$. Tātad $(63+1)^k$, dalot ar 3, atlikumā dod 1. Tāpēc ieviesīsim apzīmējumu $(63+1)^k = 3A + 1$, A - vesels skaitlis. Iegūsim, ka $(63+1)^k \cdot (6+2) = (3A+1)(6+2) = 18A + 6A + 6 + 2$. Šis skaitlis, dalot ar 3, atlikumā dod 2.
Ja $8^m - 3^n = 1$, tad $8^m = 3^n + 1$. Vienādojuma labā puse, dalot ar 3, atlikumā dod skaitli 1, taču, kā nupat noskaidrojām, kreisā puse – skaitli 2. Tāpēc šajā gadījumā vienādojumam atrisinājuma nav.
Pieņemsim, ka m ir pāra skaitlis un pierakstīsim to šādi: m=2k. Tad ekvivalenti ir vienādojumi $8^{2k} - 3^n = 1$; $8^{2k} - 1 = 3^n$ un $(8^k - 1)(8^k + 1) = 3^n$. Vienādojuma labajā pusē ir skaitļa 3 pakāpe, tāpēc kreisajā pusē katram no skaitļa 1 atšķirīgam reizinātājam arī jābūt skaitļa 3 pakāpei. Tā kā k ir naturāls skaitlis, tad $8^k - 1 \neq 1$ un $8^k + 1 \neq 1$. Taču $(8^k + 1) - (8^k - 1) = 2$. Tas nozīmē, ka skaitļi $(8^k + 1)$ un $(8^k - 1)$ nevar vienlaicīgi dalīties ar 3. Arī šajā gadījumā vienādojumam nav atrisinājuma.
Esam pierādījuši, ka vienādojumam $8^m - 3^n = 1$ nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

2. uzdevums



28. att.

Ar R apzīmēsim AC viduspunktu. Trijstūrī ABC nogrieznis MR ir viduslīnija, jo $\mathrm{BM} = \mathrm{MC}$ un $\mathrm{AR} = \mathrm{RC}$. Tāpēc $\mathrm{RM}||\mathrm{AB}$ un $\mathrm{RM} = \frac{1}{2}$ AB. Trijstūrī CDA nogrieznis NR ir viduslīnija, jo $\mathrm{AN} = \mathrm{ND}$ un $\mathrm{AR} = \mathrm{RC}$. Tāpēc $\mathrm{NR}||\mathrm{DC}$ un $\mathrm{NR} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CD}$. Tā kā $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$, tad arī $\frac{1}{2}\,\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CD}$, tātad $\mathrm{RM} = \mathrm{RN}$. Līdz ar to trijstūris NRM ir vienādsānu trijstūris ar pamatu NM. Tāpēc $\sphericalangle\mathrm{RNM} = \sphericalangle\mathrm{RMN}$.
Ar S apzīmēsim taišņu AB un MN krustpunktu, bet ar T – CD un MN krustpunktu. Tā kā AB||RM, tad $\sphericalangle\mathrm{ASN} = \sphericalangle\mathrm{RMN}$ kā kāpšļu leņķi. Tā kā RN||CD, tad $\sphericalangle\mathrm{RNM} = \sphericalangle\mathrm{NTD}$ kā iekšējie šķērsleņķi. Tātad $\sphericalangle\mathrm{ASN} = \sphericalangle\mathrm{RMN} = \sphericalangle\mathrm{RNM} = \sphericalangle\mathrm{NTD}$. Esam pierādījuši, ka taisne MN ar taisnēm AB un CD veido vienādus leņķus.

3. uzdevums

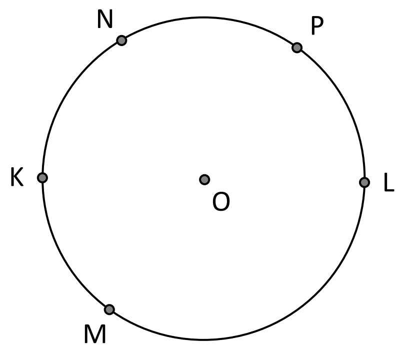
Izveidosim funkciju $x(n) = n^2 + 1$, ar kuras palīdzību iegūstami visi sevišķie skaitļi; n ir naturāls skaitlis. Izrakstīsim dažus sevišķos skaitļus: x(1)=2; x(2)=5; x(3)=10; x(4)=17; x(5)=26; x(6)=37; x(7)=50; x(8)=65; x(9)=82; x(10)=101; x(11)=122; x(12)=145; x(13)=170.
No uzrakstītajiem skaitļiem redzam, ka $x(1)\cdot x(2) = x(3)$; $x(2)\cdot x(3) = x(7)$ un $x(3)\cdot x(4) = x(13)$. Pārbaudīsim, vai jebkurā gadījumā $x(n)\cdot x(n+1)$ ir sevišķs skaitlis:

$$\begin{gathered}
x(n)\cdot x(n+1) = (n^2+1)((n+1)^2+1) = \\
= (n^2+1)(n^2+2n+2) = n^4+2n^3+3n^2+2n+2 = \\
= n^4+n^3+n^2+n^3+n^2+n+n^2+n+1+1 = \\
= n^2(n^2+n+1)+n(n^2+n+1)+(n^2+n+1)+1 = \\
= (n^2+n+1)(n^2+n+1)+1 = \\
= x(n^2+n+1)
\end{gathered}$$

Tā kā šādu reizinājumu ir bezgalīgi daudz, tad ir arī bezgalīgi daudz tādu sevišķu skaitļu, kādi bija prasīti uzdevumā.

4. uzdevums

Atrodam divus vienādi krāsotus punktus, starp kuriem attālums ir 1. Parādīsim, ka to ir iespējams izdarīt. Uzzīmēsim regulāru trijstūri ar malu garumu 1. Katra no trim virsotnēm ir iekrāsota vienā no divām krāsām, tātad divas virsotnes ir iekrāsotas vienādi. Bet attālums starp tām ir 1. Apzīmēsim šīs virsotnes ar K un L, bet nogriežņa KL viduspunktu – ar O. Novelkam riņķa līniju ar centru punktā O un rādiusu $\frac{1}{2}$.



29. att.

Uz novilktās riņķa līnijas ir iespējams atlikt tādu punktu M, ka $\sphericalangle MLK = 30°$. Tā kā KL ir diametrs, tad $\sphericalangle KML = 90°$. Kā zinām, $KL = 1$. Ja M ir iekrāsots tāpat kā K un L, tad atliek pārsaukt punktus šādi: $L = A$; $K = B$ un $M = C$. Esam ieguvuši trijstūri, kāds bija prasīts.
Ja M ir iekrāsots atšķirīgi no K un L, tad uz riņķa līnijas atliekam punktu N tā, ka M un N atrodas dažādās pusēs no taisnes KL un $\sphericalangle KLN = 30°$. Šajā gadījumā $\sphericalangle KNL = 90°$, jo KL ir diametrs. Ja N ir iekrāsots tāpat kā K un L, tad $L = A$, $K = B$ un $N = C$, un trijstūrim ABC izpildās visi prasītie nosacījumi.
Ja N ir iekrāsots atšķirīgi no K un L, tad uz riņķa līnijas atliksim punktu P tā, ka $\sphericalangle LKP = 30°$. Leņķis KPL balstās uz diametru, tātad tā lielums ir $90°$. Ja P, K un L krāsojumi sakrīt , tad pārsauksim punktus K, L un P par attiecīgi A, B un C un iegūsim vajadzīgo trijstūri ABC.
Ja P krāsa atšķiras no K un L krāsas, tad punkti M, N un P ir nokrāsoti vienādi. Viegli pārliecināties, ka $\sphericalangle KOM = \sphericalangle LOP$, jo $\sphericalangle KOM = 2 \cdot \sphericalangle KLN = 2 \cdot 30° = 60°$ un $\sphericalangle LOP = 2 \cdot \sphericalangle LKP = 2 \cdot 30° = 60°$. Tas nozīmē, ka punkti M, O un P atrodas uz vienas taisnes un PM ir diametrs. Ievilktais leņķis MNP balstās uz diametru, tāpēc tā lielums ir 90˚. Leņķi NPM un NLM balstās uz vienu un to pašu loku, tāpēc $\sphericalangle NPM = \sphericalangle NLM = \sphericalangle KLN + \sphericalangle KLM = 30° + 30° = 60°$.
Trijstūrī MNP $\sphericalangle NMP = 180° - \sphericalangle MNP - \sphericalangle MPN = 180° - 90° - 60° = 30°$. Pārsauksim punktus: $M = A$; $P = B$ un $N = C$. Trijstūrī ABC mala $AB = 1$, $A = 30°$ un $C = 90°$.

5. uzdevums

Apskatīsim izteiksmi $(x+1)(2x-1)^2$. Ja $x \geq -1$, tad $x + 1 \geq 0$ un $(2x-1)^2 \geq 0$, tātad arī $(x+1)(2x-1)^2 \geq 0$. Atverot iekavas, iegūsim, ka
$$(x+1)(2x-1)^2 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 3x + 1.$$
Līdz ar to $4x^3 - 3x + 1 \geq 0$.
Uzdevumā dots, ka $a, b, c, d, e \geq -1$, tāpēc, x vietā liekot skaitļus a, b, c, d un e, iegūsim, ka
$$4a^3 - 3a + 1 \geq 0$$
$$4b^3 - 3b + 1 \geq 0$$
$$4c^3 - 3c + 1 \geq 0$$
$$4d^3 - 3d + 1 \geq 0$$
$$4e^3 - 3e + 1 \geq 0$$
Saskaitot šīs nevienādības, iegūsim, ka
$$4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 4d^3 + 4e^3 - 3a - 3b - 3c - 3d - 3e + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 0$$
$$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) - 3(a + b + c + d + e) + 5 \geq 0$$
$$4 \cdot 1 - 3(a + b + c + d + e) + 5 \geq 0$$
$$-3(a + b + c + d + e) \geq -9$$
$$a + b + c + d + e \leq 3.$$

12. klase

1. uzdevums

Pārbaudīsim nevienādību

$$\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

pozitīviem a, b. Ar ekvivalentiem pārveidojumiem iegūstam:

$$\frac{4ab}{2(a+b)} \le \frac{(a+b)^2}{2(a+b)}$$
$$4ab \le (a+b)^2 \ \ (jo\ a, b > 0)$$
$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \ge 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$
$$(a-b)^2 \ge 0\,.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, tātad arī (1) ir patiesa nevienādība. Līdzīgā veidā varam pārliecināties, ka

$$\frac{2bc}{b+c} \le \frac{b+c}{2} \qquad (2)$$

un

$$\frac{2ac}{a+c} \le \frac{a+c}{2} \qquad (3)$$

Saskaitot nevienādības(1), (2) un (3), iegūstam, ka

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ac}{a+c} \le \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2}$$
$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ac}{a+c} \le \frac{2a+2b+2c}{2}$$
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \le \frac{a+b+c}{2}, \text{k. b. j.}$$

2. uzdevums

Uzzīmēsim trijstūri ABC, kura leņķi ir α, β un γ, un ap to apvilkto riņķa līniju. Apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar O, rādiusu ar R. Trijstūra ABC laukumu apzīmēsim ar S, pusperimetru – ar p, ievilktās riņķa līnijas rādiusu – ar r. Tā kā ΔABC ir šaurleņķu, tad O atrodas ΔABC iekšpusē.

Kā zinām, $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$. No šīs sakarības iegūstam, ka $sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $sin\beta = \frac{b}{2R}$ un $sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

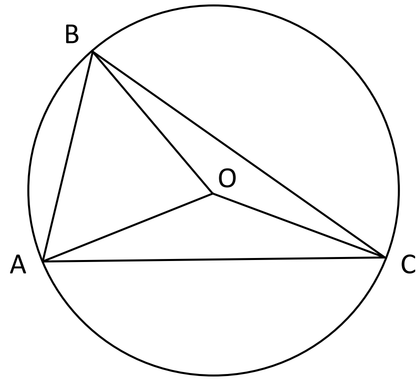
Saskaitot vienādības, iegūsim:

$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$. Tā kā

$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{R} = \frac{p}{R}$,

tad $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = \frac{p}{R}$.

Leņķis AOB ir ievilktā leņķa ACB atbilstošais centra leņķis.



30. att.

Tāpēc $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 2\gamma$.

Līdzīgi $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle BAC = 2\alpha$

un $\sphericalangle AOC = 2 \cdot \sphericalangle ABC = 2\beta$.

Aprēķināsim trijstūru AOB, BOC un AOC laukumus.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\ OA \cdot OB \cdot sin\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot sin2\gamma = \frac{R^2}{2} sin2\gamma$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}\ OB \cdot OC \cdot\ sin \angle BOC = \frac{R^2}{2} sin\ 2\alpha$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot sin \angle AOC = \frac{R^2}{2} sin\ 2\beta$$

Savukārt

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{R^2}{2} sin2\gamma + \frac{R^2}{2} sin2\alpha + \frac{R^2}{2} sin2\beta =$$

$$= \frac{R^2}{2}(sin2\alpha + sin2\beta + sin2\gamma).$$

No tā mēs iegūstam, ka $sin2\alpha + sin2\beta + sin2\gamma = \frac{2S}{R^2}$.

Sākotnējo uzdevumu varam pārfrāzēt šādi: “pierādīt, ka $\frac{p}{R} \geq \frac{2S}{R^2}$.” Pareizinot abas pierādāmās nevienādības puses ar $\frac{R^2}{p}$, iegūsim $R \geq \frac{2S}{p}$. Kā zināms, $\frac{S}{p} = r$. Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka $R \geq 2r$ jeb $\frac{R}{2} \geq r$.

Tas ir pierādīts 1991. gada olimpiādes 10. klases 3. uzdevuma risinājumā.

3. uzdevums

Ar ekvivalentiem pārveidojumiem iegūsim, ka

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{66} + \frac{1}{67} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{66} - 2 \cdot \frac{1}{66} + \frac{1}{67} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{66} + \frac{1}{67} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} - \cdots - 2 \cdot \frac{1}{66} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{67}\right) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{33} =$$

$$= \frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{67} =$$

$$= \left(\frac{1}{34} + \frac{1}{67}\right) + \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{66}\right) + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{65}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51}\right) =$$

$$= \frac{67 + 34}{34 \cdot 67} + \frac{66 + 35}{35 \cdot 66} + \frac{65 + 36}{36 \cdot 65} + \cdots + \frac{51 + 50}{50 \cdot 51} =$$

$$= \frac{101}{34 \cdot 67} + \frac{101}{35 \cdot 66} + \frac{101}{36 \cdot 65} + \cdots + \frac{101}{50 \cdot 51}$$

Esam ieguvuši summu, kas sastāv no daļskaitļiem. Katram saskaitāmajam skaitītājā ir pirmskaitlis 101, bet saucējā- divu skaitļu, kas nepārsniedz 67, reizinājums. Tas nozīmē, ka nevienam no daļskaitļiem saucējs nedalās ar 101. Daļu kopsaucēju apzīmēsim ar A un pieņemsim, ka
$34 \cdot 67 \cdot A_1 = 35 \cdot 66 \cdot A_2 = 36 \cdot 65 \cdot A_3 = \cdots = 50 \cdot 51 \cdot A_{17} = A$, kur
A_1, A_2, ..., A_{17} un A ir naturāli skaitļi. Tad

$$\frac{p}{q} = \frac{101 \cdot A_1}{34 \cdot 67 \cdot A_1} + \frac{101 \cdot A_2}{35 \cdot 66 \cdot A_2} + \cdots + \frac{101 \cdot A_{17}}{50 \cdot 51 \cdot A_{17}} =$$

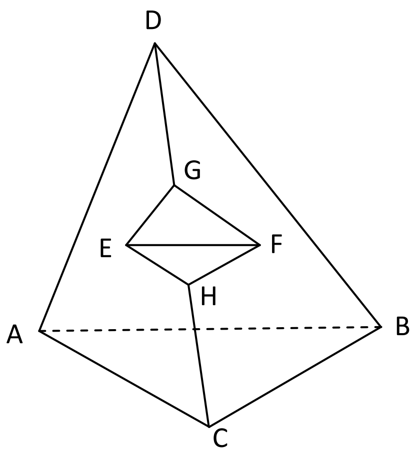
$$= \frac{101 \cdot A_1 + 101 \cdot A_2 + \cdots + 101 \cdot A_{17}}{A} =$$

$$= \frac{101(A_1 + A_2 + \cdots + A_{17})}{A}.$$

Ja A dalās ar 101^n, tad arī skaitļi $34 \cdot 67 \cdot A_1, 35 \cdot 66 \cdot A_2, \ldots, 50 \cdot 51 \cdot A_{17}$ dalās ar 101^n. Tā kā neviens no reizinājumiem $34 \cdot 67$, $35 \cdot 66, \ldots$, $50 \cdot 51$ nedalās ar 101^n, tad ar 101^n dalās $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$. Līdz ar to arī $A_1 + A_2 + \ldots + A_{17}$ dalās ar 101^n. Ja daļu saīsinātu ar skaitli 101^n, skaitītājs vienalga dalītos ar 101. Tas nozīmē: lai arī kādu kopsaucēju mēs izvēlētos, skaitlis p dalīsies ar 101.

4. uzdevums

Šāds daudzskaldnis eksistē. Viena no iespējām ir parādīta 31. attēlā.



31. att.

5. uzdevums

Sākumā uz tāfeles uzrakstīts viens pāra un viens nepāra skaitlis. Varam tos pierakstīt kā 2k un 2m + 1, kur k un m ir veseli skaitļi. Šajā gadījumā

$$ab - a - b + 2 = 2k(2m + 1) - 2k - 2m - 1 + 2 =$$
$$= 4km + 2k - 2k - 2m + 1 = 4km - 2m + 1 = 2(2km - m) + 1,$$

un uz tāfeles tiek uzrakstīts nepāra skaitlis. Ja nākamajā reizē par a un b izvēlamies vienu pāra un vienu nepāra skaitli, tad atkal tiks pierakstīts nepāra skaitlis; izvēloties pāra un nepāra skaitli, nav iespējams palielināt pāra skaitļu skaitu uz tāfeles. Ja par a un b izvēlamies divus nepāra skaitļus, tad eksistē tādi veseli skaitļi p un q, ka $a = 2p + 1$ un $b = 2q + 1$. Tad

$$ab - a - b + 2 = (2p + 1)(2q + 1) - (2p + 1) - (2q + 1) + 2 =$$
$$= 4pq + 2p + 2q + 1 - 2p - 1 - 2q - 1 + 2 = 4pq + 1 = 2(2pq) + 1$$

Arī šajā gadījumā uz tāfeles tiek uzrakstīts nepāra skaitlis. Tas nozīmē, ka nav iespējams panākt, lai uz tāfeles parādītos vēl kāds pāra skaitlis bez jau sākumā uzrakstītā skaitļa 4. Tātad arī skaitlis 199419951996 uz tāfeles netiks uzrakstīts.

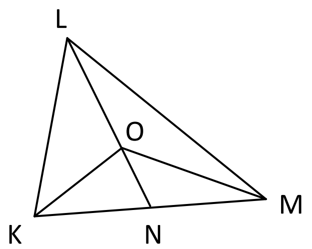
1998. gads
10. klase

1. uzdevums

Vienādībā $yx + y^2 = 14$, samainot vietām simbolus „x” un „+”, iegūstam vienādību $y + xy^2 = 14$. Ja $x = 3$ un $y = 2$, šī vienādība ir patiesa, jo $2 + 3 \cdot 2^2 = 14$.

2. uzdevums

Sākumā pierādīsim kādu īpašību saistībā ar trijstūra daļu laukumiem. Apskatīsim trijstūri KLM (skat. 32. att.). Punkts O ir trijstūra KLM iekšējais punkts. No punkta L caur O vilkts nogrieznis LN, kura galapunkts N atrodas uz nogriežņa KM. Pierādīsim, ka $\frac{S_{KOL}}{S_{KON}} = \frac{S_{MOL}}{S_{MON}}$.



32. att.

Attālumu no punkta O līdz taisnei KM apzīmēsim ar h. Līdz ar to $S_{KON} = \frac{KN \cdot h}{2}$, bet $S_{MON} = \frac{MN \cdot h}{2}$ un $\frac{S_{KON}}{S_{MON}} = \frac{KN}{MN}$.

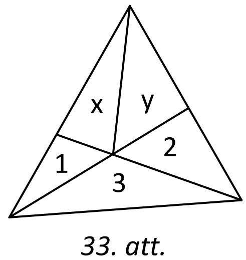
Līdzīgi varam iegūt, ka $\frac{S_{KLN}}{S_{MLN}} = \frac{KN}{MN}$. No tā seko, ka $\frac{S_{KOL}}{S_{MOL}} = \frac{S_{KLN} - S_{KON}}{S_{MLN} - S_{MON}} = \frac{KN}{MN}$. Tā kā $\frac{S_{KOL}}{S_{MOL}} = \frac{KN}{MN} = \frac{S_{KON}}{S_{MON}}$, tad $\frac{S_{KOL}}{S_{KON}} = \frac{S_{MOL}}{S_{MON}}$.

Atgriežamies pie sākotnējā uzdevuma. Sadalīsim ceturto trijstūra daļu, kā parādīts 33. attēlā. Vienas daļas laukumu apzīmēsim ar x, otras – ar y. Pamatojoties uz sākumā pierādīto īpašību, varam apgalvot, ka

$$\frac{1 + x}{y} = \frac{3}{2}$$

un

$$\frac{y + 2}{x} = \frac{3}{1}.$$



33. att.

No pēdējām divām sakarībām ar ekvivalentiem pārveidojumiem iegūsim, ka $2 + 2x = 3y$ un $y + 2 = 3x$. Atrisinot vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 2 + 2x = 3y \\ y + 2 = 3x \end{cases}$, iegūsim, ka $x = \frac{8}{7}$ un $y = \frac{10}{7}$. Atliek saskaitīt: $x + y = \frac{8}{7} + \frac{10}{7} = \frac{18}{7}$. Tātad trijstūra ceturtās daļas laukums ir $\frac{18}{7}$.

3. uzdevums

Nepāra skaitli kāpinot naturālā pakāpē, iegūst nepāra skaitli, tāpēc 29^n ir nepāra skaitlis. Divu nepāra skaitļu reizinājums ir nepāra skaitlis, tāpēc skaitlis $11 \cdot 29^n$ ir nepāra. Divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Līdz ar to $11 \cdot 29^n + 1$ ir pāra skaitlis. Mazākā vērtība, kādu var pieņemt skaitlis $11 \cdot 29^n + 1$, ir $11 \cdot 29^1 + 1 > 2$. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir skaitlis 2. Tā kā $11 \cdot 29^1 + 1 > 2$, tad apskatāmais skaitlis ir salikts skaitlis visām naturālām n vērtībām.

4. uzdevums

Ja kvadrāttrinoma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir x_1 un x_2, bet $x^2 + ax + b = 0$ saknes ir x_2 un x_3, tad $x_1 + x_2 = -p$ un $x_2 + x_3 = -a$. Tā kā x_1 un x_3 ir atšķirīgi skaitļi, tad $x_1 + x_2 \neq x_2 + x_3$; $-p \neq -a$; $p \neq a$ un $p - a \neq 0$. Skaitlis x_2 ir sakne abiem dotajiem kvadrātvienādojumiem, tāpēc $x_2^2 + px_2 + q = x_2^2 + ax_2 + b$;
$px_2 - ax_2 = b - q$; $x_2(p - a) = b - q$. Tā kā $p - a \neq 0$, varam abas vienādojuma puses dalīt ar $p - a$. Iegūsim, ka $x_2 = \frac{b-q}{p-a}$.
Tā kā $x_1 + x_2 = -p$, bet $x_2 + x_3 = -a$, tad $x_1 = -p - x_2 = -p - \frac{b-q}{p-a}$ un $x_3 = -a - x_2 = -a - \frac{b-q}{p-a}$.

5. uzdevums

Ja spēlētājs var panākt, ka pēc viņa gājiena paliek 4k konfektes (k – naturāls skaitlis), tad viņš var uzvarēt. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.
Bāze k=1
Pēc pirmā spēlētāja kāda gājiena paliek 4 konfektes. Konfekšu skaits, ko varētu ņemt otrais spēlētājs, ir 1, 2 vai 3. Ja otrais spēlētājs paņem 1 vai 3 konfektes, tad pirmais spēlētājs var paņemt atlikušās konfektes un uzvarēt.
Ja otrais spēlētājs paņem 2 konfektes, tad pirmais spēlētājs var ņemt vienu. Šajā brīdī uz galda palikusi viena konfekte un gājiens jāizdara otrajam spēlētājam. Viņš gājienu nevar izdarīt, jo iepriekšējā gājienā pirmais spēlētājs paņēma vienu konfekti.
k=2
Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena uz galda paliek 8 konfektes un otrais spēlētājs ņem 1 vai 3 konfektes, tad pirmais var ņemt attiecīgi 3 vai 1 konfekti. Šajā gadījumā pēc pirmā spēlētāja gājiena ir palikušas 4 konfektes. Kā jau iepriekš izsecinājām, uzvarēs pirmais spēlētājs.
Ja otrais spēlētājs ņem 2 konfektes, tad pirmais var paņemt 3. Uz galda paliek 3 konfektes. Otrais spēlētājs var ņemt 1 vai 2 konfektes. Attiecīgi pārējās konfektes paņems pirmais spēlētājs un uzvarēs.

Pāreja

Pieņemsim, ka pirmais spēlētājs uzvar, ja pēc kāda viņa izdarītā gājiena uz galda palikušo konfekšu skaits ir 4, 8, ..., 4n ($n \geq 2$). Pierādīsim, ka viņš uzvar arī, atstājot 4(n+1) konfektes.

Ja pēc pirmā spēlētāja izdarītā gājiena uz galda palikušas 4(n+1) konfektes un otrais spēlētājs ņem 1 vai 3 konfektes, pirmais var paņemt attiecīgi 3 vai 1 konfekti. Pēc šāda gājiena, ko atkal izdarījis pirmais spēlētājs, uz galda paliek 4(n+1)-4=4n konfektes. Pēc induktīvā pieņēmuma pirmais spēlētājs šajā situācijā uzvar.

Ja otrais spēlētājs no 4(n+1) konfektēm paņem 2, pirmais var ņemt 3. Uz galda paliek

4(n+1)-5=4(n-1)+3 konfektes. Otrais spēlētājs var ņemt 1 vai 2 konfektes, uz ko pirmais „atbildēs", paņemot attiecīgi 2 vai 1 konfekti. Tad pēc pirmā spēlētāja gājiena uz galda paliks 4(n-1) konfektes. Arī šajā gadījumā pirmais spēlētājs uzvar saskaņā ar induktīvo hipotēzi.

Dotajā uzdevumā sākumā uz galda atrodas 1998 konfektes. Pirmais spēlētājs var sākt spēli, paņemot 2 konfektes. Tad paliks $1996 = 4 \cdot 499$ konfektes, un pirmais spēlētājs uzvarēs, pareizi spēlējot.

11. klase

1. uzdevums

Tā kā skaitļi x, y un z veido aritmētisko progresiju, tad

$$y - x = z - y\,;$$
$$2y = z + x;$$
$$y = \frac{z+x}{2} \qquad (1)$$

Līdzīgā veidā apskatīsim skaitļus x^2, y^2 un z^2, kas arī veido aritmētisko progresiju. Iegūsim, ka

$$y^2 = \frac{z^2+x^2}{2} \qquad (2)$$

No sakarībām (1) un (2) iegūstam, ka $\left(\frac{z+x}{2}\right)^2 = \frac{z^2+x^2}{2}$; $\frac{z^2+2zx+x^2}{4} = \frac{z^2+x^2}{2}$; $2(z^2 + 2zx + x^2) = 4(z^2 + x^2)$. No pēdējās vienādības ar ekvivalentiem pārveidojumiem nonākam pie sakarības $z^2 - 2zx + x^2 = 0$, $(z - x)^2 = 0$, no kurienes seko, ka $z = x$. Redzam, ka šādā gadījumā arī $y = \frac{z+x}{2} = x = z$.

Tāpēc arī $x^3 = y^3 = z^3$. Līdz ar to skaitļi x^3, y^3 un z^3 veido aritmētisko progresiju, kuras diference ir 0.

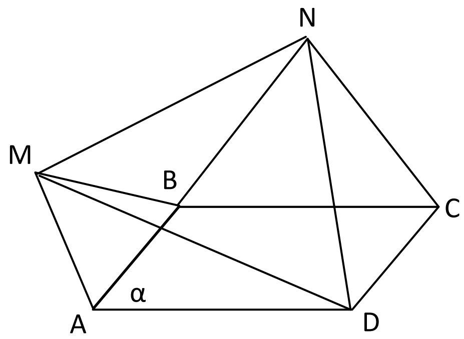
2. uzdevums

ABCD ir paralelograms, tāpēc $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$. Apzīmēsim šo leņķu lielumu ar α.

Tad $\sphericalangle ABC = 180° - \alpha$. Aprēķināsim leņķi NBM. Tā kā ΔBNC un ΔAMB ir regulāri, tad $\sphericalangle CBN = \sphericalangle ABM = 60°$.

Līdz ar to $\sphericalangle NBM = 360° - 60° - (180° - \alpha) - 60° = 60° + \alpha$.
Trijstūris BNC – regulārs un ABCD ir paralelograms, tāpēc $AD = BC = BN = NC$. Līdzīgi iegūstam, ka $DC = AB = MA = MB$ (jo ΔAMB - regulārs)

Tā kā $NC = DA = NB$, $\sphericalangle NCD = 60° + \alpha = \sphericalangle DAM = \sphericalangle NBM$ un $CD = AM = BM$, tad trijstūri NCD, DAM un NBM ir vienādi. Tātad šo trijstūru attiecīgās malas ND, DM un MN arī ir vienādas. To veidotais trijstūris NDM ir regulārs.



34. att.

3. uzdevums

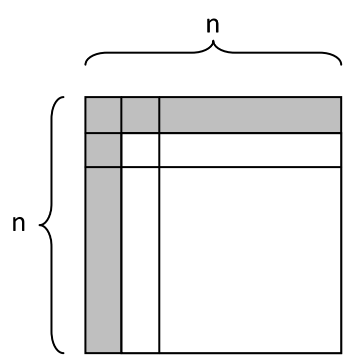
Jebkurš trīsciparu skaitlis, kas beidzas ar ciparu 2, 4, 6 vai 8, dalās ar 2. Tāpat arī jebkurš trīsciparu skaitlis, kas beidzas ar 5, dalās ar 5. Neviens no tādiem skaitļiem nav pirmskaitlis.
Tas nozīmē, ka mums jāpārbauda, vai no cipariem 1, 3, 7 un 9 var izvēlēties trīs tā, lai jebkurš to veidotais trīsciparu skaitlis būtu pirmskaitlis. Pārbaudīsim visas četras iespējamās ciparu kombinācijas.

1) No cipariem 1, 3 un 7 var izveidot skaitli 371 = 53 · 7
2) Cipari 1, 3 un 9 veido skaitli 931 = 133 · 7
3) 1, 7 un 9 veido skaitli 917 = 131 · 7
4) 3, 7 un 9 veido skaitli 973 = 139 · 7

Kā redzams, nav iespējams izvēlēties 3 atšķirīgus nenulles ciparus tā, lai visi to veidotie trīsciparu skaitļi būtu pirmskaitļi.

4. uzdevums

Apskatīsim, cik dažādos veidos var izkrāsot tās rūtiņas, kas atrodas 1. rindā un 1. kolonnā. Gan 1. rindā, gan 1. kolonnā ir n rūtiņas. Viena rūtiņa vienlaicīgi ir gan 1. rindā, gan 1. kolonnā. Tātad, saskaitot rūtiņas, kas atrodas 1. rindā un 1. kolonnā, iegūsim skaitli $\mathrm{n} + \mathrm{n} - 1 = 2\mathrm{n} - 1$. Katru no šīm rūtiņām iespējams izkrāsot divos veidos – vai nu baltu, vai sarkanu. Tātad 1. rindas un 1. kolonnas rūtiņu atšķirīgo iespējamo krāsojumu skaits ir 2^{2n-1}. Pierādīsim, ka katram no šiem krāsojumiem atbilst tieši viens veids, kā izkrāsot pārējās rūtiņas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.
Apskatīsim kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, kas atrodas kreisajā augšējā stūrī. Ir zināms, kā izkrāsotas trīs no četrām rūtiņām šajā kvadrātā. Parādīsim, ka pastāv tikai viens veids, kā krāsojama ceturtā rūtiņa, lai izpildītos uzdevumā prasītais. Ja 3 rūtiņas ir sarkanas (vai baltas), tad ceturtajai rūtiņai jābūt baltai (vai sarkanai). Ja divas rūtiņas ir



35. att.

sarkanas (baltas), bet viena balta (sarkana), tad ceturtajai rūtiņai jābūt sarkanai (baltai).
Tātad n×n rūtiņas lielā kvadrāta pirmās rindas un pirmās kolonnas rūtiņu krāsojums viennozīmīgi nosaka krāsojumu 2. kolonnas otrajai rūtiņai.
Izvēlēsimies 2×2 rūtiņas lielu kvadrātu, kas sastāv no otrās un trešās rūtiņas 1. un 2. kolonnā. Triju rūtiņu krāsa šajā kvadrātā ir zināma, tāpēc varam noteikt, kādā krāsā jābūt ceturtajai rūtiņai.
Pēc tam, aizvien izvēloties kvadrātu, kas atrodas par rūtiņu zemāk nekā iepriekšējais apskatītais, varam noteikt krāsu visām 2. kolonnas rūtiņām. Kad esam to izdarījuši, varam izvēlēties kvadrātu, kas sastāv no pirmās un otrās rūtiņas 2. un 3. kolonnā. Tad varēsim noteikt krāsojumu 3. kolonnai un pēc tam arī 4., ..., n-tajai kolonnai. Redzam, ka pastāv tikai viens veids, kā izkrāsot n×n rūtiņas lielu kvadrātu, ja zināms krāsojums pirmajai rindai un pirmajai kolonnai. Kā jau noskaidrojām, pirmās rindas un pirmās kolonnas rūtiņas iespējams nokrāsot 2^{2n-1} atšķirīgos veidos.
Līdz ar to pastāv 2^{2n-1} atšķirīgi veidi, kā izkrāsot n×n rūtiņas, lai izpildītos visi uzdevuma nosacījumi.

5. uzdevums

Pirmajā svēršanā salīdzinām jebkuras 3 monētas ar jebkurām citām 3 monētām.

1) Ja svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgās masas monēta ir viena no nesvērtajām.
   2. svēršanā salīdzinām visas četras atlikušās monētas un vienalga kuras 4 monētas, kas tika izmantotas iepriekšējā svēršanā. Ja iepriekš nesvērto monētu kopējā masa ir lielāka nekā četrām iepriekš svērtām monētām, tad atšķirīgā monēta ir smagāka par pārējām. Pretējā gadījumā tā ir vieglāka.
2) Ja svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgas masas monēta ir viena no svērtajām. Bez tam, ja tā ir smagāka par citām, tad atrodas smagākajā svaru kausā, bet, ja vieglāka – tad vieglākajā.
   2. svēršanā ņemam tās 3 monētas, kuru masa izrādījās mazāka, un jebkuras 3 monētas, kas iepriekš netika svērtas. Ja svari būs līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir smagāka par citām un atrodas starp monētām, kuru kopīgā masa pirmajā svēršanā bija lielāka. Ja svari nav līdzsvarā, atšķirīgā monēta ir vieglāka par pārējām.

12. klase

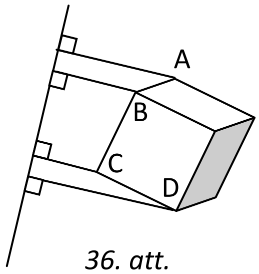
1. uzdevums

Pārveidosim doto izteiksmi šādi:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \sqrt{2}(\sin x \cdot \cos 45^\circ - \cos x \cdot \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ).$$

Tā kā izteiksme $\sin(x - 45^\circ)$ pieņem visas reālās vērtības no intervāla [-1; 1] un nekādas citas, tad izteiksme $\sqrt{2}\sin(x - 45^\circ)$ pieņem vērtības no ntervāla [-$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$] un nekādas citas.

2. uzdevums



36. att.

Paskatīsimies, kas veido kuba projekciju uz taisnes (skat. 36. att.). Kuba projekciju var izteikt kā šķautņu AB, BC un CD projekciju summu. Viegli pārliecināties, ka paralēlu kuba šķautņu projekciju garumi ir vienādi. Tas nozīmē, ka, lai aprēķinātu kuba projekcijas garumu, jāatrod projekciju garumi trijām tādam kuba šķautnēm, no kurām nekādas divas nav paralēlas. Apzīmēsim leņķus starp šīm šķautnēm un taisni, uz kuras projicēts kubs, ar α_1, α_2 un α_3. Tā kā kuba šķautnes garums ir 1, tad šķautņu projekciju garumi ir $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ un $\cos\alpha_3$. Kuba projekcijas garums tātad ir $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3$.

Apskatīsim, kas veido kuba projekciju plaknē uzdevumā aprakstītajā situācijā. „No plaknes” ir redzamas tādas trīs kuba skaldnes, starp kurām nav divu paralēlu. Šādu triju skaldņu projekciju summa veido kuba projekciju plaknē. Apzīmēsim leņķus starp šīm skaldnēm un projekcijas plakni ar β_1, β_2 un β_3. Dotā kuba skaldņu laukumi ir 1, tāpēc to projekciju laukumi ir $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$ un $\cos\beta_3$. Paša kuba projekcijas laukums ir $\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3$.
Ievērosim, ka katrai no izvēlētajām skaldnēm var atrast tieši vienu tādu izvēlēto šķautni, kas tai ir perpendikulāra. Tā kā taisne, uz kuras projicēts kubs, ir perpendikulāra uzdevumā dotajai projekcijas plaknei, tad šķautne ar šo taisni veido tādu pašu leņķi kā tai perpendikulārā skaldne ar projekcijas plakni.
Līdz ar to $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = \cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3$, tātad abu uzdevumā aprakstīto kuba projekciju skaitliskās vērtības ir vienādas, k.b.j.

3. uzdevums

Tā kā skaitļiem n, 2n, 3n, $4n=2^2\cdot n$ un 5n ir jābūt naturālu skaitļu veselām pakāpēm ar kāpinātāju, lielāku par 1, tad meklēsim skaitli n kā skaitļu 2, 3 un 5 pakāpju reizinājumu.
Apzīmēsim meklēto skaitli ar $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Tad $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$; $2n = 2^{x+1} \cdot 3^y \cdot 5^z$; $3n = 2^x \cdot 3^{y+1} \cdot 5^z$; $4n = 2^{x+2} \cdot 3^y \cdot 5^z$; $5n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z+1}$. Lai izpildītu uzdevuma prasības, jāatrod tādi nenegatīvi veseli skaitļi x, y un z, lai gan skaitļiem x, y, z, gan x+1, y, z, gan x, y+1, z, gan x+2, y, z, gan arī x, y, z+1 būtu kāds kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1.
Apskatīsim vienu veidu, kā atrast skaitļu trijnieku x, y, z, kam šīs īpašības izpildās.
Ja par x, y un z ņemsim pāra skaitļus, tad skaitļiem x, y, z un x+2, y, z ir kopīgs dalītājs 2.
Meklēsim skaitļus x, y, z tā, lai

x, y un z+1 dalītos ar 3
x+1, y un z dalītos ar 5
x, y+1 un z dalītos ar 7.

Tad x dalās gan ar 2, gan 3, gan 7. Skaitļi 2, 3 un 7 ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc x dalās ar $2\cdot3\cdot7=42$. Līdzīgi y dalās ar $2\cdot3\cdot5=30$ un z dalās ar $2\cdot5\cdot7=70$. Tā kā x jādalās ar 42, bet x+1 – ar 5, tad par x varam ņemt skaitli 84. Savukārt par y varam ņemt skaitli

90, jo 90 dalās ar 30, bet 91 – ar 7. Par z varam ņemt skaitli 140, jo 140 dalās ar 70, bet 141 – ar 3. Līdz ar to varam uzrakstīt skaitli n, kam izpildās uzdevumā prasītais:

$$n = 2^{84} \cdot 3^{90} \cdot 5^{140} = (2^{42} \cdot 3^{45} \cdot 5^{70})^2$$
$$2n = 2^{85} \cdot 3^{90} \cdot 5^{140} = (2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{28})^5$$
$$3n = 2^{84} \cdot 3^{91} \cdot 5^{140} = (2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20})^7$$
$$4n = 2^{86} \cdot 3^{90} \cdot 5^{140} = (2^{43} \cdot 3^{45} \cdot 5^{70})^2$$
$$5n = 2^{84} \cdot 3^{90} \cdot 5^{141} = (2^{28} \cdot 3^{30} \cdot 5^{47})^3$$

4. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$. Tātad $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0, x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Uzdevumā dotie lielumi a, b un c ir pozitīvi, tāpēc ir spēkā nevienādības

$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}$ un $a + c \geq 2\sqrt{ac}$.

Līdz ar to varam veikt šādu novērtējumu:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{a}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ca}} = \frac{abc}{8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}} = \frac{1}{8}$$

Esam ieguvuši vajadzīgo.

5. uzdevums

Pirmo aritmētiski progresiju veidosim no skaitļiem 1, 3, 5, ..., 2n-1, ... Šīs progresijas diference ir 2. Visi atlikušie skaitļi 2, 4, 6, 8, ..., 2n, ... arī veido aritmētisko progresiju ar diferenci 2.

Otro aritmētisko progresiju veidosim, ņemot 1., 3., 5., utt. skaitli, kas neietilpst pirmajā aritmētiskajā progresijā, tātad tā būs 2, 6, 10, 14, ..., 2(2n-1), ... Šīs progresija diference ir 4. Skaitļi, kas neietilpst ne pirmajā, ne otrajā progresijā ir 4, 8, 12, 16, ..., 4n, ... Arī tie veido aritmētisko progresiju ar diferenci 4.

Veidosim trešo aritmētisko progresiju līdzīgi kā otro – ņemsim 1., 3., 5., utt. skaitli no tiem, kas nav iekļauti nevienā no mūsu līdz šim izveidotajām progresijām. Tātad trešā aritmētiskā progresija būs 4, 12, 20, ..., 4(2n-1), ... Tās diference ir divreiz lielāka nekā otrajai progresijai, tātad 8.

Šādi turpinot, varam izveidot arī k-to aritmētisko progresiju, kuras diference būs 2^k, no skaitļiem $2^{k-1}, 2^{k-1} + 2^k, 2^{k-1} + 2 \cdot 2^k, \dots, 2^{k-1}(2n-1), \dots$

jeb $2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \dots, (2n-1) \cdot 2^{k-1}, \dots$. Tad skaitļi, kas nebūs iekļauti nevienā no izveidotajām progresijām, būs $2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 4 \cdot 2^k, \dots, n \cdot 2^k, \dots$. Redzam, ka šādi varam turpināt bezgalīgi.

Pārbaudīsim, vai šādi veidotām aritmētiskām progresijām izpildās visi uzdevuma nosacījumi.

Katras nākamās progresijas diference ir divreiz lielāka nekā iepriekšējai, tātad nekādām divām progresijām diferences nav vienādas.

Nevar būt, ka kāds skaitlis ietilptu divās progresijās, jo katru jauno progresiju veidojām no skaitļiem, kas vēl neietilpa nevienā no iepriekšējām progresijām.

Parādīsim, ka katrs naturāls skaitlis ietilpst kādā no progresijām. Katru nākamo progresiju sākām veidot ar mazāko iepriekšējās progresijās neiekļauto naturālo skaitli. Tas nozīmē, ka, ja k-tā progresija sākas ar skaitli 2^{k-1}, tad visi naturālie skaitļi, kas mazāki par 2^{k-1}, jau ir iekļauti iepriekšējās progresijās. Bet, kā zinām, katram naturālam skaitlim m var atrast tādu naturālu skaitli k, ka $2^{k-1} > m$. Līdz ar to esam parādījuši, ka jebkurš naturāls skaitlis ietilpst kādā no mūsu izveidotajām aritmētiskajām progresijām.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka var izveidot bezgalīgi daudzas bezgalīgas aritmētiskas progresijas, lai visi uzdevuma nosacījumi izpildītos.

2001. gads
10. klase

1. uzdevums

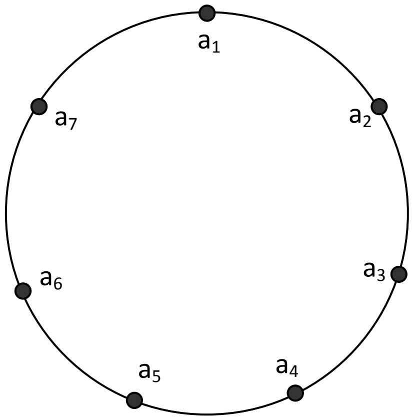
Apskatīsim izteiksmi
$x^2 * (x+1)^2 * (x+2)^2 * (x+3)^2 * (x+4)^2 * (x+5)^2 * (x+6)^2 * (x+7)^2$,
kur "*" vietā ir "+" vai "-" zīmes. Saliekot zvaigznīšu vietā ir "+" vai "-" zīmes un atverot iekavas, iegūstam polinomu $Ax^2 + Bx + C$, kur A, B un C atkarīgi no zīmju izvēles. Visām x vērtībām šī polinoma vērtība ir vienāda ar nulli tad un tikai tad, ja A=0, B=0 un C=0.
Atverot iekavas, iegūst, ka
A=1*1*1*1*1*1*1*1 (1)
B=0*2*4*6*8*10*12*14 (2)
C=0*1*4*9*16*25*36*49 (3)
Sākotnējo uzdevumu tagad var reducēt uz uzdevumu "atrast "+" un "-" zīmju virkni, ar kuru A=B=C=0". Vienādojuma (1) labajā pusē katrs saskaitāmais ir vai nu +1, vai -1. Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vienāda ar nulli, "+" un "-" zīmju skaitiem jābūt vienādiem, tātad četriem saskaitāmajiem jābūt ar "+" zīmi, četriem – ar "-" zīmi. Pirmais saskaitāmais ir ar "+" zīmi, tātad trīs zvaigznīšu vietās jābūt "+" zīmēm, bet pārējās četrās - "-" zīmēm. Tātad ikvienai "+" un "-" zīmju virknei, kurā "+" zīme ir 3 reizes, bet "-" zīme – četras, A=0. Vēl atliek izdomāt, kādā gadījumā arī B=0 un C=0.
Apskatīsim vienādojumu (2) (vai (3)). B (vai C) vietā liksim nulli un tos skaitļus, kam priekšā jāraksta "-" zīme, pārnesīsim uz vienādojuma kreiso pusi. Iegūtā vienādība ir patiesa, tātad labās puses izteiksmes vērtība ir tāda pati, kā kreisajai pusei. Bez tam visi saskaitāmie ir nenegatīvi. Saskaitot vienādības abas puses, iegūsim summu tiem skaitļiem, kurus saista zvaigznītes. Tā ir arī divkāršota summa saskaitāmajiem ar "+" zīmi, kā arī divkāršota summa saskaitāmajiem ar "-"zīmi. Jau iepriekš noskaidrojām, ka "+" zīme zvaigznītes vietā jāraksta 3 reizes. Tā kā vienādojumā (2) (un(3)) pirmais saskaitāmais ir vienāds ar nulli, bet pārējie ir no nulles atšķirīgi skaitļi, tad summa, kas veidojas, saskaitot skaitļus, kuru priekšā rakstāma "+" zīme, ir divreiz mazāka nekā summa, kas veidojas, ja visu zvaigznīšu vietā rakstītu "+" zīmi. Vienādojumā (2) nenegatīvo locekļu summa ir
$$\frac{1}{2}(0+2+4+6+8+10+12+14) = 28,$$
bet vienādojumā (3) tā ir
$$\frac{1}{2}(0+1+4+9+16+25+36+49) = 70.$$
Mēģināsim vienādojumā (3) atrast 3 skaitļus, kuru summa ir 70. Pārbaudīsim, vai viens no šiem skaitļiem var būt 49. Tādā gadījumā pārējo divu summai jābūt 70-49=21. No dotajiem skaitļiem mazāki par 21 ir tikai 1, 4, 9 un 16, taču 16+9>21, bet 16+4<21. Skaidrs, ka summa 9+4 un visas pārējās summas ir mazākas par 16+4, tātad arī par 21. Tas nozīmē, ka skaitlis 49 nav viens no meklētajiem skaitļiem. Atliek 6 skaitļi, no kuriem trijiem summā vajadzētu dot skaitli 70. Pārbaudīsim, vai viens no tiem var būt 36. Ja var, tad no pārējiem skaitļiem izvēlēto divu summa ir 70-36=34. Pieņemot, ka otrais skaitlis ir 25, trešajam jābūt 34-25=9, kas arī ir viens no atlikušajiem skaitļiem. Tātad esam atraduši vienu veidu, kā izvēlēties trīs skaitļus,

kuru summa ir 70. Pārbaudīsim, vai ir vēl kāds cits veids. Ar skaitli 36 citu šādu summu izveidot nav iespējams, jo 36+16+9<70. Vēl atliek skaitļi 1, 4, 9, 16 un 25. No šiem skaitļiem triju lielāko summa ir mazāka par 70, tātad neder arī neviena cita summa, kas izveidota no trim skaitļiem.
Esam ieguvuši vienu vienīgu veidu, kā vienādojumā (3) izvēlēties 3 skaitļus, kuru summa ir 70. Šādu summu dod 4., 6. un 7. saskaitāmais.
Vēl atliek pārbaudīt, vai 4., 6. un 7. saskaitāmais vienādojuma (2) labajā pusē dod summu 28. Redzam, ka 6+10+12=28.
Tātad vienīgais veids, kā zvaigznīšu vietā ievietot "+" un "-" zīmes, lai uzdevumā dotās izteiksmes vērtība visiem x būtu vienāda ar nulli, ir
$x^2-(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2-(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2-(x+7)^2$.

2. uzdevums

1. risinājums

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad jebkuru četru pēc kārtas ņemtu skaitļu summa mazāka par 4. Pierādīsim, ka tādā gadījumā neizpildās pārējie uzdevuma nosacījumi.
Apzīmēsim uzrakstītos skaitļus pēc kārtas ar $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Ar i apzīmēsim naturālu skaitli robežās no 1 līdz 7. Sauksim a_i par pirmo saskaitāmo četru pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summā, ja a_i tajā tiek ieskaitīts, taču a_{i-1} (gadījumā, kad $i \neq 1$) vai a_7 (kad $i=1$) ieskaitīts netiek. Šādu summu, kuras pirmais saskaitāmais ir a_i, apzīmēsim ar S_i.



37. att.

Apskatīsim visas iespējamās summas S_i. Katrai summai S_i atbilst tieši viens pirmais saskaitāmais a_i, un katrs skaitlis a_i ir pirmais saskaitāmais tieši vienai summai S_i. No tā izriet, ka pastāv tieši septiņi veidi, kā izvēlēties četru pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summu. Mēs apskatīsim gadījumu, kad katra no šīm summām mazāka par 4, tātad visu septiņu summu summa ir mazāka par $4 \cdot 7 = 28$. Apzīmēsim šo summu ar S. Apskatīsim, kas veido šo summu. Skaitlis a_1 ietilpst četrās summās – S_1, S_7, S_6 un S_5. Tātad summā S tas ir ieskaitīts tieši četras reizes. Līdzīgi spriežot, var izsecināt, ka katrs no uzrakstītajiem skaitļiem summā S ieskaitīts tieši četras reizes. Tas nozīmē, ka S ir četrkāršota uzrakstīto skaitļu summa. Uzdevumā teikts, ka uzrakstīto skaitļu summa ir 7. No tā seko, ka

$$S = 4 \cdot 7 = 28 \qquad (1)$$

Pieņemot, ka katra no summām S_i ir mazāka par 4, ieguvām, ka četrkāršota uzrakstīto skaitļu summa ir mazāka par 28:

$$S<28. \qquad (2)$$

Ir iegūta pretruna starp sakarībām (1) un (2). Ar to ir pierādīts, ka kādas summas S_i vērtība ir vismaz 4.

2. risinājums

Apzīmēsim uzrakstītos skaitļus pēc kārtas ar $a_1, a_2, \dots, a_7$.

Ieviesīsim apzīmējumu $S_{ijkl} = a_i + a_j + a_k + a_l$, kur i, j, k, l ir naturāli skaitļi robežās no 1 līdz 7. Apskatīsim uzdevumā dotajam pretējo gadījumu. Pieņemsim , ka jebkuru četru pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir mazāka par 4.

Apskatīsim summas S_{1234} un S_{5671}.

$S_{1234}<4$

$S_{5671}<4$

$S_{1234}+S_{5671}< 4+4$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_1 < 8$

$7 + a_1 < 8$

$a_1 < 8 - 7$

$a_1 < 1$

Līdzīgā veidā,

apskatot S_{2345} un S_{6712}, iegūst, ka $a_2 < 1$;

apskatot S_{3456} un S_{7123}, iegūst, ka $a_3 < 1$;

...

apskatot S_{7123} un S_{4567}, iegūst, ka $a_7 < 1$.

Ieguvām, ka katrs no uzrakstītajiem skaitļiem ir mazāks par 1. Tad

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Tā kā $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 7$, esam ieguvuši, ka 7<7 – pretruna.

Iegūtā pretruna pierāda: ja pa riņķa līniju izrakstīti septiņi reāli skaitļi, kuru summa ir 7, tad nevar būt, ka jebkuru četru pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir mazāka par 4. Tas nozīmē, ka vismaz vienai no šīm summām jābūt lielākai vai vienādai ar 4.

3. uzdevums

Apskatīsim šādu uzdevumu:

“Riņķa līnija ortogonāli projicēta uz tās pieskari. Kāda sakarība pastāv starp rādiusa garumu un attālumu starp riņķa līnijas centru un projekcijas gala punktiem?”

Apzīmēsim pieskari ar a. Lai atrastu vajadzīgo projekciju, novilksim riņķa līnijai vēl divas pieskares tā, lai tās būtu perpendikulāras pret a. Tās nosauksim par b un c. Vēl ievedīsim šādus apzīmējumus:

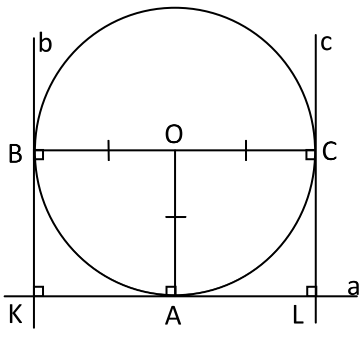
O – riņķa līnijas centrs;

A, B un C – pieskaru a, b un c pieskāršanās punkti;

K – taišņu a un b krustpunkts;

L – taišņu a un c krustpunkts;

R – rādiusa garums.



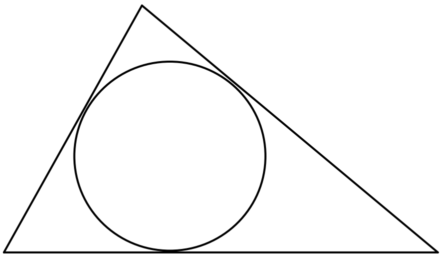
38. att.

$OA \perp a$, jo OA – rādiuss, kuram ar pieskari a kopīgs punkts A.

Attiecīgi $OB \perp b$ un $OC \perp c$.

Apskatīsim četrstūri AOBK un noteiksim attālumu starp punktiem O un K. AOBK ir kvadrāts, jo tajā trīs leņķi ir taisni (OAK, AKB un KBO) un AO=OB=R. Nogrieznis OK ir šī kvadrāta diagonāle. Tāpēc $OK = AO \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

Veicot līdzīgus spriedumus par četrstūri AOCL, nonāksim pie secinājuma, ka $OL = AO \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2} = OK$.
No iegūtā rezultāta varam secināt: ja riņķa līnijas ar rādiusu R ortogonāli projicēta uz tās pieskari, tad attālumi no riņķa līnijas centra līdz projekcijas galapunktiem ir $R\sqrt{2}$.


39 att.

Sākotnējā uzdevumā bija dots trijstūris un tajā ievilkta riņķa līnija. Citiem vārdiem sakot, ir riņķa līnija, kurai apvilkts trijstūris.
Apzīmēsim riņķa līnijas rādiusu ar r un centru ar O. Katra trijstūra mala atrodas uz riņķa līnijas pieskares. Riņķa līnija projicēta uz malām, tātad uz pieskarēm. Kā mēs zinām, visu šādu projekciju galapunkti no riņķa līnijas centra atrodas attālumā $r\sqrt{2}$. Tas nozīmē, ka visi seši projekciju nogriežņu gala punkti atrodas vienādā attālumā no punkta O, un caur tiem var novilkt riņķa līniju ar rādiusu $r\sqrt{2}$ un centru punktā O.

4. uzdevums

Kā zināms, katru naturālu skaitli, kas lielāks par 1, iespējams uzrakstīt kā pirmskaitli vai pirmskaitļu reizinājumu jeb sadalīt pirmreizinātājos. Tāpēc katra naturāla skaitļa, kas lielāks par 1, kvadrātu iespējams uzrakstīt kā pirmskaitļa kvadrātu vai pirmskaitļu kvadrātu reizinājumu. Tātad, ja kāda naturāla skaitļa kvadrātu sadala pirmreizinātājos, tad katrs pirmreizinātājs q_i šajā reizinājumā ietilpst pāra skaitu reižu.
Pieņemsim, ka skaitlis (2n+1)(6n+5) ir naturāla skaitļa kvadrāts. Viegli pārliecināties, ka naturālām n vērtībām šis skaitlis ir vismaz 33, tātad lielāks par 1. Tādā gadījumā iepriekš aprakstītā īpašība izpildās.
Atradīsim lielāko skaitli, ar kuru dalās gan 2n+1, gan 6n+5. Ja skaitļi 2n+1 un 6n+5 dalās ar k, tad tos var pierakstīt kā $2n+1=kA_1$ un $6n+5=kA_2$, kur A_1 un A_2 – veseli skaitļi. Tad arī $6n + 5 - 3(2n + 1) = kA_2 - 3kA_1 = k(A_2 - 3A_1)$ dalās ar k, taču $6n + 5 - 3(2n + 1) = 6n + 5 - 6n - 3 = 2$. Tātad vienīgie skaitļi, ar kuriem varētu dalīties gan 2n+1, gan 6n+5, ir 2 un 1. Tā kā 2n+1 ir nepāra skaitlis, tad tas nedalās ar 2. Varam secināt, ka vienīgais skaitlis, ar kuru dalās gan 2n+1, gan 6n+5, ir skaitlis 1.
Apskatīsim skaitļa (2n+1)(6n+5) sadalījumu pirmreizinātājos. Ja skaitlis q_i ir skaitļa 2n+1 pirmreizinātājs, tad tas noteikti nav pirmreizinātājs skaitlim 6n+5, citādi skaitļi 2n+1 un 6n+5 abi dalītos ar q_i. Līdzīgi, ja q_j ir skaitļa 6n+5 pirmreizinātājs, tad tas nav 2n+1 pirmreizinātājs. Tā kā mēs pieņēmām, ka (2n+1)(6n+5) ir vesela skaitļa kvadrāts, tad katrs pirmreizinātājs tajā atkārtojas pāra skaitu reižu. Tā kā skaitļiem 2n+1 un 6n+5 nav kopīgu pirmreizinātāju, tad arī skaitļu 2n+1 un 6n+5 sadalījumos pirmreizinātājos katrs pirmreizinātājs atkārtojas pāra skaitu reižu. Savukārt tas nozīmē, ka gan 2n+1, gan 6n+5 ir vesela skaitļa kvadrāts.
Katru veselu skaitli var uzrakstīt kā 3k, 3k+1 vai 3k+2, kur k ir vesels skaitlis. Apskatīsim, kādu atlikumu var dot vesela skaitļa kvadrāts, dalot ar 3:

$(3k)^2 : 3 = 9k^2 : 3 = 3k^2$ atl.0

$$(3k+1)^2 : 3 = (9k^2+6k+1) : 3 = 3k^2+2k \text{ atl.1}$$
$$(3k+2)^2 : 3 = (9k^2+12k+4) : 3 = 3k^2+4k+1 \text{ atl. } 1.$$
Redzam, ka atlikums var būt tikai 0 vai 1. Taču
$$(6n+5) : 3 = 2n+1 \text{ atl. } 2,$$
tātad skaitlis 6n+5 nav vesela skaitļa kvadrāts. Esam ieguvuši pretrunu. Tas pierāda, ka nekādam naturālam n skaitlis $(2n+1)(6n+5)$ nav vesela skaitļa kvadrāts.

5. uzdevums

Apzīmēsim telpas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz 11. Policija pēc kārtas pārbauda telpas no 2. līdz 10., pēc tam vēlreiz otro un pēc kārtas līdz desmitajai.
1) Ja sākumā noziedznieks atrodas telpā ar pāra numuru, tad sākumā vai nu noziedznieks un policists atrodas vienā telpā, vai arī starp noziedznieku un policistu ir nepāra skaits telpu. Nākamajā dienā vai nu policists atrod noziedznieku, vai arī starp viņiem ir nepāra skaits telpu. Bez tam šis skaits nav lielāks kā iepriekšējā dienā. Izdarot gājienu uz telpu ar mazāku numuru kā iepriekšējai, noziedznieks nokļūst tuvāk policijai. Ja starp noziedznieku un policiju ir tikai viena telpa, tad noziedzniekam vienīgais labvēlīgais gājiens ir uz telpu ar lielāku numuru. Kad policija būs nonākusi līdz 9. telpai (ja noziedznieks vēl nav noķerts), tad vēl aizvien starp noziedznieku un policiju ir nepāra skaits telpu, tātad noziedznieks var atrasties tikai 11. telpā. Nākamajā naktī noziedznieks dodas uz 10. telpu, kuru arī pa dienu pārmeklē policija.
2) Ja sākumā noziedznieks atrodas telpā ar nepāra numuru, tad viņš var brīvi pārvietoties no telpas uz telpu, līdz policija nonāk līdz 10. telpai. Šajā laikā, kamēr policija pārmeklē telpu ar pāra numuru, noziedznieks atrodas telpā, kuras numurs ir nepāra skaitlis, un otrādi. Kad policija pārmeklē 2. telpu otro reizi, gan policija, gan noziedznieks atrodas telpās ar pāra numuriem. Iepriekš jau pierādījām, ka policija noteikti atradīs noziedznieku, pārmeklējot telpas pēc kārtas līdz desmitajai.

11. klase

1. uzdevums

Pierādīsim divas īpašības par skaitļu dalīšanos ar 7.
1) Ja skaitlis dalās ar 7, tad arī šī skaitļa reizinājums ar jebkuru veselu skaitli dalās ar 7.
Dots skaitlis, kas dalās ar 7. To ir iespējams uzrakstīt kā vesela skaitļa A reizinājumu ar skaitli 7, tātad kā $A \cdot 7$. Šo skaitli pareizinot ar veselu skaitli α, iegūsim $\propto \cdot A \cdot 7$. Iegūtais skaitlis dalās ar 7, jo α un A ir veseli skaitļi, tātad dalījums $\frac{\propto \cdot A \cdot 7}{7} = \alpha \cdot A$ ir vesels skaitlis.
2) Ja divi skaitļi dalās ar 7, tad arī to summa un starpība dalās ar 7.
Doti divi skaitļi, kas dalās ar 7. Uzrakstīsim tos kā $B \cdot 7$ un $C \cdot 7$, kur B un C – veseli skaitļi. Izveidosim doto skaitļu summu (un starpību):
$$B \cdot 7 \pm C \cdot 7 = (B \pm C) \cdot 7.$$

Tā kā skaitļi B un C ir veseli skaitļi, tad arī to summa un starpība ir veseli skaitļi. Tos reizinot ar 7, iegūst skaitļus, kas dalās ar 7.

Kombinējot nupat apskatītās īpašības, iegūsim šādu sakarību – ja skaitļi x_1 un x_2 dalās ar 7, tad arī skaitlis $\alpha x_1+\beta x_2$, kur α un β ir veseli skaitļi, dalās ar 7.

Ja 5a+4b un 4a+3b dalās ar 7, tad arī $-3(5a+4b)+4(4a+3b)$ un $4(5a+4b)-5(4a+3b)$ dalās ar 7. Bet

$$-3(5a+4b)+4(4a+3b)=-15a-12b+16a+12b=a$$

$$4(5a+4b)-5(4a+3b)=20a+16b-20a-15b=b.$$

Tātad skaitļi a un b dalās ar 7. Katru no tiem var uzrakstīt kā vesela skaitļa reizinājumu ar skaitli 7. Ieviesīsim jaunus apzīmējumus: $a=7\cdot D$; $b=7\cdot E$.

$$a\cdot b=7\cdot D\cdot 7E=49\cdot D\cdot E.$$

Tā kā D un E ir veseli skaitļi, tad $49\cdot D\cdot E$ dalās ar 49. Tātad ab dalās ar 49.

2. uzdevums

Pieņemsim, ka cilvēku daudzumi, ar kuriem 10 sapulces dalībnieki sarokojās, ir 9; 9; 9; 8; 8; 8; 7; 6; 4; 4. Tādā gadījumā sapulces dalībnieku vidū ir divi tādi, kas ir sarokojušies ar tieši četriem citiem. Nosauksim šos divus cilvēkus par A un B. Saskaitīsim, ar cik cilvēkiem ir sarokojies A un ar cik – B, un šo skaitļu summu apzīmēsim ar S. Zināms, ka A un B katrs ir sarokojies ar 4 cilvēkiem, tāpēc S=4+4.

$$S=8 \qquad (1)$$

Ir trīs citi sapulces dalībnieki, no kuriem katrs ir sarokojies ar 9 cilvēkiem, tātad ar visiem pārējiem, to skaitā gan ar A, gan ar B. Vēl ir 3 sapulces dalībnieki, no kuriem katrs ir sarokojies ar 8 cilvēkiem, tātad katrs no viņiem nav sarokojies ar tieši vienu sapulces dalībnieku. Tas nozīmē, ka ikviens no šiem 3 cilvēkiem ir sarokojies ar A vai B (vai abiem), jo pretējā gadījumā būtu jau 2 cilvēki, ar kuriem viņš nav sarokojies.

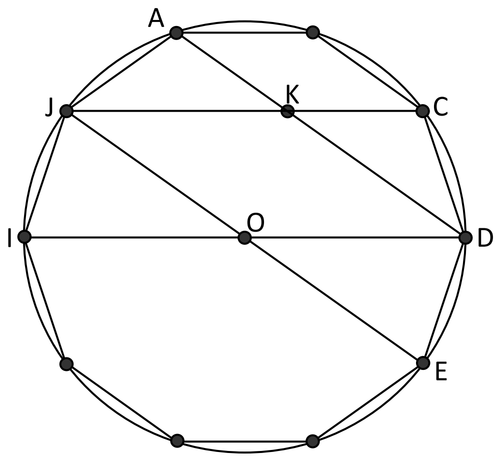
Apskatīsim, kas veido summu S. Ir 3 cilvēki, kas ir sarokojušies gan ar A, gan B, un 3 cilvēki, ar kuriem ir sarokojies vismaz viens no cilvēkiem A un B. Tātad S vērtība ir vismaz 3+3+3, tāpēc

$$S\geq 9 \qquad (2)$$

S vietā ievietojot vērtību no sakarības (1), iegūstam nevienādību $8\geq 9$, kas nav patiesa. Ir iegūta pretruna, tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

3. uzdevums

Uz riņķa līnijas atliekot desmit punktus, kā prasīts uzdevumā, un tos pēc kārtas savienojot ar nogriežņiem, iegūsim regulāru desmitstūri. Apzīmēsim septiņas pēc kārtas ņemtas virsotnes ar burtiem I, J, A, B, C, D un E. Četrstūris JABC ir trapece ar pamatiem JC un AB, jo $\sphericalangle JAB=\sphericalangle CBA$ un $AJ=BC$. Tātad nogriežņi AB un CJ ir paralēli, bez tam $\sphericalangle CJA=\sphericalangle CJB$. Tā kā $\sphericalangle IJA=\sphericalangle DCB$ un $\sphericalangle CJA=\sphericalangle JCB$, tad arī leņķi IJC un DCJ ir vienādi. Četrstūris IJCD ir trapece ar pamatiem ID un JC, jo $\sphericalangle IJC=\sphericalangle DCJ$ un $JI=CD$. Tāpēc nogriežņi ID, JC un AB ir paralēli. Līdzīgi varam pierādīt, ka arī četrstūri ABCD un JADE ir trapeces un nogriežņi BC, AD un JE ir paralēli. Ievērosim, ka horda ID sadala riņķa līniju divos vienādos lokos, tātad tā ir diametrs. Arī JE ir riņķa līnijas diametrs, jo sadala to divos vienādos lokos. Tātad



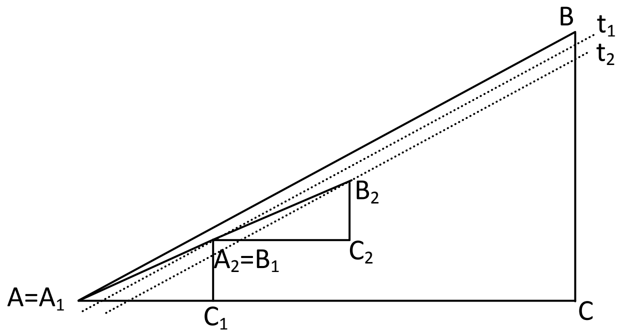
40. att.

$\mathrm{ID} = \mathrm{JE} = 2\mathrm{R}$. Nogriežņu ID un JE krustpunkts ir riņķa līnijas centrs. Apzīmēsim to ar O. Nogriežņu AD un JC krustpunktu apzīmēsim ar K. Četrstūris ABCK ir paralelograms, jo AB paralēls KC un BC paralēls AK, tāpēc malas BC un AK ir vienādas. Tāpēc $\mathrm{AD} - \mathrm{BC} = \mathrm{AD} - \mathrm{AK} = \mathrm{DK}$. Četrstūris JKDO ir paralelograms, jo JK paralēls OD un KD paralēls JO, tāpēc malas KD un JO ir vienādas. Tā kā punkts O ir riņķa līnijas centrs, bet J atrodas uz riņķa līnijas, tad $\mathrm{JO} = \mathrm{R}$. Esam ieguvuši, ka $\mathrm{AD} - \mathrm{BC} = \mathrm{DK} = \mathrm{JO} = \mathrm{R}$, kas arī bija jāpierāda.

4. uzdevums

1. risinājums

Izveidosim taisnleņķa trijstūri ABC, kur $\sphericalangle \mathrm{C} = 90°$, $\mathrm{BC} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ un $\mathrm{AC} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Šajā trijstūrī iezīmēsim taisnleņķa trijstūrus $\mathrm{A_1B_1C_1}, \mathrm{A_2B_2C_2}, \dots, \mathrm{A_nB_nC_n}$, tādus, ka $\mathrm{A_iC_i} = b_i$, $\mathrm{B_iC_i} = a_i$, $\sphericalangle \mathrm{A_iC_iB_i} = 90°$, $\mathrm{A_i} = \mathrm{B_{i-1}}$ un $\mathrm{A_iC_i} || \mathrm{AC}$ (i – vesels skaitlis robežās no 1 līdz n). Šajos trijstūros leņķus $\mathrm{C_iA_iB_i}$ apzīmēsim ar α_i. Kā redzam, $\frac{a_i}{b_i} = \mathrm{tg} \propto_i$ un $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \mathrm{tg}\sphericalangle\mathrm{CAB}$.



41. att.

Tā kā visi leņķi α_i un $\sphericalangle\mathrm{CAB}$ ir šauri un tangensa funkcija šauriem leņķiem ir augoša, tad mums pietiek pārbaudīt, vai ir iespējams, ka visi leņķi α_1, α_2, … α_n ir mazāki par $\sphericalangle\mathrm{CAB}$.

Ja α_1 mazāks par leņķi CAB, tad punkts B_1 atrodas zem taisnes AB. Caur šo punktu novilksim taisni t_1, kas paralēla AB. Ja leņķis α_2 mazāks par leņķi CAB, tad punkts B_2 atrodas zem taisnes t_1. Caur šo punktu paralēli taisnei AB novilksim taisni t_2. Līdzīgi turpinot, iegūsim, ka punkts B_3 atrodas zem taisnes t_2, ... , punkts B_n atrodas zem taisnes t_{n-1}. Taisne t_{n-1} atrodas zem taisnes t_{n-2}, … , t_1 atrodas zem AB. Nogriežņa AC garums sakrīt ar nogriežņu $\mathrm{A_1C_1} = b_1, \mathrm{A_2C_2} = b_2, \dots, \mathrm{A_nC_n} = b_n$ summu, tātad punkts B_n atrodas uz nogriežņa BC, bez tam $CB_n<CB$. Iegūtais nogriežņa CB_n garums ir nogriežņu $\mathrm{C_1B_1} = a_1, \mathrm{C_2B_2} = a_2, \dots, \mathrm{C_nB_n} = a_n$ garumu summa. Arī trijstūra ABC kateti CB izveidojām kā nogriežņu $a_1, a_2, \dots, a_n$ summu. Esam ieguvuši nevienādību

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, kas nevar būt patiesa. Tātad daļa $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ nevar būt lielāka par visām daļām $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2};\dots;\frac{a_n}{b_n}$.

2. risinājums
Šajā uzdevumā katras daļas skaitītāju iespējams interpretēt kā ceļa gabalu jeb attālumu, bet saucēju – kā šī ceļa veikšanas laiku. Tad daļa apraksta ātrumu, kādā veikts attiecīgais ceļš. Kopīgais ceļš sastāv no n atsevišķiem ceļa posmiem $a_1, a_2, \dots, a_n$, bet kopīgo laiku veido atsevišķo laika posmu $b_1, b_2, \dots, b_n$ summa. Nav iespējams, ka kopējais ātrums $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ pārsniedz katra atsevišķā ceļa posma veikšanas ātrumu $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots ; \frac{a_n}{b_n}$.

5. uzdevums

Sauksim konfekšu kaudzi par pāra (vai par nepāra) kaudzi, ja tajā ir pāra (vai nepāra) skaits konfekšu. Ievērosim, ka gājienu nav iespējams izdarīt tikai tādā gadījumā, ja abās konfekšu kaudzēs ir pa vienai konfektei. Ja viena no kaudzēm ir pāra kaudze, tad ir iespējams izdarīt gājienu.
1) Ja m=1 un n=1, tad uzvar otrais spēlētājs, jo pirmajam spēlētājam vajadzētu sākt spēli, taču viņš nevar izdarīt gājienu.
2) Ja gan m, gan n ir nepāra skaitļi un vismaz viens no šiem skaitļiem nav 1, tad pirmais spēlētājs sākumā vienu nepāra kaudzi apēd, bet otru sadala. Sadalot nepāra kaudzi divās kaudzēs, izveidojas viena pāra kaudze un viena – nepāra. Šādā situācijā otrais spēlētājs noteikti var izdarīt gājienu, jo viena no kaudzēm ir pāra. Savā gājienā viņš var apēst nepāra kaudzi, bet pāra kaudzi sadalīt kaudzē ar vienu konfekti un kaudzē ar pārējām konfektēm. Bez tam abas kaudzes ir nepāra. Ja 1. spēlētājs var izdarīt gājienu, tad viņam jāapēd kaudze ar vienu konfekti, lai otru kaudzi sadalītu atkal divās kaudzēs. No jaunajām kaudzēm viena būs pāra, otra – nepāra. Tad 2. spēlētājs atkārto tādu pašu gājienu kā pirms tam utt. Šādi spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu, jo pirms viņa gājiena viena no kaudzēm ir pāra. Ar katru gājienu konfekšu skaits samazinās, līdz kādā gājienā būs palikušas divas kaudzes ar vienu konfekti katrā. Šajā brīdī pirmajam spēlētājam būs jāizdara gājiens, jo abas kaudzes ir nepāra, taču viņš gājienu nevarēs izdarīt. Otrais spēlētājs uzvarēs.
3) Ja vismaz viens no skaitļiem m un n ir pāra skaitlis, tad pirmais spēlētājs, sākot spēli, var vienu pāra kaudzi sadalīt kaudzē ar vienu konfekti un kaudzē ar pārējām konfektēm, tātad divās nepāra kaudzēs. Otrajam spēlētājam būs jāsadala nepāra kaudze, ja viņam vispār iespējams veikt gājienu. Saskaņā ar iepriekš aprakstīto gadījumu, pareizi spēlējot, uzvar pirmais spēlētājs.

12. klase

1. uzdevums

Kā zināms, visām reālām u un v vērtībām nevienādība $(u-v)^2 \geq 0$ ir patiesa. No tā seko, ka $u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$, līdz ar to $u^2 + v^2 \geq 2uv$. Tā ka x un $\frac{a}{2}\,y$ vērtības ir reāli skaitļi, tās var ievietot u un v vietā un iegūt nevienādību

$x^2 + \frac{a^2}{4}y^2 \geq axy$ (1)

Līdzīgi u un v vietā liekot izteiksmes $\frac{a}{2}y$ un z, iegūsim nevienādību

$\frac{a^2}{4}y^2 + z^2 \geq ayz$ (2)

Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūsim

$x^2 + \frac{a^2}{4}y^2 + \frac{a^2}{4}$

$y^2 + z^2 \geq axy + ayz$ jeb

$x^2 + \frac{a^2}{2}y^2 + z^2 \geq a(xy + yz).$

Šī nevienādība ir spēkā visām reālām a, x, y un z vērtībām. Ja $y^2 \geq \frac{a^2}{2}y^2$, tad

$x^2 + \frac{a^2}{2}y^2 + z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq a(xy + yz).$

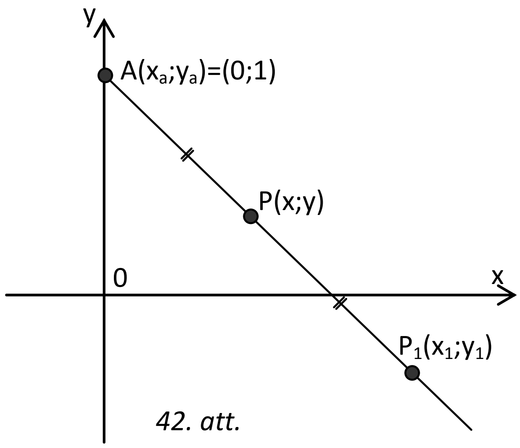
Tas nozīmē, ka atrisinot nevienādību $y^2 \geq \frac{a^2}{2}y^2$ attiecībā uz a, iegūsim derīgas a vērtības. Ja y=0, der jebkurš a. Ja $y \neq 0$, tad $y^2 > 0$; tāpēc varam dalīt ar y^2; iegūstam 1$\geq \frac{a^2}{2}$. Līdz ar to $a^2 \leq 2$ un $|a| \leq \sqrt{2}$. Šādām parametra a vērtībām nevienādība $x^2 + y^2 + z^2 \geq a(xy + yz)$ ir spēkā visām reālām x, y un z vērtībām. Ja $|a| > \sqrt{2}$, ir iespējams izvēlēties tādas x, y un z vērtības, ar kurām dotā nevienādība nav patiesa. Piemēram, izvēloties vērtības x=z=1 un y=a, iegūsim, ka jāizpildās nevienādībai $1 + a^2 + 1 \geq a(a + a)$ jeb $a^2 + 2 \geq 2a^2$. Savelkot līdzīgos locekļus, iegūsim $a^2 \leq 2$, taču, tā kā $|a| > \sqrt{2}$, tad $a^2 > 2$. Ir iegūta pretruna. Tāpēc dotā nevienādība ir patiesa visām reālām x, y un z vērtībām tad un tikai tad, ja $|a| \leq \sqrt{2}$.

2. uzdevums

Tā kā punkts P ir nogriežņa AP_1 viduspunkts, tad $AP_1=2AP$, nogriežņi AP un AP_1 atrodas uz vienas taisnes un punkts P atrodas starp punktiem A un P_1. No sakarības $AP_1=2AP$ seko, ka nogriežņa AP_1 projekcija uz OX ass ir divreiz garāka nekā nogrieznim AP un nogriežņa AP_1 projekcija uz OY ass ir divreiz garāka nekā nogrieznim AP. Apzīmējot punkta A koordinātas ar x_a un y_a, P koordinātas ar x un y, bet P_1 koordinātas ar x_1 un y_1, varam to uzrakstīt šādi:

$x_1-x_a=2(x-x_a)$ (1)

$y_1-y_a=2(y-y_a)$ (2)



42. att.

Zināms, ka $x_a=0$ un $y_a=1$, tāpēc no vienādojumiem (1) un (2) var izteikt sakarību starp x un x_1 un y un y_1:

$x_1 - 0 = 2(x - 0)$

$x_1 = 2x \Rightarrow x = \frac{x_1}{2}$

$y_1 - 1 = 2(y - 1)$

$y_1 - 1 = 2y - 2 \Rightarrow y = \frac{y_1+1}{2}$.

Ņemot vērā, ka $x = \frac{x_1}{2}$ un $y = \frac{y_1+1}{2}$, sakarību $y = \cos^2 x$ var pārrakstīt kā $y = \frac{y_1+1}{2} = \cos^2 \frac{x_1}{2}$. Šādi iegūtais jaunais vienādojums parāda, kā savā starpā saistītas x_1 un y_1 vērtības. Izdarot pārveidojumus, iegūst, ka $y_1 + 1 = 2\cos^2 \frac{x_1}{2}$; $y_1 = 2\cos^2 \frac{x_1}{2} - 1 = \cos x_1$.

Tas nozīmē, ka visi punkti P_1 veido funkcijas $y = \cos x$ grafiku.

3. uzdevums

Atbilde: Galarezultāts var būt jebkurš nepāra skaitlis, kas nepārsniedz 2^n.

Risinājums: Sākumā uz tāfeles uzrakstīti n pāra skaitļi un 1 nepāra skaitlis. Ja kādā gājienā nodzēš divus pāra skaitļus, tad vietā uzraksta pāra skaitli. Nepāra skaitļu skaits nemainās. Ja tiek nodzēsts viens pāra skaitlis un viens nepāra skaitlis, tad uzrakstīts tiek nepāra skaitlis. Atkal nepāra skaitļu skaits paliek nemainīgs. Tā kā sākumā uz tāfeles ir tikai viens nepāra skaitlis, tad nav jēgas apskatīt gājienu, kurā tiktu nodzēsti divi nepāra skaitļi, jo ar sākotnēji iespējamiem gājieniem nav iespējams palielināt nepāra skaitļu skaitu. Kā redzam, pēc jebkurā skaitā izdarītiem gājieniem uz tāfeles uzrakstīts tieši viens nepāra skaitlis, bet pāra skaitļu skaits var būt dažāds. Tas nozīmē, ka galarezultāts ir nepāra skaitlis.

Nav iespējams veikt gājienu, kas palielinātu maksimālo uz tāfeles uzrakstīto skaitli. Tas nozīmē, ka pēdējais uz tāfeles uzrakstītais skaitlis nepārsniedz skaitļa 2^n vērtību. Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim, ka iespējams galarezultātā iegūt jebkuru nepāra skaitli, kas nepārsniedz 2^n.

Bāze: n=1

Sākotnēji uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1 un 2. Vienīgais nepāra skaitlis, kas nepārsniedz 2, ir skaitlis 1. To var iegūt, nodzēšot abus uzrakstītos skaitļus un vietā rakstot $|1 - 2| = 1$.

Pāreja: Pieņemsim, ka no skaitļiem $1; 2; 4; \dots; 2^k$ var galarezultātā iegūt jebkuru no skaitļiem $1; 3; 5; \dots; 2^k - 1$. Apskatīsim gadījumu, kad sākotnēji uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $1; 2; 4; \dots; 2^k; 2^{k+1}$. Ar M apzīmēsim nepāra skaitli robežās no 1 līdz 2^{k+1}. Pierādīsim, ka skaitli M iespējams iegūt kā galarezultātu. Šķirosim divas iespējas.

a) Skaitlis M mazāks par 2^k.

Pirmajā gājienā nodzēšam 2^k un 2^{k+1}. Vietā rakstāmais skaitlis ir $|2^k - 2^{k+1}| = 2^{k+1} - 2^k = 2 \cdot 2^k - 2^k$. Pēc šī gājiena uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi $1; 2; 4; \dots; 2^k$ un M ir nepāra skaitlis robežās no 1 līdz 2^k. Pēc induktīvā pieņēmuma skaitli M var iegūt kā galarezultātu no uz tāfeles uzrakstītajiem skaitļiem.

b) Skaitlis M lielāks par 2^k.

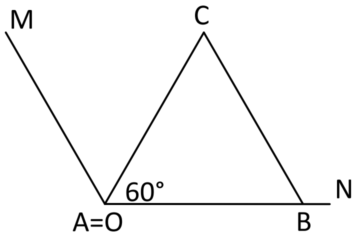
Ar M_1 apzīmēsim skaitli $2^{k+1} - M$. Tāpēc $M = 2^{k+1} - M_1$. Tā kā 2^{k+1} ir pāra skaitlis, bet M – nepāra skaitlis, kas lielāks par 2^k, tad M_1 ir nepāra skaitlis, kas mazāks par $2^{k+1} - 2^k = 2^k$. Izdarot gājienus ar skaitļiem, kas nav 2^{k+1}, iespējams

to vietā iegūt skaitli M_1, jo tāds bija induktīvais pieņēmums. Kad tas ir iegūts, uz tāfeles paliek divi skaitļi: M_1 un 2^{k+1}. Pēc nākamā gājiena iegūst galarezultātu, kas ir $|M_1 - 2^{k+1}| = 2^{k+1} - M_1 = M$.
Esam pierādījuši, ka no skaitļiem $1; 2; 4; \dots; 2^n$ ir iespējams iegūt jebkuru nepāra skaitli, kas nepārsniedz 2^n.

4. uzdevums

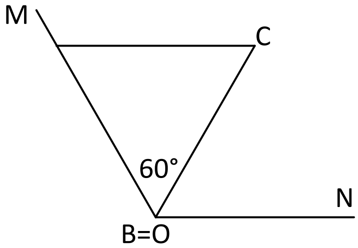
Apskatīsim trīs variantus:
1) punkti A un O sakrīt;
2) punkti B un O sakrīt;
3) ne A, ne B nesakrīt ar punktu O.

1) Mala AB atrodas uz stara AB (skat. 43. att.), bez tam punkti A un O sakrīt. Tā kā trijstūris ABC ir regulārs, tad ∢BAC=60° jeb ∢NOC=60°. Savukārt $\sphericalangle\mathrm{MOC} = \sphericalangle\mathrm{MON} - \sphericalangle\mathrm{NOC} = 120° - 60° = 60°$. Kā redzam, $\sphericalangle\mathrm{NOC} = \sphericalangle\mathrm{MOC}$, tātad stars OC ir leņķa MON bisektrise un punkts C atrodas uz leņķa MON bisektrises.



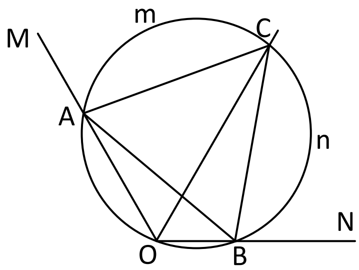
43. att.

2) Līdzīgi kā pirmajā gadījumā var pierādīt, ka $\sphericalangle\mathrm{MOC} = \sphericalangle\mathrm{CON} = 60°$ (skat. 44.att.), tātad arī šajā gadījumā punkts C atrodas uz leņķa MON bisektrises.



44. att.

3) Apskatīsim četrstūri AOBC.
Tajā pretējo leņķu AOB un ACB summa ir $\sphericalangle\mathrm{AOB} + \sphericalangle\mathrm{ACB} = 120° + 60° = 180°$, tāpēc šim četrstūrim var apvilkt riņķa līniju. Tā kā leņķi CBA un COA balstās uz vienu un to pašu loku AmC, tad $\sphericalangle\mathrm{COA} = \sphericalangle\mathrm{CBA} = 60°$. Savukārt ∢CAB un ∢COB balstās uz loku CnB, tāpēc $\sphericalangle\mathrm{COB} = \sphericalangle\mathrm{CAB} = 60°$. Kā redzam, $\sphericalangle\mathrm{BOC} = \sphericalangle\mathrm{COA}$, tātad OC ir ∢MON bisektrise. Tas nozīmē, ka punkts C atrodas uz leņķa MON bisektrises.



45.att.

Visos trīs gadījumos ieguvām, ka punkts C atrodas uz leņķa MON bisektrises. Tātad esam pierādījuši, ka visas iespējamās punkta C pozīcijas atrodas uz vienas taisnes.

5. uzdevums

<u>Atbilde</u>: jā, var.
<u>Pierādījums</u>: Pirmie 17 pirmskaitļi ir 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 un 59. Kā redzams, tie visi atrodas robežās no 1 līdz 2001 ieskaitot. Taču tie nav vienīgie pirmskaitļi šajā intervālā.

Apskatīsim intervālu no 2002!+2 līdz 2002!+2002 ieskaitot.

Gan 2002!, gan 2 dalās ar 2, tātad 2002!+2 dalās ar 2.

Gan 2002!, gan 3 dalās ar 3, tātad 2002!+3 dalās ar 3.

...

Gan 2002!, gan 2002 dalās ar 2002, tātad 2002!+2002 dalās ar 2002.

Tas nozīmē, ka neviens no šiem skaitļiem nav pirmskaitlis.

Uz labu laimi paņemsim 2001 skaitli garu intervālu no k līdz k+2000 ieskaitot. Samazinot šī intervāla augšējo un apakšējo robežu par 1, pirmskaitļu skaits šajā intervālā var:

1) palielināties par 1, ja k-1 ir pirmskaitlis, bet k+2000 nav;

2) nemainīties, ja gan k-1, gan k+2000 ir pirmskaitļi vai arī tie abi ir salikti skaitļi vai 1;

3) samazināties par 1, ja k-1 ir salikts skaitlis vai 1, bet k+2000 – pirmskaitlis.

Ar katru šādu gājienu pirmskaitļu skaits intervālā izmainās ne vairāk kā par vienu.

Sākotnēji izvēlamies intervālu no 2002!+2 līdz 2002!+2002, un pēc tam vairākkārt samazinām tā augšējo un apakšējo robežu par 1, līdz iegūts intervāls no 1 līdz 2001. Tā kā pirmajā intervālā pirmskaitļu nav, bet pēdējā to ir vairāk nekā 17, bez tam ar katru intervāla robežu maiņu pirmskaitļu skaits tajā izmainās ne vairāk kā par vienu, tad kādā no intervāliem noteikti ir tieši 17 pirmskaitļu.

2004. gads
10. klase

1. uzdevums

Kvadrāttrinomam $x^2 + px + q$ ir reālas saknes tad un tikai tad, ja $p^2 - 4q \geq 0$ jeb $q \leq \frac{p^2}{4}$. Kā zināms, jebkurai p vērtībai $p^2 \geq 0$, tātad arī $\frac{p^2}{4} \geq 0$. Tas nozīmē, ka jebkurai q vērtībai, kas mazāka par nulli, kvadrāttrinomam ir reālas saknes.
Ja pirmais spēlētājs katrā gājienā q vērtību samazina par 1, otrajam spēlētājam atliek gājieni $q \to q - 1$, $p \to p - 1$ un $p \to p + 1$. Bez tam katrs no šiem gājieniem atļauj pirmajam spēlētājam atkal samazināt q vērtību. Tas nozīmē, ka pēc katras divu gājienu sērijas q vērtība ir samazinājusies vismaz par 1. Šādi spēlējot, neatkarīgi no sākotnējās skaitļa q vērtības pirmais spēlētājs var panākt, ka kādreiz šī vērtība kļūs negatīva. Kā jau noskaidrojām, tādā gadījumā kvadrāttrinomam $x^2 + px + q$ ir reālas saknes.

Papildinājums: Pārbaudīsim, vai arī otrais spēlētājs noteikti var panākt, ka uz tāfeles uzrakstīts kvadrāttrinoms, kam ir reālas saknes.
Ja pirmais spēlētājs kādā gājienā maina p vai samazina q vērtību, otrais spēlētājs var veikt atbildes gājienu $q \to q - 1$ un ar laiku panākt, ka q vērtība kļūst negatīva. Šajā gadījumā ir panākta pirmajā variantā apskatītā situācija. Vēl atliek apskatīt iespēju, kad pirmais spēlētājs katrā gājienā q vērtību palielina par 1. Apzīmēsim sākotnējo q vērtību ar q_0 un p vērtību ar p_0. Ja $q_0 \leq \frac{p_0^2}{4}$, tad sākotnēji uzrakstītajam kvadrāttrinomam jau ir reālas saknes. Tāpēc apskatīsim gadījumu, kad $q_0 > \frac{p_0^2}{4}$. Ja otrais spēletājs katrā gājienā palielina p vērtību, tad pēc katras divu gājienu sērijas q un p vērtība ir palielinājusies par 1. Pēc n divu gājienu sērijām q un p vērtība palielinājusies par n. Tas nozīmē, ka, ja spēles laikā veiktas n divu gājienu sērijas, tad uz tāfeles ir uzrakstīts kvadrāttrinoms $x^2(p_0 + n)x + q_0 + n$. Tam ir reālas saknes, ja $q_0 + n \leq \frac{(p_0+n)^2}{4}$. Pārbaudīsim, vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, kuram šī nevienādība izpildās. Pareizinot abas nevienādības puses ar 4 un atverot iekavas, iegūsim $(p_0 + n)^2 \geq 4q_0 + 4n$, $p_0^2 + 2p_0n + n^2 - 4q_0 - 4n \geq 0$,
$n^2 + (2p_0 - 4)n + (p_0^2 - 4q_0) \geq 0$.
Tā kā p_0 un q_0 ir skaitļi, esam ieguvuši kvadrātnevienādību ar mainīgo n. Koeficients pie n^2 ir pozitīvs, tāpēc šai nevienādībai ir atrisinājums naturālos skaitļos. Esam pierādījuši, ka eksistē tādas n vērtības, ar kurām kvadrāttrinomam $x^2(p_0 + n)x + q_0 + n$ ir reālas saknes. Tātad esam arī pierādījuši, ka otrais spēlētājs noteikti var panākt, ka kādreiz uz tāfeles būs uzrakstīts kvadrāttrinoms, kuram ir reālas saknes.

2. uzdevums

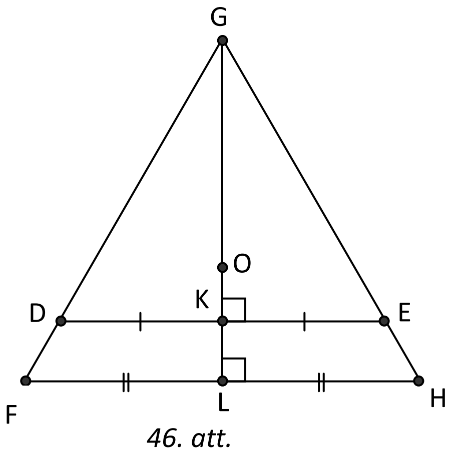
Kā zināms, divu racionālu skaitļu summa, starpība, reizinājums un dalījums (ja dalītājs nav nulle) ir racionāls skaitlis.
Apskatīsim trīs gadījumus:

1. $x = y = 0$;
2. $x = 0, y \neq 0$ vai $y = 0, x \neq 0$;
3. $x \neq 0$ un $y \neq 0$.

1) Ja $x = y = 0$, tad $x + y = 0$ un $xy = 0$ - racionāli.
2) Ja tieši viens no skaitiem x un y ir vienāds ar nulli, tad $x + y = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Tā kā $x^3 + y^3$ un $x^2 + y^2$ ir racionāli, no nulles atšķirīgi skaitļi, tad arī to dalījums ir racionāls skaitlis un arī $xy = 0$ - racionāls.
3) Tā kā $x^2 + y^2$ ir racionāls skaitlis, tad arī $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 =$ $= x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ ir racionāls skaitlis jeb $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \in Q$.
Tāpēc $(x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 - y^4 = 2x^2y^2 \in Q$, tātad arī x^2y^2 - racionāls skaitlis. Tā kā $x^3 + y^3 \in Q$, tad $(x^3 + y^3)^2 =$ $= x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = x^6 + y^6 + 2x^3y^3 \in Q$. Izteiksmi $x^6 + y^6$ var pārrakstīt kā $(x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2)$.
Skaitļi $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ un x^2y^2 ir racionāli, tātad arī $x^6 + y^6$ - racionāls skaitlis.
Tāpēc $(x^3 + y^3)^2 - (x^6 + y^6) = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 - x^6 - y^6 = 2x^3y^3 \in Q$ un $x^3y^3 \in Q$. Skaitli xy var uzrakstīt kā divu racionālu, no nulles atšķirīgu skaitļu x^3y^3 un x^2y^2 dalījumu jeb $xy = \frac{x^3y^3}{x^2y^2}$, tātad xy ir racionāls skaitlis. No sakarības $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ izsakot $x + y$, iegūst, ka $x + y = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2-xy}$. Tā kā skaitļi $x^3 + y^3$, $x^2 + y^2$ un xy ir racionāli, tad arī $x + y$ ir racionāls skaitlis. (Viegli pārbaudīt, ka $x^2 + y^2 - xy > 0$, ja $x \neq 0$ un $y \neq 0$.)

3. uzdevums

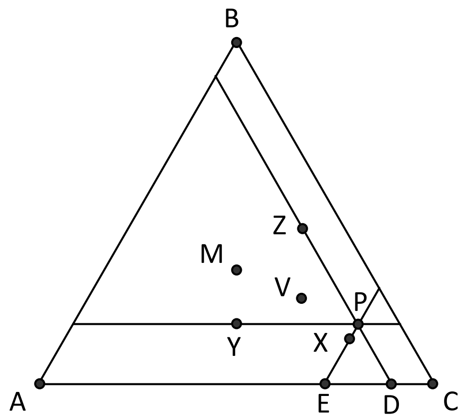
Apskatīsim regulāru trijstūri FGH ar centru punktā O, kurā paralēli pamatam FH novilkts nogrieznis DE, kā parādīts 46. attēlā.



46. att.

K – nogriežņa DE viduspunkts, GL – trijstūra FGH augstums. $\mathrm{GL} \perp \mathrm{DE}$, jo FH un DE – paralēlas taisnes. Bez tam GL iet caur $\Delta\mathrm{FGH}$ centru – punktu O. Leņķi GDE un GFH ir vienādi kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Arī $\sphericalangle\mathrm{GED} = \sphericalangle\mathrm{GHF}$. Tātad trijstūrī GDE $\sphericalangle\mathrm{G} = \sphericalangle\mathrm{D} = \sphericalangle\mathrm{E} = 60°$, un šis trijstūris ir regulārs. Tā kā K ir nogriežņa DE viduspunkts, bet $\Delta\mathrm{DGE}$ ir regulārs, GK ir šī trijstūra mediāna un augstums. Tas nozīmē, ka punkts K atrodas uz nogriežņa GL. Esam ieguvuši: ja regulārā trijstūrī paralēli kādai malai ir novilkts nogrieznis ar galapunktiem uz pārējām trijstūra malām, tad taisne, kas iet caur šī nogriežņa viduspunktu un trijstūra centru (ja šie punkti nesakrīt) ir perpendikulāra novilktajam nogrieznim.

Atgriezīsimies pie sākotnējā uzdevuma.



47. att.

Apzīmēsim caur punktu P vilkto nogriežņu viduspunktus ar X, Y un Z, kā parādīts 47. attēlā. No iepriekš pierādītā seko, ka $MX \perp PX$, $MY \perp PY$ un $MZ \perp PZ$.

Apskatīsim trijstūri MXP. Tas ir taisnleņķa trijstūris, jo $MX \perp PX$. Trijstūra MXP apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas MP viduspunktā V. Tāpēc $VM = VX = VP$.

Arī trijstūri MYP un MZP ir taisnleņķa trijstūri, jo $MY \perp PY$ un $MZ \perp PZ$. Tā kā tiem ir kopīga hipotenūza MP, tad kopīga ir arī apvilktā riņķa līnija. Tās centrs ir MP viduspunktā V. Tātad $VM = VZ = VP = VY$.

Kā redzam, punkti M, Z, P, X un Y atrodas uz vienas riņķa līnijas, kuras centrs ir punktā V.

Ar D apzīmēsim caur punktu P paralēli BC vilktā nogriežņa galapunktu uz nogriežņa AC. Tā kā $BC \parallel ZD$, tad $\sphericalangle ZDA = \sphericalangle BCA = 60°$. Savukārt $YP \parallel AD$, tāpēc $\sphericalangle ZPY = \sphericalangle ZDA = 60°$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Līdzīgi iegūst, ka $\sphericalangle P = 60°$.

Leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, tāpēc $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YPZ = 60°$ un $\sphericalangle YZX = \sphericalangle YPX = 60°$.

Trijstūrī XYZ $\sphericalangle XYZ = 180° - \sphericalangle YXZ - \sphericalangle YZX = 180° - 60° - 60° = 60°$, tāpēc tas ir regulārs. Punkts V ir tam apvilktās riņķa līnijas centrs, tātad arī paša trijstūra centrs.

4. uzdevums

Izveidosim skaitļu virkni $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$, kurā skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ ir pēc kārtas pirmās, otrās,..., septiņpadsmitās monētas vērtība. Par virknes locekļa garāko augošo apakšvirkni sauksim tādu apakšvirkni, kas sākas ar šo locekli, ir augoša un kuras garums ir lielākais iespējamais. Piemēram, skaitļu virknē 2; 1; 5; 3; 4; 8 par skaitļa 1 garāko augošo apakšvirkni sauksim virkni 1; 3; 4; 8. Arī virkne 1; 5; 8 ir augoša apakšvirkne, taču tā ir īsāka par iepriekš minēto. Par virkni 1; 3; 4; 8 garāka varētu būt tikai apakšvirkne 1; 5; 3; 4; 8, taču tā nav augoša.

Izveidosim skaitļu virkni $y_1, y_2, \ldots, y_{17}$, kurā y_i ir skaitļa garākās augošās apakšvirknes x_i garums jeb locekļu skaits (i ir naturāls skaitlis robežās no 1 līdz 17).

Ja kāds no skaitļiem y_i ir vismaz 5, tad skaitļu virknei $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ ir iespējams izveidot augošu apakšvirkni, kura sastāv no vismaz pieciem elementiem. Tātad, ejot gar galdu virzienā no pirmās monētas uz septiņpadsmito, ir iespējams paņemt piecas monētas tā, lai izpildītos uzdevumā prasītais.

Apskatīsim iespēju, kad neviens no skaitļiem y_i nepārsniedz 4. Skaitļa y_i vērtība nevar būt mazāka par 1, jo jebkuram skaitlim iespējams izveidot augošu apakšvirkni, kura sastāv tikai no šī skaitļa. Tātad y_i vērtības nevar būt citi skaitļi kā 1; 2; 3 un 4. Tā kā virkne y_1, y_2,...,y_{17} sastāv no 17 skaitļiem un šo skaitļu atšķirīgo vērtību ir četras, turklāt 17:4>4, tad kāda vērtība noteikti atkārtojas vismaz piecas reizes. Tas nozīmē, ka pieciem virknes x_1,x_2,..., x_{17} skaitļiem garāko augošo apakšvirkņu garumi ir vienādi. Apzīmēsim šos skaitļus ar A, B, C, D un E tādā kārtībā, kādā tie atrodas virknē. Ja diviem skaitļiem garākās augošās apakšvirknes ir vienādi garas, tad pirmais no šiem skaitļiem lielāka par otro. Pretējā gadījumā pirmajam skaitlim varētu izveidot augošu apakšvirkni, kas sastāv no šī skaitļa un otra skaitļa garākās augošās apakšvirknes; tātad šo skaitļu garākās augošās apakšvirknes nevarētu būt vienādi garas. Varam secināt, ka A>B>C>D>E, tātad šie skaitļi veido dilstošu virkni. Tas nozīmē, ka, noejot gar galdu virzienā no pēdējās monētas, iespējams izvēlēties piecas monētas, kuru vērtības ir augošā secībā.

5. uzdevums

Skaitlis $(x-y)$ ir pāra skaitlis tad un tikai tad, ja vai nu gan x, gan y ir pāra skaitļi, vai arī tie abi ir nepāra skaitļi.

Ja x un y ir pāra skaitļi, tos var uzrakstīt šādi: $x = 2k$; $y = 2t$, kur k un t – veseli skaitļi. Tā kā x un y ir pozitīvi skaitļi, tad arī k un t – pozitīvi. Šajā gadījumā $5^x + 5^y = 5^{2k} + 5^{2t} = \left(5^{2k}\right)^2 + (5^t)^2$.

Skaitļi 5^k un 5^t ir veseli skaitļi, jo k un t - naturāli skaitļi. Tātad $5^x + 5^y$ var uzrakstīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu.

Ja x un y ir nepāra skaitļi, pierakstīsim tos šādi: $x = 2k + 1$; $y = 2t + 1$, kur k un t – veseli skaitļi vai 0. Tad

$$5^x + 5^y = 5^{2k+1} + 5^{2t+1} = 5 \cdot 5^{2k} + 5 \cdot 5^{2t} =$$
$$= 5^{2k} + 4 \cdot 5^{2t} + 5^{2t} + 4 \cdot 5^{2k} =$$
$$= 5^{2k} + 2 \cdot 5^k \cdot (2 \cdot 5^t) + 4 \cdot 5^{2t} + 5^{2t} - 2 \cdot \left(2 \cdot 5^k\right) \cdot 5^t + 4 \cdot 5^{2k} =$$
$$= \left(5^k + 2 \cdot 5^t\right)^2 + \left(5^t - 2 \cdot 5^k\right)^2$$

Skaitļi $5k, 2 \cdot 5t, 5t, 2 \cdot 5^k$ ir nenegatīvi veseli skaitļi, tāpēc arī $(5^k + 2 \cdot 5^t)$ un $(5^t - 2 \cdot 5k)$ ir naturāli skaitļi un $5^x + 5^y$ ir uzrakstāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa.

Ja viens no skaitļiem x un y ir pāra, bet otrs nepāra skaitlis, tad $5^x + 5^y$ var uzrakstīt kā $5^{2k} + 5^{2t+1}$, kur k un t – veseli nenegatīvi skaitļi. Un

$$5^x + 5^y = 5^{2k} + 5^{2t} \cdot 5 = 25^k + 25^t \cdot 5 = (24+1)^k + (24+1)^t \cdot 5$$

Izmantojot Ņūtona binoma formulu, iegūsim, ka

$$(24+1)^k = C_k^0 24^k 1^0 + C_k^1 24^{k-1} 1^1 + C_k^2 24^{k-2} 1^2 + \cdots + C_k^{k-2} 24^2 1^{k-2} +$$
$$+ C_k^{k-1} 24^1 1^{k-1} + C_k^k 24^0 1^k.$$

Kā redzams, šajā summā pirmie k saskaitāmie dalās ar 24, tātad arī ar 8. Taču pēdējais saskaitāmais ir $C_k^k 24^0 1^k = 1$. Dalot ar 8, tas dod atlikumu 1. Skaitli $(24+1)^k$ varam uzrakstīt formā 8A+1, kur A – vesels skaitlis. Līdzīgi varam secināt, ka arī $(24+1)^t$, dalot ar 8, dod atlikumu 1. Šo skaitli pierakstīsim formā $8 \cdot B + 1$. Tad $(24+1)^k + (24+1)^t \cdot 5 = (8A+1) + (8B+1) \cdot 5 = 8A + 1 + 8 \cdot 5B + 5 =$ $= 8(A + 5B) + 6$. Šis skaitlis, dalot ar 8, dod atlikumu 6. Noskaidrosim, vai divu veselu skaitļu kvadrātu summa, dalot ar 8, var dot atlikumu 6.

Katru veselu skaitli iespējams uzrakstīt vienā no četriem veidiem: $4\mathrm{m}$, $4\mathrm{m}+1$, $4\mathrm{m}+2$ vai $4\mathrm{m}+3$, kur m – vesels skaitlis. Šo skaitļu kvadrātu dalījumi ar 8 ir

$(4\mathrm{m})^2 : 8 = 16\mathrm{m}^2 : 8 = 2\mathrm{m}^2$ atl. 0,
$(4\mathrm{m}+1)^2 : 8 = (16\mathrm{m}^2 + 8\mathrm{m} + 1) : 8 = 2\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}$ atl. 1,
$(4\mathrm{m}+2)^2 : 8 = (16\mathrm{m}^2 + 16\mathrm{m} + 4) : 8 = 2\mathrm{m}^2 + 2\mathrm{m}$ atl. 4,
$(4\mathrm{m}+3)^2 : 8 = (16\mathrm{m}^2 + 24\mathrm{m} + 9) : 8 = 2\mathrm{m}^2 + 3\mathrm{m} + 1$ atl. 1

Kā redzam, jebkura vesela skaitļa kvadrāts, dalot ar 8, dod atlikumā skaitli 0, 1 vai 4. Tāpēc jebkura vesela skaitļa kvadrātu varam uzrakstīt kā $8\mathrm{M}$, $8\mathrm{M}+1$ vai $8\mathrm{M}+4$, kur M apzīmē veselu skaitli. Apskatīsim, kādus atlikumus var dot divu veselu skaitļu kvadrātu summas, dalot ar 8:

$(8\mathrm{M}_1 + 8\mathrm{M}_2) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ atl. 0,
$(8\mathrm{M}_1 + (8\mathrm{M}_2 + 1)) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ atl. 1,
$(8\mathrm{M}_1 + (8\mathrm{M}_2 + 4)) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ atl. 4,
$((8\mathrm{M}_1 + 1) + (8\mathrm{M}_2 + 1)) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ atl. 2,
$((8\mathrm{M}_1 + 1) + (8\mathrm{M}_2 + 4)) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ atl. 5,
$((8\mathrm{M}_1 + 4) + (8\mathrm{M}_2 + 4)) : 8 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + 1$ atl. 0

Kā redzam, divu veselu skaitļu kvadrātu summa, dalot ar 8, nevar dot atlikumu 6.
Esam pārliecinājušies, ka skaitļi $5^{\mathrm{x}} + 5^{\mathrm{y}}$ var uzrakstīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu tad un tikai tad, ja $(\mathrm{x} - \mathrm{y})$ ir pāra skaitlis.

11. klase

1. uzdevums

Meklējot definīcijas apgabalu, iegūsim, ka

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases},$$

tātad $x \geq 1$.
Funkcija $y = \sqrt{x}$ ir monotoni augoša, tāpēc $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$. Tā kā $x \geq 1$, tad $x\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ un $x\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > 0$. Tāpēc abas vienādojuma puses kāpināsim kvadrātā. Iegūsim, ka $x^2 - 1 = x^3 - 2x\sqrt{x^2 - x} + x - 1$;
$2x\sqrt{x^2 - x} = x^3 - x^2 + x$.
Tā kā x nav vienāds ar nulli, abas vienādojuma puses izdalīsim ar x. Iegūsim, ka
$2\sqrt{x^2 - x} = x^2 - x + 1$; $x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0$.
Apzīmēsim $\sqrt{x^2 - x}$ ar t. Tātad $t^2 - 2t + 1 = 0$; $(t-1)^2 = 0$; $t - 1 = 0$; $t = 1$; $\sqrt{x^2 - x} = 1$; $x^2 - x = 1$; $x^2 - x - 1 = 0$;.
Tā kā x>1, sakne $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ neder, bet $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der. Tāpēc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. uzdevums

No vienādības $ab + bc + ca = 1$ izteiksim a, b un c:

$ab + ca = 1 - bc$

$a(b+c) = 1 - bc$

$a = \frac{1}{b+c} - \frac{bc}{b+c}.$

Līdzīgi $b = \frac{1}{a+c} - \frac{ac}{a+c}$ un $c = \frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b}$.

Pārbaudāmo nevienādību $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$ var pārrakstīt kā $\frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{b+c} - \frac{bc}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{ca}{c+a} \geq \sqrt{3}$ jeb $c + b + a \geq \sqrt{3}$. Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūsim $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3$. Ņemot vērā, ka $2ab + 2bc + 2ca = 2(ab + bc + ca) = 2 \cdot 1 = 2$, nevienādību varam pārrakstīt: $a^2 + b^2 + c^2 + 2 \geq 3$ jeb $a^2 + b^2 + c^2 - 1 \geq 0$.

Tā kā $1 = ab + bc + ca$, tad iegūsim $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$. Pareizināsim abas nevienādības puses ar 2 un pārrakstīsim šādi:

$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$

Tā kā $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ un $(c-a)^2$ vērtības ir nenegatīvi skaitļi, tad arī to summa ir nenegatīva un nevienādība ir patiesa.

3. uzdevums

Ieviesīsim šādus apzīmējumus:

i – naturāls skaitlis, kas nepārsniedz skaitli 31;

P – skaitļu $p_1; p_2; \ldots; p_{31}$ kopa;

S – summa $p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{31}^4$.

Summa S dalās ar 30, tāpēc to var pierakstīt kā $S = 30A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot A$, kur A – vesels skaitlis. No tā mēs redzam, ka summa S dalās arī ar skaitļiem „2”, „3” un „5”.

Pieņemsim, ka skaitlis 2 nepieder kopai P. Tad visām i vērtībām skaitlis p_i ir nepāra. Kāpinot nepāra skaitli astotajā pakāpē, iegūst nepāra skaitli, tātad p_i^4 – nepāra. Summu S veido 31 saskaitāmais. Ja katrs no tiem ir nepāra skaitlis, tad arī summa ir nepāra skaitlis. Šādā gadījumā S nedalās ar 2. Ir iegūta pretruna. Tas nozīmē, ka viens no skaitļiem p_i ir skaitlis 2.

Pieņemsim, ka skaitlis 3 nepieder kopai P. Tādā gadījumā skaitli p_i var uzrakstīt kā 3q+1 vai 3q+2, kur q ir naturāls skaitlis.

Tātad

$$p_i^4 = (3q+1)^4 = 81q^4 + 108q^3 + 54q^2 + 12q + 1 = \\ = 3(27q^4 + 36q^3 + 18q^2 + 4q) + 1$$

vai

$$p_i^4 = (3q+2)^4 = 81q^4 + 108 \cdot 2 \cdot q^3 + 54 \cdot 4 \cdot q^2 + 12 \cdot 8 \cdot q + 16 = \\ = 81q^4 + 108 \cdot 2q^3 + 54 \cdot 4q^2 + 12 \cdot 8q + 15 + 1 = \\ = 3(27q^4 + 36 \cdot 2q^3 + 18 \cdot 4q^2 + 4 \cdot 8q + 5) + 1.$$

Aizvietojot iekavu izteiksmi ar q_i, iegūsim, ka $p_i^4 = 3q_i + 1$, kur q_i – naturāls skaitlis.

Tad $S=(3q_1+1)+(3q_2+1)+\ldots+(3q_{31}+1)=3q_1+3q_2+\ldots+3q_{31}+31=3q_1+3q_2+\ldots+3q_{31}+30+1=$

$=3(q_1+q_2+\ldots+q_{31}+10)+1$.

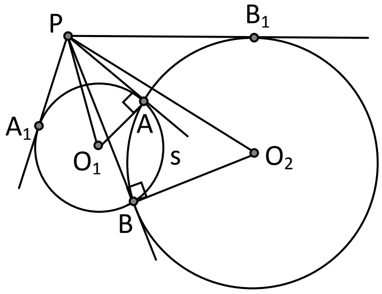
Šis skaitlis nedalās ar 3. Ir iegūta pretruna, kas nozīmē, ka skaitlis 3 pieder kopai P.

Pieņemsim, ka skaitlis 5 nepieder kopai P. Tad jebkuru skaitli p_1 var uzrakstīt kā 5k+m, kur k – naturāls skaitlis, bet m vērtība ir 1, 2, 3 vai 4.
Tad $p_i^4 = (5k+m)^4 = (5k)^4 + 4(5k)^3 m + 6(5k)^2 m^2 + 4\cdot 5k\cdot m^3 + m^4 =$
$= 5(5^3 k^4 + 4\cdot 5^2 k^3 m + 6\cdot 5\cdot k^2 m^2 + 4km^3) + m^4.$

Ja m=1, tad $m^4=1$
Ja m=2, tad $m^4=16=5\cdot 3+1$
Ja m=3, tad $m^4=81=5\cdot 16+1$
Ja m=4, tad $m^4=256=5\cdot 51+1$.

Kā redzams, visām m vērtībām skaitlis m^4, tātad arī p_i^4, dalot ar 5, dod atlikumu 1. Tāpēc skaitli p_i^4 pierakstīsim kā $5k_i+1$, kur k_i – naturāls skaitlis.
Tad $S = (5k_1+1) + (5k_2+1) + \cdots + (5k_{31}+1) =$
$= 5k_1 + 5k_2 + \cdots + 5k_{31} + 30 + 1 = 5(k_1 + k_2 + \cdots + k_{31} + 6) + 1.$
Šis skaitlis nedalās ar 5, tātad iegūta pretruna. Tas nozīmē, ka arī skaitlis 5 pieder kopai P.
Esam atraduši trīs skaitļus no kopas P : „2”, „3” un „5”. Tie ir viens otram sekojoši pirmskaitļi.

4. uzdevums



48. att.

No punkta P pret katru riņķa līniju novilksim vēl vienu pieskari. Piekāršanās punktus nosauksim par A_1 un B_1, kā parādīts zīmējumā. Jāpierāda, ka $\sphericalangle A_1PA = \sphericalangle B_1PB$. Apzīmēsim pirmās riņķa līnijas centru ar O_1, bet otrās – ar O_2. Stars PO_1 ir leņķa A_1PA bisektrise, jo PA_1 un PA ir pieskares riņķa līnijai ar centru O_1. Stars PO_2 ir leņķa B_1PB bisektrise, jo PB_1 un PB ir pieskares riņķa līnijai ar centru punktā O_2. Tātad $\sphericalangle A_1PA=\sphericalangle B_1PB$ tad un tikai tad, ja $\sphericalangle O_1PA=\sphericalangle O_2PB$. Savukārt šie leņķi ir vienādi, ja to tangensi ir vienādi. Ievērosim, ka $O_1A \perp PA$ un $O_2B \perp PB$, jo riņķa līnijas rādiuss un pieskare, kam kopīgs viens punkts, ir savstarpēji perpendikulāri. Trijstūri O_1AP un O_2BP ir taisnleņķa trijstūri un $\mathrm{tg}\sphericalangle O_1PA = \frac{O_1A}{PA}$; $\mathrm{tg}\sphericalangle O_2PA = \frac{O_2B}{PB}$. Lai panāktu uzdevumā prasīto, mums atliek pierādīt, ka $\frac{O_1A}{PA} = \frac{O_2B}{PB}$.
Aplūkosim trijstūri AO_1B. Ar ω apzīmēsim pirmās riņķa līnijas loka AsB leņķisko lielumu:
$\omega = \sphericalangle AO_1B$. Ar R_1 apzīmēsim šīs riņķa līnijas rādiusu. Kā redzam, $O_1A=O_1B=R_1$, un trijstūris AO_1B ir vienādsānu. Tā augstums O_1K ir arī mediāna un bisektrise, tāpēc
$\sphericalangle AO_1K = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = \frac{\omega}{2}$ un $AK = \frac{1}{2}AB$. Trijstūris AO_1K ir taisnleņķa, un
$\sin\sphericalangle AO_1K = \frac{AK}{O_1A}$; $sin\,\frac{\omega}{2} = \frac{AK}{R_1}$; $AK = R_1\sin\frac{\omega}{2}$; $AB = 2AK = 2R_1\sin\frac{\omega}{2}$.

Izrēķināsim sinusu leņķim PAB. Tā kā ∢PAB ir leņķis starp pieskari PA un hordu AB, tad $\sphericalangle \mathrm{PAB} = \frac{1}{2} \cup \mathrm{AA_1B} = \frac{1}{2}(360° - \sphericalangle \mathrm{AO_1B}) = 180° - \frac{\omega}{2}$ un

$\sin\sphericalangle \mathrm{PAB} = \sin(180° - \frac{\omega}{2}) = \sin\frac{\omega}{2}$.

Šo rezultātu ievietojot vienā no iepriekš iegūtajām izteiksmēm, redzam, ka $AB = 2R_1 \sin\sphericalangle PAB$.

Aplūkojot trijstūri O_2AB un veicot līdzīgus spriedumus, iegūsim, ka $AB = 2R_2\sin\sphericalangle PBA$, kur R_2 – otrās riņķa līnijas rādiuss.

Tā kā $AB = 2R_1\sin\sphericalangle PAB$ un $AB = R_2\sin\sphericalangle PBA$, tad $2R_1\sin\sphericalangle PAB = 2R_2\sin\sphericalangle PBA$ un $R_1\sin\sphericalangle PAB = R_2\sin\sphericalangle PBA$. Pēdējās vienādības abas puses dalot ar $R_2\sin\sphericalangle PAB$, iegūsim, ka

$$\frac{\mathrm{R_1}}{\mathrm{R_2}} = \frac{\sin\sphericalangle \mathrm{PBA}}{\sin\sphericalangle \mathrm{PAB}}.$$

Trijstūrī ABP pēc sinusu teorēmas $\frac{\sin\sphericalangle \mathrm{PBA}}{\sin\sphericalangle \mathrm{PAB}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}$.

Tā kā $R_1=O_1A$ un $R_2=O_2B$, tad $\frac{\mathrm{O_1A}}{\mathrm{O_2B}} = \frac{\mathrm{R_1}}{\mathrm{R_2}} = \frac{\sin\sphericalangle \mathrm{PBA}}{\sin\sphericalangle \mathrm{PAB}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}$ jeb $\frac{\mathrm{O_1A}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{O_2B}}{\mathrm{PB}}$, k.b.j.

5. uzdevums

Sanumurēsim pēc kārtas n-stūra virsotnes. Par gājienu sauksim divu sienāžu aizlēkšanu uz blakus esošajām virsotnēm. Ar x_i, kur i ir naturāls skaitlis no 1 līdz n, apzīmēsim gājienu skaitu, kas x sekunžu laikā izdarīti no virsotnes i. Tā kā pēc x sekundēm sienāžu skaits katrā virsotnē bija tāds pats, kā sākumā, tad no katras virsotnes aizlec tik sienāžu, cik uz to atlēkuši. Ja no kādas virsotnes tiek izdarīts gājiens, tad tajā sienāžu skaits samazinās par 2, bet katrā blakus esošajā – palielinās par 1. Tāpēc katrā virsotnē izdarīto gājienu skaits ir divreiz mazāks par blakus virsotnēs izdarīto gājienu skaitu summu jeb

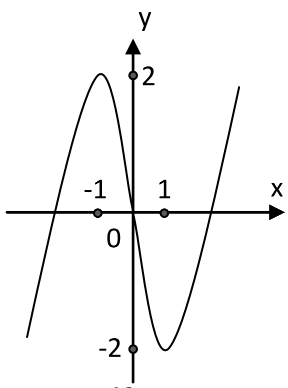
$x_1 = \frac{x_n + x_2}{2}; x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}; \ldots; x_n = \frac{x_{n-1} + x_1}{2}$.

Pieņemsim, ka no virsotnes m ir izdarīts <u>vislielākais</u> gājienu skaits (varam pieņemt, ka $m \neq 1$ un $m \neq n$). Tā kā $x_m = \frac{x_{m-1} + x_{m+1}}{2}$, bez tam $x_m \geq x_{m-1}$ un $x_m \geq x_{m+1}$, tad $x_{m-1} = x_m = x_{m+1}$. Tātad arī no virsotnēm m-1 un m+1 ir izdarīts <u>vislielākais</u> gājienu skaits. Šādi pēc kārtas apskatot visas virsotnes, iegūsim, ka $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = \cdots = x_n$. Kopīgais gājienu skaits ir $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pavisam x sekunžu laikā izdarīti x gājieni, tātad $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \cdot x_m$, un skaitlis x dalās ar n.

12. klase

1. uzdevums

Izpētīsim funkciju $f(x) = x^3 - 3x$. Tā var sasniegt maksimumu un minimumu tikai ar tādām x vērtībām, kam $f'(x) = 0$ jeb $(x^3 - 3x)' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 - 1 = 0$;



49. att.

$x = \pm 1$. Lai pārbaudītu, vai x vērtībām 1 un -1 funkcija sasniedz maksimumu vai minimumu, atradīsim funkcijas otro atvasinājumu: $f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$. Tā kā $f''(1) = 6 > 0$ un $f''(-1) = -6 < 0$, tad pie x vērtības 1 funkcija f(x) sasniedz minimumu, bet pie vērtības (-1) – maksimumu.

Uzzīmēsim aptuvenu funkcijas f(x) grafiku, ņemot vērā, ka $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$ un $f(0) = 0$. Bez tam eksistē arī tādas x vērtības, kam $f(x) > 2$, piemēram, $f(3) = 18 > 2$, un vērtības, kurām $f(x) < -2$, piemēram, $f(-3) = -18 < -2$.

Kā redzam, ja $-2 < a < 2$ jeb $|a| < 2$, tad funkcijas y=a grafiks krusto f(x) grafiku 3 reizes, bet, ja |a|>2 – vienu reizi. Ja $a = \pm 2$ jeb |a|=2 , tad funkcijas y=a grafiks vienreiz krusto f(x) grafiku, bet vienreiz tam pieskaras.

Tātad
ja |a|<2 – vienādojumam ir 3 atrisinājumi;
ja |a|=2 – vienādojumam ir 2 atrisinājumi;
ja |a|>2 – vienādojumam ir 1 atrisinājums.

2. uzdevums

Parādīsim, ka skaitļu pāri (x;y)=(1;1); (2;3) un (5;8) der par vienādojuma $x^2 + xy = y^2 + 1$ atrisinājumiem.
Ja x=y=1, tad $x^2 + xy = 1^2 + 1 \cdot 1 = 2$ un $y^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$.
Ja x=2; y=3, tad $x^2 + xy = 2^2 + 2 \cdot 3 = 10$ un $y^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$.
Ja x=5; y=8, tad $x^2 + xy = 5^2 + 5 \cdot 8 = 65$ un $y^2 + 1 = 8^2 + 1 = 65$.

Tā kā visos trīs gadījumos vienādojuma labās un kreisās puses skaitliskās vērtības sakrīt, apskatītie skaitļu pāri der par dotā vienādojuma atrisinājumiem. Kā zināms skaitļi 1; 1; 2; 3; 5 un 8 ir Fibonači skaitļi. Varam teikt, ka dotajam vienādojumam par atrisinājumiem der skaitļu pāri $(F_{2n-1}; F_{2n})$, kur ar F_i apzīmēti Fibonači skaitļi, bet n=1; 2; 3. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka arī citām naturālām skaitļa n vērtībām $(F_{2n-1}; F_{2n})$ ir vienādojuma atrisinājums jeb
$F_{2n-1}^2 + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2 + 1$.

<u>Bāze</u>. Ja n=1;2;3 , vienādība ir patiesa.
<u>Pāreja</u>. Pieņemsim, ka vienādība ir patiesa, ja $n = 1; 2; 3; \dots; k$. Tādā gadījumā $F_{2k-1}^2 + F_{2k-1} \cdot F_{2k} = F_{2k}^2 + 1$.
Pierādīsim, ka arī vienādība $F_{2(k+1)-1}^2 + F_{2(k+1)-1} \cdot F_{2(k+1)} = F_{2(k+1)}^2 + 1$ jeb $F_{2k+1}^2 + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} = F_{2k+2}^2 + 1$ ir patiesa.

Tālākajā pierādījumā vairākkārt izmantosim faktu par Fibonači skaitļiem, ka $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \geq 1)$, no kā seko arī, ka $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$.
No vienādības $F_{2k-1}^2 + F_{2k-1} \cdot F_{2k} = F_{2k}^2 + 1$ ar identiskiem pārveidojumiem iegūsim, ka

$F_{2k-1}(F_{2k-1} + F_{2k}) = F_{2k}^2 + 1;$
$F_{2k-1} \cdot F_{2k+1} = F_{2k}^2 + 1$ (jo $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$);
$(F_{2k+1} - F_{2k})F_{2k+1} = F_{2k}^2 + 1$ (jo $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$);
$F_{2k+1}^2 - F_{2k} \cdot F_{2k+1} = F_{2k}^2 + 1;$
$F_{2k+1}^2 = F_{2k}^2 + F_{2k} \cdot F_{2k+1} + 1;$
$F_{2k+1}^2 = F_{2k}(F_{2k} + F_{2k+1}) + 1;$
$F_{2k+1}^2 = F_{2k} \cdot F_{2k+2} + 1;$
$F_{2k+1}^2 = (F_{2k+2} - F_{2k+1}) \cdot F_{2k+2} + 1;$
$F_{2k+1}^2 = F_{2k+2}^2 - F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} + 1;$
$F_{2k+1}^2 + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} = F_{2k+2}^2 + 1$, kas bija jāpierāda.

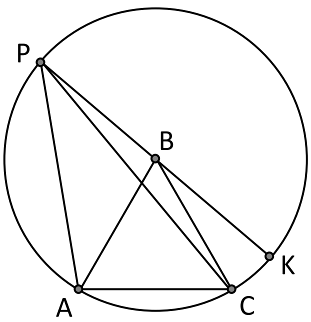
3. uzdevums

Tā kā trijstūris ABC ir regulārs, tad $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB = 60°$. No sakarībām $\sphericalangle APC = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle ABP > 90°$ seko, ka punkti A, P un C atrodas uz riņķa līnijas ar centru punktā B un rādiusu BA. Ar K apzīmēsim stara PB krustpunktu ar riņķa līniju.

Apskatīsim divus gadījumus:
1) punkti P un C atrodas dažādās taisnes AB pusēs;
2) punkti P un C atrodas vienā pusē no taisnes AB.

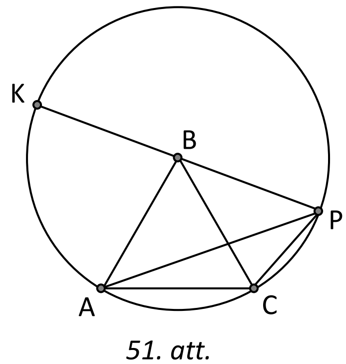
1. risinājums

1)



50. att.

Varam izrēķināt leņķi BPC (skat. 50. att.), jo
$\sphericalangle BPC = \sphericalangle APB - \sphericalangle APC = 40° - 30° = 10°$.
Tā kā $\sphericalangle$KBC ir ievilktā leņķa KPC atbilstošais centra leņķis, tad $\sphericalangle \mathrm{KBC} = 2\sphericalangle \mathrm{KPC} = 2 \cdot 10° = 20°$.
Savukārt
$\sphericalangle \mathrm{PBC} = 180° - \sphericalangle \mathrm{KBC} = 180° - 20° = 160°$.



51. att.

2) Tā kā $\sphericalangle \mathrm{KBA}$ ir ievilktā leņķa BPA atbilstošais centra leņķis (skat. 51. att.), tad
$\sphericalangle \mathrm{KBA} = 2 \cdot \sphericalangle \mathrm{APB} = 2 \cdot 40° = 80°$.
Tāpēc
$\sphericalangle \mathrm{PBC} = 180° - \sphericalangle \mathrm{KBA} - \sphericalangle \mathrm{ABC} = 180° - 80° - 60° = 40°$.

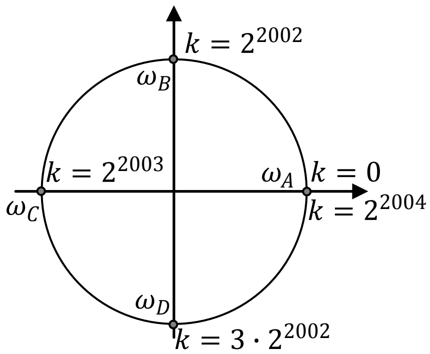
2. risinājums

1) Trijstūris PBA ir vienādsānu, jo BP=BA, tāpēc $\sphericalangle \mathrm{PAB} = \sphericalangle \mathrm{APB}$ un $\sphericalangle \mathrm{PBA} = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.
Bet $\sphericalangle \mathrm{PBC} = \sphericalangle \mathrm{PBA} + \sphericalangle \mathrm{ABC} = 100° + 60° = 160°$.

2) Trijstūris PBA ir vienādsānu un
$\sphericalangle \mathrm{PBA} = 180° - 2 \cdot \sphericalangle \mathrm{BPA} = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.
Bet $\sphericalangle \mathrm{PBC} = \sphericalangle \mathrm{PBA} - \sphericalangle \mathrm{ABC} = 100° - 60° = 40°$.

4. uzdevums

Ievērosim, ka $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) = 4a_n - 4a_n^2 = 1 - 1 + 4a_n - 4a_n^2 =$
$= 1 - (1 - 4a_n + 4a_n^2) = 1 - (1 - 2a_n)^2$.
Ja $0 \le a_{n+1} \le 1$, tad $0 \le 1 - (1 - 2a_n)^2 \le 1$; $-1 \le -(1 - 2a_n)^2 \le 0$; $0 \le (1 - 2a_n)^2 \le 1$; $-1 \le 1 - 2a_n \le 1$; $-2 \le -2a_n \le 0$; $0 \le 2a_n \le 2$; $0 \le a_n \le 1$.
Tā kā $a_{2004} \in [0; 1]$, tad arī $a_{2003} \in [0; 1]$. No tā, savukārt, seko, ka $a_{2002} \in [0; 1]$, ..., $a_1 \in [0; 1]$. Tātad visas meklējamās $\propto = a_1$ vērtības ietilpst intervālā [0; 1]. Apzīmēsim: $\propto = \sin^2 \omega$, jo $\sin^2 \omega$ vērtību apgabals ir [0; 1]. Tad
$\mathrm{a}_1 = \sin^2 \omega;$
$\mathrm{a}_2 = 4\sin^2 \omega(1 - \sin^2 \omega) = 2^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega = \sin^2 2\omega;$
$\mathrm{a}_3 = 4\sin^2 2\omega(1 - \sin^2 2\omega) = 4\sin^2 2\omega \cos^2 2\omega = \sin^2 2 \cdot 2\omega = \sin^2 2^2\omega;$
$\mathrm{a}_4 = 4\sin^2 2^2\omega(1 - \sin^2 2^2\omega) = 4\sin^2 2^2\omega \cos^2 2^2\omega = \sin^2 2^3\omega;$
...
$\mathrm{a}_{2004} = \sin^2 2^{2003}\, \omega.$
Tā kā $a_{2004} = 0$, tad $\sin^2 2^{2003}\, \omega = 0$; $2^{2003}\omega = \pi k$ $(k \in Z)$; $\omega = \frac{\pi}{2^{2003}} \cdot k$ $(k \in Z)$.
Apskatīsim, kā šīs vērtības izvietotas uz trigonometriskā riņķa.



52. att.

Visas ω vērtības trigonometriskajā riņķī izvietotas 2^{2004} punktos (skat. 52. att.). Turklāt katra kvadranta punkti dod vienas un tās pašas $\sin^2 \omega$ vērtības, jo, savienojot visus 2^{2004} punktus, iegūsim regulāru daudzstūri. Arī punkti ω_A un ω_C, kā arī ω_B un ω_D dod vienādas $\sin^2 \omega$ vērtības. Tātad atšķirīgas $\sin^2 \omega$ vērtības dod visas ω vērtības no pirmā kvadranta un divi punkti, kas atrodas uz riņķa līnijas krustpunkta ar koordinātu asīm. To skaits ir $(2^{2002} - 1) + 2 = 2^{2002} + 1$. Ar $\sin^2 \omega$ apzīmējām meklējamās α vērtības, tātad uzdevumā prasītais izpildās $2^{2002} + 1$ dažādām α vērtībām.

5. uzdevums

Parādīsim, ka par izcilām var pasludināt virknes

000000=α; 000001; 000011; 000111; 001111; 011111= β (*)

Ņemam patvaļīgu virkni a. Izskaitām, par cik zīmēm pēdējās piecās pozīcijās tā atšķiras no virknes α un par cik – no β. Ja kādā no šīm pozīcijām α un a sakrīt, tad β un a atšķiras un otrādi. Tāpēc a un α atšķirību un a un β atšķirību skaitu summa pēdējās piecās pozīcijās ir 5. Ja a un α šajās pozīcijās atšķiras par n zīmēm, tad a un β – par (5-n) zīmēm. Turklāt pirmais simbols virknēm a un α, kā arī a un β vienlaicīgi vai nu sakrīt, vai atšķiras. Tāpēc vienmēr izpildās viens no diviem gadījumiem:

1. a un α atšķiras par n zīmēm, bet a un β – par (5-n);
2. a un α atšķiras par n+1 zīmi, bet a un β – par (6-n).

Pie tam n=0; 1; 2; 3; 4; 5. Ievērosim, ka katras divas blakus esošas (*) virknes atšķiras par 1 simbolu, tāpēc arī virknei a atšķirību skaiti ar divām blakus esošām (*) virknēm atšķiras par 1. Tas nozīmē, ka virknes a atšķirību skaiti ar (*) virknēm aizpilda kādu no intervāliem [n; 5-n] un [n+1; 6-n]. Apskatīsim, kādi skaitļi ir kopīgi visiem šiem intervāliem:

a. Ja n=0 vai n=5, iegūstam intervālus [0; 5] un [1; 6];
b. Ja n=1 vai n=4: [1; 4]un [2; 5];
c. Ja n=2 vai n=3: [2; 3]un [3; 4].

Kā redzams, vienmēr ir iespējams atrast tādu (*) virkni, kas ar virkni a atšķiras tieši trīs pozīcijās.

2007. gads
10. klase

1. uzdevums

Polinomu, kas rodas, izteiksmē $(x^3 - 7x + 6)^2 \cdot (x^2 + 4x + 3)^3$ atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, apzīmēsim ar
$P(x) = a_1 x^{12} + a_2 x^{11} + \cdots + a_{11} x^2 + a_{12} x + a_{13}$.
1) Ja x vietā ievietosim skaitli 1, iegūsim
$P(1) = a_1 \cdot 1^{12} + a_2 \cdot 1^{11} + \cdots + a_{11} \cdot 1^2 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} =$
$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} + a_{12} + a_{13}$,
kas ir polinoma P(x) koeficientu summa. Aprēķināsim to:
$P(1) = (1^3 - 7 + 6)^2 \cdot (1^2 + 4 + 3)^3 = 0^2 \cdot 8^3 = 0$.
2) Ar A apzīmēsim to polinoma P(x) koeficientu summu, kuri atrodas pie pāra pakāpēm, bet ar B – koeficientu summu, kas atrodas pie nepāra pakāpēm. Tātad A+B ir visu polinoma P(x) locekļu summa jeb $A + B = P(1)$. Ja polinomā x vietā ievietosim skaitli (-1), iegūsim
$P(-1) = a_1 \cdot 1^{12} - a_2 \cdot 1^{11} + \cdots + a_{11} \cdot 1^2 - a_{12} \cdot 1 + a_{13} = A - B$.
Aprēķināsim: $P(-1) = ((-1)^3 + 7 + 6)^2 \cdot ((-1)^2 - 4 + 3)^3 = 12^2 \cdot 0^3 = 0$.
Tā kā A+B=0 un A-B=0, tad A=B=0, kas bija jāaprēķina.

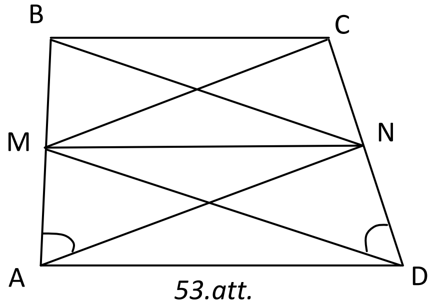
2. uzdevums

Pieņemsim, ka n=2k. Apskatīsim, kādi atlikumi rodas, skaitli n=2k dalot ar skaitļiem $k + 1;\ k + 2;\ \ldots\ ;\ 2k - 2;\ 2k - 1$.

$(2k) : (k + 1) = 1$, atl. $k - 1$
$(2k) : (k + 2) = 1$, atl. $k - 2$
…
$(2k) : (2k - 2) = 1$, atl. 2
$(2k) : (2k - 1) = 1$, atl. 1

Tā kā, skaitli n dalot ar skaitļiem 1; 2; … ; k, var rasties arī vēl citi atlikumi, tad
$(k - 1) + (k - 2) + \cdots + 2 + 1 \leq 2k$;
$\frac{(k-1+1)(k-1)}{2} \leq 2k$;
$k \cdot (k - 1) \leq 4k$.
Atrisinot šo nevienādību, iegūsim, ka $k \leq 5$, tātad $n = 2k \leq 10$.
Pieņemsim, ka $n = 2k + 1$. Tādā gadījumā, n dalot ar $k + 1$; $k + 2$; … ; 2k, atlikumā iegūsim $k; k - 1; k - 2; \ldots; 1$. Varam secināt, ka $k + (k - 1) + \cdots + 1 \leq 2k + 1$; $\frac{(k+1)\cdot k}{2} \leq 2k + 1$; $k^2 + k \leq 4k + 2$. Atrisinot nevienādību, iegūsim, ka $k < 4$, tātad $n = 2k + 1 < 9$.
Varam secināt, ka skaitlis n nav lielāks par 10. Bez tam $n > 2$, tātad $3 \leq n \leq 10$.
$n \neq 3$, jo $3 : 1 = 3, atl. 0$; $3 : 2 = 1, atl. 1$ un $0 + 1 \neq 3$
Līdzīgi pārbaudot citus skaitļus intervālā [3; 10], iegūsim, ka n=8.

3. uzdevums



53.att.

Četrstūrim AMND iespējams apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MDN$ un punkti A un D abi atrodas vienā pusē no taisnes MN. Tāpēc tā pretējo leņķu summas ir 180˚ jeb

$\sphericalangle DAM + \sphericalangle MND =$
$= \sphericalangle ADN + \sphericalangle AMN = 180°$ (1)

Bez tam zinām, ka

$\sphericalangle AMN + \sphericalangle NMB = \sphericalangle DNM + \sphericalangle MNC = 180°$ (2)

Tā kā ABCD ir trapece, tad

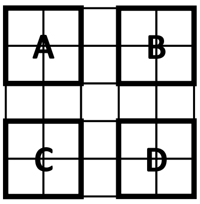
$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB = 180°$ (3)

No vienādībām (1), (2) un (3) varam secināt, ka $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MNC$, $\sphericalangle ADN = \sphericalangle NMB$, $\sphericalangle DNM + \sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle AMN + \sphericalangle DCB$.

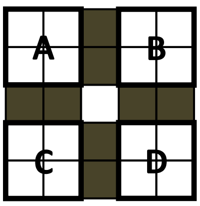
Aplūkosim četrstūri MBCN: $\sphericalangle NMB + \sphericalangle NCB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB = 180°$, tātad tam var apvilkt riņķa līniju. Leņķi MBN un MCN ir šīs riņķa līnijas ievilktie leņķi, kuri balstās uz vienu loku. Tātad $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MCN$, k.b.j.

4. uzdevums

Pieņemsim, ka kvadrātā, kas sastāv no 5x5 rūtiņām, iespējams izkrāsot 16 rūtiņas tā, lai nevienā 2x2 rūtiņu kvadrātā izkrāsotas nebūtu vairāk kā 2 rūtiņas.



54. att.



55. att.

Tos 2x2 rūtiņu kvadrātus, kas satur kādu no stūra rūtiņām, apzīmēsim ar burtiem A, B, C un D, kā parādīts 54. attēlā. Katrā no šiem kvadrātiem ir izkrāsotas ne vairāk kā 2 rūtiņas, tātad visos četros kvadrātos kopā – ne vairāk kā 8 rūtiņas. Tāpēc 5x5 rūtiņas lielā kvadrāta 3. rindā un 3. kolonnā ir iekrāsotas ne mazāk kā 8 rūtiņas jeb ne vairāk kā viena rūtiņa palikusi neiekrāsota. Ja 5x5 rūtiņu kvadrāta vidējā rūtiņa ir iekrāsota, viegli pārliecināties, ka vismaz divos 2x2 rūtiņu kvadrātos, kuros tā ietilpst, iekrāsotas vairāk nekā 2 rūtiņas.

Apskatīsim gadījumu, kad 5x5 rūtiņu kvadrāta vidējā rūtiņa nav iekrāsota. Tādā gadījumā iekrāsotas ir visas pārējās rūtiņas 3. rindā un 3. kolonnā. Trešās kolonnas 1. un 2. rūtiņa ir iekrāsota, tāpēc otrajā kolonnā 1. un 2. rūtiņa nevar būt iekrāsota. Trešās rindiņas 1. un 2. rūtiņa ir iekrāsota, tāpēc otrajā rindiņā 1. un 2. rūtiņa nevar būt iekrāsota. Tātad kvadrātā A ir iekrāsota ne vairāk kā viena rūtiņa. Līdzīgi var pierādīt, ka arī kvadrātos B, C un D var iekrāsot ne vairāk kā vienu rūtiņu katrā.

Izskaitīsim, kāds ir lielākais iespējamais izkrāsoto rūtiņu skaits šajā situācijā – pa rūtiņai kvadrātos A, B, C un D un vēl 8 citas rūtiņas. Tās ir 4+8=12<16 rūtiņas. Ir iegūta pretruna, kas radusies, izdarot nepareizu pieņēmumu risinājuma sākumā. Līdz ar to esam pierādījuši, ka kādā 2x2 rūtiņas lielā kvadrātā jābūt izkrāsotām vismaz 3 rūtiņām.

5. uzdevums

Apskatīsim situāciju, kurā starp visiem gājieniem ir divi tādi, kuros izvēlēts otrais skaitlis no labās puses. Skaitlis, kas virknē atrodas labajā malā, gājienu rezultātā netiek mainīts. Tātad, ja tam blakus esošais skaitlis vienu reizi tiek izmainīts, tad pārējos gājienos tas paliek nemainīgs. Gājienā, kurā šis skaitlis vēlreiz tiek izvēlēts, rodas uzdevumā prasītā situācija, jo iegūtā virkne sakrīt ar iepriekšējo.
Ja nav tādu divu gājienu, kuros izvēlēts otrais skaitlis no labās puses, tad kaut kad iestājas tāds brīdis, ar kuru sākot divi pirmie virknes locekļi no labās puses vairs nemainās. Ja sākot no šī brīža var atrast divus tādus gājienus, kuros izmainīts tas virknes loceklis, kas atrodas trešajā pozīcijā no labās puses, tad līdzīgi kā iepriekš, varam apgalvot, ka ir sasniegts uzdevumā prasītais (jo otrajā no šiem gājieniem iegūta virkne, kas sakrīt ar iepriekšējo).
Ja aprakstītajā situācijā nav tādu divu gājienu, kuros izvēlēts trešais loceklis no labās puses, tad, sākot ar kaut kādu brīdi, pēdējie trīs virknes locekļi netiek mainīti.
Šādi turpinot, varam nonākt līdz situācijai, kurā vai nu divas pēc kārtas esošas virknes ir vienādas, vai arī pirmais virknes loceklis no kreisās puses tiek izmainīts, savukārt pārējie vairs netiek izvēlēti. Tā kā gājieni tiek izdarīti bezgalīgi daudz reižu, tad virknes locekli, kas atrodas kreisajā malā, nākas izmainīt vēlreiz, un ir iegūtas divas blakus esošas vienādas virknes.

11. klase

1. uzdevums

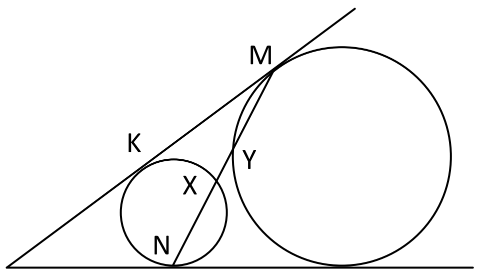
Izteiksme $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ pieņem mazāko vērtību, ja skaitļi x un y pieņem lielākās iespējamās vērtības. Šajā gadījumā $x=y=n$. Tā kā $m \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, tad $m \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$. Pareizinot abas nevienādības puses ar n, iegūsim, ka $mn \le 2$.
Izteiksme $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ pieņem lielāko vērtību, ja skaitļi x un y pieņem mazākās iespējamās vērtības. Šajā gadījumā m=x=y. Tā kā $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le n$, tad $\frac{2}{m} \le n$. Pareizinot abas nevienādības puses ar m, iegūsim, ka $2 \le mn$.
Ja $mn \le 2$ un $2 \le mn$, tad $mn = 2$. Tā kā m un n ir naturāli skaitļi, bez tam $m \le n$, tad viegli noteikt, ka vienīgās iespējamās m un n vērtības ir $m=1$ un $n=2$.
Pārbaude.
Zināms, ka $1 \le x \le 2$ un $1 \le y \le 2$. Pārbaudīsim, vai ir spēkā sakarība $1 \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le 2$.
No zināmajām nevienādībām iegūstam, ka $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$ un $\frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$.
Līdz ar to $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le 1+1=2$ un $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ jeb $1 \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le 2$.

2. uzdevums

Deviņciparu skaitli, kura ciparu summa ir 3, var pierakstīt kā $n = 10^8 + 10^a + 10^b$, a,b=0, 1, 2, …, 8.
Tādā gadījumā $n^3 = (10^8 + 10^a + 10^b)^3$. Atverot iekavas, iegūsim summu, kas sastāv no 27 saskaitāmajiem. Bez tam katra saskaitāmā ciparu summa ir 1. Skaitļa n^3 ciparu summa nevar pārsniegt skaitli, ko iegūstam, saskaitot šo 27 saskaitāmo ciparu summas. Tātad tā nepārsniedz 27.
Skaitlis n dalās ar 3, jo tā ciparu summa dalās ar 3. Tāpēc skaitlis n^3 dalās ar 3^3=27. Ja skaitlis dalās ar 27, tad tas dalās arī ar 9, tāpēc arī tā ciparu summa dalās ar 9. Kā jau izsecinājām, skaitļa n^3 ciparu summa ir mazāka vai vienāda ar 27. Bez tam ciparu summa noteikti ir naturāls skaitlis (jo vienīgais skaitlis, kura ciparu summa ir 0, ir skaitlis 0). Vienīgie naturālie skaitļi, kas nepārsniedz 27 un dalās ar 9, ir 9, 18 un 27. Pārbaudīsim, vai visi šie skaitļi var būt n^3 ciparu summa.
Ja n=300000000, tad n^3 ciparu summa ir 9.
Ja n=210000000, tad n^3 ciparu summa ir 18.
Ja n=111000000, tad n^3 ciparu summa ir 27.

3. uzdevums

Tā kā taisne MN krusto vienu no riņķa līnijām punktos X un N, savukārt MK ir pieskare tai pašai riņķa līnijai, tad $MX \cdot NM = MK^2$.
Tā kā taisne NM krusto vienu no riņķa līnijām punktos Y un M, savukārt NL ir pieskare tai pašai riņķa līnijai, tad
$NY \cdot NM = NL^2$.
Pieskares, kas vilktas no viena punkta pret kādu riņķa līniju ir vienādas, tāpēc OK=ON un OM=OL. No tā seko, ka KM=NL, tātad arī $KM^2 = NL^2$ un
$MX \cdot NM = MK^2 = NL^2 = NY \cdot NM$.

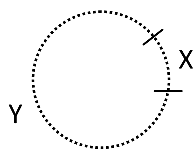


56. att.

Tāpēc $MX = NY$; $MX - XY = NY - XY$ un $MY = NX$, k.b.j.

4. uzdevums

Pavisam iespējams izveidot 50 virknes, kas sastāv no viena locekļa, un 50 virknes, kas sastāv no 49 locekļiem. Bez tam katrai no pirmajām 50 virknēm var piekārtot tādu vienu virkni no otrajām 50, lai katrā šādā virkņu pārī katrs no izrakstītajiem skaitļiem ietilptu tieši vienu reizi.
Tādā pašā veidā katrai virknei, kas sastāv no 2 locekļiem, iespējams piekārtot virkni, kas sastāv no 48 locekļiem, … , virknei, kas sastāv no 24 locekļiem – virkni, kas sastāv no 26 locekļiem.



57. att.

Arī tās virknes, kas sastāv no 25 locekļiem, iespējams sadalīt pa pāriem tā, lai katrs no izrakstītajiem skaitļiem būtu iekļauts vienā no virknēm katrā virkņu pārī.

Izvēlēsimies vienu no mūsu izveidotajiem virkņu pāriem. Vienas virknes locekļu summu apzīmēsim ar x, bet otras – ar y. Tā kā katrs no izrakstītajiem skaitļiem iekļauts tieši vienā no virknēm, tad x+y=1. Bez tam skaitļi x un y ir veseli skaitļi. Ja divu veselu skaitļu summa ir 1, tad viens no šiem skaitļiem ir pozitīvs, bet otrs – nepozitīvs. Tātad katrā virkņu pārī tieši vienas virknes locekļu summa ir pozitīva. Tas nozīmē, ka tieši pusei no mūsu aprakstītajām virknēm izpildās uzdevumā prasītais. Pa pāriem esam sadalījuši $49 \cdot 50 = 2450$ virknes. Starp tām ir $\frac{2450}{2} = 1225$ tādas, kurām visu locekļu summa ir pozitīva.
Vēl iespējams izveidot 50 tādas virknes, kurās ietilpst visi 50 uzrakstītie skaitļi. Visām šīm virknēm locekļu summa ir $1 > 0$.
Tātad ir iespējams izveidot tieši $1225 + 50 = 1275$ virknes, kurām locekļu summa ir lielāka par nulli.

5. uzdevums

Lielāko no skaitļiem a_i (i=1, 2, … , n) apzīmēsim ar A. Ievērosim, ka $b_j = 0$ visiem skaitļiem j, kas lielāki par A. Izveidosim „lejupejošu" tabulu, kas sastāv no n kolonnām un bezgalīgi daudz rindiņām. Pirmajā kolonnā izkrāsosim a_1 augšējās ailītes, otrajā – a_2, trešajā – a_3, … , priekšpēdējā – a_{n-1}, bet pēdējā – a_n. Tabulā pavisam izkrāsotas $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ailītes.
Pirmajā rindā no augšas izkrāsoto ailīšu skaits sakrīt ar to skaitļu skaitu dotajā skaitļu komplektā, kas nav mazāki par 1, otrajā – kas nav mazāki par 2, trešajā – par 3, …,
A-tajā – kas nav mazāki par A. Tātad pirmajā rindā ir izkrāsotas b_1 ailītes, otrajā – b_2, … , A-tajā – b_A ailītes. Tā kā neviens skaitlis skaitļu komplektā nav lielāks par A, tad pārējās rindiņās nav iekrāsota neviena ailīte. Skaitot pa rindiņām, izkrāsoto ailīšu skaits ir $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_A + \cdots$.
Esam divos dažādos veidos izskaitījuši izkrāsoto ailīšu skaitu vienā un tajā pašā tabulā. Abi iegūtie skaitļi ir vienādi, tāpēc
$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, k.b.j.

12. klase

1. uzdevums

Pierādīsim, ka visiem x un y pastāv nevienādība

$$x + y \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

Ja $x + y \le 0$, tā ir acīmredzama. Ja $x + y > 0$, ar ekvivalentiem pārveidojumiem pakāpeniski iegūstam

$$(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2)$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$$

$(x - y)^2 \ge 0$, kas ir acīmredzams. Līdz ar to (1) pierādīta.
No (1) un uzdevumā dotā iegūstam

$$x^2 + y^2 \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{2}$$

$x^2 + y^2 \leq 2$

Tā kā $x + y = x^2 + y^2$, vajadzīgais pierādīts.

2. uzdevums

Dotais vienādojums ekvivalents vienādojumam $x^3 = 7y^3 + 49z^3$ jeb $x^3 = 7(y^3 + 7z^3)$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 7, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 7. Tā kā skaitlim x^3 jādalās ar skaitli 7, kurš ir pirmskaitlis, tad arī skaitlim x jādalās ar 7. Apzīmēsim x ar 7n. Iegūstam, ka $(7n)^3 = 7(y^3 + 7z^3)$; $7 \cdot 49n^3 = 7(y^3 + 7z^3)$; $49n^3 = y^3 + 7z^3$; $y^3 = 49n^3 - 7z^3$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 7, tad arī kreisajai pusei jādalās ar 7. Ja y^3 dalās ar 7, tad arī y dalās ar 7. Apzīmēsim: y = 7m. Pēdējā vienādojumā y vietā ievietojot 7m un abas vienādojuma puses izdalot ar 7, iegūsim vienādojumu $49m^3 = 7n^3 - z^3$; $z^3 = 7n^3 - 49m^3$. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, varam secināt, ka z dalās ar 7. Varam atkal ieviest jaunu mainīgo un z izteikt kā šī mainīgā reizinājumu ar skaitli 7. Šādi turpinot, iegūsim, ka n dalās ar 7, m dalās ar 7 un arī visi pārējie mainīgie, kas tiek ieviesti, dalās ar 7. Bez tam šo procesu varētu turpināt bezgalīgi ilgi.

Tā kā skaitli x aizvietojām ar 7n un vēlāk ieguvām, ka n dalās ar 7, tad x dalās ar 49. Bez tam kaut kādā brīdī skaitli n apzīmējām ar jaunu mainīgo, kurš (kā vēlāk izrādās) arī dalās ar 7. Tātad x dalās ar 343. Rīkojoties kā iepriekš aprakstīts, aizvien palielinās skaitlis, ar kuru dalās x. Bet tas nav iespējams, jo x nedalās ar skaitļiem, kas lielāki par x. Tātad vienādojumam $x^3 - 7y^3 - 49z^3 = 0$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

3. uzdevums

Punkts K ir AC viduspunkts, tātad AK=KC. Apskatīsim trijstūrus ABK un KBC. Šo trijstūru laukumi ir vienādi, jo to pamati AK un KC ir vienādi un augstumi, kas vilkti no punkta B, sakrīt. Līdzīgi varam pierādīt, ka trijstūru AMK un KMC laukumi ir vienādi. Tāpēc arī $S_{ABK} + S_{AMK} = S_{KBC} + S_{KMC}$; $S_{MAB} = S_{MCB}$;

$\frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin \sphericalangle MAB = \frac{1}{2} CM \cdot CB \cdot \sin \sphericalangle MCB$;

$AM \cdot AB \cdot \sin \sphericalangle MAB = CM \cdot CB \cdot \sin \sphericalangle MCB$. Tā kā četrstūris ABCM ir ievilkts riņķa līnijā, tad

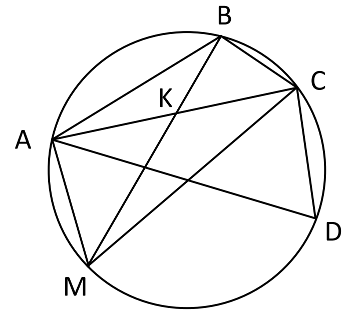
$\sphericalangle MAB + \sphericalangle MCB = 180°$,

$\sphericalangle MAB = 180° - \sphericalangle MCB$,

$sin \sphericalangle MAB = sin\,(180° - \sphericalangle MCB)$

$sin \sphericalangle MAB = sin \sphericalangle MCB$,

$AM \cdot AB = CM \cdot CB$.



58. att.

Izdalot abas vienādības puses ar $AM \cdot CB$, iegūsim, ka $\frac{AB}{BC} = \frac{CM}{AM}$. Tā kā $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, tad

$\frac{CM}{AM} = \frac{AD}{DC}$.

Apskatīsim trijstūrus AMC un CDA. Leņķi AMC un CDA balstās uz vienu un to pašu loku, tāpēc tie ir vienādi. Bez tam no sakarības $\frac{CM}{AM} = \frac{AD}{DC}$ iegūstam, ka $\frac{AM}{CD} = \frac{CM}{AD}$. Tātad trijstūri AMC un CDA ir līdzīgi. Tas nozīmē, ka $\frac{AM}{CD} = \frac{CM}{AD} = \frac{AC}{CA} = 1$. Esam ieguvuši, ka trijstūri AMC un CDA ir vienādi. Līdz ar to arī attiecīgās malas AM un CD ir vienādas, k.b.j.

4. uzdevums

Atbilde: $2n - 2$.

Pierādījums.

Izvēlamies $n \times n$ rūtiņu lielā kvadrātā vienu rindiņu un vienu kolonnu. Izkrāsosim visas rūtiņas šajā rindā un kolonnā, izņemot tām kopīgo rūtiņu. Šajā gadījumā ir izkrāsotas $(n-1)+(n-1) = 2n-2$ rūtiņas. Bez tam katrā rindiņā, izņemot iepriekš izvēlēto, ir izkrāsota tieši viena rūtiņa. Tas nozīmē, ka izvēlētajā kolonnā visas izkrāsotās rūtiņas ir īpašas. Arī katrā kolonnā, izņemot iepriekš izvēlēto, ir izkrāsota tieši viena rūtiņa. Tātad izvēlētajā rindā visas izkrāsotās rūtiņas ir īpašas. Esam ieguvuši, ka $n \times n$ rūtiņu lielā kvadrātā var būt $2n - 2$ īpašas rūtiņas.

Pierādīsim, ka nav iespējams iegūt lielāku īpašo rūtiņu skaitu $n \times n$ rūtiņas lielā kvadrātā. Ar R apzīmēsim to rūtiņu skaitu, kas ir vienīgās izkrāsotās savā rindiņā, bet ar K – kas ir vienīgās izkrāsotās savā kolonnā. Skaitlis $R + K$ nav mazāks par īpašo rūtiņu skaitu ($R + K$ ir lielāks par īpašo rūtiņu skaitu, ja kāda rūtiņa ir vienīgā izkrāsotā gan savā rindiņā, gan kolonnā). Ja kvadrātā īpašo rūtiņu skaits ir lielāks par $2n - 2$, tad $R + K > 2n - 2$. To rūtiņu skaits, kas ir vienīgās izkrāsotās savā kolonnā (rindiņā), nevar pārsniegt kolonnu (rindiņu) skaitu kvadrātā. Tā kā kvadrātā ir pavisam n rindiņas un n kolonnas, tad $R \le n$ un $K \le n$. Lai summa $R + K$ būtu lielāka par $2n - 2 = 2(n-1)$ vismaz vienam no skaitļiem R un K jābūt lielākam par $n - 1$. Vienīgā pieļaujamā K un R vērtība, kas ir lielāka par $n - 1$, ir n. Apskatīsim gadījumu, kad $R = n$. Šajā situācijā katrā rindiņā ir viena tāda rūtiņa, kas ir vienīgā izkrāsotā savā rindiņā, jeb katrā rindiņā ir tieši viena izkrāsota rūtiņa. Tātad kvadrātā pavisam ir n izkrāsotu rūtiņu, bet $n \le 2n - 2$, ja $n \ge 2$. Tādu pašu rezultātu iegūsim, ja pieņemsim, ka $K = n$. Tātad īpašo rūtiņu skaits uzdevumā aprakstītajā situācijā nevar pārsniegt $2n - 2$.

5. uzdevums

Izveidosim funkciju g^2. Kā zinām, $f'g + 3fg' \geq 0$ un $g^2 \geq 0$. Šīs nevienādības mēs varam sareizināt. Iegūsim, ka

$$f' \cdot g \cdot g^2 + 3f \cdot g' \cdot g^2 \geq 0;$$
$$f' \cdot g^3 + f \cdot (3g^2 \cdot g') \geq 0;$$
$$f' \cdot g^3 + f \cdot (g^3)' \geq 0;$$
$$(f \cdot g^3)' \geq 0.$$

Tā kā funkcijas $f \cdot g^3$ atvasinājums ir nenegatīvs, tad pati funkcija ir nedilstoša. Līdz ar to

$$f(2007) \cdot g^3(2007) \geq f(1) \cdot g^3(1).$$

Tā kā $f(2007) = f(1) = 1$, tad $g^3(2007) \geq g^3(1)$. No sakarības $g^3(2007) \geq g^3(1)$ seko, ka $g(2007) \geq g(1)$, k.b.j.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie sadalīti piecās grupās: skaitļu teorija, algebra, ģeometrija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkāk apakšgrupās.

Īpaši izdalīti uzdevumi, kas risināmi ar interpretāciju metodi, būtiski lietojot vairākas matemātikas nozares.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā grāmata ietver 10. – 12. klašu skolēniem paredzētus uzdevumus, tad metodes izvēle atkarīga arī no skolēnu zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: 95.10.5., 98.11.1., 98.12.1., 98.12.5., 04.12.4., 07.12.5.

Nevienādības: 95.10.5., 95.11.5., 95.12.1., 98.12.4., 01.10.2., 01.11.4., 01.12.1., 04.11.2., 07.12.1.

Vienādojumi un to sistēmas: 88.10.1., 88.10.3., 88.11.1., 91.10.1., 91.11.1., 91.12.1., 98.10.4., 04.11.1., 04.12.1.

Pārveidojumi: 88.9.2., 95.11.3., 98.10.1., 01.10.1., 04.10.2.

Funkcionālvienādojumi, polinomi: 88.11.3., 07.10.1.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: 95.10.5., 01.11.3., 01.12.4., 04.10.3., 04.11.4., 04.12.3., 07.10.3., 07.12.3.

Vienādi trijstūri: 88.9.3., 88.10.2., 98.11.2., 01.10.3., 07.11.3.

Metriskās sakarības: 91.12.3., 98.12.2., 01.11.3., 07.11.3.

Nevienādības: 88.9.4., 88.11.2., 91.10.3., 95.10.3., 95.12.2.

Laukumi: 91.11.3., 98.10.2.

Līdzība: 95.11.2., 04.11.4.

Ģeometriski pārveidojumi: 01.12.2.

Vektori: 88.11.4.

Figūru sistēmas, piemēri: 91.10.5., 91.11.2., 91.12.5., 95.12.4.

Dirihlē princips: 88.10.4., 88.11.5., 91.10.2., 95.11.4., 07.10.4.

Skaitļu teorija

Dalāmība, dalāmības pazīmes un īpašības: 88.9.1., 91.11.4., 01.11.1., 07.11.2.

Atlikumi un kongruences: 88.10.5., 91.10.4., 91.12.4., 95.10.2., 95.12.5., 98.10.3., 04.10.5., 04.11.3., 07.10.2.

Sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: 95.12.3., 98.11.3., 98.12.3., 01.10.4., 01.12.5., 07.12.2.

Vienādojumi un nevienādības veselos skaitļos: 95.10.1., 95.11.1., 04.12.2., 07.11.1., 07.12.2.

Kombinatorika

Dirihlē princips: 01.10.2., 04.10.4., 07.10.4.

Invariantu metode: 91.12.2., 01.11.2.

Skaitīšana: 98.11.4., 07.11.4.

Kombinatoriskas struktūras, t.sk. grafi: 88.9.5., 91.11.5., 01.11.2., 04.12.5., 07.12.4.

Algoritmika

Algoritma izstrāde: 98.10.5., 98.11.5., 01.10.5., 01.11.5., 01.12.3., 04.10.1.

Procesu analīze: 01.12.3., 04.11.5., 07.10.5.

Interpretāciju metode: 01.11.4., 01.12.5., 04.12.4., 07.11.5.

Literatūra

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Nīderlandes matemātikas olimpiāde: 88.11.5.

Rumānijas matemātikas olimpiāde: 95.10.5., 04.10.2., 04.11.4.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: 95.11.4., 01.12.1.

Čehijas matemātikas olimpiāde: 95.12.4.

Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde: 01.10.3., 04.12.5., 07.12.3.

I.Šarigins: 01.11.3.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.

22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.