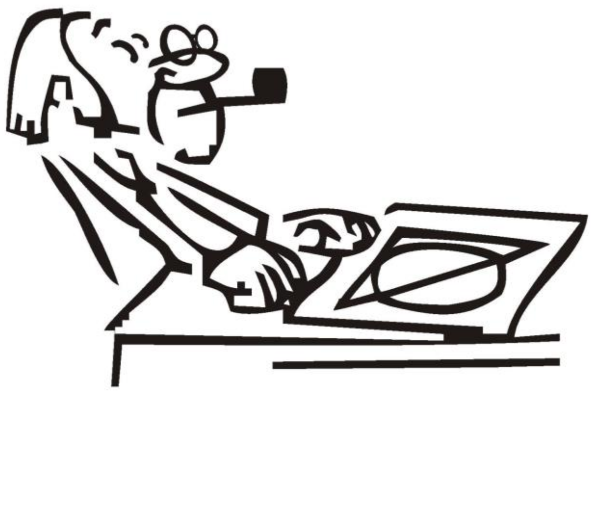
A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons

„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gadā



Rīga 2006

A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons. „Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2006. – 214 lpp.

Šajā darbā apkopoti „Profesora Cipariņa kluba” konkursa uzdevumi, kas piedāvāti risinātājiem no 1999./2000. mācību gada līdz 2005./2006. mācību gadam, un šo uzdevumu atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Darbu izdošanai sagatavojusi Inese Bērziņa.

ISBN

SATURS

IEVADS 4

UZDEVUMI 6

ATRISINĀJUMI 42

1. 26. MĀCĪBU GADS (1999/ 2000) 42
2. 27. MĀCĪBU GADS (2000/ 2001) 60
3. 28. MĀCĪBU GADS (2001/ 2002) 88
4. 29. MĀCĪBU GADS (2002/ 2003) 118
5. 30. MĀCĪBU GADS (2003/ 2004) 137
6. 31. MĀCĪBU GADS (2004/ 2005) 160
7. 32. MĀCĪBU GADS (2005/ 2006) 181

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM 210

LITERATŪRA 213

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ 214

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS 215

IEVADS

„Profesora Cipariņa klubs" tika nodibināts 1974. gada rudenī pēc laikraksta „Pionieris" skolu daļas vadītājas Veltas Jurševicas ierosinājuma. Izlasījusi laikrakstā „Padomu Jaunatne" publicēto rakstu par Latvijas 1. atklātās matemātikas olimpiādes rezultātiem, viņa griezās pie A. Andžāna (toreiz – LVU Skaitļošanas centra jaunākā zinātniskā līdzstrādnieka) ar jautājumu par iespējām rīkot laikraksta slejās kaut ko līdzīgu. Rezultātā radās „Profesora Cipariņa klubs". Nosaukumu ieteica A. Andžāna māte O. Andžāne, bet pirmo kluba vinjeti uzzīmēja mākslinieks karikatūrists R. Vitkovskis, toreiz LVU Skaitļošanas centra inženieris programmētājs; tā redzama uz grāmatas vāka.

Visai drīz redakcija saņēma vēstuli no kādas darba veterānu organizācijas, kurā tika izsacīts sašutums, ka bērnu laikraksts popularizējot smēķēšanu – kāpēc profesoram mutē pīpe? Gribi vai negribi, bet pīpi nācās novākt.

„Profesora Cipariņa klubs" kopš pirmsākumiem darbojas nemainīgā formā. Laikraksts vairākas reizes mācību gadā skolēnu patstāvīgai risināšanai publicē vairākus uzdevumus. Iesūtītos atrisinājumus vērtē komisija un gan katrā nodarbībā, gan mācību gada kopvērtējumā nosaka uzvarētājus pa klašu grupām gan individuālo risinātāju, gan kolektīvu konkurencē. Pavasarī, parasti Latvijas Universitātes Lielajā aulā, notiek mācību gada svinīgais noslēgums, uzvarētāju apbalvošana un tikšanās ar kluba vadību. Pēdējos gados tam 9. klases beidzējam, kurš visu mācību gadu kopvērtējumā uzrādījis vislabākos rezultātus, tiek pasniegta ar J. Endeles iniciatīvu izveidota Draudzīgā Aicinājuma fonda balva.

„Profesora Cipariņa klubs" (turpmāk PCK} ieguva lielu popularitāti un atsaucību. Bērni iesūtīja ārkārtīgi skaisti noformētus darbus, kuros līdzās uzdevumu atrisinājumiem bija arī zīmējumu sērijas – gan atsevišķu uzdevumu ilustrācijas, gan Profesors Cipariņš, kādu to iztēlojās vēstuļu autori. Sākumā vēstules tika adresētas „Pioniera" redakcijai, kurai bija svarīgi, lai viņu publikācijas rastu lasītāju atsaucību, – par to vajadzēja atskaitīties Latvijas Komjaunatnes centrālkomitejai. Ar pateicību jāatzīmē – kaut arī PCK adresēto vēstuļu skaits, protams, nesasniedza tādus apmērus kā, piemēram, sarakste rubrikā „Jaunais korespondents", avīzes vadība saprata šī darba nozīmību un aizstāvēja to pret visiem iebildumiem. Redakcijas darbinieces V. Jurševica, O. Bērtulsone, R. Rudzāte un daudzi citi izmantoja katru izdevību, lai izbraukumos uz skolām aģitētu par piedalīšanos PCK.

PCK uzdevumus galvenokārt sastādījis A. Andžāns; virkne uzdevumu aizgūta no citiem avotiem (skat. literatūras sarakstu). Darbu labošanu līdz 1983. gadam veica A. Andžāns un M. Miķelsone (Cepīte), 1983. -1996. gados – J. Cepītis un M. Cepīte, kopš 1996. gada – LU NMS kolektīvs, galvenokārt D. Bonka. Daudzus gadus tika izdotas brošūras ar atsevišķu nodarbību uzdevumu atrisinājumiem. To sarakstīšanā iesaistījās plašs autoru loks, galvenokārt LU studenti, pasniedzēji un zinātniskie darbinieki. Kopā ar A. Andžānu šos izdevumus veidojusi I. Opmane (Ļaksa). Z. Ozola (Zvirbule), I. Rekke (Medvede), M. Stupāne (Seile), D. Andžāne, V. Ignatoviča (Čiekure), I. Jēkabsone, D. Veidemane, I. Muceniece, S. Ķīle, D. Bonka, S. Krauze, I. France, L. Ramāna, A Čerāne. Brošūras tika publicētas daudzās izdevniecībās, piemēram, Izglītības ministrijā (ar M. Vītumas un G. Malzubres atbalstu), Latvijas PSR Zinību biedrībā (ar R. Freivalda un G. Matisānes atbalstu), Latvijas Valsts universitātē (ar Fizikas un matemātikas fakultātes un L. Paegles atbalstu). 1984. gadā izdevniecība „Zvaigzne" publicēja grāmatu, kas saturēja PCK pirmo desmit gadu uzdevumus un īsus atrisinājumus [1]; 2000. gadā turpat publicēja līdzīgu grāmatu [2] par pirmajiem 25 kluba gadiem.

Laikam ritot, PCK nedaudz mainījies. Kopš 1989./90. mācību gada uzdevumi tiek dalīti A un B grupās; A grupas uzdevumi paredzēti risinātājiem, kam vēl nav lielas pieredzes, bet B grupas uzdevumi ir ievērojami grūtāki. Pēc laikraksta „Pionieris" likvidēšanas PCK dažus gadus darbojies laikrakstos „LaBA” un „MANA”, bet pēdējos 4 gadus – „Latvijas Avīzē”. Uzdevumi un to atrisinājumi tiek publicēti arī internetā (http://www.liis.lv/NMS/).

PCK galvenokārt piedalās 5.-9. klašu skolēni, lai gan ir arī patīkami izņēmumi: piemēram, jaunākais datorzinātņu doktors pasaulē Andris Ambainis un LU docente, daudzu grāmatu autore Līga Ramāna piedalīties PCK sākuši jau ar 1. klasi! Gandrīz visi Latvijas izcilie jaunie matemātiķi – starptautisko olimpiāžu laureāti – savu ceļu matemātikas sacensībās sākuši PCK slejās.

Šajā grāmatā apkopoti PCK uzdevumi un to atrisinājumi laika posmā no 1999./2000. līdz 2005./2006. mācību gadam.

Uzdevumu izvēli un sadalījumu pa tēmām ietekmējušas tās izmaiņas, kas pēdējā laikā notikušas matemātikā. Elektronisko skaitļotāju plaša izmantošana informācijas apstrādē, zinātnes un tehnikas uzdevumu risināšanā, sarežģītu procesu vadīšanā ir ievērojami izmainījusi arī matemātikas pētījumu tematiku un metodes. Šīs matemātikas zinātnē notiekošās pārmaiņas ietekmējušas arī elementārās matemātikas uzdevumu saturu. Tāpēc līdz ar uzdevumiem aritmētikā, algebrā un klasiskajā ģeometrijā grāmatā ir arī uzdevumi par algoritmiem, par konfigurācijām, par kombinatoriskās ģeometrijas jautājumiem.

Strādājot ar grāmatu, iesakām katru uzdevumu censties atrisināt patstāvīgi.

Ja izraudzīto uzdevumu neizdodas uzreiz atrisināt, tad nevajadzētu pēc pirmā neveiksmīgā mēģinājuma skatīties risinājumus, jo īstu gandarījumu par paveikto darbu var gūt tikai tad, ja uzdevums ir atrisināts patstāvīgi. Visi patstāvīgi iegūtie atrisinājumi jāpieraksta iespējami precīzi un pilnīgi. Ja uzdevuma formulējumā vai atrisinājumā ir lietoti jēdzieni, kas matemātikas stundās vēl nav aplūkoti, šo jēdzienu saturs jānoskaidro mācību grāmatās vai konsultējoties ar matemātikas skolotāju. Var lietot arī literatūras sarakstā uzrādītās grāmatas.

Kad ir izdevies atrisināt vairākus līdzīga satura uzdevumus, iesakām padomāt par iespējām šos uzdevumus vispārināt.

Autori

UZDEVUMI

1. 26. MĀCĪBU GADS (1999/ 2000)

1.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.1.A1. Kādi četrciparu skaitļi, kas beidzas ar 9, dalās ar katru savu ciparu?

1.1.A2. Izdomājiet, vai visu kuba virsmu var aplīmēt ar 6 kvadrātiem tā, lai tie nekur nepārsegtos un lai starp kvadrātiem būtu gan vienādi, gan dažādi.

1.1.A3. No grāmatas izrāva vairākas pēc kārtas ņemtas lapas. Pirmās izrautās lappuses numurs bija 185, bet pēdējais numurs sastādīts no tiem pašiem cipariem , tikai citā kārtībā. Kāds bija pēdējās izrautās lappuses numurs?

1.1.A4. Trīs kaudzēs ir attiecīgi 10, 17 un 21 akmentiņi. Atļauts ar vienu gājienu pievienot divām kaudzēm pa vienam akmentiņam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visās kaudzēs būtu vienāds akmentiņu skaits? Vai to var panākt, ja kaudzēs sākotnēji ir patvaļīgs akmentiņu daudzums?

1.1.A5. Visas trijstūra malas ir vienādas. Vai to var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros, starp kuriem nekādi divi nav savā starpā vienādi?

1.1.A6. Sprīdītim jāuzzina, vai ķēniņa pils atrodas pa labi vai pa kreisi. Viņš satiek trīs rūķīšus. Zināms, ka divi rūķīši vienmēr runā taisnību, bet viens dažreiz runā taisnību, dažreiz melo. Sprīdītis nezina, kurš rūķītis ir "neuzticams". Kā Sprīdītis var uzzināt vajadzīgo, uzdodot pa vienam jautājumam diviem no rūķīšiem?

B GRUPA

1.1.B1. Kuba izmēri ir $3\times3\times3$. Vai no tā var izzāģēt 9 kubiņus ar izmēriem $1\times1\times1$ katru tā, lai atlikušā ķermeņa virsmas laukums būtu tāds pats kā sākotnējam kubam?

1.1.B2. Apskatām visas daļas ar saucēju 1999, kuru skaitītāji ir 1; 2; …; 1998. Pierādīt, ka starp tām ir pāra skaits nesaīsināmu daļu.

1.1.B3. Uz kuba skaldnēm uzrakstīti 6 dažādi naturāli skaitļi; uz blakus skaldnēm uzrakstītie skaitļi atšķiras viens no otra vismaz par 2. Kāda ir mazākā iespējamā visu 6 skaitļu summa?

1.1.B4. Simts vienāda izmēra kartīšu viena puse ir sarkana, bet citām 100 tādām pašām kartītēm - balta; otrā puse visām 200 kartītēm ir zaļa. Kartītes kaut kā novietotas divās rindās pa 100 kartītēm katrā ar zaļo pusi uz augšu. Sprīdītis, tikai paskatoties uz rindām, prot pateikt, vai pirmajā rindā balto kartīšu ir tikpat, mazāk vai vairāk nekā otrajā rindā sarkano. Kā tas iespējams?

1.1.B5. Ģeologam ir sviras svari bez atsvariem un 8 dažādi akmeņi. Viņš vēlas noskaidrot, vai ir taisnība, ka katri divi akmeņi kopā sver vairāk par jebkuru trešo akmeni. Kā to izdarīt, izmantojot 13 svēršanas?

1.1.B6. Doti 10 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 90. Pierādīt: no tiem var izvēlēties divus skaitļus tā, ka izvēlēto skaitļu attiecība (lielākais pret mazāko) nepārsniedz 3/2.

1.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.2.A1. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Rindiņās ierakstīto skaitļu summas ir 21, 22 un 24; divās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 27 un 28. Kāda ir trešajā kolonnā ierakstīto skaitļu summa?

1.2.A2. Vai septiņstūra trīs diagonāles var krustoties vienā punktā? Bet četras diagonāles?

1.2.A3. Kādu naturālu skaitli pareizināja pašu ar sevi. Pierādiet, ka rezultāts nav 97516824.

1.2.A4. Lauvam apstājies sienas pulkstenis. Viņš var aiziet ciemos pie tīģera un paskatīties uz tīģera sienas pulksteni, bet, atgriežoties savā alā, pareizais laiks būs cits.
Kā lauvam nostādīt savu sienas pulksteni pareizi?

1.2.A5. Plaknē atrodas 4 punkti. Izmērot attālumus starp katriem diviem no tiem, iegūst tikai 2 dažādas vērtības.
Uzzīmējiet cik varat daudzus dažādus 4 punktu novietojumus ar šādu īpašību.

1.2.A6. Ierakstiet tabulā 4×4 rūtiņas naturālus skaitļus no 1 līdz 7 (katrā rūtiņā vienu skaitli) tā, lai katra rindiņa un katra kolonna kopā saturētu 7 dažādus skaitļus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

B GRUPA

1.2.B1. Jānis piedāvā Andrim sadalīt konfektes šādi: viena man, divas tev, trīs man, četras tev, …; kad tā vairs nevarēs turpināt, kārtējais zēns paņems visas atlikušās. Kurš kopā saņems vairāk konfekšu?

1.2.B2. Sešstūra malu garumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6 (varbūt citā kārtībā). Vai var gadīties, ka kāda riņķa līnija pieskaras visām sešstūra malām?

1.2.B3. Skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; … veido pēc likuma: katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar divu iepriekšējo summu. Vai šajā virknē ir divi blakus stāvoši skaitļi, kas dalās ar 3?

1.2.B4. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt tās tā, lai katrā rūtiņā būtu tieši vienu reizi? Ar pēdējo gājienu nav obligāti jāatgriežas sākotnējā rūtiņā.

1.2.B5. Kādu mazāko daudzumu naturālu skaitļu jāuzraksta, lai katrs nenulles cipars būtu pēdējais cipars kaut kādu divu uzrakstīto skaitļu reizinājumā?

1.2.B6. Skat. A grupas 6. uzdevumu, ja formulējumā 4 aizstāj ar 8 un 7 aizstāj ar 15.

1.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.3.A1. Skaitli $\frac{1}{26}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un izsvītroja tajā 1999-o ciparu aiz komata.
Kurš skaitlis lielāks: sākotnējais vai iegūtais?

1.3.A2. Atrast visus naturālos skaitļus, kas 8 reizes lielāki par savu ciparu summu.

1.3.A3. Desmit dažādi naturāli skaitļi izrakstīti uz riņķa līnijas. No katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalās ar otru. Vai noteikti eksistē tādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz riņķa līnijas, neatrodas blakus un no kuriem viens dalās ar otru?

1.3.A4. Izdomājiet kaut vienu taisnstūri, kuru var sagriezt savstarpēji līdzīgos trijstūros, kas nav taisnleņķa trijstūri.

1.3.A5. Kvadrāts sastāv no 36 vienādām rūtiņām; rūtiņas malas garums ir 1. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu centru var atzīmēt, lai attālums starp katriem diviem atzīmētajiem centriem būtu lielāks par 2?

1.3.A6. Ar kādu lielāko daudzumu vienādu nenulles ciparu var beigties naturāla skaitļa kvadrāts?

B GRUPA

1.3.B1. Krava ar masu 11 tonnas iepakota kastēs; nevienas kastes masa nepārsniedz 3 tonnas. Kāds mazākais daudzums reisu jāveic, lai aizvestu visu kravu, ja katrā reisā var aizvest ne vairāk kā 3 tonnas?

1.3.B2. Dots, ka a, b, c, d – pirmskaitļi, $a>3b>6c>12d$ un $a^2-b^2+c^2-d^2=1749$. Aprēķiniet $a^2+b^2+c^2+d^2$.

1.3.B3. Skat. A grupas 3. uzdevumu, ja izrakstīti 9 skaitļi.

1.3.B4. Kvadrāts sastāv no 64 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās ierakstīta zvaigznīte, pie tam tā, ka blakus katrai rūtiņai atrodas vismaz viena zvaigznīte. (Zvaigznīte atrodas blakus rūtiņai X, ja tā ir tādā rūtiņā, kam ar X ir kopēja mala). Kāds mazākais zvaigznīšu daudzums var būt kvadrātā?

1.3.B5. Kvadrāts sastāv no 16 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa diagonālei; nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīgu punktu. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

1.3.B6. Skopulim ir 51 pēc ārējā izskata vienāda monēta. No tām 50 ir ar vienādu masu, bet viena – vieglāka. Kā ar 5 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast vieglāko monētu, ja nevienu monētu nedrīkst svērt vairāk par 2 reizēm?

1.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.4.A1. Viens no trim brāļiem A, B, C vienmēr runā patiesību, otrs vienmēr melo, bet trešais dažreiz runā patiesību, dažreiz melo. Uz jautājumu "Kas ir A?" viņi atbildēja šādi:
A: "Es dažreiz meloju, dažreiz nē".
B: "Melis!"
C: "Godīgs!"
Noskaidrojiet, "kas ir kas" no šiem brāļiem.

1.4.A2. Vai pastāv tāds izliekts četrstūris, kuru var sadalīt divās vienādās daļās, novelkot vienu nogriezni, bet nevar to izdarīt, novelkot diagonāli vai viduslīniju?

1.4.A3. Pierādīt: no sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens nav lielāks par savu naturālo dalītāju summu, neieskaitot šai summā viņu pašu.

1.4.A4. Divi trīsciparu skaitļi atšķiras viens no otra par 8. Par cik var atšķirties to ciparu summas?

1.4.A5. Šaha turnīrā ir 6 dalībnieki, katrs spēlē ar katru vienu reizi. Vai var gadīties, ka no katriem četriem dalībniekiem var atrast tādu, kura partijās ar trim pārējiem viņš vienreiz uzvarējis, vienreiz zaudējis un vienreiz spēlējis neizšķirti?

1.4.A6. Astoņiem bērniem visiem ir dažāds konfekšu skaits. Ir zināms, ka katrs bērns var visas savas konfektes sadalīt pārējiem tā, lai viņiem būtu vienāds konfekšu skaits. Kāds mazākais skaits konfekšu daudzums var būt tam bērnam, kuram to ir visvairāk?

B GRUPA

1.4.B1. Pēterim ir 1 lats 98 santīmi, pavisam 100 monētas. Pierādīt, ka viņš savu naudu var sadalīt divās vienādās daļās.

1.4.B2. Kā no punkta ārpus taisnes var novilkt perpendikulu pret šo taisni, ja dots cirkulis ar neierobežoti lielu rādiusu un lineāls, kura garums ir 1 cm?

1.4.B3. Vai var izveidot 10 kaudzes akmeņu ar 100 akmeņiem kopā tā, lai visās būtu dažāds skaits akmeņu, bet, jebkuru kaudzi patvaļīgā veidā sadalot divās mazākās, šī īpašība vairs neizpildītos?

1.4.B4. Pa apli stāv 5 zēni un 5 meitenes. Ar vienu gājienu patvaļīgi divi bērni var mainīties vietām. Ar kādu mazāko gājienu skaitu no jebkuras sākuma situācijas var panākt, lai ne divi zēni, ne divas meitenes nekur nestāvētu blakus?

1.4.B5. Daži rūķīši no votivapu un šillišallu ciltīm kopīgi sagaidīja Jauno gadu. Svinībām bija sagādātas vairākas kūku kastes, katrā pa 12 kūkām. Katrs votivapa var apēst 6 vai 7 kūkas, katrs šillišalla – 2 vai 3 kūkas. Cik bija votivapu un cik - šillišallu, ja ar 4 kūku kastēm nebūtu pieticis, bet, nopērkot 5 kastes, visas kūkas netika apēstas?

1.4.B6. Daži skolēni no 7^a klases pārgāja uz 7^b klasi. Pierādiet: varēja gadīties, ka abās klasēs vidējā atzīme paaugstinājās. Vai tas pats varēja notikt, ja pēc tam daži skolēni no 7^b klases pārgāja uz 7^a klasi?

1.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.5.A1. Vienas daļas saucējs ir 3, otras – 5; skaitītāji ir veseli skaitļi, un daļu vērtības nav vienādas. Kāda ir mazākā iespējamā šo daļu starpība, no lielākās atņemot mazāko?

1.5.A2. Vai var plaknē atzīmēt vairākus punktus un novilkt vairākas taisnes tā, lai caur katru atzīmēto punktu būtu novilktas tieši 3 taisnes un uz katras novilktās taisnes atrastos tieši 3 atzīmētie punkti?
(Novilktās taisnes var krustoties arī neatzīmētos punktos.)

1.5.A3. Aprēķināt reizinājumus 67×67; 667×667; 6667×6667. Kāds būs rezultāts, ja katrā no diviem reizinātājiem būs 100 sešinieki un pēdējais cipars - septītnieks? Atbildi pamatojiet.

1.5.A4. Taisnstūris sastāv no 3×4 kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1. Parādīt, ka taisnstūrī var izdarīt dažus iegriezumus tā, lai tas nesadalītos vairākos gabalos, bet ar to varētu divās kārtās aplīmēt kubu ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$.

1.5.A5. Dota taisnstūraina papīra lapa. Jānis to ar taisnu griezienu sagriež divos gabalos, pēc tam vienu no gabaliem - atkal divos utt., lietojot tikai taisnus griezienus. Pierādiet: ja Jānis griezīs pietiekami ilgi, tad iestāsies stāvoklis, kad viņam būs 2000 daudzstūri ar vienādu malu skaitu.

1.5.A6. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi. Summām $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ vērtības ir 6; 9; 11; 12; 15 (nav zināms, kurai summai kura vērtība). Atrast
1) summu $c+d$,
2) skaitļus c un d.

B GRUPA

1.5.B1. Atrodiet visus iespējamos veidus, kā no 9 nenulles cipariem, lietojot katru tieši vienu reizi, izveidot trīs trīsciparu skaitļus, kuri ir naturālu skaitļu kvadrāti. Pierādiet, ka citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.

1.5.B2. Plaknē doti 10 punkti; tie ne visi atrodas uz vienas taisnes. Caur katriem 2 punktiem novilkta taisne. Pierādiet, ka caur kādu punktu iet vismaz 4 dažādas taisnes.

1.5.B3. Naturālos skaitļus no 1 līdz 3n jāsadala n grupās pa 3 skaitļiem katrā tā, lai katrā grupā divu skaitļu summa būtu 3 reizes lielāka par trešo skaitli. Vai to var izdarīt, ja
a) n = 8,
b) n = 6?

1.5.B4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 1999 var uzrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai nekādu vairāku pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ar 2000?

1.5.B5. Atrisiniet A grupas 2. uzdevumu, ja skaitli 3 aizstāj ar skaitli 4.

1.5.B6. Četrām vienāda izskata monētām ir dažādas masas. Apzīmēsim masas ar $a < b < c < d$. Ir zināms, ka $2ac = bd$ un ka $3a > 2b$. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast smagāko monētu?

1.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.6.A1. Pierādiet, ka skaitli $97 \cdot 99 \cdot 101 \cdot 103 + 16$ var iegūt, pareizinot kādu naturālu skaitli pašu ar sevi.

1.6.A2. Izmantojot katru ciparu tieši vienu reizi, izveidot divus naturālus piecciparu skaitļus tā, lai to reizinājums būtu mazākais iespējamais.

1.6.A3. Uz galda atrodas kubs. To atļauts ripināt pa galdu, pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tas atbalstās uz galda. Vai var pārvelt kubu pāri katrai no šķautnēm tieši vienu reizi tā, lai kubs pēc šīm 12 pārvelšanām nonāktu turpat, kur atradās sākumā?

B GRUPA

1.6.B1. Ar n! apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n. Piemēram, $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$, $1! = 1$. Vai no skaitļiem $1!, 2!, 3!, \ldots, 1999!, 2000!$ var izvēlēties tieši 1999 skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts?

1.6.B2. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Katra tā rūtiņa var būt balta vai melna. Ar vienu gājienu atļauts reizē mainīt krāsu 11 rūtiņās, kas aizpilda vienu (patvaļīgu) rindu un vienu (patvaļīgu) kolonnu.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visas rūtiņas kļūtu baltas, ja sākotnēji tās visas ir melnas?

1.6.B3. Vai kvadrātu var sagriezt tā, lai rastos viens 2000-stūris un 665 trijstūri, bet nerastos nekādas citas daļas?

2. 27. MĀCĪBU GADS (2000/ 2001)

2.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

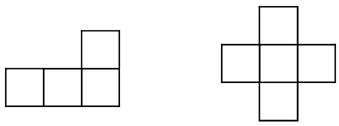
2.1.A1. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādus pārveidojumus: a) pierakstīt tam galā 0, b) pierakstīt tam galā 4, c) dalīt to ar 2, ja tas ir pāra skaitlis.
Vai ar šādiem pārveidojumiem, lietojot tos patvaļīgā secībā un vairākas reizes, no skaitļa 4 var iegūt visus viencipara naturālus skaitļus?

2.1.A2. Taisnstūrī ABCD zināms, ka $AB = 3\text{cm}$ un $BC = 10\text{cm}$. Skudra sāk rāpot pa taisnstūra kontūru vienā virzienā, sākot no virsotnes A. Uz kuras malas skudra atradīsies, kad tā būs norāpojusi tieši 2 kilometrus?

2.1.A3. Triju pirmskaitļu kvadrātu summa ir 414. Kas tie ir par pirmskaitļiem?

2.1.A4. Jānītim patīk tādi četrciparu naturāli skaitļi, kuros ir tieši 3 dažādi cipari un kuros neviens cipars nav lielāks par 5. Cik skaitļu Jānītim patīk?

2.1.A5. Vai no tādām figūrām, kādas attēlotas 1. zīm., var salikt kvadrātu ar izmēriem 6×6? Katru figūru var izmantot vairākas reizes. Figūras nedrīkst pārklāties.



1. zīm.

2.1.A6. Burvju māksliniekam ir 100 kartiņas ar numuriem no 1 līdz 100. Viņš tās saliek baltā, sarkanā un zaļā kastē tā, ka katrā kastē ir vismaz viena kartiņa.
Kāds no skatītājiem paņem pa vienai kartiņai no divām kastēm un skaļi nosauc to numuru summu. Zinot tikai šo summu, burvju mākslinieks pasaka, no kuras kastes kartiņa netika ņemta.
Atrodiet divus būtiski atšķirīgus veidus, kā sadalīt kartiņas pa kastēm, lai šis triks vienmēr izdotos.

B GRUPA

2.1.B1. Skat. A grupas 1. uzdevumu, ja jāiegūst visi naturāli skaitļi no 1 līdz 100.

2.1.B2. Pildspalva, flomasters un klade kopā maksā 1 latu. Klade maksā vairāk par 2 flomasteriem, 3 flomasteri maksā vairāk par 4 pildspalvām un 3 pildspalvas maksā vairāk par kladi. Cik maksā katrs no minētajiem priekšmetiem?

2.1.B3. Katram no pieciem cilvēkiem galvā ir sarkana vai zaļa cepure. Tie, kas valkā zaļu cepuri, vienmēr melo; tie, kas valkā sarkanu cepuri, vienmēr runā patiesību. Katrs redz visu citu cepures. A saka: "Es redzu 3 sarkanas un 1 zaļu cepuri." B saka: "Es redzu 4 zaļas cepures." C saka: "Es redzu 1 sarkanu un 3 zaļas cepures." D saka: "Es redzu 4 sarkanas cepures." E nesaka neko.
Kādas krāsas cepures katram ir galvā?

2.1.B4. Andrim patīk naturāli skaitļi, kuros visi cipari ir dažādi un pirmais cipars vienāds ar visu citu ciparu summu. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, kas patīk Andrim?

2.1.B5. Skat. A grupas 5. uzdevumu, ja jāsaliek kvadrāts ar izmēriem 9×9.

2.1.B6. Cik pavisam ir dažādu veidu, kā salikt kartiņas kastēs, lai A grupas 6. uzdevumā aprakstītais triks noteikti izdotos?

2.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

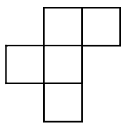
2.2.A1. Parādi, ka vienādībā
$40 \pm 39 \pm 38 \pm 37 \pm ... \pm 3 \pm 2 \pm 1 = 500$ var tā izvēlēties zīmes kreisajā pusē, lai vienādība būtu pareiza. Kāds ir lielākais iespējamais "-" zīmju skaits šādā pareizā vienādībā?

2.2.A2. Uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti, kas to sadala 5 vienādos lokos. Centrs nav atzīmēts. Kā, izmantojot tikai lineālu un zīmuli, atrast riņķa līnijas centru?

2.2.A3. Profesora Cipariņa automašīnai ir četras vienādu izmēru riepas un viena rezerves riepa; visas 5 riepas ir pilnīgi jaunas. Ja riepu izmanto kā priekšējo riepu, tā nolietojas pēc 30000 km; ja to izmanto kā aizmugurējo riepu, tā nolietojas pēc 20000 km. Cik lielu attālumu Cipariņš var nobraukt ar šīm 5 riepām?

2.2.A4. No 9 nenulles cipariem, katru no tiem izmantojot tieši divas reizes, sastādiet dažādus pirmskaitļus tā, lai to summa būtu iespējami maza.

2.2.A5. Vai ar tādām figūrām, kāda parādīta 2. zīm., var pārklāt kvadrātu ar izmēriem 10×10 rūtiņas? Figūras savā starpā nedrīkst pārklāties un tās nedrīkst apgriezt "uz mutes", bet tās drīkst iziet ārpus kvadrāta robežām.



2. zīm.

2.2.A6. Jānis dod Andrim pa vienai kartiņai. Katra kartiņa ir vai nu balta, vai sarkana. Andris šīs kartiņas liek divās kaudzītēs. Katrā kaudzītē kartiņu krāsām jābūt pamīšus. Zināms, ka 7. un 8. kartiņa bija baltas, bet 19.kartiņa – sarkana. Kādā krāsā bija 20.kartiņa?

B GRUPA

2.2.B1. Kurā gadījumā iegūst lielāku rezultātu: vai sareizinot 16 devītniekus, vai 12 skaitļus "piecpadsmit"?

2.2.B2. No 12 apgalvojumiem "x dalās ar 2", "x dalās ar 3", "x dalās ar 4", ..., "x dalās ar 13" desmit ir pareizi, bet divi viens otram sekojoši – nepareizi. Zināms, ka x nav vairāk par 5 cipariem. Atrast x.

2.2.B3. Vai trijstūri var sagriezt a) 6, b) 7, c) 8 trijstūrīšos tā, lai nekādiem diviem griežot iegūtajiem trijstūrīšiem nebūtu kopīga mala?

2.2.B4. Rūtiņu lapā "pa spirāli" izraksta visus naturālos skaitļus tā, kā redzams 3. zīm.

		5	4	3	⋮	
		6	1	2	11	
		7	8	9	10	

3. zīm.

Par cik rūtiņām horizontālā un par cik - vertikālā virzienā no 1 nobīdīts skaitlis 2000?

2.2.B5. Parādīt, kā dažādmalu šaurleņķu trijstūri 4 dažādos veidos var sagriezt trīs daļās tā, lai katrai daļai būtu simetrijas ass.

2.2.B6. Ar vienu gājienu šaha galdiņā var izvēlēties jebkuru taisnstūri, kura malas iet pa lauciņu robežām, un šī taisnstūra iekšienē mainīt visu lauciņu krāsas (melnu par baltu un baltu par melnu). Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi lauciņi vienlaicīgi būtu melni?

2.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.3.A1. Dota 30 litru kanna, kas pilna ar ūdeni. Doti arī divi sākotnēji tukši trauki ar ietilpību 9 l un 12 l. Kā, izmantojot šos traukus, var atliet a) 3 l, b) 6 l ūdens?

2.3.A2. Riņķa līnija sadalīta 10 vienādās daļās. Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju ar 10 posmiem tā, lai tās virsotnes atrastos dalījuma punktos un lai starp tās posmiem būtu tieši divi paralēli.

2.3.A3. Apskatām izteiksmi: 1:2:3:4:5:6:7:8

Ievietojiet tajā iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu 70. Vai var iekavas ievietot tā, lai izteiksmes vērtība būtu naturāls skaitlis, kas mazāks par 70?

2.3.A4. 2000 vieninieki uzrakstīti rindā. Pirmos divus skaitļus nosvītro un rindas galā pieraksta to summu. Pēc tam atkal nosvītro pirmos divus vēl nenosvītrotos skaitļus un rindas galā uzraksta to summu, utt. Tā turpina, kamēr paliek viens nenosvītrots skaitlis.

a) Cik skaitļu šajā brīdī uzrakstīts?

b) Kāds ir vienīgais nenosvītrotais skaitlis?

2.3.A5. Uz tāfeles ir uzrakstīti divi veseli pozitīvi skaitļi. Sākumā viens no tiem ir 2000 un otrs ir mazāks par 2000. Ja abu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais m ir vesels skaitlis, ir atļauta šāda operācija: vienu no skaitļiem nodzēst un aizvietot ar m. Pierādīt, ka šo operāciju var veikt ne vairāk kā desmit reizes. Uzrādīt piemēru, kurā šī operācija ir veikta desmit reizes.

2.3.A6. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis. Katrai rūtiņai visās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 10. Aprēķināt visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. (Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

B GRUPA

2.3.B1. Slēdži ir izvietoti tabulas 40×50 veidā. Katram slēdzim ir divi stāvokli: "ieslēgts" un "izslēgts". Pārslēdzot slēdzi, tā stāvoklis un jebkura tajā pašā rindā vai tajā pašā kolonnā esoša slēdža stāvoklis nomainās uz pretējo. Pierādīt, ka slēdžu tabulu ar secīgām slēdžu pārslēgšanām var pārveidot no stāvokļa, kurā visi slēdži ir izslēgti, uz stāvokli, kurā visi slēdži ir ieslēgti, un noskaidrot mazāko pārslēgšanu skaitu, ar kuru to var izdarīt.

2.3.B2. Uzzīmējiet punktu A un tādu slēgtu lauztu līniju, ka katrai taisnei, kas iet caur A, ir tieši 10 kopīgi punkti ar šo lauzto līniju.

2.3.B3. Uz 5 kartītēm uzrakstīts pa skaitlim; vismaz viens no tiem nav nulle. Apskatīsim visas summas, kuras var iegūt, saskaitot uz trim kartītēm uzrakstītos skaitļus. Kāds lielākais daudzums no šīm summām var būt 0?

2.3.B4. Saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma nosacījumiem noskaidrojiet, kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa.

2.3.B5. Seši draugi visu dienu spēlēja basketbolu. Ik pa brīdim trīs no viņiem izdzēra pa glāzei ūdens. Vakarā viņi konstatēja, ka visi izdzēruši dažādu glāžu skaitu. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais izdzerto glāžu daudzums?

2.3.B6. Plaknē uzzīmētas n taisnes tā, ka katra no tām krusto tieši 2000 citas. Kāds var būt n?

2.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.4.A1. Ievietojiet izteiksmē 2 : 2 - 3 : 3 - 4 : 4 - 5 : 5 iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu cik iespējams liela. (Nav jāpierāda, ka lielāku vērtību iegūt nevar).

2.4.A2. Uzzīmējiet tādu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas savā starpā. (Paskaidrojums: divi nogriežņi krustojas, ja tiem ir tieši viens kopīgs punkts, kas nav galapunkts nevienam no šiem abiem nogriežņiem.)

2.4.A3. Vai taisnība, ka no katru 10 pēc kārtas sekojošu gadu kalendāriem vismaz viens noderētu 2001.gadam? (Kalendārs ir derīgs, ja datumi ir pareizajās nedēļas dienās).

2.4.A4. Dotas 200 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Puse no tām sver pa 100 gramiem katra, puse - pa 101 gramu katra. Doti sviras svari bez atsvariem. Jāizveido divas monētu kaudzītes, lai to svari atšķirtos, bet monētu daudzumi tajās būtu vienādi. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu to var izdarīt?

2.4.A5. Pasaku mežā Pieneņu pļaviņā dzīvo 50 rūķīši, Ozolu pakalnā – 60 rūķīši, bet Sūnu ciemā – 120 rūķīši. Daudzas līkumotas taciņas savieno savā starpā gan šīs, gan vēl citas vietas mežā, bet rūķīši citur nedzīvo. Kur Velēnu vecītim jāpušķo Ziemassvētku egle, lai kopējais attālums, kas rūķīšiem līdz tai jānoiet, būtu vismazākais? (Velēnu vecītis egli var uzburt jebkurā vietā; rūķīši mežā pārvietojas tikai pa taciņām.)

2.4.A6. Kvadrātveida režģī 8 rindās un 8 kolonnās aug 64 eglītes. Tās visas ir dažāda garuma. Sprīdītis katrā rindā apsedza divas īsākās eglītes, bet Sniegbaltīte katrā kolonnā divas īsākās eglītes ierušināja sniegā. Pierādīt, ka vismaz trīs eglītes ir gan apsegtas, gan ierušinātas sniegā.

B GRUPA

2.4.B1. Konferencē sapulcējušies 10 politiķi. Daži no tiem vienmēr melo, pārējie vienmēr runā patiesību. Uz jautājumu "Vai, Jūs neskaitot, starp pārējiem vairāk ir meļu vai godīgu cilvēku?" seši no klātesošajiem atbildēja: "vairāk ir meļu". (Pārējiem četriem šo jautājumu neuzdeva.) Cik starp sapulcējušamies bija meļu?

2.4.B2. Skat. A grupas 2. uzdevumu, ja jāuzzīmē sešstūris.

2.4.B3. Kāds mazākais skaits malu var būt daudzstūrim, kura malu skaits ir nepāra skaitlis un kuru var sagriezt paralelogramos? (Par paralelogramu sauc četrstūri, kuram ik divas pretējās malas savā starpā ir paralēlas.)

2.4.B4. Dotas 5 pēc ārējā izskata neatšķiramas monētas. Trīs no tām sver vienādi; abas atlikušās arī sver vienādi, bet to svars atšķiras no pārējo triju monētu svara. Doti sviras svari bez atsvariem. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu var garantēti atrast kaut vienu no trim vienādajām monētām?

2.4.B5. Kuri no desmit skaitļiem 11; 101; 1001; 10001; ... 10000000001 ir pirmskaitļi?

2.4.B6. Burvju meža mala ir taisna līnija. Sprīdītis atrodas mežā 4 km attālumā no tā malas. Viņš to zina, bet nezina, uz kuru pusi atrodas meža mala. Pieņemsim, ka Sprīdītis var pārvietoties pa jebkuras formas ceļu, kādu viņš izvēlas. Izdomājiet, kā Sprīdītim rīkoties, lai garantēti izkļūtu no meža, noejot ne vairāk kā

a) 40 km,

b) 28 km. (Uzskatām, ka mežs ir tā apburts, ka Sprīdītis redz meža malu tikai tad, kad jau nonācis pie tās.)

2.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.5.A1. Naturālu pāra skaitli x dalot ar 11, iegūst tādu pašu atlikumu, kā dalot to ar 17. Kāda ir mazākā iespējamā x vērtība?

2.5.A2. Visi naturālie skaitļi, kas nesatur savā pierakstā nevienu no cipariem 0; 7; 8; 9, uzrakstīti viens aiz otra augošā secībā. Kurš skaitlis atrodas 2001. vietā?

2.5.A3. Izdomājiet kaut vienu figūru, kam vienlaicīgi piemīt trīs īpašības:

a) tās laukums ir 6,

b) ar to var pilnīgi aplīmēt kubu, kura izmēri ir $1\times1\times1$,

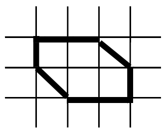
c) ar četrām tādām figūrām var pilnīgi aplīmēt kubu, kura izmēri ir $2\times2\times2$.

2.5.A4. Skaitlis A ir trīsciparu skaitlis, un tam ir tieši 4 dalītāji. Cik dalītāju var būt sešciparu skaitlim, kuru iegūst, divas reizes pēc kārtas uzrakstot A?

2.5.A5. Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa. Sākotnēji tieši vienā rūtiņā dzīvo baktērija. Pirmās minūtes beigās tā rada otro paaudzi - divas jaunas baktērijas; katra no tām iemitinās rūtiņā, kurai ar tās radītājas apdzīvoto rūtiņu ir kopīga mala. Otrās minūtes beigās katra otrās paaudzes baktērija rada divas jaunas baktērijas, kas novietojas plaknē pēc līdzīga likuma, utt. Nevienā rūtiņā nevar vienlaicīgi būt vairāk par vienu baktēriju; neviena baktērija nepazūd un savu uzturēšanās vietu nemaina.

Parādiet: var gadīties tā, ka šādā procesā rodas četras jaunas baktēriju paaudzes (neskaitot pirmo paaudzi, kas sastāvēja no vienas baktērijas).

2.5.A6. Parādiet, ka 4. zīm. redzamo rūtiņu lapā uzzīmēto sešstūri var sagriezt trīs daļās, no kurām iespējams salikt kvadrātu.



4. zīm.

B GRUPA

2.5.B1. Papīra strēmeli, kas redzama 5. zīm., sagriezt a) 6, b) 7 gabalos tā, lai uz tiem uzrakstītie naturālie skaitļi būtu pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi (t.i., lai katriem diviem no tiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1).

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. zīm.

2.5.B2. Skaitli sauksim par ķēdes skaitli, ja tas iegūstams, uzrakstot vienu aiz otra dažādus (vismaz divus) pirmos naturālos skaitļus. Piemēram, ķēdes skaitļi ir 12; 12345; 1234567891011. Pierādiet, ka divu ķēdes skaitļu reizinājums nevar būt ķēdes skaitlis.

2.5.B3. Vai kuba virsmu var (bez brīvām vietām un bez pārklāšanās) aplīmēt ar

a) 6 vienādiem taisnstūriem, kas nav kvadrāti,

b) 6 vienādiem paralelogramiem, kas nav taisnstūri?

2.5.B4. Kādā partijā ir 9 deputāti. Kādu lielāko komisiju skaitu var izveidot, lai katrā komisijā būtu tieši 3 no viņiem un nekādi divi deputāti kopā nedarbotos vairāk kā vienā komisijā?

2.5.B5. Vai A grupas 5. uzdevumā iespējams, ka rodas piecas jaunas paaudzes?

2.5.B6. Vienādsānu šaurleņķa trijstūra augstums vienāds ar pamatu. Ar diviem taisniem griezieniem sagriezt šo trijstūri četrās daļās, no kurām var salikt kvadrātu.

2.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.6.A1. Olimpiādē piedalījās votivappas un šillišallas. Veiksmīgi startējušo votivappu bija tikpat, cik neveiksmīgi startējušo šillišallu. Vai vairāk bija veiksmīgi startējušo dalībnieku vai dalībnieku – šillišallu?

2.6.A2. Katram naturālam trīsciparu skaitlim atrodam tā ciparu reizinājumu. Aprēķiniet visu šo reizinājumu summu.

2.6.A3. Karalis apstaigā visus šaha galdiņa lauciņus katru tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgriežas uz sākotnējā lauciņa. Vai var būt, ka viņš izdarījis tieši **a)** vienu, **b)** divus gājienus pa diagonāli?
(Karalis ar vienu gājienu pāriet uz lauciņu, kuram ir kopīga mala vai stūris ar to lauciņu, kurā viņš atrodas pirms šī gājiena izdarīšanas.)

2.6.A4. Kvadrāta mala ir 1 m gara. Tas sagriezts taisnstūros, un katrā taisnstūrī ierakstīts tā īsākās malas garums. Pierādīt, ka visu ierakstīto garumu summa nav mazāka par 1 m.

2.6.A5. Skaitļu virknē 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; … katrs skaitlis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo summu. Pierādīt, ka šīs virknes pirmo 100 locekļu kvadrātu summa vienāda ar tās 100-ā un 101-ā locekļa reizinājumu.

2.6.A6. Cik ir četrciparu skaitļu, kuros ir kaut viens nepāra cipars?

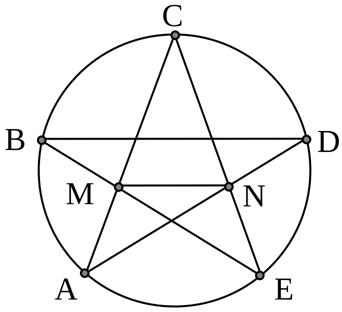
B GRUPA

2.6.B1. Jānim ir vairākas monētas. Ir zināms: lai arī kādu naudas summu no 1 santīma līdz 1 latam ieskaitot viņam nāksies samaksāt, viņš to varēs precīzi izdarīt, neprasot izdot atlikumu.
Kāds ir mazākais iespējamais Jāņa monētu skaits?

2.6.B2. Skat. A grupas 2. uzdevumu, ja apskata piecciparu skaitļus.

2.6.B3. Sprīdītis stāvēja apaļa laukuma centrā. Gar laukuma malu ar seju pret viņu nostājās rūķīši. Katrs rūķītis vai nu vienmēr melo, vai vienmēr saka patiesību. Sprīdītis palūdza katram rūķītim pasacīt par savu kaimiņu pa labi, vai tas ir vai nav melis. Pamatojoties uz saņemtajām atbildēm, Sprīdītis varēja nekļūdīgi noteikt, kāda daļa rūķīšu bija meļi.
Kāda daļa rūķīšu bija meļi?

2.6.B4. Punkti A; B; C; D; E sadala riņķa līniju 5 vienādās daļās (skat. 6. zīm.).
Kāda daļa no piecstaru zvaigznes laukuma ir četrstūra BDNM laukums?



6. zīm.

2.6.B5. Kādu lielāko daudzumu šaha zirdziņu var novietot kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas, lai neviens neapdraudētu nevienu citu?

2.6.B6. Maija sagatavoja Līgo vakaram 33 siera rituļus. Vai noteikti var vienu rituli sagriezt divos gabalos tā, lai sieru varētu sadalīt divās daļās ar vienādām masām, pie tam katra daļa saturētu 16 veselus rituļus un vienu no sagrieztā rituļa gabaliem?

3. 28. MĀCĪBU GADS (2001/ 2002)

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.1.A1. Reizināšanas piemērā vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Kāds cipars ar kādu burtu aizstāts?

$$\begin{array}{ccccccc} & J & U & L & I & T & A \\ \times & & & & & & A \\ \hline N & N & N & N & N & N & N \end{array}$$

7. zīm.

3.1.A2. Vai ir tāds četrstūris, kuru var sagriezt divos pēc formas un izmēriem vienādos piecstūros?

3.1.A3. Tenisa turnīrā piedalījās 10 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlēja vienu reizi; neizšķirtu tenisā nav. Pirmais tenisists guva x_1 uzvaras un cieta y_1 zaudējumus, otrais guva x_2 uzvaras un cieta y_2 zaudējumus utt.

Pierādiet, ka $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}$.

3.1.A4. Taisnstūris sastāv no 5×9 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sagriezt no trim rūtiņām sastāvošos gabalos tā, lai neviens gabals nebūtu taisnstūris?

3.1.A5. Uz papīra lapas uzrakstīti 6 apgalvojumi.

A: visi apgalvojumi B; C; D; E; F ir patiesi.
B: neviens no apgalvojumiem C; D; E; F nav patiess.
C: visi apgalvojumi A; B; C; D; E; F ir patiesi.
D: vismaz viens no apgalvojumiem A; B; C ir patiess.
E: neviens no apgalvojumiem A; B; C; D nav patiess.
F: neviens no apgalvojumiem A; B; C; D; E nav patiess.
Kuri apgalvojumi ir patiesi, kuri – aplami?

3.1.A6. Matemātikas olimpiādē piedalījās 21 zēns un 21 meitene. Ir zināms, ka neviens bērns neatrisināja vairāk par 6 uzdevumiem. Zināms arī, ka katram zēnam Z un meitenei M var atrast tādu uzdevumu, kuru atrisināja gan Z, gan M. Pierādiet, ka olimpiādē bija tāds uzdevums, kuru atrisināja vismaz 2 zēni un vismaz 4 meitenes.

B GRUPA

3.1.B1. Piecciparu skaitlis nesatur ciparu 0, ir pilns kvadrāts un paliek pilns kvadrāts arī tad, ja tam nosvītro gan vienu, gan divus, gan trīs pirmos ciparus. Kas tas ir par skaitli?

3.1.B2. Plaknē novilktas 3 taisnes un 3 riņķa līnijas. Kādā lielākajā daļu skaitā var tikt sadalīta plakne?

3.1.B3. Skat. A grupas 3. uzdevumu, kur jāpierāda, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2.$$

3.1.B4. Vai, divos dažādos veidos sagriežot taisnstūri A grupas 4. uzdevumā, griezumu garumu summas var atšķirties viena no otras?

3.1.B5. Grupā ir 13 cilvēki. Katrs draudzējas ar vismaz 9 citiem. Pierādiet: var atrast 4 cilvēkus šajā grupā, kas visi draudzējas savā starpā.

3.1.B6. Skat. A grupas 6. uzdevumu, kur jāpierāda: olimpiādē bija tāds uzdevums, kuru atrisināja vismaz 3 zēni un vismaz 3 meitenes.

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.2.A1. Saskaitot divus naturālus skaitļus, Jānis kļūdas dēļ vienam no tiem pierakstīja galā nulli un rezultāta 948 vietā ieguva rezultātu 2181. Kādus skaitļus Jānis saskaitīja?

3.2.A2. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kas dalās ar 2001 un satur savā pierakstā visus ciparus no 0 līdz 9 (dažus varbūt vairākkārt)?

3.2.A3. Vai vairāk ir ciparu visos naturālajos skaitļos no 1 līdz 1000 ieskaitot vai nuļļu visos naturālajos skaitļos no 1 līdz 10000 ieskaitot?

3.2.A4. Pierādiet: katru trijstūri var ar taisniem griezieniem sagriezt 4 gabalos, no kuriem var salikt divus trijstūrus, kas abi līdzīgi sākumā dotajam (t.i., pēc formas sakrīt ar to).

3.2.A5. Vienādmalu trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts M. Pierādiet: eksistē trijstūris, kura malu garumi ir MA, MB un MC.

3.2.A6. Rindā stāv n cilvēki. Ar vienu gājienu atļauts vai nu pašu labējo cilvēku nosūtīt uz kreiso galu, vai mainīt vietām abus labējos cilvēkus. Pierādīt: atkārtojot šādus gājienus, var cilvēkus pārkārtot patvaļīgā kārtībā.

B GRUPA

3.2.B1. Trīs rūķīši atrada naudas lādi ar dālderiem un sadalīja tos attiecībā $8:6:5$. Ja nauda būtu dalīta attiecībā $7:5:4$, tad viens rūķītis saņemtu par 25 dālderiem vairāk nekā patlaban. Cik dālderu saņēma katrs rūķītis?

3.2.B2. Pieci dažādi naturāli skaitļi ir tādi, ka katru četru reizinājums dalās ar piekto. Cik daudzi no šiem skaitļiem var būt pirmskaitļi?

3.2.B3. Sūnu ciemā ir tikai viena taisna iela, uz kuras atrodas autobusu pieturas. Ciemā darbojas 7 transporta firmas. Katras firmas autobusi kursē abos virzienos, bet apstājas tikai 6 pieturās (dažādām firmām šīs pieturas var būt dažādas). Ir zināms, ka no katras pieturas var aizbraukt uz katru citu (varbūt pārsēžoties). Kāds ir lielākais iespējamais pieturu skaits?

3.2.B4. Pierādiet: vienādmalu trijstūri var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros tā, lai tieši a)0, b)1, c)2 no tiem būtu vienādmalu trijstūri.

3.2.B5. Kādiem citiem trijstūriem, izņemot vienādmalu, arī ir pareizs A grupas 5. uzdevuma apgalvojums?

3.2.B6. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Piecām no tām masas ir vienādas, bet sestajai varbūt atšķiras. Doti arī svari ar skalu, uz kuras var nolasīt uz svariem uzlikto monētu kopējo masu. Kā ar 3 svēršanām noskaidrot monētu masas?

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.3.A1. Divu naturālu skaitļu pierakstos izmantoti tikai cipari 1; 4; 6; 9 (daži no tiem varbūt vairākas reizes). Vai viens no šiem skaitļiem var būt tieši 37 reizes lielāks par otru?

3.3.A2. Rokgrupas "Diženie kratekļi" pirmajā koncertā katra biļete maksāja 15 latus. Otrajā koncertā biļešu cenu samazināja. Rezultātā apmeklētāju skaits pieauga par 50%, bet ienākumi – par 25%. Cik maksāja biļete otrajā koncertā?

3.3.A3. Uzrakstīt 9 četrciparu skaitļus, no kuriem nekādi divi nesakrīt vairāk nekā vienā šķirā. Drīkst izmantot tikai ciparus 1, 2 un 3. Vai var uzrakstīt 10 tādus skaitļus?

3.3.A4. Nezinīša kalkulatorā nevar ievadīt ciparu 0, un tas nerāda ciparu 0 arī uz ekrāna. (Piemēram, reizinot ar šo kalkulatoru 12 un 9, uz ekrāna 108 vietā parādās 18.) Reizinot divus divciparu skaitļus, Nezinītis ieguva rezultātu 15. Kādus skaitļus viņš varēja reizināt?

3.3.A5. Kvadrāts sastāv no 100×100 rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Rūtiņas malas garums ir 1. Kvadrātu sagrieza mazākos kvadrātos tā, ka katra daļa satur nepāra skaitu rūtiņu. Katrai daļai atzīmēja centrālo rūtiņu. Pierādīt, ka atzīmēja vienādu skaitu balto un melno rūtiņu. Piezīme: ja daļa sastāv no vienas rūtiņas, tad šī vienīgā rūtiņa skaitās daļas centrālā rūtiņa.

3.3.A6. Cik taisnu leņķu var būt septiņstūrī?

B GRUPA

3.3.B1. Votivapas vienmēr melo, šillišallas vienmēr runā patiesību. Visi votivapas pazīst cits citu, visi šillišallas - tāpat. Ir tādi votivapas un šillišallas, kas pazīst viens otru. Gan katrs votivapa, gan katrs šillišalla apgalvo, ka starp viņa paziņām votivapu ir vairāk nekā šillišallu. Pierādiet, ka katrs votivapa pazīst katru šillišallu. (Ja A pazīst B, tad arī B pazīst A.)

3.3.B2. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 4; 8; 16. Ar vienu gājienu var nodzēst divus skaitļus un uzrakstīt vietā to starpību (no lielākā atņemot mazāko). Tā turpina, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis. Kāds tas var būt?

3.3.B3. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota. Katrai rūtiņai vismaz divas blakus rūtiņas ir tādā pašā krāsā kā viņa pati. Kāds ir lielākais iespējamais krāsu skaits? (Blakus rūtiņas ir tādas, kurām ir kopīga mala).

3.3.B4. Četru kubu šķautņu garumi ir 1; 2; 3 un 5. Kā tos salīmēt kopā, lai iegūtajam ķermenim virsmas laukums būtu iespējami mazs?

3.3.B5. Jānis, Andris un Pēteris risināja uzdevumus. Jānis atrisināja visvairāk uzdevumu, Pēteris – vismazāk. Par uzdevumu, kuru atrisināja visi 3 zēni, katrs no viņiem saņēma 0 punktus; par uzdevumu, kuru atrisināja 2 zēni, katrs no viņiem saņēma 1 punktu; par uzdevumu, kuru atrisināja tikai 1 zēns, viņš saņēma 2 punktus. Vai var gadīties, ka Jānis kopā saņēma vismazāk punktu, bet Pēteris – visvairāk?

3.3.B6. Vai eksistē 100 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību: katru divu skaitļu reizinājums dalās ar to summu?

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.4.A1. Jaungada sarīkojumā pārdeva konfektes "Murijuri" par 3 latiem kilogramā un konfektes "Mazakaza" par 5 latiem kilogramā; par vienām konfektēm ieņēma tikpat naudas, cik par otrām. Par kādu cenu būtu varēts pārdot šo konfekšu maisījumu, lai kopējais ienākums būtu tāds pats?

3.4.A2. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām; 14 no tām nokrāsotas melnas. Pierādīt, ka divām melnām rūtiņām ir kopīga mala.

3.4.A3. Ar cik nullēm beidzas visu naturālo skaitļu reizinājums no 1 līdz 2002 ieskaitot?

3.4.A4. Vai var plaknē atzīmēt 8 punktus un dažus no tiem savienot ar taisnes nogriežņiem tā, lai vienlaicīgi

a) katrs punkts būtu savienots ar tieši 3 citiem,

b) visi novilktie nogriežņi būtu ar garumu 1 cm,

c) nekādiem diviem novilktajiem nogriežņiem nebūtu citu kopīgu punktu kā vienīgi (varbūt!) galapunkti?

3.4.A5. Vai var atrast 4 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katru triju summa būtu kāda vesela skaitļa kvadrāts?

3.4.A6. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Kreisajā augšējā stūrī ierakstīts 3; labajā augšējā stūrī ierakstīts 9; centrā ierakstīts 2. Parādiet, ka var pārējās rūtiņās ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai vienlaicīgi

a) neviens ierakstītais skaitlis nepārsniegtu 20,

b) visi skaitļi tabulā būtu dažādi,

c) visās rindiņās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas,

d) abās diagonālēs ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi.

B GRUPA

3.4.B1. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 25, katrs tieši vienu reizi. Katrai rindiņai un katrai kolonnai aprēķināta ierakstīto skaitļu summa. Vai, saskaitot visas tās summas, kuras ir pāra skaitļi, var iegūt tādu pašu rezultātu kā saskaitot visas tās summas, kuras ir nepāra skaitļi?

3.4.B2. Vai var salikt izliektu daudzstūri no a) 5, b) 2002 plāksnītēm, kas visas ir vienādmalu trijstūra formā? Starp plāksnītēm var būt gan vienādas, gan dažādas; plāksnītes drīkst saskarties, bet nedrīkst pārklāties.

3.4.B3. Kāds ir A grupas 3. uzdevumā minētā reizinājuma pēdējais cipars, kurš nav 0?

3.4.B4. Kastes izmēri ir $7\text{cm}\times8\text{cm}\times9\text{cm}$. Vai šo kasti var piepildīt ar 126 klucīšiem, kuru izmēri ir $1\text{cm}\times2\text{cm}\times2\text{cm}$?

3.4.B5. Punkti A un B atrodas vienādmalu trijstūra iekšpusē. Pierādiet, ka A attālumu summa līdz trijstūra malām vienāda ar B attālumu summu līdz trijstūra malām. Centieties atrast vairāk nekā vienu pierādīšanas ceļu.

3.4.B6. Atrodiet visus tabulas aizpildījumus A grupas 6. uzdevumā un pierādiet, ka citu bez jūsu atrastajiem nav.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

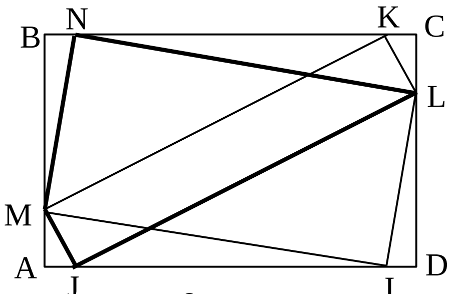
3.5.A1. Divi Ziemassvētku vecīši, nevarēdami sagaidīt tramvaju, sāka iet uz nākošo pieturu. Nogājuši trešdaļu ceļa, viņi atskatījās un ieraudzīja tramvaju nākam. Vecītis ar smagāko dāvanu maisu pagriezās atpakaļ, bet otrs turpināja ceļu. Abi sasniedza attiecīgās pieturvietas reizē ar tramvaju. Cik reizes tramvaja ātrums lielāks par Ziemassvētku vecīša ātrumu?

3.5.A2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kas tieši 2002 reizes lielāks par savu ciparu summu?

3.5.A3. Uz šķīvja ir 17 āboli. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties vai nu 5 vienas šķirnes ābolus, vai 5 dažādu šķirņu ābolus.

3.5.A4. Ap apaļu galdu sēž 12 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Katrs paziņoja savam kaimiņam pa labi: "Tu esi melis". Cik rūķīšu melo, cik runā patiesību?

3.5.A5. Dots, ka četrstūri ABCD, MNLI un MKLJ ir taisnstūri (skat. 8. zīm.). Pierādīt, ka abu pēdējo taisnstūru laukumu summa ir vienāda ar ABCD laukumu.



8. zīm

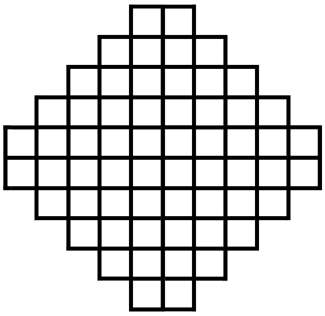
3.5.A6. Rūpnīca izgatavoja 2 vienādus alpīnista ķiveres paraugus. Ķiveres izturību pārbauda, metot tai virsū akmeņus ar masu 10 kg, 20 kg, 30 kg, ..., 350 kg, 360 kg. Konstruktorus interesē, kurš ir smagākais no šiem akmeņiem, kura triecienu ķivere vēl iztur. Ja ķivere kādu triecienu neiztur, tā salūzt un tālākās pārbaudēs nav lietojama. Kā ar 8 pārbaudēm noskaidrot vajadzīgo?

B GRUPA

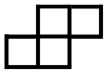
3.5.B1. Sniegbaltīte cienāja 7 rūķīšus ar piparkūkām. Rūķīši pēc kārtas pienāca pie galda un katrs paņēma pusi uz galda esošo piparkūku un vēl vienu piparkūku (piparkūkas netika lauztas). Kad visi rūķīši bija pa reizei pienākuši pie galda, uz tā nepalika neviena piparkūka. Cik piparkūku bija uz galda sākumā ?

3.5.B2. Gan a, gan 3a, gan 5a ir trīsciparu naturāli skaitļi, kas kopā satur visus nenulles ciparus. Kāds var būt a ?

3.5.B3. Vai 9. zīm. attēloto figūru var salikt no 15 tādām figūrām, kāda attēlota 10. zīm.?



9. zīm.



10. zīm.

3.5.B4. Sprīdītis ceļo triju rūķīšu pavadībā; visi rūķīši izskatās pilnīgi vienādi, un Sprīdītis tos nevar atšķirt. Viņš zina, ka divi rūķīši vienmēr runā patiesību, bet trešais dažreiz melo. Kādā brīdī Sprīdītis var izvēlēties vienu no trim ceļiem. Viņš zina, ka pa vienu no ceļiem dienas gājiena attālumā atrodas Laimīgā Zeme. Tomēr ne viņš, ne rūķīši nezina, kurš ir šis ceļš. Kā Sprīdītis var nokļūt Laimīgajā Zemē, patērējot ceļā ne vairāk kā 3 dienas?

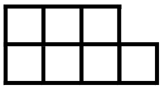
3.5.B5. Šaurleņķu trijstūrī ievilktā riņķa līnija tiek projicēta uz visām malām. Pierādīt, ka triju iegūto projekciju nogriežņu galapunkti visi seši atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3.5.B6. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Tā iekšpusē novietotas 11 taisnstūrveida plāksnītes, kas katra pārklāj 5 rūtiņas. Vai kvadrātā noteikti var ievietot vēl vienu šādu plāksnīti, kas nepārklājas ar jau ievietotajām?

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.6.A1. Taisnstūri var sagriezt tādās figūrās, kāda attēlota 11. zīm. (rūtiņas malas garums ir 1). Pierādīt, ka šo taisnstūri var sagriezt mazākos taisnstūros ar izmēriem 1 x 7.



11. zīm

3.6.A2. Vairākos grozos atrodas dzelteni un sarkani āboli. Katrā grozā saldo ābolu ir vairāk nekā skābo. Pierādiet: vai nu starp dzeltenajiem, vai starp sarkanajiem āboliem saldo ir vairāk nekā skābo.

3.6.A3. Papīra lapas izmēri ir 8×8 rūtiņas. To atļauts vairākas reizes salocīt un pēc tam sagriezt ar diviem taisniem griezieniem. Gan locījumi, gan griezieni iet pa rūtiņu līnijām; pēc pirmā griezienа daļas nedrīkst pārkārtot. Kādu lielāko gabalu skaitu var iegūt?

3.6.A4. No naturāla skaitļa n cipariem izveidoja divus jaunus naturālus skaitļus a un b (tika izmantoti visi skaitļa n cipari). Zināms, ka $a+b$ dalās ar 9. Pierādiet, ka n dalās ar 9.

3.6.A5. Mītiņā gatavojas uzstāties 10 politiķi. Katrs no viņiem savā runā apņēmies apvainot 4 citus politiķus un tūlīt pēc runas beigām aiziet, lai nebūtu jāatbild uz nepatīkamiem jautājumiem.
Pierādiet, ka mītiņa organizatori var noteikt tādu uzstāšanos secību, lai nevienam politiķim nebūtu jāuzklausa vairāk kā 4 kolēģu apvainojumi.

3.6.A6. Vai skaitli 1 var izsacīt kā a) 5, b) 2002 dažādiem nepāra naturāliem skaitļiem apgriezto lielumu summu?

B GRUPA

3.6.B1. Rindā izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n, katrs vienu reizi. Katram no tiem priekšā pieraksta "+" vai "-" zīmi. Iegūtās izteiksmes vērtība ir 2002. Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

3.6.B2. Naturālā četrciparu skaitlī m katru ciparu palielināja vai nu par 1, vai par 5. Ieguva skaitli 4m. Atrast m.

3.6.B3. Jānis aprēķināja visu to sešciparu naturālo skaitļu summu, kuru pierakstā kaut vienā vietā blakus atrodas cipari 1 un 3 (šādā secībā), bet Andris - visu to sešciparu naturālo skaitļu summu, kuru pierakstā kaut vienā vietā blakus atrodas cipari 3 un 1 (šādā secībā). Kurš no zēniem ieguva lielāku summu?

3.6.B4. Novilkti 8 horizontāli un 8 vertikāli nogriežņi. Vai var gadīties, ka katrs nogrieznis krusto tieši 7 citus, bet ar pārējiem nogriežņiem tam nav kopīgu punktu?

3.6.B5. Kvadrāts sastāv no 19×19 rūtiņām. Sākotnēji tieši 99 no tām ir melnas, pārējās – baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties rindiņu vai kolonnu, kurā melno rūtiņu ir vairāk nekā balto, un nokrāsot visas tur esošās baltās rūtiņas melnas. Vai var gadīties, ka, izpildot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, viss kvadrāts kļūs melns?

3.6.B6. Skat. A grupas 6. uzdevumu, ja saskaitāmo skaits ir a) 8, b) 9.

3.7. SEPTĪTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.7.A1. Četrstūris atrodas trijstūra iekšpusē. Vai četrstūra perimetrs var būt lielāks par trijstūra perimetru? Vai tas var būt divas reizes lielāks par trijstūra perimetru?

3.7.A2. Jānis uz 5 kartiņām uzrakstīja naturālos skaitļus no 1 līdz 5 (uz katras kartiņas - citu skaitli). Pēc tam viņš Andrim iedeva divas kartiņas, Bruno - vienu, bet abas pārējās kartiņas paslēpa.
Aplūkojis savas kartiņas, Andris saprata, ka uz Bruno kartiņas ir nepāra skaitlis. Kādi skaitļi ir uz Andra kartiņām? (Andris un Bruno viens otra kartiņas neredz, bet zina visu uzdevuma sākumā minēto informāciju.)

3.7.A3. Sešciparu skaitlis dalās ar 8. Kāda ir lielākā iespējamā tā ciparu summa?

3.7.A4. Dots, ka a un b - naturāli skaitļi un $a + b = 2002$. Pierādiet, ka $a \cdot b$ nedalās ar 2002.

3.7.A5. Kubs sastāv no $4 \times 4 \times 4$ vienādiem kubiņiem. Divus kubiņus, kas atrodas kuba pretējos stūros, izzāģēja. Vai atlikušo kuba daļu var sadalīt klucīšos ar izmēriem $1 \times 1 \times 2$?

3.7.A6. Riņķa līnijas garums ir 100 cm. No tiem 24 cm nokrāsoti melni, pārējie – balti. Vai noteikti var uzzīmēt kvadrātu, kura visas virsotnes atrodas baltos punktos?

B GRUPA

3.7.B1. Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa; kvadrāta malas garums ir 1. Skudra izgāja no vienas virsotnes un nogāja pa rūtiņu līnijām 6 vienības, nevienā punktā nenonākot vairāk kā vienu reizi. Cik ir dažādu iespējamu skudras trajektoriju? (Trajektorijas, kas iegūstamas viena no otras ar pārbīdi, pagriešanu un spoguļattēlošanu, skaitās vienādas.)

3.7.B2. Dots, ka n - naturāls skaitlis, bet skaitļi n^2 un n^3 kopā satur pa reizei katru no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 un nesatur nekādus citus ciparus. Atrast n.

3.7.B3. Naturālu skaitļu a un b mazākais kopīgais dalāmais ir 8 reizes lielāks par a un b lielāko kopīgo dalītāju. Vai viens no skaitļiem a un b noteikti dalās ar otru?

3.7.B4. Sūnu ciemā ir tikai viena taisna iela, uz kuras atrodas autobusu pieturas. Ciemā darbojas 7 transporta firmas. Katras firmas autobusi kursē abos virzienos, bet apstājas tikai 6 pieturās (dažādām firmām šīs pieturas var būt dažādas). Ir zināms, ka no katras pieturas nepārsēžoties var aizbraukt uz katru citu. Vai ciemā var būt 14 pieturas?

3.7.B5. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Uz tās novietoja kubu tā, ka viena kuba skaldne precīzi sakrita ar vienu no rūtiņām. Kubu sāka ripināt pa plakni, pakāpeniski "pārveļot" pāri kādai no atbalsta skaldnes šķautnēm. Kādā brīdī tika konstatēts, ka kubs balstās uz plaknes ar to pašu skaldni, ar kuru sākumā, un atrodas tai pašā vietā, kur sākumā. Vai var gadīties, ka šai brīdī kubs, salīdzinot ar sākotnējo pozīciju, pagriezts par 90° ap vertikālo asi, kas iet caur atbalsta skaldnes centru?

3.7.B6. Laimes māte vairākas reizes apciemoja trīs tēva dēlus un katru reizi iedeva vienam no viņiem a dālderus, otram – b dālderus un trešajam – c dālderus (zināms, ka a, b un c ir dažādi naturāli skaitļi robežās no 1 līdz 10; dažādās reizēs viens un tas pats apdāvinātais varbūt saņēma dažādas summas). Pēc kāda laika izrādījās, ka pirmais tēva dēls saņēmis 13 dālderus, otrais – 15 dālderus un trešais – 23 dālderus. Kādas var būt a, b, c vērtības?

4. 29. MĀCĪBU GADS (2002/ 2003)

4.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.1.A1. Profesora Cipariņa motocikla abi riteņi ir vienāda izmēra. Priekšējā riteņa riepa nolietojas pēc 20 000 km; aizmugurējā riteņa riepa nolietojas pēc 30 000 km. Braukšanas procesā riepas nolietojas vienmērīgi. Kādu lielāko attālumu Cipariņš var nobraukt ar divām riepām?

4.1.A2. Doti 5 papīra kvadrāti, katrs ar laukumu 1 cm^2. Vai var dažus no tiem ar taisnu griezienu sagriezt 2 gabalos tā, lai varētu salikt vienu kvadrātu ar laukumu 5 cm^2?

4.1.A3. Taisnstūris sastāv no 3×7 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visas rūtiņas, katru vienu reizi, sākot kustību vidējā rūtiņā un beidzot to kādā no stūriem?

4.1.A4. Jānītis nopirka vairākas rotaļlietas. Katra no tām maksāja veselu skaitu latu un 99 santīmus. Kopā Jānītis samaksāja Ls 26,76. Cik rotaļlietu Jānītis nopirka?

4.1.A5. Sniegbaltīte izcepa 20 kūkas, kas svēra 21g, 22g, ..., 40g. Katrs no septiņiem rūķīšiem vēlas apēst vismaz 80 gramus saldumu. Vai to var izdarīt, nedalot kūkas gabalos?

4.1.A6. Vai kādā gadā var nebūt nevienas piektdienas 13. datumā?

B GRUPA

4.1.B1. Atrisināt A grupas 1. uzdevumu, ja Cipariņam ir 3 riepas.

4.1.B2. Pēterītim ir 3 vienādi ķieģeļi un mērlente. Kā uzzināt ķieģeļa diagonāles garumu, veicot tikai vienu mērījumu un neizdarot nekādus aprēķinus?

4.1.B3. Taisnstūris A sastāv no 6×10 rūtiņām; katrā dzīvoja tieši viens rūķītis. Kādu dienu tie visi pārcēlās uz taisnstūri B, kas sastāv no 5×12 rūtiņām, pie tam atkal katrā rūtiņā apmetās tieši viens rūķītis. Vai var gadīties, ka katri divi rūķīši, kas dzīvoja A rūtiņās ar kopēju malu, ir pārcēlušies uz B rūtiņām ar kopēju malu?

4.1.B4. Atrast lielāko naturālo skaitli ar īpašību: tas pats ir pirmskaitlis, visi tā cipari ir pirmskaitļi un jebkuri pēc kārtas ņemti tā cipari (vienalga kādā skaitā) arī veido pirmskaitli.

4.1.B5. Turnīrā piedalījās 8 komandas. Katra ar katru spēlēja vienu reizi. Par uzvaru komanda iegūst 3 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu – 0 punktus. "Murmulīši" kopā ieguva mazāk punktu nekā jebkura cita komanda. Kāds varēja būt lielākais "Murmulīšu" iegūto punktu skaits?

4.1.B6. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai dažas rūtiņas var nokrāsot melnas tā, lai visos 9 rūtiņu kvadrātos būtu dažāds melno rūtiņu skaits?

4.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.2.A1. Pa apli uzrakstīti n skaitļi. Daži no tiem ir "+1", bet pārējie "-1". Sareizinot katrus divus blakus esošus skaitļus un iegūtos reizinājumus saskaitot, summā iegūst 0. Vai var būt, ka a) n = 8, b) n = 7?

4.2.A2. Vai kvadrātā, kura malas garums ir 1 cm, var ievilkt vairākus riņķus bez kopīgiem punktiem tā, lai to rādiusu summa būtu 2002?

4.2.A3. Vai skaitli $2\underbrace{00\ldots0}_{2002\text{ nulles}}2$ var iegūt, saskaitot triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu un citu triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumu?

4.2.A4. Apskatām veselus pozitīvus skaitļus no 1 līdz 8. Kādu rezultātu iegūst, ja saskaita visus šos skaitļus un visus to reizinājumus pa 2, pa 3, ..., pa 7?

4.2.A5. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis vai 0. Zināms, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 10. Kāda var būt mazākā visu 25 ierakstīto skaitļu summa?

4.2.A6. Dots 11° liels leņķis. Kā ar cirkuli un lineālu sadalīt to 11 vienādās daļās?

B GRUPA

4.2.B1. Skat. A grupas 1. uzdevumu, kurā jāpierāda, ka n noteikti dalās ar 4.

4.2.B2. Naturāls skaitlis a dalās ar 15, bet nedalās ar 27. Vai tam var būt tieši 101 dalītājs? (Apskatām tikai pozitīvus dalītājus, ieskaitot 1 un a.)

4.2.B3. Dotas 11 lādes. Tajās atrodas kaut kāds daudzums monētu. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkuras 3 lādes un pievienot tām pa vienai monētai. Vai noteikti var panākt, lai visās lādēs monētu skaits kļūtu vienāds?

4.2.B4. Tenisa turnīrā piedalās 6 spēlētāji. Katrs spēlē ar katru vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt, ka pēc turnīra beigām var atrast 2 tādus spēlētājus A un B, ka katrs no pārējiem zaudējis vai nu pret A, vai pret B.

4.2.B5. Pa apli pēc kārtas uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2002 ieskaitot. Jānis, sākot ar 1, izsvītro pēc kārtas katru otro no vēl neizsvītrotajiem (sākumā 1 atstāj, 2 izsvītro, 3 atstāj,...), kamēr paliek tikai viens neizsvītrots skaitlis. Kurš tas ir?

4.2.B6. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Viena rūtiņa no tā izgriezta. Pierādīt, ka atlikušo kvadrāta daļu var sagriezt 14 taisnstūros ar izmēriem 1×3 un divos no trim rūtiņām sastāvošos "stūrīšos".

4.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.3.A1. Vai eksistē 8 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 5? Vai eksistē 9 šādi naturāli skaitļi?

4.3.A2. Pa apli stāv 100 cilvēki; viens no tiem ir Sprīdītis. Visiem kopā ir 100 latu. Katram cilvēkam ir divas reizes mazāk naudas nekā viņa kaimiņam pa labi un pretī stāvošajam cilvēkam kopā. Cik naudas ir Sprīdītim?

4.3.A3. Pierādiet: katru daudzstūri var sagriezt tādos četrstūros, kam ir simetrijas ass.

4.3.A4. Vai eksistē tādi veseli skaitļi, kuru summa ir 1201, bet kubu summa ir a) 1999, b) 2000, c) 2002?

4.3.A5. No stieples izveidots kuba karkass. Pa to rāpo skudra, kas savu kustības virzienu maina tikai virsotnēs. Vai var gadīties, ka skudra 7 kuba virsotnēs nonāk pa 10 reizēm katrā, bet vienā virsotnē – 12 reizes?

4.3.A6. Sastādiet paši savu oriģinālu uzdevumu ar jaunā, 2003. gada, tematiku un atsūtiet mums to!

B GRUPA

4.3.B1. Rindā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2002 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var pasvītrot tā, lai katriem diviem pasvītrotajiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1?

4.3.B2. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir dažādas. Kā ar 7 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem sakārtot tās masu pieaugšanas secībā?

4.3.B3. Kādiem trijstūriem bisektrišu viduspunkti atrodas uz vienas taisnes?

4.3.B4. Ar vienu gājienu atļauts šaha galdiņā izvēlēties jebkuru taisnstūri, kas sastāv no veselām rūtiņām, un pārkrāsot tā iekšpusē esošās rūtiņas pretēji (melnas – par baltām, baltas – par melnām). Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visas rūtiņas būtu vienā krāsā?

4.3.B5. Konferencē satikās 10 valstu vadītāji. Pierādīt: vai nu starp tiem ir 3 tādi, kas visi pa pāriem savā starpā draudzējas, vai arī 4 tādi, no kuriem nekādi divi nedraudzējas savā starpā.

4.3.B6. Skatīt A grupas 6. uzdevumu.

4.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.4.A1. Uz kādas planētas lieto 2003 valodas. Kāds ir mazākais vārdnīcu skaits, ar kuru palīdzību no katras valodas var tulkot uz katru citu? (Pieļaujamas vairākkārtējas tulkošanas; katra vārdnīca ļauj tulkot tikai vienā virzienā).

4.4.A2. Dots, ka *a, b* un *c* – naturāli skaitļi. Pierādiet, ka $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ nav pirmskaitlis.

4.4.A3. Kvadrāta ABCD iekšpusē atrodas punkts P. Zināms, ka trijstūru APB, BPC un CPD perimetri ir attiecīgi 99 cm, 100 cm un 101 cm. Aprēķiniet DPA perimetru.

4.4.A4. Cik no 1 līdz 1000 ieskaitot ir naturālu skaitļu, kuru ciparu summa ir 3?

4.4.A5. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis *n* ar īpašību: naturālos skaitļus no 1 līdz *n* ieskaitot var sadalīt 2 grupās tā, ka nekādu divu vienas grupas skaitļu summa nav naturāla skaitļa kvadrāts?

4.4.A6. Volejbola turnīrā katra komanda spēlē ar katru citu tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Turnīru nobeidzot, "Milžiem" un "Gigantiem" bija vienāds uzvaru skaits. Pierādiet, ka var atrast tādas trīs komandas A, B, C, ka A uzvarēja spēlējot pret B, B – pret C un C –pret A.

B GRUPA

4.4.B1. Atrisiniet A grupas 1. uzdevumu, ja katra vārdnīca ļauj tulkot divos virzienos (piemēram, no latviešu valodas uz angļu un no angļu valodas uz latviešu).

4.4.B2. Ap galdu sēž vairāki zēni un meitenes. To vietu skaits, kur blakus sēž zēns un meitene, vienāds ar blakus sēdošo pāru "zēns – zēns" un "meitene – meitene" skaitu. (Brīvu vietu pie galda nav.) Pierādiet, ka kopējais bērnu skaits pie galda dalās ar 4. Vai zēnu un meiteņu skaitiem noteikti jābūt vienādiem?

4.4.B3. Kubs sastāv no $3\times3\times3$ vienādiem kubiņiem. Vai var katrā kubiņā ierakstīt burtu a, b vai c tā, lai katrā triju kubiņu veidotā "klucītī" ar izmēriem $1\times1\times3$ būtu ierakstīti visi 3 burti?

4.4.B4. No cik un kādiem cipariem sastāv summa $9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{2003}$, ja to pieraksta kā vienu skaitli?

4.4.B5. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un x^4+4y^4 ir pirmskaitlis. Atrast šo pirmskaitli.

4.4.B6. Taisnstūra plāksnē izzāģēti 2 vienādi apaļi caurumi. Kā atlikušo plāksnes daļu ar vienu taisnu griezienu sadalīt divās daļās ar vienādiem laukumiem?

4.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

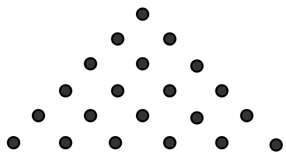
4.5.A1. Kādiem četrciparu naturāliem skaitļiem piemīt īpašība: reizinot tos ar 4, iegūst skaitli, kas uzrakstīts ar tiem pašiem cipariem kā x, tikai pretējā secībā?

4.5.A2. Sešstūra ABCDEF visas malas pieskaras vienai un tai pašai riņķa līnijai. Pierādīt, ka $AB + CD + EF = BC + DE + FA$

4.5.A3. Doti 8 vienādi kubiņi. Katram no tiem uz divām pretējām skaldnēm uzrakstīts 1, uz divām pretējām skaldnēm – 3 un uz divām pretējām skaldnēm – 5. No kubiņiem izveidots viens liels kubs tā, ka uz lielā kuba virsmas nekādos divos kvadrātiņos ar kopīgu malu nav uzrakstīti vienādi skaitļi. Kāda var būt visu uz lielā kuba virsmas redzamo skaitļu summa?

4.5.A4. Pierādīt, ka $(a-1)^{2003} + (b-2)^{2003} + ... + (h-8)^{2003}$ ir pāra skaitlis, ja a, b, c, ..., h ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 8.

4.5.A5. Uzzīmējiet slēgtu lauztu līniju, kuras virsotnes ir tieši 12. zīm. redzamie punkti. Dažādiem līnijas posmiem nedrīkst būt citu kopīgu punktu kā šīs virsotnes, un katra virsotne drīkst piederēt tikai 2 posmiem.



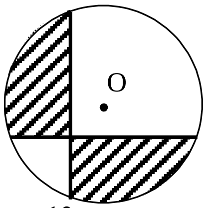
12. zīm.

4.5.A6. Kādā lielākajā skaitā daļu plakni var sadalīt 2 izliektu četrstūru kontūras?

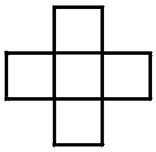
B GRUPA

4.5.B1. Triju naturālu skaitļu summa ir 2003. Vai skaitlis, ko iegūst, uzrakstot šos trīs skaitļus vienu otram galā, var dalīties ar 21?

4.5.B2. Riņķis, kura centrs ir O, ar divām perpendikulārām hordām sadalīts 4 daļās (sk. 13. zīm.). Vai lielāka ir iekrāsoto vai neiekrāsoto daļu laukumu summa?



13. zīm.



14. zīm.

4.5.B3. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu 14. zīm. parādīto figūru tajā jāiezīmē, lai nevienai citai tādai figūrai tur vairs nebūtu vietas?

4.5.B4. Sešas monētas sver attiecīgi 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g. Uz vienas no tām uzrakstīts “1 g”, uz vienas “2 g”, ..., uz vienas “6 g”. Kāds ir mazākais svēršanu skaits uz sviras svariem, ar kuru var noskaidrot, vai visi uzraksti ir pareizi?

4.5.B5. Uzzīmējiet 8 punktus ar īpašību: katru divu punktu veidotā nogriežņa vidusperpendikuls satur tieši 2 citus no šiem 8 punktiem. Neaizmirstiet pamatot, ka jūsu zīmējums apmierina uzdevuma prasības.

4.5.B6. Kādā lielākajā skaitā daļu plakni var sadalīt 3 izliektu četrstūru kontūras?

4.6. SESTĀ NODARBĪBA

4.6.1. Kāda ir 2003.gada visu datumu ciparu summa?
(*Uzdevuma autors – Vecpiebalgas lauku reģionālās ģimnāzijas 6. kl. pulciņš*)

4.6.2. Cik ir tādu naturālu skaitļu starp 1003 un 2003, kuru ciparu summa ir 14?
(*Uzdevuma autors – Vecpiebalgas lauku reģionālās ģimnāzijas 6. kl. pulciņš*)

4.6.3. Atrast visus naturālo skaitļu pārus, kuru kvadrātu starpība ir 203.
(*Uzdevuma autors – Antra Blauberga, Usmas pamatskola, 8. kl.*)

4.6.4. Juris spēlējās – lika klucīšus. Pirmajā rindā vienu, otrajā rindā – 2, trešajā 3, ceturtajā 5 utt. – katrā nākamajā rindā tik klucīšus, cik ir iepriekšējās divās rindās kopā. Cik pilnas rindas saliks Juris no 2003 klucīšiem un cik klucīšu paliks pāri? (*Uzdevuma autors – Andris Mednis, Gulbīša vidusskola, 6. kl.*)

4.6.5. Rīgas ostā atrodas 4 tvaikoņi. 2003. gada 1. janvārī plkst. 0:00 visi kuģi reizē devās jūrā. Pirmais tvaikonis ostā iegriežas ik pēc 4 nedēļām, otrais – pēc 8 nedēļām, trešais – pēc 12 nedēļām, ceturtais – 16 nedēļām. Kurā datumā pirmoreiz visi četri tvaikoņi ostā atkal atradīsies kopā?
(*Uzdevuma autors – Nataļja Semjonova, Daugavpils 10. vidusskola, 9. kl.*)

4.6.6. Lādē ir 2003 monētas. No tām 2002 ir vienādas masas, bet viena ir vieglāka. Vai ar 7 svēršanām var noteikt, kura ir vieglākā monēta? Svēršanas var veikt ar sviras svariem bez atsvariem.
(*Uzdevuma autors – Jurģis Brauers, Vecpiebalgas lauku reģionālā ģimnāzija, 9. kl.*)

5. 30. MĀCĪBU GADS (2003/ 2004)

5.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.1.A1. Profesors Cipariņš salasīja 25 sēnes – baravikas un gailenes. Lai kuras 12 sēnes izņemtu no groza, vismaz viena no tām ir gailene. Lai kuras 15 sēnes izņemtu no groza, vismaz viena no tām ir baravika. Cik baraviku un cik gaileņu salasīja profesors Cipariņš?

5.1.A2. Pierādiet, ka skaitļi $1^2+2^2+3^3+\ldots+78^2+79^2$ var izsacīt kā 75 dažādu naturālu skaitļu kvadrātu summu.

5.1.A3. Apskatām 2003 naturālus skaitļus 1, 11, 111, ..., $\underbrace{111\ldots1}_{2003}$. Cik daudzi no tiem dalās ar 7?

5.1.A4. Kvadrāts ar malas garumu 5 sadalīts vienādās kvadrātiskās rūtiņās ar malas garumu 1. Viena rūtiņa nokrāsota melna, bet nenokrāsotā kvadrāta daļa sagriezta taisnstūros ar izmēriem 1×3.
Kura rūtiņa var būt nokrāsota melna?

5.1.A5. Sešstūra virsotnes sadala riņķa līniju 6 vienādos lokos. Vai šo sešstūri var sagriezt **a)** sešos, **b)** piecos šaurleņķu trijstūros?

5.1.A6. Pāri tērcītei pārkritusi smilga. Pa smilgu no kreisā krasta uz labo attālumā 1 cm viena aiz otras dodas 3 skudras; 3 citas skudras tāpat dodas no labā krasta uz kreiso. Visu skudru ātrumi ir vienādi. Divām skudrām satiekoties, tās apgriežas un ar tādu pašu ātrumu dodas pretējos virzienos. Cik reizes skudras satiksies uz smilgas?

B GRUPA

5.1.B1. Saskaitot naturālu skaitli n ar tā ciparu summu, iegūst 2003. Kādas ir iespējamās n vērtības?

5.1.B2. Dots, ka $a^3+3ab^2=14$ un $b^3+3a^2b=13$. Aprēķināt izteiksmes a^2-b^2 vērtību.

5.1.B3. Četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums nedalās ar 5. Pierādiet, ka šo skaitļu summa noteikti dalās ar 5.

5.1.B4. Kongresā satikās m zinātnieki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši 3 citiem (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A). No katriem trim zinātniekiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Kāda ir mazākā iespējamā m vērtība?

5.1.B5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka taisnstūrī ar izmēriem $2 \times k$ var ievietot 2k + 1 apaļas monētas ar diametru 1? Monētas nedrīkst savā starpā pārklāties.

5.1.B6. Atrisiniet A grupas 6. uzdevumu, ja attālumi starp skudrām ir dažādi (bet ātrumi joprojām ir vienādi).

5.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.2.A1. Piecām vāverēm kopā ir 64 rieksti. Vienai no viņām ir 15 rieksti, citām – mazāk. Nekādām divām vāverēm nav vienāds riekstu skaits. Cik riekstu ir citām vāverēm?

5.2.A2. Cik ir tādu piecciparu naturālu skaitļu, kuriem pirmais cipars vienāds ar piekto, bet otrais – ar ceturto?

5.2.A3. Vai var katrai no 5 papīra lapām katrā pusē uzrakstīt pa vienam skaitlim tā, lai izpildītos sekojošais: katram veselam nenegatīvam n, kur $n \leq 31$, iespējams lapas novietot uz galda tā, lai uz augšu esošo skaitļu summa būtu n?

5.2.A4. Trijstūris sadalīts divos vienādos trijstūros. Pierādīt, ka tie abi ir taisnleņķa.

5.2.A5. Vai var ievietot izteiksmē 2:2 – 3:3 – 4:4 – 5:5 iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu lielāka par 50?

5.2.A6. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 64 (visi skaitļi dažādi), pie tam katri divi skaitļi, kuri atšķiras viens no otra par 1, ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.

Parādiet, ka skaitļus var ierakstīt tā, lai vienā diagonālē to summa būtu 88.

B GRUPA

5.2.B1. Plaknē novilktas 10 taisnes. Kāds lielākais kvadrātu daudzums var izveidoties?

5.2.B2. Naturāli skaitļi no 1 līdz 200 kaut kādā secībā izrakstīti rindā, katrs vienu reizi. Katriem trim pēc kārtas izrakstītiem skaitļiem atrodam to summu. Kāds lielākais daudzums šo summu var būt nepāra skaitļi?

5.2.B3. Dotas 3 baltas, 3 zaļas, 3 dzeltenas un 3 sarkanas kartītes. Vai var uz katras kartītes uzrakstīt pa skaitlim, lai izpildītos sekojošais: katram veselam nenegatīvam n, kur $n \leq 80$, var atrast 4 dažādu krāsu kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir n?

5.2.B4. Punkts D atrodas trijstūra ABC iekšpusē. Kur jāizvēlas punkts P, lai summa PA + PB + PC + PD būtu mazākā iespējamā?

5.2.B5. Dots, ka a, b, c, d – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2.$$

5.2.B6. Pierādīt: ierakstot skaitļus saskaņā ar A grupas 6. uzdevuma nosacījumiem, diagonālē ierakstīto skaitļu summa nevar būt mazāka par 88.

5.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.3.A1. Pa apli kaut kādā kārtībā stāv 2003 zēni un 2003 meitenes. Pierādīt, ka vismaz vienam bērnam abās pusēs blakus stāv meitenes.

5.3.A2. Vai eksistē tāds deviņciparu naturāls skaitlis, kas satur vismaz vienu ciparu 1, vismaz vienu ciparu 5 un vismaz vienu ciparu 7 un kam piemīt īpašība:

a) izsvītrojot visus ciparus 1, iegūtais skaitlis dalās ar 75,

b) izsvītrojot visus ciparus 5, iegūtais skaitlis dalās ar 71,

c) izsvītrojot visus ciparus 7, iegūtais skaitlis dalās ar 15?

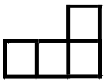
5.3.A3. **a)** Dots, ka $x^3 + y^3 > 0$. Vai noteikti $x + y > 0$?

b) Dots, ka $a^3 + b^3 + c^3 > 0$. Vai noteikti $a + b + c > 0$?

5.3.A4. Katram skolēnam klasē ir vismaz viens draugs (draudzene). Pierādīt, ka skolēni var sadalīties divās komandās tā, ka katram skolēnam otrā komandā būs vismaz viens draugs (draudzene).

5.3.A5. Vienpadsmit daļu skaitītājos un saucējos pa reizei izmantoti visi naturāli skaitļi no 1 līdz 22 ieskaitot. Kāds lielākais daudzums šo daļu var būt veseli skaitļi?

5.3.A6. Vai kvadrātu, kas sastāv no a) 12×12 rūtiņām, b)10×10 rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 15. zīmējumā?



15. zīm.

B GRUPA

5.3.B1. Skolā ir gan zēni, gan meitenes. Trešdaļai visu zēnu un sestdaļai visu meiteņu ir zilas acis. Vai var būt, ka zilas acis ir vismaz pusei visu skolēnu?

5.3.B2. Četrciparu naturālu skaitli A pareizināja ar tā ciparu summu un ieguva četrciparu skaitli B. Pēc tam B pareizināja ar tā ciparu summu un ieguva četrciparu skaitli C. Noskaidrojiet iespējamās A vērtības.

5.3.B3. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Dažas rūtiņas ir melnas. Visās rindiņās ir atšķirīgi melno rūtiņu daudzumi, un arī visās kolonnās ir atšķirīgi melno rūtiņu daudzumi. Cik melno rūtiņu var būt kvadrātā?

5.3.B4. Vai var atzīmēt plaknē 9 punktus tā, lai vismaz 18 attālumi starp diviem no tiem būtu savā starpā vienādi?

5.3.B5. Uz riņķa līnijas ar sarkanu krāsu atzīmēti 37 punkti; citu sarkanu punktu nav. Uzzīmēti 4 trijstūri ar sarkanām virsotnēm; nekādiem diviem trijstūriem nav kopīgu punktu (ne sarkanu, ne citādu). Pierādīt, ka var uzzīmēt vēl vienu trijstūri ar sarkanām virsotnēm atzīmētajos punktos, kuram nav kopīgu punktu ne ar vienu no jau uzzīmētajiem.

5.3.B6. Andris iedomājies divciparu naturālu skaitli. Juris viņam var uzdot jautājumu formā "Vai Tavs skaitlis ir x?" Ja x vai nu sakrīt ar Andra iedomāto skaitli, vai arī atšķiras no tā tikai vienā ciparā, pie tam tikai par 1, tad Andris atbild "silts"; pretējā gadījumā Andris atbild "auksts". Vai Juris var uzzināt Andra iedomāto skaitli, uzdodot a) 23 jautājumus, b) 18 jautājumus?

5.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.4.A1. Kurbads ar katru vāles sitienu sašķeļ vienu akmeni divās daļās. Cik sākumā bija akmeņu, ja pēc 17 sitieniem to bija 31?

5.4.A2. Vai var kubu bez slīdēšanas ripināt pa galda virsmu tā, lai tas, tieši vienu reizi pārvēlies katrai savai šķautnei, atgrieztos sākotnējā vietā?

5.4.A3. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; katrā rūtiņā ierakstīts pa skaitlim. Kvadrātu sauc par maģisku, ja visās rindiņās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas.

a) Vai eksistē maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

b) Vai eksistē maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10?

5.4.A4. Vai kvadrātu var sagriezt trijstūros tā, lai katram trijstūrim būtu kopīga malas daļa – nogrieznis ar tieši trim citiem?

5.4.A5. Kvadrāts sastāv no 1001×1001 rūtiņas; katras rūtiņas malas garums ir 1. Vai kvadrātu var sagriezt 2004 taisnstūros tā, lai visu taisnstūru diagonāļu garumi būtu vienādi savā starpā? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām.

5.4.A6. Andris apgalvo, ka var pasacīt, cik gadu ir jebkuram sarunu biedram, ja tas paziņos, kādus atlikumus dod meklējamais gadu skaits, dalot ar 2, ar 3 un ar 5. Kā Andris to var izdarīt?

B GRUPA

5.4.B1. Kādu ciparu var apzīmēt katrs burts, ja vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus un skaitlis aabbbcdddd ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

5.4.B2. Sienā iedzītas divas naglas. Uz tām jāuzkarina virves cilpa tā, lai, izvelkot jebkuru no abām naglām (otru neaiztiekot), cilpa nokristu. Vai to var izdarīt?

5.4.B3. Pierādīt: maģiskā kvadrātā (skat. A grupas 3. uzdevumu) kreisās kolonnas skaitļu kvadrātu summa vienāda ar labējās kolonnas skaitļu kvadrātu summu.

5.4.B4. Trijstūra iekšpusē ņemts punkts, kas ar taisnes nogriezni savienots ar visām virsotnēm un visu malu viduspunktiem. Apzīmēsim garāko nogriezni ar a, īsāko – ar b. Pierādīt, ka $a \geq 2b$.

5.4.B5. Doti sviras svari bez atsvariem un 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka dažas monētas sver x gramus, dažas – y gramus un x < y. Kā ar 4 svēršanām noskaidrot, kuras monētas sver x gramus un kuras – y gramus?

5.4.B6. Rindā izrakstīti 5 naturāli skaitļi. Ar vienu gājienu no diviem blakus esošiem skaitļiem var atņemt pa vieniniekam. Ir zināms, ka, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt rindu 1,0,0,0,0, bet var iegūt arī rindu 0,0,0,0,1. Pierādīt, ka var iegūt arī rindu 0,0,1,0,0.

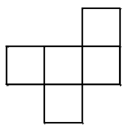
5.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.5.A1. Vāverīte noguldīja meža bankā kaut kādu daudzumu riekstu uz 3 gadiem. Katru gadu viņas riekstu skaits bankā saskaņā ar līgumu pieauga precīzi par 4 % (tātad par veselu skaitu riekstu). Tomēr pēc trim gadiem vāverītes riekstu skaits nebija sasniedzis 20000 vienības. Cik riekstu bija vāverītei sākumā?

5.5.A2. Katrā kuba virsotnē ierakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 8 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katrai šķautnei aprēķinām tās galos ierakstīto skaitļu starpību (no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Cik daudzas dažādas starpības var iegūt? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām nav.

5.5.A3. Vai ar tādām figūrām, kāda parādīta 16. zīm. (tā sastāv no 5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām), var pārklāt visu plakni bez caurumiem un figūru savstarpējās pārklāšanās?



16. zīm.

5.5.A4. Naturālu skaitli sauc par palindromu, ja tā decimālais pieraksts ir simetrisks. Piemēram, palindromi ir 22; 101; 4664 utt. Kāds ir lielākais iespējamais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu trīsciparu skaitļu, no kuriem neviens nav palindroms?

5.5.A5. Kvadrāts sastāv no 2004×2004 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tā "augšupejošās" diagonāles aizpildītas ar cipariem 1; 2; 3; 4 šādā secībā: 1. diagonāle (stūra rūtiņa) – ar 1.; 2.diagonāle – ar 2, 3.diagonāle – ar 3, 4.diagonāle ar 4, 5.diagonāle – ar 1, 6.diagonāle – ar 2 utt. (skat. 17. zīm.). Kurš cipars kvadrātā sastopams visvairāk reižu?

1	2	3	4	1	2	3	4	1	
2	3	4	1	2	3	4	1		
3	4	1	2	3	4	1			
4	1	2	3	4	1				
1	2	3	4	1					
2	3	4	1						
3	4	1							
4	1								
1									

17. zīm.

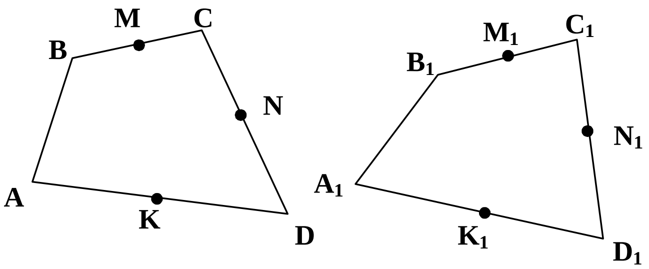
5.5.A6. Dotas divas auklas. Zināms, ka, aizdedzinot no viena gala, katra aukla degs tieši 1 stundu, bet degšanas process var būt ļoti nevienmērīgs. Kā, izmantojot šīs auklas, izmērīt 45 minūšu garu laika intervālu?

B GRUPA

5.5.B1. Naturāli skaitļi no 1 līdz 12 ieskaitot sadalīti divās daļās. Izrādījās, ka vienas daļas skaitļu reizinājums dalās ar otras daļas skaitļu reizinājumu. Kāda ir mazākā iespējamā dalījuma vērtība?

5.5.B2. Ja n - naturāls skaitlis, tad ar n! saprotam visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājumu. Piemēram, 1! = 1; $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$; $6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$.
Pierādīt, ka katram naturālam n pastāv vienādība $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

5.5.B3. Par četrstūriem ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ zināms, ka tie abi ir izliekti un $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ un $DA = D_1A_1$. Punkti M, N, K, M_1, N_1, K_1 ir atbilstošo malu viduspunkti (skat. 18. zīm.). Vai var būt, ka $\angle MNK$ ir šaurs, bet $\angle M_1N_1K_1$ ir plats?



18. zīm.

5.5.B4. Dotas 8 monētas. Sešas no tām ir ar vienādām masām, viena – smagāka, bet viena – vieglāka. Vieglākās un smagākās monētas masa kopā vienāda ar divu "parasto" monētu masu.
Vai ar 5 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast gan vieglāko, gan smagāko monētu?

5.5.B5. Dots, ka $x > y > z$.
Pierādīt, ka $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) > 0$.

5.5.B6. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).
Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:
* abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
* pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi taisnleņķa, vai abi platleņķa.

5.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.6.A1. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi, bet a + b, a + c un b + c ir pirmskaitļi. Cik no skaitļiem a, b, c, a + b, a + c, b + c var būt dažādi?

5.6.A2. Skaitļus no 1 līdz 9 jāieraksta 3×3 rūtiņu kvadrātā pa vienam katrā rūtiņā tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas. Vai to var izdarīt?

5.6.A3. Cik dažādu diagonāļu krustpunktu var būt piecstūrim?

5.6.A4. Uz katras kuba skaldnes uzrakstīts pa skaitlim; tie visi ir dažādi. Katrai kuba šķautnei aprēķinām to skaitļu starpību, kas atrodas tai abās pusēs (no lielākā skaitļa atņemam mazāko). Pierādīt, ka iegūtās starpības var sadalīt divās grupās pa sešām tā, ka abu grupu summas vienādas savā starpā.

5.6.A5. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var 16 rūtiņu centrus nokrāsot baltus un 16 – melnus tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē būtu vienāds skaits melno un balto centru? (Apskatām tikai divas "garās" diagonāles.)

5.6.A6. Skaitli sauc par simetrisku, ja tā pieraksts nemainās, izlasot to no otra gala. Piemēram, simetriski ir skaitļi 131; 88; 4 utt. Uz papīra lentas rindā uzrakstīti 250 cipari, katrs no kuriem ir vai nu 1, vai 2. Pierādīt: lentu var sagriezt ne vairāk kā 100 gabalos tā, lai uz katra gabala būtu uzrakstīts simetrisks skaitlis.

B GRUPA

5.6.B1. Vai divu naturālu skaitļu mazākais kopējais dalāmais var būt vienāds ar to summu?

5.6.B2. Naturāls skaitlis dalās ar 99999. Pierādīt, ka vismaz 5 tā cipari nav nulles.

5.6.B3. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā – cits skaitlis). Ja divu skaitļu starpība ir 1, tad tie ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu. Kāds lielākais pirmskaitļu daudzums var atrasties vienā rindā?

5.6.B4. Regulārs 99-stūris sadalīts trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka starp šiem trijstūriem ir vismaz a) 2, b) 3 vienādsānu.

5.6.B5. Plaknē novilktas 30 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Pierādīt, ka no apgabaliem, kuros taisnes sadala plakni, vismaz a) 10, b) 20 ir trijstūri.
(Piezīme: mēs apskatām tikai apgabalus, kas paši nesastāv no sīkākām daļām.)

5.6.B6. Uz galda atrodas 100 konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Ar vienu gājienu drīkst apēst 1, 2, 3, 4 vai 5 konfektes, bet nedrīkst ēst tik konfekšu, cik ar savu iepriekšējo gājienu apēdis pretinieks. Uzvar tas, kas apēd pēdējo konfekti. Kas uzvar, pareizi spēlējot – pirmais vai otrais spēlētājs?

6. 31. MĀCĪBU GADS (2004/ 2005)

6.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.1.A1. Cik no 1 līdz 2004 ir tādu naturālu skaitļu, kas dalās ar 4 un kuru pierakstā nav sastopams cipars "4"?

6.1.A2. Aprēķināt izteiksmes
$2004^2-2003^2+2002^2-2001^2+\ldots+4^2-3^2+2^1-1^2$ vērtību.

6.1.A3. Uz riņķa līnijas atzīmēti 17 punkti, kas to sadala 17 vienādos lokos. Daži no šiem punktiem savā starpā savienoti ar taisnes nogriežņiem tā, ka rodas slēgta lauzta līnija, kurai ir 17 virsotnes – minētie punkti.

Pierādīt, ka var atrast trīs šīs lauztās līnijas posmus ar vienādiem garumiem.

6.1.A4. Jānītis uzrakstījis uz tāfeles 5 naturālus skaitļus. Katru trīs uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis. Vai var gadīties, ka kāds no Jānīša uzrakstītajiem skaitļiem ir nepāra?

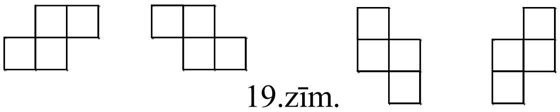
6.1.A5. Katram vairākciparu naturālam skaitlim A var atrast tā ciparu reizinājumu; iegūtajam rezultātam atkal var atrast tā ciparu reizinājumu utt., kamēr iegūst viencipara skaitli. Šo rezultātu sauksim par skaitļa A nospiedumu.

Kāds ir lielākais skaitlis A, kuram visi cipari dažādi un kura nospiedums nav 0?

6.1.A6. Klasē katrs zēns draudzējas ar 3 meitenēm un katra meitene – ar 3 zēniem. Vai zēnu skaits klasē var atšķirties no meiteņu skaita?

B GRUPA

6.1.B1. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Pierādiet: rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 64 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai katrā tādā figūrā, kādas parādītas 19. zīm., ierakstīto skaitļu summa dalītos ar 4.



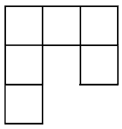
19.zīm.

6.1.B2. Vai skaitlis $2004^2+2005^2+2004^2\cdot 2005^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

6.1.B3. Trijstūrī ABC katra mediāna ir vai nu 4 cm, vai 10 cm gara. Ir zināms, ka divu mediānu garumu summa ir 14 cm. Cik gara ir trešā mediāna?

6.1.B4. Konferencē ar referātiem uzstājās 12 zinātnieki. Katrs zinātnieks noklausījās 5 kolēģu referātus. Vai noteikti var atrast tādus divus zinātniekus, kas abi klausījušies viens otru? Vai tādus noteikti var atrast, ja katrs zinātnieks noklausījās 6 kolēģu referātus?

6.1.B5. Par āķi sauc figūru, kas redzama 20. zīm. (tā var būt novietota arī citādi). Rūtiņas malas garums ir 1.



20. zīm.

Kādu izmēru taisnstūrus var sagriezt āķos?

6.1.B6. Skaitli sauc par interesantu, ja tā cipari ir pārmaiņus pāra un nepāra. Piemēram, interesanti ir skaitļi 12345, 6143 utt.

Pierādiet: ja naturāls skaitlis n nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad eksistē tāds interesants skaitlis, kas dalās ar n.

6.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.2.A1. Neviens no skaitļiem a, b, c, d, e nav 0. Vai var gadīties, ka katram no vienādojumiem $ax+b=0$, $bx+c=0$, $cx+d=0$, $dx+e=0$ un $ex+a=0$ sakne ir skaitlis, kas lielāks par (-1) un mazāks par 1?

6.2.A2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *x* un *y*, ka $x^2+y^2=1003$?

6.2.A3. Dots, ka punkti A, X, C, Y šajā secībā atrodas uz vienas taisnes, B nepieder šai taisnei, BA = BC un AX = CY. Pierādīt, ka BA + BC < BX + BY.

6.2.A4. Vienādsānu trijstūrī katra mala sadalīta 7 vienādos nogriežņos. Caur dalījuma punktiem vilktas taisnes paralēli trijstūra malām; trijstūris sadalās 49 mazos vienādmalu trijstūrīšos. Andris un Bruno pamīšus zīmē pa vienai izliektai slēgtai lauztai līnijai, kam visas malas iet pa mazo trijstūrīšu malām (pirmais zīmē Andris) tā, ka dažādām līnijām nav kopīgu punktu. Kas nevar uzzīmēt kārtējo līniju, zaudē. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

6.2.A5. Rindā stāv 8 skolēni. Ar vienu gājienu divus blakusesošus skolēnus var mainīt vietām. Jāpanāk, lai katrs skolēns vismaz reizi būtu atradies gan vienā, gan otrā rindas galā. Pierādīt, ka ar 33 gājieniem nepietiek.

6.2.A6. Kvadrāts sadalīts 8×8 rūtiņās. Dažas no tām nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši 1 melna rūtiņa. Sadalām kvadrātu 4 vienādos mazākos kvadrātos un katram no tiem izskaitām melno rūtiņu daudzumu tajā. Pieņemsim, ka esam ieguvuši *x* dažādus skaitļus. Kāds var būt x?

B GRUPA

6.2.B1. Jānis, Aivars un Didzis ir vienāda auguma. Vienam uz krūtīm ir numurs 1, otram – numurs 3, trešajam – numurs 4. Vai zēnus var novietot rindā tā, lai izveidotos skaitlis, kas dalās ar 9? (Nekādus papildus pierakstus uz numuru kartītēm izdarīt nedrīkst; nedrīkst pievienot arī nekādus citus papildelementus.)

6.2.B2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *x* un *y*, ka $x^2 + y^2 = 100000000003$?

6.2.B3. Trijstūrī ABC visas malas ir dažāda garuma, BC – garākā no tām. Uz malas BC ņemts punkts M. Pierādīt: A attālums līdz taisnei BC ir mazāks par punkta M attālumu summu līdz taisnēm AB un AC.

6.2.B4. Uz tāfeles uzrakstīti 10 veseli skaitļi, kuru summa ir 0. Ar vienu gājienu var vai nu 3 skaitļiem mainīt zīmes uz pretējām, vai visus skaitļus samazināt par 1. Vai noteikti var panākt situāciju, kad uz tāfeles ir 10 nulles?

6.2.B5. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var sasniegt A grupas 5. uzdevumā minēto mērķi?

6.2.B6. Kvadrātiska tabula sastāv no 16×16 rūtiņām. Tās rindiņas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 16 no augšas uz leju, bet kolonnas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 16 no kreisās uz labo pusi. Tabula kaut kā sadalīta taisnstūros ar izmēriem 1×4. Katrā vertikālā taisnstūrī ieraksta tās kolonnas numuru, kurā tas atrodas; katrā horizontālā taisnstūrī ieraksta tās rindiņas numuru, kurā tas atrodas. Pierādīt, ka visu ierakstīto numuru summa dalās ar 4.

6.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.3.A1. Uz tāfeles uzrakstīti 4 skaitļi. Andris vienu no tiem palielināja par 10%, otru – par 20%, trešo skaitli viņš samazināja par 10%, bet ceturto – par 20%. Vai var gadīties, ka rezultātā Andris ieguva tos pašus 4 skaitļus, kas uz tāfeles atradās sākumā?

6.3.A2. Vai var uz taisnes atlikt punktus A, B, C, D, E, F (varbūt citā secībā) tā, ka AB = 1, BC = 3, CD = 5, DE = 7, EF = 9, FA = 11?

6.3.A3. Uz tāfeles sākotnēji uzrakstīti skaitļi 160 un 167. Atļauts izdarīt šādus pārveidojumus: ja uz tāfeles uzrakstīti divi skaitļi a un b, tad drīkst vai nu a aizstāt ar a - b, vai b aizstāt ar b - a. Vai iespējams panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos skaitļi 18 un 22?

6.3.A4. Kāds ir mazākais saskaitāmo daudzums, kuru summa ir 2004 un katrs no tiem ir vai nu kāda naturāla skaitļa kvadrāts, vai kāda naturāla skaitļa kubs?

6.3.A5. Andrim jāsadala 100 konfektes četrās kaudzēs (katrā kaudzē – vismaz viena konfekte). Pēc tam Pēteris norādīs uz divām kaudzēm, un Andris no vienas no tām varēs apēst tik daudz konfekšu, lai abās Pētera norādītajās kaudzēs paliktu vienādi konfekšu daudzumi.
Kādu lielāko daudzumu konfekšu Andris var sev nodrošināt?

6.3.A6. Ja a – pozitīvs skaitlis, tad ar $\{a\}$ apzīmējam tā daļveida daļu. Piemēram, $\left\{2\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$; $\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$; $\{3\}=0$.

Atrodi mazāko pozitīvo skaitli *a*, kuram pastāv vienādība $\{a^2\}-\{a\}^2=\frac{1}{2004}$.

B GRUPA

6.3.B1. Pierādīt, ka $2004\cdot 2006^3-2005\cdot 2003^3$ ir vesela skaitļa kubs.

6.3.B2. Uz katras no deviņām kartītēm uzrakstīts naturāls skaitlis. Vismaz diviem no tiem pēdējie cipari ir dažādi. Pierādīt: var izvēlēties dažas kartītes (varbūt vienu pašu) tā, ka uz izvēlētajām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa dalās ar 10.

6.3.B3. Vai regulāru sešstūri var sagriezt trīs daļās tā, lai no šīm daļām varētu salikt trijstūri, kam viens leņķis ir 60^o liels, bet divu malu garumi attiecas kā 3:2? Saliekot daļas nedrīkst pārklāties.

6.3.B4. Rindā kaut kādā secībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts vai nu mainīt vietām divus skaitļus, vai arī cikliski mainīt vietām trīs skaitļus (t.i., a novietot b vietā, b novietot c vietā un c novietot a vietā). Pierādīt: ar 50 gājieniem var panākt, lai visi 100 skaitļi būtu izkārtoti augošā secībā.

6.3.B5. Desmit rūķīši rīko apspriedes. Viņi nolēmuši ievērot šādus noteikumus:

• katrā apspriedē jāpiedalās vismaz vienam rūķītim,

• nekādās divās apspriedēs dalībnieku sastāvs nedrīkst būt viens un tas pats,

• ja apspriede A notiek vēlāk nekā apspriede B, tad apspriedē A jāpiedalās vismaz vienam no tiem rūķīšiem , kas piedalījās apspriedē B,

• neviena apspriede (izņemot pirmo) nesākas, pirms nav beigusies iepriekšējā.

Kāds ir lielākais apspriežu skaits, ko rūķīši var sarīkot?

6.3.B6. Tabula sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi) tā, ka n-tās rindiņas skaitļu summa vienāda ar n-tās kolonnas skaitļu reizinājumu (n = 1; 2; ...; 8)?

6.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.4.A1. Aija, Maija un Paija uz Ziemassvētkiem nosūtīja cita citai vairākas kartiņas. Visas nosūtītās kartiņas tika saņemtas. Aija kopā nosūtīja 6 kartiņas. Maija kopā saņēma 10 kartiņas. Paija saņēma tikpat kartiņas, cik nosūtīja.

Pierādiet, ka Maija un Paija viena otrai kopā nosūtīja vismaz 8 kartiņas.

6.4.A2. Zināms, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam $a-3b=13$ un a dalās ar b. Kādi var būt a un b?

6.4.A3. Plaknē novilktas 9 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs no tām neiet caur vienu punktu. Pierādiet, ka vismaz viens no apgabaliem, kuros šīs taisnes sadala plakni, ir trijstūris.

6.4.A4. Uz 8 pēc ārējā izskata vienādiem atsvariem norādītas masas 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g. Zināms, ka septiņiem atsvariem to masas norādītas pareizi, bet viena atsvara masa ir par 1 g lielāka, nekā norādīts. Doti arī sviras svari; nekādu citu atsvaru nav. Kā ar 2 svēršanām noskaidrot, kura atsvara masa uzrādīta nepareizi?

6.4.A5. Sabojātam pulkstenim leņķis starp tā stundu un minūšu rādītājiem nemainās, bet ciparnīca brīvi griežas ap centru. Pierādiet: ciparnīcu var tā pagriezt, ka pulkstenis rāda laiku starp 15^{00} un 16^{15}.

6.4.A6. Dots, ka $3\le x\le 4$ un $3\le y\le 4$. Pierādīt, ka

$$(4-x)^2+(x-y)^2+(4-y)^2 \le 2$$

B GRUPA

6.4.B1. Tabula sastāv no 4×7 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu skaitlis 1, vai skaitlis 2. Vai var gadīties, ka gan katrā rindiņā, gan katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 5?

6.4.B2. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kas nav pirmskaitlis. Zināms, ka tā otrā lielākā dalītāja un trešā lielākā dalītāja summa ir 499. Kāds var būt n?

6.4.B3. Skat. A grupas 3. uzdevumu, kurā jāpierāda, ka ir vismaz 6 trijstūri.

6.4.B4. Ap apaļu galdu sēž 8 rūķīši, katram ir 9 zelta gabali. Ik minūti tieši viens rūķītis iedod vienu zelta gabalu savam kaimiņam pa labi. Pēc vairāk nekā 1000 minūtēm 1., 3., 5., un 7. rūķīšiem katram bija pa 18 zelta gabaliem.
Vai var gadīties, ka kāds rūķītis ne reizi nav devis zelta gabalu savam kaimiņam?

6.4.B5. Doti 5 stienīši, katrs 1 m garš. Katru stienīti salauza 5 gabalos. Pierādīt: no iegūtajiem 25 gabaliem var izvēlēties trīs tādus, no kuriem kā no malām var izveidot trijstūri.

6.4.B6. Kvadrāts sastāv no 8×8 kvadrātiskām rūtiņām. Tieši 8 rūtiņas nokrāsotas. Pierādīt: eksistē taisnstūris, kurā nav nevienas iekrāsotas rūtiņas un kura apkārtmērs vienāds ar 16 rūtiņas malu garumiem.

6.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.5.A1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļi n un n^2 kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi?

6.5.A2. Vai var pa apli izrakstīt 5 naturālus skaitļus tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu attiecība būtu pirmskaitlis? (Lielāko skaitli dalām ar mazāko).

6.5.A3. Izdomājiet kaut vienu veidu, kā plaknē novietot 6 punktus, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:
• ne uz vienas taisnes nav vairāk par 4 punktiem.
• ja A, B, C, D – jebkuri 4 no novietotajiem punktiem, tad nogriežņi AB un CD nekrustojas (tie drīkst daļēji uzklāties viens otram).

6.5.A4. Uz 2005 kartiņām uzrakstīts pa skaitlim; starp tiem var būt arī vienādi. Ir zināms: lai kādas trīs kartiņas izvēlētos, uz tām uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais arī uzrakstīts uz kādas no 2005 kartiņām. Pierādiet, ka uz visām kartiņām uzrakstīts viens un tas pats skaitlis.

6.5.A5. Kādu lielāko vērtību var pieņemt divu četrciparu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs, ja visi astoņi šo skaitļu pierakstā izmantotie cipari ir dažādi?

6.5.A6. Rindā cits citam blakus ar seju pret skolotāju stāv 30 pirmklasnieki. Skolotājs komandē: "Pa labi!". Daļa pirmklasnieku pagriežas pa labi, daļa – pa kreisi. Pēc tam ik pēc sekundes katri divi pirmklasnieki, kas stāv ar seju viens pret otru, apgriežas. Pierādiet, ka kustība rindā kādreiz beigsies.

B GRUPA

6.5.B1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļi n, n^2 un n^3 kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi?

6.5.B2. Vai skaitļus 1; 2; 3; 4; 5 var tā apzīmēt ar burtiem a; b; c; d; e, ka pastāv vienādība

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)| =$$
$$= |(a-c)(b-d)(c-e)(d-a)(e-b)|?$$

6.5.B3. Izdomājiet, kā taisnstūri ar izmēriem 32×33 sagriezt 9 dažādos kvadrātos.

6.5.B4. Karaļa dārgumu lāde aizslēgta ar 3 dažādām atslēgām. To apsargā 5 sargi; katru dienu darbā ierodas tikai 3 no tiem.
Kādu mazāko atslēgu daudzumu jāizgatavo un kā tās jāsadala starp sargiem, lai lādi noteikti varētu atslēgt neatkarīgi no tā, kuri 3 sargi ierodas darbā?

6.5.B5. No 28 skaistuma konkursa dalībniecēm katra apskauž augstākais vienu citu. Pierādīt: var izvēlēties 10 skaistules tā, ka neviena no tām neapskauž nevienu citu izvēlēto.

6.5.B6. Katrs klases skolēns atnāca uz sarīkojumu, brīdi tajā uzkavējās un aizgāja. Zināms, ka katrs zēns satika sarīkojumā visas meitenes. Pierādiet: vai nu bija tāds brīdis, kad vienlaicīgi visi zēni bija sarīkojumā, vai arī bija tāds brīdis, kad vienlaicīgi visas meitenes bija sarīkojumā.

6.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.6.A1. Visi veselie skaitļi no 0 līdz 9 ieskaitot uzrakstīti uz riņķa līnijas, katrs vienu reizi. Vai var gadīties, ka nekādu 3 pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nav lielāka par 15?

6.6.A2. Trīs dažādiem naturāliem skaitļiem a, b, c piemīt īpašība: gan $a \cdot b$, gan $a \cdot c$, gan $b \cdot c$ ir naturālu skaitļu kvadrāti. Cik no skaitļiem a, b, c paši var būt naturālu skaitļu kvadrāti?

6.6.A3. Trijstūrī ABC vienas mediānas garums ir 3 cm, bet otras mediānas garums ir 6 cm. Kādās robežās var mainīties ABC laukums?

6.6.A4. Kvadrāts sastāv no 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Parādiet, ka 13 rūtiņas var nokrāsot melnas, lai būtu spēkā īpašība: lai kā arī sadalītu kvadrātu divos taisnstūros, kas katrs sastāv no veselām rūtiņām, vismaz vienā taisnstūrī būs ne mazāk par 10 melnām rūtiņām.

6.6.A5. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi a, b, c un d, ka $a + b + c + d = 2005$ un $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2005$?

6.6.A6. Atrast decimāldaļskaitļa $\frac{2005}{2^{2005}}$ trešo ciparu no beigām.

B GRUPA

6.6.B1. Skat. A grupas 1. uzdevumu, ja neviena no apskatāmajām summām nedrīkst būt lielāka par 14.

6.6.B2. Skaitli 180 jāsadala trīs naturālos saskaitāmajos, kas proporcionāli trim viens otram sekojošiem veseliem skaitļiem. Cik šādu sadalījumu var iegūt?

6.6.B3. Vai taisnība, ka katram četrciparu skaitlim, kas nedalās ar 7, var izmainīt simtu ciparu tā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 7?

6.6.B4. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis n. No tā pieraksta ar vienu gājienu var izdzēst divus blakus stāvošus ciparus, kam ir dažāda paritāte (atlikušos ciparus pēc tam sabīda kopā). Zināms, ka, atkārtojot šādus gājienus, no n var iegūt gan skaitli 422, gan skaitli 664. Vai skaitļa n pierakstā var būt tikai viens četrinieks?

6.6.B5. Vai A grupas 4. uzdevumā minēto var sasniegt, nokrāsojot melnas 12 rūtiņas?

6.6.B6. Rindā stāv vairāki rūķīši. Katram galvā ir balta vai sarkana cepurīte (ir vismaz viena katras krāsas cepurīte). Ir zināms: ja starp rūķīšiem A un B stāv vai nu 10, vai 15 citi rūķīši, tad A un B ir vienādas krāsas cepurītes. Kāds ir lielākais iespējamais rūķīšu skaits rindā?

7. 32. MĀCĪBU GADS (2005/ 2006)

7.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.1.A1. Triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums ir 12144. Atrast šos skaitļus.

7.1.A2. Vai var plaknē atzīmēt 6 punktus tā, lai no katriem trim atzīmētajiem punktiem viens atrastos vienādos attālumos no abiem pārējiem?

7.1.A3. Rindā uzrakstīti 7 veseli skaitļi. Katrs nākošais ir lielāks par iepriekšējo, pie tam visas starpības starp blakus uzrakstītiem skaitļiem ir vienādas savā starpā. Zināms, ka 1., 3., 5. un 7. skaitļa summa vienāda ar 2., 4. un 6. skaitļa summu. Aprēķināt visu uzrakstīto skaitļu summu.

7.1.A4. Trijstūra katra mala ir vismaz 10 cm gara. Ar centru katrā trijstūra virsotnē uzzīmēts melns riņķis, kura laukums ir 1 cm^2. Kāds ir lielākais iespējamais melnā krāsā nokrāsotās trijstūra daļas laukums?

7.1.A5. Divi spēlētāji burtnīcas lapā pamīšus krāso pa vienai rūtiņai: pirmais – baltā krāsā, otrais – sarkanā. Spēles mērķis ir nokrāsot „savā” krāsā kvadrātu, kas sastāv no 2×2 rūtiņām. Vai šajā spēlē iespējams noteikti uzvarēt, kaut arī pretinieks cenšas traucēt?

7.1.A6. Piecos maisos katrā ir 10 monētas. Četros maisos visas monētas ir vienādas, bet piektajā maisā katra monēta ir par 1 gramu vieglāka nekā monētas pārējos maisos. Doti svari ar 2 svaru kausiem; iespējams nolasīt uz kausiem uzlikto smagumu starpību. Cik tieši sver katra monēta, nav zināms. Vai ar vienu svēršanu var uzzināt, kurā maisā ir vieglākās monētas?

B GRUPA

7.1.B1. Dots, ka a, b, c ir pirmskaitļi, $a + b + c = 38$ un $ab + ac + bc = 395$. Atrodiet šos pirmskaitļus.

7.1.B2. Trijstūra mediānu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm. Aprēķināt trijstūra laukumu.

7.1.B3. Dots, ka $xy + z = xz + y = yz + x$. Pierādīt, ka $(x - y)(x - z)(y - z) = 0$.

7.1.B4. Vai eksistē tāds izliekts 7-stūris, kuram katra diagonāle ir perpendikulāra kādai citai šī 7-stūra diagonālei?

7.1.B5. Desmit mucās ieliets attiecīgi 1*l*, 2*l*, ..., 10*l* ūdens. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties 2 mucas un ieliet no pirmās otrajā tik daudz ūdens, cik otrajā jau ir (protams, to var darīt tikai tad, ja pirmajā izvēlētajā mucā ūdens nav mazāk kā otrajā). Kāds lielākais ūdens daudzums var vienlaicīgi būt vienā mucā? Katra muca ir pietiekami liela, lai uzņemtu sevī visu ūdeni.

7.1.B6. Garausīša krājkasītē ir 4 lati; viņam ir tikai 1 s, 2 s, 5 s un 10 s monētas. Vai Garausītis noteikti var nopirkt burkānu grozu, kas maksā 3 latus, ja pārdevējam nav naudas, ko izdot?

7.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.2.A1. Vai kvadrātu var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām varētu salikt šaurleņķu trijstūri ar trim dažāda garuma malām?

7.2.A2. Ja n - naturāls skaitlis, tad ar n! sapratīsim visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $1! = 1$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka x! + y! beidzas ar cipariem …2005?

7.2.A3. Ezerā peld ābols; 1/4 no tā ir virs ūdens līmeņa, bet ¾ – zem. Pie ābola vienlaicīgi pielido putniņš un piepeld zivtiņa un sāk to ēst. Putniņš ēd 2 reizes ātrāk nekā zivtiņa. Kādu daļu ābola apēdīs putniņš? (Putniņš ēd tikai to ābola daļu, kas ir virs ūdens, bet zivtiņa tikai to ābola daļu, kas ir zem ūdens.)

7.2.A4. Dots, ka triju dažādu naturālu skaitļu summa ir 100. No šiem skaitļiem izveido visas trīs iespējamās starpības, katrā pārī no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Kāda ir lielākā iespējamā iegūto triju starpību summa?

7.2.A5. Sūnu ciemā dzīvo 12 rūķīši. Ražas svētkos katrs no viņiem uzdāvināja katram citam rūķītim tik daudz ķirbju, cik apdāvinātajam rūķītim bija gadu. Vai var gadīties, ka pavisam tika uzdāvināti 123456 ķirbji?

7.2.A6. Trijos vienāda tilpuma traukos ir trīs dažādas krāsas; katrs trauks piepildīts par divām trešdaļām. No viena trauka otrā var pārliet jebkuru šķidruma daudzumu (ja traukā, kurā lej, ir pietiekoši daudz vietas). Kā panākt, lai visos traukos būtu vienādi maisījumi? (Citu trauku nav; krāsu izliet nedrīkst.)

B GRUPA

7.2.B1. Kubs sastāv no $3\times3\times3$ kubiņiem. Vai var tos nokrāsot dzeltenā, zaļā un sarkanā krāsā tā, lai katrā kuba daļā ar izmēriem $3\times1\times1$, kas sastāv no trim kubiņiem, būtu sastopamas visas krāsas?

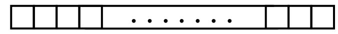
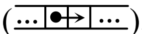
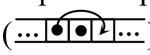
7.2.B2. Ar S(x) sapratīsim naturāla skaitļa x ciparu summu.
Vai eksistē tāds x, ka x + S(x) + S(S(x)) = 2005? Vai eksistē tāds y, ka

$$y + S(y) + S(S(y)) + S(S(S(y))) = 2005?$$

7.2.B3. Zināms, ka skaitlis n ir izsakāms kā triju naturālu skaitļu kvadrātu summa. Pierādīt, ka arī skaitļa n kvadrāts ir izsakāms šādā veidā.

7.2.B4. Astrologs uzskata laika momentu par labu, ja pulksteņa stundu, minūšu un sekunžu rādītāji atrodas vienā pusē no kāda apaļas ciparnīcas diametra. (Rādītāji uzmontēti uz kopējas ass un kustas bez lēcieniem.) Vai diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā?

7.2.B5. Kuba virsotnēs pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt: var atrast tādas divas pretējās kuba virsotnes un savienot tās ar lauztu līniju, kas sastāv no trim kuba šķautnēm, ka šīs lauztās līnijas četrās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 21.

7.2.B6. Lenta sastāv no n vienādiem kvadrātiņiem: . Kreisajos 9 kvadrātiņos ir pa vienai figūriņai. Ar vienu gājienu figūriņa var vai nu pārbīdīties uz blakus pa labi esošo rūtiņu, ja tā ir brīva (), vai arī pārlēkt pāri blakus pa labi esošai figūriņai uz aiznākošo rūtiņu pa labi, ja tā ir brīva (). Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība, pie kuras figūriņas kādreiz var nostāties kaut kādos 9 pēc kārtas esošos kvadrātiņos pretējā secībā nekā sākumā?

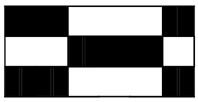
7.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.3.A1. Ar vienu gājienu var pārkrāsot rūtiņas jebkurā kvadrātā, kas sastāv no 2×2 rūtiņām: melnas – par baltām, baltas – par melnām. Vai ar šādiem gājieniem var panākt, lai visas šaha galdiņa rūtiņas vienlaicīgi būtu baltas?

7.3.A2. Kaudzē esošos akmeņus var sadalīt gan trijās, gan četrās daļās ar vienādām kopējām masām (akmeņi netiek skaldīti). Kāds ir mazākais iespējamais akmeņu skaits šajā kaudzē?

7.3.A3. Taisnstūris sadalīts 9 mazākos taisnstūros. Vai melno un balto laukumu summas var būt vienādas (21. zīm.)?



21. zīm.

7.3.A4. Apskatām 18 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Zināms, ka sešu šo skaitļu summa ir pirmskaitlis. Vai 12 atlikušo skaitļu summa arī var būt pirmskaitlis?

7.3.A5. No skaitļiem 7; 10; 27; 35; 45; 63 četri skaitļi ir trīsciparu skaitļa n dalītāji, bet divi - nav. Atrast n.

7.3.A6. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota balta, zaļa vai sarkana. Pierādīt: var pārkrāsot ne vairāk kā 9 rūtiņas tā, lai kvadrātu varētu pārlocīt pa kādu diagonāli vai pa kādu viduslīniju, un nevienā vietā nesaskartos dažādi nokrāsotas daļas.

B GRUPA

7.3.B1. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai katrā rūtiņā var ierakstīt vienu no skaitļiem 0; 1; 2 tā, lai rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas?

7.3.B2. Simts maisos kopā ir 100 kg cukura. Maisu x sauc par vieglu, ja ir vismaz 50 citi maisi, katrs no kuriem ir vismaz 4 reizes smagāks par maisu x. Cik kopā var svērt visi vieglie maisi?

7.3.B3. Kāds ir lielākais daudzums dažādu naturālu skaitļu, no kuriem katri trīs summā dod pirmskaitli?

7.3.B4. Punkti A, B, C, D atrodas uz vienas taisnes šādā secībā, E atrodas ārpus šīs taisnes. Visi 6 trijstūri, kam virsotnes ir 3 no minētajiem punktiem, ir vienādsānu. Aprēķināt trijstūra AED leņķus.

7.3.B5. Nepāra naturālu skaitli n dalīja ar 2; 3; 4; …; 2006. Tieši vienā gadījumā dalīšana notika bez atlikuma, un visi citās dalīšanās iegūtie atlikumi bija dažādi. Pierādīt: n izdalījās bez atlikuma ar skaitli, kas lielāks par 1003.

7.3.B6. Rindā stāv 10 bērni. Brīdi pa brīdim divi blakus esoši bērni mainās vietām. Katri divi bērni drīkst savstarpēji mainīties vietām tikai vienreiz. Pierādīt: neatkarīgi no tā, kā šis process ticis organizēts sākumā, to iespējams pabeigt tā, ka notikušas maiņas starp visiem 45 bērnu pāriem.

7.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.4.A1. Tabula sastāv no 20 rindiņām un 30 kolonnām. Katrā no 600 rūtiņām ierakstīts naturāls skaitlis. Visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrā rindiņā ierakstīti vismaz 15 pāra skaitļi. Pierādīt: ir tāda kolonna, kurā ierakstīti vismaz 10 pāra skaitļi.

7.4.A2. Trijstūra ABC malu viduspunkti ir M, N un K. Kuram punktam attālumu summa līdz sešiem punktiem A, B, C, M, N, K ir vismazākā?

7.4.A3. Rindā augošā secībā uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10000. Pēc tam izsvītroja visus tos skaitļus, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7.

a) cik skaitļu palika neizsvītroti?

b) kāds ir 2006-ais neizsvītrotais skaitlis?

7.4.A4. Pieci punkti atrodas izliekta piecstūra virsotnēs. Trīs pēc kārtas ņemtās virsotnēs ir pa figūriņai; divas virsotnes ir tukšas. Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu figūriņu un pārbīdīt to pa diagonāli uz tukšu virsotni. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka viena no figūriņām atrodas sākotnējā vietā, bet abas pārējās ir apmainījušās vietām?

7.4.A5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas savā starpā būtu vienādas?

7.4.A6. Dots: kādā 36-ciparu skaitlī katrs cipars no 1 līdz 9 sastopams tieši 4 reizes. Turklāt katrs cipars, izņemot 9, ir mazāks par nākošo ciparu (ja vien nav pēdējais apskatāmā skaitļa cipars). Ar kādu ciparu beidzas apskatāmais skaitlis?

B GRUPA

7.4.B1. Olimpiādē bija jārisina daži viegli un daži grūti uzdevumi. Par atrisinātu vieglu uzdevumu piešķīra 3 punktus, par atrisinātu grūtu uzdevumu piešķīra 4 punktus. Par neatrisinātu vieglu uzdevumu dalībniekam atskaitīja 1 punktu. Jānītis atrisināja 12 uzdevumus un ieguva 18 punktus. Cik pavisam bija vieglu uzdevumu?

7.4.B2. Vai var pa apli uzrakstīt pa vienai reizei visus naturālos skaitļus a) no1 līdz 12 ieskaitot, b) no 1 līdz 13 ieskaitot tā, lai katru tādu divu skaitļu summa, starp kuriem uzrakstīti tieši 2 citi skaitļi, dalītos ar 3?

7.4.B3. Plaknē novilktas 5 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. a) cik pavisam izveidojas trijstūru? (Uzskaitām arī trijstūrus, kas sastāv no vairākām daļām.) b) pierādīt, ka ne vairāk kā 5 trijstūri ir šaurleņķu.

7.4.B4. Naturāla skaitļa n četru naturālu dalītāju summa ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka šo dalītāju reizinājums nav lielāks par n^3.

7.4.B5. Doti 23 taisnstūri, kuru malu garumi ir veseli skaitļi un no kuriem neviens nav kvadrāts. Ir zināms, ka no šiem taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 6 kvadrātus ar izmēriem 8×8 (bez caurumiem un bez pārklāšanās).

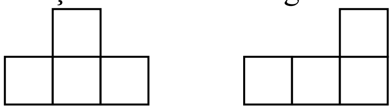
Pierādīt, ka no šiem pašiem 23 taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 2 taisnstūrus, kuru laukumu starpība nav lielāka par 48.

7.4.B6. Paralelogramiem ABCD un AMNK ir kopīga virsotne A. Virsotne B atrodas uz malas MN, bet virsotne K – uz malas CD. Pierādīt, ka abu paralelogramu laukumi ir vienādi savā starpā.

7.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.5.A1. Vai var katrā rūtiņu lapas rūtiņā ierakstīt pa veselam skaitlim tā, lai katrā tādā figūrā, kāda redzama 22a. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu pozitīva, bet katrā tādā figūrā, kāda redzama 22b. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu negatīva?



22a. zīm.   22b. zīm.

7.5.A2. Plaknē novilktas 10 taisnes. Tās sadala plakni apgabalos, no kuriem daži ir galīgi (trijstūri, četrstūri utt.), bet citi – bezgalīgi. Kāds ir lielākais iespējamais bezgalīgo apgabalu skaits?

7.5.A3. Kādu divu naturālu skaitļu reizinājums vienāds ar to summu?

7.5.A4. Četrciparu naturālā skaitlī A neviens cipars nav 0 un visi cipari ir dažādi. Zināms, ka A dalās gan ar savu divu pirmo ciparu veidoto skaitli, gan ar savu divu pēdējo ciparu veidoto skaitli. Pierādīt, ka A dalās vai nu ar 7, vai ar 13, vai ar 17.

7.5.A5. Regulārs 7-stūris sadalīts 5 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

7.5.A6. Četras pēc ārējā izskata vienādas monētas sver attiecīgi 1g, 2g, 3g un 4g. Kā ar 4 svēršanām uz vienas sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, cik sver katra monēta?

B GRUPA

7.5.B1. Ar [x] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $\left[4\frac{1}{3}\right] = 4$; $[5] = 5$.

Pierādīt, ka katram a pastāv vienādība

$$[4a] = [a] + \left[a + \frac{1}{4}\right] + \left[a + \frac{1}{2}\right] + \left[a + \frac{3}{4}\right].$$

7.5.B2. Kāds ir lielākais skaits visu apgabalu, kas var rasties A grupas 2. uzdevumā?

7.5.B3. Dots, ka a, b, c, d ir dažādi naturāli skaitļi. Uz vienas lapas uzrakstīti reizinājumi ab un cd, uz otras lapas summas a + b un c + d. Izrādās, ka uz abām lapām uzrakstīti vieni un tie paši skaitļi. Kādas ir a, b, c, d vērtības?

7.5.B4. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 104, y un z lielākais kopīgais dalītājs ir 106 un x un z lielākais kopīgais dalītājs ir 108?

7.5.B5. Regulārs 25-stūris sadalīts 23 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

7.5.B6. Pieņemsim, ka A grupas 6. uzdevumā par vienu monētu papildus zināms, ka tā nesver ne 1g, ne 4g. Vai ar 3 svēršanām var noskaidrot, cik sver katra monēta?

7.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.6.A1. Neviens no diviem pēc kārtas ņemtiem gadiem nav garais gads. Pirmajā no tiem sestdienu ir vairāk nekā ceturtdienu. Kuru nedēļas dienu ir visvairāk otrajā no šiem gadiem?

7.6.A2. Viens no 11 skaitļiem ir 0, otrs 1, pārējie atrodas starp 0 un 1. Pierādīt: šos skaitļus var sadalīt divās daļās tā, ka abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par $\frac{11}{20}$.

7.6.A3. Vai eksistē izliekts daudzstūris, kam nav ne simetrijas ass, ne simetrijas centra, bet kuru var pagriezt ap kādu punktu par leņķi, kas mazāks par 180°, tā, lai iegūtais daudzstūris sakristu ar sākotnējo?

7.6.A4. Rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu var vienam no tiem pieskaitīt vai nu 3, vai 5. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

7.6.A5. Klasē ir 9 skolēni. Vai var izveidot 13 komisijas, kas katra sastāv no 3 skolēniem, tā, lai nekādi divi skolēni nebūtu kopā vairāk kā vienā komisijā?

7.6.A6. Jānim ir daži 8g smagi atsvari un daži 9g smagi atsvari (ir gan viena, gan otra veida atsvari). Atsvaru kopējā masa ir 1728g. Pierādīt, ka tos var sadalīt 24 kaudzītēs ar vienādām masām.

B GRUPA

7.6.B1. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi a, b un c, kas visi lielāki par 1, kuru summa lielāka par 2006 un kas apmierina sakarību: $a^2 - 1$ dalās ar b, $b^2 - 1$ dalās ar c un $c^2 - 1$ dalās ar a?

7.6.B2. Vai A grupas 2. uzdevumā skaitli $\frac{11}{20}$ var aizstāt ar mazāku, lai uzdevuma apgalvojums paliktu spēkā?

7.6.B3. Vai eksistē izliekts 2006 – stūris, kam visu leņķu lielumi izsakās ar veselu skaitu grādu?

7.6.B4. Dotas 2006 konfekšu kaudzītes, kurās ir attiecīgi 1; 2; 3; ...; 2005; 2006 konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties dažas (varbūt vienu pašu) kaudzītes un apēst no tām vienādus konfekšu daudzumus. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var apēst visas konfektes?

7.6.B5. Atrisināt A grupas 5. uzdevumu, ja jāveido 12 komisijas.

7.6.B6. Kādu lielāko daudzumu trīsciparu skaitļu var izveidot, ja nedrīkst izmantot ciparu 0 un katriem diviem skaitļiem jāatšķiras vienam no otra vismaz divās šķirās?

ATRISINĀJUMI

1. 26. mācību gads (1999/ 2000)

1.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.1.A1. Skaidrs, ka skaitlim nav neviena pāra cipara un nav arī cipara 5. Tātad tā cipari var būt tikai 1; 3; 7; 9, turklāt tam, tātad arī tā ciparu summai, jādalās ar 9. Apskatām dažādas iespējas:

a) ir 4 devītnieki. Skaitlis 9999 der (pārbaude!)

b) ir 3 devītnieki un 1 citāds cipars. Tad ciparu summa nedalās ar 9, tāpēc šī iespēja atkrīt.

c) ir 2 devītnieki un 2 citādi cipari. Viegli pārbaudīt, ka divu citādo ciparu summas (1 + 1, 1 + 3, 1 + 7, 3 + 3, 3 + 7, 7 + 7) nedalās ar 9, tāpēc šī iespēja atkrīt.

d) ir 1 devītnieks un 3 citādi cipari. Šķirojam apakšgadījumus atkarībā no septītnieku skaita:

d1) trīs septītnieki. Tā kā $3\cdot 7+9$ nedalās ar 9, šī iespēja atkrīt.

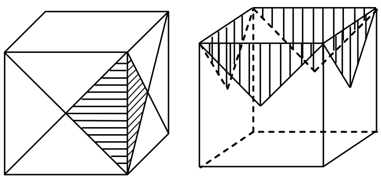
d2) divi septītnieki. Tā kā gan $7\cdot 2+9+1$, gan $7\cdot 2+9+3$ nedalās ar 9, šī iespēja atkrīt.

d3) viens septītnieks. No summām 9 + 7 + 1 + 1, 9 + 7 + 1 + 3, 9 + 7 + 3 + 3 tikai pirmā dalās ar 9. Tātad skaitlim var būt 2 vieninieki, 1 septītnieks un 1 devītnieks (pēdējais cipars!) Atliek pārbaudīt skaitļus 1179, 1719, 7119. No tiem pirmie divi neder (nedalās ar 7), bet 7119 der.

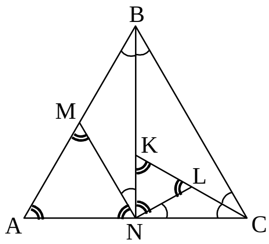
d4) septītnieku nav. Tad triju pirmo ciparu summai (šie cipari var būt tikai 1 un 3) jādalās ar 9; tas iespējams tikai, ja visi šie 3 cipari ir 3. Skaitlis 3339 der (pārbaude!)

Atbilde: 9999; 7119; 3339.

1.1.A2. Piemēram tā, kā redzam A1. zīm. Četri kvadrāti pārlocīti pa vertikālām kuba šķautnēm (tie visi savā starpā vienādi), bet divi pārklāj pa vienai skaldnei (augšējo un apakšējo) un vēl pa ceturtdaļai no katras vertikālās skaldnes; šīs ceturtdaļas iesvītrotas.



A1. zīm.



A2. zīm.

1.1.A3. Pēdējam numuram jābūt pāra numuram, tātad 158 vai 518. Tā kā tam jābūt lielākam par 185, tad tas ir 518.

1.1.A4. Apzīmēsim akmentiņu skaitu kaudzēs ar $a \le b \le c$. Šķirosim vairākus gadījumus.

I Ja a = b = c, viss jau sasniegts.

II Ja $a = b < c$, pievienojam kaudzēs a un b pa vienam akmentiņam tik ilgi, līdz visās kaudzēs to skaits kļūst vienāds.

III Ja $a < b \le c$, pievienojam kaudzēs a un c pa vienam akmentiņam tik ilgi, kamēr kaudzēs a un b to skaits kļūst vienāds, un tad pārejam pie II gadījuma.

1.1.A5. Jā, var. Skat., piem., A2. zīm. Te $\sphericalangle$ =30° un $\sphericalangle$ = 60°. M, N, L ir atbilstoši AB, AC, CK viduspunkti.

1.1.A6. Apzīmēsim rūķīšus ar A, B, C. Sprīdītis jautā A: "Vai B vienmēr runā patiesību?"

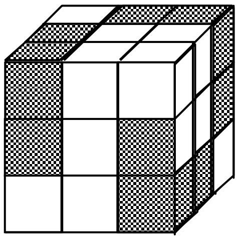
a) ja atbilde ir "jā", tad B tiešām vienmēr runā patiesību; ja A ar savu atbildi būtu samelojies, tad būtu 2 "neuzticami" rūķīši A un B - pretruna.

b) ja atbilde ir "nē", tad C vienmēr runā patiesību (pārbaudiet paši, šķirojot gadījumus, vai A ir teicis patiesību vai nē).

Abos gadījumos Sprīdītim ir droša kandidatūra, kam uzdot otro jautājumu "uz kuru pusi ir ķēniņa pils?"

B GRUPA

1.1.B1. Jā, var. Skat., piem., A3. zīm.



A3. zīm.

baltās	x	$\longrightarrow$ 100 – x
sarkanās		$\downarrow$ 100 - (100 – x) = x

A4. zīm.

1.1.B2. Šādas daļas var apvienot pāros: $\left(\frac{1}{1999},\frac{1998}{1999}\right)$, $\left(\frac{2}{1999},\frac{1997}{1999}\right)$, …, $\left(\frac{999}{1999},\frac{1000}{1999}\right)$. Katrā pārī skaitītāju summa ir 1999. Viegli pārliecināties par šādu faktu: ja x + y = n, tad skaitļus x un n abus var izdalīt ar kādu d > 1 tādā un tikai tādā gadījumā, ja y un n abus var izdalīt ar šo d. Tāpēc katrā pārī vai nu abas daļas ir nesaīsināmas, vai neviena no tām nav nesaīsināma. Tāpēc nesaīsināmo daļu ir pāra skaits.

Piezīme: minētais spriedums der arī vispārīgam uzdevumam, kur apskata daļas $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ (ja n – pāra skaitlis, tad vidējā daļa, kura ne ar ko pārī neapvienojas, ir saīsināma). Mūsu uzdevumu varēja atrisināt arī, ievērojot, ka 1999 ir pirmskaitlis (pamatojiet!), tāpēc visas 1998 apskatāmās daļas automātiski ir nesaīsināmas.

1.1.B3. Atbilde: 27.

a) šādu summu var iegūt, uz divām pretējām skaldnēm uzrakstot 1 un 2, bet uz pārējām četrām pēc kārtas 4; 7; 5; 8.

b) pierādīsim, ka mazāku summu iegūt nevar. Ievērosim: no jebkuriem trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem n; n + 1; n + 2 uz kuba nevar atrasties vairāk par diviem (pretējā gadījumā skaitlim n+1 ir divi "nepieļaujami kaimiņi" n un n + 2, bet tāds drīkst būt tikai viens). Skaidrs, ka summa būs jo mazāka, jo mēs izvēlēsimies mazākus trijniekus (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9), (10; 11; 12), … un to iekšpusē – mazākos skaitļus. No trim mazākajiem trijniekiem (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9) no katra paņemot divus mazākos skaitļus, iegūstam summu 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27.

1.1.B4. Abi daudzumi noteikti ir vienādi (skat. A4. zīm.).

1.1.B5. Acīmredzot pietiek noskaidrot, vai abi vieglākie akmentiņi kopā sver vairāk nekā smagākais akmens viens pats. Parādīsim, kā ar 12 svēršanām atrast gan smagāko, gan abus vieglākos akmeņus. Sadalām akmeņus 4 pāros un salīdzinām katra pāra akmeņus. Ņemam smagāko no katra pāra; šos četrus akmeņus apvienojam pa 2 pāros un salīdzinām katra jaunā pāra akmeņus; šajās salīdzināšanās atrastos smagākos akmeņus salīdzinām savā starpā, un smagākais no tiem ir smagākais vispār. Līdz šim iztērētas 7 svēršanas.

Līdzīgā ceļā no tiem 4 akmeņiem, kas pirmajā posmā savos pāros izrādījās vieglāki, ar 3 svēršanām atrodam visvieglāko akmeni. Patērētas 10 svēršanas.

Šai brīdī ir 3 akmeņi, kas tikuši tieši salīdzināti ar visvieglāko un izrādījušies smagāki par to. Katrs cits akmens (bez šiem trim) ir izrādījies smagāks par kādu citu bez visvieglākā, tātad nav otrais vieglākais. Tāpēc otro vieglāko akmeni varam atrast, meklējot vieglāko no trim minētajiem. To viegli izdara ar divām svēršanām (salīdzinot x ar y un vieglāko no tiem ar z). Patērētas 12 svēršanas.

Ar pēdējo, 13. svēršanu noskaidro, vai abi vieglākie akmeņi kopā ir smagāki par vissmagāko.

1.1.B6. Apzīmēsim šos skaitļus ar $a_1 < a_2 < \ldots < a_9 < a_{10}$. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad $a_1 \geq 1$, tāpēc $a_2 > a_1 \cdot \frac{3}{2} > \frac{3}{2}$; tā kā a_2 – naturāls skaitlis, tad $a_2 \geq 2$. Tālāk $a_3 > a_2 \cdot \frac{3}{2} > 3$; tā kā a_3 – naturāls, tad $a_3 \geq 4$. Tālāk $a_4 > a_3 \cdot \frac{3}{2} > 6$; tā kā a_4 – naturāls, tad $a_4 \geq 7$. Līdzīgi iegūstam pakāpeniski $a_5 \geq 11$, $a_6 \geq 17$, $a_7 \geq 26$, $a_8 \geq 40$, $a_9 \geq 61$, $a_{10} \geq 92$ – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

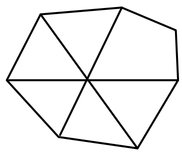
1.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.2.A1. Tā kā, saskaitot skaitļus pa kolonnām, jāiegūst tāds pats rezultāts, kā saskaitot tos pa rindām, tad atbilde ir (21 + 22 + 24) - (27 + 28) = 12. Tabulas piemēru skat. A5. zīm. (Piemērs nepieciešams, jo citādi pastāv iespēja, ka uzdevuma nosacījumi ir pretrunīgi, un tādā gadījumā atbilde būtu "tā nevar būt".)

12	8	1
10	7	5
5	13	6

A5. zīm.



A6. zīm.

1.2.A2. **a)** Jā. Skat., piemēram, A6. zīm.

b) Nē. Ja 4 diagonāles krustojas vienā punktā, tad tām kopā ir $4 \cdot 2 = 8$ dažādi gali. Bet septiņstūrim ir tikai 7 virsotnes.

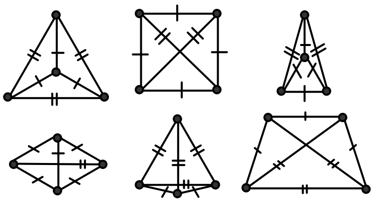
1.2.A3. Skaitļa A = 97516824 ciparu summa ir 42. Tā dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad arī pats skaitlis A dalās ar 3 bet nedalās ar 9. Pieņemsim no pretējā, ka $A = x \cdot x$, kur x – naturāls skaitlis. Ja x dalās ar 3, tad A dalās ar 9, ja x nedalās ar 3, tad arī A nedalās ar 3. Abos gadījumos iegūstam pretrunu ar sākumā konstatēto A īpašību. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

1.2.A4. Lauva uzvelk savu pulksteni un dodas ciemos pie tīģera. Aizejot viņš atceras, cik bija pulkstenis viņa aiziešanas brīdī. Ierodoties pie tīģera, lauva ievēro, cik rāda tīģera pulkstenis. Brīdi paciemojies, viņš dodas atpakaļ, atkal ievērojot, cik aiziešanas brīdī rāda pulkstenis. Atgriezies savā alā, lauva pēc sava pulksteņa konstatē, cik ilgi bijis prom. Atņemot no šī laika daudzuma to laika daudzumu, ko viņš pavadījis pie tīģera, lauva uzzina ceļā pavadīto laiku. Dalot to ar 2, lauva uzzina atceļā pavadīto laiku. Pieskaitot šo laiku tīģera pulksteņa rādījumam atvadīšanās brīdī, lauva uzzina patieso laiku, cikos atgriezies savā alā, un uzstāda savu pulksteni pareizi.

Ievērojiet: lai šo plānu realizētu, lauvam ceļā pie tīģera un atpakaļ jāpavada vienādu laiku. Vienkāršāk to panākt, pārvietojoties ar vienu un to pašu ātrumu pa vienu un to pašu maršrutu.

1.2.A5. Skat. A7. zīm.

Var pamatot, ka citu iespēju nav (uzdevumā tas nebija prasīts).



	d	e	f	g
3.	c	*		
2.	b	*		
1.	a	*		
	1.			

A7. zīm. A8. zīm.

1.2.A6. Uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Pieņemsim, ka to izdarīt izdevies. Visi skaitļi a, b, c, d, e, f, g ir dažādi. Tā kā katrā rindiņā un kolonnā kopā ir tieši 7 rūtiņas, tad ne rindiņā, ne kolonnā nevar būt 2 vienādi skaitļi. Tāpēc nevienā ar * apzīmētajā rūtiņā nevar būt skaitlis e (skat. A8. zīm.). Apskatot kopā 1.kolonnu un 1.rindiņu, redzam, ka 1.rindiņā ar * apzīmētajā vietā var būt tikai viens no skaitļiem f un g. Līdzīgu rezultātu iegūstam attiecībā uz abām pārējām ar * apzīmētajām rūtiņām. Tā kā trijās ar * apzīmētajās rūtiņās var ierakstīt tikai f vai g, tad divās no tām ierakstīti vienādi skaitļi. Iegūta pretruna.

B GRUPA

1.2.B1. Pieņemsim, ka pirmo konfekti saņems Jānis, nākošās divas – Andris utt. Pieņemsim, ka katram zēnam n reizes tiek iedotas konfektes, neķeroties pie nosacījuma "kārtējais zēns paņems visas atlikušās":

Jānis	Andris
1	2
3	4
5	6
...	...
(2n-1)	2n

Šajā brīdī sadalītas

$1+2+\ldots+(2n-1)+2n=(1+2n)+(2+(2n-1))+$

$+\ldots+(n+(n+1))=(2n+1)\cdot n=2n^2+n$ konfektes un vēl neiedotas palikušas x konfektes, kur $0\le x<(2n+1)+(2n+2)$ jeb $0\le x<4n+3$ (ja neiedotas būtu vēl (4n + 3) vai vairāk konfektes, tad varētu veikt vismaz vēl vienu konfekšu izsniegšanas "dubultsoli").

Šai brīdī Andrim ir par n konfektēm vairāk nekā Jānim.

a) Ja $0\le x<n-1$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un beigās konfekšu vairāk būs Andrim.

b) Ja $x=n$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un beigās abiem zēniem būs vienāds konfekšu skaits.

c) Ja $n+1\le x\le 2n+1$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis un viņam beigās būs vairāk konfekšu.

d) Ja $2n + 1 < x$, tad Jānis vispirms saņems $2n + 1$ konfektes (un viņam šai brīdī būs par $n + 1$ konfekti vairāk nekā Andrim), bet pēc tam visas atlikušās konfektes saņems Andris. No šejienes iegūstam:

d1) ja $2n + 1 < x < (2n + 1) + (n + 1)$ jeb $2n + 1 < x < 3n + 2$, tad beigās vairāk konfekšu būs Jānim,

d2) ja $x = 2n + 1 + (n + 1)$ jeb $x = 3n + 2$, tad beigās abiem zēniem būs vienāds skaits konfekšu,

d3) ja $3n + 2 < x < 4n + 3$, tad beigās vairāk konfekšu būs Andrim.

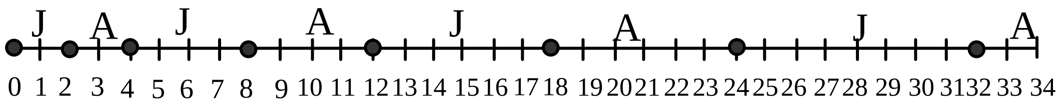
Apkopojot šos rezultātus, iegūstam:

1) ja sākumā ir $(2n^2 + n) + n = 2n^2 + 2n$ vai $(2n^2 + n) + (3n + 2) = 2n^2 + 4n + 2$ konfektes kādam veselam n, tad beigās abiem zēniem ir vienāds konfekšu skaits,

2) ja sākumā konfekšu skaits ir lielāks par $2n^2 + 2n$ un mazāks par $2n^2 + 4n + 2$ kādam veselam n, tad beigās vairāk konfekšu ir Jānim,

3) citos gadījumos vairāk konfekšu ir Andrim.

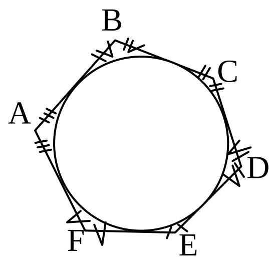
Parādīsim, kā uz skaitļu ass sākuma izvietojas Jānim un Andrim "labvēlīgie" konfekšu sākuma daudzumi. Ar "izceltajiem" punktiem apzīmēti tie konfekšu sākuma daudzumi, kas noved pie godīga "sadalījuma".



A9. zīm.

1.2.B2. Nē, tā gadīties nevar. Atcerēsimies: no viena punkta pret riņķa līniju vilkto pieskaru garumi ir savā starpā vienādi. (Skat. A10. zīm.) Pieņemsim no pretējā, ka tāds sešstūris, par kādu runā uzdevumā, eksistē. Tad viegli redzēt, ka AB + CD + EF = BC + DE + AF. Bet

(AB+CD+EF)+(BC+DE+FA) = 1+2+3+4+5+6 = 21, tātad AB + CD + EF = 10,5. Tas nav iespējams, jo visu malu garumi ir veseli skaitļi. Tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.



A10. zīm.

1	5	6	2
6			5
5			6
4	6	5	3

A11. zīm.

1.2.B3. Nē, nav. Ja tādi būtu, tad to starpība (kas ir virknes iepriekšējais skaitlis) arī dalītos ar 3. Līdzīgi turpinot, mēs iegūtu, ka arī virknes pirmais skaitlis dalītos ar 3, bet tā ir pretruna.

1.2.B4. Nē, nevar. Sadalīsim kvadrāta malējās rūtiņas 6 grupās (vienas grupas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem cipariem, skat. A11. zīm.)

Viegli redzēt, ka no vienas grupas rūtiņām uz citas grupas rūtiņām iespējams aiziet vienīgi, ejot caur kādu no centrālajām rūtiņām. Tā kā zirdziņam jānonāk visu 6 grupu rūtiņās, tad viņam vismaz 5 reizes jāpāriet no vienas grupas uz otru, tātad vismaz 5 reizes jānonāk kādā no centrālajām rūtiņām. Bet centrālo rūtiņu ir tikai 4, tātad viņam kādā no centrālajām rūtiņām jānonāk vairāk nekā vienu reizi..

1.2.B5. **a)** Pietiek ar 6 skaitļiem. Piemēram, der skaitļi 1; 2; 3; 5; 7; 9, kā tas redzams no darbībām:

$3\cdot7=21;\ 1\cdot2=2;\ 1\cdot3=3;\ 2\cdot7=14;\ 3\cdot5=15;\ 2\cdot3=6;\ 1\cdot7=7;\ 2\cdot9=18;\ 1\cdot9=9.$

b) Pierādīsim, ka ar mazāk nekā 6 skaitļiem nepietiek. Vajadzīgs vismaz viens pāra skaitlis (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar pāra ciparu). Vajadzīgs skaitlis, kas beidzas ar 5 (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar 5). Lai būtu reizinājumi, kas beidzas ar 1; 3; 7; 9, ir vajadzīgi nepāra skaitļi, kas nebeidzas ar 5, turklāt tādi vajadzīgi vismaz četri (jo no trim skaitļiem a, b, c var izveidot tikai trīs reizinājumus). Tātad pavisam vajag vismaz 1 + 1 + 4 = 6 skaitļus.

1.2.B6. Uzdevuma prasības nav izpildāmas. Skat. A grupas 6. uzdevuma atrisinājumu.

1.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.3.A1. Izpildot dalīšanu, iegūstam:

$$
\begin{array}{l}
1\ :\ 26\ = 0,0\,3\,8\,4\,6\,1\,5\ \ldots \\
\mathbf{1\,0}\,0 \\
\ \ \underline{7\,8\quad} \\
\ \ 2\,2\,0 \\
\ \ \underline{2\,0\,8\quad} \\
\qquad 1\,2\,0 \\
\qquad \underline{1\,0\,4\quad} \\
\qquad\ \ 1\,6\,0 \\
\qquad\ \ \underline{1\,5\,6\quad} \\
\qquad\qquad 4\,0 \\
\qquad\qquad \underline{2\,6\quad} \\
\qquad\qquad 1\,4\,0 \\
\qquad\qquad \underline{1\,3\,0\quad} \\
\qquad\qquad\ \ \mathbf{1\,0}\,0 \\
\qquad\qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

Katrs nākošais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī. Tā kā atlikums 10 ir atkārtojies, tad atkal parādīsies sešu ciparu grupa 384615, pēc tam atkal notiks tas pats utt. Tātad

$$\frac{1}{26} = 0{,}038461538461538461 5\ldots$$

Tā kā $1999 = 1 + 6 \cdot 333$, tad izsvītrotais cipars ir perioda pēdējais cipars, t.i., cipars 5. Tātad sākotnējam un iegūtajam skaitlim pirmie 1998 cipari aiz komata sakrīt, bet nākošais cipars sākotnējam skaitlim – 5 – ir lielāks nekā iegūtajam skaitlim –3. Tāpēc sākotnējais skaitlis ir lielāks.

1.3.A2. Skaidrs, ka nav tāda vienciparu skaitļa. Četrciparu skaitļa ciparu summa nav lielāka par $9 \cdot 4 = 36$, tāpēc astoņkāršota tā ciparu summa nav lielāka par $36 \cdot 8 = 288$. Bet mazākais četrciparu skaitlis ir 1000, un 1000 > 288. Tātad nav arī tāda 5-ciparu, 6-ciparu utt. skaitļa. Tiešām, apskatīsim n-ciparu skaitli X, kur $n \geq 5$. Tad

$$X \geq \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ cipari}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ nulles}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n-1 \text{ desmitnieki}} = 100 \cdot \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n-3 \text{ desmitnieki}} \qquad (1)$$

Savukārt skaitļa X ciparu summa S apmierina nevienādību $S \leq 9 \cdot n$; tāpēc astoņkāršota tā ciparu summa apmierina nevienādības

$$8S \leq 72 \cdot n = 72 \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4}_{n-3 \text{ reizinātāji}} \qquad (2)$$

Tā kā 100 > 72 un katrs no n-3 reizinātājiem (2) labajā pusē mazāks par 10 (pārbaudiet paši), tad no (1) un (2) seko, ka 8S < X. Tātad vajadzīgais pierādīts.

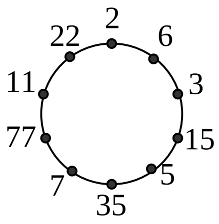
Līdz ar to mūsu meklējamie skaitļi var būt tikai divciparu vai trīsciparu, turklāt tiem jādalās ar 8. Atzīmēsim arī, ka meklējamā skaitļa ciparu summa nevar pārsniegt $3 \cdot 9 = 27$, tāpēc pats skaitlis nevar pārsniegt $8 \cdot 27 = 216$. Visi divciparu un trīsciparu skaitļi, kas nepārsniedz 216 un dalās ar 8, ir sekojoši:

16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208, 216.

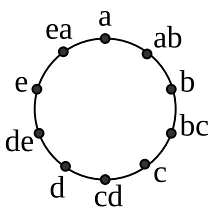
Pārbaudot, kurš no tiem vienāds ar astoņkāršotu savu ciparu summu, redzam, ka tāds ir tikai **72**.

1.3.A3. Nē, ne noteikti. Skat. piem., A12. zīm.

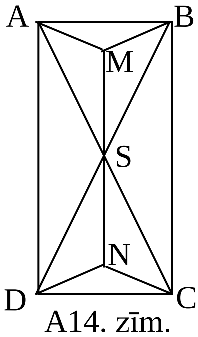
Komentārs. Var iegūt daudzus izvietojumus ar prasīto īpašību. Viens no paņēmieniem parādīts A13. zīm. Te vispirms pa riņķa līniju izraksta a, b, c, d, e – dažādus pirmskaitļus, bet pēc tam starp katriem diviem blakus uzrakstītiem pirmskaitļiem ieraksta to reizinājumu. Pārliecinieties paši, ka uzdevuma prasības ir izpildītas.



A12. zīm.



A13. zīm.

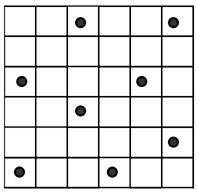


A14. zīm.

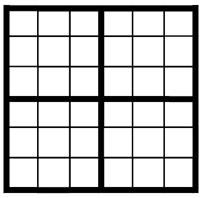
1.3.A4. Skat. A14. zīm. Te ABS un CDS ir vienādi vienādmalu trijstūri ar centriem atbilstoši M un N, pie tam A, S, C atrodas uz vienas taisnes un B, S, D – tāpat. Pārliecinieties patstāvīgi, ka ABCD ir taisnstūris, bet visiem trijstūriem AMB, BMS, SMA, SNC, CND, DNS, ASD un BSC viens leņķis ir 120°, bet divi leņķi – 30° lieli.

1.3.A5. Atbilde: 8 centrus.

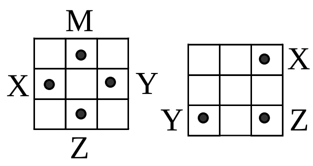
a) To, ka 8 centrus var atzīmēt, skat. A15. zīm. Pārliecinieties patstāvīgi, ka uzdevuma prasības ir izpildītas.



A15. zīm.



A16. zīm.



a) b)

A17. zīm.

b) pamatosim, ka vairāk par 8 centriem atzīmēt nevar. Pieņemsim pretējo: saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem atzīmēti vismaz 9 centri. Tad vismaz vienā no četriem 3×3 rūtiņu kvadrātiem (skat. A16. zīm.) atzīmēti ne mazāk par 3 centriem (jo $2\times4=8<9$). Aplūkosim šo kvadrātu un 3 tajā atzīmēto rūtiņu centrus. Viegli saprast, ka neviens no tiem nav atzīmēts centrālajā rūtiņā un ne vairāk kā viens var būt atzīmēts malas vidējā rūtiņā (jo $MX = MY < 2$ un $MZ = 2$, skat. A17a). zīm.) Tāpēc vismaz divi no tiem atzīmēti stūra rūtiņās; tiem jābūt pretējās stūra rūtiņās, skat. A17b) zīm., jo XZ = 2. Bet, atzīmējot X un Y, trešo centru atzīmēt vairs nevar; pārliecinieties par to patstāvīgi.

Tātad mūsu pieņēmums par iespējām atzīmēt 9 centrus noved pie pretrunas un tāpēc ir nepareizs.

1.3.A6. Atbilde: ar 3 vienādiem nenulles cipariem.

a) Viegli pārbaudīt, ka $38^2 = 1444$. Tātad naturāla skaitļa kvadrāts var beigties ar trim vienādiem nenulles cipariem.

b) Pierādīsim, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar 4 vienādiem nenulles cipariem.

Lemma. Ja naturāla skaitļa n pēdējais cipars ir nepāra cipars, tad tā kvadrāta priekšpēdējais cipars (ja tāds vispār eksistē, t.i., ja $n^2 \geq 10$) ir pāra cipars.

Pierādīsim to. Ja n = 5; 7; 9, apgalvojumu pārbauda tieši: $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$.

Pieņemsim, ka n > 10. Apzīmēsim ar y skaitļa n pēdējo ciparu un ar A – to skaitli, kuru iegūst, ja skaitlī n nosvītro pēdējo ciparu (piemēram, ja n = 813, tad y = 3, A = 81). Tad $n=10\cdot A+y$ un $n^2=(10A+y)^2=100A^2+20A\cdot y+y^2$. Ievērosim, ka skaitlī $100A^2$ divi pēdējie cipari ir nulles, bet skaitlī $20A\cdot y$ jeb, kas ir tas pats, skaitlī $2\cdot 10Ay$ pēdējais cipars ir nulle, bet priekšpēdējais cipars – pāra cipars. Tāpēc n^2 priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra atkarībā no tā, vai y^2priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra cipars (ja y^2 ir tikai viens cipars, tad varam uzskatīt, ka tā priekšpēdējais cipars ir 0). Pārbaudām visas iespējas: 1^2=**0**1, 3^2=**0**9, 5^2=**2**5, 7^2=**4**9, 9^2=**8**1. Tātad lemma pierādīta.

No šejienes izriet, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ne ar 1111, ne ar 3333, ne ar 5555, ne ar 7777, ne ar 9999.

Tā kā $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$, tad redzams, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ne ar 2, ne ar 8; tātad tas nevar beigties arī ar 2222 vai 8888. Atliek izpētīt, vai tas var beigties ar 4444 vai ar 6666.

Ja n^2 beigtos ar 6666, tas tas ir pāra skaitlis. Tad arī n ir pāra skaitlis, tāpēc n^2 dalās ar 4. Bet tad $n^2 = ...6666 = ...6600 + 66$. Tā kā gan n^2, gan ...6600 dalās ar 4, tad arī 66 jādalās ar 4, bet tā nav. Tātad n^2 nevar beigties ar 6666 (un, kā viegli redzēt, pat ne ar 66!)

Ja n^2 beigtos ar 4444, tad n^2 un arī n ir pāra skaitlis. Varam apzīmēt $n = 2m$; tad $n^2 = 4m^2 = A \cdot 10000 + 4444$ (te A – skaitlis, ko iegūst, ja n^2 nosvītro pēdējos četrus ciparus).

No vienādības $4m^2 = 10000A + 4444$ seko $m^2 = 2500A + 1111$, tātad m^2 beidzas ar ...11. Tas ir pretrunā ar sākumā pierādīto lemmu.

Līdz ar to visi gadījumi apskatīti. Esam pierādījuši, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar četriem vienādiem nenulles cipariem.

B GRUPA

1.3.B1. Mazākais pietiekamais reisu daudzums ir atkarīgs no kravas sadalījuma kastēs. Mums jāatrod visi iespējamie gadījumi un jāpierāda, ka citu bez mūsu atrastajiem nav. Mēs pierādīsim, ka

a) mazākais pietiekamais reisu daudzums var būt 4; 5; 6; 7

b) nekādā gadījumā nevar iztikt ar 3 vai mazāk reisiem

c) vienmēr var iztikt ar augstākais 7 reisiem

A. Ja krava iepakota 4 kastēs, katrā pa 11/4 = 2,75 tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti, tātad nepieciešami 4 reisi. Skaidrs, ka ar 4 reisiem pietiek (ar katru reisu aizved tieši vienu kasti). Līdzīgi gadījumos, kad krava iepakota 5; 6; 7 vienādās kastēs, attiecīgi gan nepieciešami, gan pietiekami 5; 6; 7 reisi – pārliecinieties par to patstāvīgi.

B. Veicot ne vairāk kā 3 reisus, var aizvest ne vairāk kā $3 \cdot 3 = 9$ tonnas, bet jāaizved 11 tonnas, tāpēc ar 3 vai mazāk reisiem nepietiek nekādā kravas iepakojuma gadījumā.

C. Pierādīsim, ka ar 7 reisiem kravu vienmēr var aizvest.

Kastes, kuras sver vairāk par 1,5 tonnām, sauksim par smagām; pārējās kastes, kuras katra sver 1,5 tonnas vai mazāk par 1,5 tonnām, sauksim par vieglām. Veidosim no vieglajām kastēm kaudzes. Kaudžu veidošana notiek sekojoši: izvēlamies vienu kasti un kraujam tai virsū citas kastes tik ilgi, līdz kaudzes kopējā masa pirmo reizi pārsniedz 1,5 tonnas. Šai brīdī kaudzes veidošanu pabeidzam un sākam veidot jaunu kaudzi no vēl atlikušajām vieglajām kastēm (ja tādas vēl ir).

Ievērosim, ka katras kaudzes kopējā masa nepārsniedz 3 tonnas, jo pirms pēdējās kastes pievienošanas šajā kaudzē bija ne vairāk kā 1,5 tonnas un pēdējā pievienotā kaste svēra ne vairāk par 1,5 tonnām.

Agri vai vēlu mēs sasniegsim situāciju, kad jaunas kaudzes vairs nevar izveidot. Tad

a) smago kastu un kaudžu kopējais skaits nepārsniedz 7 (ja tas būtu vismaz 8, tad smagajās kastēs un kaudzēs kopā būtu vairāk nekā $8 \cdot 1{,}5\ \text{tonnas} = 12$ tonnas kravas – pretruna)

b) kaudzēs neievietota palikusi ne vairāk kā viena vieglā kaste (ja tādu būtu divas, tad no tām varētu izveidot vēl vienu kaudzi). Tālāk šķirojam divas iespējas.

c1. Smago kastu un kaudžu kopā ir ne vairāk par 6. Katru no tām aizvedam ar vienu reisu, bet atlikušo, kaudzēs neievietoto kasti, ja tāda ir - ar septīto reisu.

c2. Smago kastu un kaudžu kopā ir 7. Tad to kopējā masa ir vairāk nekā $7 \cdot 1{,}5$ tonnas = 10,5 tonnas. Ja visas vieglās kastes ievietotas kaudzēs, tad varam visu kravu aizvest ar 7 reisiem. Ja viena kaste palikusi pāri, tad tā sver mazāk nekā 11 - 10,5 = 0,5 tonnas. Pierādīsim, ka vismaz vienā smagā kaste vai kaudze sver ne vairāk par 2,5 tonnām. Tiešām, ja tā nebūtu, tad to kopējā masa būtu lielāka nekā $7 \cdot 2{,}5$ tonnas = 17,5 tonnas > 11 tonnas – pretruna. Tātad tāda smagā kaste vai kaudze eksistē. Uzliekot tai virsū malā palikušo pēdējo kasti, iegūstam kaudzi, kuras masa mazāka nekā 2,5 tonnas + 0,5 tonnas = 3 tonnas. Tagad visu kravu var aizvest ar 7 reisiem.

1.3.B2. No uzdevuma nosacījumiem seko arī, ka $a > b > c > d$; tāpēc d ir mazākais no pirmskaitļiem a, b, c, d, un tie visi ir dažādi.

Tā kā

$a^2-b^2+c^2-d^2$ ir nepāra skaitlis, tad vismaz viens no skaitļiem a, b, c, d ir pāra. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tad tieši viens no skaitļiem a, b, c, d ir pāra skaitlis un tas ir 2; tā kā 2 ir vispār mazākais pirmskaitlis, tad tas ir arī mazākais no a, b, c, d. Tāpēc $d = 2$. Iegūstam

$a^2 - b^2 + c^2 - 4 = 1749$; tāpēc $a^2 - b^2 + c^2 = 1753$ (1)

Tā kā $c>2d$, tad $c>4$; tāpēc $c \geq 5$. Pieņemsim, ka $c \neq 5$; tad $c>7$. Tāpēc $3b > 6 \cdot 7$ un $b > 14$, tātad $b \geq 17$.

Tad $a^2 - b^2 + c^2 > (3b)^2 - b^2 + 25 = 8 \cdot b^2 + 25 \geq 8 \cdot 17^2 + 25 = 8 \cdot 289 + 25 > 8 \cdot 250 =$
$= 2000 > 1753$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs un $c = 5$. Tad no (1) iegūstam

$$a^2-b^2=1728 \quad (2)$$

Savukārt no $3b > 6c$ seko, ka

$$b \geq 11 \quad (3)$$

Tā kā $a > 3b$, tad no (2) seko $(3b)^2 - b^2 < 1728$ jeb $8b^2 < 1728$, no kurienes $b^2<216$ un $b \leq 14$. No šejienes un no (3) seko, ka vai nu $b = 11$, vai $b = 13$. Ja $b = 13$, tad no (2) seko, ka $a^2 = 1897$, bet tad a nav naturāls skaitlis; ja $b = 11$, tad no (2) seko, ka $a^2 = 1849$ un $a = 43$. Tā kā 43 ir pirmskaitlis un $43 > 3 \cdot 11$, tad visi uzdevuma nosacījumi izpildīti. Varam aprēķināt

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1849 + 121 + 25 + 4 = 1999$.

1.3.B3. <u>Atbilde:</u> jā, noteikti.

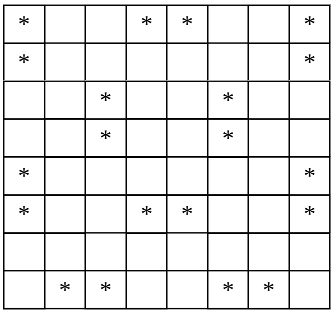
Tā kā visi izrakstītie skaitļi ir dažādi, tad no katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem tikai viens (lielākais) dalās ar otru (mazāko), bet ne otrādi.

Ja pa apli pēc kārtas kādā vietā uzrakstīti skaitļi a, b, c tā, ka $a > b > c$, tad a dalās ar b un b dalās ar c, tātad a dalās ar c, pie tam a un c neatrodas blakus. Tāpēc vienīgā iespēja, kad uzdevumā minētie skaitļi varētu neeksistēt, varētu pastāvēt tikai tad, ja nekādi trīs skaitļi pēc kārtas neatrodas uz riņķa līnijas ne augošā, ne dilstošā secībā. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

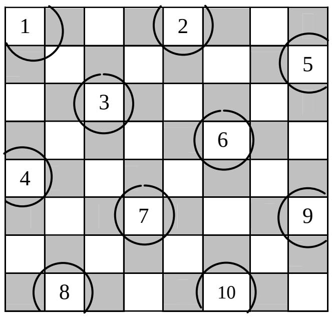
Pieņemsim no pretējā, ka tas iespējams. Apzīmēsim skaitļus uz riņķa līnijas pēc kārtas ar a, b, c, d, e, f, g, h, i, turklāt a ir vislielākais no tiem. Tad $a > b$. Lai nebūtu triju pēc kārtas dilstošā secībā uzrakstītu skaitļu, jābūt $b < c$. Lai nebūtu triju pēc kārtas augošā secībā uzrakstītu skaitļu, jābūt $c > d$. Līdzīgā ceļā pakāpeniski iegūstam $d < e$, $e > f$, $f < g$, $g > h$, $h < i$, $i > a$. Bet nevienādība $i > a$ nevar pastāvēt, jo a ir lielākais izrakstītais skaitlis. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

1.3.B4. <u>Atbilde:</u> 20 zvaigznītes.

a) Tas, ka ar 20 zvaigznītēm pietiek, redzam A18. zīm.



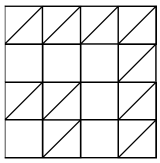
A18. zīm.



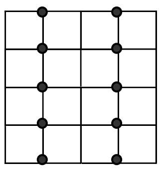
A19. zīm.

b) Pierādīsim, ka vismaz 20 zvaigznītes ir nepieciešamas. Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Ievērosim, ka baltajām rūtiņām blakus atrodas tikai zvaigznītes, kas ierakstītas melnajās rūtiņās, un otrādi. Pierādīsim, ka melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes.

Aplūkosim ar skaitļiem apzīmētās baltās rūtiņas A19. zīm.. Katru no tām apjož līnija. Šī līnija iet caur visām tām melnajām rūtiņām, kuras atrodas blakus atbilstošajai baltajai. Redzam, ka ne caur vienu melno rūtiņu neiet divas līnijas. Tas nozīmē, ka katrai ar skaitli atzīmētajai rūtiņai nepieciešama cita tai blakusesoša zvaigznīte. Tāpēc melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes. Līdzīgi pierāda, ka baltajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes. Tātad kopā to vajadzīgs vismaz 10 + 10 = 20.



A20. zīm.



A21. zīm.

1.3.B5. Atbilde: 10 diagonāles.

a) Tas, ka 10 diagonāles var novilkt, redzams A20. zīm.

b) Katrai diagonālei, kuru vispār var novilkt, viens galapunkts atrodas vienā no 10 punktiem, kas atzīmēti A21. zīm. Tā kā nekādām divām diagonālēm nav kopīgu punktu, tad to nevar būt vairāk par 10.

1.3.B6. Liekam uz svaru kausiem pa 9 monētām, pēc tam – pa 7, pēc tam – pa 5, pēc tam – pa 3, pēc tam – pa 1. Katru reizi liekam uz svariem līdz šim vēl neaiztiktās monētas. Ja nevienā reizē līdzsvars netiek izjaukts, tad vieglākā monēta ir vienīgā malā palikusī, un esam to noskaidrojuši ar 5 svēršanām.

Ja turpretī kādā reizē (salīdzinot 2n + 1 monētas uz viena kausa ar 2n + 1 monētām uz otra kausa) viens kauss paceļas uz augšu, tad vieglākā monēta atrodas uz tā. Tad mēs augstāk aprakstīto procesu pārtraucam (esam patērējuši jau 5-n svēršanas) un 2 n no "aizdomīgajām" monētām sadalām pa pāriem; sākam salīdzināt katra pāra monētas savā starpā. Ja kādā salīdzināšanā viens kauss paceļas uz augšu, tad uz tā ir vieglākā monēta; ja visās reizēs svari ir līdzsvarā, tad vieglākā ir malā palikusī "aizdomīgā" monēta. Esam iztērējuši ne vairāk par (5-n) + n = 5 svēršanām, un neviena monēta nav svērta vairāk par divām reizēm.

Piezīme: ja nebūtu nosacījuma, ka katru monētu var svērt ne vairāk par divām reizēm, vieglāko monētu varētu atrast ar 4 svēršanām (izdomājiet paši, kā).

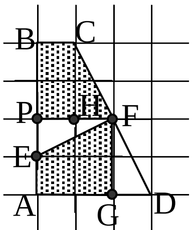
1.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.4.A1. **1)** Ja A runā patiesību, tad A ir svārstīgs; iegūta pretruna, jo A vienlaicīgi nevar būt svārstīgs un runāt patiesību. Tātad A nerunā patiesību.

2) Ja A ir svārstīgs, tad ne B, ne C nav patiess. Tāpēc A nav svārstīgs.
Tātad A melo. Tā kā viens no brāļiem vienmēr runā patiesību un A ir melis, tad B runā patiesību, bet C ir svārstīgs.

1.4.A2. Atbilde: jā, pastāv.
Aplūko kvadrātisku rūtiņu režģī iezīmētu taisnleņķa trapeci ABCD (skat. A22. zīm. ; $\angle A = 90^\circ$, BC||AD).



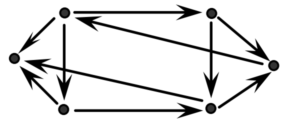
A22. zīm.

Pēc pazīmes mlm $\Delta CHF = \Delta FGD$; tāpēc $\angle CFD = \angle CFH + \angle HFG + \angle GFD =$ $= \angle CFH + 90^\circ + \angle HCF = 90^\circ + (\angle CFH + \angle HCF) = 180^\circ$ un rūtiņu virsotne F atrodas uz malas CD tās viduspunktā. Sagriežam trapeci ABCD pa nogriezni EF. Tagad PBCF = GAEF, jo, savietojot šīs taisnleņķa trapeces pa rūtiņu līnijām, tās acīmredzami sakrīt. Bez tam $\Delta EPF = \Delta DGF$ (mlm). Ja divām vienādām figūrām pie atbilstošajām malām pievieno vienādi orientētas vienādas figūras, atkal iegūst vienādas figūras. Tātad četrstūri AEFD un BCFE ir vienādi.
Savukārt, novelkot diagonāli BD, iegūst taisnleņķa trijstūri BAD un platleņķa trijstūri BCD, kuri nav vienādi. Līdzīgi, novelkot diagonāli AC, iegūst taisnleņķa trijstūri ABC un šaurleņķu trijstūri ACD . Novelkot viduslīniju PF, trapeces PBCF un APFD nav vienādas, jo vienai no tām pamatu garumi ir 1 un 2 , bet otrai - 2 un 3. Novelkot viduslīniju, kas savieno pamatu BC un AD viduspunktus, iegūst divas trapeces, no kurām tikai viena ir taisnleņķa; tāpēc tās nav vienādas.

1.4.A3. No sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 6; to apzīmē ar n. Skaitlim n ir dalītāji $\frac{n}{3}, \frac{n}{2}$ un $\frac{n}{6}$, kas atšķiras no n. Atrod šo dalītāju summu: $\frac{n}{3} + \frac{n}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6n}{6} = n$. (Atceramies, ka n var būt arī vēl citi dalītāji.)

1.4.A4. Atbilde: par 1, par 8 vai par 10.
Ja skaitļa pēdējais cipars ir 0 vai 1, tad, pieskaitot tam 8, tā ciparu summa palielinās par 8. Ja rodas pārnesums, tad ciparu summa katra pārnesuma dēļ samazinās par 9 (jo var rasties tikai pārnesums 1). Tā kā pārnesums var būt tikai divās - vienu un desmitu - šķirās, tad pārnesumu dēļ ciparu summa var samazināties par 9 vai par 18.
Tātad abu apskatāmo skaitļu ciparu summas var savā starpā atšķirties par 8, par $1 = |8 - 9|$ un par $10 = |8 - 2 \cdot 9|$.
Piemēri: 211 un 219; 218 un 226; 299 un 307 parāda, ka šīs iespējas tiešām realizējas.

1.4.A5. Jā, var (piem., skat. A23. zīm.).
$X \bullet\!\longrightarrow\!\bullet Y$ nozīmē, ka X uzvarējis pret Y (jeb Y zaudējis pret X); nenovilkta līnija nozīmē, ka spēle beigusies neizšķirti.


A23. zīm.

1.4.A6. Atbilde: mazākais konfekšu daudzums ir 28.

a) Piemērs 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28 parāda, ka vērtība 28 ir iespējama. To, kā katrs bērns var sadalīt savas konfektes, parāda sekojoša tabula.

Dalītāja konfekšu skaits	Cik dod citam atkarībā no viņa konfekšu skaita							
	21	22	23	24	25	26	27	28
21		6	5	4	3	2	1	0
22	7		5	4	3	2	1	0
23	7	6		4	3	2	1	0
24	7	6	5		3	2	1	0
25	7	6	5	4		2	1	0
26	7	6	5	4	3		1	0
27	7	6	5	4	3	2		0
28	7	6	5	4	3	2	1	

b) Pieņemsim, ka konfekšu daudzumi bērniem ir a_1; a_2 ; . . .; a_8 un $a_1 < a_2 < \ldots < a_8$. Bērnu ar a_i konfektēm sauksim par i - to bērnu. Tā kā jebkurš bērns var sadalīt savas konfektes pārējiem, tad, ja 1.bērns “izlīdzina” konfekšu daudzumu, viņam jādod vismaz viena konfekte 7. bērnam, vismaz divas konfektes 6. bērnam, vismaz trīs konfektes 5. bērnam, . . . , vismaz sešas konfektes 2. bērnam.

Tāpēc $a_1 \geq 1 + 3 + \ldots + 6 = 21$.

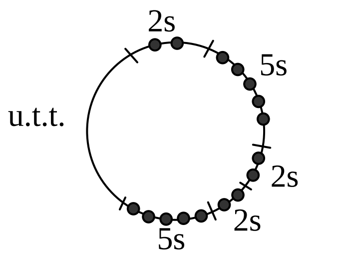
Tā kā $a_2 > a_1$, tad $a_2 \geq 22$. Līdzīgi $a_3 \geq 23$ $a_3\ ^3$, . . . , $a_8 \geq 28$. Tātad mazākais konfekšu daudzums bērnam, kuram to ir visvairāk, ir 28.

B GRUPA

1.4.B1. Ja visas monētas ir 1 santīma vērtībā, tad uzdevuma prasības izpildāmas (naudu var sadalīt divās vienādās daļās). Acīmredzot to var izdarīt arī, ja visas ir 2 santīmu monētas.

Pieņemsim, ka monētas ir dažādas.

Uz riņķa līnijas atzīmē 198 punktus (1 lats 98 sant. = 198 sant.). Novelkam starp punktiem nogriežņus tā, lai punktu skaits riņķa līnijas “lokos” atbilstu monētu vērtībām santīmos (skat. A24. zīm.).

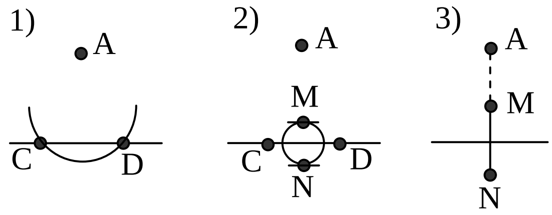


A24. zīm.

Tā kā uz riņķa līnijas ir 198 punkti, tad ir 198 atstarpes starp punktiem. Ievērosim , ka $198 = 99 \cdot 2$. Tātad atstarpes var sadalīt "diametrāli pretēju" atstarpju pāros, un šādu pāru būs 99. Ir novilkti 100 nogriežņi (100 monētas). Ievērojam, ka $100 > 99$ .Tātad divi nogriežņi nonāks vienā “diametrāli pretēju" atstarpju pārī, tātad "diametrāli pretējās" atstarpēs. Tie norādīs vajadzīgo naudas sadalījumu.

1.4.B2. **1)** Ar centru punktā A velk riņķa līnijas loku, kas krusto taisni t divos punktos C un D (loka rādiusu izvēlas tā, lai būtu CD < 1 cm).

2) Ar centriem punktos C un D velk riņķa līnijas lokus ar vienādiem rādiusiem tā, lai loki krustotos divos punktos N un M (rādiusi nedaudz lielāki par pusi no CD).Tad NM<1 cm.
3) Novelk nogriezni NM un pakāpeniski pagarina līdz to punktam A (skat. A25. zīm.).



A25. zīm.

1.4.B3. Atbilde: jā, var.
Izveidojam kaudzes ar 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19 akmeņiem. Viegli pārbaudīt, ka $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = (1 + 19) + (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) = 5 \cdot 20 = 100$.
Savukārt, ja kādu kaudzi ar n akmeņiem (n - nepāra skaitlis)sadalīs kaudzēs ar a un b akmeņiem, tad a + b = n, tāpēc vai nu a, vai b būs nepāra skaitlis. Tā kā a < n un b < n, tad tajā kaudzītē, kurā sadalot radīsies nepāra skaits akmeņu, būs tikpat akmeņu, cik kādā no pārējām.

1.4.B4. Sanumurēsim vietas pa apli pēc kārtas: 1, 2, 3, . . . , 10.
Beigās pēc maiņām vai nu visi zēni ir pāra un meitenes - nepāra vietās, vai otrādi (zēni – nepāra un meitenes – pāra vietās).
Pieņemsim, ka X zēni sākumā atrodas "nepareizās" vietās, tad arī X meitenes sākumā atrodas nepareizās vietās (zēnu un meiteņu skaits ir vienāds). Acīmredzot šajā situācijā pietiek ar X maiņām, lai iegūtu uzdevumā prasīto. No otras puses, X maiņas ir nepieciešamas, jo ir 2X (X – zēni un X - meitenes) nepareizības, un ar vienu maiņu var izlabot augstākais 2 nepareizības.
Ja no sākuma visi zēni stāv pēc kārtas un meitenes - arī, tad atkarībā no tā, vai zēnus beigās novietos pāra vai nepāra vietās, X = 2 vai X = 3, pie tam jebkurā situācijā var panākt, lai $X \le 2$ (izvēloties, vai zēni beigās stāvēs pāra vai nepāra vietās).
Tātad ar 2 maiņām pietiek vienmēr, un ir gadījumi, kur ar mazāk nekā 2 maiņām iztikt nevar.

1.4.B5. Atbilde: 8 votivapas un 1 šillišalla.
Apzīmēsim votivapu un šillišalu daudzumus attiecīgi ar v un š. No pirmā nosacījuma seko: $6v + 2š > 4 \cdot 12$; abas nevienādības puses dalot ar 2, iegūst $3v + š > 24$ (1)
No otrā nosacījuma seko: $7v + 3š < 5 \cdot 12$ (2)
No (1) seko 3š > 72 - 9v; no (2) seko 3š < 60 - 7v. Tāpēc 72 - 9v < 60 - 7v, 2v > 12, v > 6.
Tāpēc no 7v + 3š < 60 secinām, ka v = 7 vai v = 8, jo jābūt $š \ge 0$.
Ja v = 7, tad no (1) š > 3, tātad $š \ge 4$; bet tad neizpildās (2). Ja v = 8, tad no (1) š > 0, tātad $š \ge 1$, bet no (2) 56 + 3š < 60. Tāpēc noteikti š = 1. Tātad votivapu bija 8, bet šillišallu – 1.

1.4.B6. Atbilde: a) jā, b) nē.
a) Pieņemsim, ka 7.a klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "10" balles un 2 skolēni ar vērtējumu "9" balles, savukārt 7.b klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "2" balles.
Iedomāsimies, ka uz 7.b klasi pāriet abi skolēni no 7.a klases ar vērtējumu "9" balles.
Pirms pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija $\frac{8 \cdot 10 + 2 \cdot 9}{10} = 9{,}8$ balles, bet 7.b klasē vidējais vērtējums bija 2 balles. Savukārt pēc pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija 10 balles, bet 7.b klasē tas bija $\frac{8 \cdot 2 + 2 \cdot 9}{10} = 3{,}4$. Tātad abi vērtējumi paaugstinājušies.

b) Apzīmēsim 7.a klases vidējo atzīmi ar x, 7.b klases vidējo atzīmi ar y, bet tās skolēnu grupas vidējo atzīmi, kas pāriet no 7.a uz 7.b, ar p. Viegli saprast, ka <u>abās klasēs vidējā atzīme paaugstināsies tad un tikai tad, ja $x>p>y$; tad jaunās vidējās atzīmes $x_1>x>p>y_1>y$.</u> Līdzīgi spriežot, lai otrajā pārejā paaugstinātos 7.b klases vidējā atzīme, uz 7.a klasi jāpāriet grupai ar vidējo atzīmi p_1, kur $p_1 < y_1$, tātad $p_1 < x_1$. Bet tā rezultātā 7.a klases vidējā atzīme samazināsies.

Atliek pamatot pasvītroto apgalvojumu. Pieņemsim, ka 7.a klasē pirms pārejas bija m skolēni, 7.b klasē - n skolēni, bet pārgāja k skolēni. Tad pēc pārejas vidējā atzīme 7.a klasē bija $\frac{m \cdot x - k \cdot p}{m-k}$, bet 7.b klasē tā bija $\frac{n \cdot y + k \cdot p}{n+k}$. Viegli saprast, ka

$$\frac{m \cdot x - k \cdot p}{m-k} > x \Leftrightarrow m \cdot x - k \cdot p > m \cdot x - k \cdot x > k \cdot p \Leftrightarrow x > p$$

un $\frac{n \cdot y + k \cdot p}{n+k} > y \Leftrightarrow n \cdot y + k \cdot p > n \cdot y + k \cdot y \Leftrightarrow p > y$.

Savukārt $\quad p > y_1 \Leftrightarrow \frac{n \cdot y + k \cdot p}{n+k} < p \Leftrightarrow n \cdot y + k \cdot p < n \cdot p + k \cdot p \Leftrightarrow n \cdot y < n \cdot p \Leftrightarrow y < p$.

Vajadzīgais pierādīts.

1.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

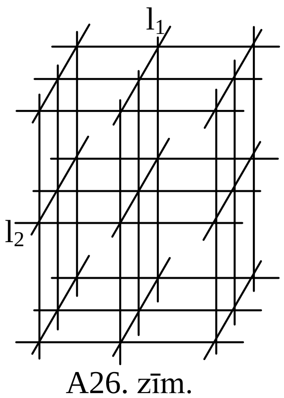
1.5.A1. <u>Atbilde:</u> mazākā iespējamā starpība ir $\frac{1}{15}$.

Apzīmēsim daļu skaitītājus ar x un y. Tad apskatāmā starpība ir pozitīvs skaitlis $\left|\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right| = \frac{|5x-3y|}{15}$. Tā kā |5x-3y|>0 un |5x-3y| ir vesels skaitlis, tad $|5x-3y| \geq 1$. Tāpēc apskatāmā starpība nevar būt mazāka par $\frac{1}{15}$.

Piemērs $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$ parāda, ka tā var būt $\frac{1}{15}$.

1.5.A2. <u>Atbilde:</u> jā, var.

Skat. A26. zīm.



A26. zīm.

Var pamanīt, ka mēs esam attēlojuši plaknē "režģi", kuru telpā veido 8 vienādu klucīšu šķautnes, ja šie klucīši salikti tā, ka tie kopā sastāda vienu lielu "kluci" .

Klucīšu izmēri jāizvēlas tā, lai zīmējumā norādītās taisnes nesakristu (piem., A26. zīm. varētu sakrist l_1 un l_2 , lai gan telpā šīs taisnes, protams, ir dažādas).

1.5.A3. **a)** $67 \cdot 67 = 4489$,

b) $667 \cdot 667 = 444889$

c) $6667 \cdot 6667 = 44448889$

Rodas doma, ka $\underbrace{66\ldots6}_{n}7 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n}7 = \underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9$. Pamatosim to.

Viegli pārbaudīt, ka $\underbrace{66\ldots6}_{n}7 = \frac{1}{3} \cdot 2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$

Tāpēc $\underbrace{66\ldots6}_{n}7 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n}7 = \frac{1}{9} \cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1 \cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1$.

Sareizinot "stabiņā" $2\underbrace{00\ldots0}_{n}1 \cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1$, iegūstam

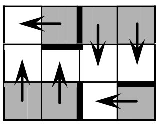
$$\begin{array}{r} 20\ldots01 \cdot 200\ldots01 \\ \hline 2\underbrace{0\ldots0}_{n}1 \\ 4\underbrace{00\ldots0}_{n}2 \\ \hline 4\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}1 \end{array}$$

Viegli pārbaudīt (dalot pēc skolā mācītā paņēmiena), ka $4\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}1 = \underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9$,

k.b.j.

1.5.A4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā redzams A27. zīm.

Griezumus izdara pa biezajām līnijām. Pēc tam pelēkos kvadrātiņus uzlokām virsū baltajiem un ar iegūto "divkāršo " figūru aplīmējam kubu.

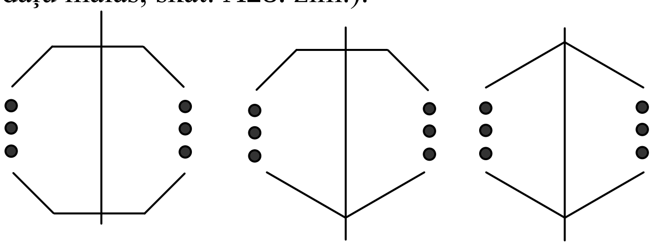


A27. zīm.

1.5.A5. Pēc 1999n griezieniem Jānim būs 1999n + 1 daudzstūris.

a nekādiem 2000 daudzstūriem nav vienāds malu skaits, tad Jānim katra veida daudzstūru (trijstūri, četrstūri u.t.t.) var būt augstākais 1999.

Tāpēc iegūtajiem daudzstūriem kopā ir vismaz $1999 \cdot 3 + 1999 \cdot 4 + 1999 \cdot n + 2000 = = 1999(3 + 4 + \ldots + n) + 2000$ malas. No otras puses, katra griezienа rezultātā kopējais malu skaits visos daudzstūros palielinās ne vairāk kā par 4 (divas malas rodas pilnīgi no jauna grieziena rezultātā, un vēl ne vairāk kā divas no sagrieztā gabala malām katra sadalās divās jauno daļu malās, skat. A28. zīm.).



A28. zīm.

Tāpēc kopējais malu skaits nepārsniedz $4 + 4 \cdot 1999n = 7996n + 4$. Tātad jāpastāv nevienādībai $1999(3 + 4 + \ldots + n) + 2000 \le 7996n + 4$ 1999(3 + 4+ ... + n) + 2000.

Nevienādība nav pareiza, ja, piemēram, n = 10.

Tāpēc mūsu pieņēmums nav pareizs.

1.5.A6. <u>Atbilde:</u> c = 2,d = 8 vai c = 8,d = 2.

Ievērosim, ka (a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c). Tātad no skaitļiem 6; 9; 11 ; 12; 15 jāvar izveidot divus pārus, kuros ieejošo skaitļu summas ir vienādas. Viegli pārbaudīt, ka tas ir iespējams tikai vienā veidā: 6 + 15 = 9 + 12.

Tāpēc a + b + c + d = 21, a + b = 11 un tāpēc c + d = 21 – 11 = 10.

Skaidrs, ka visi naturālie skaitļi a, b, c, d ir dažādi: ja starp tiem būtu vienādi, tad vienādām būtu jābūt arī dažu pāru summām.

Apzīmēsim tagad skaitļus a, b, c, d augošā kārtībā ar $x < y < z < t$. Tad mazākā divu skaitļu summa ir x + y, otrā mazākā x + z, lielākā z + t, otra lielākā y + t.

Tātad x + y = 6, x + z = 9, y + t = 12, z + t = 15.

Iegūstam y = 6 - x, z = 9 - x, t = 12 – y = 6 + x. Tāpēc x + t = 6 + 2x un y + z = 15 - 2x; viena no šīm summām ir 10, otra 11 (tātad viena pāra, otra – nepāra skaitlis).

Tā kā 6 + 2x ir pāra skaitlis un 15 - 2x ir nepāra skaitlis, tad 6 + 2x = 10; no šejienes x = 2, y = 4, z = 7, t = 8. No šiem skaitļiem tikai 2 un 8 dod summā 10. Tāpēc skaitļi c un d ir 2 un 8. Pārbaude parāda, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

B GRUPA

1.5.B1. Atbilde: 361; 529; 784.

Uzdevumā minētie trīsciparu skaitļi var būt tikai 169; 196; 256; 289; 324; 361 ; 529; 576; 625; 729; 784; 841; 961 (mums neder skaitļi ar vienādiem cipariem). Lai izmantotu ciparu 3, jāveido vai nu 324, vai 361.

Pieņemsim, ka viens no kvadrātiem ir 324. Viegli pārbaudīt, ka tad mēs nevaram izmantot ciparu 8. Tāpēc nav jāveido vis 324, bet gan 361. Tad ciparu 4 var izmantot tikai skaitlī 784. No atlikušajiem cipariem 2; 5; 9 var izveidot vienu kvadrātu, proti, 529.

Tāpēc vienīgais atrisinājums ir 361; 529; 784.

1.5.B2. Izvēlamies punktu A. Pieņemsim, ka caur to iet augstākais 3 taisnes. Uz tām ir izvietoti 9 pārējie punkti, tāpēc vismaz uz vienas no šīm taisnēm ir izvietoti vēl vismaz 3 citi punkti bez A; tātad uz šīs taisnes var atrast 4 punktus A, B, C, D. Ņemam punktu S ārpus šīs taisnes (tāds eksistē saskaņā uzdevuma nosacījumiem). Caur to iet četras dažādas taisnes SA, SB, SC, SD (un varbūt vēl kādas citas).

1.5.B3. Atbilde: **a)** var, **b)** nevar.

Ievērosim: ja a + b = 3c, tad a + b + c = 4c, tātad katrā veidojamajā 3 skaitļu grupā skaitļu summa dalās ar 4. Tāpēc, lai prasīto sadalījumu varētu izveidot, visu skaitļu summai no 1 līdz 3n ieskaitot jādalās ar 4.

Tā kā 1 + 2 + 3 + . . . + 18 = 171, tad pie n = 6 uzdevuma prasības nav izpildāmas, jo 171 nedalās ar 4.

Pie n = 8 tās var izpildīt, piemēram, šādi: $\frac{1+5}{2}=3;\ \frac{3+9}{4}=3;\ \frac{10+11}{7}=3;\ \frac{6+18}{8}=3;$

$\frac{16+20}{12}=3;\ \frac{17+22}{13}=3;\ \frac{19+23}{14}=3;\ \frac{21+24}{15}=3.$

1.5.B4. Atbilde: jā, var.

Aizstāsim nepāra skaitļus 1; 3; 5; ...; 1999 attiecīgi ar -1999; -1997; ...; -1 (t.i., samazināsim katru no tiem par 2000). Veicot šādu samazināšanu, nevienas apskatāmās summas dalīšanās vai nedalīšanās ar 2000 nemainās.

Iegūto skaitļu sistēmu sakārtosim šādi: -1; 2; -3; 4; -5; 6; . . . ; -1997; 1998; -1999.

Pierādīsim, ka šis sakārtojums apmierina uzdevuma prasības. Ja jāsaskaita skaitļi "skaitļu nogriezni", kas sākas ar nepāra un beidzas ar pāra skaitli, tad tiek saskaitīti n ($n \le 999$) blakusesošu skaitļu pāri, kur katra pāra skaitļu summa ir (-1). Tāpēc iegūtā kopējā summas vērtība ir -n. Tā kā $|-n| \le 999$, tad šī summa nedalās ar 2000.

Trīs citus gadījumus apskata līdzīgi.

1.5.B5. Atbilde: jā, to var izdarīt.

Līdzīgi kā 100.uzdevuma risinājumā attēlojam plaknē "kluci", kas izveidots no $3 \times 3 \times 3$ maziem vienādiem klucīšiem. Tagad uz katras taisnes ir 4 punkti, bet caur katru punktu iet tikai trīs taisnes.

Caur visiem pašreiz atzīmētajiem 64 punktiem novelkam paralēlas taisnes tā, lai tās visas atšķirtos savā starpā, un atzīmējam vēl trīs jau uzzīmētā režģa kopijas, kas iegūtas, sākotnējo kopiju pārbīdot paralēli tā, lai 64 punkti slīdētu pa novilktajām taisnēm. Kopijas atzīmējam tā, lai neviena jaunā taisne nesakristu ne ar vienu veco.

1.5.B6. No četrām monētām var izveidot 6 monētu pārus ar masām a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d.

Tā kā a < b < c < d, tad a + b un a + c ir attiecīgi mazākā un otrā mazākā no tām, bet c + d un b + d ir attiecīgi lielākā un otrā lielākā no tām.

Vispārīgi runājot, jebkura no abām atlikušajām summām a + d un b + c var būt mazāka par otru. Parādīsim, ka mūsu gadījumā, kad izpildās sakarības 2ac = bd un 3a > 2b, noteikti b + c < a + d.

Tiešām, mums jāpierāda, ka $b + c < a + \frac{2ac}{b}$ jeb, kas ir tas pats,

$b^2 + bc < ab + 2ac$ (*).

Atcerēsimies, ka $a > \frac{2}{3}b$. Tāpēc, ja mēs pratīsim pierādīt nevienādību, kas iegūta no (*), aizstājot a ar $\frac{2}{3}b$ (t.i., samazinot (*) labo pusi), tad būs pierādīta arī (*).

Aizstājot (*) a ar $\frac{2}{3}b$, iegūstam $b^2 + bc < b \cdot \frac{2}{3}b + 2c \cdot \frac{2b}{3}$,

$\frac{b^2}{3} < \frac{bc}{3}$.

Tā ir taisnība, jo b < c. Tāpēc (*) pierādīta.

No šejienes iegūstam, ka ir spēkā nevienādību virkne

a + b < a + c < b + c < a + d < b + d < c + d

Tātad, ja uz katra no svaru kausiem novietos divas monētas, tad noteikti uz leju nosvērsies tas kauss, uz kura atrodas smagākā monēta ar masu d.

Apzīmēsim monētas ar x, y, z, t un izdarām divas svēršanas:

1) salīdzināsim x; y ar z; t

2) salīdzināsim x; z ar y; t

Tieši viena monēta abās svēršanās atradīsies uz kausa, kas nosveras uz leju. Tā arī būs meklējamā smagākā monēta.

1.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.6.A1. Uzdevuma apgalvojums seko no vienādībām

$$(2a - 3)(2a - 1)(2a + 1)(2a + 3) + 16 = (2a - 3)(2a + 3)(2a - 1)(2a + 1) + 16 =$$
$$= (4a^2 - 9)(4a^2 - 1) + 16 = 16a^4 - 40a^2 + 25 = (4a^2 - 5)^2,$$ ievietojot a = 50.

1.6.A2. Atbilde: 10468 un 23579.

Ievērosim, ka $10468 \cdot 23579 = 246824972$. No šejienes uzreiz redzams, ka reizinātāju pirmajiem cipariem jābūt 1 un 2 (visos citos gadījumos reizinājuma pirmais cipars ir vismaz 3 un reizinājumam ir vismaz 9 cipari, tāpēc tas ir lielāks par nupat iegūto.

Vienādība $xy = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2}$ pozitīviem x un y pierāda: ja divu skaitļu summa ir konstanta, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Atcerēsimies, ka no diviem piecciparu skaitļiem mazākais ir tas, kuram mazāks pirmais cipars (ja šie cipari ir dažādi, kā tas ir mūsu gadījumā).
Tāpēc iegūstam: tam skaitlim, kuram ir mazāks pirmais cipars, ir mazāks arī otrais cipars (citādi, samainot otros ciparus - no tā abu skaitļu summa nemainās - reizinājums samazinātos), mazāks arī trešais cipars u.t.t. Bez tam skaidrs arī, ka katrā no abiem reizinātājiem cipariem jābūt novietotiem augošā secībā (izņemot nulli, kas nedrīkst būt skaitļa pirmais cipars); pretējā gadījumā, samainot ciparus augošā secībā, mēs samazinām atbilstošo reizinātāju, tātad arī reizinājumu.
Ierakstīsim reizinātāju ciparus tabulā ar izmēriem 2x5 rūtiņas, mazāko reizinātāju rakstot pirmajā rindiņā. No augstāk minētā seko, ka sekojošu ciparu vietas noteiktas viennozīmīgi:

1	0			
2				9

Ja otrā reizinātāja otrais cipars nav 3, tad reizinājums ir lielāks par 10300x24500=252350000, kas ir vairāk par sākumā iegūto rezultātu. Tāpēc iegūstam ciparu sadalījumu

1	0			
2	3			9

Skaidrs, ka 4 ir trešajā kolonnā; saskaņā ar iepriekšējo tam kā mazākajam simtu ciparam jābūt mazākajā reizinātājā. Iegūstam

1	0	4		
2	3			9

Atlikušos ciparus var ierakstīt tikai piecos veidos tā, lai izpildītos iepriekš minētie nosacījumi. Viens no tiem minēts risinājuma sākumā. Pārējie četri ir:

1	0	4	5	6
2	3	7	8	9

$10456 \cdot 23789=248737784$

1	0	4	5	7
2	3	6	8	9

$10457 \cdot 23689=247715873$

1	0	4	5	8
2	3	6	7	9

$10458 \cdot 23679=247634982$

1	0	4	6	7
2	3	5	8	9

$10467 \cdot 23589=246906063$

Tātad tiešām mūsu sākumā uzrādītais piemērs dod prasīto minimumu.

1.6.A3. Atbilde: jā, to var izdarīt, ripinot kubu tāda taisnstūra iekšpusē, kas sastāv no 10 rūtiņām, katra no kurām vienāda ar kuba skaldni.
Tabulā redzama viena no iespējām, kurā ar numuriem apzīmētas rūtiņas, kurās kubs nonāk pēc kārtējās pārvelšanas. Velšana sākas no rūtiņas ar numuru 12 un arī beidzas šajā rūtiņā.

11	10	3; 9	4	5
12	1	2; 8	7	6

B GRUPA

1.6.B1. Ievērosim, ka

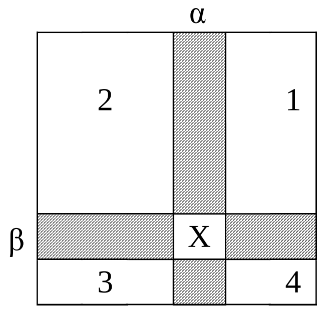
$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot 2000! = 1!\cdot(1!\cdot 2)\cdot 3!\cdot(3!\cdot 4)\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot(1999!\cdot 2000) =$$
$$= (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!)^2\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2000) = 1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(1999!)^2\cdot 2^{1000}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000) =$$
$$= \left(1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot 2^{500}\right)^2\cdot 1000$$

Tātad varam izsvītrot 1000!, un palikušie reizinātāji būs meklētie.

1.6.B2. Viegli pārbaudīt, ka pietiek ar 36 gājieniem, ja mēs izmantojam visus iespējamos pārus "rindiņa - kolonna "(tad katra rūtiņa maina krāsu 11 reizes). Pierādīsim, ka ar mazāk gājieniem nepietiek.

Īsuma pēc ar vārdiem "gājiens x" apzīmēsim krāsu maiņu rindiņā un kolonnā, kam ir kopīga rūtiņa x. Skaidrs, ka katru gājienu vērts izdarīt vai nu 0, vai 1 reizi, jo divreiz izdarīts viens un tas pats gājiens "anulējas". Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrā rindiņas un kolonnas veidotā pārī jābūt izdarītam nepāra skaitam gājienu, lai rezultātā mainītos krāsa šīs rindiņas un kolonas kopējā rūtiņā.

Pieņemsim, ka gājiens x nav izdarīts (skat. A29. zīm.)



A29. zīm.

Aplūkosim iesvītroto apgabalu; katra no tā 10 rūtiņām mainījusi krāsu nepāra skaitu reižu, tāpēc visas šīs 10 rūtiņas kopā mainījušas krāsu pāra skaitu reižu. Gājieni, kas izdarīti apgabalos 1, 2, 3, 4, katrs veido divas maiņas iesvītrotajās rūtiņās, tāpēc tie kopā izsauc tur pāra skaitu krāsu maiņu.

Ja kolonnā a izdarīti a gājieni un rindiņā b - b gājieni, tad tie kopā iesvītrotajā apgabalā radījuši $5\cdot a + 5\cdot b = 5(a+b)$ krāsu maiņas; tāpēc a + b ir pāra skaitlis. Bet tā ir pretruna ar pasvītroto apgalvojumu.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un katrā rūtiņā jābūt izdarītam gājienam. Tāpēc gājienu ir vismaz 36.

1.6.B3. Atbilde: nē, nevar.

Trijstūriem kopā būtu $665\cdot 3 = 1995$ stūri. Katrs 2000 – stūra stūris vienlaikus būtu arī vai nu sākotnējā kvadrāta stūris, vai vismaz viena trijstūra stūris, bet 2000 > 1995 + 4.

Tātad trijstūru stūru ir "pārāk maz", lai "apkalpotu" visus 2000 - stūra stūrus.

2. 27. mācību gads (2000/2001)

2.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.1.A1. Piemēram, tā: $4\to 2\to 1\to 14\to 7$ (iegūti **1**, **2** un **7**); $4\to 2\to 24\to 12\to 6\to 3$ (iegūti **3** un **6**); $4\to 40\to 20\to 10\to 5$ (iegūts **5**); No jau iegūtā skaitļa **6** var tālāk iegūt **4** un **8**: $6\to 64\to 32\to 16\to 8\to 4$.

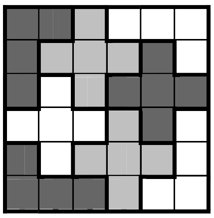
No jau iegūtā skaitļa **1** var tālāk iegūt skaitli **9**: $1\to 14\to 144\to 72\to 36\to 18\to 9$.

2.1.A2. Taisnstūra perimetrs (apkārtmērs) ir $2\cdot 3\text{cm} + 2\cdot 10\text{cm} = 26\text{cm}$. Divos kilometros ir 200000 cm. Dalām 200000 ar 26 ar atlikumu: $200000 = 26\cdot 7692 + 8$ Tātad skudra 7692 reizes aprāpos taisnstūrim apkārt un vēl pēc tam veiks 8cm. Tāpēc ir divas iespējas: 1) ja skudra no A devās virzienā uz B, tad viņa kustību beigs uz malas BC; 2) ja skudra no A devās virzienā uz D, tad viņa kustību beigs uz malas AD.

2.1.A3. Apzīmēsim šos pirmskaitļus ar x, y un z. Tad $x^2 + y^2 + z^2 = 414$. Tā kā x^2, y^2, z^2 ir naturāli skaitļi un to summa ir pāra skaitlis, tad vai nu tie visi ir pāra skaitļi, vai arī viens no tiem ir pāra skaitlis, divi – nepāra. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Tā kā $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \neq 411$, tad pirmais gadījums nav iespējams. Otrajā gadījumā pieņemam, ka x = 2. Tad $y^2 + z^2 = 410$. Izrakstām dažu pirmo nepāra pirmskaitļu kvadrātus: $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$. Tā kā visi pirmskaitļu kvadrāti ir pozitīvi, tad gan y, gan z jāmeklē starp skaitļiem 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19. Pārbaudot visas šīs y vērtības, redzam, ka der tikai y = 7 (tad z = 19), y = 11 (tad z = 17), y = 17 (tad z = 11) un y = 19 (tad z = 7).
Atbilde. Meklējamie pirmskaitļi ir 2; 7; 19 vai 2; 11; 17.

2.1.A4. Atbilde. 600 skaitļi.
Risinājums. Skaitļu pierakstā var lietot ciparus 0; 1; 2; 3; 4; 5. Iedalīsim visus Jānītim patīkamos skaitļus divās klasēs: **1)** tie skaitļi, kas nesatur ciparu 0. Šo skaitļu cipari (neņemot vērā atkārtošanos un kārtību) var būt **(*)** 123; 124; 125; 134; 135; 145; 234; 235; 245; 345. No katriem trim dažādiem nenulles cipariem a, b, c var izveidot divpadsmit Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars a. Tie ir aabc, aacb, abac, acab, abca, acba, baac, caab, baca, caba, bcaa, cbaa. Tāpat var izveidot 12 Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars b, un 12 Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars c. Tātad no cipariem a, b, c var izveidot 36 Jānītim patīkamus skaitļus.
Tā kā pašus ciparus a, b, c var izvēlēties 10 veidos (skat. (*)), tad apskatāmajā klasē ir $36 \cdot 10 = 360$ Jānītim patīkami skaitļi. **2)** skaitļi, kas satur ciparu 0. Šo skaitļu cipari (neņemot vērā atkārtošanos un kārtību) var būt 012, 013, 014, 015, 023, 024, 025, 034, 035, 045. Aplūkosim ciparus 0, b un c, kur b un c ir dažādi no nulles atšķirīgi cipari. No tiem var izveidot 6 skaitļus, kuros atkārtojas cipars "nulle" (šie skaitļi ir b00c, c00b, b0c0, c0b0, bc00, cb00) un 9 skaitļus, kuros atkārtojas cipars b (šie skaitļi ir bb0c, bbc0, b0bc, bcb0, b0cb, bc0b, cbb0, cb0b, c0bb); līdzīgi var izveidot 9 skaitļus, kuros atkārtojas cipars c. Tātad no 0; b; c var izveidot 6 + 9 + 9 = 24 Jānītim patīkamus skaitļus. Tā kā pašus ciparus b un c var izvēlēties 10 veidos, tad apskatāmajā klasē ir $24 \cdot 10 = 240$ Jānītim patīkami skaitļi. Tātad pavisam ir 360 + 240 = 600 Jānītim patīkamu skaitļu.

2.1.A5. Jā, var. Skat., piem., A30. zīm.



A30. zīm.

2.1.A6. Pirmā iespēja: baltajā kastē 1, sarkanajā no 2 līdz 99 ieskaitot, zaļajā kastē 100. Tādā gadījumā, izvelkot kartiņas no baltās un sarkanās kastes, summa ir no 3 līdz 100; izvelkot kartiņas no baltās un zaļās kastes, summa ir 101; izvelkot kartiņas no sarkanās un zaļās kastes, summa ir no 102 līdz 199. Tātad summas zināšana ļauj noskaidrot prasīto. Otrā iespēja: baltajā kastē skaitļi 1; 4; 7; ...; 97; 100 (t.i., skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 1), sarkanajā kastē skaitļi 2; 5; 8; ...; 95; 98 (t.i., skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 2), zaļajā kastē skaitļi 3; 6; 9; ...; 96; 99 (t.i., skaitļi, kas dalās ar 3). Izvelkot kartiņas no baltās un sarkanās kastes, summa dalās ar 3; izvelkot tās no baltās un zaļās kastes, summa dod atlikumu 1, dalot ar 3; izvelkot tās no sarkanās un zaļās kastes, summa dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad summas zināšana ļauj noskaidrot prasīto. Piezīme. B grupas 6. uzdevuma risinājumā pierādīts, ka citu, būtiski atšķirīgu kartiņu sadalījumu, kas garantē trika izdošanos, nav.

B GRUPA

2.1.B1. Dotā uzdevuma vietā risināsim apgriezto uzdevumu: vai no jebkura naturāla skaitļa starp 1 un 100 ieskaitot var iegūt 4, ja ar vienu gājienu skaitli var reizināt ar 2 vai arī nosvītrot tam pēdējo ciparu (ja šis cipars ir 0 vai 4)? A grupas 1. uzdevuma risinājumā parādīts, ka šādā ceļā 4 var iegūt no visiem viencipara naturāliem skaitļiem. Atliek aplūkot divciparu naturālos skaitļus un skaitli 100. Ievērosim, ka nosvītrot skaitlim pēdējo ciparu 0 nozīmē šo skaitli izdalīt ar 10, bet nosvītrot tam pēdējo ciparu 4 nozīmē vispirms no tā atņemt 4 un tad iegūto rezultātu izdalīt ar 10. Tāpēc pieļautā cipara nosvītrošana visos gadījumos samazina skaitli vismaz 10 reizes.

a) Apskatīsim sekojošu tabulu

Skaitlis, kas beidzas ar ciparu	Pareizina to ar 2	Rezultāts lielāks par sākotnējo skaitli	Rezultāts beidzas ar ciparu
0			
1	2 reizes	4 reizes	4
2	1 reizi	2 reizes	4
3	3 reizes	8 reizes	4
4			
5	1 reizi	2 reizes	0
6	2 reizes	4 reizes	4
7	1 reizi	2 reizes	4
8	3 reizes	8 reizes	4

Ja iegūtajam rezultātam nosvītro pēdējo ciparu (4 vai 0), tas samazinās vismaz 10 reizes; tātad tagad iegūtais skaitlis ir mazāks par sākotnējo.

b) Ja sākotnējais skaitlis beidzas ar 0 vai 4, tad, nosvītrojot pēdējo ciparu, arī iegūst naturālu skaitli, kas mazāks par sākotnējo.

c) Pārveidojumi $19 \to 38 \to 76 \to 304 \to 30 \to 3$,
$29 \to 58 \to 116 \to 232 \to 464 \to 46 \to 92 \to 184 \to 18$,
$39 \to 78 \to 156 \to 624 \to 62 \to 124 \to 12$,
$49 \to 98 \to 196 \to 784 \to 78 \to 156 \to 312 \to 624 \to \to 62 \to 124 \to 12$,
$59 \to 118 \to 472 \to 944 \to 94 \to 9$,
$69 \to 138 \to 276 \to 552 \to 1104 \to 110 \to 11$,
$79 \to 158 \to 316 \to 632 \to 1264 \to 126 \to 252 \to$
$\to 504 \to 50$,
$89 \to 178 \to 356 \to 712 \to 1424 \to 142 \to 284 \to 28$
$99 \to 198 \to 396 \to 792 \to 1584 \to 158 \to 316 \to$
$\to 632 \to 1264 \to 126 \to 252 \to 504 \to 50$ parāda, ka arī skaitļus no 1 līdz 100, kas beidzas ar ciparu 9, var pārveidot par mazākiem naturāliem skaitļiem. No a), b) un c) izriet, ka visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot var pārveidot par 4. Tiešām, pieņemsim, ka ir tādi skaitļi, kurus tā pārveidot nevar. Apzīmēsim ar n mazāko no tiem. Tad $n \geq 10$ (jo saskaņā ar A grupas 1. uzdevumu visus viencipara skaitļus var pārveidot par 4). Tā kā n – mazākais no "nepārveidojamiem" skaitļiem, tad skaitļus 1, 2, 3, ..., n-1 var pārveidot par tādu skaitli k, ka k < n. Tā kā k ir viens no skaitļiem 1, 2, 3, ..., n-1, tad k var tālāk pārveidot par 4. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka n nevar pārveidot par 4. Tātad šis pieņēmums ir nepareizs, un tāda naturāla skaitļa n, ka $1 \leq n \leq 100$ un n nevar pārveidot par 4, nemaz nav.

2.1.B2. Atbilde: pildspalva – 19 sant., flomasters – 26 sant., klade – 55 sant. Atrisinājums. Apzīmēsim pildspalvas, flomastera un klades cenas santīmos attiecīgi ar p, f un k. Tad (1) p + f + k = 100, (2) k > 2f, (3) 3f > 4p, (4) 3p > k. Tā kā k un f – naturāli skaitļi un pirmais naturālais skaitlis, kas lielāks par 2f, ir 2f + 1, tad no (2) iegūstam (5) $k \geq 2f + 1$. Līdzīgi no (3) un (4) iegūstam (6) $3f \geq 4p+1$, (7) $3p \geq k+1$. No (6) iegūstam $4p \leq 3f-1$ un tāpēc (8) $p \leq 0{,}75f-0{,}25$. No (7) un (8) seko, ka (9) $k \leq 3p-1 \leq 3(0{,}75f-0{,}25)-1 = 2{,}25f-1{,}75$.

No (1), (8) un (9) seko, ka $100 = p+f+k \leq 0{,}75f-0{,}25+f+2{,}25f-1{,}75$ jeb $100 \leq 4f-2$, no kurienes $4f \geq 102$ un $f \geq 102:4 = 25{,}5$. Tā kā f - naturāls skaitlis, tad (10) $f \geq 26$ Pieņemsim, ka $f \geq 27$. Tad $k > 2f \geq 54$, tāpēc $k \geq 55$; savukārt $3p > k \geq 55$, tāpēc $3p > 55$ un $p > 18{,}0333$; tā kā p – naturāls skaitlis, tad $p \geq 19$. Tad $p+f+k \geq 19+27+55 = 101$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc nevar būt $f \geq 27$. Tad no (10) seko, ka (11) f = 26 No (3) iegūstam, ka 4p < 78 un p < 19,5. Tā kā p – naturāls skaitlis, tad (12) $p \leq 19$ Pieņemsim, ka $p \leq 18$. Tad no (4) seko, ka $k < 3p \leq 54$, tātad $k \leq 53$. Tad $p+f+k \leq 18+26+53 = 97$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc nevar būt $p \leq 18$. Tad no (12) seko, ka p = 19, un no (1) atrodam, ka k = 55. Pārbaude parāda, ka visi nosacījumi izpildās.

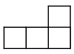
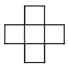
2.1.B3. To, ka cilvēkam X galvā ir sarkana vai zaļa cepure, apzīmēsim attiecīgi ar X ~ s un X ~ z. Pieņemsim, ka B ~ s. Tad B runā patiesību, un A, C, D, E valkā zaļas cepures, tātad melo. Bet tad iznāk, ka C ir teicis patiesību (jo viņš redz sarkano B cepuri un zaļās A, D, E cepures). Iegūta pretruna. Tātad nav taisnība, ka B ~ s. Tātad B ~ z, un B melo. No šejienes skaidrs, ka D melo, tātad D ~ z. No šejienes skaidrs, ka A melo, tāpēc A ~ z. Pieņemsim, ka E ~ z. Tad C melo, tātad C ~ z. Bet tad D runā patiesību, un tā ir pretruna. Tāpēc E ~ s. Tātad C runā patiesību, un C ~ s.

2.1.B4. Atbilde: 96210.

Risinājums. No diviem naturāliem skaitļiem lielāks ir tas, kurā vairāk ciparu. Ja ciparu skaits ir vienāds, tad lielāks tas, kurā lielāks pirmais cipars; ja sakrīt arī pirmie cipari, tad lielāks tas, kurā lielāks otrais cipars utt. Tā kā lielākā iespējamā cipara vērtība ir 9 un pat piecu dažādu mazāko ciparu summa ir 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9, tad mūsu meklējamā skaitlī M bez pirmā cipara nav vairāk par 4 citiem. Meklēsim M kā piecciparu skaitli, kas sākas ar 9. Apzīmēsim $M = \overline{9abcd}$. Tad a + b + c + d = 9. Skaidrs, ka $b+c+d \geq 0+1+2 = 3$ (saskaitām trīs mazākos ciparus). Tāpēc $a = 9-(b+c+d) \leq 6$.

Meklēsim M kā piecciparu skaitli, kas sākas ar 96: $M = \overline{96bcd}$. Tagad b+c+d = 3. Tā kā $c+d \geq 0+1 = 1$, tad $b \leq 2$. Ņemam lielāko iespējamo b vērtību b = 2. Tad c + d = 1; lielākā iespējamā c vērtība ir 1, un tad d = 0. Esam ieguvuši sākumā minēto atbildi.

2.1.B5. Atbilde: to izdarīt nav iespējams.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka to ir izdevies izdarīt. Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā tā, lai stūru rūtiņas būtu melnas; tad ir 41 melna rūtiņa un 40 baltas rūtiņas. Katrā  veida figūriņā ir 2 melnas un 2 baltas rūtiņas, bet katrā  veida figūriņā melno un balto rūtiņu skaita starpība dalās ar 3 (tā ir 0, +3 vai -3). Tātad tā dalās ar 3 arī visā kvadrātā. Bet visā kvadrātā tā ir 41-40=1, kas ar 3 nedalās. Iegūta pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.

2.1.B6. Iedomāsimies, ka mums ir bērza, priedes un egles koka kastes. A grupas 6. uzdevuma risinājumā mēs atradām šādus divus derīgus sadalījumus:

	Bērza	Priedes	Egles
(*)	1	2; 3; 4;...;98; 99	100
(**)	1; 4; 7; ...94; 97; 100	2; 5; 8;...95; 98	3; 6; 9; ...96; 99

Tā kā kastes var nokrāsot baltā, sarkanā un zaļā krāsā 6 veidos (skat. nākošo tabulu), tad no katra no minētajiem diviem sadalījumiem var iegūt sešus kartiņu sadalījumus baltā, sarkanā un zaļā kastē.

Bērza	Priedes	Egles
b	s	z
b	z	s
s	b	z
s	z	b
z	b	s
z	s	b

Tātad pašreiz esam atraduši 12 sadalījumus. Pierādīsim, ka citu sadalījumu, kas nodrošina trika izdošanos, nav. Vispirms atzīmēsim: kartīšu sadalījums kastēs negarantē trika izdošanos tādā un tikai tādā gadījumā, ja atrodas tādi četri dažādi skaitļi a, b, c un d, ka vienlaicīgi: 1) a + b = c + d, 2) kartiņas a un b atrodas dažādās kastēs, 3) kartiņas c un d atrodas dažādās kastēs, 4) tās divas kastes, kurās atrodas a un b, nav tās pašas divas kastes, kurās atrodas c un d. (Tiešām, tādā gadījumā mākslinieks dzird to pašu skaitli gan a un b, gan c un d izvilkšanas gadījumā un nevar izvēlēties starp šīm iespējām.) Apzīmēsim kastes ar I, II, III. To, ka kartīte ar skaitli x atrodas kādā kastē, apzīmēsim ar xĪI (xĪII, xĪIII); to, ka kartīte ar skaitli x neatrodas kādā kastē, apzīmēsim ar xĻI (xĻII, xĻIII). Pieņemsim, ka kādā sadalījumā šādus četrus skaitļus a, b, c, d atrast nevar (t.i., sadalījums garantē trika izdošanos). Šķirojam divus gadījumus. A. Eksistē tāds skaitlis i, ka skaitļi i, i + 1, i + 2 pieder dažādām kastēm; varam pieņemt, ka iĪI, i + 1ĪII, i + 2ĪIII. Pētīsim, kur var atrasties skaitlis i + 3 (ja tāds eksistē, t.i., ja $i+3\leq 100$) un kur – skaitlis i-1 (ja tāds eksistē, t.i., ja $i-1\geq 1$): 1) vienādība i + (i + 3) = (i + 1) + (i + 2) parāda, ka i + 3ĻII un i + 3ĻIII, Tāpēc noteikti i + 3ĪI. 2) vienādība (i - 1) + (i + 2) = i + (i + 1) parāda, ka i-1ĻI un i - 1ĻII. Tāpēc noteikti i - 1ĪIII. Līdzīgi secina, ka i + 4ĪII, i + 5ĪIII, i + 6ĪI utt., kā arī i - 2ĪII, i - 3ĪI, i - 4ĪIII utt. Tātad šajā gadījumā mēs iegūstam sadalījumu, kas atbilst (**) (skat. risinājuma sākumu). B. Nekādi trīs pēc kārtas sekojoši skaitļi nepieder trim dažādām kastēm. Pieņemsim, ka 1ĪI. Ar n apzīmēsim mazāko skaitli, kas nepieder kastei I; pieņemsim, ka nĪIII. (Tātad n-1ĪI). Ar k apzīmēsim mazāko skaitli, kas pieder kastei III. Saskaņā ar augstāk izdarīto pieņēmumu $k > n + 1$. Pierādīsim, ka $k = 100$. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka $k < 100$. Tad skaitlis k + 1 uzrakstīts uz kādas kartiņas. No vienādības $n + k = (n - 1) + (k + 1)$ seko, ka k + 1ĪI. Bet tad no vienādības $n + (k + 1) = (n + 1) + k$ seko, ka n + 1ĪIII. Bet $n + 1 < k$ un k ir mazākais skaitlis III kastē; iegūta pretruna. Tātad tiešām $k = 100$. Tātad III kastē atrodas tikai viens skaitlis 100. No vienādības $(n – 1) + 100 = n + 99$ seko, ka 99ĪII. Pieņemsim, ka x ir kāds no skaitļiem 2, 3, ..., 98. Pieņemsim, ka xĪI. Tad no vienādības x + 99 = (x - 1) + 100 seko, ka x - 1ĪIII. Bet jau iepriekš noskaidrojām, ka kastē III ir tikai skaitlis 100. Iegūta pretruna, tātad xĻI. Tāpēc xĪII. Esam ieguvuši sadalījumu, kas risinājuma sākumā apzīmēts ar (*). Tātad citu sadalījumu bez 12 mūsu atrastajiem nav.

2.2. OTRĀ NODARBĪBA

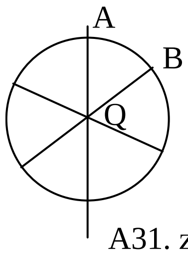
A GRUPA

2.2.A1. Ievērojam, ka $40+39+38+\ldots+3+2+1=(40+1)+(39+2)+\ldots+(21+20)=$ $=41\cdot 20=820$. Summu 500 iegūsim, ja pievienosim "-" zīmes tādiem saskaitāmajiem, kuru summa pašreiz ir 160: tad izteiksmes vērtība kļūs 820 – 160 + (- 160) = 500.

Acīmredzot "-" zīmju skaits būs vislielākais, ja tās pievienosim iespējami maziem saskaitāmajiem. Veidojam summu 160, izmantojot vismazākos saskaitāmos.

Ievērojam, ka 1 + 2 + 3 + ... + 16 + 17 = 153 < 160, bet 1 + 2 + 3 + ... + 17 + 18 > 160. Tātad nevar būt vairāk par 17 "-" zīmēm, un tās var pievienot, piemēram, skaitļiem 1; 2; 3; ...; 15; 16; 24.

2.2.A2. Taisne AQ iet caur centru. (Skat. A31. zīm.). Konstruējot līdzīgā ceļā taisni caur punktu B, centrs atradīsies šo abu taišņu krustpunktā.



A31. zīm.

2.2.A3. Cipariņš var nobraukt 30000 km.Divas riepas viņš visu laiku izmanto kā priekšējās, bet pārējās trīs (apzīmēsm tās ar A, B, C) kā aizmugurējās sekojošā secībā: 10000 km – A un B, 10000 km – B un C, 10000 km – A un C.

Pamatosim, ka Cipariņš nevar nobraukt lielāku attālumu.

Nobraucot 1km, priekšējā riepa nolietojas par $\frac{1}{30000}$ savas vērtības, bet aizmugurējā – par $\frac{1}{20000}$ savas vērtības. Tātad, nobraucot s km, kopējais riepu nolietojums ir $2 \cdot \frac{s}{30000} + 2 \cdot \frac{s}{20000}$. Tā kā pavisam Cipariņš nevar nolietot vairāk par 5 riepām, tad

$$2 \cdot \frac{s}{30000} + 2 \cdot \frac{s}{20000} \le 5$$

$$\frac{2s}{3} + s \le 50000$$

$$\frac{5s}{3} \le 50000$$

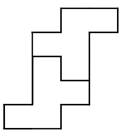
$$s \le \frac{3 \cdot 50000}{5} = 30000$$

2.2.A4. Ciparus 4; 6; 8 nevar izmantot kā vienu ciparus. Tātad tie lietoti vismaz kā desmitu cipari. Ciparus 2 un 5 var katru izmantot kā vienu ciparu augstākais vienu reizi (veidojot pirmskaitļus 2 un 5). Tāpēc meklējamā summā abi cipari 4 dod "ieguldījumu" $2 \cdot 40$ vai vairāk, abi cipari 6 – "ieguldījumu" $2 \cdot 60$ vai vairāk, abi cipari 8 – "ieguldījumu" $2 \cdot 80$ vai vairāk, cipari 2 un 5 – attiecīgi "ieguldījumu" 20 + 2 un 50 + 5 vai vairāk, cipari 1; 3; 7; 9 – attiecīgi "ieguldījumu $2 \cdot 1$; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 7$; $2 \cdot 9$. Tātad meklējamā summa nevar būt mazāka par $2 \cdot 40 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 80 + 20 + 2 + 50 + 5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 477$.

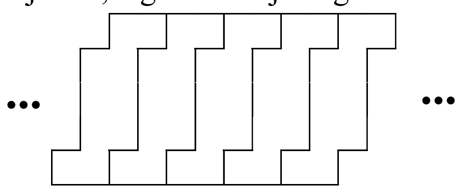
To ka tā var būt 477, parāda piemērs $2 + 5 + 23 + 41 + 47 + 59 + 61 + 67 + 89 = 477$.

Komentāri. **1.**Summu 477 var iegūt arī citādi. Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu nav. **2.** Pamēģiniet atrisināt līdzīgus uzdevumus, kuros a) katru nenulles ciparu lieto vienreiz (atbilde ir 207), b) katru nenulles ciparu lieto trīsreiz (atbilde ir 1107).

2.2.A5. A32. zīm. redzams, kā no divām dotā veida figūrām var izveidot "S burtu". Savukārt A33. zīm. redzams, kā no "S burtiem" var izveidot cik patīk garu joslu ar platumu 5 rūtiņas. Saliekot kopā divas šādas joslas, iegūstam vajadzīgo.



A32. zīm.



A33. zīm.

2.2.A6. Skaidrs, ka 7. un 8. kartiņas ieliktas dažādās kaudzītēs. Tātad pēc astotā gājiena abu kaudzīšu augšpusē bija baltas kartiņas.

Ievērosim: uzdevuma nosacījumi pieļauj, ka Jānis tālāk devis Andrim šādas kartiņas: 9. – sarkanu, 10. – baltu, 11. – sarkanu, 12. – baltu, ..., 18. – baltu, 19. – sarkanu, un Andris tās visas licis vienā kaudzītē. Tad šīs kaudzītes virspusē atrodas sarkana kartiņa, bet otras kaudzītes virspusē - balta. Tāpēc nākošā kartīte var būt gan balta, gan sarkana, un tās krāsa nav viennozīmīgi nosakāma.

B GRUPA

2.2.B1. Ievērosim, ka $2\cdot2\cdot2=8<9$ un $2\cdot2\cdot2\cdot2=16>15$. Tāpēc

$$\underbrace{9\cdot9\cdot\ldots\cdot9}_{16\text{ reizes}}>\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{3\cdot16=48\text{ reizes}}=\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{4\cdot12\text{ reizes}}=\underbrace{16\cdot16\cdot\ldots\cdot16}_{12\text{ reizes}}>$$

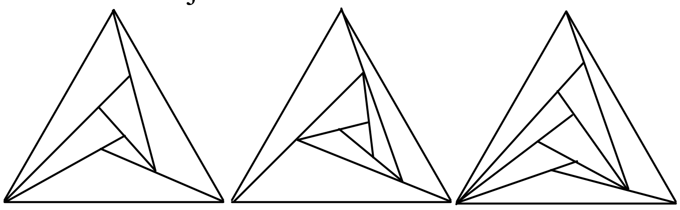
$$>\underbrace{15\cdot15\cdot\ldots\cdot15}_{12\text{ reizes}}$$

2.2.B2. Meklēsim vispirms tādus naturālus skaitļus x. Uzdevuma risinājumā mēs būtiski izmantosim faktu "divi apgalvojumi, kas apskatāmajā apgalvojumu virknē neatrodas blakus, vienlaicīgi nevar būt nepareizi". Pieņemsim, ka x nedalās ar 5. Tad x nedalās arī ar 10. Bet apgalvojumi "x dalās ar 5" un "x dalās ar 10" neatrodas blakus. Tāpēc iegūta pretruna. Tātad x dalās ar 5.

Līdzīgi iegūst, ka x dalās ar 4 un ar 3. Tātad x dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12. Apgalvojumi, kuri varētu būt nepareizi, ir x dalās ar 7; x dalās ar 8; x dalās ar 9; x dalās ar 11; x dalās ar 13.

No tiem divus blakusesošus apgalvojumus var izvēlēties tikai divos veidos. Aplūkosim abas iespējas. **A** Skaitlis x nedalās ar 7 un 8, bet dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11; 12; 13. Tātad x dalās arī ar reizinājumu $4\cdot5\cdot9\cdot11\cdot13=25740$. Tāpēc x var būt 25740 un $3\cdot25740=77220$. Tā kā $4\cdot25740$ jau satur vairāk nekā 5 ciparus, bet $2\cdot25740$ dalās ar 8, tad citu iespēju nav. **B** Skaitlis x nedalās ar 8 un 9, bet dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13. Tad x dalās arī ar $3\cdot4\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13=60060$. Tā kā jau $2\cdot60060$ satur vairāk nekā 5 ciparus, tad citu iespēju nav. Skaidrs, ka no negatīviem veseliem skaitļiem der tikai -25740, -77220; -60060, bet 0 neder, jo 0 dalās ar jebkuru naturālu skaitli.

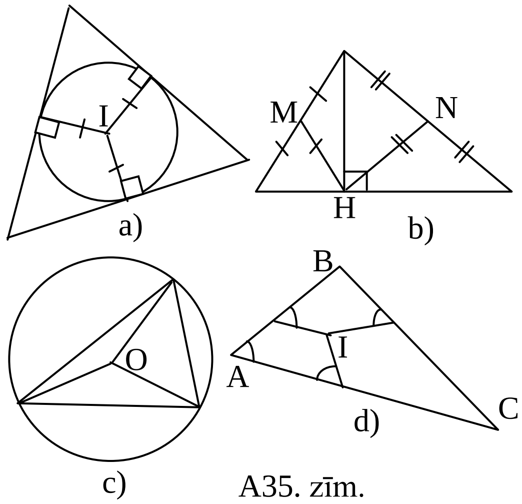
2.2.B3. Visos gadījumos atbilde ir "jā". Skat. A34. zīm.



A34. zīm.

2.2.B4. Tā kā $45^2=2025$, tad, izrakstot skaitļus no 1 līdz 2025 norādītajā veidā, mēs būsim aizpildījuši kvadrātu ar "1" centrā un malas garumu 45; pie tam 2025 būs šī kvadrāta labajā apakšējā stūrī. Tātad 2000 būs šī kvadrāta apakšējā malā, 25 rūtiņas pa kreisi no 2025. Tāpēc skaitlis 2000 nobīdīts attiecībā pret 1 par 22 rūtiņām uz leju un par 3 rūtiņām pa kreisi.

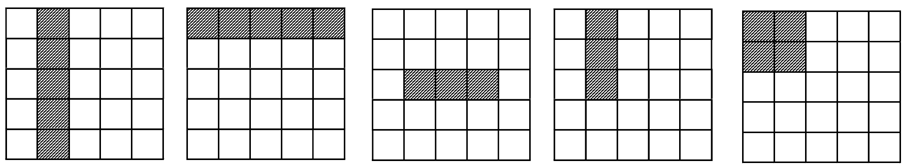
2.2.B5. Skat. A35. zīm. Pierādījumus veiciet patstāvīgi.



A35. zīm.

a) un d) variantā I ir ievilktās riņķa līnijas centrs, pie tam d) variantā AC ir garākā mala, bet AB - īsākā. b) variantā H ir augstuma pamats, bet M un N – malu viduspunkti. c) variantā O ir apvilktās riņķa līnijas centrs.

2.2.B6. Mērķi var sasniegt ar 8 gājieniem, pārkrāsojot 2.; 4.; 6.; 8. kolonnu (skaitot no kreisās puses) un 2.; 4.; 6.; 8. rindu (skaitot no lejas). Parādīsim, ka ar mazāku gājienu skaitu nepietiek. Gar galdiņa malu ir 28 rūtiņas, kas nokrāsotas pamīšus - melna, balta, ..., melna, balta. Tāpēc tur 28 vietās robežojas dažādu krāsu rūtiņas. Šīs 28 atšķirības ir jālikvidē. Pārbaudiet patstāvīgi, ka katrs gājiens likvidē augstākais 4 no šīm atšķirībām (skat. A36. zīm.), turklāt vismaz diviem gājieniem jābūt b) vai e) tipa (lai pārkrāsotu baltos stūra lauciņus); bet gan b), gan e) tipa gājieni likvidē augstākais 2 atšķirības katrs. Tāpēc ar 7 gājieniem nevar likvidēt vairāk par $5\cdot4+2\cdot2=24<28$ atšķirībām.



A36. zīm.

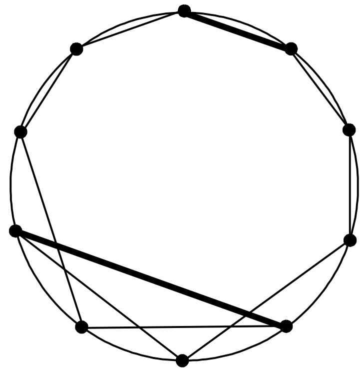
2.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

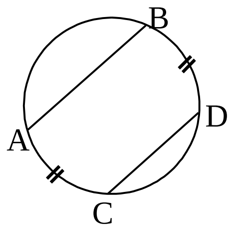
2.3.A1. Visās pārliešanās vai nu kādu trauku izlej tukšu, vai pielej līdz malām pilnu. Mērķi var sasniegt, piemēram, sekojoši (bultiņa parāda, no kura trauka uz kuru pārlej):

Veikto pārliešanu daudzums	30 l traukā	9 l traukā	12 l traukā
0	30	0	0
1	18	0	12
2	18	9	**3**
3	27	0	3
4	27	3	0
5	15	3	12
6	15	9	**6**

2.3.A2. Skat., piem., A37. zīm.



A37. zīm.



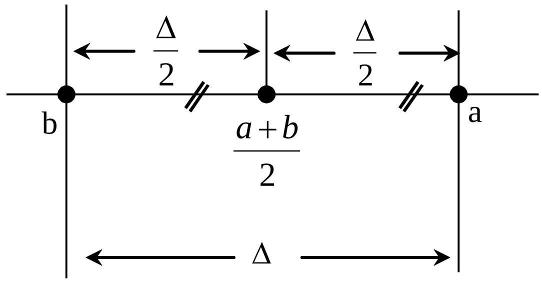
A38. zīm.

Pamatojumam atceramies, ka visi loki starp dalījuma punktiem ir vienādi un ka hordas AB un CD (skat. A38. zīm.) ir paralēlas tad un tikai tad, ja loki $\overset{\cup}{AC}$ un $\overset{\cup}{BD}$ ir vienādi savā starpā.

2.3.A3. **I** Skaitli 70 var iegūt, piemēram, kā
((1:2):3):((((4:5):6):7):8)
II Mazāku naturālu skaitli par 70 iegūt nevar. Skaitļos 2; 3; ...; 8 kopā kā pirmreizinātāji ir 7 divnieki, 2 trijnieki, 1 piecinieks un 1 septītnieks. Divnieku, piecinieku un septītnieku ir nepāra skaits. Lai izteiksmes vērtība būtu naturāls skaitlis, neviens no šiem pirmskaitļiem nedrīkst saucējā būt sastopams vairāk reižu nekā skaitītājā; tāpēc pēc saīsināšanas skaitītājā paliek vismaz pa vienam divniekam, pieciniekam un septītniekam (un varbūt vēl kaut kas). Tāpēc daļas vērtība ir vismaz $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

2.3.A4. a) ar katru gājienu rindā esošo nenosvītroto skaitļu skaits samazinās par vienu. Tāpēc tiek izdarīti 2000 – 1 = 1999 gājieni. Tā kā ar katru gājienu uzraksta klāt vienu skaitli, tad procesa beigās rindā būs uzrakstīti $2000 + 1999 = 3999$ skaitļi. b) visu nenosvītroto skaitļu summa paliek nemainīga. Tāpēc beigās tā ir tāda pati kā sākumā, t. i., 2000. Tā kā beigās tā sastāv no viena vienīgā nenosvītrotā skaitļa, tad vienīgais nenosvītrotais skaitlis ir 2000.

2.3.A5. Ar katru gājienu abu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) samazinās divas reizes. Tiešām, ja uz tāfeles uzrakstīti skaitļi a un b, kur a > b, tad: 1) ja b aizstāj ar $\frac{a+b}{2}$, tad uz tāfeles paliek $\frac{a+b}{2}$ un a, un $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$. 2) ja a aizstāj ar $\frac{a+b}{2}$, tad uz tāfeles paliek $\frac{a+b}{2}$ un b, un $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ (Ģeometrisko ilustrāciju skat. A39. zīm.)



A39. zīm.

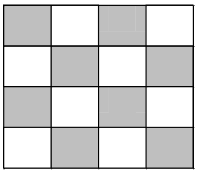
Ja operāciju veiktu 11 reizes, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu starpība samazinātos $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{11\,\text{reizes}} = 2048$ reizes. Bet sākotnēji tā bija mazāka par 2000. Tāpēc beigās tā būtu mazāka par 1; bet tā nevar būt, jo divu dažādu naturālu skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) nav mazāka par 1. Iegūta pretruna, tātad vajadzīgais pierādīts. Sekojošā piemērā aprakstīto operāciju veic 10 reizes.

Sākumā	2000; 976
Pēc 1. reizes	2000; 1488
Pēc 2. reizes	2000; 1744
Pēc 3. reizes	2000; 1872
Pēc 4. reizes	2000; 1936
Pēc 5. reizes	2000; 1968
Pēc 6. reizes	2000; 1984
Pēc 7. reizes	2000; 1992
Pēc 8. reizes	2000; 1996
Pēc 9. reizes	2000; 1998
Pēc 10. reizes	2000; 1999

2.3.A6. Atbilde: 60. Risinājums. Apzīmēsim dažās rūtiņās ierakstītos skaitļus ar burtiem kā parādīts A40. zīm.

a		b	II
I	c		d
e		f	
	g	III	h

A40. zīm.



A41. zīm.

5	5	5	5
5	0	0	5
5	0	0	5
5	5	5	5

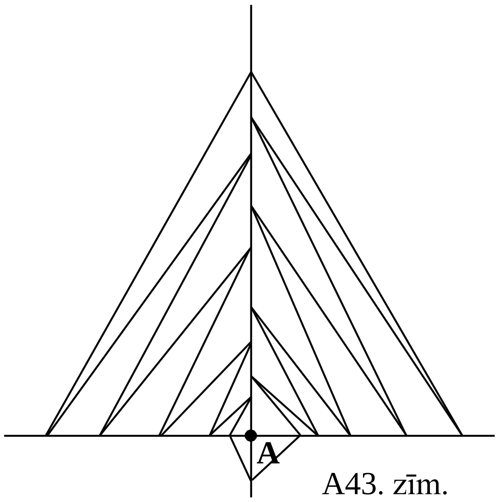
A42. zīm.

Pielietojot uzdevuma nosacījumus rūtiņai I, iegūstam $a + c + e = 10$; pielietojot tos rūtiņām II un III, attiecīgi iegūstam $b + d = 10$ un $g + f + h = 10$. Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam $a + b + c + d + e + f + g + h = 30$. Ja mēs rūtiņas izkrāsojam šaha galdiņa secībā (skat. A41. zīm.), tad redzam, ka melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 30. Skaidrs, ka līdzīgu spriedumu rezultātā atradīsim: arī baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 30. Tātad visu skaitļu summa ir $30 + 30 = 60$. Skaitļu ierakstīšanas piemērs saskaņā ar uzdevuma noteikumiem dots A42. zīm. Lai risinājums būtu pilnīgs, šāds piemērs noteikti jāuzrāda, jo principā varētu gadīties, ka skaitļus uzdevumā minētajā veidā ierakstīt nemaz nevar, un tad pareizā atbilde būtu "tādas summas vispār nav".

B GRUPA

2.3.B1. **I** Pārslēdzot katru slēdzi tieši vienu reizi, visu slēdžu stāvokļi būs mainījušies uz pretējo sākotnējam. Pierādīsim to. Apskatām patvaļīgu slēdzi X. Šī slēdža stāvoklis augstāk aprakstītajā procesā ir mainījies tieši 89 reizes: a) pārslēdzot pašu slēdzi X, b) pārslēdzot jebkuru no 39 slēdžiem, kas ar X ir vienā kolonnā, c) pārslēdzot jebkuru no 49 slēdžiem, kas ar X ir vienā rindā. Tā kā $1 + 39 + 49 = 89$ ir nepāra skaitlis, tad gala rezultātā slēdzis X ir mainījis savu stāvokli uz pretējo sākotnējam. Acīmredzot, šādā ceļā rīkojoties, mēs veicam $40 \cdot 50 = 2000$ pārslēgšanas. **II** Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 2000 pārslēgšanām uzdevumā prasītais nav sasniedzams. Pieņemsim no pretējā, ka kāds slēdzis X vispār netiek pārslēgts nevienu reizi, bet visi slēdži savu stāvokli ir mainījuši no izslēgta uz ieslēgtu. Sadalīsim pārējos slēdžus trīs grupās: **A:** tie 49 slēdži, kas ar X ir vienā rindā, **B:** tie 39 slēdži, kas ar X ir vienā kolonnā, **C:** tie slēdži, kas nav ne vienā rindā, ne vienā kolonnā ar X. Pieņemsim, ka šo grupu slēdži kopumā tiek pārslēgti attiecīgi a, b un g reizes. Tad slēdzis X maina savu stāvokli $a + b$ reizes. Tā kā X jākļūst no izslēgta par ieslēgtu tad (1) $a + b$ ir nepāra skaitlis Grupas A slēdzis ietekmē a pārslēgšanas (katra no tām rada 49 slēdžu stāvokļu maiņas šajā grupā) un g pārslēgšanas (katra no tām rada vienu slēdža stāvokļa maiņu šajā grupā). Kopā grupā A notikušas 49a + g slēdžu stāvokļu maiņas. Tā kā katrs no 49 (nepāra daudzums!) slēdžiem grupā A mainījis savu stāvokli nepāra skaitu reižu (citādi tas nebūtu kļuvis no izslēgta par ieslēgtu), tad (2) 49a + g ir nepāra skaitlis. Līdzīgi spriežot par grupu B, iegūstam, ka (3) 39b + g ir nepāra skaitlis. No (1), (2) un (3) iegūstam, ka $(a+b)+(49a+g)+(39b+g)=$ $=50a+40b+2g=2(25a+20b+g)$ ir nepāra skaitlis kā trīs nepāra skaitļu summa. Bet tā ir pretruna. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un katrs slēdzis jāpārslēdz vismaz 1 reizi; tātad nepieciešamas vismaz $40\cdot 50=2000$ pārslēgšanas.

2.3.B2. Skat., piem., A43. zīm.



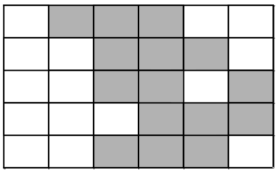
A43. zīm.

2.3.B3. **I** Viegli pārbaudīt: ja uz kartītēm uzrakstīti skaitļi 2; 2; -1; -1; -1, tad sešas summas ir ar vērtību 0 (katrs no divniekiem kopā ar jebkuriem diviem "-1"). Pierādīsim, ka 7 summas nevar būt 0. **II** Pieņemsim no pretējā, ka izdevies uzrakstīt uz kartītēm tādus skaitļus a; b; c; d; e, ka septiņas no šo skaitļu summām pa trīs ir 0. Šajās 7 summās kopā ir $3\cdot 7=21$ saskaitāmais. Tā kā $21>4\cdot 5$ un katrs saskaitāmais ir viens no pieciem uz kartiņām esošajiem skaitļiem, tad kāds no mūsu pieciem skaitļiem parādās kā saskaitāmais vairāk nekā četrās no šīm summām, tātad vismaz piecās no tām. Aplūkosim piecas summas, kuru vērtības ir 0 un kuras visas satur vienu un to pašu saskaitāmo (varam pieņemt, ka tas ir a). Tad visas piecas abu pārējo saskaitāmo summas ir vienādas. No pārējiem četriem uz kartiņām esošajiem skaitļiem b; c; d; e var izveidot sešas summas pa divi: b + c, b + d, b + e, c + d, c + e, d + e. Varam pieņemt, ka augšminētās vienādās summas pa divi ir b + c = b + d = b + e = c + d = c +e (Citi gadījumi ir analoģiski.) No abām pirmajām vienādībām seko c = d = e; tālāk no b + e = c + d seko b = c = d = e. Tātad uz kartītēm uzrakstītie skaitļi ir a; b; b; b; b. Ir tikai sešas summas pa trim skaitļiem, kurās viens no saskaitāmajiem ir a; tāpēc vismaz viena no septiņām triju saskaitāmo summām, kuru vērtība ir 0, ir b + b + b. Tāpēc b = 0. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $a\neq 0$. Bet no skaitļiem a; 0; 0; 0; 0 var izveidot tikai četras summas pa trīs, kuru vērtība ir 0. Iegūta pretruna. Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs, un septiņas summas ar vērtību nulle nav iespējamas. Tātad meklējamais maksimums ir 6.

2.3.B4. Aplūkosim situāciju, kad uz tāfeles atrodas 1024 nenosvītroti skaitļi. Šai brīdī ir nosvītroti 1952 vieninieki (jo 2000 – 1952 + 1952 : 2 = 1024), tātad nosvītroto skaitļu summa ir 1952. Nenosvītroto skaitļu summa saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma risinājumu ir 2000. Kad turpmākajā procesā būs nosvītroti šie 1024 skaitļi, būs uzrakstīti 512 jauni skaitļi; saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma risinājumu to summa arī būs 2000. Līdzīgi tālāk izveidosies grupas no 256; 128; 64; 32; 16; 8; 4; 2; 1 skaitļiem katra; katrā no tām skaitļu summa būs 2000. (Pēdējā grupa sastāv no vienīgā beigās palikušā nenosvītrotā skaitļa). Tātad visu uzrakstīto skaitļu summa būs $1952+11\cdot 2000=23952$.

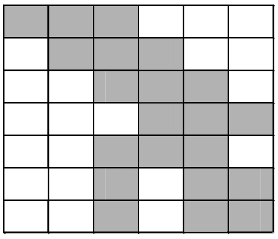
2.3.B5. Uzdevuma atrisinājums atkarīgs no tā, kā mēs saprotam vārdus "izdzēruši dažādu glāžu skaitu". Pastāv divas iespējas.

I Izdzerto glāžu skaits var būt arī 0. Tad ievērojam, ka sešu mazāko veselo nenegatīvo skaitļu summa ir $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Tātad kopā nav izdzerts mazāk par 15 glāzēm. To, ka 15 glāzes var izdzert saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, parāda tabula A44. zīm. (Kolonnas atbilst draugiem, rindiņas – brīžiem, kad kādi trīs draugi dzer pa glāzei ūdens).



0 1 4 5 3 2

A44. zīm.



1 2 6 4 5 3

A45. zīm.

II Ja mēs uzskatām, ka vārdi "izdzēruši dažādu glāžu skaitu" ietver sevī arī informāciju par to, ka katrs izdzēris vismaz vienu glāzi, tad kopējam izdzerto glāžu skaitam jābūt vismaz $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. To, ka tas ir iespējams, redzam tabulā A45. zīm.

2.3.B6. Uzdevumā minētās n taisnes kaut kā sadalās grupās tā, ka katrā grupā visas taisnes savā starpā ir paralēlas, bet dažādās grupās esošas taisnes noteikti viena ar otru krustojas (principā varētu būt, ka grupa sastāv arī tikai no vienas taisnes, t. i., tai nav paralēlu). Apskatīsim vienu šādu grupu; pieņemsim, ka tajā ir x taisnes. Tad katra no tām krusto tieši $n - x$ citas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $n-x=2000$, t. i., $x = n - 2000$. Tātad katrā paralēlu taišņu grupā ir tieši $n - 2000$ taisnes. Tā kā visas n taisnes sadalās šādās grupās pa $n – 2000$ taisnēm katrā, tad n jādalās ar $n – 2000$. Tātad skaitlim n noteikti jāapmierina 2 nosacījumi:

(1) $n > 2000$;

(2) n dalās ar $n – 2000$.

Apzīmēsim $n : (n – 2000) = k$, kur k – naturāls skaitlis. (Skaidrs, ka k ir paralēlo taišņu grupu skaits.) Tad $n = k \cdot (n - 2000)$, no kurienes

$$n = \frac{2000k}{k-1} = \frac{2000(k-1)+2000}{k-1} = 2000 + \frac{2000}{k-1}.$$

Tā kā n ir naturāls skaitlis, tad skaitlim 2000 jādalās ar $k - 1$. Tā kā $2000 = 2 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 5^3$, tad $k – 1$ iespējamās vērtības ir $2^a \cdot 5^b$, kur $0 \le a \le 4$, $0 \le b \le 3$. Iegūstam tabulā A46. zīm. attēlotās iespējas.

a	b	k-1=$2^a \cdot 5^b$	k - grupu skaits	$\frac{2000}{k-1}$	n - taišņu skaits
0	0	1	2	2000	4000
0	1	5	6	400	2400
0	2	25	26	80	2080
0	3	125	126	16	2016
1	0	2	3	1000	3000
1	1	10	11	200	2200
1	2	50	51	40	2040
1	3	250	251	8	2008
2	0	4	5	500	2500
2	1	20	21	100	2100
2	2	100	101	20	2020
2	3	500	501	4	2004
3	0	8	9	250	2250
3	1	40	41	50	2050
3	2	200	201	10	2010
3	3	1000	1001	2	2002
4	0	16	17	125	2125
4	1	80	81	25	2025
4	2	400	401	5	2005
4	3	2000	2001	1	2001

A46. zīm.

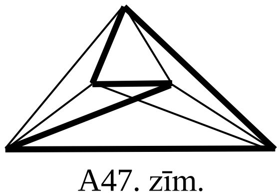
Tagad pierādīsim, ka visas atrastās n vērtības der. Tiešām, pieņemsim, ka $n = 2000 + \frac{2000}{k-1}$, kur $\frac{2000}{k-1} = y$, y – vesels skaitlis. Tad $2000 = (k - 1)y$ un $n = 2000 + y = (k-1)y + y = k \cdot y$. Izveidosim k grupas, katrā pa y taisnēm (tā kā $\frac{2000}{k-1} = y$, tad katrā grupā ir $\frac{2000}{k-1}$ taisnes) tā, ka visas vienas grupas taisnes ir savā starpā paralēlas, bet taisnes no dažādām grupām – nē. Tad katra taisne krusto visas taisnes no pārējām k-1 grupām, t. i., katra taisne krusto $(k-1) \cdot \frac{2000}{k-1} = 2000$ citas taisnes.

2.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.4.A1. Viegli pārbaudīt, ka ((2:((2-3):3))-4):((4-5):5)=((2:(-1:3))-4):(-1:5)=(-6-4):(-1/5)=50. Mēs neprotam pierādīt, ka lielāka vērtība nav sasniedzama, bet arī nezinām, kā tādu iegūt.

2.4.A2. Skat., piem., A47. zīm.



A47. zīm.

Ar biezākajām līnijām novilktas piecstūra malas, ar tievākām – diagonāles.

2.4.A3. Atcerēsimies, ka 2001. gada 1. janvāris bija pirmdiena. Līdz ar to uzdevuma jautājumu var izsacīt arī tā: vai taisnība, ka no katriem 10 pēc kārtas sekojošiem gadiem viens gads ir tāds īsais gads, kas sākas ar pirmdienu?

Saskaņā ar Eiropā lietojamā t. s. Gregora kalendāra definīciju gari gadi ir tie gadi, kuru gadskaitlis apmierina vienu no divām tālāk minētajām prasībām: 1) dalās ar 4 un nedalās ar 100,

vai arī 2) dalās ar 400.

Tātad, piemēram, 1996; 2000; 2004. gads ir garais gads, bet 2100. gads nav garais gads.

Ievērosim, ka $365 = 52 \cdot 7 + 1$ un $366 = 52 \cdot 7 + 2$. Tāpēc (n + 1)-ā gada 1. janvāris nedēļas dienu sarakstā ir par vienu dienu "tālāk" nekā n-ā gada 1. janvāris, ja n-tais gads ir īsais gads, un par divām dienām "tālāk", ja n-tais gads ir garais gads.

No šejienes iegūstam A48. zīm. tabulu.

Gads	**Nedēļas diena, kurā ir 1.janvāris**
2001.	Pirmdiena
2002.	Otrdiena
2003.	Trešdiena
2004.	Ceturtdiena
2005.	Sestdiena
2006.	Svētdiena
2007.	Pirmdiena
2008.	Otrdiena
2009.	Ceturtdiena
2010.	Piektdiena
2011.	Sestdiena
2012.	Svētdiena
2013.	Otrdiena
2014.	Trešdiena
2015.	Ceturtdiena
2016.	Piektdiena
2017.	Svētdiena

A48. zīm.

Redzam, ka 2008. – 2017. gadu kalendāri neviens neder 2001. gadam.

2.4.A4. Parādīsim, ka pietiek ar 1 svēršanu. Uzliekam uz kausiem pa 67 monētām. Ja svari nav līdzsvarā, vajadzīgās monētu kaudzītes atrodas uz kausiem. Ja svari ir līdzsvarā, tad par meklējamām kaudzītēm der malā palikušās 66 monētas un jebkuras 66 monētas no viena svaru kausa. Pierādīsim to.

Tiešām, ja malā palikušās 66 monētas kopā sver tikpat, cik 66 monētas no 1. kausa, tad šajos komplektos ir vienāds skaits (apzīmēsim to ar x) "vieglo" monētu. Tad uz 1. kausa atrodas vai nu x, vai x + 1 "vieglā" monēta (atkarībā no tā, vai 67-ā monēta uz šī kausa ir "smagā" vai "vieglā"). Atbilstoši uz otrā svaru kausa ir vai nu x, vai x + 1 "vieglā monēta (jo kausi atradās līdzsvarā). Tātad pavisam vieglo monētu ir vai nu 2x + x = 3x, vai 2(x + 1) + x = 3x + 2. Bet ne vienādojumam 3x = 100, ne vienādojumam 3x + 2 = 100 nav atrisinājuma veselos skaitļos. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un malā palikušo monētu svars noteikti atšķiras no 1. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara. Tieši tāpat pierāda, ka malā palikušo monētu kopējais svars noteikti atšķiras no 2. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara.

Skaidrs, ka pavisam bez svēršanas prasītās monētu kaudzītes atrast nevar. Tātad meklējamais minimums ir 1.

2.4.A5. Atbilde: egle jāpušķo Sūnu ciemā.

Pierādījums. Pieņemsim, ka egle uzburta Sūnu ciemā, un īsākais ceļš no Pieneņu pļaviņas līdz tai ir d_1, bet īsākais ceļš no Ozolu pakalna – d_2. Tad kopējais rūķīšiem noejamais attālums ir $50d_1 + 60d_2$.

Pānesīsim egli uz kādu citu vietu un pieņemsim, ka īsākais ceļš no Sūnu ciema līdz šai vietai ir d. Tad Sūnu ciema rūķīšiem uz šo egli kopā jānoiet vismaz attālums $120 \cdot d$. Savukārt neviens rūķītis no Pieneņu pļaviņas nevar nokļūt uz egli, noejot īsāku ceļu nekā d_1 - d. Tiešām, ja no Pieneņu pļaviņas uz jauno egles atrašanās vietu varētu nokļūt, noejot ceļu x, kur $x < d_1 - d_2$, tad rūķīši no Pieneņu pļaviņas varētu nokļūt uz veco egles atrašanās vietu Sūnu ciemā, noejot ne lielāku attālumu kā $x + d < d_1 - d + d = d_1$. (Viņi vispirms ietu uz egles jauno atrašanās vietu un tad uz Sūnu ciemu pa to ceļu, pa kuru Sūnu ciema rūķīši dodas uz jauno egles atrašanās vietu.) Bet tā ir pretruna ar d_1 izvēli – d_1 ir īsākais ceļš no Pieneņu pļaviņas līdz Sūnu ciemam.

Tāpēc rūķīšiem no Pieneņu pļaviņas līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $50(d_1 - d)$. Līdzīgi pierāda, ka rūķīšiem no Ozolu pakalna līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $60(d_2 - d)$. Tātad visiem rūķīšiem līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $120d + 60(d_2 - d) + 50(d_1 - d) = 50d_1 + 60d_2 + 10d$, kas ir vairāk par kopējo noejamo attālumu gadījumā, ja egle uzburta Sūnu ciemā.

Redzam, ka noejamo attālumu summa ir vismazākā, ja egle atrodas Sūnu ciemā.

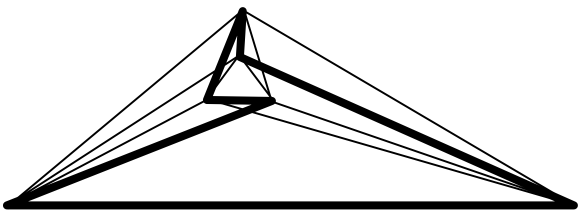
2.4.A6. Skaidrs, ka pati īsākā no visām eglītēm ir arī īsākā gan savā rindā, gan savā kolonnā, bet otrā īsākā no visām eglītēm ir vai nu īsākā vai otrā īsākā gan savā rindā, gan kolonnā. Tāpēc šīs abas eglītes (apzīmēsim tās ar A un B) noteikti ir gan apsegtas, gan ierušinātas.

Tālāk šķirosim trīs gadījumus. **I** A un B neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā. Tādā gadījumā trešā īsākā eglīte C var būt vienā rindā ar augstākais vienu no eglītēm A un B; tātad savā rindā tā noteikti ir vai nu īsākā , vai otrā īsākā, un tātad tā ir apsegta. Līdzīgi pierāda, ka tā ir ierušināta. **II** A un B atrodas vienā rindā a. Aplūkosim īsāko eglīti no tām, kas neatrodas šajā rindā; apzīmēsim to ar C. Eglīte C savā rindā noteikti ir visīsākā, tātad tā ir apsegta. Savā kolonnā tā var būt garāka vienīgi par rindas a eglīti, tāpēc tā savā kolonnā ir vai nu īsākā, vai otrā īsākā; tāpēc tā noteikti ir ierušināta. **III** A un B atrodas vienā kolonnā. Šo gadījumu aplūko līdzīgi II gadījumam.

B GRUPA

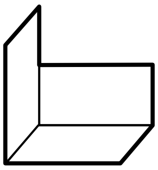
2.4.B1. Atbilde: 5 meļi. Risinājums. Pieņemsim, ka meļu ir mazāk nekā 5. Tad patieso politiķu (turpmāk pp) ir vismaz 6. Tā kā meļu ir ne vairāk par 4, bet aptaujāti 6 politiķi, tad vismaz viens no aptaujātajiem ir pp; apzīmēsim to ar A. Bez A grupā ir 5 pp un 4 meļi, tātad A atbilde ir nepatiesa. Iegūta pretruna ar faktu, ka A ir pp. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un meļu nav mazāk par 5. Pieņemsim, ka meļu ir vairāk nekā 5 (tātad vismaz 6). Līdzīgi kā iepriekš secinām, ka starp aptaujātajiem ir melis B, kurš runājis patiesību. Tātad meļu nav vairāk par 5. Ja meļu ir tieši 5 un pp - arī tieši 5, tad atbilde "vairāk ir meļu" ir patiesa, ja to saka pp, un aplama, ja to saka melis. Tātad šī atbilde der.

2.4.B2. Skat. A49. zīm. Ar biezām līnijām attēlotas daudzstūra malas, ar tievām – tā diagonāles.

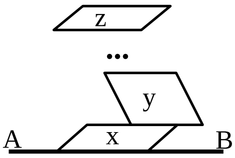


A49. zīm.

2.4.B3. Atbilde: 7 malas. Risinājums. Piemēru ar 7 malām skat. A50. zīm.



A50. zīm.



A51. zīm.

Pierādīsim, ka apskatāmā tipa daudzstūrim nevar būt ne 3, ne 5 malas.

Pieņemsim, ka paralelogramos sagriezts kāds daudzstūris, kam viena no malām ir AB. Uz malas AB vismaz viens paralelograms x balstās ar savu malu. Uz x pretējās malas vismaz viens paralelograms y balstās ar savu malu, utt. Šai paralelogramu ķēdītei kaut kur jābeidzas ar kādu paralelogramu z (skat. A51. zīm.). Paralelograma z augšējā mala noteikti sakrīt ar kādu daudzstūra malu pa taisnes nogriezni, citādi ķēdīti varētu vēl turpināt. Tātad katrai daudzstūra malai var atrast citu malu, kas tai paralēla. No šejienes uzreiz skaidrs, ka apskatāmais daudzstūris nav trijstūris.

Pieņemsim, ka tas ir piecstūris. Ņemam divas tā blakus malas x un y; tās nav paralēlas. Saskaņā ar iepriekš pierādīto eksistē mala z, kas paralēla x, un mala t, kas paralēla y. Piektajai malai jābūt paralēlai vai nu ar x un z, vai ar y un t. Tātad no apskatāmā piecstūra malām 3 savā starpā paralēlas. Viegli saprast: ja no piecām piecstūra malām izvēlas trīs malas, tad divas no tām ir blakusmalas. Bet tā ir pretruna, jo blakusmalas nevar būt paralēlas.

Tātad apskatāmajam daudzstūrim nevar būt arī 5 malas.

2.4.B4. Skaidrs, ka bez svēršanām to izdarīt nevar. Iedomāsimies, ka izdarīta viena svēršana. Šķirojam trīs gadījumus: 1) uz kausiem bija pa vienai monētai. Jebkura svēršanas rezultāta gadījumā jebkura monēta var būt gan no trim vienādajām, gan no divām vienādajām, jo mēs nezinām, kuras monētas ir smagākas; 2) uz kausiem bija pa divām monētām. Ja kausi atrodas līdzsvarā, tad malā palikusī monēta ir viena no trim vienādajām. Tomēr, ja viens kauss nosveras uz leju (un tā var gadīties!), tad jebkura monēta var būt gan no trim vienādajām, gan no divām vienādajām; 3) ja uz kausiem ir atšķirīgs monētu daudzums, mēs vispār neiegūstam nekādu lietderīgu informāciju, jo var gadīties, ka monētu masas ir, piemēram, 10g un 11g, un tādā gadījumā tas kauss, uz kura ir vairāk monētu nekā uz otra, noteikti nosvērsies uz leju.

Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas arī, izdarot vienu svēršanu. Parādīsim, ka ar divām svēršanām pietiek.

Apzīmējam monētas ar A, B, C, D, E. Tās monētas, kuru masas ir lielākas, sauksim par smagām, pārējās - par vieglām. Pirmajā svēršanā novietojam uz viena kausa monētas A un B, bet uz otra kausa - monētas C un D. Pastāv divas iespējas. I Kausi atrodas līdzsvarā. Tad uz katra no tiem ir pa vienai smagajai un vienai vieglajai monētai (jo četru vienādas masas monētu nav). Tāpēc malā palikusī monēta E der par meklējamo. II Viens kauss nosveras uz leju; varam pieņemt, ka tas ir kauss ar A un B. Tad ar otro svēršanu salīdzinām monētu komplektus A; C un B; D. Atkal, ja svari līdzsvarā, tad monēta E der par meklējamo. Pieņemam, ka viens kauss nosveras uz leju; varam uzskatīt, ka tas ir kauss ar A un C (otrs gadījums tiek aplūkots līdzīgi). Apzīmējot monētu masas ar atbilstošajiem mazajiem burtiem, iegūstam $a + b > c + d$, $a + c > b + d$.

Tad A noteikti ir smagā monēta; tiešām, ja A būtu vieglā, tad no 1. svēršanas seko, ka B - smagā, C un D – vieglās, bet no 2.svēršanas rezultāta seko, ka C – smagā, B un D – vieglās. Iegūta pretruna. Līdzīgi pierāda, ka D ir vieglā monēta. Tālāk no nevienādībām seko, ka B un C ir vienādas masas (ja viena no tām būtu vieglā, bet otra – smagā monēta, tad vienas nevienādības vietā pastāvētu vienādība). Tāpēc par meklējamo monētu var ņemt gan B, gan C.

2.4.B5. Skaitļi 11 un 101 ir pirmskaitļi; to viegli pārbaudām tieši.

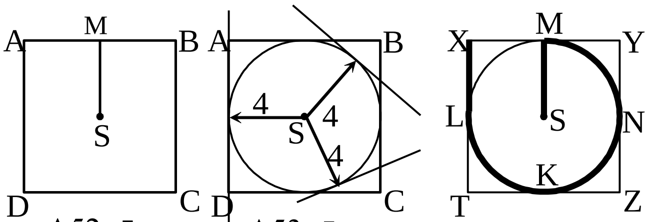
Skaitļi 1001; 100001; 10000001; 1000000001 dalās ar 11 (varam pārbaudīt tieši vai izmantot dalāmības pazīmi ar 11).

Skaitļi 1000001 un 10000000001 dalās ar 101. (visvieglāk to ievērot, pierakstot šos skaitļus formā $10^6 + 1 = 100^3 + 1$ un $10^{10} + 1 = 100^5 + 1$ un izmantojot formulas $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ un $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ – pārbaudiet tās patstāvīgi.)

Mēģinājumu ceļā pārliecināmies, ka $10001 = 73 \cdot 137$ un $100000001 = 17 \cdot 5882353$.

Tātad vienīgie pirmskaitļi no apskatāmajiem skaitļiem ir 11 un 101.

2.4.B6. **I** Ja Sprīdītis no sākuma atrodas punktā S, tad, noejot maršrutu SMBCDAM (skat. A52. zīm., kur ABCD – kvadrāts ar malas garumu 8km, S – tā centrs, M – malas AB viduspunkts), Sprīdītis būs nogājis 36km. Šai laikā viņš noteikti nonāks meža malā, jo katrai taisnei , kas atrodas 4km attālumā no S, ir kopīgi punkti ar kvadrāta kontūru (skat.A53. zīm.).



A52.zīm. A53.zīm. A54.zīm.

II Apskatām A54. zīm., kur riņķa līnija ar rādiusu 4 km un centru S ievilkta kvadrātā XYZT. Punkti M, N, K un L ir pieskāršanās punkti. Ja Sprīdītis iet pa līniju SMNKLX, kas sastāv no taisnes nogriežņiem SM un LX un riņķa līnijas loka MNKL, viņš noiet ceļu

$$4\text{km} + \frac{3}{4} \cdot (2\pi \cdot 4\text{km}) + 4\text{km} = 4\text{km} \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\pi\right) < 4\text{km} \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot 3{,}2\right) = 4\text{km} \cdot (2 + 3 \cdot 1{,}6) =$$

$$= 4\text{km} \cdot 6{,}8 = 27{,}2\text{km} < 28\text{km}.$$

To, ka Sprīdītis noteikti izkļūs no meža, pierāda tāpat kā **I** risinājumā.

2.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

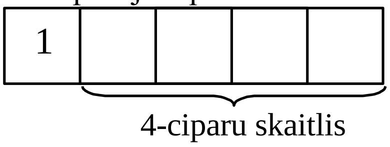
A GRUPA

2.5.A1. Mazākais naturālais pāra skaitlis ir 2. Dalot 2 gan ar 11, gan ar 17, dalījumā iegūst 0 un atlikumā 2. Tātad uzdevuma atbilde ir x = 2. Atradīsim visus x, kam piemīt uzdevumā minētā īpašība. Apzīmēsim meklējamā skaitļa x nepilnos dalījumus ar 11 un ar 17 atbilstoši ar m un n, bet atlikumu – ar r. Tad $x = 11m + r$; $x = 17n + r$.

No šejienes iegūstam $x - r = 11m$, $x - r = 17n$. Tātad x - r dalās gan ar 11, gan ar 17. Tā kā skaitļu 11 un 17 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad no šejienes seko: x - r dalās ar $11 \cdot 17$ jeb ar 187. tātad $x - r = 187 \cdot k$ un $x = 187k + r$. Tā kā r ir atlikums, dalot ar 11 un 17, tad $0 \le r < 11$ un $0 \le r < 17$. Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina sekojoši skaitļi: a) 2; 4; 6; 8; 10 (pie k = 0), b) $187 \cdot k + r$, kur k = 2; 4; 6; … un r = 0; 2; 4; 6; 8; 10 (k – pāra skaitlis), c) $187 \cdot k + r$, kur k = 1; 3; 5; … un r = 1; 3; 5; 7; 9 (k – nepāra skaitlis).

2.5.A2. Apskatāmo skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 1; 2; 3; 4; 5; 6 (varbūt tikai daži vai pat tikai viens no tiem). Skaidrs, ka vispirms rakstīti viencipara skaitļi, pēc tam – divciparu skaitļi utt. Vispirms noskaidrosim, cik ciparu ir mūsu meklējamam skaitlim (apzīmēsim to ar x). Acīmredzot virknē ir 6 viencipara skaitļi 1; 2; 3; 4; 5; 6. Divciparu skaitļus var iegūt, katram no sešiem pieļaujamiem viencipara skaitļiem galā pierakstot jebkuru no sešiem pieļaujamiem cipariem. Tāpēc divciparu skaitļu virknē ir $6 \cdot 6 = 36$. Līdzīgi iegūstam, ka trīsciparu skaitļu virknē ir $36 \cdot 6 = 216$, četrciparu skaitļu – $216 \cdot 6 = 1296$, bet piecciparu skaitļu – $1296 \cdot 6 = 7776$.

Tā kā $6 + 216 + 1296 < 2001$, bet $6 + 216 + 1296 + 7776 > 2001$, tad x ir piecciparu skaitlis. Turklāt, tā kā $6 + 216 + 1296 = 1518$, tad x starp piecciparu skaitļiem ir (2001 - 1518)-ais jeb 483-ais. No piecciparu skaitļiem vispirms uzrakstīti skaitļi, kas sākas ar 1. Tie viens no otra atšķiras ar četru pēdējo ciparu veidoto skaitli (skat. A55. zīm.):



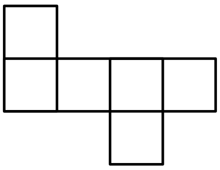
A55. zīm.

Tā kā četrciparu skaitļu, kas veidoti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6, ir $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, tad mūsu virknē ir 1296 piecciparu skaitļi, kas sākas ar 1. Tā kā $483 < 1296$, tad x sākas ar 1. Tātad x ir 483-ais piecciparu skaitlis, kas sākas ar 1. Starp piecciparu skaitļiem, kas sākas ar 1, vispirms uzrakstīti visi skaitļi, kam otrais cipars ir 1 (to ir $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, skat. A56. zīm.), tad - visi skaitļi, kam otrais cipars ir 2 (arī to ir 216) utt.

A56. zīm.

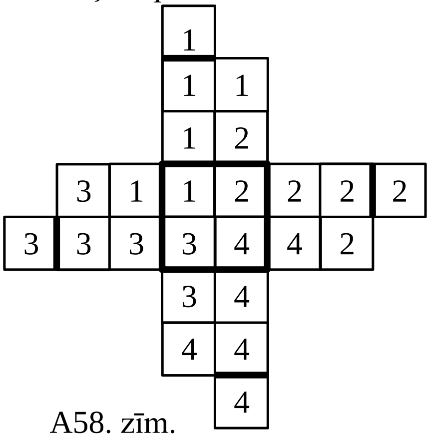
Tā kā $2 \cdot 216 < 483$ un $3 \cdot 216 > 483$, tad skaitļa x otrais cipars ir 3. Turklāt, tā kā $216 + 216 = 432$, tad x ir (483-432)-ais jeb 51-ais no tiem piecciparu skaitļiem, kam pirmais cipars ir 1, bet otrais cipars ir 3. Līdzīgi spriežot tālāk, secinām: tā kā $36 < 51$ un $2 \cdot 36 > 51$, tad x trešais cipars ir 2, turklāt x ir $(51 - 36)$-ais jeb 15-ais no tiem skaitļiem, kas sākas ar $\overline{132}$. Tālāk, tā kā $2 \cdot 6 < 15$ un $3 \cdot 6 > 15$, tad x ir (15-12)-ais jeb trešais no tiem skaitļiem, kas sākas ar $\overline{1322}$. Tātad x = 13223.

2.5.A3. Viena no šādām figūrām attēlota A57. zīm. (rūtiņas malas garums ir 1). Acīmredzams, ka ar to var aplīmēt kubu ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$ tā, ka katra rūtiņa pārklāj vienu kuba skaldni.



A57. zīm.

Tagad aplūkosim A58. zīm. attēloto figūru, kas sastāv no 4 tādām figūrām, kāda attēlota A57. zīm. (vienas kopijas sešas rūtiņas apzīmētas ar vienu un to pašu ciparu.)



A58. zīm.

Viegli redzēt, ka, salokot šo figūru pa biezajām līnijām, iegūstam tāda kuba virsmu, kura šķautnes garums ir 2. Tātad ar četrām A57. zīm. parādītās figūras kopijām var aplīmēt kubu, kura izmēri ir $2\times2\times2$.

2.5.A4. Apzīmēsim $A=\overline{abc}$, kur a, b, c – cipari un $a\neq0$. Tad sešciparu skaitlis, par kuru runā uzdevumā, ir $\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot1000+abc=1001\cdot abc==7\cdot11\cdot13\cdot\overline{abc}$.

Divi no dalītājiem ir 1 un $\overline{abc}$. Acīmredzot $\overline{abc}$ dalās ar vismaz vienu pirmskaitli p, kas atšķiras no paša $\overline{abc}$. Pastāv divas iespējas: 1) $\overline{abc}$ nedalās ar citiem pirmskaitļiem, izņemot p. Tad $\overline{abc}$ ir pirmskaitļa p pakāpe: $\overline{abc}=p^k$, un $\overline{abc}$ dalītāji ir 1; p; p^2; …; p^{k-1}; p^k. Tā kā dots, ka $\overline{abc}$ ir tieši 4 dalītāji, tad $\overline{abc}=p^3$, un $\overline{abc}$ dalītāji ir 1; p; p^2; p^3. 2) $\overline{abc}$ dalās ar vēl kādu citu pirmskaitli q. Tad $\overline{abc}$ noteikti ir dalītāji 1; p; q; $\overline{abc}$. Tā kā $\overline{abc}$ ir tieši 4 dalītāji, tad citu dalītāju tam nav. Tāpēc $\overline{abc}=pq$. Tagad analizēsim šos gadījumus sīkāk:

1) ja $\overline{abc}=p^3$, tad $1001\cdot\overline{abc}=7\cdot11\cdot13\cdot p^3$. Iespējami divi apakšgadījumi:

1.1) p ir kāds no skaitļiem 7; 11; 13. Pieņemsim vispirms, ka $p=7$; tad $1001\cdot\overline{abc}=7^4\cdot11\cdot13$. Acīmredzams, ka skaitlim $7^4\cdot11\cdot13$ ir $5\cdot2\cdot2=20$ dalītāji – visi skaitļi $7^x\cdot11^y\cdot13^z$, kur $0\le x\le4$, $0\le y\le1$ un $0\le z\le1$, pie tam x; y; z – veseli skaitļi. Tā kā $7^3 = 343$ - trīsciparu skaitlis, tad šāds gadījums tiešām iespējams, un atbilde "20 dalītāji" der. Ja p = 11 vai p = 13, tad p^3 nav trīsciparu skaitlis, tāpēc šie apakšgadījumi nav jāpēta. (Starp citu, pat ja 11^3 vai 13^3 būtu trīsciparu skaitlis, mēs atkal iegūtu atbildi "20 dalītāji").

1.2) p nav neviens no skaitļiem 7; 11; 13. Tad $1001\cdot\overline{abc}=p^3\cdot7\cdot11\cdot13$, un šim skaitlim ir $4\cdot2\cdot2\cdot2=32$ dalītāji – visi skaitļi $p^x\cdot7^y\cdot11^z\cdot13^t$, kur x, y, z, t – veseli skaitļi, $0\le x\le3$, $0\le y\le1$, $0\le z\le1$, $0\le t\le1$. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 5 (tad $p^3 = 125$ ir trīsciparu skaitlis). Tātad arī atbilde "32 dalītāji" der.

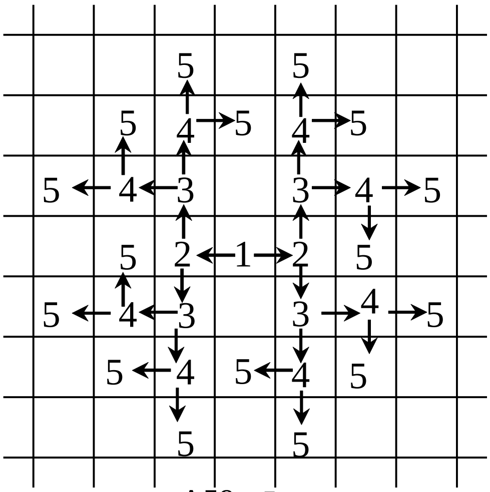
2) ja $\overline{abc}=pq$, tad $1001\cdot\overline{abc}=p\cdot q\cdot7\cdot11\cdot13$, p un q – dažādi pirmskaitļi. Iespējami trīs apakšgadījumi:

2.1) ne p, ne q nesakrīt ne ar 7, ne ar 11, ne ar 13. Tad skaitlim $1001\cdot\overline{abc}$ ir $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$ dalītāji – visi skaitļi $p^x\cdot q^y\cdot7^z\cdot11^t\cdot13^v$, kur x, y, z, t, v – veseli skaitļi, katrs no kuriem ir vai nu 0, vai 1. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 31 un q = 29; tad $p\cdot q$ ir trīsciparu skaitlis.

2.2) viens no skaitļiem p un q sakrīt ar kādu no skaitļiem 7; 11; 13, bet otrs – nē. Kā iepriekš iegūstam, ka $1001\cdot\overline{abc}$ ir $3\cdot2\cdot2\cdot2=24$ dalītāji. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 11 un q = 29. 2.3) viens no skaitļiem p, un q sakrīt ar vienu no skaitļiem 7; 11; 13, bet otrs - ar citu. Kā iepriekš iegūstam, ka $1001\cdot\overline{abc}$ ir $3\cdot3\cdot2=18$ dalītāji. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 11 un q = 13.

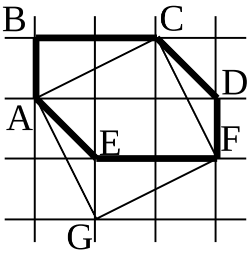
Tātad skaitlim $\overline{abcabc}$ var būt 18; 20; 24; 32 dalītāji.

2.5.A5. Vienu no iespējām skat. A59. zīm. Rūtiņā ierakstītais numurs norāda, kuras paaudzes baktērija tajā mitinās.

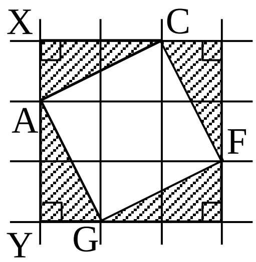


A59. zīm.

2.5.A6. Skat. A60. zīm., kur daudzstūri iezīmēti kvadrātisku rūtiņu režģī.



A60. zīm.



A61. zīm.

No trijstūru vienādības pazīmēm viegli seko, ka $\Delta ABC = \Delta GEF$ un $\Delta AEG = \Delta CDF$. Tāpēc, sagriežot doto sešstūri ABCDFE pa nogriežņiem AC un CF, no iegūtajām daļām var salikt četrstūri ACFG. Pierādīsim, ka tas ir kvadrāts. Tiešām, (skat. A61. zīm.), iesvītrotie trijstūri ir savā starpā vienādi (pazīme mlm), tāpēc ACFG visas malas ir vienādas. Tālāk, $\angle XAC + \angle YAG = \angle XAC + \angle XCA = 180^\circ - \angle AXC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Tāpēc $\angle CAG = 180^\circ - (\angle XAC + \angle YAG) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Līdzīgi pierāda, ka arī citi ACFG leņķi ir taisni. Tā kā ACFG visas malas ir vienādas un visi leņķi ir taisni, tad tas ir kvadrāts.

B GRUPA

2.5.B1. Varam griezt sekojoši:

a)

1	2 3	4	5	6 7	8 9	

. Ievērosim, ka 1 dalās tikai ar 1, 4 dalās tikai ar 1; 2; 4, bet skaitļi 23; 5; 57; 89 ir pirmskaitļi, tātad dalās tikai ar 1 un paši ar sevi.

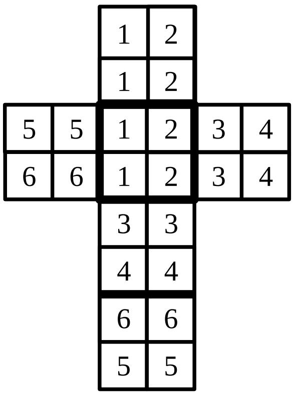
b)

1	2 3	4	5	6	7	8 9

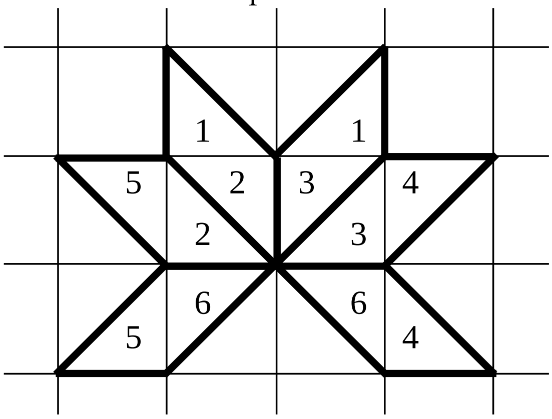
un gabalu ar skaitli "6" apgriežam "ar kājām gaisā", tādējādi iegūstot skaitļus 1; 23; 4; 5; 9; 7; 89. Pierādīsim, ka bez šādiem nestandarta paņēmieniem 7 skaitļi, kas ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, nav iegūstami. Tiešām, lai iegūtu 7 gabalus, jāizdara 6 griezieni. Augstākais četri no tiem var būt aiz nepāra cipariem (aiz 1; 3; 5; 7). Tāpēc vismaz divi griezieni būs aiz pāra cipariem. Bet abi skaitļi, kam pēdējie cipari ir pāra cipari, dalās ar 2, tātad to lielākais kopīgais dalītājs nav 1.

2.5.B2. Pierādīsim, ka divu ķēdes skaitļu reizinājuma otrais cipars noteikti nav 2. Tad vajadzīgais būs pierādīts. Pieņemsim, ka vienā ķēdes skaitlī A ir a cipari, bet otrā ķēdes skaitlī B ir b cipari. Tad $12\underbrace{00...0}_{a-2} \le A < 13\underbrace{00...0}_{a-2}$ un $12\underbrace{00...0}_{b-2} \le B < 13\underbrace{00...0}_{b-2}$. Tā kā 12×12=144 un 13×13=169, tad no šejienes seko, ka $144\underbrace{00...0}_{a+b-4} \le A \cdot B < 169\underbrace{00...0}_{a+b-4}$. Tātad $A \cdot B$ otrais cipars ir 4; 5 vai 6. Tātad $A \cdot B$ nav ķēdes skaitlis.

2.5.B3. a) jā, var. Skat. A62. zīm. kuba virsmas izklājumu rūtiņu lapā, kur vienam taisnstūrim piederošās rūtiņas apzīmētas ar vienādiem cipariem.



A62. zīm.



A63. zīm.

b) jā, var. Skat. A63. zīm. kuba virsmas izklājumu rūtiņu lapā. Trijstūrīši, kas nonāk vienā skaldnē, apzīmēti ar vienādiem cipariem.

2.5.B4. <u>Atbilde:</u> 12 komisijas. a) tas, ka 12 komisijas var izveidot, redzams A64. zīm., kur tabulas kolonnām atbilst dažādas komisijas.

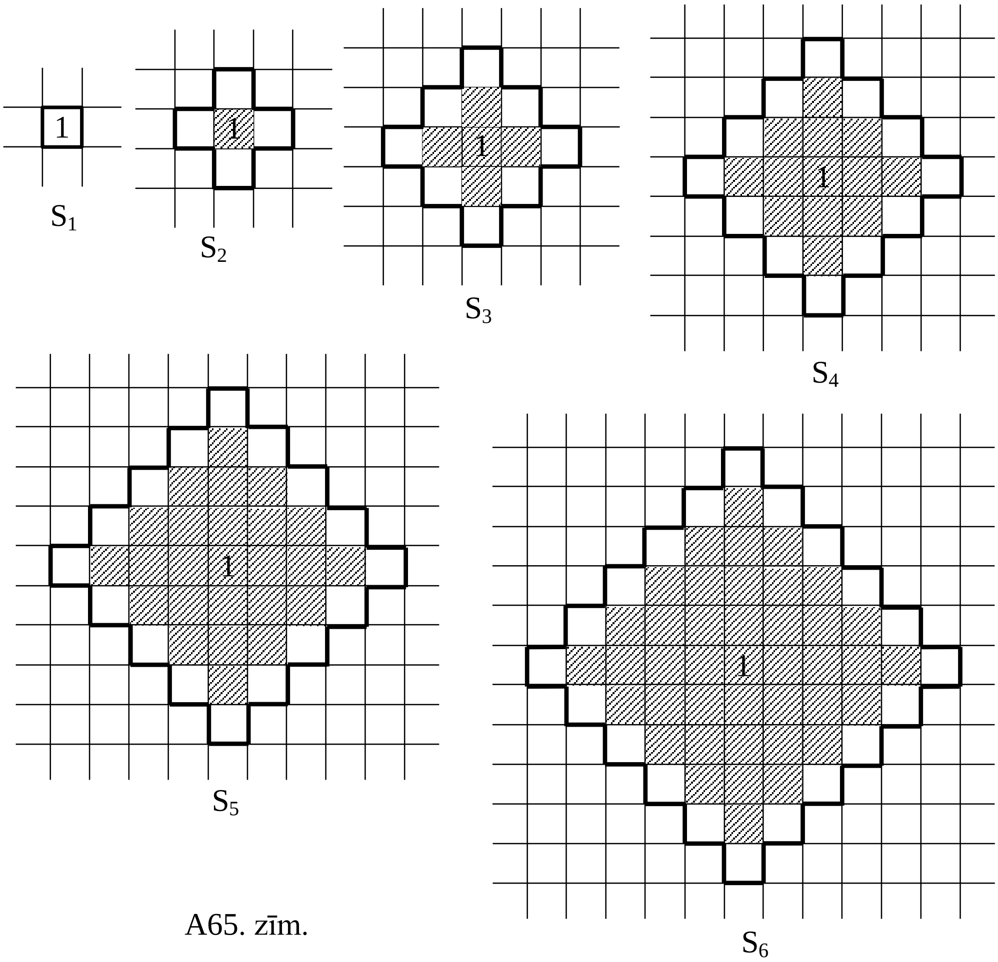
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

A64. zīm.

b) pierādīsim, ka vairāk par 12 komisijām izveidot nevar. No 9 deputātiem var izveidot $9 \cdot 8 : 2 = 36$ dažādus pārus (deputātu kārtība pārī nav svarīga). Katrā komisijā {X; Y; Z} sastopami trīs no šiem pāriem: XY, XZ, YZ. Tā kā neviens no šiem pāriem nedrīkst būt sastopams vairāk nekā vienā komisijā, tad komisiju nav vairāk par $36 : 3 = 12$.

2.5.B5. <u>Atbilde:</u> nē, nav iespējams.

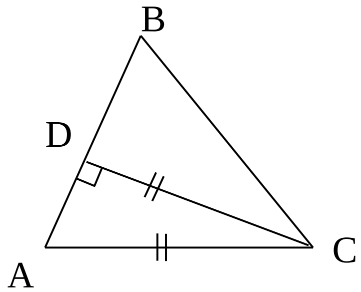
<u>Risinājums.</u> Apzīmēsim apgabalu, kurā vispār var parādīties kāda no pirmo n paaudžu baktērijām, ar S_n. Skaidrs, ka S_{n+1} sastāv no S_n rūtiņām un no tām rūtiņām, kas atrodas blakus kādai no S_n rūtiņām. Apgabali S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6 parādīti A65. zīm., katrs nākošais iegūts no iepriekšējā, pievienojot tam blakus rūtiņas.



A65. zīm.

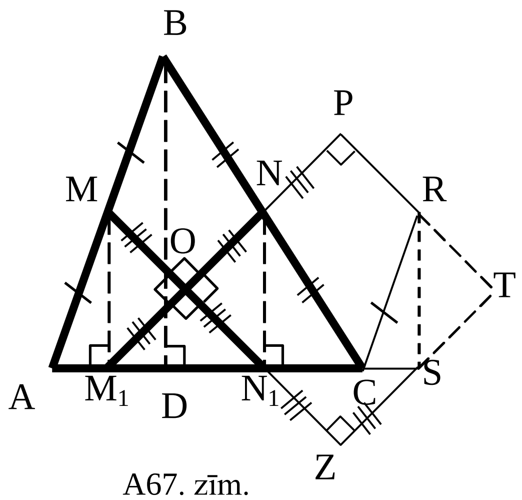
Kā redzams, S_6 satur 61 rūtiņu. Tātad pirmajās 6 paaudzēs kopā nevar būt vairāk nekā 61 baktērija. Bet pirmajās 6 paaudzēs kopā jābūt 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 baktērijām, un 63 > 61. Tātad 6 paaudzēm vietas nepietiek.

2.5.B6. Parādīsim, ka prasītajā veidā var sagriezt jebkuru šaurleņķu trijstūri, kam augstums vienāds ar pamatu. (Ne tikai vienādsānu trijstūri). Vispirms atzīmēsim, ka augstums, kas vienāds ar pamatu noteikti vilkts pret pamatu, nevis pret sānu malu. Tiešām, pretējā gadījumā (skat. A66. zīm.)



A66. zīm.

taisnleņķa trijstūrī ADC hipotenūza AC būtu vienāda ar kateti CD – pretruna.



A67. zīm.

Pieņemsim, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris ar augstumu BD, pie tam AC = BD. Apzīmēsim ar M un N attiecīgi malu AB un BC viduspunktus, bet ar M_1 un N_1 - attiecīgi M un N projekcijas uz pamata BC (skat. A67. zīm.) Tad MN = 0,5AC (viduslīnijas īpašība trijstūrī ABC), $M_1M = 0{,}5 \cdot BD$ un $N_1N = 0{,}5 \cdot BD$ (viduslīnijas īpašība trijstūros BAD un BCD).

Tā kā AC = BD, tad $MM_1 = NN_1 = MN$ **(1)**

Tā kā MN || AC, M_1M || BD un N_1N || BD, tad no tā, ka $BD \perp AC$, seko, ka $MM_1 \perp MN$ un $NN_1 \perp MN$ **(2)**.

No (1) un (2) seko, ka M_1MNN_1 ir kvadrāts. Tāpēc $OM_1 = OM = ON = ON_1$ un

$\angle M_1OM = \angle NOM = \angle NON_1 = \angle N_1OM_1 = 90^O$ **(3)**

Mēs pierādīsim, ka uzdevuma prasības var izpildīt, izdarot griezienus MN_1 un NM_1. Uzzīmējam četrstūri NPRC, kas simetrisks (tātad arī vienāds) četrstūrim NOMB attiecībā pret punktu N, un trijstūri N_1ZS, kas simetrisks (tātad arī vienāds) vienādsānu taisnleņķa trijstūrim N_1OM_1 attiecībā pret punktu N_1. Pēc konstrukcijas O, N, P atrodas uz vienas taisnes; tāpat uz vienas taisnes atrodas O, N_1, Z. Bez tam $OP = 2 \cdot ON$ un $OZ = 2 \cdot ON_1$, tātad $OP = OZ$. Pagarināsim PR un ZS līdz krustpunktam T; iegūstam četrstūri OPTZ. Pēc konstrukcijas $\angle OPT = \angle POM = 90^O$ un $\angle OZT = \angle N_1OM_1 = 90^O$. Tātad OPTZ ir taisnstūris ar vienādām blakus malām OP un OZ; tāpēc tas ir kvadrāts. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $AMOM_1$ = CRTS, uzdevums būs atrisināts. Ērtības labad turpmāk apzīmēsim AC = 2a (tad $M_1N_1 = 0{,}5 \cdot AC = a$) un $OM_1 = OM = ON = ON_1 = b$. Ievērojam, ka
$CS = N_1S - N_1C = M_1N_1 - N_1C = a - N_1C$ un
$AM_1 = AC - M_1N_1 - N_1C = 2a – a - N_1C = a - N_1C$.

Tātad $CS = AM_1$ **(4)**

Saskaņā ar konstrukciju CR = BM = AM **(5)**

Saskaņā ar konstrukciju

$$\angle RCS = 180^O - \angle BCR - \angle BCA =$$
$$= 180^O - \angle CBA - \angle BCA = \angle BAC \qquad \textbf{(6)}$$

No (4), (5) un (6) pēc pazīmes mlm seko, ka

$$\Delta RCS = \Delta MAM_1 \qquad \textbf{(7)}$$

Mēs jau pierādījām, ka OPTZ ir kvadrāts ar malas garumu 2b. Tāpēc RT = PT – PR = 2b – b = b; tātad RT = MO **(8)**

Līdzīgi TS = TZ – ZS = 2b – b =b; tātad $TS=OM_1$ **(9)**

Ievērojam, ka arī $\angle RTS = 90^o = \angle MOM_1$ **(10)**

No (8), (9) un (10) pēc pazīmes mlm seko, ka

$$\Delta RTS = \Delta MOM_1 \quad \textbf{(11)}$$

No (7) un (11) seko, ka RTSC = MOM_1A, ko arī vajadzēja pierādīt. Tātad trijstūri sagriežot iegūtās daļas MOM_1A, M_1ON_1, NCN_1O un BNOM var salikt kopā tā, lai iegūtu kvadrātu OPTZ. Uzdevums atrisināts.

2.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.6.A1. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka šillišallu skaits = v. st. šillišallu skaits + n. st. šillišallu skaits = v. st. šillišallu skaits + v. st. votivappu skaits $\geq$ v. st. dalībnieku skaits, pie tam "≥" zīmes vietā ir "=" zīme tad un tikai tad, ja neviens veiksmīgi startējušais dalībnieks nav vienlaikus gan votivappa, gan šillišalla.

(Piezīme: parasti olimpiādēs votivappas ir vienas cilts, bet šillišallas – otras cilts rūķīši, tomēr šoreiz tas nav viennozīmīgi pateikts uzdevuma nosacījumos.)

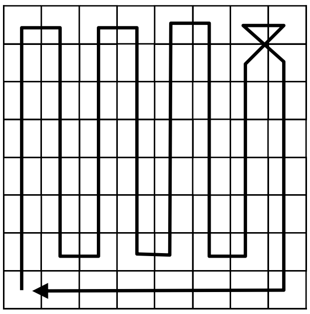
2.6.A2. Atbilde**:** 45×45×45=91125.

Atrisinājums. Aplūkosim triju vienādu iekavu reizinājumu

$$R = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot$$
$$\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot$$
$$\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9)$$

Atverot iekavas, mēs iegūsim reizinājumu xyz summu, kur x – patvaļīgs skaitlis no 1. iekavas, y – patvaļīgs skaitlis no 2. iekavas, z – patvaļīgs skaitlis no 3. iekavas. Skaidrs, ka katram trīsciparu skaitlim $\overline{xyz}$, starp kura cipariem nav nevienas nulles, apskatāmajā summā atbildīs reizinājums xyz, un otrādi – katram reizinājumam xyz ar x, y un z attiecīgi no 1., 2. un 3. iekavas atbildīs trīsciparu skaitlis $\overline{xyz}$. Tā kā trīsciparu skaitļiem, kam kāds cipars ir 0, ciparu reizinājums arī ir 0, tad uzdevumā meklējamā summa vienāda ar R. Tā kā 1 + 2 + ... + 9 = 45, iegūstam sākumā minēto atbildi.

2.6.A3. Izdarot gājienu pa horizontāli vai pa vertikāli, karalis nonāk uz pretējas krāsas lauciņa nekā tas, uz kura viņš atradies pirms gājiena; izdarot gājienu pa diagonāli, karalis nonāk uz tās pašas krāsas lauciņa, kā tas, uz kura viņš atradies pirms gājiena. Tā kā karalis beigās atgriezās uz sākotnējā lauciņa, tad viņa ceļojuma laikā notika pāra skaits "krāsu maiņu". Tāpēc nav iespējams, ka karaļa maršrutā bija tieši viens diagonāls gājiens, jo tad būtu izdarīti 63 horizontāli/ vertikāli gājieni un būtu notikušas 63 krāsu maiņas. Tas, ka karaļa maršruts ar tieši diviem diagonāliem gājieniem iespējams, redzams A68. zīm.

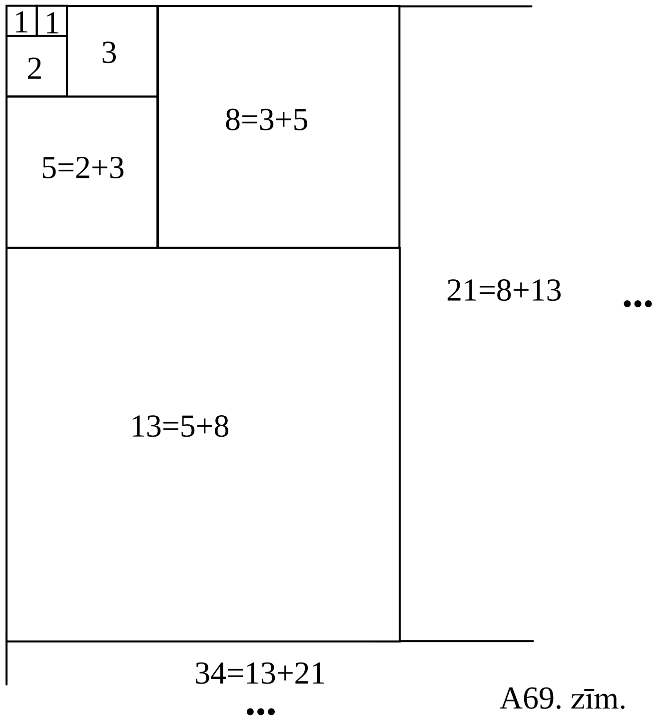


A68. zīm.

Iesakām lasītājam patstāvīgi noskaidrot, vai iespējams uzdevumā aprakstītais karaļa maršruts ar 4; 6; 8; ...; 62; 64 diagonāliem gājieniem.

2.6.A4. Pieņemsim, ka kvadrāts sagriezts n taisnstūros ar izmēriem $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n$, pie tam $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq b_n$. Skaidrs, ka pie $1 \leq i \leq n$ pastāv nevienādības $a_i \leq 1$ un $b_i \leq 1$, tātad $a_i \geq a_i b_i$. Tā kā kvadrāta laukums ir vienāds ar visu taisnstūru laukumu summu, tad $1 = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Tāpēc $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 1$, no kurienes arī seko vajadzīgais.

2.6.A5. Aplūkosim A69. zīm., kur attēloti vairāki kvadrāti; katra kvadrāta iekšpusē ierakstīts tā malas garums.



A69. zīm.

Iedomāsimies, ka, zīmējumu turpinot, katrs jaunais kvadrāts tiek pievienots visu iepriekšējo kvadrātu veidotajam taisnstūrim pārmaiņus labajā pusē un apakšā. Tad kvadrātu malu garumi ir mūsu aplūkojamās skaitļu virknes locekļi, un uzdevuma apgalvojums izriet no tā, ka kārtējā izveidotā taisnstūra laukums vienāds ar visu tajā ietilpstošo kvadrātu laukumu summu.

2.6.A6. Mazākais četrciparu skaitlis ir 1000, lielākais – 9999; tātad četrciparu skaitļu pavisam ir $9999 - 1000 + 1 = 9000$. Aprēķināsim, cik ir četrciparu skaitļu $\overline{abcd}$, kuros visi cipari ir pāra cipari. Cipars a var pieņemt jebkuru no četrām vērtībām 2; 4; 6; 8. Katrs no pārējiem cipariem var pieņemt jebkuru no piecām vērtībām 0; 2; 4; 6; 8. Tāpēc šādu četrciparu skaitļu pavisam ir $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$. Tā kā katrā četrciparu skaitlī vai nu visi cipari ir pāra cipari, vai arī ir kaut viens nepāra cipars, tad mūsu meklējamais skaits ir $9000 - 500 = 8500$.

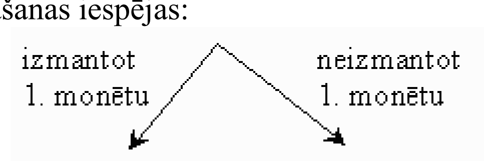
B GRUPA

2.6.B1. Atbilde: 8 monētas. Atrisinājums.

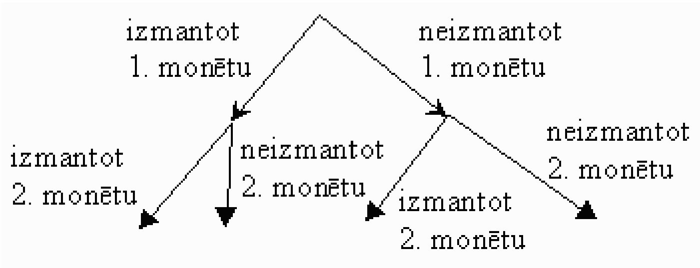
I Pieņemsim, ka Jānim ir sekojošas 8 monētas: 1s, 2s, 2s, 5s, 10s, 20s, 20s, 50s. Vienādības $1 = 1$; $2 = 2$; $3 = 1 + 2$; $4 = 2 + 2$; $5 = 5$; $6 = 1 + 5$; $7 = 2 + 5$; $8 = 1 + 2 + 5$; $9 = 2 + 2 + 5$ parāda, ka, izmantojot tikai pirmās 4 monētas, Jānis var samaksāt jebkuru naudas summu no 1s līdz 9s ieskaitot. Šīs pašas vienādības, pareizinātas ar 10, rāda: izmantojot tikai pēdējās četras monētas, Jānis var samaksāt jebkuru naudas summu 10s; 20s; 30s; ...; 90s. Tā kā $\overline{xy} = 10x + y$, tad no augšminētā seko: Jānis var samaksāt jebkuru naudus summu no 1s līdz 99s ieskaitot. Tā kā $10 + 20 + 20 + 50 = 100$, tad Jānis var samaksāt arī 1 latu.

II Tagad pierādīsim, ka ar 7 monētām mērķis nav sasniedzams. Ļoti svarīgs pierādījumā būs šāds rezultāts.

Lemma. Ar n monētu palīdzību var samaksāt ne vairāk kā 2^n dažādas naudas summas. Lemmu pierādīsim risinājuma beigās. Tagad ar tās palīdzību atrisināsim mūsu uzdevumu. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: ir iespējams tāds 7 monētu komplekts, ar kuru var samaksāt jebkuru naudas summu no 1s līdz 1 latam ieskaitot. Pastāv 2 iespējas: 1) starp Jāņa monētām nav divu vienādu. Tad viņam ir ne vairāk kā 6 monētas, kuru vērtības nepārsniedz 1 latu: 1s, 2s, 5s, 10s, 20s un 50s. Vienīgi šīs monētas Jānis var izmantot, lai samaksātu jebkuru no summām 1s; 2s; 3; ...; 98s; 99s. Tādu summu ir skaitā 99. Bet saskaņā ar lemmu Jānis ar minētajām monētām var samaksāt ne vairāk kā $2^6 = 64$ dažādas summas. Iegūta pretruna. 2) starp Jāņa monētām ir divas vienādas; apzīmēsim tās ar A un B. Izmantojot pārējās 5 monētas, Jānis var samaksāt ne vairāk kā $2^5 = 32$ dažādas summas. Balstoties uz katru no šīm summām, Jānis var samaksāt vēl ne vairāk kā divas citas summas, pievienojot vienu vai abas no monētām A un B. Tātad Jānis noteikti nevar samaksāt vairāk par $32 \cdot 3 = 96$ dažādām summām; bet viņam jāvar samaksāt 100 dažādas summas. Atkal iegūta pretruna. Atliek pierādīt lemmu. Ja Jānim ir tikai viena monēta, viņam ir tieši divas maksāšanas iespējas:



Ja Jānim iedosim vēl otru monētu, katra no šīm iespējām sadalās divās atkarībā no tā, vai viņš 2. monētu izmanto vai neizmanto:



Redzam, ka divu monētu gadījumā Jānim ir 4 maksāšanas iespējas. Pievienojot trešo monētu, katra no šīm 4 iespējām sadalās divās, un mēs pavisam iegūstam 8 iespējas. Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka n monētu gadījumā Jānim ir 2^n iespējas izvēlēties monētas maksāšanai. Pat ja visas šīs iespējas dod dažādas summas, Jānis nevar samaksāt vairāk par 2^n dažādām summām (turklāt viena no tām ir 0s – tā atbilst situācijai, kad Jānis izvēlas maksāšanai neizmantot nevienu monētu.) Līdz ar to lemma pierādīta.

2.6.B2. Risinot līdzīgi kā A grupas 2. uzdevumu, iegūstam atbildi $45 \cdot 45 \cdot 45 \cdot 45 \cdot 45 = 184528125$.

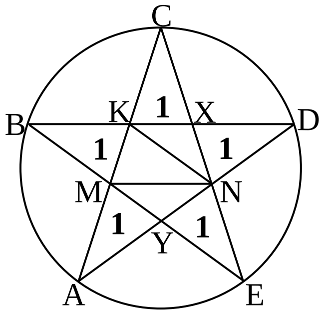
2.6.B3. Padomāsim, kā mainītos rūķīšu atbildes, ja katrs rūķītis pēkšņi mainītu savu dabu: meļi kļūtu par patiesiem, bet patiesie - par meļiem.

Pirms pārmaiņām			Pēc pārmaiņām		
A	B	A saka par B	A	B	A saka par B
m	m	"patiess!"	p	p	"patiess!"
m	p	"melis!"	p	m	"melis!"
p	m	"melis!"	m	p	"melis!"
p	p	"patiess!"	m	m	"patiess!"

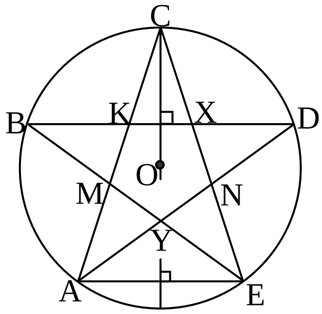
Mēs redzam, ka visas atbildes paliek tādas pašas. Tāpēc Sprīdītis nevar šīs situācijas atšķirt vienu no otras. Tomēr šādas pārmaiņas rezultātā tā daļa rūķīšu, kas agrāk bija meļi, tagad ir patiesi, un otrādi. Pieņemsim, ka bija m meļu un p patiesu rūķīšu. Tad meļu daļa ir m /(m + p). Situācijā, kuru Sprīdītis nevar atšķirt no šīs, meļu daļa ir p /(m + p). Vienīgā iespēja, kad Sprīdītis var nekļūdīgi noskaidrot meļu daļu, ir tad, ja m /(m + p) = p /(m + p)

. Tad $m = p$, un meļu ir tieši puse no visiem rūķīšiem. Uzdevumā aprakstītā situācija varēja realizēties, piemēram, tad, ja pavisam bija 2 rūķīši: viens patiess, otrs melis.

2.6.B4. Iedomāsimies, ka jau pierādīti šādi apgalvojumi: (1) $MN \parallel BD$ un $NK \parallel BE$, (2) $\Delta KXN = \Delta MYN$, (3) trijstūri, kas A70. zīm. apzīmēti ar ciparu "1", visi ir savā starpā vienādi.



A70. zīm.



A71. zīm.

No (1) seko, ka BKNM ir paralelograms. Tāpēc $\Delta BKM = \Delta NMK$. Tātad arī ΔNMK var apzīmēt ar ciparu "1", un joprojām visi ar "1" apzīmētie trijstūri ir vienādi. Tagad skaidrs, ka gan četrstūra BMND laukums, gan zvaigznes pārējās daļas laukums ir $3L_1 + L_2$, kur L_1 ir ar "1" apzīmēta trijstūrīša laukums, bet L_2 ir ΔKXN laukums un vienlaikus arī ΔMYN laukums. Atliek pierādīt augstākminētos apgalvojumus. (1) Novilksim diametru d caur virsotni C. Tā kā šis diametrs dala uz pusēm loku BCD, tad $d \perp BD$. Tā kā loki BA un DE ir vienādi, tad AE||BD; tāpēc $d \perp AE$. Tāpēc d dala hordas BD un AE uz pusēm (A71. zīm.) Tāpēc B un D ir simetriski viens otram attiecībā pret d, un arī A un E ir simetriski viens otram attiecībā pret d. Tāpēc simetriski attiecībā pret d ir AC un EC, kā arī BE un DA. Tāpēc šo simetrisko nogriežņu krustpunkti M un N arī ir simetriski viens otram attiecībā pret d; bet no tā seko, ka $MN \perp d$. Tā kā arī $BD \perp d$, tad $MN \parallel BD$, k.b.j. To, ka $KN \parallel BE$, pierāda līdzīgi. (2) Izmantojot simetriju attiecībā pret diametru, kas novilkts caur B, līdzīgi pierāda, ka $\Delta KXN = \Delta MYN$. (3) Viegli aprēķināt, ka loku AB, BC, CD, DE, EA leņķiskie lielumi ir 72^o. Pagriezīsim ABCDE ap riņķa centru O par 72^o pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Tad A pāriet par B, B – par C, ..., E – par A. Tāpēc AC pāriet par BD un BE pāriet par CA. Tāpēc AC un BE krustpunkts M pāriet par BD un CA krustpunktu K. Līdzīgi pierāda, ka Y pāriet par M. Tā kā ΔYAM virsotnes pāriet atbilstoši par ΔMBK virsotnēm, tad $\Delta YAM = \Delta MBK$. Pārējās vajadzīgās trijstūru vienādības pierāda līdzīgi.

2.6.B5. <u>Atbilde</u> 13 zirdziņus.

<u>Atrisinājums</u>**.** 1) Tas, ka 13 zirdziņus var izvietot, redzams A72. zīm.

X		X		X
	X		X	
X		X		X
	X		X	
X		X		X

A72. zīm.

1	2	5	6	7
3	6	4	2	5
4	1	10	7	9
10	3	8	11	12
	11	12	9	8

A73. zīm.

2) Katras divas rūtiņas, kas A73. zīm. satur vienādus skaitļus, sasniedzamas viena no otras ar vienu šaha zirdziņa gājienu. Tāpēc tajās abās nedrīkst atrasties zirdziņi. Tātad "sanumurētajās" rūtiņās kopā var atrasties ne vairāk par 12 zirdziņiem. Tā kā "nesanumurēta" ir tikai viena rūtiņa (kas varbūt arī satur zirdziņu), tad zirdziņu skaits nepārsniedz 12 + 1 = 13.

2.6.B6. Apzīmēsim rituļu masas ar $m_1 \le m_2 \le m_3 \le \ldots \le m_{31} \le m_{32} \le m_{33}$. Sadalīsim pirmos 32 rituļus divās daļās:

I daļa	II daļa
m_1	m_2
m_3	m_4
m_5	m_6
…	…
m_{29}	m_{30}
m_{31}	m_{32}

Tā kā $m_2 \ge m_1$, $m_4 \ge m_3$, ..., $m_{32} \ge m_{31}$, tad otrās daļas kopējā masa M_2 nav mazāka par pirmās daļas kopējo masu M_1: $M_2 \ge M_1$.

Novērtēsim, par cik otrās daļas masa pārsniedz pirmās daļas masu: $M_2 - M_1 = (m_2 + m_4 + \ldots + m_{32}) - \quad - (m_1 + m_3 + \ldots + m_{31}) = m_{32} - m_1 - (m_{31} - m_{30}) - - (m_{29} - m_{28}) - \ldots - (m_3 - m_2)$.

Tā kā $m_{31} \ge m_{30}$, $m_{29} \ge m_{28}, \ldots$, $m_3 \ge m_2$ un $m_1 > 0$, tad $M_2 - M_1 < m_{32}$. Tātad $0 \le M_2 - M_1 < m_{32}$.

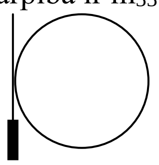
Mums vēl palicis siera gabals ar masu m_{33}. Ja mēs to varētu sagriezt divos gabalos ar masām x un y tā, ka $x - y = M_2 - M_1$, tad $x + M_1 = y + M_2$; tāpēc, pievienojot gabalu ar masu x I daļai un gabalu ar masu y II daļai, siers vajadzīgajā veidā būtu sadalīts. Pierādīsim divos dažādos veidos, ka šāda sagriešana iespējama.

A. Risināsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = m_{33} \\ x - y = M_2 - M_1 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus un rezultātu izdalot ar 2, iegūstam $x = 0{,}5(m_{33} + (M_2 - M_1))$ un tālāk no 1. vienādojuma $y = m_{33} - x = 0{,}5(m_{33} + (M_2 - M_1))$. Lai sagriešana gabalos ar masām x un y būtu iespējama, papildus nosacījumam $x + y = m_{33}$ vēl jāizpildās nosacījumam x > 0 un y > 0. Tas, ka x > 0, seko no $m_{33} > 0$ un no $M_2 - M_1 \le 0$. Tas, ka $y > 0$, seko no iepriekš pierādītās nevienādības $M_2 - M_1 < m_{32}$ un no nosacījuma $m_{32} \le m_{33}$.

B. Novietosim nazi ar asmeni augstāk par viena siera rituli tā, ka viss ritulis atrodas pa labi no tā (skat. A74. zīm.) Tad pa kreisi no asmens siera masa ir 0, bet pa labi tā ir m_{33}. Tāpēc labās un kreisās puses masu starpība ir m_{33}.



A74. zīm.

Sāksim vienmērīgi pārvietot nazi virs siera ritula pa labi, nemainot asmens virzienu. Skaidrs, ka pēc kāda laika abās pusēs no naža būs vienādi siera daudzumi, t. i., starpība būs 0. Tā kā šī starpība mainījusies no m_{33} līdz 0 un $m_{33} \ge m_{32} > M_2 - M_1 > 0$, tad kādā brīdī šī starpība bija tieši $M_2 - M_1$. Šajā brīdī mēs varējām apturēt naža virzīšanos pa labi un izdarīt vajadzīgo griezienu.

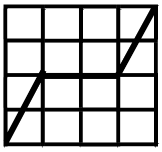
3. 28. mācību gads (2001/ 2002)

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.1.A1. Tā kā $A \neq N$, tad $A \neq 0; 1; 5; 6$. Ja $A = 2$, tad $N = 4$ un JULITA = 444444:2 = 222222 – pretruna. Līdzīgi pierāda, ka $A \neq 3$. Ja A = 4, tad N = 6, bet 666666 nedalās ar 4; ja A = 8, tad N = 4, bet 444444 nedalās ar 8; ja A = 9, tad N = 1, bet 111111 nedalās ar 9. Tāpēc A = 7, N = 9 un
JULITA = 999999:7 = 142857.
Visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

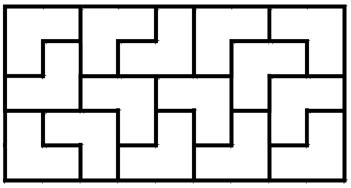
3.1.A2. Jā. Skat., piem., rūtiņu lapā uzzīmētu kvadrātu A75. zīm.



A75.zīm.

3.1.A3. Katrā spēlē viens spēlētājs uzvar, bet otrs zaudē. Tāpēc katra no summām vienāda ar visu izspēlēto spēļu skaitu.

3.1.A4. Jā, var. Skat., piem., A76. zīm.



A76. zīm.

3.1.A5. To, ka kāds apgalvojums X ir patiess (aplams), apzīmēsim attiecīgi ar X ~ p (X ~ a). Pieņemsim, ka A ~ p, tad arī B ~ p. Tāpēc C ~ a. Bet no A seko, ka C ~ p. Iegūta pretruna, tātad A ~ a. Tad C izsaka nepatiesību par A, tātad C ~ a. Ja D ~ p, tad jābūt B ~ p. Bet tad pēc B jēgas iznāk, ka D ~ a. Tātad iegūta pretruna, tāpēc D ~ a. Tad pēc D jēgas seko, ka B ~ a. Tagad skaidrs, ka E ~ p un F ~ a.

3.1.A6. Pieņemsim, ka tāda uzdevuma nav. Tad katru uzdevumu atrisinājis vai nu ≤ 1 zēns, vai ≤ 3 meitenes. Pirmajā gadījumā sauksim uzdevumu par grūtu zēniem, otrajā gadījumā – par grūtu meitenēm. (Protams, uzdevums var arī būt grūts gan zēniem, gan meitenēm.) Aplūkosim visus iespējamos $21 \cdot 21 = 441$ pārus, kas sastāv no viena zēna un vienas meitenes, un katram pārim izvēlēsimies vienu no tiem uzdevumiem, kurus gan attiecīgais zēns, gan meitene atrisinājuši. Pavisam būs izdarīta 441 izvēle. Tā kā $105 + 335 = 440 < 441$, tad noteikti vai nu ≥ 106 reizes būs izvēlēts uzdevums, kas grūts zēniem, vai arī ≥ 336 reizes būs izvēlēts uzdevums, kas grūts meitenēm.
Aplūkosim šos gadījumus atsevišķi.
Vismaz 106 reizes izvēlēts uzdevums, kas grūts zēniem. Šīs izvēles attiecas uz pāriem, kuros pavisam ir 21 dažāda meitene. Tā kā $21 \cdot 5 = 105 < 106$, tad uz kādu meiteni - sacīsim, Lienīti – attiecas vismaz 6 no šīm izvēlēm. Tas nozīmē, ka Lienīte atrisinājusi pa kopīgam izvēlētajam uzdevumam ar vismaz 6 zēniem. Tā kā visi šie uzdevumi ir grūti zēniem, tad tie visi ir dažādi. Tātad Lienīte nav atrisinājusi nevienu citu uzdevumu (jo pavisam viņa atrisinājusi ≤ 6 uzdevumus). Bet tad Lienītei ir kopīgi atrisināti uzdevumi ar tikai 6 zēniem – pretruna.
Vismaz 336 reizes izvēlēts uzdevums, kas grūts meitenēm. Šīs izvēles attiecas uz pāriem, kuros pavisam ir 21 zēns. Tā kā $21 \cdot 15 = 315 < 336$, tad uz kādu zēnu – sacīsim, uz

Sprīdīti – attiecas vismaz 16 no tām. Tas nozīmē, ka Sprīdītis atrisinājis pa kopīgam izvēlētajam uzdevumam ar vismaz 16 meitenēm. Tā kā visi šie uzdevumi ir grūti meitenēm un katru meitenēm grūtu uzdevumu atrisinājušas ≤ 3 meitenes, un $3 \cdot 5 = 15 < 16$, tad starp šiem uzdevumiem ir 6 dažādi. Tā kā Sprīdītis vispār atrisinājis ≤ 6 uzdevumus, tad viņš nav atrisinājis nevienu citu uzdevumu. Bet tad viņam ir kopīgi atrisināti uzdevumi ar $\leq 6 \cdot 3 = 18$ meitenēm – pretruna.
Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.

B GRUPA

3.1.B1. Kvadrātā pēdējais cipars var būt 1; 4; 5; 6; 9. Divciparu kvadrāti ir 16; 25; 36; 49; 64; 81. Trīsciparu kvadrāti ir 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 961 (neapskatām tos, kas satur ciparu 0). Redzam, ka neviens trīsciparu kvadrāts nebeidzas ar 16; 36; 49; 64; 81. Tāpēc mūsu apskatāmais skaitlis beidzas ar 25; tātad tas ir $\overline{ab225}$ vai $\overline{ab625}$. Tā kā $\overline{b225}$ resp. $\overline{b625}$ ir kvadrāti, tad, atceroties likumu, kā kāpina kvadrātā skaitļus, kuri beidzas ar 5 , iegūstam: $\overline{b2}$ resp. $\overline{b6}$ jābūt divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumam.
Pārbaude parāda, ka tādi ir 12; 42; 72; 56. Tātad mūsu meklējamais skaitlis ir vienā no formām $\overline{a1225}$; $\overline{a4225}$; $\overline{a7225}$; $\overline{a5625}$. Līdzīgi kā iepriekš skaitļiem $\overline{a12}$ ($\overline{a42}$; $\overline{a72}$; $\overline{a56}$) jābūt divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumiem. Pārbaude parāda, ka tādi ir skaitļi 812; 342; 272; 156; 756. Tātad mūsu meklējamie skaitļi ir 81225; 34225; 27225; 15625; 75625.

3.1.B2. Varam uzskatīt, ka vispirms novelk taisnes, bet pēc tam - riņķa līnijas. Divas taisnes plakni sadala 3 vai 4 daļās, tātad augstākais 4 daļās. Ja trešā taisne krusto abas jau novilktās n punktos, tad tā pati sadalās n + 1 daļā; katra no šīm n + 1 daļām rada vienu jaunu plaknes apgabalu. Tā kā $n \leq 2$, tad trīs taisnes sadala plakni ≤ 7 daļās. Ievērojot, ka riņķa līnijai un taisnei vai arī divām dažādām riņķa līnijām var būt ≤ 2 kopīgi punkti, līdzīgi izspriežam, ka plaknes daļu skaits nepārsniedz 7 + 6 + 8 + 10 = 31. Šādu daļu skaitu sasniedz, ja visas taisnes krustojas savā starpā, katra riņķa līnija ar katru taisni un katras divas riņķa līnijas krustojas 2 punktos un visi krustpunkti ir dažādi.

3.1.B3. Katrs spēlētājs izspēlē 9 spēles, tāpēc $x_i = 9 - y_i$ un $x_i^2 = 81 - 18 \cdot y_i + y_i^2$. Saskaitot šīs vienādības pie i = 1; 2;...; 10, iegūstam
$x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = 810 - 18 \cdot (y_1 + \ldots + y_{10}) + (y_1^2 + \ldots + y_{10}^2)$.
Kopējais zaudējumu skaits ir vienāds ar kopējo spēļu skaitu. Tātad $y_1 + \ldots + y_{10} = 45$. Tā kā $18 \cdot 45 = 810$, vajadzīgais iegūts.

3.1.B4. Nē, nevar. "Stūrīša" formas figūriņa ir vienīgā iespējamā; to skaits noteikti ir 15, tātad visu figūru perimetru summa ir $15 \cdot 8 = 120$. Šī perimetru summa sastāv no: a) taisnstūra ārējā kontūra garuma, kas ir 2(5 + 9) = 28, b) divkāršota griezuma līniju kopējā garuma (jo katrs griezuma posms atdala divas figūriņas). Tātad griezumu kopgarums noteikti ir $\frac{1}{2}(120 - 28) = 46$.

3.1.B5. Izvēlamies cilvēkus A un B, kas draudzējas savā starpā. Katram no tiem ir vēl 8 citas draudzības. Tā kā bez A un B ir vēl 11 cilvēki un 8 + 8 > 11, tad eksistē tāds cilvēks C, kas draudzējas gan ar A, gan ar B. Katram no cilvēkiem A, B, C ir vēl 7 draudzības ārpus viņu trijnieka. Tātad kopā viņiem ir 7 + 7 + 7 = 21 draudzība ārpus viņu trijnieka. Tā kā bez viņiem ir vēl 10 cilvēki un $21 > 10 \cdot 2$, tad eksistē kāds no šiem 10 cilvēkiem, kas draudzējas gan ar A, gan ar B, gan ar C. (Tiešām, ja neviens no šiem 10 nedraudzētos ar A, B un C, tad katrs no viņiem draudzētos ar augstākais diviem no A, B, C; bet tad A, B un C kopā nevarētu būt vairāk par $2 \cdot 10 = 20$ draudzībām šajā 10 cilvēku grupā.)

3.1.B6. Uzdevuma risinājums līdzīgs A grupas 6. uzdevuma risinājumam ar sekojošām izmaiņām: a) uzdevumu sauc par grūtu zēniem (meitenēm), ja to atrisinājuši ≤ 2 zēni (≤ 2 meitenes), b) šķiro gadījumus, vai no 441 izvēlēm 221 reizes ir izvēlēts zēniem grūts uzdevums vai 221 reizes izvēlēts meitenēm grūts uzdevums.

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

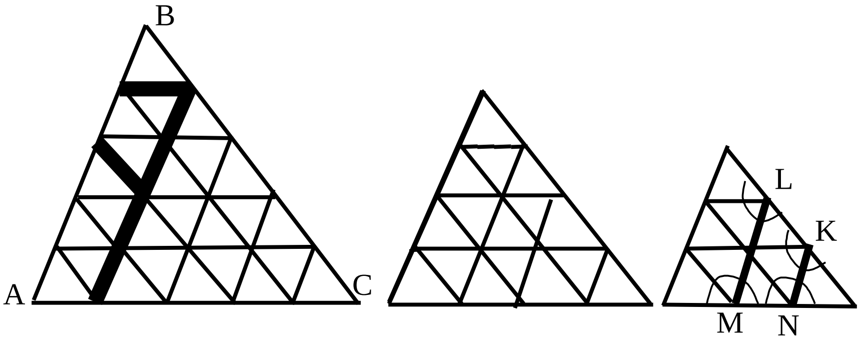
3.2.A1. Pierakstot nulli skaitļa galā, tas palielinās 10 reizes. Tātad starpība starp patieso rezultātu 948 un iegūto rezultātu 2181 ir 9 reizes lielāka par to skaitli, kuru Jānis "sabojāja". Tāpēc šis skaitlis ir ($(2181-948):9=1233:9=\underline{137}$, bet otrs skaitlis ir 948 – 137 = <u>811</u>.

3.2.A2. Jā. Apskatīsim 2001 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus 10234567890001, 10234567890002, ... , 10234567892001. Viens no tiem dalās ar 2001. Bet visiem šiem skaitļiem pirmie 10 cipari ir visi cipari no 0 līdz 9 ieskaitot.

3.2.A3. <u>Atbilde:</u> abi daudzumi ir vienādi.

<u>Atrisinājums:</u> Ņemsim patvaļīgu naturālu skaitli n, kur $1 \le n \le 1000$; pieņemsim, ka tas uzrakstīts ar zilu tinti. Ar sarkanu tinti uzrakstīsim visus skaitļus, kurus iegūst, aiz tieši viena n cipara pierakstot klāt nulli. Piemēram, ja n = 1201, tad ar sarkanu tinti tiks uzrakstīti skaitļi 10201; 12001; 12001; 12010 (ievērojiet, ka divi no tiem ir vienādi). Skaidrs, ka ar sarkanu tinti tiks uzrakstīti tieši tik daudzi skaitļi (varbūt ar atkārtojumiem), cik ir ciparu visos skaitļos no 1 līdz 1000 ieskaitot. Skaidrs arī, ka visi ar sarkanu tinti uzrakstītie skaitļi ir robežās no 1 līdz 10 000 ieskaitot un katrs no šādiem skaitļiem ir uzrakstīts tik reizes, cik viņā ir nuļļu. Tātad ar sarkanu tinti uzrakstīts tieši tik skaitļu, cik ir nuļļu visos skaitļos 1 līdz 10 000 ieskaitot. Tas arī pierāda mūsu apgalvojumu.

3.2.A4. Skat., piem., A77. zīm., kur trijstūris ABC ar taisnēm, kas paralēlas tā malām, vispirms sadalīts 25 vienādos sev līdzīgos trijstūrīšos.

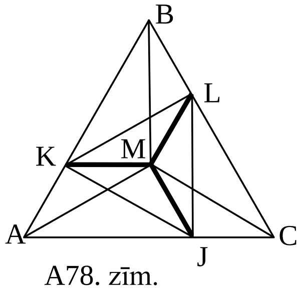


A77. zīm.

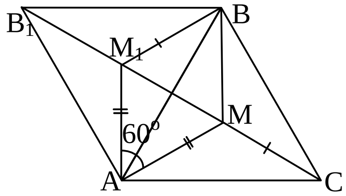
Pilnīgā risinājumā noteikti jāpierāda gan iepriekš minētās sagriešanas iespējamība, gan tas, ka no trim daļām saliktā figūra vispār ir trijstūris, t.i., ka zīmējumā kā savietotie parādītie nogriežņi savā starpā ir vienādi un ka punktos M, N, K, L veidojas 180° lieli leņķi.

3.2.A5. Dosim trīs atrisinājumus.

1. Novilksim $MK \parallel AC$, $ML \parallel AB$, $MJ \parallel BC$ (skat. A78. zīm.). Tad četrstūri AKMJ,



A78. zīm.



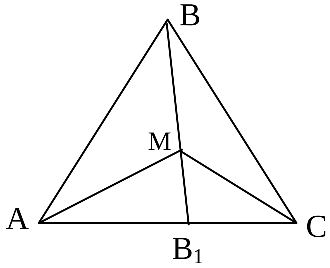
A79. zīm.

BLMK un CJML ir vienādsānu trapeces (pierādiet!). Vienādsānu trapecē diagonāles ir vienādas, tāpēc JK = AM, KL = BM un LJ = CM. Tātad ΔKLJ malu garumi ir AM, BM un CM.

2. Pagriežam ΔABC par 60° pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam ap punktu A. Tā kā AC = AB un $\angle BAC = 60^{O}$, tad punkts C attēlojas par punktu B, bet punkti B un M – attiecīgi par punktiem B_1 un M_1 (skat A79. zīm.). Tā kā nogrieznis CM attēlojas par BM_1, tad $\underline{CM = BM_1}$. Tā kā AM attēlojas par AM_1, tad $AM = AM_1$; tā kā pagrieziens notiek par 60°, tad $\angle M_1AM = 60^{O}$, un ΔM_1AM ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu. No tā seko, ka $\underline{AM = MM_1}$.

No abām izceltajām vienādībām secinām, ka ΔBM_1M malu garumi ir BM, AM un CM.

3. No ΔAMC seko, ka $\underline{AM + MC > AC}$ (skat. A80. zīm.). Varam pieņemt, ka



A80. zīm.

$\angle BB_1C \geq 90^{O}$. Tad trijstūrī BB_1C lielākais leņķis ir $\angle BB_1C$. Tā kā pret lielāku leņķi atrodas lielāka mala, tad $BC > BB_1$. Bet AC = BC un $BB_1 > BM$, tātad $\underline{AC > BM}$. (Piezīme: ja būtu $\angle BB_1C < 90^{O}$, mēs apskatītu trijstūri BB_1A, kurā $\angle BB_1A > 90^{O}$.) No pasvītrotajām nevienādībām seko, ka AM + CM > BM. Līdzīgi pierāda, ka AM + BM > CM un BM + CM > AM. Tātad, apskatot lielumus AM, BM un CM, katru divu summa ir lielāka par trešo. No skolas kursa zinām, ka tad šie lielumi ir kāda trijstūra malu garumi.

3.2.A6. Vispirms parādīsim, kā samainīt vietām jebkurus divus blakus esošus cilvēkus, citus cilvēkus atstājot sākotnējās pozīcijās. Tad, atkārtojot šādus "gājienus", pakāpeniski varēsim iegūt jebkuru cilvēku sakārtojumu. Turpmāk ar grieķu burtiem α, β apzīmētas rindā stāvošu cilvēku virknītes; ar x un y apzīmēsim tos blakus stāvošos cilvēkus, kurus gribam samainīt vietām.

$$\alpha\ x\ y\ \beta \quad (1)$$

Sākot ar situāciju (1), virknītes β cilvēkus pa vienam nosūtām uz kreiso galu, kamēr iegūstam situāciju (2):

$$\beta\ \alpha\ x\ y \quad (2)$$

Samainām vietām x un y, iegūstot (3):

$$\beta\ \alpha\ y\ x \quad (3)$$

Nosūtām uz kreiso galu x un y, iegūstot (4):

$$y\ x\ \beta\ \alpha \quad (4)$$

Virknītes a cilvēkus pa vienam nosūtām uz kreiso galu, iegūstot (5):

$$\alpha\ y\ x\ \beta \quad (5)$$

Vajadzīgais sasniegts.

Ilustrēsim šī algoritma darbu konkrētā piemērā, kad sākotnējā cilvēku virkne ir ABCXYDE:

ABCXYDE
EABCXYD
DEABCXY
DEABCYX
XDEABCY
YXDEABC
CYXDEAB
BCYXDEA
ABCYXDE.

B GRUPA

3.2.B1. Vispirms noskaidrosim, kura rūķīša ieguvums palielinātos, mainot dalīšanas noteikumus. Dalot naudu attiecībā 8:6:5, rūķīši saņēma attiecīgi $\frac{8}{19}$; $\frac{6}{19}$ un $\frac{5}{19}$ visas naudas. Dalot naudu attiecībā 7:5:4, rūķīši saņemtu attiecīgi $\frac{7}{16}$; $\frac{5}{16}$ un $\frac{4}{16}$ (jeb $\frac{1}{4}$)visas naudas. Ievērojam, ka $\frac{7}{16}=\frac{7\cdot 19}{16\cdot 19}=\frac{133}{16\cdot 19}>\frac{128}{16\cdot 19}=\frac{8\cdot 16}{16\cdot 19}=\frac{8}{19}$. Tātad, mainot sadalīšanas kārtību, pirmajam rūķītim naudas daudzums palielinātos. Turpretī $\frac{5}{16}=\frac{5\cdot 19}{16\cdot 19}=\frac{95}{16\cdot 19}<\frac{96}{16\cdot 19}=\frac{6\cdot 16}{16\cdot 19}=\frac{6}{19}$ un $\frac{1}{4}=\frac{19}{4\cdot 19}<\frac{20}{4\cdot 19}=\frac{5}{19}$, tātad, mainot sadalīšanas kārtību, otrajam un trešajam rūķītim naudas daudzumi samazinātos. No šejienes iegūstam, ka 25 dālderi ir $\frac{7}{16}-\frac{8}{19}=\frac{7\cdot 19}{16\cdot 19}-\frac{8\cdot 16}{16\cdot 19}=\frac{133-128}{16\cdot 19}=$ $=\frac{5}{16\cdot 19}=\frac{5}{304}$ visas naudas. Tātad 5 dālderi ir $\frac{1}{304}$ visas naudas, un pavisam lādē bija $5\cdot 304=1520$ dālderi. No šī daudzuma aprēķinām vienu deviņpadsmito daļu: 1520:19 = 80. Tātad pirmais rūķītis saņēma $8\cdot 80=640$ dālderus, otrais – $6\cdot 80=480$ dālderus un trešais – $5\cdot 80=400$ dālderus.

3.2.B2. Atbilde: pirmskaitļu var būt 0; 1; 2; 3; 4.

Atrisinājums: Pieņemsim, ka a, b, c, d, e – dažādi pirmskaitļi. Visos tālāk norādītajos piemēros katru četru uzrādīto skaitļu reizinājums dalās ar piekto:

a) ab, bc, cd, de, ea (0 pirmskaitļu),
b) a, abcd, abce, abde, acde (1 pirmskaitlis),
c) a, b, ab, $(ab)^2$, $(ab)^3$ (2 pirmskaitļi),
d) a, b, c, abc, $(abc)^2$ (3 pirmskaitļi),
e) a, b, c, d, abcd (4 pirmskaitļi).

Skaidrs, ka abcd nedalās ar e. Tāpēc visi pieci skaitļi nevar būt pirmskaitļi.

3.2.B3. Var gadīties, ka ir 36 pieturas: viena pietura, kurā pietur visu firmu autobusi, un pa 5 pieturām katrai no 7 firmām, kas visas savā starpā atšķiras. Tad pieturu ir $5\cdot 7+1=36$, un no katras pieturas uz katru citu var aizbraukt kaut vai caur "universālo" pieturu. Pierādīsim, ka vairāk par 36 pieturām nevar būt.

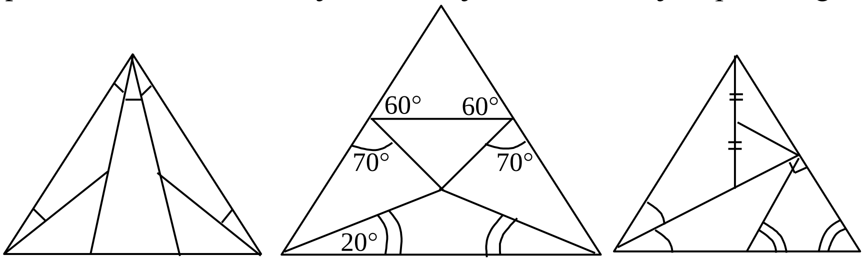
Pieņemsim pretējo: ir vismaz 37 pieturas.

Apskatīsim vienas firmas apkalpotās 6 pieturas. Ja neviena cita firma neapkalpotu nevienu no tām, tad no šīm pieturām nevarētu aizbraukt ne uz vienu citu - pretruna. Tātad kāda firma apkalpo vismaz vienu no šīm 6 pieturām. Tāpēc abas šīs firmas kopā apkalpo ne vairāk par 6 + 6 – 1 = 11 pieturām.

Ja nevienu no šīm 11 pieturām neapkalpotu neviena cita firma, tad no tām nevarētu nokļūt ne uz vienu citu - pretruna. Tātad vēl kāda trešā firma apkalpo vismaz vienu no šīm 11 pieturām. Tātad līdz šim minētās trīs firmas kopā apkalpo ne vairāk par 11 + 6 – 1 = 16 dažādas pieturas.

Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka eksistē ceturtā firma, kura kopā ar šīm trim apkalpo ne vairāk par $16+6-1=21$ pieturu; eksistē piektā firma, kura kopā ar šīm četrām apkalpo ne vairāk par $21+6-1=26$ pieturām; eksistē sestā firma, kura kopā ar šīm piecām apkalpo ne vairāk par $26+6-1=31$ pieturām. Tā kā septītajai firmai jāapkalpo vismaz vienu no 31 pieturas, tad kopējais pieturu skaits nav lielāks par $31+6-1=36$. Iegūta pretruna ar iepriekš izcelto pieņēmumu. tātad pieturu tiešām ir ne vairāk kā 36.

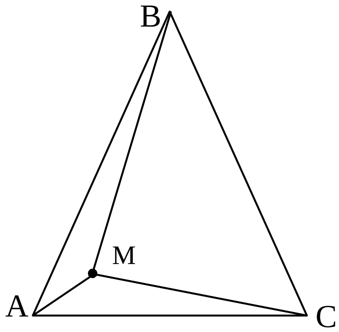
3.2.B4. Skat., piem., A81. zīm. Pierādījumus atstājam veikt lasītājam patstāvīgi.



A81. zīm.

3.2.B5. Atbilde: nevienam.

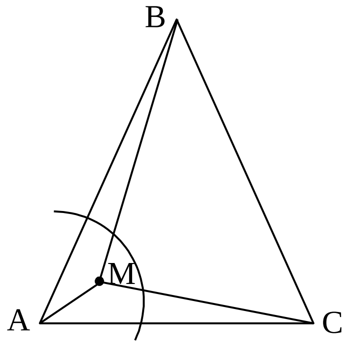
Risinājuma ideja: Ja trijstūris ABC nav vienādmalu, tad tam var atrast divas dažāda garuma malas; pieņemsim, ka tās ir AB un AC, pie tam AB > AC. Izvēlēsimies punktu M ļoti tuvu virsotnei A (skat A82. zīm.).



A82. zīm.

Tad $BM \approx AB$ un $CM \approx AC$. Tāpēc $BM - CM \approx AB - AC$. Ja M būs tik tuvu virsotnei A, ka AM ir daudzkārt mazāks par starpību AB – AC, tad AM < BM – CM jeb AM + CM < BM. Bet trijstūrī katrai malai jābūt īsākai par abu pārējo malu garumu summu.

Precīzs risinājums. Pieņemsim, ka trijstūris ABC nav vienādmalu. Tad tajā var atrast divas dažāda garuma malas. Pieņemsim, ka tās ir AB un AC, un AB > AC. Novilksim ap virsotni A riņķa līniju ar rādiusu $r = \frac{1}{4}(AB - AC)$ (skat A83. zīm.).



A83. zīm.

Izvēlēsimies trijstūra ABC iekšēju punktu M tā, lai tas atrastos šīs riņķa līnijas iekšpusē. Tad $AM < r$. No trijstūriem AMB un AMC iegūstam $BM + AM > AB$ un $AC + AM > CM$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$BM + AM + AC + AM > AB + CM$$

$$BM > (AB - AC) + CM - 2AM \ (*)$$

Tā kā $AB - AC = 4r$ un $AM < r$, tad no (*) seko

$$BM > 4r + CM - 2r$$

$$BM > CM + 2r \ (**)$$

Tā kā $AM < r < 2r$, tad no (**) seko $BM > CM + AM$. Bet tas nozīmē, ka nevar izveidot trijstūri, kura malu garumi būtu BM, CM un AM.

3.2.B6. Apzīmēsim monētas ar A; B; C; D; E un F. Pirmajā svēršanā nosveram vienlaicīgi A, B un C, bet otrajā nosveram vienlaicīgi B, C , D un E. Aplūkosim sekojošas iespējas:

a) visas svērtās monētas ir ar vienādu masu. Tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{3}{4}$;

b) B vai C ir ar masu y, un tā atšķiras no pārējo monētu masas x. Tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{2x+y}{3x+y}$. Ja būtu $\frac{2x+y}{3x+y} = \frac{3}{4}$, tad $4(2x + y) = 3(3x + y)$, $8x + 4y = 9x + 3y$ un $x = y$ – pretruna. Tātad svaru rādījumu attiecība noteikti nav $\frac{3}{4}$.

c) līdzīgi kā b) gadījumā pierāda, ka svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$ arī gadījumos, ja A, D vai E ir ar atšķirīgu masu no pārējām monētām.

No šejienes varam secināt: ja abu svaru rādījumu attiecība $\frac{3}{4}$, tad visas monētas A, B, C, D, E ir ar vienādu masu, kuru no svaru rādījumiem viegli aprēķināt. Tad ar trešo svēršanu nosakām F masu. Ja turpretī abu svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$, tad viena no monētām A, B, C, D, E ir ar citādu masu nekā pārējās (un tad F noteikti ir "īstā" monēta). Šajā gadījumā ar trešo svēršanu nosveram vienlaicīgi C un D. Apzīmējot piecu monētu masas ar x, bet atšķirīgās monētas masu ar y, iegūstam sekojošu tabulu, kas rāda svēršanu rezultātus m_1, m_2 un m_3 atkarībā no tā, kura no monētām A; B; C; D; E ir ar masu y:

Svēršanas rezultāts	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
m_1	2x+y	2x+y	2x+y	3x	3x
m_2	4x	3x+y	3x+y	3x+y	3x+y
m_3	2x	2x	x+y	x+y	2x

Viegli pārbaudīt, ka

a) $m_2 = 2m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir A,
b) $m_3 = 2(m_2 - m_1)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir B,
c) $m_2 + m_3 = 2m_1$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir C,
d) $2m_1 = 3(m_2 - m_3)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir D,
e) $2m_1 = 3m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir E.

Tā kā skaitļi m_1, m_2 un m_3 mums ir zināmi, tad mēs varam noskaidrot, kurš no minētajiem gadījumiem ir spēkā, un katrā gadījumā viegli aprēķināt x un y vērtības.

Komentārs. Var pierādīt, ka 7 monētu gadījumā, no kurām vienai varbūt ir citāda masa nekā pārējām, visu monētu masas iespējams noskaidrot ar 5 svēršanām (pierādījums ir ļoti sarežģīts).

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.3.A1. Nē, nevar. Ja skaitlis x beidzas ar kādu no cipariem 1; 4; 6; 9, tad skaitlis 37x beidzas attiecīgi ar ciparu 7; 8; 2; 3, bet mūsu rīcībā nav ne 7, ne 8, ne 2, ne 3.

3.3.A2. Apzīmēsim pirmā koncerta ienākumu ar M. Ja biļešu cena nebūtu paaugstināta, tad otrā koncerta ienākumam būtu jābūt $1\frac{1}{2}\mathrm{M}$. Bet tas ir $1\frac{1}{4}\mathrm{M}$. Tātad biļetes cena otrajā koncertā attiecas pret biļetes cenu pirmajā koncertā kā $\left(1\frac{1}{4}\mathrm{M}\right):\left(1\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{5}{4}\mathrm{M}\right):\left(\frac{6}{4}\mathrm{M}\right)=5:6$. Tātad biļetes cena otrajā koncertā ir $\frac{15\mathrm{Ls}}{6}\cdot 5 = 12\mathrm{Ls}\ 50\mathrm{s}$.

3.3.A3. Var, piemēram, uzrakstīt skaitļus 1111; 1223; 1332; 2122; 2231; 2313; 3133; 3212; 3321.

Uzrakstot 10 skaitļus, vismaz četriem no tiem sakritīs pirmais cipars (jo $3\cdot 3 = 9 < 10$). Šiem četriem skaitļiem otrais cipars var būt tikai 1; 2; 3, tāpēc vismaz diviem no tiem sakritīs arī otrais cipars. Tāpēc 10 skaitļus saskaņā ar uzdevuma prasībām uzrakstīt nevar.

3.3.A4. Divu divciparu skaitļu reizinājumam var būt vai nu 3, vai 4cipari. Apzīmējot Nezinīša reizinātos divciparu skaitļus ar x un y, iegūstam, ka pastāv viena no vienādībām.

(A) $x\cdot y = 105$
(B) $x\cdot y = 150$
(C) $x\cdot y = 1005$
(D) $x\cdot y = 1050$
(E) $x\cdot y = 1500$

Tālāk apskatām šīs iespējas atsevišķi.

Ievērojam, ka $105 = 3\cdot 5\cdot 7$, tātad 105 nav izsakāms kā divu divciparu skaitļu reizinājums. Tāpēc (A) gadījumā atrisinājumu nav.

Ievērojam, ka $150 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$. Vienīgais skaitļa 150 sadalījums divu divciparu skaitļu reizinājumā ir $10\cdot 15 (= 15\cdot 10)$. Bet Nezinītis nevar savā kalkulatorā ievadīt skaitli 10. Tāpēc arī (B) gadījumā atrisinājumu nav.

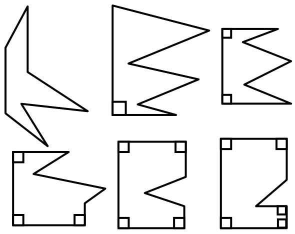
Ievērojam, ka $1005 = 3\cdot 5\cdot 67$ un 67 tālāk sadalīt naturālos reizinātājos vairs nevar. Iegūstam vienu vienīgu iespēju: Nezinītis reizināja skaitļus 15 un 67.

Ievērojam, ka $1050 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7$. Lai neviens no skaitļiem x un y nebeigtos ar nulli, reizinātājs 2 "nedrīkst būt kopā" ar 5. Iegūstam divas iespējas: ir reizināti vai nu skaitļi $14 (= 2\cdot 7)$ un $75 (= 3\cdot 5\cdot 5)$, vai arī skaitļi $42 (= 2\cdot 3\cdot 7)$ un $25 (= 5\cdot 5)$.

Ievērojam, ka $1500 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5$. Atkal ievērojot, ka reizinātājs 5 "nedrīkst būt kopā" ar 2, vienam reizinātājam jāsatur visi piecinieki, tātad tas ir vismaz $125(= 5\cdot 5\cdot 5)$ – trīsciparu skaitlis. Tāpēc arī (E) gadījumā atrisinājuma nav.

3.3.A5. Ja kvadrātā ir nepāra skaits rūtiņu, tad melno un balto rūtiņu daudzumi tajā atšķiras viens no otra par 1. Turklāt kvadrāta centrālā rūtiņa ir tajā krāsā, kurā ir rūtiņu vairākums. Tā kā lielajā kvadrātā ar izmēriem 100×100 ir vienāds skaits balto un melno rūtiņu, tad kvadrātu ar vairāk baltajām rūtiņām ir tikpat, cik kvadrātu ar vairāk melnajām rūtiņām. No šejienes un iepriekš izceltā fakta seko pierādāmais.

3.3.A6. Septiņstūra iekšējo leņķu lielumu summa ir $180^\circ\cdot(7-2) = 180^\circ\cdot 5 = 900^\circ$. Septiņu taisnu leņķu lielumu summa būtu $90^\circ\cdot 7 = 630^\circ$; tātad visi 7 leņķi nevar būt taisni. Sešu taisnu leņķu lielumu summa būtu $90^\circ\cdot 6 = 540^\circ$; tad septītā leņķa lielums būtu $900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$, kas nevar būt. Tātad septiņstūrī nevar būt arī 6 taisni leņķi.
Tas, ka septiņstūrī var būt 0; 1; 2; 3; 4; 5 taisni leņķi, redzams A84. zīm.



A84. zīm.

B GRUPA

3.3.B1. Apzīmēsim votivapu skaitu ar x, bet šillišallu skaitu ar y. Katrs šillišalla pazīst y-1 citus šillišallas. Tā kā šillišallas runā patiesību, tad votivapu ir vairāk nekā y-1, tātad vismaz y. Tāpēc $x \ge y$ (1)

Tā kā votivapas melo, tad patiesībā neviens votivapa nepazīst vairāk votivapu nekā šillišallu. Tā kā katrs votivapa pazīst x-1 citus votivapas, tad katrs votivapa pazīst vimaz x-1 šillišallas. Tāpēc pazīšanos skaits S starp votivapām un šillišallām ir vismaz $x(x-1)$. No otras puses, S nav lielāks par $y\cdot x$, jo neviens šillišalla nevar pazīt vairāk par x votivapām. No nevienādībām $x(x-1)\le S\le y\cdot x$ seko $x(x-1)\le y\cdot x$ un, tā kā $x\ne 0$, tālāk $x-1\le y$. Ņemot vērā (1), iegūstam $y\le x\le y+1$ (2)

Apskatīsim abas iespējas, ko pieļauj (2).

A. Varbūt x = y. Ja kāds šillišalla nepazītu kaut vienu votivapu, tad viņa teiktais būtu meli - pretruna. Tāpēc katrs šillišalla pazīst katru votivapu.

B. Varbūt x = y + 1. Tad katrs no y + 1 votivapām pazīst y votivapas; saskaņā ar iepriekš izcelto apgalvojumu viņam jāpazīst vismaz y šillišallas, tātad visi šillišallas.

3.3.B2. No diviem pāra skaitļiem ar aprakstīto operāciju iegūst pāra skaitli, no pāra un nepāra skaitļiem - nepāra skaitli. Tātad uz tāfeles vienmēr paliek tieši viens nepāra skaitlis. Tāpēc pēdējais palikušais skaitlis noteikti būs nepāra.

Tā kā gājienu rezultātā iegūst nenegatīvus skaitļus un $0 < x - y < x$, ja $x > y > 0$, tad nevar iegūt lielākus skaitļus par 16. Tāpēc noteikti kā pēdējos nevar iegūt citus skaitļus kā vien (varbūt!) 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15.

Parādīsim, ka katru no šiem skaitļiem var iegūt kā pēdējo.

No 1 un 2 var iegūt 1: 2 – 1 = 1.

No 1, 2 un 4 var iegūt 3 (2 – 1 = 1 un 4 – 1 = 3) un 1 (4 – 2 = 2 un 2 – 1 = 1).

Iedomāsimies, ka mums sākumā doti skaitļi 1; 2; 4; 8.

a) skaitļus 1 un 3 var iegūt, vispirms iegūstot $8-4=4$ un tālāk rīkojoties kā iepriekšējā punktā,

b) skaitļus 5 un 7 var iegūt, vispirms no 1; 2; 4 iegūstot 3 vai 1 (skat. iepriekšējo punktu) un pēc tam iegūstot 8 – 3 = 5 vai 8 – 1 = 7.

Ja doti skaitļi 1; 2; 4; 8; 16, tad:

a) skaitļus 1; 3; 5; 7 var iegūt, vispirms iegūstot 16-8 = 8 un tālāk rīkojoties kā iepriekšējā punktā,

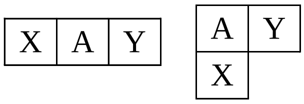
b) skaitļus 9; 11; 13; 15 var iegūt, vispirms no 1; 2; 4; 8 iegūstot 7; 5; 3 vai 1 un pēc tam iegūstot atbilstoši 16 – 7 = 9, 16 – 5 = 11, 16 – 3 = 13, 16 – 1 = 15.

Komentārs. Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka no skaitļiem 1; 2; 4; 8; …; 2^{n-1}; 2^n ar uzdevumā minētajām operācijām kā pēdējo var iegūt jebkuru naturālu nepāra skaitli, kas mazāks par 2^n, un nekādu citu skaitli.

3.3.B3. Ir iespējamas 9 dažādas krāsas (skat. A85. zīm.).

7	7	8	8	9	9
7	7	8	8	9	9
4	4	5	5	6	6
4	4	5	5	6	6
1	1	2	2	3	3
1	1	2	2	3	3

A85. zīm.

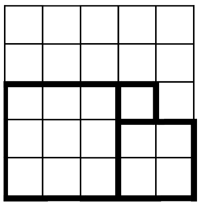


A86. zīm.

Pieņemsim, ka krāsu ir vairāk par 9; tad to ir vismaz 10. Tā kā pavisam ir 36 rūtiņas un $10 \cdot 4 = 40 > 36$, tad kādā no krāsām nokrāsotas ne vairāk par 3 rūtiņām. Ja A - viena no tām, tad abas pārējās rūtiņas X un Y var būt novietotas tikai tā, kā parādīts A86 zīmējumā (varbūt triju rūtiņu veidotā figūra pagriezta citā virzienā). Bet tad attiecībā uz X un Y uzdevuma nosacījumi neizpildās. Iegūta pretruna, tātad krāsu nav vairāk par 9.

3.3.B4. Atbilde**:** mazākais iespējamais virsmas laukums ir 194.

Atrisinājums. Figūru ar virsmas laukumu 194 var iegūt, ja kubus novieto, piemēram, tā, kā parādīts A87. zīm. Tur attēlots skats no augšas. Trīs mazākie kubi novietoti uz lielā kuba vienas skaldnes.



A87. zīm.

Saskāršanās rezultātā no kubu virsmas laukumu summas 6(25 + 9 + 4 + 1) "tiek zaudēti" 6 kvadrāti 1×1, 4 kvadrāti 2×2 un 2 kvadrāti 3×3. Tāpēc virsmas laukums ir $6(25+9+4+1)-6\cdot1-4\cdot4-2\cdot9=234-6-16-18=194$.

Tagad pierādīsim, ka mazāku virsmas laukumu iegūt nevar. Tas būs pierādīts, ja pamatosim, ka kopējais saskāršanās laukums uz kubu virsmām nevar būt lielāks par $6\cdot1+4\cdot4+2\cdot9$.

Īsuma pēc kubus turpmāk sauksim par K_1, K_2, K_3 un K_5 atbilstoši to šķautņu garumiem. Jebkuri divi kubi savā starpā var saskarties ar augstākais vienu skaldni katrs. Tāpēc uz K_1 virsmas saskāršanās laukums nevar būt lielāks par $3\cdot(1\times1)=3$. Uz K_2 virsmas tas nevar būt lielāks par $2\cdot(2\times2)+1\times1$ (divas skaldnes pilnībā tiek nosegtas ar lielākajiem kubiem, bet uz trešās skaldnes K_1 rada maksimāli iespējamu pārsegumu). Uz K_3 virsmas saskāršanās laukums nevar būt lielāks par $3\times3+2\times2+1\times1$, un arī uz K_5 virsmas tas nevar būt lielāks par $3\times3+2\times2+1\times1$. Tāpēc kopējais saskāršanās laukums uz visu kubu virsmām nevar būt lielāks par $3\cdot(1\times1)+2\cdot(2\times2)+$ $+1\times1+2(3\times3+2\times2+1\times1)=6\cdot(1\times1)+4\cdot(2\times2)+2\cdot(3\times3)$, k.b.j.

3.3.B5. Atbilde: jā, tā var gadīties.

Atrisinājums: Pieņemsim, ka Pēteris vienīgais atrisināja 10 uzdevumus, bet Andris vienīgais atrisināja 5 uzdevumus; bez tam bija 13 tādi uzdevumi, kurus atrisināja Jānis un Andris, un 7 tādi uzdevumi, kurus atrisināja Jānis un Pēteris.

Pārliecinieties paši, ka Jānis atrisināja 20 uzdevumus, Andris - 18 uzdevumus un Pēteris – 17 uzdevumus; savukārt Jānis saņēma 20 punktus, Andris – 23 punktus un Pēteris – 27 punktus.

3.3.B6. Atbilde: jā, tādi skaitļi eksistē.

Atrisinājums: Ar n! apzīmējam visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

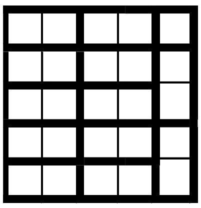
Apskatām skaitļus $1\cdot200!, 2\cdot200!, 3\cdot200!, \ldots, 100\cdot200!$. Skaidrs, ka tie ir naturāli, dažādi un to skaits ir 100. Ņemam divus no tiem: $x\cdot200!$ un $y\cdot200!$ $(1\le x, y\le100)$. Tad $\frac{(x\cdot200!)(y\cdot200!)}{(x\cdot200!)+(y\cdot200!)}=\frac{x\cdot y\cdot200!\cdot200!}{(x+y)\cdot200!}=x\cdot y\cdot\frac{200!}{(x+y)}$. Tā kā $1\le x\le100$ un $1\le y\le100$, tad $2\le x+y\le200$ (patiesībā pat $3\le x+y\le199$, jo $x\ne y$). Tāpēc reizinājums $200!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot199\cdot200$ satur reizinātāju x + y, tātad dalās ar x + y.

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.4.A1. Ja pārdeva x kg "Murijuri" un y kg "Mazakaza", tad kopējais ieņēmums bija 3x + 5y latu. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 3x = 5y, tāpēc $x=\frac{5}{3}y$ un kopā pārdeva $y+\frac{5}{3}y=\frac{8}{3}y$ kilogramu konfekšu, bet kopējais ieņēmums bija 3x + 5y = 5y + 5y = 10y latu. Tātad maisījumu varēja pārdot par $10y:\left(\frac{8}{3}y\right)=\frac{30}{8}=3\frac{3}{4}$ latiem kilogramā jeb par Ls 3,75 kilogramā.

3.4.A2. Sadalām kvadrātu 12 rūtiņu pāros un 1 atsevišķā rūtiņā, kā redzam A88. zīm.



A88. zīm.

No 14 melnajām rūtiņām vismaz 14 – 1 = 13 atrodas rūtiņu pāros. Tā kā šādu pāru ir tikai 12, tad noteikti būs divas melnas rūtiņas no viena pāra. Tās atrodas blakus.

3.4.A3. Naturāls skaitlis, kas beidzas ar n nullēm, dalās ar $\underbrace{10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{\text{n reizes}}$. Tātad tas dalās ar $\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{\text{n reizes}}$ un ar $\underbrace{5\cdot5\cdot\ldots\cdot5}_{\text{n reizes}}$.

Noskaidrosim vispirms, cik pieciniekus var atrast uzdevumā minētajā reizinājumā R.

Katrs piektais naturālais skaitlis dalās ar 5. Tā kā $2002=5\cdot400+2$, tad R satur 400 reizinātājus, kas dalās ar 5.

Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 = 25$. Tā kā $2002 = 25 \cdot 80 + 2$, tad R satur 80 reizinātājus, kas dalās ar 25.

Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Tā kā $2002 = 125 \cdot 16 + 2$, tad R satur 16 reizinātājus, kas dalās ar 125.

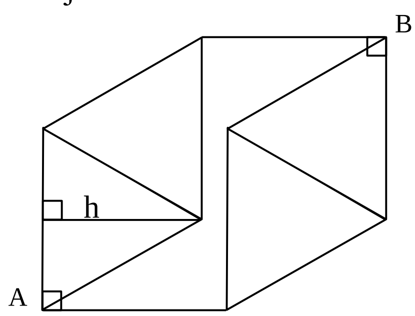
Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.Tā kā $2002 = 625 \cdot 3 + 127$, tad R satur 3 reizinātājus, kas dalās ar 625.

Tā kā $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125 > 2002$, tad R nesatur nevienu reizinātāju, kas dalās ar 3125.

Tātad no R ietilpstošajiem reizinātājiem 400 reizinātāji satur vismaz vienu piecinieku. No šiem 400 reizinātājiem 80 reizinātāji satur vismaz vēl vienu piecinieku. No šiem 80 reizinātājiem 16 reizinātāji satur vēl vismaz vienu piecinieku, un no šiem 16 reizinātājiem 3 reizinātāji satur vēl vismaz vienu piecinieku. Tātad R pavisam satur 400 + 80 + 16 + 3 = 499 piecinieku s.

Tā kā R acīmredzot satur kā reizinātājus vismaz 1001 divnieku (R satur 1001 pāra reizinātāju) un 1001 > 499, tad R beidzas ar tieši 499 nullēm.

3.4.A4. Jā, var. Skat., piem., A89. zīm., kur punktos A un B kontūrā veidojas taisni leņķi. Tā kā h < 1, tad abi rombi nepārklājas.



A89. zīm.

3.4.A5. Jā, var. Aprakstīsim vienu no daudzajām metodēm, kā tādus skaitļus var atrast. Izvēlamies četrus dažādus naturālu skaitļu kvadrātus a^2; b^2; c^2; d^2. Apzīmējam $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Skaitļi $\frac{S}{3} - a^2$, $\frac{S}{3} - b^2$, $\frac{S}{3} - c^2$ un $\frac{S}{3} - d^2$ ir tādi, ka katru triju summa ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tiešām, $\left(\frac{S}{3} - a^2\right) + \left(\frac{S}{3} - b^2\right) + \left(\frac{S}{3} - c^2\right) = S - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = d^2$; citas triju saskaitāmo summas pārbauda līdzīgi.

Atliek izvēlēties a, b, c, d tā, lai S dalītos ar 3 un lai $\frac{S}{3}$ būtu lielāks gan par a^2, gan par b^2, gan par c^2, gan par d^2. Var ņemt, piemēram, $a^2 = 64$, $b^2 = 81$, $c^2 = 100$, $d^2 = 121$. Tad S = 366 un $\frac{S}{3} = 122$. Mūs interesējošie skaitļi tad iznāk 1; 22; 41; 58.

3.4.A6. Skat., piem., A90. zīm.

3	14	9
19	2	5
4	10	12

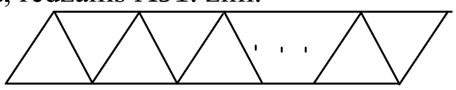
A90. zīm.

B GRUPA

3.4.B1. <u>Atbilde:</u> nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka to izdarīt izdevies. Saskaitot tās summas, kuras ir pāra skaitļi, iegūst pāra skaitli P. Saskaņā ar pieņēmumu saskaitot tās summas, kuras ir nepāra skaitļi, iegūst to pašu pāra skaitli P. Tāpēc, saskaitot visas summas, iegūst P + P = 2P; tā kā P – pāra skaitlis, tad 2P dalās ar 4. Bet 2P ir divkāršota visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa, jo katrs kvadrātā ierakstītais skaitlis ietilpst vienas rindas elementu summā un vienas kolonnas elementu summā. Atliek ievērot, ka 1 + 2 + ... + 25 ir nepāra skaitlis, jo satur nepāra skaitu nepāra saskaitāmo (tie ir 1; 3; 5; ...; 23; 25 – skaitā trīspadsmit). Tāpēc 2(1 + ... + 25) nedalās ar 4. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.4.B2. Jā, var. Kā to izdarīt, redzams A91. zīm.



A91. zīm.

Komentārs. Uzdevuma nosacījumos ieviesusies bija kļūda. Vārdu "salikt izliektu daudzstūri" vietā vajadzēja būt "salikt izliektu sešstūri". Pierādiet patstāvīgi, ka šādā formulējumā a) gadījumā atbilde ir "nē", bet b) gadījumā atbilde ir "jā".

3.4.B3. Atbilde: šis cipars ir 6.

Atrisinājums. Izmantosim sekojošus apzīmējumus:

a) ar n! sapratīsim visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$; 1! = 1 utt.

b) to, ka naturālu skaitļu a un b pēdējie nenulles cipari ir vienādi, pierakstīsim kā a ~ b. Piemēram, 32 ~ 52; 610 ~ 11 utt. Skaidrs: ja naturāls skaitlis M beidzas ar nenulles ciparu m, tad M ~ m.

Risinājuma pamatā būs sekojoša teorēma.

Teorēma. Ja n – naturāls skaitlis, tad $(5n)!\sim 2^n\cdot n!$ un n! pēdējais nenulles cipars nav 5.

Pieņemsim uz brīdi, ka teorēma jau pierādīta.

Tad $2000!=(5\cdot 400)!\sim 2^{400}\cdot 400!=2^{400}\cdot(5\cdot 80)!\sim 2^{400}\cdot 2^{80}\cdot 80!=2^{480}(5\cdot 16)!\sim 2^{480}\cdot 2^{16}\cdot 16!=$

$=2^{496}\cdot 16\cdot 15!=2^{500}(5\cdot 3)!\sim 2^{500}\cdot 2^{3}\cdot 3!=2^{500}\cdot 8\cdot 6=2^{500}\cdot 48=\left(2^4\right)^{125}\cdot 48=16^{125}\cdot 48\sim 6\cdot 48\sim 8$.

Tāpēc $2002!=2000!\cdot 2001\cdot 2002\sim 8\cdot 1\cdot 2\sim 6$.

Atliek pierādīt teorēmu.

Sadalīsim (5n)! reizinātājus grupās pa 5:

$$(5n)!=(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\cdot(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)\cdot(11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot((5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)\cdot(5n)).$$

Ievērosim, ka katrā grupā ir vismaz divi pāra reizinātāji. Katru grupu $(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)\cdot 5k$ pārveidojam formā $\frac{(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)}{2}\cdot 10k$, kur abi reizinātāji ir naturāli skaitļi. Tāpēc

$$(5n)!=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2}\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)}{2}\cdot 10^n\cdot n!.$$

Pierādīsim, ka katra reizinātāja $R_k=\frac{(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)}{2}$ pēdējais cipars ir 2.

Ja k dalās ar 4 (t. i., $k=4t,\ t\in N$), tad $R_k=\frac{(20t-4)(20t-3)(20t-2)(20t-1)}{2}=$

$=(10t-2)(20t-3)(20t-2)(20t-1)=(\ldots 8)\cdot(\ldots 7)\cdot\ \cdot(\ldots 8)\cdot(\ldots 9)=\ldots 2$, k.b.j.

Gadījumus, kad k dod atlikumus 1; 2; 3, dalot ar 4 (resp. k = 4t + 1; k = 4t + 2; k = 4t + 3, $t\in N$), apskata līdzīgi.

Tātad $\underbrace{(5n)! = (\ldots 2)\cdot(\ldots 2)\cdot\ldots\cdot(\ldots 2)}_{\text{n reizes}}\cdot 10^n \cdot n!$. Skaidrs, ka 10n neietekmē reizinājuma pēdējo nenulles ciparu. Tāpēc

$$(*)\ \underbrace{(5n)! \sim (\ldots 2)\cdot(\ldots 2)\cdot\ldots\cdot(\ldots 2)}_{\text{n reizes}}\cdot n!$$

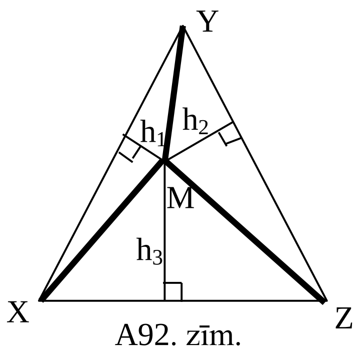
Skaitļi, kas dalās ar 2, naturālo skaitļu virknē parādās ātrāk un sastopami biežāk nekā skaitļi, kas dalās ar 5; skaitļi, kas dalās ar $2\cdot 2 = 4$, parādās ātrāk un sastopami biežāk nekā skaitļi, kas dalās ar $5\cdot 5 = 25$, utt. Tāpēc vai nu n! = 1 (ja n = 1), vai arī n! dalās ar vairāk divniekiem nekā pieciniekiem. Tāpēc n! pēdējais nenulles cipars nav 5: visi piecinieki, kombinējoties ar divniekiem, rada nulles skaitļa beigās. No šejienes un no vienādības (*) seko teorēmas pareizība.

3.4.B4. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka kastīti aizpildīt izdevies. Ievērojam, ka kastītes tilpums ir $7\cdot 8\cdot 9 = 504\,\text{cm}^3$ un klucīšu kopējais tilpums ir $126\cdot 4 = 504$ cm^3. Tātad klucīši neizvirzās ārā no kastītes. Kastītes sienas un dibens pārklāti ar klucīšu skaldnēm. Ievērojam, ka klucīšu skaldņu laukumi ir 2 cm^2 un 4 cm^2. Bet ar šādiem laukumiem, kas izsakās ar pāra skaitļiem, nevar noklāt kastītes sienu (vai dibenu) ar laukumu $7\,\text{cm}\cdot 9\,\text{cm} = 63\,\text{cm}^2$. Iegūta pretruna.

3.4.B5. Dosim divus atrisinājumus.

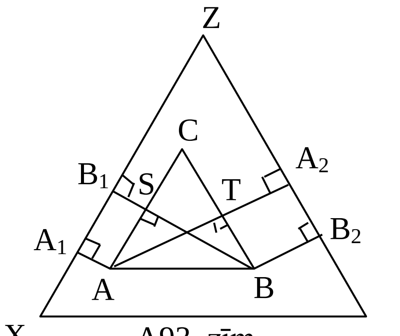
1. Apskatām vienādmalu trijstūri XYZ un punktu M tā iekšpusē. Savienojam M ar trijstūra virsotnēm, bet M attālumus līdz trijstūra malām apzīmējam ar h_1, h_2 un h_3. Trijstūra XYZ malas garumu apzīmējam ar a, bet augstumu – ar h (atceramies, ka vienādmalu trijstūrī visi augstumi ir vienādi).



A92. zīm.

Ievērojam, ka trijstūra XYZ laukums vienāds ar trijstūru XMY, YMZ un ZMX laukumu summu. Lietojot trijstūra laukuma formulu, iegūstam $\frac{a\cdot h_1}{2}+\frac{a\cdot h_2}{2}+\frac{a\cdot h_3}{2}=\frac{a\cdot h}{2}$, no kurienes seko $h_1+h_2+h_3=h$. Tātad vienādmalu trijstūra patvaļīga iekšēja punkta attālumu summa līdz trijstūra malām ir šī trijstūra augstums.

2. Pieņemsim vispirms, ka A un B atrodas uz nogriežņa, kas paralēls vienai no vienādmalu trijstūra XYZ malām; varam pieņemt, ka tā ir mala XY (skat. A93. zīm.).



A93. zīm.

Tā kā $AB \parallel XY$, tad A un B attālumi līdz XY ir savā starpā vienādi. Tāpēc mums jāpierāda, ka

$$AA_1 + AA_2 = BB_1 + BB_2 \quad (1)$$

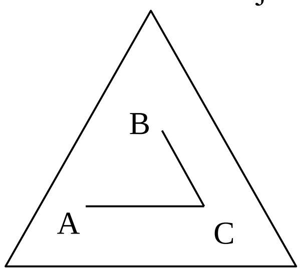
Konstruējam vienādmalu trijstūri ABC, kā parādīts A93. zīmējumā. Tad $AC \parallel XZ$ un $BC \parallel YZ$ (pierādiet to patstāvīgi). Tāpēc $BB_1 \perp AC$, $AA_2 \perp BC$, $BB_2 = TA_2$ un $AA_1 = SB_1$. Vienādmalu trijstūrī augstumi savā starpā vienādi, tāpēc AT = BS.

Izmantojot minētās vienādības, iegūstam

$$AA_1 + AA_2 = AA_1 + AT + TA_2 = SB_1 + BS + BB_2 = (BS + SB_1) + BB_2 = BB_1 + BB_2,$$

kas arī bija jāpierāda.

Tagad tikai atliek aplūkot gadījumu, kad AB nav paralēls nevienai dotā vienādmalu trijstūra malai. Tad atrodam tādu trijstūra iekšēju punktu C, ka AC paralēls vienai trijstūra malai, bet BC – otrai (skat. A94. zīm.) Saskaņā ar iepriekš pierādīto A attālumu summa līdz trijstūra malām vienāda ar C attālumu summu līdz trijstūra malām, bet C attālumu summa līdz trijstūra malām vienāda ar B attālumu summu līdz trijstūra malām. Tātad savā starpā vienādas arī A un B attālumu summas līdz trijstūra malām, ko vajadzēja pierādīt.



A94. zīm.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

3.4.B6. Pierādīsim, ka A grupas 6. uzdevuma risinājumā uzrādītā iespēja ir vienīgā.

Apzīmēsim sākotnēji neaizpildītajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus, kā parādīts A95. zīm.

3	b	9
a	2	c
d	e	f

A95. zīm.

3	b	9
a	2	c
d	10	3d

A96. zīm.

No vienādības 3 + b + 9 = b + 2 + e seko, ka e = 10. No vienādības $3 \cdot 2 \cdot f = 9 \cdot 2 \cdot d$ seko, ka f = 3d. Iegūstam A96. zīm. attēloto ainu.

Ja d ir 1; 2 vai 3, tad skaitļi tabulā atkārtojas. Ja d = 4, tad apakšējās rindas skaitļu summa ir 26. Tālāk viennozīmīgi iegūstam A grupas 6. uzdevuma risinājumā iegūto aizpildījumu. Ja d = 5, tad apakšējas rindas skaitļu summa ir 30.

Tāpēc a = 30 – 3 – 5 = 22 > 20 – pretruna. Ja $d \geq 6$, tad apakšējās rindas skaitļu summa ir vismaz 34; tad $b \geq 34 - 3 - 9 = 22 > 20$ – pretruna.

Tātad citu iespēju bez A grupas 6. uzdevuma risinājumā uzrādītās nav.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.5.A1. Sauksim vecīti, kas griezās atpakaļ, par A, bet vecīti, kas turpināja ceļu, par T. Attālumu starp pieturām apzīmēsim ar 3s. Kamēr A sasniedza iepriekšējo pieturu, viņš nogāja attālumu s. Arī T šai laikā nogāja attālumu s. Tātad T līdz nākošajai pieturai vēl palika ko iet attālumu 2s – s = s. šo attālumu T veica tādā pašā laikā, kādā A, braucot ar tramvaju, veica attālumu 3s. Tātad tramvaja ātrums 3 reizes pārsniedz Ziemassvētku vecīša ātrumu.

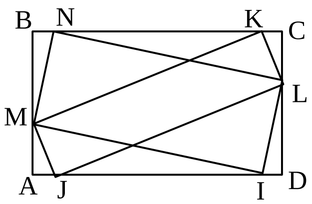
3.5.A2. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar n, bet tā ciparu summu ar s. Tad $n = 2002 \cdot s$ (*) Skaidrs, ka s – naturāls skaitlis. Jo mazāks vienādībā (*) ir s, jo mazāks ir n. Liekot s = 1; 2; 3; 4; 5, iegūstam attiecīgi $n = 2002$; 4004; 6006; 8008; 10010. Redzam, ka šajos gadījumos n ciparu summa nav s. Liekot s = 6, $n = 6 \cdot 2002 = 12012$. Šeit n ciparu summa ir s. Tāpēc meklējamais skaitlis ir 12012.

3.5.A3. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: ir augstākais 4 dažādu šķirņu āboli, un nevienas šķirnes ābolu nav vairāk kā 4. Tad ābolu kopējais skaits nepārsniedz $4 \cdot 4 = 16$; tā ir pretruna. Tātad mūsu pieņēmums bijis nepareizs.

3.5.A4. Izvēlēsimies vienu rūķīti A. Ja tas runā patiesību, tad viņa kaimiņš pa labi X saskaņā ar A teikto ir melis; tātad X kaimiņš pa labi Y runā patiesību (jo melis X apgalvo, ka Y esot melis), utt. Iznāk, ka ap galdu pamīšus atrodas meļi un patiesību runājošie rūķīši. Skaidrs, ka šāds rūķīšu izvietojums apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad šajā gadījumā katra veida rūķīšu ir 6.

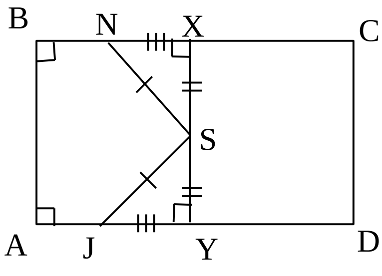
Ja A melo, iegūstam tādu pašu atbildi.

3.5.A5. Ievērosim, ka MN = LI un $\angle BMN = \angle DLI$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām un pretēji vērstām malām. Tāpēc $\Delta MBN = \Delta LDI$ (hl); tātad BM = DL.



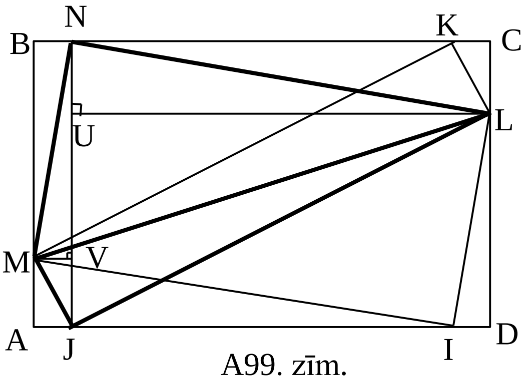
A97. zīm.

Novilksim ML un atzīmēsim tā viduspunktu S. Pieņemsim uz brīdi, ka jau pierādīts: S ir taisnstūra ABCD centrs (diagonāļu krustpunkts). Skaidrs, ka S ir arī abu ievilkto taisnstūru diagonāļu krustpunkts. Tāpēc SN = SM = SJ. Tāpēc (skat. A98. zīm.) $\Delta SXN = \Delta SYJ$ (hk), tātad XN = YJ. No tā seko, ka NJ || XY (jo taisnes NJ divi punkti ir vienādos attālumos no XY un vienā pusē no XY), tātad arī NJ || AB un NJ || CD.



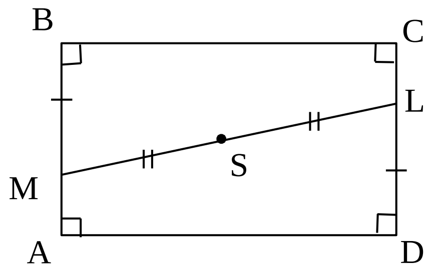
A98. zīm.

Novilksim $LU \perp NJ$ un $MV \perp NJ$ (skat. A99. zīm.).



A99. zīm.

Taisnstūris ABCD sadalīts 4 taisnstūros MBNV, UNCL, JULD un AMVJ. Četrstūris MNLJ satur pusi no katra no šiem taisnstūriem. Tāpēc MNLJ laukums ir puse no ABCD laukuma. No otras puses, MNLJ satur pusi no taisnstūra MNLI (šī puse ir ΔMNL) un pusi no taisnstūra MKLJ (šī puse ir ΔMLJ). Tāpēc MNLJ laukums ir puse no taisnstūru MNLI un MKLJ laukumu summas. No abiem izceltajiem faktiem seko uzdevuma atrisinājums. Atliek pamatot sākumā minēto apgalvojumu par to, ka S ir ABCD centrs (skat. A100. zīm.).



A100. zīm.

Profesionāls matemātiķis to pamatotu dažos vārdos: "simetrijas dēļ S ir ABCD diagonāļu krustpunkts". Izskaidrosim detalizēti šīs frāzes jēgu. Kā zināms, taisnstūrim ABCD ir simetrijas centrs – diagonāļu krustpunkts. Apzīmēsim to ar O. Attēlojot ABCD simetriski pret punktu O, A un C mainās vietām, B un D – tāpat. Tātad nogrieznis AB attēlojas par CD un otrādi. Tā kā M atrodas uz nogriežņa AB, L atrodas uz nogriežņa CD un BM = DL, tad arī M un L šajā simetrijā attēlojas viens par otru. Tātad nogrieznis ML šajā simetrijā "apgriežas otrādi". Tāpēc ML viduspunkts šajā simetrijā paliek uz vietas. Bet vienīgais punkts, kas paliek uz vietas, izdarot simetriju ar centru O, ir pats O. Tātad S sakrīt ar O, ko arī vajadzēja pierādīt.

3.5.A6. Vispirms vienam ķiveres paraugam metam virsū pēc kārtas 80 kg, 150 kg, 210 kg, 260 kg, 300 kg, 330 kg, 350 kg, 360 kg smagos akmeņus. Ja ķivere iztur visus šos triecienus, vajadzīgais sasniegts: ar astoņām pārbaudēm esam noskaidrojuši, ka ķivere iztur 360kg smaga akmens triecienu.

Pieņemsim, ka ķivere neiztur jau 80 kg smagā akmens triecienu. Tad ķiveres otram eksemplāram pēc kārtas metam virsū 10 kg, 20 kg, ..., 70 kg smagus akmeņus. Pēdējais no šiem akmeņiem, kura triecienu ķivere iztur, ir tas akmens, kuru mēs meklējam. Iztērētas ne vairāk kā 1 + 7 = 8 pārbaudes.

Pieņemsim, ka ķivere izturējusi 80 kg smaga akmens triecienu, bet salūzusi no 150 kg smaga akmens trieciena. Tad mūs interesējošais akmens jāmeklē starp akmeņiem ar masām 90 kg, 100 kg, 110 kg, 120 kg, 130 kg, 140 kg. Skaidrs, ka to var atrast, pārbaudot ķiveres otro eksemplāru augstākais 6 reizes. Kopā tiek iztērētas ne vairāk kā 2 + 6 pārbaudes

Vispārīgā gadījumā spriežam šādi. pieņemsim, ka ķiveres pirmais eksemplārs izturējis n-to triecienu ar akmeni, kura masa ir m, bet nav izturējis (n + 1)-o triecienu ar akmeni, kura masa ir M (n = 1; 2; 3; ...; 7) Masu virkne 80 kg, 150 kg, 210 kg, 260 kg, 300 kg, 330 kg, 350 kg, 360 kg izveidota tā, ka starp masām m kg un M kg atrodas tieši 7-n citas masas. Ar otro ķiveres eksemplāru pēc kārtas pārbaudām, vai tas iztur m + 10 kg; m + 20 kg; ...; m + 10(7 – n) kg smaga akmens triecienu; pēdējais akmens, kura triecienu ķivere iztur, ir meklētais. Kopā tiek patērētas ne vairāk kā n + 1 + (7 – n) = 8 pārbaudes.

B GRUPA

3.5.B1. Atbilde: 254 piparkūkas.

Risinājums. Aplūkosim pretēju procesu: rūķīši, sākot ar pēdējo un beidzot ar pirmo, pēc kārtas pienāk pie galda un vispirms noliek uz tā vienu piparkūku, bet pēc tam uz galda esošo piparkūku daudzumu dubulto.

Pirms 7. rūķīša pienākšanas uz galda ir 0 piparkūkas. Pēc viņa darbībām uz galda ir $(0+1)\cdot 2=2$ piparkūkas.

Pēc 6. rūķīša pienākšanas uz galda ir $(2+1)\cdot 2=6$ piparkūkas. Līdzīgi iegūstam virkni $(6+1)\cdot 2=14$, $(14+1)\cdot 2=30$, $(30+1)\cdot 2=62$, $(62+1)\cdot 2=126$, $(126+1)\cdot 2=254$.

3.5.B2. Atbilde: vienīgais šāds skaitlis a ir 129.

Risinājums. Tā kā trijos trīsciparu skaitļos kopā ir 9 cipari un nenulles ciparu pavisam arī ir 9, tad skaitļos a, 3a un 5a visi cipari ir dažādi.

Apzīmēsim $a=\overline{xyz}$, $3\cdot a=b=\overline{uvt}$, $5\cdot a=c=\overline{mkl}$. Tā kā c - trīsciparu skaitlis, tad x < 2; tāpēc x = 1. Tā kā $l\neq 0$, tad z - nepāra cipars; tāpēc l = 5 un t – nepāra cipars. Tā kā 1 un 5 jau izmantoti, tad **z ir 3, 7 vai 9**. Ja būtu z = 7, tad t = 1 – pretruna, jo ir iznācis x = t. Tātad $\mathbf{z\neq 7}$.

Pieņemsim, ka z = 3. Ja y būtu pāra cipars, tad k = 1 (šis vieninieks rodas no pārnesuma):

$$\begin{array}{r} x\,y\,3 \\ \underline{\times\qquad 5} \\ \ldots 1\,5 \end{array}$$

un tā ir pretruna, jo ir iznācis x = k. Tātad $\mathbf{z\neq 3}$.

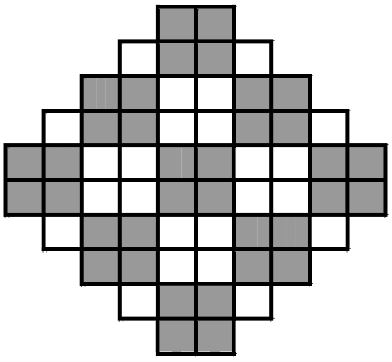
No trim izceltajiem apgalvojumiem seko, ka z = 9.

Esam ieguvuši $a=\overline{xyz}=\overline{1y9}$, kur y nav ne 1, ne 9, ne 5 (jo l = 5). Pārbaudām visas iespējamās y vērtības:

y	**a**	**3·a**	**5·a**	**Secinājums**
2	129	387	645	der
3	139	417		neder
4	149	447		neder
6	169	507		neder
7	179	537		neder
8	189	567	945	neder

3.5.B3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Iekrāsosim rūtiņas, kā parādīts A101. zīm. Pavisam ir 36 melnas un 24 baltas rūtiņas.



A101. zīm.

Ja uzdevumā minēto sagriešanu varētu izdarīt, tad rastos 60:4 = 15 mazās figūras. Viegli pārbaudīt, ka katra no tām saturētu vai nu 1, vai 3 melnās rūtiņas. Tātad katra figūriņa saturētu nepāra skaitu melno rūtiņu; tāpēc 15 šādas figūriņas kopā saturētu nepāra skaitu melno rūtiņu. Bet 36 ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad prasītā sagriešana nav iespējama.

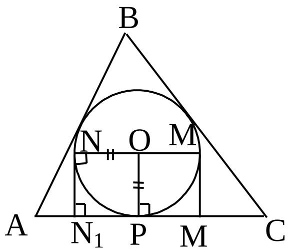
3.5.B4. Sprīdītis nosūta vienu rūķīti A izlūkos pa vienu ceļu, divus citus rūķīšus B un C izlūkos pa otru ceļu, bet pats dodas izlūkos pa trešo ceļu. Visiem pieteikts pēc divām dienām atgriezties ceļu sazarojuma vietā.

Ja Sprīdītis konstatē, ka Laimīgā Zeme sasniedzama pa viņa izvēlēto ceļu, tad viņš rūķīšus nemaz neaptaujā, bet kopā ar visiem dodas uz mērķi. Aplūkosim gadījumu, kad Sprīdītis savā izlūkgājienā Laimīgo Zemi nav sasniedzis. Tad viņš jautā visiem rūķīšiem, vai viņi ir sasnieguši Laimīgo Zemi. Šķirojam divas iespējas.

a) B un C atbildes ir dažādas. Tātad viens no viņiem ir neuzticams. Tātad A noteikti runā patiesību. Balstoties uz A teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu;

b) B un C atbildes ir vienādas. Tad tās abas nevar būt nepareizas; tātad tās ir pareizas. (Ievērojiet: mēs neapgalvojām, ka B un C abi vienmēr runā patiesību!). Balstoties uz B un C teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu.

3.5.B5. Pierādīsim, ka visi šie punkti atrodas vienādos attālumos no trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centra O.



A102. zīm.

Pieņemsim, ka riņķa līnija ar centru O un rādiusu r pieskaras malai AC punktā P (skat. A102. zīm.). Novelkam riņķa līnijas diametru MN, kas paralēls malai AC. Tā galapunktu M un N projekcijas uz AC apzīmējam attiecīgi ar M_1 un N_1. Četrstūrī OPN_1N ir trīs taisni leņķi ($\angle N$, $\angle N_1$ un $\angle P$), tātad visi tā leņķi ir taisni un tas ir taisnstūris; tā kā OP = ON, tad tas ir kvadrāts.

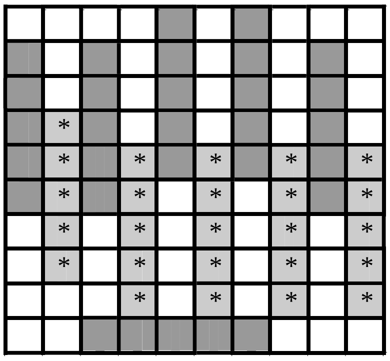
Pierādīsim, ka neviena riņķa līnijas punkta Q projekcija Q_1 neatrodas pa kreisi no punkta N_1.

Tiešām, ja tā būtu, tad $PQ_1 > PN_1 = ON = r = OQ$; tātad $PQ_1 > OQ$ un nogriežņa OQ projekcija būtu garāka par pašu nogriezni – pretruna. Līdzīgi pierāda, ka neviena riņķa līnijas punkta projekcija neatrodas pa labi no punkta M_1. Tātad riņķa līnijas projekcija uz malas AC ir nogrieznis N_1M_1.

Mēs jau redzējām, ka ON_1 ir tāda kvadrāta diagonāle, kura malas garums ir r. Tas pats attiecas uz OM_1 un uz nogriežņiem, kas savieno O ar analogiem punktiem uz AB un BC. Tātad visu šo 6 punktu attālumi no O ir vienādi. Tātad tie pieder riņķa līnijai ar centru O.

3.5.B6. Atbilde: nē, ne noteikti.

Atrisinājums: skat. A103. zīm.



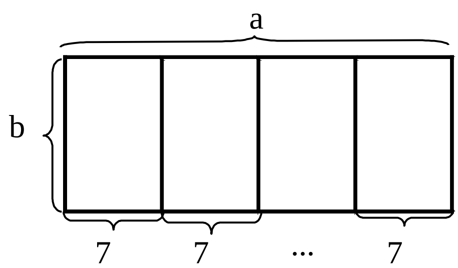
A103. zīm.

Komentārs. Var pierādīt: ja minētajā kvadrātā ir ievietotas 10 taisnstūrveida plāksnītes, kas katra pārklāj 5 rūtiņas, tad kvadrātā noteikti atradīsies vieta vēl vienai šādai plāksnītei.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.6.A1. Katra zīmējumā attēlotā figūra sastāv no 7 rūtiņām. Tātad taisnstūra rūtiņu skaits dalās ar 7. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b (par mērvienību ņemot rūtiņas malu), tad tas satur $a \cdot b$ rūtiņas. Tātad **$a \cdot b$ dalās ar 7**. Tā kā 7 ir pirmskaitlis, tad no izceltā apgalvojuma seko: vai nu a, vai b dalās ar 7. Pieņemsim, ka a dalās ar 7. Tad malu ar garumu a sadala 7 vienības garos nogriežņos un caur dalījuma punktiem izdara griezumus, sadalot taisnstūri strēmelēs ar platumu 7 (skat. A104. zīm.), bet pēc tam katru strēmeli sagriež b taisnstūros ar izmēriem 1×7.

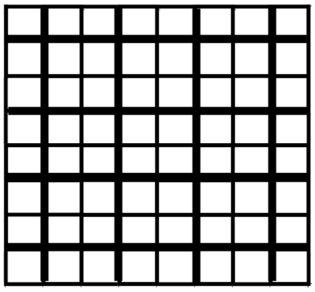


A104. zīm.

Gadījumu, kad b dalās ar 7, apskata līdzīgi.

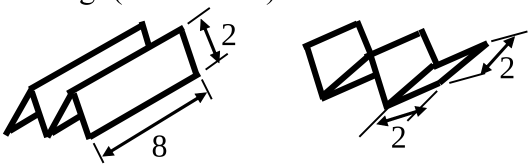
3.6.A2. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka visos grozos kopā saldo ābolu ir vairāk nekā skābo. Ja gan dzelteno saldo ābolu būtu mazāk nekā dzelteno skābo, gan arī sarkano saldo ābolu būtu mazāk nekā sarkano skābo, tad saldo ābolu kopā būtu mazāk nekā skābo. Tā ir pretruna ar iepriekš secināto. Tātad vai nu dzelteno saldo ābolu ir vairāk nekā dzelteno skābo, vai arī sarkano saldo ābolu ir vairāk nekā sarkano skābo.

3.6.A3. Pieņemsim, ka rūtiņas malas garums ir 1. Katra griezienа rezultātā papīra lapa sadalās gabalos pa (varbūt vairākām) paralēlām līnijām. Starp katrām divām šādām dalījuma līnijām ir vismaz viena locījuma līnija. Tātad attālums starp katrām divām paralēlām dalījuma līnijām ir vismaz 2. Tāpēc viena grieziena rezultātā nevar rasties vairāk par 4 dalījuma līnijām (jo 5 paralēlu dalījuma līniju gadījumā attālums starp divām malējām no tām būtu vismaz $4 \cdot 2 = 8$, kas acīmredzami nav iespējams). Ja abu griezienu rezultātā rodas paralēlas dalījuma līnijas, tad to kopskaits nav lielāks par 7 (jo paralēlu rūtiņu līniju kvadrātā vispār ir tikai 7). Tāpēc šādā gadījumā rodas ne vairāk par 8 gabaliem. Ja viena grieziena rezultātā rodas ≤ 4 vienā virzienā ejošas dalījuma līnijas, bet otra grieziena rezultātā – arī ≤ 4 perpendikulārā virzienā ejošas dalījuma līnijas, tad kvadrāts sadalās $\leq 5 \cdot \leq 5$, tātad ≤ 25 gabalos (skat. A105. zīm.)



A105. zīm.

Divdesmit piecus gabalus tiešām var iegūt, vispirms salokot lielo kvadrātu līdz 2×2 rūtiņu kvadrātam un tad sagriežot to ar diviem perpendikulāriem griezieniem. Pārliecinieties par to patstāvīgi (A106. zīm.).



A106. zīm.

3.6.A4. Pieņemsim, ka kāda skaitļa x cipari no kreisās uz labo pusi ir c_1, c_2, ... , c_n; pierakstīsim to kā $x = \overline{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n-1} c_n}$.

Atceroties, ka pēdējais cipars skaitļa pierakstā norāda vienus, priekšpēdējais - desmitus utt., iegūstam, ka

$$x = c_n + 10 \cdot c_{n-1} + 100 \cdot c_{n-2} + \ldots + 1\underbrace{0\ldots0}_{n-2 \text{ nulles}} \cdot c_2 + \ + 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ nulle}} \cdot c_1 .$$

Pierakstīsim to formā $x = (c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \ldots + c_2 + c_1) + 9c_{n-2} + \ldots +$ $+ \underbrace{99\ldots9}_{n-2} c_2 + \underbrace{99\ldots9}_{n-1} c_1$

Tā kā visi skaitļi $9, 99, \ldots, \underbrace{99\ldots9}_{n-1}$ dalās ar 9, tad no šejienes seko: skaitlis x un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 9. Faktu, ka divi skaitļi x un y dod vienādus atlikumus dalot ar 9, pierakstīsim kā $x \equiv_9 y$. Ja patvaļīga naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar S(x), tad iegūto rezultātu varam formulēt lemmas veidā.

1. lemma: $x \equiv_9 S(x)$.

Mums būs svarīgs arī otrs palīgrezultāts.

2. lemma: $S(a+b) \equiv_9 S(a) + S(b)$.

Tiešām, iztēlosimies, kā notiek divu naturālu skaitļu saskaitīšana stabiņā. Ja pēdējā šķirā pārnesums nerodas, tad summā kārtējais cipars vienāds ar abu saskaitāmo pēdējo ciparu summu. Ja turpretī tur rodas pārnesums, tad abu pēdējo ciparu a un b summa ir bijis divciparu skaitlis $\overline{1d}$ jeb 10 + d. Kā ciparu mēs pierakstām d, bet 1 veido pārnesumu uz nākošo šķiru. Tātad lieluma a + b vietā rezultāta ciparu summā iekļaujas 1 + d. Bet 1 + d = (10 + d) – 9 = (a + b) – 9. Tātad šai šķirā rodas starpība 9 starp S(x) + S(y) un

S(x + y). Šāda starpība 9 var rasties arī dažās nākošajās šķirās. Tātad S(x + y) atšķiras no S(x) + S(y) par skaitļa 9 daudzkārtni. No šejienes seko 2. lemmas pareizība.

Tagad pielietosim abas lemmas uzdevumā minētajiem n, a un b:

$$a+b \overset{(1)}{\equiv_9} S(a+b) \overset{(2)}{\equiv_9} S(a)+S(b) \overset{(3)}{=} S(n) \overset{(4)}{\equiv_9} n$$

(1) seko no 1. lemmas, (2) – no 2. lemmas, (3) – no uzdevuma nosacījumiem, (4) – no 1. lemmas.

Tātad a + b dod tādu pašu atlikumu kā n, dalot ar 9. Tā kā a + b dalās ar 9 (t.i., dod atlikumu 0, dalot ar 9), tad arī n dalās ar 9.

3.6.A5. Palūgsim katram politiķim uzrakstīt uz atsevišķām kartītēm to kolēģu vārdus, kurus viņš apņēmies apvainot. Pavisam iegūsim 40 kartītes. Vismaz viena politiķa vārds uzrakstīts ≤ 4 reizes. Tiešām, ja katrs vārds būtu uzrakstīts vismaz piecas reizes, tad kartīšu būtu vismaz 50 – pretruna.

Pieņemsim, ka A vārds uzrakstīts uz augstākais 4 kartītēm. Tad A norīkosim uzstāties kā pēdējo. Saskaņā ar A izvēli viņš dzirdēs ≤ 4 apvainojumus. Savukārt viņa izteiktos apvainojumus nedzirdēs neviens.

Apskatīsim tagad atlikušos 9 politiķus un līdzīgā veidā atradīsim no tiem tādu politiķi B, kuru apņēmušies apvainot ne vairāk kā 4 politiķi no šiem 9. Norīkosim B uzstāties kā priekšpēdējo.

Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.

3.6.A6. Atbilde: a) nē, b) nē.

Atrisinājums. **a)** starp 5 naturālajiem skaitļiem nevar būt 1, jo $\frac{1}{1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>1$.

Tāpēc mazākie skaitļi, kurus var izmantot vieninieka izteikšanā, ir 3; 5; 7; 9. Bet $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{315+189+135+105}{945}=\frac{744}{945}<1$. Ņemot lielākus naturālos skaitļus, to apgriezto lielumu summa būs vēl mazāka, tātad noteikti nebūs 1.

b) Pieņemsim, ka izdevies atrast tādus 2002 nepāra naturālus skaitļus $n_1, n_2, \ldots, n_{2002}$ (pat vienalga – dažādus vai vienādus), ka $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_{2001}}+\frac{1}{n_{2002}}=1$.

Pārveidosim kreiso pusi, novedot to pie kopsaucēja $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{2001} \cdot n_{2002}$. Tad skaitītājā būs 2002 nepāra naturālu skaitļu summa (katrs šis skaitlis būs iegūts, sareizinot 2001 no skaitļiem $n_1, n_2, \ldots, n_{2002}$), tātad – pāra skaitlis. Saucējā būs reizinājums $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{2001} \cdot n_{2002}$ – nepāra skaitlis. Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad daļas vērtība nevar būt 1.

B GRUPA

3.6.B1. Ievērosim, ka $1+2+3+\ldots+62=(1+62)+(2+61)+\ldots+(30+33)+(31+32)=$ $=31\cdot 63=1953<2002$. Tātad vislielākā izteiksmes vērtība, kuru var iegūt uzdevumā minētajā veidā , ja izmanto skaitļus no 1 līdz 62, ir mazāka par 2002. Tāpēc jābūt n > 62.

Savukārt $1+2+3+\ldots+62+63=(1+\ldots+62)+63=1953+63=2016$. Skaitlis 2016 pārsniedz 2002 par $2016-2002=14=2\cdot 7$.

Aizstājot summā 1 + 2 + ... + 62 + 63 saskaitāmo "+7" ar "-7", mēs summas vērtību samazināsim par 14. Tāpēc skaidrs, ka, ja mēs skaitlim 7 priekšā pievienosim "-" zīmi, bet citiem skaitļiem no 1 līdz 63 ieskaitot "+" zīmi, tad iegūtās izteiksmes vērtība būs $(1+\ldots+63)-2\cdot 7=2016-14=2002$.

Tātad mazākā iespējamā n vērtība ir 63.

3.6.B2. Atbilde: m = 1717.

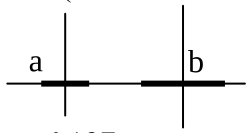
Risinājums. Palielināt četrciparu skaitlī katru ciparu par 1 vai 5 nozīmē pieskaitīt tam tādu četrciparu skaitli x, kam katrs cipars ir 1 vai 5. Tā kā šīs pieskaitīšanas rezultātā m kļuva par 4m, tad x = 3m. Redzam, ka x dalās ar 3; tātad arī x ciparu summa dalās ar 3. Pārbaudīsim visas iespējas:
ja x satur 4 vieniniekus, tad x ciparu summa 4 nedalās ar 3;
ja x satur 3 vieniniekus un 1 piecinieku , tad x ciparu summa 8 nedalās ar 3;
ja x satur 2 vieniniekus un 2 pieciniekus, tad x ciparu summa 12 dalās ar 3;
ja x satur 1 vieninieku un 3 pieciniekus, tad x ciparu summa 16 nedalās ar 3;
ja x satur 4 pieciniekus, tad x ciparu summa 20 nedalās ar 3.
Tātad x noteikti satur 2 vieniniekus un 2 pieciniekus. Tāpēc tālāk jāpēta 6 iespējas:

x	$m = \frac{x}{3}$	4m
1155	385	1540
1515	505	2020
1551	517	2068
5115	1705	6820
5151	1717	6868
5511	1837	7348

Redzam, ka uzdevuma nosacījumus apmierina vienīgi skaitlis 1717.

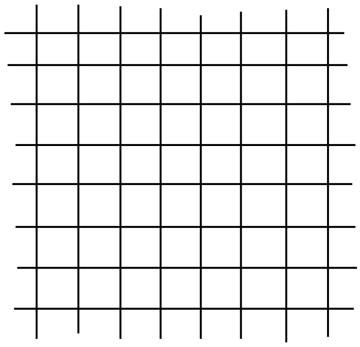
3.6.B3. Mēs varam ignorēt skaitļus, kas savā pierakstā satur gan ciparu grupu 13, gan ciparu grupu 31, jo tos savā summā ietver gan Jānis, gan Andris. Tāpēc varam pieņemt, ka Jānis saskaita skaitļus, kas satur ciparu grupu 13 un nesatur ciparu grupu 31, bet Andris saskaita skaitļus, kas satur ciparu grupu 31 un nesatur ciparu grupu 13.
Izdarīsim ar Jāņa saskaitāmajiem šādu operāciju: katrā Jāņa saskaitāmajā katru ciparu grupu 13 aizstāsim ar ciparu grupu 31.
Skaidrs, ka:
1) mēs iegūsim tikai skaitļus, kas ir Andra saskaitāmie;
2) mēs iegūsim katru Andra saskaitāmo tieši vienu reizi.
Tātad šādas aizstāšanas rezultātā Jāņa summa pārveidosies par Andra summu. Tā kā katrs saskaitāmais aizstāšanas rezultātā palielinās, tad Andra summa ir lielāka par Jāņa summu.

3.6.B4. Atbilde: nē, tā gadīties nevar.
Risinājums. Horizontāls nogrieznis nevar krustot citu horizontālu vai vertikāls - citu vertikālu. Pieņemsim no pretējā, ka uzdevumā minētais ir iespējams. Tad katrs horizontālais nogrieznis krusto 7 vertikālos un katrs vertikālais – 7 horizontālos. Tātad katram horizontālam nogrieznim nav kopīgu punktu ar tieši vienu vertikālu un katram vertikālam nogrieznim nav kopīgu punktu tieši ar vienu horizontālu.
Pieņemsim, ka divi horizontāli nogriežņi a un b atrodas uz vienas taisnes. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tie nesaskaras un nepārklājas. Tad neviens vertikāls nogrieznis, kas krusto a, nevar krustot b un otrādi (skat A107. zīm.)



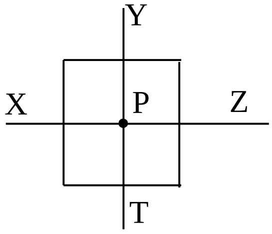
A107. zīm.

Bet tā ir pretruna, jo saskaņā ar augstāk izspriesto ir 6 vertikālie nogriežņi, kam jākrusto gan a, gan b. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un a un b neatrodas uz vienas taisnes. Līdzīgi pierāda, ka nekādi divi vertikāli nogriežņi neatrodas uz vienas taisnes.
Uzzīmēsim 8 vertikālās un 8 horizontālās taisnes, uz kurām atrodas mūsu nogriežņi (skat. A108. zīm.). Tās krustojas 64 punktos.



A108. zīm.

Uz katras taisnes atrodas 8 no šiem punktiem. Saskaņā ar iepriekš pierādīto tieši viens no tiem nav divu nogriežņu krustpunkts. Sauksim tādu punktu par īpašu punktu. Skaidrs, ka eksistē īpašs punkts, kas neatrodas ne uz vienas no 4 malējām taisnēm (jo uz katras no tām ir tikai viens īpašs punkts). Aplūkosim vienu šādu īpašu punktu P (skat A109. zīm.)



A109. zīm.

Gan uz taisnes XZ, gan uz taisnes YT atrodas pa vienam nogrieznim. Vismaz viens no tiem neiet caur punktu P; varam pieņemt, ka tas ir nogrieznis a, kas atrodas uz taisnes XZ pa kreisi no punkta P. Tad tās vertikālās taisnes, kas iet caur P vai pa labi no P (tādu ir vismaz 2), nogriezni a nekrusto; tātad nogriezni a nekrusto arī tie (vismaz 2) vertikālie nogriežņi, kas atrodas uz šīm taisnēm. Tā ir pretruna ar faktu, ka a nekrusto tikai viens vertikālais nogrieznis. Citus nogriežņa a novietojumus analizē līdzīgi.

Līdz ar to mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs, un uzdevums ir atrisināts.

3.6.B5. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim pretējo: rīkojoties aprakstītajā veidā, izdevies nokrāsot visu kvadrātu melnu. Apskatīsim šajā procesā to brīdi, kad pirmo reizi pilnībā ir melnas vai nu 10 rindiņas, vai 10 kolonnas; varam pieņemt, ka šajā brīdī ir melnas 10 rindiņas un x kolonnas, bet pavisam izdarīti n gājieni ($n \le 10 + x$, jo dažas kolonnas un rindiņas varēja būt melnas jau pašā sākumā vai arī kļūt melnas reizē). Sākot no šī brīža, procesu var pabeigt, nokrāsojot melnas atlikušās 19-x kolonnas, jo katrā no tām vairums (vismaz 10) rūtiņu jau ir melnas. Tātad kvadrātu varētu nokrāsot melnu, izdarot $n+(19-x) \le 10+x+19-x=29$ gājienus. Katrā gājienā nokrāso melnas ≤ 9 rūtiņas; tātad pavisam procesa gaitā melnas tiktu nokrāsotas $\le 29 \cdot 9 = 261$ rūtiņas. Bet sākotnēji balto rūtiņu ir $19 \cdot 19 - 99 = 361 - 99 = 262$. Tātad vismaz viena rūtiņa nav melna. Iegūta pretruna. tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nav pareizs, un visu kvadrātu melnu nokrāsot nevar.

3.6.B6. Atbilde: a) nevar, b) var.

Risinājums. a) pierādījums ir tāds pats kā A grupas 6. uzdevuma b) daļā.

b) viegli pārbaudīt, ka $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693}=1$

(atbilde atrasta ar datora palīdzību).

3.7. SEPTĪTĀ NODARBĪBA

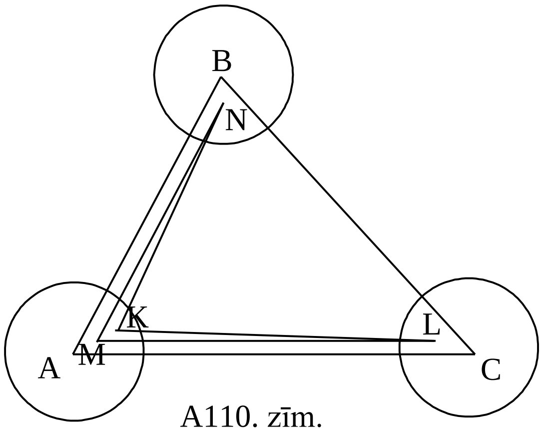
A GRUPA

3.7.A1. Atbilde: a) jā, b) nē.

Risinājums.

a) Apskatīsim vienādmalu trijstūri ABC ar malas garumu 100.

Novilksim riņķa līnijas ar centriem punktos A, B un C un rādiusiem 1. Izveidosim ieliektu četrstūri MNKL, kura virsotnes atrodas gan novilkto riņķa līniju, gan Δ ABC iekšpusē, kā parādīts A110. zīm.



A110. zīm.

Novērtēsim nogriežņa MN garumu.

No lauztas līnijas garuma īpašības seko, ka AM + MN + NB $\geq$ 100. (1)

Tā kā M un N izvēlēti attiecīgo riņķa līniju iekšpusē, tad AM < 1 un NB < 1. Aizstājot (1) AM un NB ar 1, nevienādība vēl jo vairāk būs spēkā; tāpēc MN + 2 $\geq$ 100 un MN $\geq$ 98.

Līdzīgi pierāda, ka $NK \geq 98$, $KL \geq 98$ un $LM \geq 98$.

Tāpēc $\mathrm{Per}(MNKL) \geq 4 \cdot 98 = 392 > 300 = \mathrm{Per}(ABC)$.

b) izmantosim lemmu:

ja nogrieznis atrodas trijstūra iekšpusē, tad tas īsāks par trijstūra garāko malu.

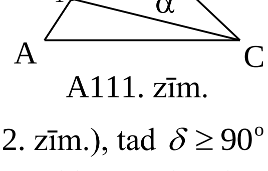
Apzīmēsim trijstūra garākās malas garumu ar a, bet abu pārējo malu garumus - ar b un c; tad $a \geq b$ un $a \geq c$. Tāpēc saskaņā ar lemmu četrstūra perimetrs ir mazāks par 4a. Bet 4a = 2a + 2a < 2a + 2(b + c) = 2(a + b + c).

Tātad četrstūra perimetrs tiešām mazāks par divkāršotu trijstūra perimetru.

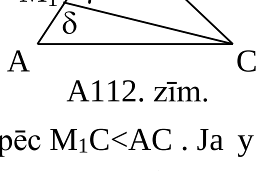
Atliek pierādīt lemmu. Dosim tikai īsu pierādījuma shēmu:

1) pagarinām nogriezni MN līdz krustpunktiem M_1 un N_1 ar ΔABC kontūru; tad MN $\leq$ M_1N_1

2) ja $\alpha \geq \beta$ (skat. A111. zīm.), tad $\alpha \geq 90^\circ$; tāpēc $M_1N_1 < M_1C$ (trijstūrī M_1N_1C pret lielāko leņķi atrodas garākā mala). Ja $\beta \geq \alpha$, spriež līdzīgi.



A111. zīm.



A112. zīm.

3) ja $\delta \geq$ y (skat. A112. zīm.), tad $\delta \geq 90^\circ$; tāpēc $M_1C<AC$. Ja y $\geq \delta$, spriež līdzīgi.

4) No iegūtajām nevienādībām seko, ka MN < AC. Tā kā AC nav garāka par ΔABC garāko malu, lemma pierādīta.

3.7.A2. Atbilde: 2 un 4.

Risinājums. Aplūkosim 3 iespējas:

a) uz Andra kartiņām ir divi nepāra skaitļi.

Tādā gadījumā uz Bruno kartiņas var būt gan pāra skaitlis, gan trešais atlikušais nepāra skaitlis, un Andris savu secinājumu izdarīt nevar;

b) līdzīgi spriež, ja uz Andra kartiņām ir viens pāra un viens nepāra skaitlis;

c) ja uz Andra kartiņām ir divi pāra skaitļi (bet tie var būt tikai 2 un 4), tad uz Bruno kartiņas ir 1, 3 vai 5, tātad nepāra skaitlis. Šai gadījumā Andris savu secinājumu var izdarīt.

Visi gadījumi aplūkoti. Redzam, ka vienīgā iespēja, kad Andris var noskaidrot Bruno skaitļa paritāti, ir c).

3.7.A3. Sešciparu skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo triju ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. (Tiešām, $\overline{abcdef} = \overline{abc}\cdot 1000 + \overline{def} = \overline{abc}\cdot 125\cdot 8 + \overline{def}$). Tāpēc izvēlēsimies lielākos iespējamos a, b, c, t. i., a = b = c = 9, un meklēsim lielāko iespējamo $\overline{def}$ ciparu summu.

Vispirms ievērosim, ka $\overline{def}$ ciparu summa var būt 24, jo 888 dalās ar 8 un 8 + 8 + 8 = 24. Centīsimies noskaidrot, vai var būt, ka d + e + f > 24.

Ciparam f noteikti jābūt pāra ciparam, tātad $f \le 8$. Ja $f \le 6$, tad d + e + f ≤ 9 + 9 + 6 = 24. Tātad cerība, ka d + e + f > 24, pastāv tikai tad, ja f = 8.

Tad $\overline{def} = \overline{de0} + 8 = 10\cdot\overline{de} + 8$ un skaitlim $\overline{de}$ jādalās ar 4, turklāt jābūt d + e > 16, tātad $d + e \ge 17$. Skaidrs, ka e – pāra cipars, tātad $e \le 8$. Tāpēc jābūt $d \ge 9$, t.i., d = 9, bet e = 8.

Bet 98 nedalās ar 4. Tātad lielāka $\overline{def}$ ciparu summa nekā 24 nav iespējama. Tāpēc meklējamā sešciparu skaitļa ciparu summa nevar būt lielāka kā skaitlim 999888, t.i., tā nevar būt lielāka par 51.

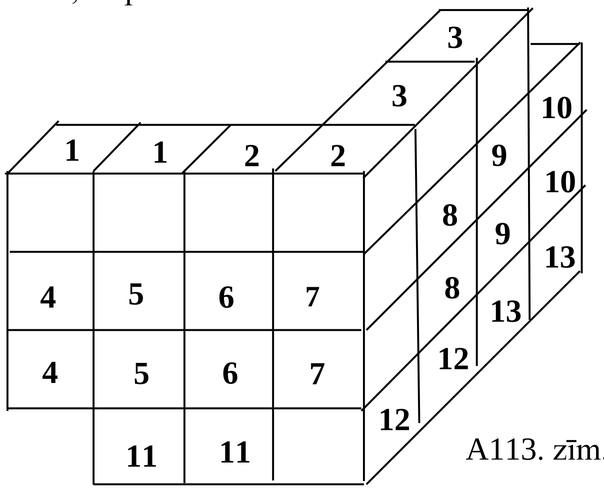
3.7.A4. Ievērojam, ka 2002 = 2·7·11·13.

Pieņemsim, ka a·b dalās ar 2002. Tad a·b dalās ar 2, ar 7, ar 11 un ar 13. Tā kā 2 ir pirmskaitlis, tad vai nu a, vai b dalās ar 2. Ja a dalās ar 2, tad arī b dalās ar 2, jo b = (a + b) – a. Līdzīgi, ja b dalās ar 2, tad arī a dalās ar 2. Tātad gan a, gan b dalās ar 2.

Līdzīgi pierāda, ka gan a, gan b dalās ar 7, ar 11 un ar 13. Tā kā 2, 7, 11 un 13 – dažādi pirmskaitļi, tad no tā, ka a dalās ar 2, 7, 11 un 13, seko, ka a dalās ar reizinājumu $2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ jeb ka a dalās ar 2002. Tātad $a \ge 2002$. Līdzīgi pierāda, ka $b \ge 2002$.

Tātad $a + b \ge 2002 + 2002 = 4004$. Bet tā ir pretruna, jo dots, ka a + b = 2002.

3.7.A5. Jā, var. Kubiņus, kas atrodas divās blakus skaldnēs (tās "satur" arī izgrieztos kubiņus), sadala klucīšos, kā parādīts A113. zīm.



A113. zīm.

Pārējā kuba daļa ir taisnstūra paralēlskaldnis ("kaste") ar izmēriem $3\times 3\times 4$. To viegli sadalīt vertikālos klucīšos.

3.7.A6. <u>Atbilde:</u> jā, var.

<u>Risinājums</u>**.** Ievilksim riņķa līnijā kvadrātu.

Lēnām griezīsim to vienā virzienā ap riņķa līnijas centru tā, ka virsotnes slīd pa riņķa līniju ar ātrumu 1 cm/s, līdz viena virsotne būs pa riņķa līnijas veikusi loku ar garumu 24,5 cm. Tad katra no pārējām 3 virsotnēm arī būs veikusi loku ar garumu 24,5 cm. Turklāt šiem lokiem nav kopīgu punktu. Tiešām, sākotnēji katras divas virsotnes vienu no otras atdala 25 cm (blakus virsotnes) vai pat 50 cm (pretējās virsotnes). Tāpēc virsotņu "nostaigātie" loki nesavienojas savā starpā.

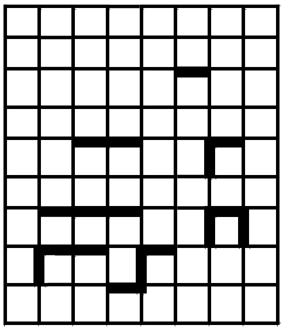
Tā kā melni pavisam nokrāsoti 24 cm, tad laiks, kurā kaut viena virsotne atradās melnajā apgabalā, nepārsniedz 24 sekundes (jo neviens melni nokrāsotais punkts nevarēja tikt šķērsots vairāk kā vienu reizi !). Šajās ≤ 24 sekundēs 4 virsotnes kopā varēja veikt ≤ 96 cm. Bet pavisam apskatāmajā procesā tās veica kopā $24{,}5\text{cm} \cdot 4 = 98$ cm. Tātad jau apskatāmajā procesā eksistēja brīdis, kad visas virsotnes atradās balti nokrāsotos punktos. Vajadzīgais pierādīts.

Piezīme. Attāluma 24,5 cm vietā varēja izmantot jebkuru attālumu s, kur 24 cm <s< 25 cm.

B GRUPA

3.7.B1. Atbilde: 56 dažādas trajektorijas.

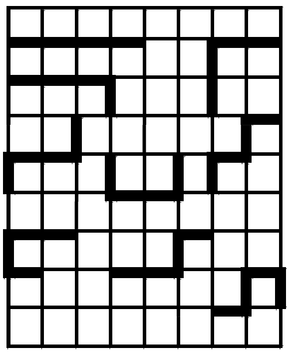
Risinājums. Vispirms uzzīmējam "visas" trajektorijas garumā 1; tāda ir tikai 1. Pēc tam pakāpeniski zīmējam visas trajektorijas garumā 2, 3 utt. Katra nākošā garuma trajektorijas iegūstam, iepriekšējā garuma trajektorijām vienā vai otrā galā pievienojot vienu nogriezni garumā 1. Atkārtojošās trajektorijas pievienošanas procesā zīmējam tikai vienreiz.



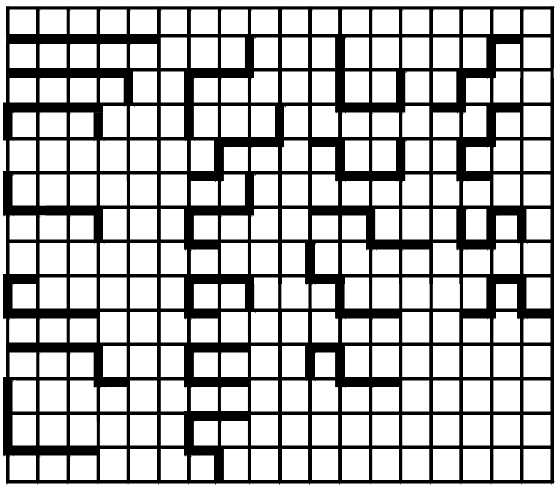
n = 1; 1 trajektorija

n = 2; 2 trajektorijas

n = 3; 4 trajektorijas



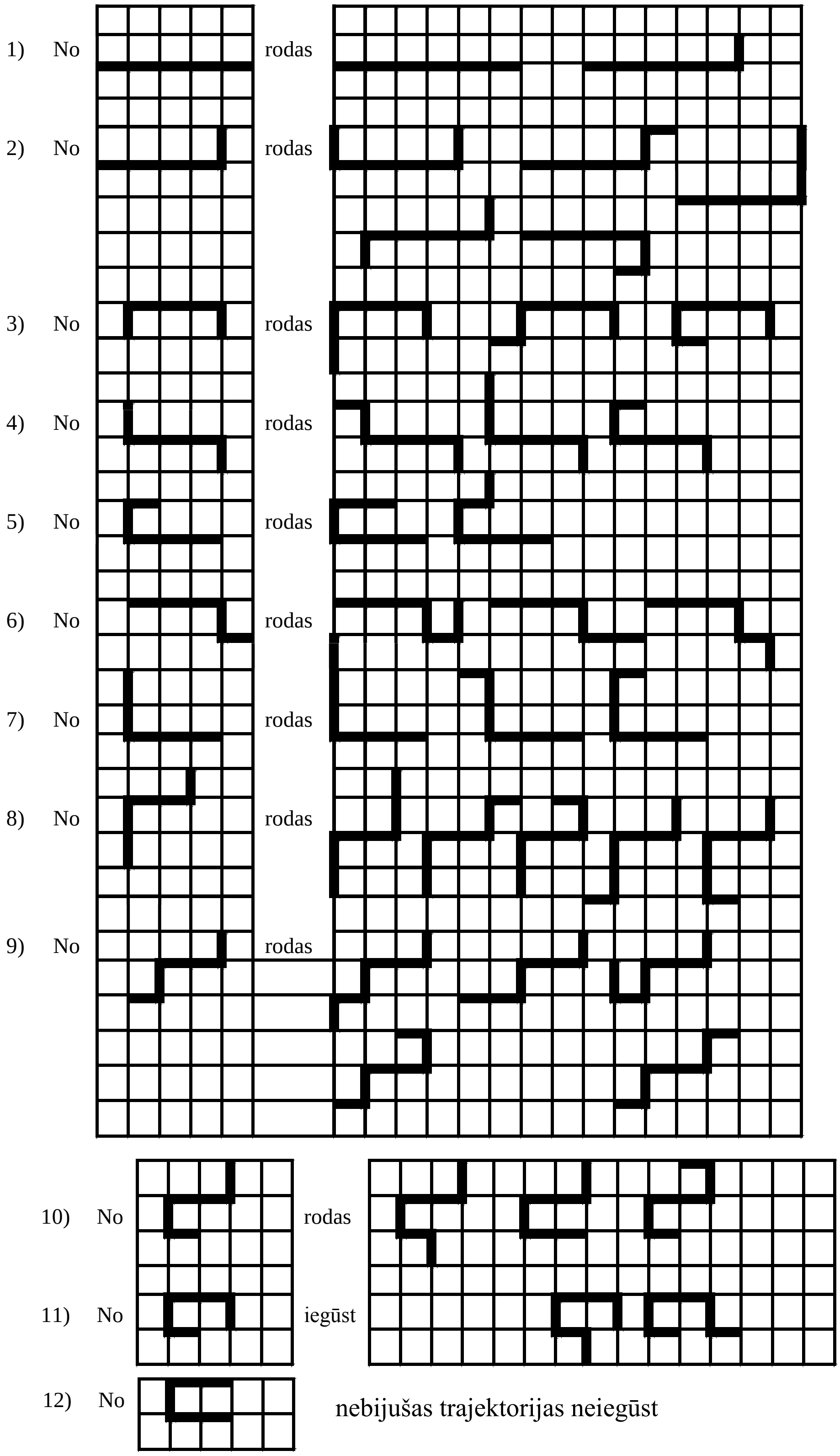
n = 4;
9 trajektorijas

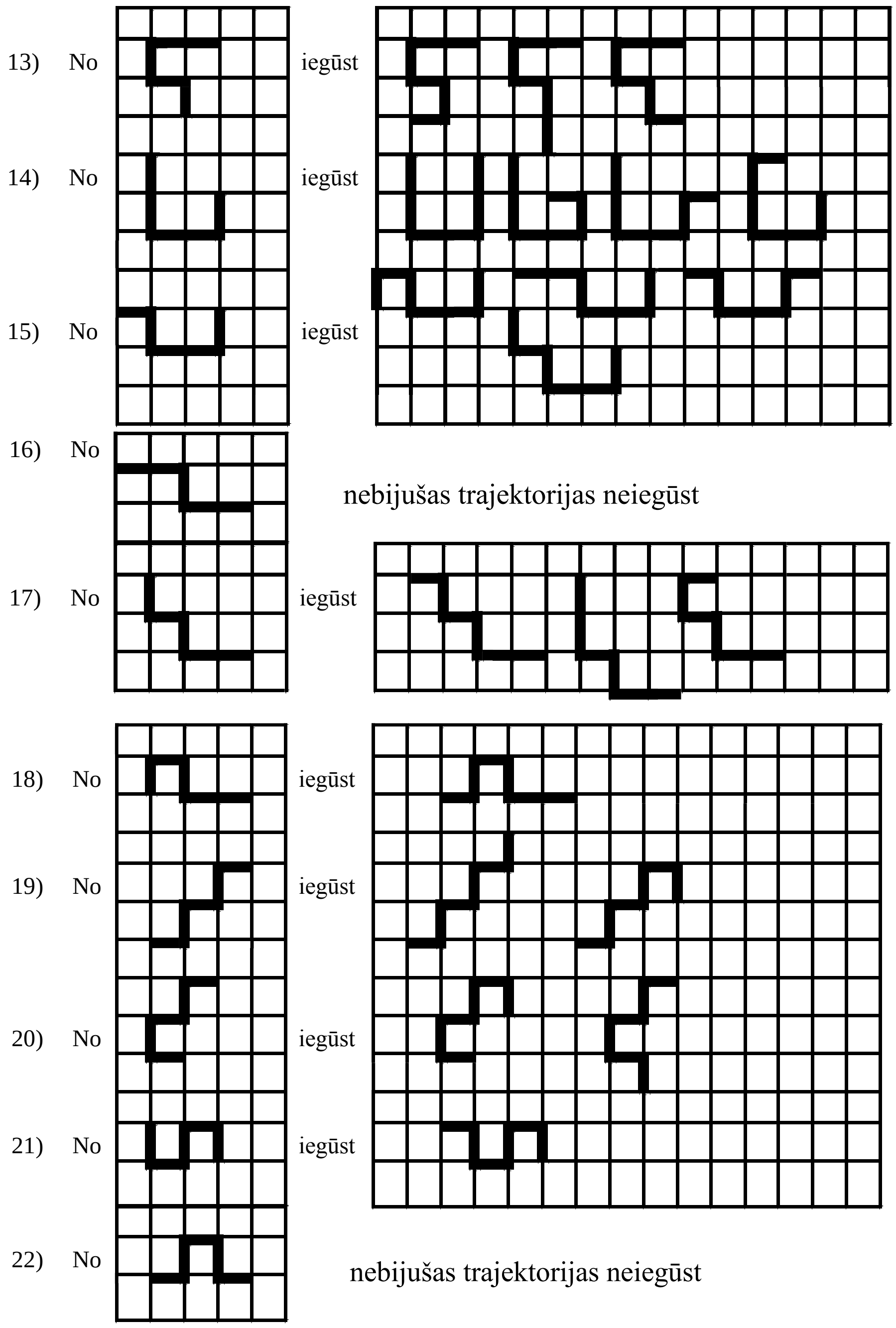


n = 5;
22 trajektorijas

A114. zīm.

Trajektorijas ar garumu 6 tālāk sadalītas, norādot, no kuras trajektorijas ar garumu 5 tās ir rodas. Atkārtojumi nav norādīti:





3.7.B2. Ja $n \le 20$, tad n^2 ciparu skaits nepārsniedz 3 un n^3 ciparu skaits nepārsniedz 4; kopā n^2 un n^3 nesatur vairāk par 7 cipariem – pretruna.

Ja $n \ge 32$, tad n^2 satur vismaz 4 ciparus ($32^2 = 1024$) un n^3 satur vismaz 5 ciparus ($32^3 = 32768$). Tā kā $4 + 5 = 9 > 8$, atkal iegūta pretruna.

Tātad $21 \le n \le 31$. Ja n beigtos ar 0, 1, 5 vai 6, tad n^2 un n^3 pēdējie cipari būtu vienādi – pretruna. Ja n beigtos ar 3 vai 7, tad n^2 beigtos ar 9 – pretruna. Ja n = 29, tad n^3 beigtos ar 9 – pretruna. Atliek iespējas n = 22; n = 24; n = 28.

Tieša pārbaude parāda, ka der tikai n = 24.

3.7.B3. Ja a = 1 (vai b = 1), tad LKD(a, b) = 1; tātad $MKD(a, b) = 8 \cdot 1 = 8$. No šejienes seko, ka b = 8 (vai a = 8). Tad šajos gadījumos b dalās ar a (vai a dalās ar b).

Pieņemsim, ka ne a, ne b nav 1.

Pieņemsim, ka p – pirmskaitlis, kas atšķiras no 2. Pierādīsim, ka a un b dalās ar vienādām pirmskaitļa p pakāpēm.

Tiešām, ja viens no skaitļiem a un b satur pirmskaitli p kā reizinātāju n reizes, bet otrs – m reizes un n > m, tad LKD(a, b) satur p kā reizinātāju m reizes, bet MKD(a, b) satur p kā reizinātāju n reizes. Tad $\frac{MKD(a,b)}{LKD(a,b)}$ satur p kā reizinātāju n-m reizes.

Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $\frac{MKD(a,b)}{LKD(a,b)}=8$, un 8 nesatur kā reizinātāju nevienu citu pirmskaitli kā 2. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un n = m (varbūt tie abi ir 0).

Tātad skaitļi a un b visus citus pirmskaitļus, izņemot 2, satur ar vienādiem kāpinātājiem Tāpēc tie ir vai nu vienādi, vai viens no tiem ir 2, 4, 8, 16,... reizes lielāks par otru. (Viegli saprast, ka viens no tiem ir tieši 8 reizes lielāks par otru, bet mums tas nav svarīgi.) Tātad viens no skaitļiem a un b dalās ar otru.

3.7.B4. Jā, to var izdarīt. Skat. tabulu A115. zīm., kur firmas apzīmētas ar burtiem, pieturas – ar cipariem, bet rindas un kolonas krustojumā esošā zvaigznīte norāda, ka attiecīgās firmas autobusi apstājas attiecīgajā pieturā.

Firma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
A	*	*	*	*	*	*								
B	*	*					*	*			*	*		
C	*	*							*	*			*	*
D			*	*			*	*					*	*
E					*	*	*	*	*	*				
F			*	*					*	*	*	*		
G					*	*					*	*	*	*

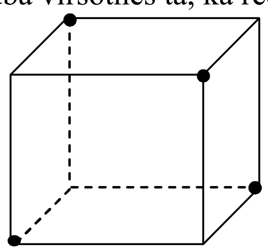
A115. zīm.

Var pierādīt (uzdevumā tas nebija prasīts), ka vairāk par 14 pieturām Sūnu ciemā nevar būt.

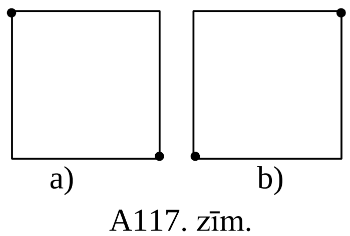
3.7.B5. Atbilde**:** nē, nevar.

Risinājums. Izkrāsosim plaknes rūtiņas šaha galdiņa secībā. Tā kā ar vienu pārvelšanu kubs nonāk no melnas rūtiņas baltā un no baltas – melnā, tad, atgriežoties atpakaļ, ir izdarīts pāra skaits pārvelšanu.

Iezīmēsim četras kuba virsotnes tā, kā redzam A116. zīm.



A116. zīm.



A117. zīm.

Dažādos stāvokļos skats uz kubu no augšas var būt tāds, kā parādīts 117. zīm. a) un b) daļās.

Viegli saprast, ka, izdarot vienu pārvelšanu, skats no augšas mainās no 117. a) zīm. redzamā uz 117. b) zīm. redzamo un otrādi. Tāpēc, atgriežoties atpakaļ sākotnējā rūtiņā (pēc pāra skaita gājieniem), tas būs tāds pats kā sākumā. Bet, ja kubs pagriezies par 90° ap vertikālo asi, skatam no augšas jāmainās. Iegūtā pretruna pierāda mūsu apgalvojumu.

3.7.B6. Ievērosim, ka 13 + 15 + 23 = 51. Ja Laimes māte dalīja dāvanas n reizes, tad $n\cdot(a+b+c)=51$. Tā kā a, b, c – dažādi naturāli skaitļi, tad $a+b+c\ge 1+2+3=6$.

Ievērosim, ka $51 = 3 \cdot 17$ un 3 un 17 ir pirmskaitļi. No iepriekšējā seko, ka pastāv divas iespējas:

1) n = 1, a + b + c = 51. Tā nevar būt, jo $a + b + c \leq 10 + 9 + 8 = 27$;

2) n = 3, a + b + c = 17. Tātad katrs tēva dēls saņēma 3 dāvanas.

A. Tā kā $17 \neq 13$, $17 \neq 15$ un $17 \neq 23$, tad neviens tēva dēls nesaņēma trīs dažādas dāvanas.

B. Pieņemsim, ka kāds tēva dēls saņēma trīs vienādas dāvanas. Tā kā no skaitļiem 13; 15; 23 tikai 15 dalās ar 3, tad tāds var būt tikai viens tēva dēls, un viņš katru reizi saņēma 5 dālderus. Varam uz brīdi pieņemt, ka a = 5; tad b + c = 17 – 5 = 12. Ņemot vērā, ka katru reizi pasniedza tikai vienu a dālderus vērtu dāvanu, un atceroties A punktu, redzam: abi pārējie tēva dēli pavisam saņēmuši 2b + c un 2c + b dālderus, pie tam izteiksmju 2b + c un 2c + b vērtības ir 13 un 23. Bet tā ir pretruna.

Tiešām, iznāk, ka $10 = 23 - 13 = \left|(2b + c) - (2c + b)\right| = |b - c| \leq 9$, jo $1 \leq b, c \leq 10$. Bet $10 \leq 9$ ir aplama nevienādība.

Tātad B punktā sākumā izdarītais pieņēmums ir nepareizs, un neviens tēva dēls nesaņēma trīs vienādas dāvanas .

C. Tāpēc secinām: katrs tēva dēls saņēma divas vienādas un vienu no tām atšķirīgu dāvanu.

Tā kā pavisam tika pasniegtas trīs dāvanas pa a dālderiem katra, trīs - pa b dālderiem katra un trīs – pa c dālderiem katra, tad viegli secināt, ka tēva dēli saņēma vai nu 2a + b, 2b + c un 2c + a, vai arī 2a + c, 2c + b un 2b + a dālderus. Varam pieņemt, ka spēkā pirmais gadījums; otro analizē līdzīgi. Tālāk varam pieņemt, ka c ir lielākais no skaitļiem a, b, c (citi gadījumi reducējas uz šo, mainot burtus vietām).

D. Ievērosim, ka 2a + b, 2b + c, 2c + a vērtībām jābūt 13, 15 un 23, t.i., nepāra skaitļiem. Tāpēc a, b, c visi ir nepāra skaitļi. Tātad $c \leq 9$.

Ja būtu c < 9, tad $c \leq 7$, bet b un a lielākās iespējamās vērtības ir 5 un 3; bet tad nevar būt a + b + c = 17.

Tāpēc c = 9; tad a + b = 17 – 9 = 8. Pastāv divas iespējas:

1) a un b ir 1 un 7. Viegli pārbaudīt, ka tā neder, jo nevar izveidot summu 13;

2) a un b ir 3 un 5. Pie a = 3, b = 5, c = 9 nav iegūstama summa 13; pie a = 5, b = 3, c = 9 iznāk 2a + b = 13, 2b + c = 15, 2c + a = 23. Tātad a, b, c vērtības var būt 3; 5; 9 (patvaļīgā secībā).

4. 29. mācību gads (2002/ 2003)

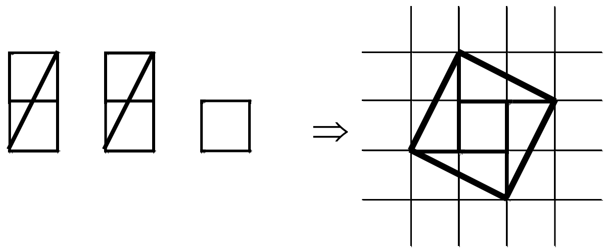
4.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.1.A1. Nobraucot 1 km, riepa uz priekšējā riteņa nolietojas par $\frac{1}{20000}$, bet uz aizmugurējā - par $\frac{1}{30000}$. Tātad pēc 1 km ir "iztērētas" $\frac{1}{20000} + \frac{1}{30000} = \frac{1}{12000}$ riepas. Tā kā pavisam ir divas riepas, tad var nobraukt ne vairāk par $2 : \frac{1}{12000} = 24000$ km.

Viegli pārbaudīt, ka 24000 km var nobraukt, ja, piemēram, riepas nomaina no viena riteņa uz otru ik pēc 100 km.

4.1.A2. Jā, var. Skat. A118. zīm., kur sagriezti četri no pieciem kvadrātiem.



A118. zīm.

Precīzā pierādījumā jāpamato, ka iegūtā figūra ir kvadrāts, t.i., ka tās malas un leņķi vienādi savā starpā. Tas viegli seko no griežot iegūto taisnleņķa trijstūru vienādības.

4.1.A3. Nē, nevar.

			C			
	A				**B**	
			D			

A119. zīm.

Tā kā kustība sākas vidējā rūtiņā un beidzas stūrī, tad rūtiņās A un B zirdziņš gan ieiet, gan no tām iziet. Vienīgās rūtiņas, ar kurām A un B ir saistītas ar zirdziņa gājieniem, ir C un D. Pieņemsim, ka zirdziņš apstaigā taisnstūri, kā prasīts uzdevumā. Rūtiņā A zirdziņš var nonākt vienīgi "ķēdītē" ...CAD... vai ...DAC...; līdzīgi rūtiņā B zirdziņš var nonākt vienīgi "ķēdītē ...CBD... vai ...DBC... . Tātad zirdziņa maršrutā ir sastopamas pēc kārtas apmeklētu rūtiņu virkne CADB, CBDA, DACB vai DBCA. Nevienā no šiem gadījumiem zirdziņš vairs nevar kustēties tālāk, lai beigās nonāktu stūrī.

4.1.A4. Tā kā $99 \cdot 28 = 2772 > 2676$, tad Jānītis nevarēja nopirkt vairāk par 27 rotaļlietām (rotaļlietas mazākā iespējamā cena ir 99 santīmi). Rotaļlietu skaits vienāds ar iztrūkstošo santīmu skaitu līdz pilniem latiem. Tātad šis skaits varētu būt 24, 124, 224, ...; ņemot vērā iepriekš atzīmēto, tas nevar būt citāds kā 24.

Tagad parādīsim, ka atbilde 24 ir iespējama.

Nopērkot 22 rotaļlietas par 99 santīmiem katru un 2 rotaļlietas par 2 latiem 99 santīmiem katru, Jānītis tiešām patērē Ls 27,76. Tātad uzdevuma atbilde ir "24 rotaļlietas".

4.1.A5. Nē, nevar. Tā kā $3 \cdot 7 = 21 > 20$, tad visiem rūķīšiem neiznāk pa 3 kūkām; tātad kāds no rūķīšiem saņems ne vairāk kā 2 kūkas. Bet pat 2 smagāko kūku kopējais svars ir tikai 79 g.

4.1.A6. Nē, tā nevar būt. Apskatīsim vispirms īso gadu (februārī 28 dienas). Viegli pārbaudīt, ka vienā un tai pašā nedēļas dienā ir 13. janvāris, 10. februāris (starp tiem ir tieši 4 nedēļas), 10. marts, 14. aprīlis, 12. maijs, 9. jūnijs, 14. jūlijs, 11. augusts, 8. septembris, 13. oktobris, 10. novembris, 15. decembris. No šejienes seko:

13. janvāris	Kurā mēnesī 13. datums ir piektdienā
pirmdiena	jūnijā
otrdiena	februārī
trešdiena	augustā
ceturtdiena	maijā
piektdiena	janvārī
sestdiena	aprīlī
svētdiena	decembrī

(katrai 13. janvāra nedēļas dienai norādīta tikai viena iespēja)

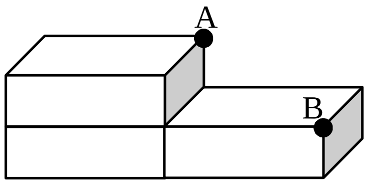
Garos gadus analīzē līdzīgi.

B GRUPA

4.1.B1. Risinot līdzīgi kā A1 uzdevumu, redzam, ka nobrauktais attālums nevar pārsniegt $3:\frac{1}{12000}=36000$ km. Šo attālumu var nobraukt, ja, piemēram, riepas apzīmē ar A, B, C un tās maina cikliski ik pēc 100 km pēc sekojošas shēmas:

Priekšējā	Aizmugurējā
A	B
B	C
C	A
A	B
B	C
C	A
...	...

4.1.B2. Skat. A120. zīm.; meklējamais attālums ir AB (tas ir iedomājamā ceturtā ķieģeļa diagonāles garums).



A120. zīm.

4.1.B3. Nē, nevar. Katram rūķītim, kam ir 4 kaimiņi ar kopēju malu taisnstūrī A, jābūt arī 4 šādiem kaimiņiem arī taisnstūrī B. Bet taisnstūrī A ir 32 rūtiņas ar 4 kaimiņiem, kamēr taisnstūrī B šādu rūtiņu ir tikai 30.

4.1.B4. Apzīmēsim mūsu skaitli ar S. Skaidrs, ka S var saturēt tikai ciparus 2; 3; 5; 7. Pie tam 2 un 5 var būt tikai S pirmais cipars, un S nesatur blakus esošus divus vienādus ciparus (lai to veidotais skaitlis nedalītos ar 11). Secinām:

ja S – trīsciparu skaitlis, tad tā pēdējais cipars ir 3 vai 7, priekšpēdējais attiecīgi 7 vai 3. No 6 iespējamiem skaitļiem 237, 273, 537, 573, 373, 737 der tikai 373, jo 737 dalās ar 11, bet četri pārējie skaitļi ar 3; skaitlis 373 turpretī apmierina visas uzdevuma prasības.

Ja S saturētu vismaz 4 ciparus, tad pēc iepriekšējā katri trīs pēc kārtas ņemti tā cipari veidotu skaitli 373; skaidrs, ka tas nav iespējams.

Tātad meklējamais skaitlis ir 373.

4.1.B5. <u>Atbilde:</u> 9 punkti.

Vispirms pierādīsim, ka "Murmulīši" nevarēja iegūt vairāk par 9 punktiem.

Apzīmēsim viņu iegūtos punktus ar x. Tad 7 citas komandas katra ieguva vismaz x + 1 punktus. Tāpēc visu komandu iegūto punktu skaits ir vismaz x + 7(x + 1). Tā kā katrā spēlē abas komandas kopā iegūst augstākais 3 punktus un turnīrā izspēlēja 28 spēles, tad šis kopskaits nepārsniedz $3\cdot 28=84$. Tāpēc

$$x+7(x+1)\le 84$$
$$8x\le 77$$

Tā kā x – vesels skaitlis, tad $x\le 9$, jo $8\cdot 10=80>77$.

Tagad parādīsim, ka "Murmulīši" tiešām varēja iegūt 9 punktus.

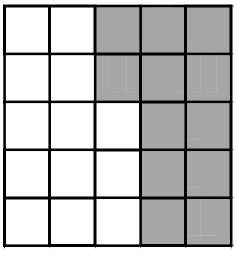
Iedomāsimies vispirms, ka katra komanda izcīnījusi 3 uzvaras, cietusi 3 zaudējumus un vienreiz spēlējusi neizšķirti; tad katrai komandai ir 10 punkti. Šāda turnīra piemēru skat. A121. zīm.

	A	B	C	D	E	F	G	M
A		1	3	3	3	0	0	0
B	1		0	0	0	3	3	3
C	0	3		1	3	3	0	0
D	0	3	1		3	3	0	0
E	0	3	0	0		1	3	3
F	3	0	0	0	1		3	3
G	3	0	3	3	0	0		1
M	3	0	3	3	0	0	1	

A121. zīm.

Izmainīsim vienas spēles rezultātu: M ("Murmulīši") nevis spēlē neizšķirti ar G, bet zaudē pret G. Tad "Murmulīšiem" ir 9 punkti, G – 12 punkti, bet citām komandām – pa 10 punktiem.

4.1.B6. Jā, var. Skat., piem. A122. zīm.



A122. zīm.

4.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.2.A1. **a)** jā, var. Piemēram, var pēc kārtas izrakstīt skaitļus +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1

b) nē, nevar. Jāsaskaita 7 saskaitāmie, katrs no kuriem ir "+1" vai "–1". To summa ir nepāra skaitlis, tātad nevar būt 0.

4.2.A2. Jā, var. Piemēram, rīkosimies šādi. Sadalīsim kvadrātu 10000×10000 mazos kvadrātiņos; tad kvadrātiņu skaits ir 100000000. Katra kvadrātiņa malas garums ir 1cm:10000 = 0,0001cm. Katrā kvadrātiņā ievilksim riņķi; tā rādiuss ir $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0001\,\text{cm}$.

Visu rādiusu summa tātad ir $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0001\,\text{cm} \cdot 100000000 = 5000\,\text{cm} > 2002\,\text{cm}$. Tagad samazināsim visu riņķu rādiusus tiktāl, kamēr to summa kļūst tieši 2002cm.

4.2.A3. Nē, nevar. No trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 3. Tāpēc to reizinājums dalās ar 3. Triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ arī dalās ar 3. Bet 200...02 ar 3 nedalās.

4.2.A4. Ievērosim, ka atverot iekavas izteiksmē (1 + a)(1 + b)(1 + c) (izdariet to patstāvīgi), iegūst summu 1+(a + b + c) + (ab + ac + bc) + abc, kas satur:

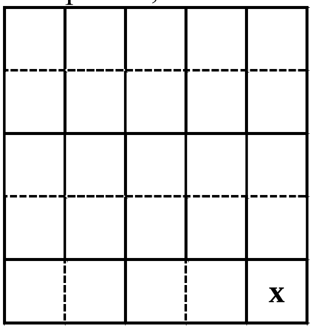
1) vieninieku,
2) visus skaitļus a, b, c,
3) visus iespējamos skaitļu a, b, c reizinājumus pa divi,
4) visu triju skaitļu a, b, c reizinājumu.

Līdzīgi iegūstam (apzīmējot mūsu meklējamo summu ar X), ka

$(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)(1+5)(1+6)(1+7)(1+8) = 1 + X + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$. Tāpēc

$$X = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 - 1 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8(9-1) - 1 =$$
$$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 8 - 1 = 322559.$$

4.2.A5. Katrā no A123. zīm. attēlotajiem 12 “domino kauliņiem” ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 10. Tā kā arī $x \ge 0$, tad visa summa nav mazāka par $12 \cdot 10 = 120$.
Piemērs A124. zīm. parāda, ka šī summa var būt 120.

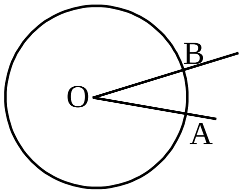


A123. zīm.

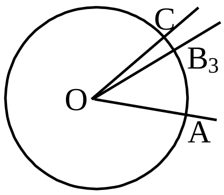
0	**10**	**0**	**10**	**0**
10	**0**	**10**	**0**	**10**
0	**10**	**0**	**10**	**0**
10	**0**	**10**	**0**	**10**
0	**10**	**0**	**10**	**0**

A124. zīm.

4.2.A6. Vispirms novelkam riņķa līniju ar centru leņķa virsotnē (skat. A125. zīm.). Tad loka AB leņķiskais lielums ir 11°.



A125. zīm.



A126. zīm.

Atliekam uz riņķa līnijas punktus B_1, B_2, B_3 tā, ka $AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$. Tā kā vienādām hordām atbilst vienādi loki, tad loku BB_1, B_1B_2, B_2B_3 leņķiskie lielumi ir 11°; tāpēc loka AB_3 leņķiskais lielums ir $4 \cdot 11^\circ = 44^\circ$ un $\angle B_3OA = 44^\circ$. Novelkam staru OC, tā ka $\angle COA = 45^\circ$. Tad $\angle COB_3 = 45^\circ - 44^\circ = 1^\circ$ (skat. A126. zīm.). Tāpēc arī loka CB_3 leņķiskais lielums ir 1°. Atliekam uz loka AB punktus E_1, E_2, ..., E_{10} tā ka $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = ... = E_9E_{10} = CB_3$. Tā kā vienādām hordām atbilst vienādi loki, tad loku AE_1, E_1E_2, ..., E_9E_{10} leņķiskie lielumi ir 1°; tad arī $E_{10}B$ leņķiskais lielums ir 1°. Tāpēc stari OE_1, OE_2, OE_3, ..., OE_{10} sadala leņķi AOB 11 vienādās daļās.
Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

B GRUPA

4.2.B1. Pirmkārt, n jābūt pāra skaitlim, lai apskatāmā summa būtu pāra skaitlis (skat. A grupas 1. uzdevuma risinājumu). Apzīmējam $n = 2k$. Tātad starp blakusesošo skaitļu reizinājumiem jābūt k skaitļiem “+1” un k skaitļiem “-1”. Ja pierādīsim, ka k ir pāra skaitlis, tad uzdevums būs atrisināts.
Sareizināsim visus divu blakus esošo skaitļu reizinājumus un rezultātu apzīmēsim ar R. Reizinājums R satur katru pa apli uzrakstīto skaitli divas reizes, jo šis skaitlis ietilpst divos pāros. Tātad $R > 0$. No otras puses, R ir k pozitīvu un k negatīvu skaitļu reizinājums. Tāpēc, lai $R > 0$, k jābūt pāra skaitlim. Uzdevums atrisināts.

4.2.B2. Katru naturālu skaitli, izņemot 1, var sadalīt pirmreizinātājos (t.i., vienā vai vairākos reizinātājos, katrs no kuriem ir pirmskaitlis), pie tam ja kāds reizinātājs atkārtojas vairākas reizes, to raksta kā pakāpi. Piemēram, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $7 = 7^1$ utml. No skaitļa sadalījuma pirmreizinātājos ir atkarīgs arī skaitļa dalītāju skaits.
Piemēram, ja skaitlis $c = p^k$, tad visi tā dalītāji arī ir skaitļa p pakāpes, ne lielākas par k-to pakāpi, un skaitlis 1, tātad pavisam skaitlim c ir $k + 1$ dalītājs.
Ja skaitlis $b = p^n \cdot q^m$ (p un q ir pirmskaitļi, bet n un m – naturāli skaitļi), tad skaitļa b visus dalītājus var izveidot sekojoši. Skaitli p ņemam 1, 2, ..., n reizes vai nevienu reizi

(tad ņem 1)- tātad kopā n + 1 iespēja, to katrā gadījumā pareizinām ar skaitli q 1, 2, ..., m reizes vai ar skaitli 1 – kopā m + 1 iespēja. Pavisam iegūstam (n + 1)(m + 1) dažādus skaitļa b dalītājus (starp tiem ir arī 1 un b), pie tam citu dalītāju skaitlim b nav. Līdzīgi aprēķina dalītāju skaitu arī gadījumā, ja starp skaitļa pirmreizinātājiem ir vairāk nekā 2 dažādi pirmskaitļi.

Tātad skaitli a var uzrakstīt kā $a = 3^{1+k} \cdot 5^{1+n} \cdot Q$, kur k = 0 vai 1 (jo a nedalās ar 27, bet varbūt dalās ar 9), n var būt 0 vai jebkurš naturāls skaitlis, Q satur visus pārējos skaitļa a pirmreizinātājus; ja tādu nav, tad $Q = 1$. Tad skaitļa a dalītāju skaitu S var aprēķināt $S = (1 + k + 1)(1 + n + 1) \cdot q = (2 + k)(2 + n) \cdot q$ (kur q ir Q dalītāju skaits, tātad $q \geq 1$). Tātad S nav pirmskaitlis, jo dalās ar skaitļiem 2 + k un 2 + n, kas nav 1 vai S. Bet skaitlis 101 ir pirmskaitlis, tātad skaitlim a nevar būt tieši 101 dalītājs.

4.2.B3. Jā, var. Iedomāsimies, ka lādes novietotas pa apli un sanumurētas ar skaitļiem 1, 2, .., 11. Pievienojot pa vienai monētai lāžu trijniekiem (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 1), monētu skaits 1.lādē audzis par 2, bet citās – par 1. Teiksim, ka 1.lādes stāvoklis ir uzlabots.

Apzīmēsim lielāko monētu skaitu, kas ir kādā lādē, ar m. Ja ir kāda lāde, kurā ir mazāk nekā m monētas, uzlabojam tās stāvokli. Atkārtojam šo procesu tik ilgi, kamēr nav lādes, kurā būtu mazāk monētu nekā lādē ar maksimālo monētu daudzumu (ievērojam, ka šis maksimālais monētu daudzums pakāpeniski palielinās). Tad mūsu mērķis ir sasniegts.

4.2.B4. Turnīrā ar 6 dalībniekiem izspēlē 15 spēles (pārliecinieties par to patstāvīgi). Katrā spēlē izcīna 1 uzvaru. Tātad pavisam ir 15 uzvaras. Tā kā ir 6 spēlētāji, tad kādam spēlētājam ir vismaz 3 (t.i., 3, 4 vai 5) uzvaras. Tiešām, ja katram būtu augstākais 2 uzvaras, tad kopā būtu ne vairāk par $6 \cdot 2 = 12$ uzvarām – pretruna.

a) ja kādam spēlētājam ir 5 uzvaras, ņemam to par A, bet otru spēlētāju B izvēlamies patvaļīgi;

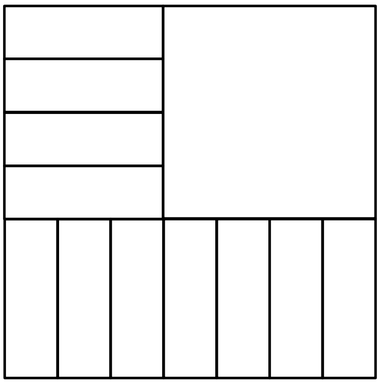
b) ja kādam spēlētājam ir tieši 4 uzvaras, tad ņemam to par A, bet par B ņemam to spēlētāju, kam A ir zaudējis;

c) ja kādam spēlētājam ir tieši 3 uzvaras, tad ņemam to par A. A ir zaudējis diviem spēlētājiem X un Y; par B ņemam to no X un Y, kas uzvarējis savstarpējā spēlē.

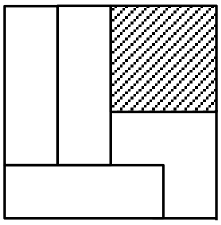
4.2.B5. Ja uzdevumā aprakstīto procesu veic ar skaitļiem no 1 līdz 4, tad kā pēdējais paliek 1 (pārbaudiet patstāvīgi). Veicot šo procesu ar skaitļiem no 1 līdz 8, pēc 4 skaitļu izsvītrošanas pāri paliek 4 skaitļi un mēs sākam ar darbību “atstāj 1”; tātad arī tagad kā pēdējais paliks skaitlis 1. Pakāpeniski iegūstam, ka arī 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 skaitļu gadījumā kā pēdējais paliek tas skaitlis, ar kuru sāk (kuru “atstāj” kā pirmo).

Ievērosim, ka 2002 = 1024 + 978. Pēc 978 skaitļu izsvītrošanas palikuši neizsvītroti 1024 skaitļi. Pēdējais izsvītrotais skaitlis ir $2 \cdot 978 = 1956$. Tātad šai brīdī pirmais skaitlis, kuru mēs atstāsim, būs 1957. Saskaņā ar iepriekšējo tas būs arī pēdējais neizsvītrotais skaitlis.

4.2.B6. Vispirms novietojam 11 figūras 1×3 tā, lai izgrieztā rūtiņa atrastos atlikušajā kvadrātā ar izmēriem 4×4 (skat. A127. zīm.).



A127. zīm.



A128. zīm.

Pēc tam kvadrātā 4×4 ievietojam A128. zīm attēloto konfigurāciju tā, lai izgrieztā rūtiņa paliktu iesvītrotajā 2×2 kvadrātā. Ar atlikušo stūrīti pārklājam 3 neizgrieztās rūtiņas iesvītrotajā kvadrātā.

4.3. TREŠĀ NODARBĪBA

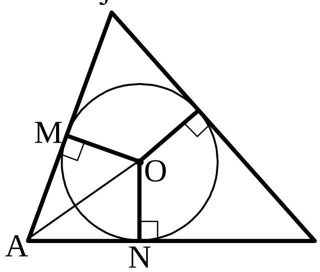
A GRUPA

4.3.A1. **a)** Jā. Piemēram, tādi ir skaitļi no 6 līdz 13 ieskaitot.

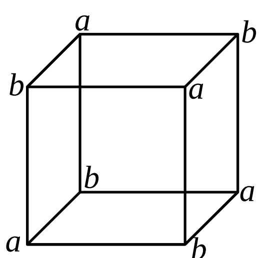
b) Nē. No šiem 9 skaitļiem var atrast vismaz piecus, kam ir viens un tas pats desmitu cipars (tiem var būt augstākais divi dažādi desmitu cipari). Ņemam piecus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus ar vienu un to pašu desmitu ciparu. To ciparu summas ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Bet no pieciem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 5.

4.3.A2. Aplūkosim cilvēku A, kuram ir visvairāk naudas (vai vienu no tādiem cilvēkiem, ja tādu ir vairāki). Pieņemsim, ka viņa naudas daudzums ir a, bet viņa kaimiņam pa labi B un pretī stāvošajam cilvēkam C ir attiecīgi naudas daudzumi b un c. Tad 2a = b + c. Tā kā a nav mazāks par b un c, tad tas iespējams tikai, ja a = b = c. Tātad arī cilvēkiem B un C ir aplūkojamais maksimālais naudas daudzums. Ņemot A vietā viņa kaimiņu pa labi B, līdzīgi iegūstam, ka arī pa apli nākošajam cilvēkam ir tāds pats naudas daudzums, utt. Tātad visiem cilvēkiem naudas daudzumi ir vienādi; tātad visiem, arī Sprīdītim, ir pa vienam latam.

4.3.A3. Daudzstūri vispirms sagriežam trijstūros. Trijstūrī atrodam ievilktās riņķa līnijas centru un novelkam rādiusus uz pieskaršanās punktiem (skat. A129. zīm.). Tad ON = OM kā rādiusi un AM = AN kā pieskares, kas vilktas no viena punkta. Mala AO abiem trijstūriem AOM un AON ir kopīga. Tātad trijstūri AOM un AON ir vienādi. Tātad četrstūrim ANOM ir simetrijas ass AO. Līdzīgi sprież par pārējiem četrstūriem.



A129. zīm.



A130. zīm.

4.3.A4.a) Jā. Piemēram, var ņemt 133 divniekus un 935 vieniniekus.

b), c) Nē. Skaitlis un tā kubs vai nu abi ir pāra skaitļi, vai abi – nepāra. Tāpēc, ja skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tad to kubu summa nevar būt pāra skaitlis.

4.3.A5. Nē. Skudra pārmaiņus nonāk ar a un b burtiem apzīmētās virsotnēs (skat. 130. zīm.). Tātad skudras apciemojumu skaits a virsotnēs var atšķirties no tās apciemojumu skaita b virsotnēs augstākais par 1. Bet septiņus skaitļus "10" un vienu skaitli "12" nevar sadalīt divās grupās, kuru summas būtu vienādas vai atšķirtos viena no otras par 1.

4.3.A6. Dažus iesūtītos uzdevumus skatīt 6. nodarbībā.

B GRUPA

4.3.B1. a) Pasvītrojot visus pāra skaitļus, katriem diviem no tiem ir kopīgs dalītājs 2. Tātad var pasvītrot 1001 skaitli.

b) sadalām visus skaitļus 1001 pārī: (1, 2), (3, 4), ..., (2001, 2002). Ja pasvītrosim vairāk nekā 1001 skaitli, tad divi pasvītrotie skaitļi būs vienā pārī, tātad atšķirsies par 1. Ja tie abi dalītos ar kādu skaitli x, tad arī to starpība (kas ir 1) dalītos ar x. Bet 1 dalās tikai ar "+1" un "-1". Tātad vairāk par 1001 skaitli pasvītrot nevar.

4.3.B2. Ar lielajiem burtiem apzīmēsim monētu masas. Salīdzinām savā starpā 2 monētas; pēc tam salīdzinām otras divas. Pieņemsim, ka svēršanu rezultāti ir $A < B$ un $C < D$. Salīdzinām savā starpā B un D; varam pieņemt, ka $B < D$ (otrs gadījums tiek apskatīts pilnīgi analoģiski).

Tagad mūsu rīcībā ir informācija

$A < B < D$; $C < D$

Tālāk salīdzinām piektās monētas masu E ar B. Ja $B < E$, tad salīdzinām E ar D; ja $E < B$, tad salīdzinām E ar A. Rezultātā monētu masu A, B, D, E secība mums ir pilnīgi zināma. Ievērosim, ka D šajā secībā ir vai nu smagākā, vai otrā smagākā monēta. Ir zināms arī, ka $C < D$. Iztērētas 5 svēršanas.

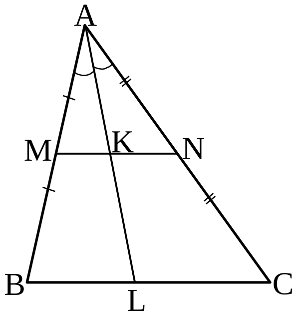
Ja D ir otrā smagākā monēta, tad ar atlikušajām divām svēršanām salīdzinām C ar tām divām monētām, kas vieglākas par D, un iegūstam pilnīgu informāciju.

Ja D ir smagākā monēta, tad apskatām trīs pārējās jau sakārtotajā secībā ietilpstošās monētas; ieviešam to masām apzīmējumus $M < N < K$. Tā kā $C < D$, tad jānoskaidro C "attiecības" ar M, N, K. Sestajā svēršanā salīdzinām C ar N. Ja $C < N$, tad salīdzinām C ar M; ja $C > N$, tad salīdzinām C ar K.

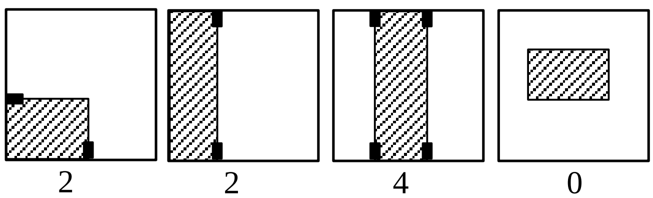
Vajadzīgais izpildīts.

4.3.B3. Novelkam trijstūrī ABC viduslīniju MN (skat. A131. zīm.). Tad $MN \parallel BC$, tātad $MK \parallel BL$. Tātad MK ir nogrieznis, kas caur AB viduspunktu M vilkts paralēli trijstūra ABL pamatam BL; tātad tas ir trijstūra ABC viduslīnija. Tātad $AK = KL$. Esam pierādījuši, ka bisektrises viduspunkts atrodas uz trijstūra viduslīnijas.

Ja visu bisektrišu viduspunkti atrastos uz vienas taisnes, tad šī taisne krustotu visas trijstūra viduslīnijas. Bet viduslīnijas pašas veido trijstūri, un neviena taisne nevar krustot visas trijstūra malas. Tāpēc tādu trijstūru, par kādiem runā uzdevumā, nav.



A131. zīm.


2 2 4 0

A132. zīm.

4.3.B4. Pieņemsim, ka visas rūtiņas tiek nokrāsotas baltas; otru gadījumu apskata līdzīgi.

a) Mainot krāsas 2., 4., 6., 8. rindiņās un 1., 3., 5., 7. kolonnās, mērķis sasniegts. Tātad pietiek ar 8 gājieniem.

b) Parādīsim, ka ar mazāk nekā 8 gājieniem nepietiek. Gar šaha galdiņa malu atrodas 28 rūtiņas, kas nokrāsotas pamīšus – balta, melna, balta, melna, ... Tātad tur ir 28 vietas, kur blakus atrodas atšķirīgu krāsu rūtiņas. Visas šīs 28 atšķirības ir jālikvidē. Apskatot visas iespējas, kā var izvēlēties taisnstūri, kurā maina rūtiņu krāsas, redzam: ar vienu maiņu var likvidēt augstākais 4 no šīm atšķirībām (skat. A132. zīm.). Tāpēc vajag vismaz 28 : 4 = 7 gājienus. Bet starp šiem gājieniem noteikti ir tādi gājieni, kuru rezultātā krāsu maina stūrī esošās melnās rūtiņas. Šādu gājienu rezultātā tiek likvidētas tikai 2 no minētajām atšķirībām (skat. pirmās divas figūras A132. zīm.). Tā kā $6 \cdot 4 + 2 = 26 < 28$, tad nepieciešami vismaz 8 gājieni, lai likvidētu visas 28 atšķirības.

4.3.B5. Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Starp jebkuriem 6 cilvēkiem var atrast vai nu 3 tādus, kas visi pa pāriem draudzējas, vai arī 3 tādus, no kuriem nekādi divi nedraudzējas savā starpā.

Pierādījums. Izvēlamies vienu cilvēku A. No atlikušajiem 5 var atrast trīs tādus, kam ar A ir vienādas attiecības – vai nu tie visi draudzējas ar A, vai arī neviens no tiem nedraudzējas ar A. Tiešām, ja tādu 3 cilvēku nebūtu, tad atlikušo cilvēku skaits nepārsniegtu 2 + 2 = 4 – pretruna.

Pieņemsim, ka var atrast 3 cilvēkus B, C, D, kuri draudzējas ar A (otru gadījumu apskata līdzīgi). Ja kaut divi no cilvēkiem B, C, D draudzējas savā starpā, tad tie abi kopā ar A veido meklējamo trijnieku, kurā visi pa pāriem draudzējas. Ja tādu divu cilvēku nav, tad B, C, D veido trijnieku, kurā nekādi divi cilvēki nedraudzējas.

Lemma pierādīta.

Apskatām tagad vienu no 10 valstu vadītājiem; apzīmēsim to ar A. Pastāv viena no divām iespējām:

a) no atlikušajiem 9 vadītājiem var atrast 4 tādus, ar kuriem A draudzējas. Šķirojam divus apakšgadījumus:

a1) kaut divi no šiem 4 vadītājiem draudzējas savā starpā. Tad viņi kopā ar A veido meklējamo trijnieku;

a2) nekādi divi no šiem 4 vadītājiem nedraudzējas savā starpā. Tad viņi paši veido meklējamo četrinieku.

b) no atlikušajiem 9 cilvēkiem var atrast 6 tādus, ar kuriem A nedraudzējas. Pielietojam šiem 6 cilvēkiem lemmu un iegūstam vajadzīgo (ja starp tiem ir 3 tādi cilvēki, kas savā starpā nedraudzējas, tad apskatām tos kopā ar A).

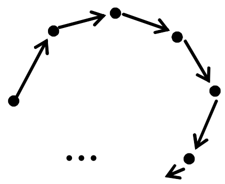
Viena no iespējām a) vai b) noteikti pastāv; pretējā gadījumā atlikušo vadītāju (bez A) kopskaits nepārsniegtu 3 + 5 = 8 – pretruna.

4.3.B6. Dažus iesūtītos uzdevumus skatīt 6. nodarbībā.

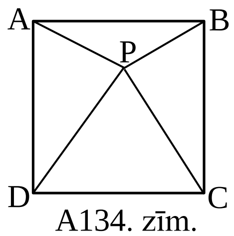
4.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.4.A1. Vajag uz katru valodu vismaz vienu tulkojošu vārdnīcu, jo no katras valodas ir jāvar tulkot uz jebkuru citu un katra vārdnīca ļauj tulkot tikai vienā virzienā. Tātad vārdnīcu skaitam jābūt vismaz 2003. A133. zīmējumā parādīts, ka ar 2003 vārdnīcām pietiek (zīmējumā valodas apzīmētas ar punktiem, vārdnīcas – ar bultiņām).



A133. zīm.



A134. zīm.

4.4.A2. Doto izteiksmi sadalot reizinātājos, iegūst

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Šķirosim divus gadījumus:

1) ja a = b vai b = c, vai c = a, tad izteiksmes vērtība ir 0, kas nav pirmskaitlis.

2) ja visi skaitļi a, b, c ir dažādi naturāli skaitļi, tad to summa a + b + c ir vismaz 3, un vismaz viena no starpībām |a-b|, |a-c|, |b-c| ir lielāka vai vienāda ar 2. Bet divu naturālu skaitļu, lielāku par 1, reizinājums nav pirmskaitlis, vajadzīgais pierādīts.

4.4.A3. Ievērosim, ka katram kvadrāta iekšējam punktam ir spēkā vienādība (skat. A134. zīm.):

$$P(APB) + P(CPD) = P(BPC) + P(DPA) \quad \textbf{(*)}$$

Tiešām, $(AP+PB+AB)+(CP+PD+DC)=(PB+CP+BC)+(PD+AP+AD)$ jeb

$AP+PB+CP+PD+2a=PB+CP+PD+AP+2a$, kur a – kvadrāta malas garums. Vienādībā (*) ievietojot dotos lielumus, iegūstam

99 cm + 101 cm = 100 cm+P(DPA)$\Rightarrow$P(DPA) = 100 cm.

4.4.A4. Pavisam ir 10 skaitļi no 1 līdz 1000, kuru ciparu summa ir 3. Tie ir:
viencipara skaitlis 3
divciparu skaitļi 30, 21, 12
trīsciparu skaitļi 300, 210, 201, 102, 120, 111.

4.4.A5. Veidosim minētās grupas tā, lai izpildītos uzdevuma prasības.
Skaitli 1 liksim I grupā.
Tā kā $1 + 3 = 4 = 2^2$ un $1 + 8 = 9 = 3^2$, tad skaitļi 3 un 8 jāliek II grupā.
$3 + 6 = 9 = 3^2$ un $3 + 13 = 16 = 4^2$, tātad skaitļi 6 un 13 ir I grupā.
$6 + 10 = 16 = 4^2$ un $13 + 12 = 25 = 5^2$, tātad skaitļi 10 un 12 jāliek II grupā.
$12 + 4 = 16 = 4^2$, tāpēc skaitlis 4 atrodas I grupā.
Savukārt $4 + 5 = 9 = 3^2$, tātad skaitlim 5 jābūt II grupā.
$5 + 11 = 16 = 4^2$, tāpēc skaitlis 11 atrodas I grupā.
$11 + 14 = 25 = 5^2$, tātad skaitlim 14 jābūt II grupā.
$14 + 2 = 16 = 4^2$, tāpēc skaitlis 2 ir I grupā.
$2 + 7 = 9 = 3^2$, tātad skaitlis 7 ir II grupā.
Bet $7 + 9 = 16 = 4^2$, tāpēc skaitlim 9 jābūt I grupā.

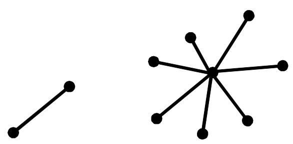
I grupa	1 6 13 4 11 2 9
II grupa	3 8 10 12 5 14 7

Esam parādījuši, ka skaitļus no 1 līdz 14 var sadalīt divās grupās tā, ka vienā grupā nekādu divu skaitļu summa nav naturāla skaitļa kvadrāts (pārbaude!). Pie tam, kā redzams no konstrukcijas gaitas, šāds sadalījums ir viennozīmīgs.
Ja skaitli 15 ievietotu I grupā, tad $15 + 1 = 16 = 4^2$, savukārt, ja 15 ievietotu II grupā, tad $15 + 10 = 25 = 5^2$. Tas nozīmē, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 15 atbilstoši uzdevuma prasībām sadalīt nevar. Tātad lielākā n vērtība ir 14.

4.4.A6. Pieņemsim, ka "Milži" bija uzvarējuši "Gigantus". Tad jāeksistē tādai komandai X, ka X ir uzvarējusi "Milžus" un "Giganti" ir uzvarējuši X. Tiešām, ja tā nebūtu, tad "Milži" būtu uzvarējuši visas tās komandas, ko uzvarēja "Giganti", un vēl "Gigantus", tātad "Milžiem" būtu vairāk uzvaru nekā "Gigantiem", bet tas ir pretrunā ar uzdevumā doto. Tātad tāda komanda X eksistē. Šīs minētās komandas arī ir meklētās trīs komandas.

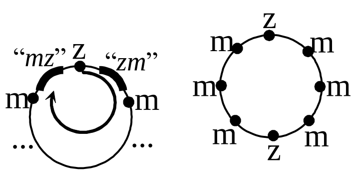
B GRUPA

4.4.B1. Atzīmēsim valodas ar punktiem, bet vārdnīcas – ar nogriežņiem. Ja ir tikai 2 valodas, tad pietiek ar 1 vārdnīcu (skat. A135.a) zīm.).
Pievienojot klāt pa vienai valodai, pievienojas arī vismaz viena vārdnīca (ar kuru var tulkot uz jauno valodu). Tātad starpība |valodu skaits| - |vārdnīcu skaits| nepieaug. Tā kā sākumā tā bija 2 – 1 = 1, tad arī beigās, kad valodu ir n, vārdnīcu ir vismaz (n-1).
A135.b) zīmējumā parādīts, ka ar 2002 vārdnīcām pietiek.



a) b)

A135.zīm.



a) b)

A136. zīm.

4.4.B2. Izvēlēsimies vienu bērnu un “iesim” no tā pulksteņrādītāja kustības virzienā, skaitot “pāreju” skaitu, kad pēc zēna sēž meitene (“zm”) un kad pēc meitenes sēž zēns (“mz”) (skat. A136.a) zīm.). Ievērosim, ka “pāreju” “zm” ir tikpat cik “pāreju” “mz”. Tiešām, ja kādā vietā sēž viens vai vairāki zēni pēc kārtas, tad pēc tam pulksteņrādītāja virzienā sēž meitene, iegūstam vienu “pāreju” “zm”. Taču vēlāk atkal atgriežamies pie šiem zēniem, tātad būs arī viena “pāreja” “mz”. Tieši tāpat ir ar citām vietām, kur sēž viens vai vairāki zēni pēc kārtas. Tātad “zm”=“mz” jeb “zm”+“mz” ir pāra skaitlis. Tā kā šo vietu skaits, kur blakus sēž zēns un meitene, ir vienāds ar to vietu skaitu, kur blakus sēž “zēns – zēns” vai “meitene – meitene” (tātad arī to kopā ir pāra skaitlis), tad visu vietu skaits starp diviem bērniem dalās ar 4. Bet šo vietu ir tikpat, cik bērnu, jo bērni sēž pa apli.

A136.b) zīmējumā parādīts piemērs ar 6 meitenēm un 2 zēniem, tātad zēnu un meiteņu skaitiem nav obligāti jābūt vienādiem.

4.4.B3. Jā, var, piemēram tā, kā parādīts A137. zīm. Zīmējumā parādīts, kā burti ir jāieraksta katrā kuba “slānī”.

a	c	b
b	a	c
c	b	a

c	b	a
a	c	b
b	a	c

b	a	c
c	b	a
a	c	b

A137. zīm.

4.4.B4. $9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{2003}=$

$=10+100+1000+\ldots+1\underbrace{00\ldots0}_{2003}-2003=$

$=\underbrace{11\ldots1}_{1999}1110-2003=\underbrace{11\ldots1}_{1999}9107.$

Kā redzam, summā ir 2000 vieninieki, viens cipars “9”, viens cipars “0” un viens cipars “7”.

4.4.B5. **.** Pārveidosim doto izteiksmi:

$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 -$

$- (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad

$x^2 + 2xy + 2y^2 > x^2 - 2xy + 2y^2$.

Tā kā $p = x^4 + 4y^4$ ir pirmskaitlis, tad arī $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$ jābūt pirmskaitlim. Tas nozīmē, ka $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$. Tātad

$(x - y)^2 + y^2 = 1$. Tātad vai nu

$y = 1$, $x = 1$ (tad p = 5 – der),

vai arī $y = 0$, $x - y = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p = 1$ – nav pirmskaitlis.

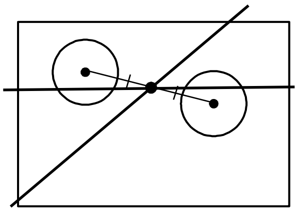
<u>Atbilde</u>: $x^4+4y^4=5$.

4.4.B6. Mūsu risinājums balstās uz diviem faktiem:

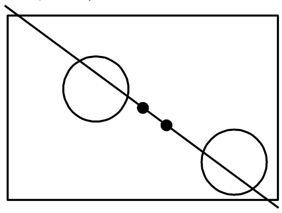
1) Jebkura taisne, kas iet caur taisnstūra diagonāļu krustpunktu, sadala taisnstūra laukumu vienādās daļās. Tiešām, taisne, kas iet caur taisnstūra simetrijas centru (diagonāļu krustpunktu), vai nu ir diagonāle - tādā gadījumā tā taisnstūri sadala divos vienādos (un

vienlielos) trijstūros, vai arī sadala taisnstūri divās vienlielās trapecēs. (Pamatojiet to patstāvīgi!)

2) Jebkura taisne, kas iet caur "caurumu" simetrijas centru (nogriežņa, kas savieno abu riņķu centrus, viduspunktu), sadala "tukšumus" vienādās daļās. Tiešām, ja taisne nekrusto riņķus, tad tā iet starp abiem riņķiem un taisnei abās pusēs paliek vienādi "tukšumi" – sākotnējie apaļie caurumi. Ja taisne krusto vienu apli, tad tā krusto arī otru apli, pie tam no abiem apļiem tā nošķeļ vienādas figūras (jo taisne iet caur simetrijas centru), tātad abu apļu summārais laukums tiek sadalīts vienādās daļās (skat. A138. zīm.).



A138. zīm.



A139. zīm.

Tātad, lai doto plāksnes daļu sadalītu divās daļās ar vienādiem laukumiem, var griezt pa taisni, kas iet caur taisnstūra centru un "caurumu" simetrijas centru (skat. A139. zīm.). Tādu taisni novilkt noteikti var, jo caur diviem punktiem var novilkt vienu un tikai vienu taisni. Ja abi minētie punkti sakrīt, tad der jebkura taisne, kas iet caur šo punktu.

4.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.5.A1. Atbilde: tāds ir tikai viens skaitlis 2178.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – cipari). Tad no dotā seko, ka $\overline{abcd}\cdot 4=\overline{dcba}$ jeb $4(1000a+100b+10c+d)=1000d+100c+10b+a$

$$3999a+390b=60c+996d \qquad \textbf{(1)}$$

Vienādības (1) labajā pusē summa ir pāra skaitlis, tātad arī kreisajā pusē jābūt pāra skaitlim. Tā kā saskaitāmais 390b ir pāra skaitlis, tad arī 3999a jābūt pāra skaitlim, tātad *a* ir pāra skaitlis. Ievērosim arī, ka a < 3 (pretējā gadījumā $\overline{abcd}\cdot 4\geq 3000\cdot 4=12000$ – nav četrciparu skaitlis) un $a\neq 0$ (jo *a* ir skaitļa pirmais cipars). Tātad a = 2.

No vienādības $\overline{2bcd}\cdot 4=\overline{dcb2}$ redzam, ka reizinājuma $d\cdot 4$ pēdējais cipars ir 2, tātad d = 3 vai d = 8. Skaidrs, ka $\overline{2bcd}\cdot 4>8000$, t.i., $d\geq 8$, tātad d = 8.

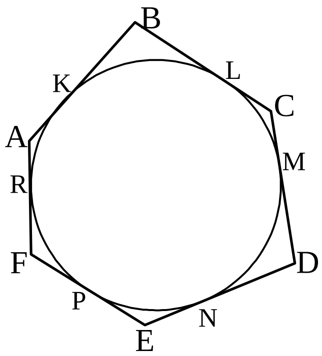
Atrastās vērtības ievietosim vienādībā (1) un vienkāršosim:

$$7998+390b=60c+7968$$
$$30+390b=60c$$
$$1+13b=2c \qquad \textbf{(2)}$$

Ja $b\geq 2$, tad vienādības (2) kreisā puse ≥ 27, bet tad *c* nav cipars. Tātad b = 1 un c = 7.

Pārbaude $2178\cdot 4=8712$ parāda, ka šis skaitlis apmierina uzdevuma prasības. No sprieduma redzams, ka tas tāds ir vienīgais.

4.5.A2. Apzīmēsim sešstūra malu pieskaršanās punktus riņķa līnijai ar K, L, M, N, P, R (skat. A140. zīm.).



A140. zīm.

No viena punkta pret riņķa līniju vilkto pieskaru nogriežņi līdz pieskaršanās punktiem ir vienādi, tātad:

AK = RA
KB = BL
CM = LC
MD = DN
EP = NE
PF = FR

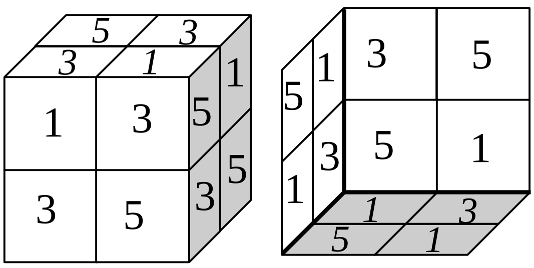
Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

(AK + KB) + (CM + MD) + (EP + PF) = (BL + LC) + (DN + NE) + (FR + RA) jeb

AB + CD + EF = BC + DE + FA, k.b.j.

4.5.A3. Apskatīsim vienu mazo kubiņu. Tā trīs skaldnēs ar kopīgu virsotni ir ierakstīti dažādi skaitļi (jo vienādie skaitļi ir ierakstīti pretējās skaldnēs – tām nav kopīgu virsotņu). Sastādot lielo kubu, katrs mazais kubiņš nonāk vienā tā virsotnē un tam ir redzamas trīs skaldnes ar kopīgo virsotni. Tātad no katra mazā kubiņa ir redzami skaitļi 1, 3, 5, un visu redzamo skaitļu summa ir $(1+3+5)\cdot 8 = 72$.

A141. zīmējumā parādīts, ka var izveidot tādu kubu, kas apmierina uzdevuma nosacījumus (A141.a) zīm. parādīts skats no priekšas, A141. b) zīm. – "neredzamās" skaldnes). Piemērs ir obligāts, jo var gadīties, ka uzdevumā aprakstītais objekts nemaz neeksistē.



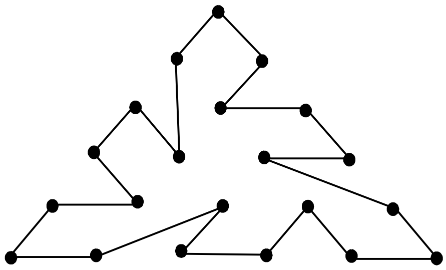
A141.a) zīm. A141.b) zīm.

4.5.A4. Ievērosim, ka skaitļi x un x^{2003} ir ar vienādu paritāti (t.i., ja x ir pāra skaitlis, tad x^{2003} arī ir pāra skaitlis; ja x ir nepāra skaitlis, tad arī x^{2003} ir nepāra skaitlis).

Tātad summas $(a-1)^{2003} + (b-2)^{2003} + ... + (h-8)^{2003}$ paritāte ir tāda pati kā summas $(a-1) + (b-2) + ... + (h-8)$ paritāte.

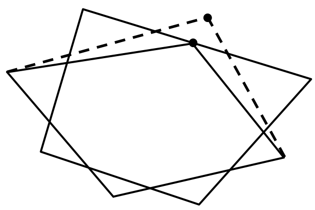
Bet $(a-1) + (b-2) + ... + (h-8) = (a + b + ... + h) - (1 + 2 + ... + 8) = 0$ – pāra skaitlis. Tātad arī dotā summa ir pāra skaitlis.

4.5.A5. Skat., piemēram, A142. zīm.

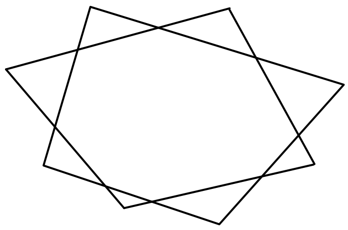


A142. zīm.

4.5.A6. Skaidrs, ka gadījumi, kad viena četrstūra virsotne atrodas uz otra četrstūra malas, nedos maksimālo rezultātu; šo virsotni mēs varētu "pavilkt" tā, ka veidotos vēl viena plaknes daļa (skat. A143. zīm.). Tātad apskatām tikai gadījumus, kad viena četrstūra malas krusto otra četrstūra malas. Tā kā doti izliekti četrstūri, tad otrs četrstūris var krustot pirmā četrstūra katru malu ne vairāk kā 2 punktos. Tātad četrstūra kontūra tiks sadalīta ne vairāk kā $2 \cdot 4 = 8$ daļās, un katra no šīm daļām nosaka atsevišķu plaknes apgabalu. Vēl ir viena plaknes daļa iegūtās figūras iekšpusē un viena daļa tai apkārt, tātad divi četrstūri plakni var sadalīt ne vairāk kā 8 + 2 = 10 daļās. A144. zīmējumā parādīts piemērs, ka tas ir iespējams.



A143. zīm.



A144. zīm.

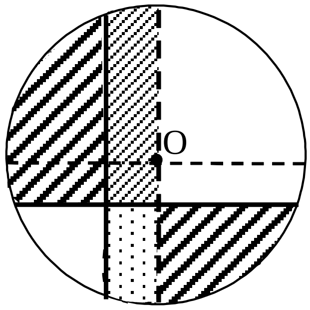
B GRUPA

4.5.B1. Atbilde: nē, nedalīsies.

Risinājums. Atcerēsimies, ka naturāls skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tā kā doto triju skaitļu summa ir 2003 – nedalās ar 3, tad arī to ciparu summa ar 3 nedalās. Bet tas nozīmē, ka arī iegūtais skaitlis nedalās ar 3, tātad nedalās arī ar 21.

4.5.B2. Atbilde: lielāka ir neiesvītroto daļu laukumu summa.

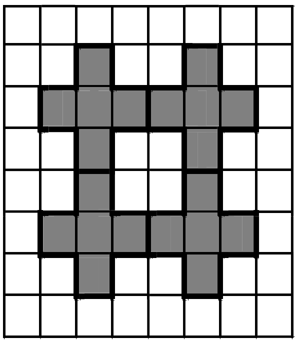
Risinājums. Pabīdīsim vienu hordu tā, lai tā ietu caur riņķa centru (skat. A145. zīm.).



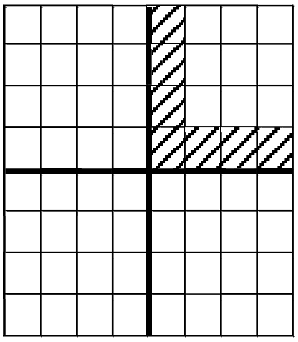
A145. zīm.

Tad simetrijas pēc iesvītroto un neiesvītroto daļu laukumu summas būtu vienādas. Taču pārbīdes rezultātā vienas iesvītrotās daļas laukums palielinājās (zīmējumā iesvītrots sīkākām līnijām) vairāk nekā otras iesvītrotās daļas laukums samazinājās (zīmējumā punktotais apgabals). Tiešām, ja arī otra horda ietu caur riņķa centru, tad šie laukumi būti vienādi, bet šajā gadījumā lielāks laukums ir tai daļai, kas "satur" riņķa centru. Tātad pārbīdes rezultātā iesvītroto daļu laukumu summa ir palielinājusies, bet tas nozīmē, ka pirms pārbīdes tā bija mazāka nekā neiesvītroto daļu laukumu summa.

4.5.B3. A146. zīmējumā parādīts, kā ievietot 4 "krustus", lai nevienu "krustu" vairāk kvadrātā ievietot nevarētu.



A146. zīm.



A147. zīm.

Pierādīsim, ka ar trīs "krustiem nepietiek, lai vairāk nevienu šādu figūru ievietot nevarētu. Sadalīsim doto kvadrātu 4 daļās – kvadrātos 4×4 rūtiņas (skat. A147. zīm.). Tā kā ir tikai trīs "krusti", tad tikai, augstākais, trijās no minētajām daļām var atrasties kāda "krusta" centrālā rūtiņa. Tātad ceturtajā daļā var būt "aizņemtas" tikai dažas no iesvītrotajām rūtiņām. Bet tad paliek brīvs kvadrāts 3×3 rūtiņas, kurā var ievietot vēl vienu "krustu".

4.5.B4. Atbilde: pietiek ar 2 svēršanām.

Skaidrs, ka ar vienu svēršanu nepietiek, jo nekādā gadījumā nevarēs iegūt viennozīmīgu rezultātu.

1. svēršana. Uz viena svaru kausa novietojam monētu ar uzrakstu "6g", uz otra kausa monētas ar uzrakstiem "1g", "2g" un "3g". Tā kā no dotā monētu komplekta tikai vienā viedā var iegūt šādu vienādību 6 = 1 + 2 + 3 (triju monētu kopējais svars vienāds ar vienas citas monētas svaru), tad gadījumā, ja svari būs līdzsvarā, skaidrs, ka monēta ar uzrakstu "6g" patiešām sver 6g, un starp monētām ar uzrakstiem "1g", "2g", "3g" patiešām ir monētas ar svaru 1g, 2g, 3g (bet var būt, ka uzraksti nav pareizi!). Tāpat skaidrs, ka starp malā palikušajām monētām ar uzrakstiem "4g" un "5g" ir monētas ar svaru 4g un 5g, bet arī nav zināms, vai šie uzraksti ir patiesi. Tātad svēršanas jāturpina.

Ja svari nav līdzsvarā, tad, acīmredzot, kādai no monētām svars neatbilst uzrakstam un svēršanas vairs nav jāturpina (ir prasīts tikai noskaidrot, vai visi uzraksti ir patiesi; šajā gadījumā atbilde būs – "nē, nav patiesi").

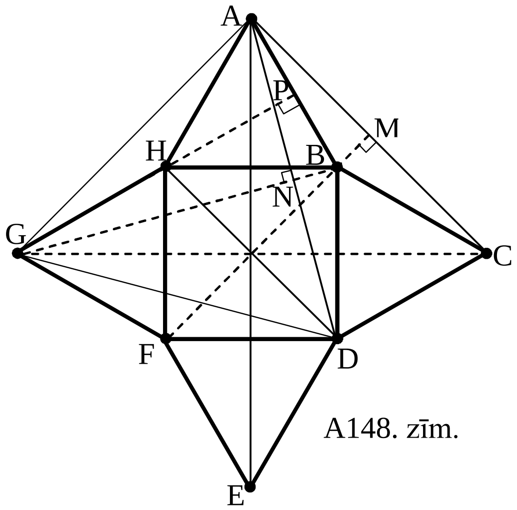
2.svēršana. Tagad uz viena kausa liksim monētas ar uzrakstiem "6g" (šī monēta tiešām sver 6g) un "1g" (šī monēta var svērt 1g, 2g vai 3g); uz otra svaru kausa liksim monētas ar uzrakstu "5g" (tā var svērt 5g vai arī 4g) un "3g" (tā var svērt 3g, 2g vai 1g). Malā paliek monētas ar uzrakstu "4g" un "2g".

Tā kā $6 + 1 < 5 + 3$, tad gadījumā, ja šie uzraksti pareizi, svaru kauss ar "5g" un "3g" monētām nosvērsies uz leju.

Ja kādai no monētām uzraksts būs nepareizs, tad vai nu svari būs līdzsvarā (piemēram, ja "1g" monēta sver 2g vai "5g" monēta sver 4g, vai "3g" monēta sver 2g) vai arī uz leju nosvērsies svaru kauss ar monētām "6g" un "1g" .

Tātad tikai vienā gadījumā smagāks būs svaru kauss ar monētām "5g" un "3g" – tad, kad uzraksti "1g", "5g" un "3g" ir pareizi, pie tam arī malā palikušajām monētām tādā gadījumā uzraksti būs pareizi – "4g" monēta tiešām sver 4g (un nevis 5g) un "2g" monēta sver 2g (un nevis 1g vai 3g).

4.5.B5. A148. zīmējumā uzzīmēts kvadrāts BDFH un uz katras tā malas konstruēts pa regulāram trijstūrim. Pierādīsim, ka visas šīs virsotnes A, B, C, D, E, F, G, H ir meklētie 8 punkti.



A148. zīm.

1) Nogriežņa AB vidusperpendikuls HP satur punktu H (regulāra trijstūra vidusperpendikuls ir arī tā augstums) un punktu G. Punkti G, H, P atrodas uz vienas taisnes, jo $\angle GHP = \angle GHF + \angle FHB + \angle BHP = 60^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.

2) Nogriežņa AC vidusperpendikuls satur punktu B (ΔABC ir vienādsānu, AB = BC pēc konstrukcijas, tātad tā augstums ir arī vidusperpendikuls) un punktu F. Punkti F, B, M atrodas uz vienas taisnes, jo $\angle FBM = \angle FBD + \angle DBC + \angle CBM = 45^\circ + 60^\circ + (150^\circ : 2) = 180^\circ$.

3) Nogriežņa AD vidusperpendikuls satur punktu B (ΔABD ir vienādsānu, tātad tā augstums ir arī vidusperpendikuls) un punktu G (ΔAGD vienādsānu: AG = GD, jo $\Delta AHG = \Delta GFD$ (pierādiet patstāvīgi!), tātad ΔAGD augstums ir arī vidusperpendikuls). Tā kā ΔABD un ΔAGD ir kopīga pamata mala, tad vidusperpendikuli sakrīt.

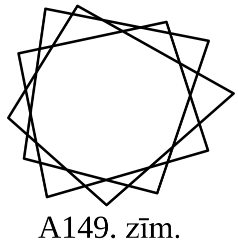
4) Nogriežņa AE vidusperpendikuls satur punktus G un C (pamatojiet patstāvīgi!)

5) Nogriežņa BD vidusperpendikuls satur punktus C (regulārā ΔBDC augstums ir arī vidusperpendikuls) un G (ΔBGD vienādsānu: BG = GD, jo $\Delta GHB = \Delta GFD$ (pierādiet patstāvīgi!), tātad ΔBGD augstums ir arī nogriežņa BD vidusperpendikuls). Tā kā ΔBDC un ΔBGD ir kopīga pamata mala, tad vidusperpendikuli sakrīt.

6) Nogriežņa BF vidusperpendikuls satur punktus H un D, jo kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm, tātad tās viena otrai ir vidusperpendikuls.

Ir apskatīti visi būtiski atšķirīgie divu punktu pāri (pārējie gadījumi ir analoģiski (simetriski) jau apskatītajiem), un katrā gadījumā izpildījās uzdevuma prasības.

4.5.B6. Spriežam līdzīgi kā A grupas 6. uzdevumā. Ja mums jau ir divi četrstūri, tad, "uzliekot" virsū trešo četrstūri, tā katra mala var tikt krustota, augstākais, 4 punktos. Tātad visa kontūra tiek sadalīta $4 \cdot 4 = 16$ daļās, un divu četrstūru sadalītajām plaknes daļām klāt nāk vēl 16 jaunas daļas. Tātad trīs izliekti četrstūri plakni var sadalīt 10 + 16 = 26 daļās. A149. zīmējumā parādīts, kā to realizēt.


A149. zīm.

4.6. SESTĀ NODARBĪBA

4.6.1. Atbilde: 2030.

Sastādīsim sekojošo tabulu, no kuras viegli iegūsim vajadzīgo rezultātu:

ciparu summa	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	cik reizes pavisam sastopama šī summa
1	1.	12	10.	12					24
2	2.	12	11.	12	20.	12			36
3	3.	12	12.	12	21.	12	30.	11	47
4	4.	12	13.	12	22.	12	31.	7	43
5	5.	12	14.	12	23.	12			36
6	6.	12	15.	12	24.	12			36
7	7.	12	16.	12	25.	12			36
8	8.	12	17.	12	26.	12			36
9	9.	12	18.	12	27.	12			36
10			19.	12	28.	12			24
11					29.	11			11

Tātad meklētā summa ir
$3\cdot 47+4\cdot 43+11\cdot 11+(1+10)\cdot 24+(2+5+6+7+8+9)\cdot 36=2030$.

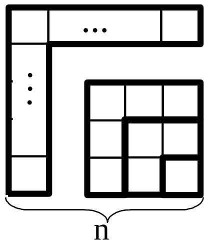
4.6.2. Atbilde: 75 skaitļi.

Tā kā nevienam no skaitļiem 2000, 2001, 2002, 2003 ciparu summa nav 14, tad mums jāapskata četrciparu skaitļi, kuru pirmais cipars ir 1. Tātad meklējamo skaitļu pārējo trīs ciparu summai jābūt 14 – 1 = 13. Izteiksim skaitli 13 kā trīs ciparu summu un uzrakstīsim visas būtiski atšķirīgās iespējas (tās summas, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, nerakstīsim; saskaitāmos sakārtosim augošā kārtībā).

$$13 = 0 + 4 + 9$$
$$13 = 0 + 5 + 8$$
$$13 = 0 + 6 + 7$$
$$13 = 1 + 3 + 9$$
$$13 = 1 + 4 + 8$$
$$13 = 1 + 5 + 7$$
$$13 = 2 + 3 + 8$$
$$13 = 2 + 4 + 7$$
$$13 = 2 + 5 + 6$$
$$13 = 3 + 4 + 6$$
$$13 = 1 + 6 + 6$$
$$13 = 2 + 2 + 9$$
$$13 = 3 + 3 + 7$$
$$13 = 3 + 5 + 5$$
$$13 = 4 + 4 + 5$$

4.6.3. Atbilde: 11 un 18, 101 un 102.

Pierādīsim, ka katra naturāla skaitļa n kvadrātu var izteikt kā pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu: $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$. Tiešām, ievērosim, ka n^2 ir rūtiņu skaits kvadrātā ar malas garumu n rūtiņas. Šo kvadrātu varam aizpildīt arī ar "stūrīšiem", kā parādīts A150. zīmējumā:



A150. zīm.

Katrā “stūrītī” tik tiešām ir 2·n-1 rūtiņas, jo tas sastāv no 2 kvadrāta ar malas garumu n “malām”, taču stūra rūtiņa tādā gadījumā tiek ieskatīta divreiz, tāpēc 1 ir jāatņem. Kā redzam zīmējumā, kvadrāta labajā apakšējā stūrī ir 1 rūtiņa, tad ir “stūrītis” no $3 = 2 \cdot 2 - 1$ rūtiņām, tad “stūrītis” no 5 rūtiņām utt., un pats pēdējais stūrītis satur 2n-1 rūtiņu. Tātad tiešām $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

Tagad šo faktu pielietosim uzdevuma risināšanā. Tā kā 203 ir nepāra skaitlis, tad noteikti eksistē vismaz viens tādu naturālu skaitļu pāris, kuru kvadrātu starpība ir tieši 203. Tie varētu būt skaitļi n un n + 1, kur $2 \cdot (n + 1) - 1 = 203$ (ja atkal to iztēlojamies kā A150. zīm., tad lielāko kvadrātu iegūsim, mazākajam pievienojot stūrīti, kas satur 203 rūtiņas). Tātad der skaitļi n = 101 un n + 1 = 102.

Tā kā katrā stūrītī ir nepāra skaits rūtiņu un 203 arī ir nepāra skaitlis, tad jāmeklē tādi kvadrāti, kur lielāko no mazākā var iegūt, pievienojot tam nepāra skaitu “stūrīšu”. Apskatīsim pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summas pa 3, pa 5, pa 7, pa 9, pa 11, pa 13 utt. (izvēlēsimies skaitļus tā, lai to summa būtu aptuveni 203). Tie gadījumi, kad summa būs tieši 203, dos vēl citas uzdevuma atbildes.

Summas pa 3: 65 + 67 + 69 = 201 < 203, bet 67 + 69 + 71 = 207 > 203, tātad nekādu trīs pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summa nav 203.

Summas pa 5:
35 + 37 + 39 + 41 + 43 = 195 < 203, bet 37 + 39 + 41 + 43 + 45 = 205 > 203.

Summas pa 7: 23+25+27+29+31+33+35 = 203. Tātad 2n – 1 = 21, no kurienes n = 11. Tātad skaitļi 11 un 18 arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

Summas pa 9:
13 + 15 + 17 + 19 + 21 +23 + 25 +27+29 = 189 < 203
un 15+17+19+21+23+25+27+29+31 = 207 > 203.

Summas pa 11:
7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 187 < 203
un 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 209 > 203.

Summas pa 13:
3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 195 < 203
un 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 221 > 203.

Summas pa 15:
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 225 > 203.

Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina tikai skaitļu pāri 11 un 18, kā arī 101 un 102.

4.6.4. Atbilde: var salikt 14 pilnas rindas, un pāri paliks 408 klucīši.

Sastādīsim tabulu, kurā aprēķināsim, cik klucīšus Juris lika katrā rindā un cik klucīši kopā būs izmantoti katras rindas beigās.

rindas numurs	klucīši vienā rindā	cik klucīši jau ir izmantoti
1.	1	1
2.	2	3
3.	3	6
4.	5	11

5.	8	19
6.	13	32
7.	21	53
8.	34	87
9.	55	142
10.	89	231
11.	144	375
12.	233	608
13.	377	985
14.	610	1595

Tātad pēc 14 rindu salikšanas Jurim paliks 2003 – 1595 = 408 klucīši, ar ko nepietiks 15. rindas salikšanai, jo tajā jābūt 610 + 377 = 987 klucīšiem.

4.6.5. Atbilde: 3. decembrī.

Meklēsim mazāko kopīgo dalāmo skaitļiem 4, 8, 12 un 16; pēc tik nedēļām atkal visi četri tvaikoņi būs Rīgas ostā. Tā kā 16 dalās gan ar 8, gan ar 4, tad mums pietiek atrast skaitļu 16 un 12 mazāko kopīgo dalāmo. Tā kā $16 = 2^4$; $12 = 2^2 \cdot 3$, tad $\mathrm{MKD}(16,12) = 2^4 \cdot 3 = 48$. Tātad visi tvaikoņi ostā atkal būs kopā tieši pēc 48 nedēļām jeb pēc $48 \cdot 7 = 336$ dienām, t.i., 337. šī gada dienā. Atliek noskaidrot, kurš datums tas būs. Ievērosim, ka 336 = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 2, tātad visi tvaikoņi Rīgas ostā satiksies 3. decembrī.

4.6.6. Procesa laikā mēs dalīsim attiecīgajā brīdī apskatāmās monētas trīs „līdzīgās" kaudzītēs (kaudzītes veidosim tā, lai divās būtu vienāds skaits monētu, bet trešajā monētu skaits vai nu lai ir tāds pats, kā pirmajās kaudzītēs, vai atšķiras no tā par 1 vai 2, ja kopējais monētu skaits nedalās ar 3).

2003 monētas sadalām trīs kaudzītēs pa 668, 668 un 667 monētām.

1.svēršana. Uz katra svaru kausa uzliekam pa 668 monētām; 667 monētas paliek malā. Ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir starp tām 668 monētām, kuras ir uz vieglākā svaru kausa; ja svari ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir starp tām 667 monētām, kuras netika svērtas. Turpināsim svēršanu tikai ar to kaudzīti (668 vai 667 monētām), kurā ir vieglākā monēta.

2.svēršana. Uz katra svaru kausa uzliekam pa 223 monētām; malā paliek 222 vai 221 monētas (atkarībā no tā, kurā kaudzītē pēc 1.svēršanas atradās vieglākā monēta). Spriežam līdzīgi kā 1.svēršanā un noskaidrojam kaudzīti, kurā ir vieglākā monēta.

3.svēršana. Uz katra svaru kausa uzliekam pa 74 monētām; atkarībā no otrās svēršanas rezultāta trešajā kaudzītē paliek 75, 74 vai 73 monētas. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, atrodam vieglāko kaudzīti.

4.svēršana. Uz katras svaru kausa uzliekam pa 25 monētām no vieglākās kaudzītes; malā paliek attiecīgi 25, 24 vai 23 monētas. Svēršanas rezultātā noskaidrosim, kuru kaudzīti būs jādala un jāsver tālāk.

5.svēršana. Uz katra svaru kausa uzliekam pa 8 monētām; malā atliekam attiecīgi 9, 8 vai 7 monētas. Spriežam līdzīgi kā iepriekš.

6.svēršana. Uz katra svaru kausa liekam pa 3 monētām no vieglākās kaudzītes; trešajā kaudzītē paliek attiecīgi 3, 2 vai 1 monēta. Ja svari ir līdzsvarā un trešajā kaudzītē palika 1 monēta, tad tā arī ir meklētā; citos gadījumos turpinām svēršanu.

7.svēršana. Tagad zinām starp kurām 3 vai starp kurām 2 (atkarībā no iepriekšējo svēršanu rezultāta) monētām ir vieglākā.

Ja palikušas tikai 2 monētas, tad uz katra svaru kausa uzliekam pa vienai monētai. Meklētā monēta ir uz vieglākā kausa, jo svari noteikti nebūs līdzsvarā.

Ja palikušas 3 monētas, tad arī uz katra svaru kausa liekam pa vienai monētai un viena paliek malā. Ja svari ir līdzsvarā, tad meklētā monētā ir trešā – malā atliktā monēta; ja svari nav līdzsvarā, tad meklētā monētā ir uz vieglākā svaru kausa.

5. 30. mācību gads (2003/ 2004)

5.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.1.A1. Ja baraviku būtu 12 vai vairāk, tad neizpildītos uzdevuma pirmais nosacījums: no groza varētu izņemt 12 sēnes (visas – baravikas), un neviena no tām nebūtu gailene. Tātad baraviku nav vairāk par 11. Līdzīgi pierāda, ka gaileņu nav vairāk par 14.

Ja baraviku būtu mazāk par 11, tad sēņu kopā būtu mazāk nekā 11 + 14 = 25 – pretruna. Tātad baraviku ir 11. Līdzīgi pierāda, ka gaileņu ir 14.

5.1.A2. Viena iespējama risinājuma atslēga ir vienādība $3^2 + 4^2 = 5^2$. (Tiešām, tā ir patiesa: $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ un $9 + 16 = 25$.) No tās seko, ka katram naturālam k (k = 1, 2, 3, ...) ir spēkā $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$. Piemēram, pie k = 3 iegūstam $9^2 + 12^2 = 15^2$, pie k = 4 iegūstam $12^2 + 16^2 = 20^2$ utt.

Tagad izdarām summā $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 78^2 + 79^2$ šādas izmaiņas:

$48^2 + 64^2$ aizstājam ar 80^2 (k = 16)
$51^2 + 68^2$ aizstājam ar 85^2 (k = 17)
$54^2 + 72^2$ aizstājam ar 90^2 (k = 18)
$57^2 + 76^2$ aizstājam ar 95^2 (k = 19)

Summas vērtība nav mainījusies, bet saskaitāmo (kvadrātu) skaits samazinājies par 4.

5.1.A3. Apskatām „vieninieku virknes” dalīšanu ar 7 pēc skolā mācītā paņēmiena:

```
1 1 1 1 1 1 | 1 1 ... : 7 = 1 5 8 7 3 0 1 ...
7
4 1
3 5
  6 1
  5 6
    5 1
    4 9
      2 1
      2 1
        | 1 1
        |   7
        |   4
          ...
```

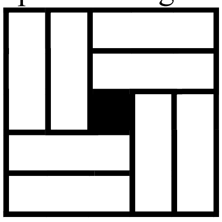
Redzam, ka tie skaitļi, kas sastāv no viena, diviem, ..., pieciem vieniniekiem, nedalās ar 7, bet skaitlis, kas sastāv no sešiem vieniniekiem, dalās ar 7. Pēc tam dalīšanās process „sākas no jauna”: vispirms dalām skaitli, kas sastāv no viena „lejup nonestā” vieninieka, pēc tam – skaitli, kas sastāv no diviem „lejup nonestajiem” vieniniekiem, utt. Tātad dalīšanas rezultāti (iegūtie cipari un atlikumi) atkārtosies. Secinām, ka no vieniniekiem sastāvošs skaitlis dalās ar 7 tad un tikai tad, ja vieninieku skaits tajā dalās ar 6.

Tā kā 2003 : 6 = 333 atl. 5, tad starp apskatāmajiem skaitļiem ir 333 tādi, kas dalās ar 7.

5.1.A4. Kā redzams A151. zīm., vidējā rūtiņa var būt melna.

Parādīsim, ka citas iespējas nav.

Ierakstīsim kvadrāta rūtiņās burtus a, b, c, kā redzams A152. zīm. Viegli pārbaudīt, ka ir 8 burti „a”, 9 burti „b” un 8 burti „c”. Ja mēs nokrāsosim melnu rūtiņu ar burtu „a” vai rūtiņu ar burtu „c”, nenokrāsotajā daļā burtu daudzumi atšķirsies. Bet katrs taisnstūris ar izmēriem 1×3 pārklāj vienu burtu „a”, vienu burtu „b” un vienu burtu „c”. Tātad, ja nenokrāsoto daļu varētu sagriezt šādos taisnstūros, tad tajā visu burtu daudzumiem būtu jābūt vienādiem. Tāpēc tāda sagriešana nav iespējama.



A151. zīm.

a	b	c	a	b
b	c	a	b	c
c	a	b	c	a
a	b	c	a	b
b	c	a	b	c

A152. zīm.

b	a	c	b	a
c	b	a	c	b
a	c	b	a	c
b	a	c	b	a
c	b	a	c	b

A153. zīm.

Secinām: sagriešana varbūt ir iespējama tikai tad, ja melna nokrāsota rūtiņa, kurā A152. zīm. ierakstīts burts „b”. Līdzīgi secinām, ka sagriešana varbūt ir iespējama tikai tad, ja melna nokrāsota rūtiņa, kurā A153. zīm. ierakstīts burts „b”. Bet vienīgā rūtiņa, kurā gan A152., gan A153. zīm. ierakstīts burts „b”, ir centrālā rūtiņa.

5.1.A5. **a)** jā; savienojam visas virsotnes ar riņķa līnijas centru un iegūstam sešus vienādmalu trijstūrus, kam katram visi leņķi ir 60° lieli.

b) nē. Pieņemsim, ka tas būtu iespējams. Tā kā sešstūra malu skaits lielāks par trijstūru skaitu, tad divu sešstūra malu fragmenti pieder vienam trijstūrim. Skaidrs, ka tās var būt tikai sešstūra blakus malas. Bet leņķis starp tām ir 120°, tātad šādu malu fragmenti nevar atrasties uz šaurleņķu trijstūra malām.

5.1.A6. Atbilde: 9 reizes. Skat. B grupas 6. uzdevuma atrisinājumu.

B GRUPA

5.1.B1. Skaidrs, ka n nav vairāk par 4 cipariem. Tāpēc n ciparu summa nav lielāka par 36, un pats skaitlis nav mazāks par 2003 – 36 = 1967. Protams, ka $n \le 2003$. Pārbaudot visus skaitļus no 1967 līdz 2003, redzam, ka der n = 1978.

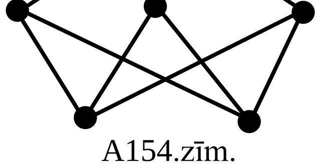
5.1.B2. Ievērojam, ka $(a^3 + 3ab^2) + (b^3 + 3a^2b) = (a + b)^3$. Tāpēc $(a + b)^3 = 27$ un $a + b = 3$. Līdzīgi $(a^3 + 3ab^2) - (b^3 + 3a^2b) = (a - b)^3$. Tāpēc $(a - b)^3 = 1$ un $a – b = 1$.

Tāpēc $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 3\cdot 1 = 3$.

5.1.B3. Naturālie skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., dalot ar 5 dod atlikumus 1; 2; 3; 4; 0; 1; 2; 3; 4; 0; 1; 2; .... Ja kaut viens no četriem skaitļiem dalītos ar 5, tad arī to reizinājums dalītos ar 5. Tātad neviens no šiem skaitļiem nedalās ar 5 (t.i., nedod atlikumu 0, dalot ar 5). Tātad šie 4 skaitļi, dalot ar 5, dod atlikumus 1; 2; 3; 4. Bet tad pirmā un pēdējā skaitļa summa dalās ar 5, un arī abu vidējo skaitļu summa dalās ar 5. Tātad arī visu skaitļu summa dalās ar 5.

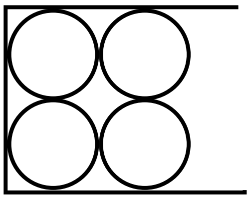
5.1.B4. Skaidrs, ka jābūt $m \ge 4$ (citādi nevienam nevar būt 3 draugi). Ja m = 4, tad katrs draudzējas ar katru citu, un uzdevuma nosacījumi nav izpildīti. Gadījums m = 5 nav iespējams. Tiešām, iedomāsimies, ka katri divi draugi savienoti ar lenti. Tad pavisam būtu $5\cdot 3 = 15$ lenšu gali (katram zinātniekam – 3 gali). Bet katrai lentai ir 2 gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis.

Tas, ka m = 6 iespējams, redzams A154. zīm., kur zinātnieki attēloti ar melniem aplīšiem, bet draudzības – ar līnijām, kas savieno attiecīgos aplīšus.



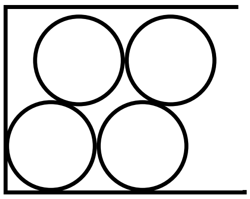
A154.zīm.

5.1.B5. Jā, eksistē. Aprakstīsim kastītes un monētu izvietojuma pakāpenisku veidošanu. Sāksim ar 4 monētu ievietošanu standartveidā.



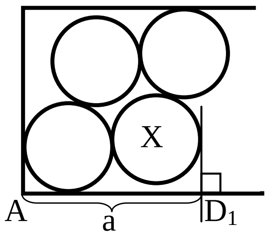
A155. zīm.

„Ļoti nedaudz" pabīdīsim pa labi divu augšējo monētu rindu, vienlaikus ļaujot tai noslīdēt uz leju tik tālu, cik to atļauj apakšējās divas monētas. Gar kastītes augšmalu rodas šaura sprauga.



A156. zīm.

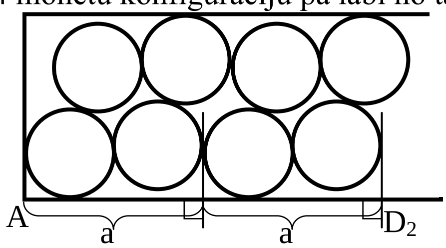
Labējo monētu „kolonnu" paceļam uz augšu, vienlaikus to pabīdot pa kreisi tik tālu, cik to atļauj pa kreisi esošā monētu „kolonna" un kastītes augšējā mala.



A157. zīm.

Tā kā monēta X pabīdījās pa kreisi, tad a < 2 (A157. zīm.). Apzīmēsim $a = 2 - \varepsilon$, kur ε – kaut kāds pozitīvs lielums (ļoti mazs).

Ievietojam vēl vienu šādu 4 monētu konfigurāciju pa labi no taisnes t (A158. zīm.).



A158. zīm.

Tagad $AD_2 = 2a = 2(2-\varepsilon) = 4 - 2\varepsilon$.

Līdzīgi turpinot, pēc n četru monētu konfigurācijas eksemplāru ievietošanas iegūsim punktu D_n, kuram $AD_n = n(2-\varepsilon) = 2n - n\varepsilon$. Skaidrs, ka, n augot, lielums $n \cdot \varepsilon$ neierobežoti aug, t.i., brīvā vieta līdz kastītes garumam 2n apakšējās rindas labējā galā neierobežoti palielinās. Izvēlēsimies tādu n, ka $n \cdot \varepsilon > 2$ n. Tad kastītē ar izmēriem $2 \times 2n$, kurā jau ievietotas 4n monētas, apakšējā rindā pa labi ir vieta vēl vienai monētai.

5.1.B6. Iedomāsimies, ka skudras, par kurām runā uzdevumā, ir melnas. Iztēlosimies, ka turpat blakus atrodas otra tikpat gara smilga un pa to tādos pašos attālumos cita aiz citas un ar tādiem pašiem ātrumiem kā melnajām skudrām viena otrai pretī dodas divas sarkano skudru grupas. Vienīgā atšķirība – sarkanās skudras sastopoties negriežas apkārt, bet dodas viena otrai garām un turpina ceļu tai pašā virzienā ar to pašu ātrumu. Skaidrs, ka jebkurā laika momentā kustība uz sarkano skudru smilgas notiek tāpat kā uz melno skudru smilgas (tikai vienas un tās pašas melnās skudras kustību dažādos laika momentos „imitē" dažādas sarkanās skudras). Tāpēc uz abām smilgām skudru satikšanos daudzumi būs vienādi. Skaidrs, ka uz sarkano skudru smilgas notiks 9 sastapšanās. Tātad 9 sastapšanās notiks arī uz melno skudru smilgas.

5.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.2.A1. Pieņemsim, ka pārējām vāverēm ir attiecīgi a; b; c; d rieksti, pie tam a < b < c < d. Saskaņā ar uzdevuma noteikumiem a + b + c + d = 64 – 15 = 49 un $d \le 14$.

Ja būtu d<14, tad $d \le 13$; tad $c \le 12$, $b \le 11$ un $a \le 10$. Tāpēc $a+b+c+d \le 10+11+12+13=46$, un tā ir pretruna ar augstāk iegūto a + b + c + d = 49. Tāpēc d = 14 un a + b + c = 49 – 14 = 35. Tā kā c < d, tad $c \le 13$.

Ja būtu c < 13, tad $c \le 12$; tad $b \le 11$ un $a \le 10$. Tāpēc $a+b+c \le 12+11+10=33$, un tā ir pretruna ar augstāk iegūto a + b + c = 35. Tāpēc c = 13 un a + b = 35 – 13 = 22. Tā kā b < c, tad $b \le 12$.

Ja būtu b < 12, tad $b \le 11$; tad $a \le 10$. Tāpēc $a+b \le 21$ – pretruna ar augstāk iegūto a + b = 22. Tāpēc b = 12, un tad a = 22 – 12 = 10.

Pārbaude parāda, ka visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

5.2.A2. Par piecciparu skaitļa sākumu sauksim tā trīs pirmo ciparu veidoto skaitli. Piemēram, skaitļa 68042 sākums ir 680.

Katrs no uzdevumā minētajiem „simetriskajiem" piecciparu skaitļiem ir viennozīmīgi noteikts, ja ir dots tā sākums. Piemēram, no sākuma 371, iegūstam skaitli 37173. Tātad meklējamo piecciparu skaitļu ir tikpat, cik to iespējamo sākumu. Bet par sākumu var kalpot jebkurš trīsciparu naturāls skaitlis. Trīsciparu naturālu skaitļu pavisam ir 900 (no 100 līdz 999 ieskaitot). Tātad meklējamo piecciparu skaitļu arī ir 900.

5.2.A3. Lapu, uz kuras uzrakstīti skaitļi a un b, apzīmēsim ar (a; b). Parādīsim, ka mums der lapas (0; 1), (0;2), (0;4), (0;8), (0;16).

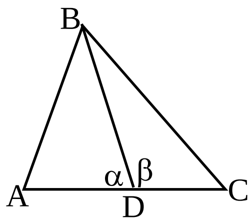
Skaitļus 0 un 1 varam iegūt ar 1.lapas palīdzību, pārējās lapas novietojot ar nullēm uz augšu.

Pieskaitot skaitļiem 0 un 1 skaitli 2, iegūstam skaitļus 2 un 3. Tātad 0; 1; 2; 3 varam iegūt ar pirmajām divām lapām, pārējās lapas novietojot ar nullēm uz augšu.

Pieskaitot skaitļiem 0; 1; 2; 3 skaitli 4, iegūstam skaitļus 4; 5; 6; 7. Tātad 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 varam iegūt ar pirmajām trim lapām, abas pārējās novietojot ar nullēm uz augšu.

Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.

5.2.A4. Acīmredzami trijstūri sadalīt divos trijstūros var tikai ar nogriezni, kas vilkts no trijstūra virsotnes līdz kādam pretējās malas punktam.



A159. zīm.

Ja $BD \perp AC$, tad abi trijstūri ADB un CDB ir taisnleņķa ar taisno leņķi virsotnē D. Apskatīsim otro iespēju, kad BD nav perpendikulārs AC. Tad $\angle BDA \ne \angle BDC$. Apzīmēsim $\angle ADB = \alpha$ un $\angle CDB = \beta$ (skat. A159. zīm.); skaidrs, ka $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Ja $\Delta ADB = \Delta CDB$ ir vienādi savā starpā, tad vai nu $\Delta BAD = \beta$, vai $\Delta ABD = \beta$. Bet tad ΔADB ir divi leņķi, kuru lielumu summa ir α+β=180°. Tā nevar būt, jo ΔADB visu triju leņķu lielumu summa ir 180°. Iegūtā pretruna parāda, ka mūsu pašreiz apskatāmā otrā iespēja nepastāv.

Piezīme. Ievērojiet, ka patiesībā esam pierādījuši spēcīgāku apgalvojumu nekā prasītais. No mūsu sprieduma izriet: ja trijstūris sadalīts divos līdzīgos trijstūros, tad tie abi ir taisnleņķa.

5.2.A5. Piemēram, tā: $2:(((2-3):((3-4):4-5)):5)=52\frac{1}{2}$.

5.2.A6. Skat., piem., A160. zīm., kur skaitļu summa uz diagonāles AB ir 88.

B

32	33	34	35	36	37	38	39
31	22	21	16	15	14	13	40
30	23	20	17	10	11	12	41
29	24	19	18	9	44	43	42
28	25	6	7	8	45	46	47
27	26	5	52	51	50	49	48
2	3	4	53	54	55	56	57
1	64	63	62	61	60	59	58

A

A160. zīm.

B GRUPA

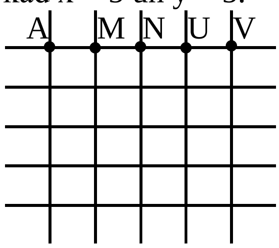
5.2.B1. Ja vairākas taisnes novietotas tā, ka katras divas no tām ir savā starpā vai nu paralēlas, vai perpendikulāras, tad teiksim, ka tās veido sistēmu. Kvadrātu var veidot tikai taisnes, kas pieder vienai sistēmai. Protams, ne katras četras taisnes no vienas sistēmas (pat ja divas no tām ir perpendikulāras otrām divām) veido kvadrātu.

Visas 10 apskatāmās taisnes var sadalīt vairākās sistēmās tā, ka taisnes no dažādām sistēmām savā starpā nav ne paralēlas, ne perpendikulāras. Dažās no šīm sistēmām varbūt ietilpst tikai 1, 2 vai 3 taisnes.

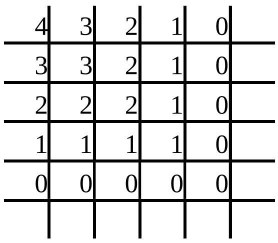
Pieņemsim, ka mums ir divas sistēmas A un B, tādas, ka A taisnes nav ne paralēlas, ne perpendikulāras B taisnēm. Pagriezīsim sistēmu A kā vienu veselu ķermeni tā, lai A taisnes kļūtu paralēlas (perpendikulāras) B taisnēm. Tā rezultātā sistēmas A un B apvienojušās vienā sistēmā, bet kvadrātu skaits vai nu nav mainījies, vai ir palielinājies. Rīkosimies tā, līdz visas taisnes nonāk vienā sistēmā, kurā x taisnes iet vienā virzienā, bet y taisnes ir tām perpendikulāras ($x + y = 10$). Mums jānoskaidro, kāds lielākais kvadrātu skaits var veidoties šādā sistēmā.

Skaidrs: ja x vai y ir 0 vai 1, neveidojas vispār neviens četrstūris, tātad arī neviens kvadrāts. Atliek apskatīt gadījumus $x = 2,\ y = 8$; $x = 3,\ y = 7$; $x = 4,\ y = 6$; $x = 5,\ y = 5$; $x = 6,\ y = 4$; $x = 7,\ y = 3$; $x = 8,\ y = 2$.

Apskatīsim gadījumu, kad $x = 5$ un $y = 5$.



A161. zīm.



A162. zīm.

Kvadrātu, kuriem kreisais augšējais stūris ir punktā A, ir ne vairāk kā 4 (jo to labais augšējais stūris var būt tikai kādā no punktiem M, N, U, V). Spriežot līdzīgi, iegūstam A162. zīm., kur katram punktam norādīts, cik vislielākais var būt kvadrātu ar kreiso augšējo stūri šajā punktā. Tātad apskatāmajā gadījumā nevar veidoties vairāk par $1\cdot 4+3\cdot 3+5\cdot 2+7\cdot 1=30$ kvadrātiem. No otras puses, ja taisnes A162. zīm. veido kvadrātisku režģi, rodas tieši 30 kvadrāti. Tātad gadījumā $x = 5$, $y = 5$ iespējamā kvadrātu skaita maksimums ir 30.

Līdzīgi aprēķinām, ka gadījumos $x = 4$, $y = 6$ un $x = 6$, $y = 4$ šis maksimums ir 26, gadījumā $x = 3$, $y = 7$ un $x = 7$, $y = 3$ tas ir 17, bet gadījumos $x = 2$, $y = 8$ un $x = 8$, $y = 2$ tas ir 7.

Tātad uzdevuma atbilde ir 30.

5.2.B2. Apzīmēsim pāra skaitļus ar p, bet nepāra ar n. Pavisam mums ir 100 p un 100 n. Trīs pēc kārtas uzrakstītus skaitļus sauksim par trijnieku. Pavisam mums ir 198 trijnieki. Sauksim trijnieku par labu, ja tajā ietilpstošo skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Acīmredzot, trijnieks ir labs tad un tikai tad, ja tajā ir viens n vai trīs n.

Vispirms pierādīsim: nevar būt, ka visi 198 trijnieki ir labi. Pieņemsim pretējo.

Aplūkosim virknes veidošanos atkarībā no tā, kāds ir pirmais trijnieks. Pastāv 4 iespējas.

A. nnn...

Viegli saprast: lai visi trijnieki būtu labi, virknē var parādīties tikai n. Bet tur jābūt arī 100 p. Pretruna.

B. npp...

Lai visi trijnieki būtu labi, virknei jāturpinās šādi: nppnppnppnppnpp... (to iegūstam, par katru kārtējo burtu izspriežot, vai tas var būt n vai p, lai pēdējo triju burtu veidotais trijnieks būtu labs). Skaidrs, ka p šajā virknē būs vairāk nekā n (piemēram, jau starp 180 pirmajiem burtiem būs 120 p). Bet virknē jābūt 100 p un 100 n.

C. pnp...

Lai visi trijnieki būtu labi, virknei jāturpinās šādi: pnppnppnppnppn... Iegūstam pretrunu kā B gadījumā.

D. ppn...

Virknei jāturpinās kā ppnppnppnppn..., un atkal iegūstam pretrunu kā B gadījumā.

Tātad 198 labu trijnieku nevar būt.

Savukārt 197 labi trijnieki iegūstami, izvietojot skaitļus no 1 līdz 200 sekojošā secībā: $\underbrace{nppnpp...npp}_{150 sk.}\underbrace{nnn...n}_{50 sk.}$. Vienīgais trijnieks, kas nav labs, ir trijnieks pnn uz abu ciparu grupu robežas.

5.2.B3. Baltās kartītes: 0, 1, 2

Zaļās kartītes: 0, 3, 6

Dzeltenās kartītes: 0, 9, 18

Sarkanās kartītes: 0, 27, 54

Pierādījums līdzīgs A grupas 3. uzdevuma risinājumā dotajam. Var arī tieši pārbaudīt visus skaitļus no 0 līdz 80 ieskaitot.

5.2.B4. **Atbilde:** P jāsakrīt ar D (tad $PD = 0$ un $PA + PB + PC + PD = AD + BD + CD$).

Viegli pārbaudīt, ka neatkarīgi no punkta P novietojuma trijstūri PAB, PBC, PCA (varbūt viens vai divi no tiem „deģenerējas" par nogriežņiem, ja P pieder vienai vai divām no taisnēm AB, BC, CA) pārklāj visu ΔABC, tātad arī punktu D.

Tālākajā spriedumā mēs izmantosim trijstūra nevienādību: katriem 3 punktiem X, Y un Z pastāv nevienādība $XY + XZ \geq YZ$, pie tam $XY + XZ = YZ$ tad un tikai tad, ja X ir nogriežņa YZ punkts.

Šķirosim vairākas iespējas, pieņemot, ka P nesakrīt ar D.

1) punkts D pieder kādam no nogriežņiem PA, PB, PC. Varam pieņemt, ka D pieder nogrieznim PA. Tā kā D nesakrīt ar P un ir ΔABC iekšējs punkts, tad D ir nogriežņa PA iekšējs punkts, tāpēc $PA = PD + DA$.

Iegūstam

$$PA + PB + PC + PD = PD + DA + PB + PC + PD = DA + (PD + PB) + (PC + PD). \quad (1)$$

No trijstūra nevienādības

$$PD + PB \geq DB \quad (2)$$
$$PC + PD \geq DC \quad (3)$$

Nevienādības (2) un (3) abas vienlaicīgi pārvēršas par vienādībām tad un tikai tad, ja P ir gan nogriežņa BD, gan nogriežņa CD punkts. Tā kā BD un CD ir tikai viens kopīgs punkts D, tad P būtu jāsakrīt ar D, bet mēs esam pieņēmuši, ka tā nav. Tātad (2) un (3) vienlaicīgi nav vienādības. No tā seko, ka PD + PB + PC + PD > DB + DC, un vienādība (1) mums dod PA + PB + PC + PD > DA + DB + DC.

2) punkts D ir iekšējs punkts kādam no trijstūriem PAB, PBC, PCA; varam pieņemt, ka D ir iekšējs punkts trijstūrim PAB. Apzīmēsim staru AD un PB krustpunktu ar E; punkts E ir nogriežņa PB iekšējs punkts. Tāpēc

$$DA + DB < DA + DE + EB = AE + EB < AP + (PE + EB) = AP + PB \quad (4)$$

Bez tam no trijstūra nevienādības $DC \leq DP + CP$ (5)

Saskaitot (4) un (5), iegūstam DA + DB + DC < AP + PB + PD + PC

Redzam: ja P nesakrīt ar D, tad PA + PB + PC + PD > DA + DB + DC;

ja P sakrīt ar D, tad PA + PB + PC + PD = DA + DB + DC.

Tātad punkta P meklējamā atrašanās vieta ir D.

Piezīme. Ievērojiet, ka mūsu dotais risinājums der visiem iespējamiem P stāvokļiem gan ABC iekšpusē, gan uz kontūra, gan ārpus ABC. Mums pat nebija vajadzīgs atsaukties uz konkrētu zīmējumu. Iesakām lasītājam patstāvīgi izsekot sprieduma pareizībai dažādos zīmējumos, kas atbilst dažādiem P novietojumiem.

5.2.B5. Ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad:

1) saucēju palielinot, daļa samazinās,

2) saucēju samazinot, daļa palielinās.

Tāpēc

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} >$$
$$> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

un

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} <$$
$$< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = \frac{a+b}{a+b} + \frac{c+d}{c+d} = 1 + 1 = 2$$

5.2.B6. Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā un pētīsim, cik maza var būt skaitļa summa uz „melnās” diagonāles. Viegli izsekot, ka visi pāra skaitļi ir vienas krāsas rūtiņās, bet visi nepāra skaitļi – otras krāsas rūtiņās. Iedomāsimies, ka mēs ierakstām skaitļus rūtiņās pēc kārtas, sākot ar 1, un apstājamies brīdī, kad esam aizpildījuši melno diagonāli. Šajā brīdī vai nu daļai zem melnās diagonāles, vai daļai virs melnās diagonāles jābūt aizpildītai (ja gan vienā, gan otrā no tām būtu neaizpildītas rūtiņas, tad tās abas turpmāk nevarētu aizpildīt saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, jo ceļam no vienas pie otras jāšķērso jau aizpildītā melnā diagonāle). Melnā diagonāle un viena no abām minētajām daļām kopā satur 36 rūtiņas – 20 melnas un 16 baltas. Tā kā mēs pamīšus aizpildām melnās un baltās rūtiņas, tad apskatāmajā brīdī jābūt aizpildītām vēl vismaz 3 baltām rūtiņām no vēl pilnībā neaizpildītās daļas. Tātad pēdējais uz melnās diagonāles ierakstītais skaitlis ir vismaz 39 (pavisam aizpildītas vismaz 36 + 3 = 39 rūtiņas). Visās citās uz melnās diagonāles esošajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 (septiņu mazāko nepāra skaitļu summa) vai vismaz 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56 (septiņu mazāko pāra skaitļu summa. Tātad uz melnās diagonāles ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 49 + 39 = 88, k.b.j.

5.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.3.A1. Sanumurējam vietas, kurās bērni stāv pa apli, pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; ...; 4005; 4006. Ir 2003 vietas ar pāra numuriem („pāra vietas") un 2003 „nepāra vietas".

Ir spēkā viens no diviem: vai nu pāra vietās ir vismaz 1002 meitenes, vai arī nepāra vietās ir vismaz 1002 meitenes. Tiešām, ja nebūtu spēkā ne viens, ne otrs, tad meiteņu kopskaits būtu ne lielāks par 1001 + 1001 = 2002 – pretruna.

Varam pieņemt, ka pāra vietās ir vismaz 1002 meitenes (otrs gadījums apskatāms līdzīgi). Atceramies, ka pāra vietu pavisam ir 2003, un ievērojam, ka $1002 \cdot 2 > 2003$.

Pieņemsim, ka nekādas divas pāra vietās esošās meitenes neatrodas blakus esošās pāra vietās. Tad starp katrām divām meiteņu aizņemtām pāra vietām atrodas pāra vieta, kuru neaizņem meitene; tā kā pāra vietās ir ≥ 1002 meitenes, tad jābūt ≥ 1002 pāra vietām, kuras neaizņem meitenes (atstarpju starp pāra vietās esošām meitenēm ir tikpat, cik šo meiteņu); bet tad pāra vietu ir „≥ 1002"+„≥ 1002", tātad ≥ 2004 – pretruna.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un ir divas meitenes, kas atrodas blakus esošās pāra vietās. Bērns, kas atrodas starp šīm meitenēm, ir meklējamais.

5.3.A2. Jā. Tāds skaitlis ir, piemēram, 715715715.

5.3.A3. **a)** jā, noteikti. Viegli pārbaudīt, ka $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Tāpat viegli pārbaudīt, ka $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + x^2 + y^2\right)$. Skaitļa kvadrāts ir vai nu 0, vai pozitīvs skaitlis. Tātad $x^2 - xy + y^2 = 0$ tad un tikai tad, ja $x - y = 0$, $x = 0$ un $y = 0$; bet tad nevarētu būt $x^3 + y^3 > 0$ – pretruna. Tāpēc $x^2 - xy + y^2 > 0$. No šejienes iegūstam, ka $x + y = \frac{2(x^3 + y^3)}{(x-y)^2 + x^2 + y^2} > 0$ kā divu pozitīvu skaitļu dalījums.

<u>Cits pierādījums</u>: no dotā seko, ka $x^3 > -y^3$ jeb $x^3 > (-y)^3$. Tā kā lielākam skaitlim atbilst lielāks kubs, tad no tā seko, ka $x > -y$ un $x + y > 0$, k.b.j.

b) nē. Kā pretpiemērs der, piemēram, $a = 3$;
$b = c = -2$.

5.3.A4. Izvēlamies vienu skolnieku un iedodam viņam baltu cepuri. Visiem viņa draugiem/draudzenēm iedodam sarkanas cepures. Visiem šo skolēnu draugiem, kam vēl cepuru nav, iedodam baltas cepures. Visiem šo skolēnu draugiem, kam vēl cepuru nav, iedodam sarkanas cepures, utt.

Agri vai vēlu šis process beigsies. Ja ir skolēni, kam vēl cepuru nav, izvēlamies vienu no tiem un atkārtojam tādu pašu procesu kā iepriekš. Šādi rīkojamies, kamēr katram skolniekam ir cepure. Tagad vienā komandā ieskaitām skolēnus ar sarkanām, bet otrā – ar baltām cepurēm.

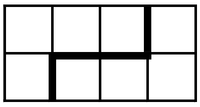
5.3.A5. <u>Atbilde:</u> desmit daļas.

a) piemērs $\frac{13}{1}; \frac{4}{2}; \frac{21}{3}; \frac{15}{5}; \frac{12}{6}; \frac{14}{7}; \frac{16}{8}; \frac{18}{9}; \frac{20}{10}; \frac{22}{11}; \frac{17}{19}$ parāda, ka desmit daļas (piemērā visas, izņemot pēdējo) var būt veseli skaitļi.

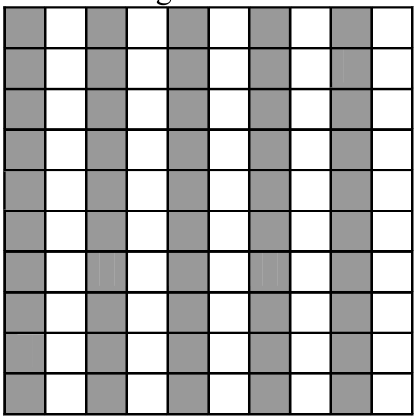
b) skaitļi 13, 17, 19 ir pirmskaitļi, kas lielāki par $\frac{22}{2} = 11$. Ja kāds no šiem skaitļiem ir skaitītājs, tad daļas vērtība būs vesels skaitlis tikai, ja saucējs būs 1; bet daļu ar saucēju 1 nevar būt vairāk par vienu. Ja kāds no šiem skaitļiem būs saucējs, tad atbilstošā daļa nevar būt vesels skaitlis, jo skaitītājam būtu jābūt lielākam par 22 (daļas vērtība var būt 2; 3; 4; ...).

Tātad visas 11 daļas nevar būt veselas.

5.3.A6. **a)** jā. No divām uzdevumā dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 2×4 (skat. A163. zīm.), bet no tādiem taisnstūriem viegli salikt kvadrātu ar izmēriem 12×12.



A163. zīm.



A164. zīm.

b) Nē. Apskatām A164. zīm.; tajā ir 50 iekrāsotas un 50 neiekrāsotas rūtiņas. Viegli pārliecināties: jebkura uzdevumā minētā figūra, kuru izgriež no šī kvadrāta, satur vai nu 1, vai 3 (tātad noteikti nepāra skaitu) iekrāsoto rūtiņu. Ja uzdevumā prasītais būtu iespējams, tad būtu jārodas $100:4=25$ gabaliem (nepāra skaitam gabalu). Šie 25 gabali kopā saturētu nepāra skaitu iesvītroto rūtiņu (jo 25 nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis) – pretruna.

B GRUPA

5.3.B1. No dotā seko: zilacaino zēnu ir mazāk nekā trešdaļa visu skolēnu, zilacaino meiteņu – mazāk nekā sestdaļa visu skolēnu. Bet $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Tāpēc zilacaino skolēnu noteikti ir mazāk nekā puse no visiem skolēniem.

5.3.B2. Apzīmēsim A ciparu summu ar x. Skaidrs, ka $A\geq1000$. Ja $x\geq4$, tad $B=A\cdot x\geq4000$, tāpēc B ciparu summa ir vismaz 4. Bet tad $C\geq16000$ un nav četrciparu skaitlis – pretruna.

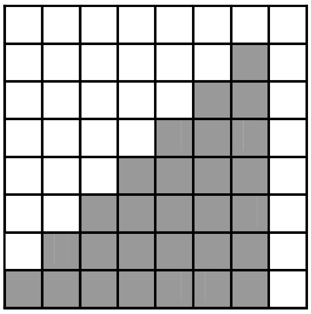
Ja x = 3, tad A > 1000 un B > 3000. Tā kā B – četrciparu skaitlis, tad B pirmais cipars ir vismaz 3; tātad B ciparu summa ir vismaz 4. Tāpēc $C>3000\cdot4=12000$ – pretruna.

Ja x = 1, tad A = 1000. Tad $B=1000\cdot1=1000$ un $C=1000\cdot1=1000$. Tātad A = 1000 der.

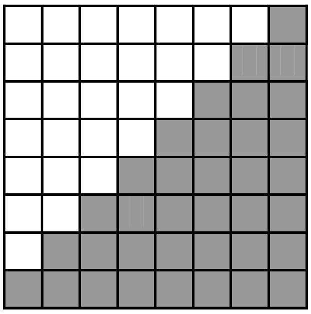
Ja x = 2, tad iespējamās A vērtības ir 1100; 1010; 1001; 2000. Viegli pārbaudīt, ka pirmās trīs vērtības der, bet A = 2000 neder (tad B = 4000, C = 16000 – piecciparu skaitlis).

Tātad iespējamās A vērtības ir 1000; 1100; 1010; 1001.

5.3.B3. Melno rūtiņu daudzums rindiņā (kolonnā) var būt 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Ja kādā rindiņā ir 0 melno rūtiņu, tad nevienā kolonnā nav 8 melno rūtiņu; tātad kolonnās ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 melnās rūtiņas, un kopējais melno rūtiņu skaits ir 0 + 1 + ... + 7 = 28. Ja kādā rindiņā ir 8 melnās rūtiņas, tad nevienā kolonnā nav 0 melno rūtiņu; tātad kolonnās ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 melnās rūtiņas un kopējais melno rūtiņu skaits ir 1 + 2 + ... + 8 = 36. Piemēri A165. un A166. zīm. parāda, ka abas iespējas tiešām pastāv; pārbaudiet paši, ka katrā no šiem zīmējumiem izpildās visi uzdevuma nosacījumi.



A165. zīm.

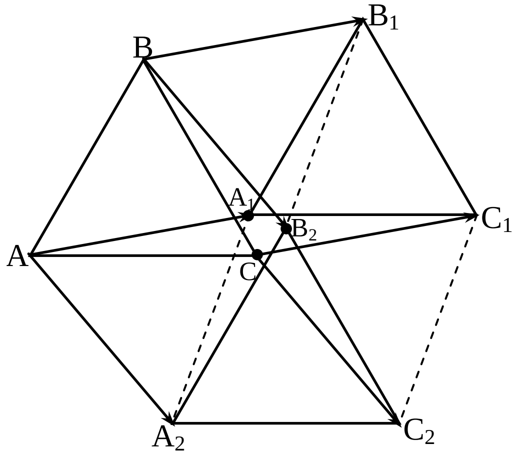


A166. zīm.

5.3.B4. Jā, var. Skat., piem., A167. zīm. Visi tur novilktie nogriežņi (t.sk. ar pārtrauktām līnijām attēlotie) ir vienāda garuma.

Izskaidrosim, kā šis zīmējums veidots, un pamatosim, ka tas apmierina uzdevuma prasības.

Zīmējuma pamatā ir vienādmalu trijstūris ABC; apzīmēsim tā malas garumu ar a.



A167. zīm.

Trijstūris ABC, negrozot to, pārbīdīts par attālumu a, iegūstot jaunu vienādmalu trijstūri $A_1B_1C_1$ ar malas garumu a. Pēc tam ABC, negrozot to, pārbīdīts vēl citā virzienā par attālumu a, iegūstot vienādmalu trijstūri $A_2B_2C_2$ ar malas garumu a. Abi pārbīdīšanas virzieni izvēlēti leņķī 60° vienam pret otru, pie tam tā, lai visi punkti A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 būtu dažādi.

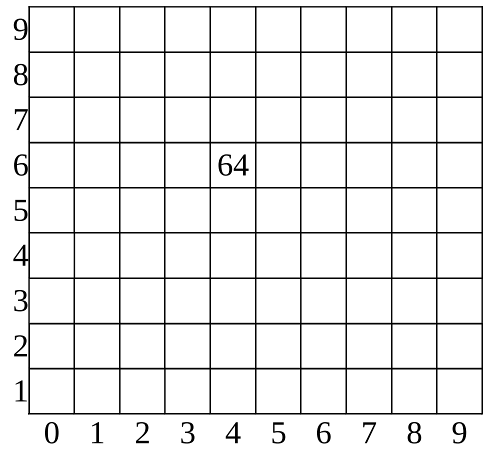
Jau šī konstrukcija garantē, ka $AB = BC = CA = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = A_2B_2 = B_2C_2 =$
$= C_2A_2 = AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = a$;

tātad mums jau ir 15 vienādi attālumi. Pierādīsim, ka arī nogriežņi A_1A_2, B_1B_2 un C_1C_2 (zīmējumā attēloti ar pārtrauktām līnijām) ir ar garumu a; tad uzdevums būs atrisināts.

Aplūkosim ΔA_1AA_2. Saskaņā ar konstrukciju $AA_1 = AA_2 = a$ un $\angle A_1AA_2 = 60^\circ$. Tātad ΔA_1AA_2 ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu; tātad $A_1A_2 = AA_1 = a$. Līdzīgi pierāda, ka $B_1B_2 = C_1C_2 = a$.

5.3.B5. Uzzīmētajiem 4 trijstūriem kopā ir $4 \cdot 3 = 12$ virsotnes; ir vēl 37 – 12 = 25 sarkanie punkti, kas nav šo četru trijstūru virsotnes. Šie 25 punkti ir kaut kā izvietoti pa tiem 12 riņķa līnijas lokiem, kuros to sadala 12 virsotnes. Tā kā $25 > 12 \cdot 2$, tad kādā no šiem lokiem atrodas vismaz 3 no minētajiem 25 punktiem. Tos var ņemt par meklējamā trijstūra virsotnēm.

5.3.B6. Attēlosim divciparu naturālos skaitļus ar tāda taisnstūra rūtiņām, kuram ir 9 rindiņas un 10 kolonnas. Rindiņas numurs nosaka skaitļa pirmo, bet kolonnas numurs – otro ciparu (skat. A168. zīm.)



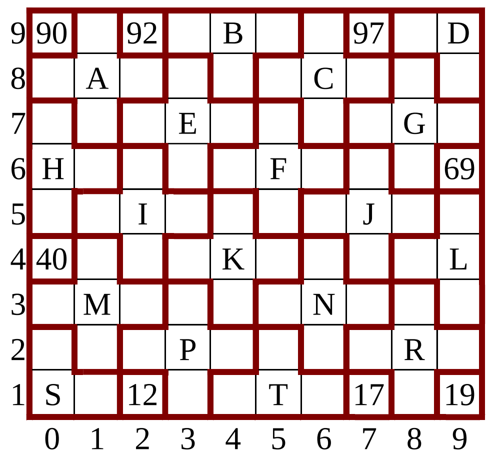
A168. zīm.

Katram Jura jautājumam „Vai Tavs skaitlis ir x?” atbilst vai nu 3, vai 4, vai 5 Andra iedomātie skaitļi, kuru gadījumā jāatbild „silts”. Ja x mūsu zīmējumā atrodas stūrī (piem., x = 10), tādu Andra iedomāto skaitļu ir 3; ja x atrodas pie malas, bet ne stūrī (piem., x = 69), tādu Andra iedomāto skaitļu ir 4; ja x atrodas tabulas iekšpusē, tādu Andra iedomāto skaitļu ir 5.

Parādīsim vispirms, ka ar 18 jautājumiem Jurim nepietiek. Pieņemsim, ka Juris uzdevis 17 jautājumus. Neatkarīgi no tā, kas tie ir par jautājumiem, var gadīties, ka Andris uz visiem ir atbildējis „auksts”, jo ir ne vairāk $17 \cdot 5 = 85$ iedomājamie skaitļi, kuru gadījumā Andrim būtu jāatbild „silts”. Tad pirms pēdējā jautājuma ir vismaz $90 - 85 = 5$ skaitļi, katrs no kuriem var būt Andra iedomātais. Bet, uzdodot vienu jautājumu, uz kuru ir iespējams tikai divas dažādas atbildes, var izvēlēties pareizo skaitli no ne vairāk kā divām iespējām.

Tagad parādīsim, ka ar 23 jautājumiem Jurim pietiek.

Vispirms Juris uzdod jautājumus (jebkurā secībā), kuri A169. zīm. attēloti ar burtiem (pavisam šādu jautājumu ir 18), pārtraucot šo procesu, ja uz kādu jautājumu tiek saņemta atbilde „silts”. Tādā gadījumā Jurim paliek vēl vismaz 5 jautājumi un viņam jāizvēlas īstais no ne vairāk kā 5 skaitļiem. To izdarīt ir viegli; nākošie jautājumi jāuzdod tā, lai uz katru atbilde „silts” būtu iespējama tikai viena atlikušā hipotētiskā skaitļa gadījumā. Pārbaudiet paši, ka to vienmēr var izdarīt.



A169. zīm.

Ja uz visiem 18 jautājumiem atbildes ir „auksts”, tad iedomātais ir viens no skaitļiem 12; 17; 19; 40; 69; 90; 92; 97 (skat. 7. zīm.). Tad nākošie jautājumi ir 18 un 91. Ja uz pirmo resp. otro atbilde ir „silts”, tad iedomātais skaitlis ir 17 vai 19 resp. 90 vai 92. Tad iedomāto skaitli noskaidro, uzdodot jautājumus 17 resp. 90.

Ja turpretī uz abiem jautājumiem 18 un 91 atbilde ir „auksts”, tad iedomātais skaitlis ir viens no 12; 40; 69; 97. Uzdodam jautājumus 12; 40; 69. Ja uz kādu no tiem atbilde ir „silts”, tad attiecīgais jautājums arī ir iedomātais skaitlis. Ja visas trīs atbildes ir „auksts”, tad iedomātais skaitlis ir 97.

Iesakām lasītājam pacensties noskaidrot mazāko jautājumu daudzumu, ar kuru garantēti var atrast iedomāto skaitli. Profesors Cipariņš prot to izdarīt ar 22 jautājumiem.

5.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.4.A1. Ar katru sitienu akmeņu skaits palielinās par 1. Pēc 17 sitieniem tas palielinājies par 17. Tātad sākumā bija 31 – 17 = 14 akmeņu.

5.4.A2. Vienu no iespējām skat. A170. zīm. Kustība sākas un arī beidzas, kubam atrodoties ar „*” apzīmētajā kvadrātā (kuba skaldne vienāda ar katru zīmējumā parādīto kvadrātu). Katrā kvadrātā ierakstīts numurs (-i), kas parāda, pēc cik pārvelšanām kubs nonāk šajā kvadrātā.

		5	4	3
8	7	* 6, 12	1	2
9	10	11		

A170. zīm.

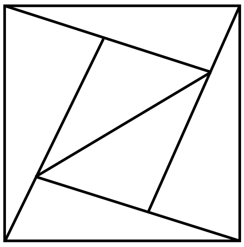
Iespējami arī citi veidi, kā sasniegt prasīto.

5.4.A3. **a)** Jā; skat., piem., A171. zīm.

b) Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka tāds kvadrāts eksistē; apzīmēsim tā vienā rindiņā ierakstīto skaitļu summu ar x. Tad visās trijās rindiņās ierakstīto skaitļu summa ir x + x + x = 3x. Bet no otras puses šī summa ir visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa, t.i., tā ir $1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 53$. Tātad jābūt $3x = 53$ un $x = 17\frac{2}{3}$. Iegūta pretruna, jo x ir triju veselu skaitļu summa, tātad x – vesels skaitlis.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

A171. zīm.



A172. zīm.

5.4.A4. Jā, var. Skat., piem., A172. zīm.

5.4.A5. Kvadrāta laukums ir nepāra skaitlis, vajadzīgais taisnstūru skaits – pāra skaitlis. Tātad jābūt vismaz vienam taisnstūrim, kura laukums – pāra skaitlis, un vismaz vienam taisnstūrim, kura laukums – nepāra skaitlis.

Ja taisnstūra laukums ir nepāra skaitlis, tad tā visu malu garumi ir nepāra skaitļi; pieņemsim, ka divu blakus esošo malu garumi ir 2a + 1 un 2b + 1, kur a un b – veseli skaitļi. Tad pēc Pitagora teorēmas diagonāles garuma kvadrāts ir

$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2$,

tātad tas dod atlikumu 2, dalot ar 4.

Ja taisnstūra laukums ir pāra skaitlis, tad tā divu blakus malu garumi ir vai nu 2a un 2b, vai 2a un 2b + 1 (a un b – veseli skaitļi). Diagonāles garuma kvadrāts šajos gadījumos ir vai nu $(2a)^2 + (2b)^2 = 4(a^2 + b^2)$, kas dalās ar 4, vai arī

$(2a)^2 + (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 = 4(a^2 + b^2 + b) + 1$, kas dod atlikumu 1, dalot ar 4.

Tātad visas diagonāles nevar būt savā starpā vienādas.

5.4.A6. Pierādīsim vispirms šādu rezultātu:

ja naturāli skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 2, ar 3 un ar 5, tad starpība a + b dalās ar 30.

Tiešām, no dotā seko, ka a - b dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 5. Tā kā katriem diviem no skaitļiem 2; 3; 5 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad no tā seko, ka šī starpība dalās ar $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

No šejienes izriet, ka Andrim jāprot noteikt cilvēka vecums ar precizitāti līdz 29 gadu iespējamai kļūdai. Skaidrs, ka to var izdarīt, vadoties kaut vai no sarunu biedra ārējā izskata.

B GRUPA

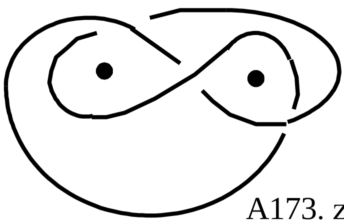
5.4.B1. Profesors Cipariņš ar datoru pārbaudījis, ka pastāv tikai divas iespējas:

$$33500^2 = 1122250000 \text{ un}$$
$$66500^2 = 4422250000.$$

(Tā kā meklējamais kvadrāts – desmitciparu skaitlis, tad vajadzēja pārbaudīt tādus x^2, ka $31622 < x < 100000$, jo $31622^2 = 999950884$ – deviņciparu skaitlis un $100000^2 = 10000000000$ – 11 -ciparu skaitlis.)

Cipariņam ir arī idejas, kā šo pārbaudi varēja saīsināt (galvenā – vispirms pierādīt, ka kvadrātam pēdējie 4 cipari var būt vienādi tikai tad, ja tie ir nulles), tomēr visi zināmie „teorētiskie" risinājumi ir diezgan gari. Cipariņš turpina strādāt pie šīs problēmas. Pastrādājiet jūs arī un atrakstiet!

5.4.B2. Skat., piem., A173. zīm.



A173. zīm.

x	*a*	*b*
y	*t*	*c*
z	*e*	*d*

A174. zīm.

5.4.B3. Apzīmēsim kvadrātā ierakstītos skaitļus, kā parādīts A174. zīm. Izteiksim a; b; c; d; e ar x; y; z; t palīdzību.

Tā kā $x + y + z = z + t + b$, tad $b = x + y - t$.

Tā kā $x + y + z = x + t + d$, tad $d = y + z - t$.

Līdzīgi $a = (x + y + z) - x - b = z + t - x$,

$e = (x + y + z) - z - d = x + t - z$,

$c = (x + y + z) - t - y = x + z - t$

Mums jāpārbauda vienādība

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y - t)^2 + (x + z - t)^2 + (y + z - t)^2$$

Ievērojiet, ka jāpastāv vienādībai $x + y + z = b + c + d = x + y - t + x + z - t + y + z - t$, no kurienes seko $x + y + z = 3t$. Tāpēc pierādāmā vienādība pārveidojas par

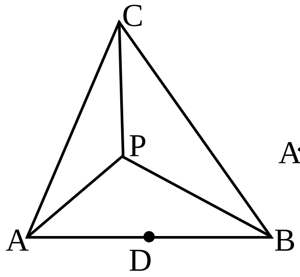
$$x^2 + y^2 + z^2 = (2t - z)^2 + (2t - y)^2 + (2t - x)^2$$

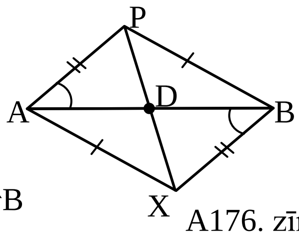
Atverot iekavas, iegūstam, ka jāpierāda

$x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2 - 4tz + z^2 + 4t^2 - 4ty + y^2 + 4t^2 - 4tx + x^2$ jeb $4t(x + y + z) = 12t^2$, jeb $4t(x + y + z - 3t) = 0$.

Šī vienādība ir pareiza saskaņā ar agrāk iegūto $x + y + z = 3t$.

5.4.B4. Savienosim punktu P ar ΔABC virsotnēm (skat. A175. zīm.). Tā kā $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$, tad viens no leņķiem APB, BPC, CPA nav mazāks par 120°; varam pieņemt, ka $\angle APB \geq 120^\circ$. Apzīmēsim AB viduspunktu ar D.





A176. zīm.

A175. zīm.

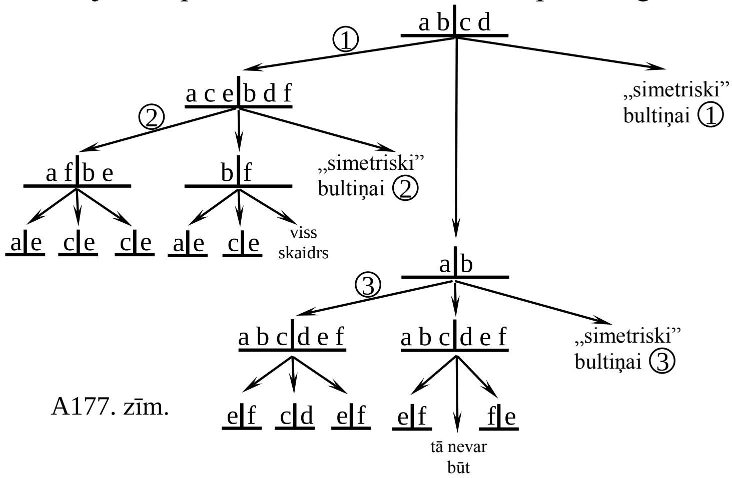
Papildināsim ΔAPB līdz paralelogramam APBX (A176. zīm.); tad D ir tā diagonāļu krustpunkts. Tā kā $\angle APB \geq 120^\circ$, tad vai nu $\angle APD \geq 60^\circ$, vai $\angle BPD \geq 60^\circ$; varam pieņemt, ka $\angle BPD \geq 60^\circ$. Ievērosim, ka $\angle PBX = 180^\circ - \angle APB \leq 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Tā kā trijstūrī pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tad no ΔPBX seko, ka $BX \geq PX$.

Tā kā BX = PA un PX = 2PD, iegūstam $PA \geq 2PD$, iegūstam $PA \geq 2 \cdot PD$.

Tātad starp 6 nogriežņiem, kas savieno P ar ΔABC virsotnēm un malu viduspunktiem, var atrast divus tādus, no kuriem viens ir vismaz divreiz garāks par otru. Tāpēc arī garākais no šiem 6 nogriežņiem ir vismaz divreiz garāks par īsāko no tiem.

5.4.B5. Apzīmēsim monētas ar a, b, c, d, e, f. Viena no iespējamām svēršanas shēmām attēlota A177. zīm. Bultiņa, kas ved pa kreisi/labi, atbilst gadījumam, kad uz leju nosvērsies kreisais/labais kauss; bultiņa, kas ved uz leju, atbilst gadījumam, kad svēršanā bijis līdzsvars. Secinājumus par monētu masām izdariet patstāvīgi.



A177. zīm.

5.4.B6. Sauksim procesu, kurā iegūst 10000, par pirmo procesu, bet procesu, kurā iegūst 00001 – par otro. Apzīmēsim pārveidojamos skaitļus no kreisās uz labo ar a, b, c, d, e. Izpildīsim vispirms visus tos otrā procesa soļus, kas skar tikai a, b vai c. To rezultātā a un b kļūs 0, bet d un e nemainīsies. Pēc tam izpildīsim visus tos pirmā procesa soļus, kas skar tikai c, d vai e. To rezultātā d un e kļūs 0.

Noskaidrosim, par ko kļuvis skaitlis c. Ievērosim, ka gājienu rezultātā izteiksme a – b + c – d + e nemainās (jo katrs gājiens samazina vienu no skaitļiem a, c, e un vienu no skaitļiem b, d). No uzdevuma nosacījumiem seko, ka a – b + c – d + e = 1 (jo gan 1., gan 2. procesa galarezultātā tiešām a – b + c – d + e = 1).

Tātad arī pašreiz a – b + c – d + e = 1. Tā kā a = b = d = e = 0, tad c = 1.

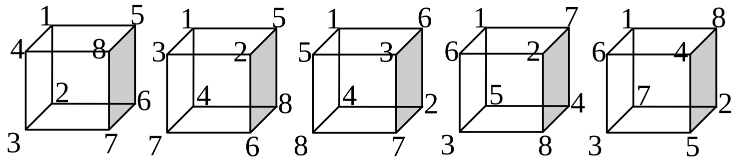
5.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.5.A1. Ja vāverītes sākotnējais noguldītais riekstu daudzums bija x, tad pēc viena gada viņai bankā bija $x \cdot 1{,}04$ riekstu, bet pēc 3 gadiem – $x \cdot (1{,}04)^3$ riekstu jeb $x \cdot \frac{26^3}{25^3}$ riekstu. Tā kā šis skaitlis ir naturāls, tad x jādalās ar $25^3 = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 15625$. Tāpēc $x = 15625 \cdot k$, k – naturāls skaitlis. Pie $k \geq 2$ būs $x \geq 15625 \cdot 2 > 30000$, tāpēc noteikti k = 1. Tad vāverītei pēc 3 gadiem bankā bija $26^3 = 17576$ riekstu, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad šī atbilde der, un vāverītei sākumā bija 15625 rieksti.

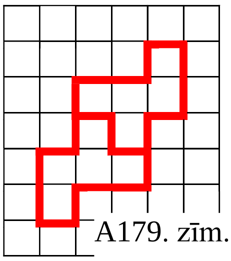
5.5.A2. Tā kā kubam ir 8 virsotnes un ierakstīt var 8 dažādus naturālus skaitļus, tad katrs no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 uzrakstīts tieši vienā virsotnē. Tā kā katrai šķautnei aprēķinātā starpība nav mazāka par 1 un nav lielāka par 7, tad nav vairāk par 7 dažādām starpībām. Apskatīsim virsotni, kurā ierakstīts 1. No šīs virsotnes izejošām šķautnēm pierakstītas dažādas starpības. Tātad dažādu starpību nav mazāk par 3.

Piemērus, kuros ir 3; 4; 5; 6; 7 dažādas starpības, skat. A178. zīm.

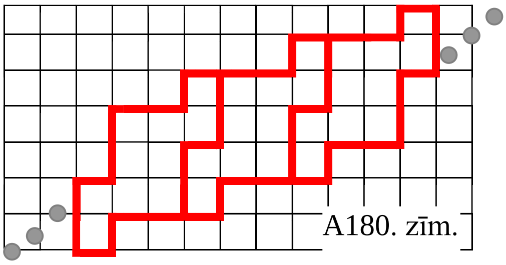


A178. zīm.

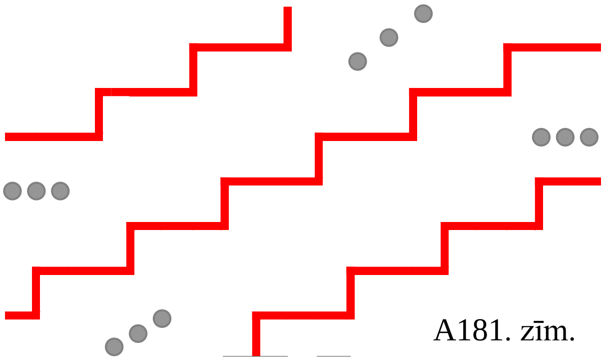
5.5.A3. No divām figūrām var salikt centrāli simetrisku figūru (skat. A179. zīm.). Saliekot šādas centrāli simetriskas figūras vienu otrai galā, iegūstam bezgalīgu joslu, kuras abas malas ir vienādas lauztas līnijas (skat. A180. zīm.). Saliekot šādas joslas vienu blakus otrai, iegūstam vajadzīgo pārklājumu (skat. A181. zīm.).



A179. zīm.



A180. zīm.



A181. zīm.

5.5.A4. Mazākais trīsciparu palindroms ir 101; lielākais trīsciparu palindroms ir 999. Ne pirms 101, ne pēc 999 vispār nav vairāk par 1 pēc kārtas sekojošu trīsciparu skaitļu.

Apskatīsim trīsciparu palindromu $\overline{abc}$, kas atšķiras no 999. Šķirojam divus gadījumus:

1) $b \neq 9$. Tad skaitlis $y = \overline{aba} + 10 = \overline{a(b+1)a}$ arī ir palindroms, un starp x un y ir tikai 9 citi naturāli skaitļi.

2) $b = 9$. Tad $a \neq 9$. Tad $y = x + 11 = \overline{a9a} + 11 = \overline{(a+1)0(a+1)}$ ir palindroms, un starp x un y ir tikai 10 citi naturāli skaitļi.

Tātad „bezpalindromu intervāls” nevar saturēt vairāk par 10 skaitļiem. Piemērs 192; 193; 194; 195; 196; 197; 198; 199; 200; 201 parāda, ka tas var saturēt 10 skaitļus.

5.5.A5. Ievērosim, ka kvadrātu var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas (piemēram, tā, ka visu taisnstūru garākās malas savā starpā paralēlas). Katrs taisnstūris pa reizei satur visus skaitļus. Tāpēc tie visi ierakstīti kvadrātā vienādu skaitu reižu.

5.5.A6. Uzdevuma risinājums balstās uz faktu: ja aukla, aizdedzinot to no viena gala, deg laika sprīdi T, tad, aizdedzinot to vienlaikus no abiem galiem, tā deg laika sprīdi $\frac{T}{2}$.

Tāpēc varam rīkoties šādi:

(1) vienlaikus aizdedzinām pirmo auklu no abiem galiem, bet otro – no viena gala,

(2) brīdī, kad pirmā aukla pilnībā sadegusi, aizdedzinām otro auklu arī no otra gala.

Etapa (1) beigu brīdī pagājusi pusstunda, tāpēc otrās auklas atlikušajai daļai palicis degt vēl pusstundu. Tāpēc etaps (2) ilgs vēl $\frac{1}{2}\cdot 30\text{ min} = 15\text{ min}$, un kopā no etapa (1) sākuma līdz etapa (2) beigām būs pagājis 30 min + 15 min = 45 min.

B GRUPA

5.5.B1. Sadalām skaitļus no 2 līdz 12 pirmreizinātājos:

$2=2^1$ $6=2^1\cdot 3^1$ $10=2^1\cdot 5^1$

$3=3^1$ $7=7^1$ $11=11^1$

$4=2^2$ $8=2^3$ $12=2^2\cdot 3^1$

$5=5^1$ $9=3^2$

Redzam, ka 2 pavisam ir sastopams 10 reizes, 3 – 5 reizes, 5 – 2 reizes, 7 – 1 reizi un 11 – 1 reizi.

Lai A dalītos ar B, B nedrīkst nevienu pirmskaitli saturēt augstākā pakāpē, nekā to satur A. Tāpēc dalījumā noteikti vismaz pa vienai reizei saglabājas pirmskaitļi 3; 7; 11; tātad dalījuma vērtība ir vismaz $3\cdot 7\cdot 11=231$.

Vērtību 231 var iegūt, piemēram, šādi: $231 = \frac{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 10}$.

5.5.B2. Ievērosim, ka patvaļīgam naturālam skaitlim *k* pastāv vienādības $k\cdot k! = (k+1)\cdot k! - k! = (k+1)! - k!$

Uzrakstām vienādību $k\cdot k! = (k+1)! - k!$ pie k=1; 2; 3; …; n:

$1\cdot 1! = 2! - 1!$

$2\cdot 2! = 3! - 2!$

$3\cdot 3! = 4! - 3!$

...

$(n-1)!\cdot(n-1)! = n! - (n-1)!$

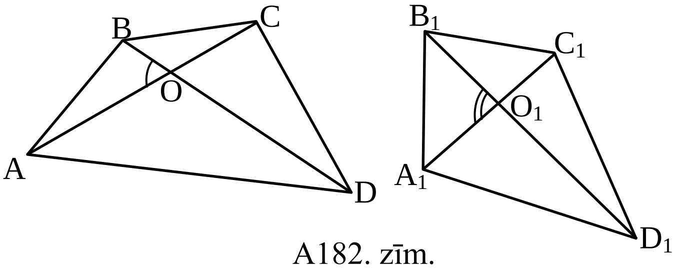
$n\cdot n! = (n+1)! - n!$

Saskaitot iegūtās vienādības un saīsinot saskaitāmos labajā pusē, iegūstam

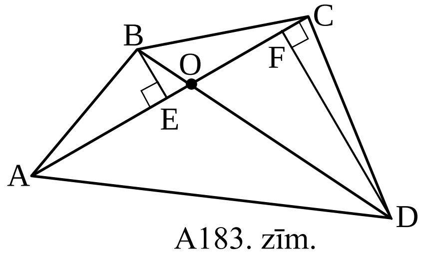
$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

5.5.B3. Nē, tas nav iespējams.

Pieņemsim, ka $\angle MNK$ – šaurs. Tā kā $MN \parallel BD$ un $NK \parallel CA$, tad $\angle BOA = \angle MNK$ (leņķi ar savstarpēji paralēlām malām); tātad $\angle BOA$ – šaurs (skat. A182. zīm.). Līdzīgi iegūstam, ka $\angle B_1O_1A_1$ – plats.



A182. zīm.



A183. zīm.

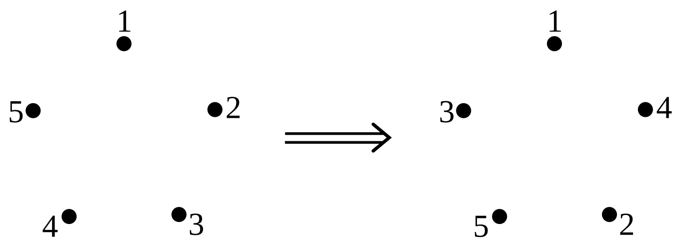
Novelkam $BE \perp AC$ un $DF \perp AC$ (skat. A183. zīm.). Tad $AB^2 = AE^2 + BE^2$, $BC^2 = CE^2 + BE^2$, $AD^2 = AF^2 + DF^2$ un $CD^2 = CF^2 + DF^2$. Tāpēc

$AB^2 + CD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CF^2 + DF^2) <$
$< (AF^2 + BE^2) + (CE^2 + DF^2) =$
$= (AF^2 + DF^2) + (CE^2 + BE^2) = AD^2 + BC^2$
Līdzīgi iegūstam nevienādību $A_1B_1^2 + C_1D_1^2 > A_1D_1^2 + B_1C_1^2$. Bet saskaņā ar uzdevumā doto abas iegūtās nevienādības nevar būt spēkā vienlaicīgi.

5.5.B4. Jā, var. Apzīmēsim monētas ar A, B, C, D, E, F, G, H. Pirmajā svēršanā salīdzinām A, B, C, D ar E, F, G, H. Pastāv 3 iespējas.
I: Monētas A, B, C, D ir smagākas par E, F, G, H. Tad smagākā monēta ir starp A, B, C, D, vieglākā – starp E, F, G, H. Otrajā svēršanā salīdzinām A, B ar C, D; smagākā monēta ir uz kausa, kurš nosveras uz leju. Trešajā svēršanā atrodam smagāko monētu.
Līdzīgi starp monētām E, F, G, H ar divām svēršanām atrodam vieglāko.
II: Monētas E, F, G, H ir smagākas par A, B, C, D. Rīkojamies līdzīgi kā I gadījumā.
III: Kausi pirmajā svēršanā atrodas līdzsvarā. Otrajā svēršanā salīdzinām A, B, E, F ar C, D, G, H. Pastāv 3 iespējas.
III$_1$: A, B, E, F ir smagākas par C, D, G, H. Tad vai no smagākā monēta ir viena no A, B un vieglākā – viena no C, D, vai arī smagākā monēta ir viena no E, F un vieglākā – viena no G, H. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un B un noskaidrojam, ar kuru no divām nupat minētajām iespējamībām esam sastapušies. Tad ar vēl ne vairāk kā 2 svēršanām atrodam abas meklētās monētas.
III$_2$: C, D, G, H ir smagākas par A, B, E, F. Šo gadījumu analizējam līdzīgi kā III$_1$.
III$_3$: Kausi arī otrajā svēršanā atrodas līdzsvarā. Tad atšķirīgo monētu pāris ir AB, CD, EF vai GH. Salīdzinot A ar C, A ar E un A ar G, noskaidrojam, kuras trīs no monētām A, C, E, G ir vienādas un kura no tām atšķiras, pie tam uzzināsim arī to, vai atšķirīgā monēta ir smagāka vai vieglāka par pārējām. Tas ļauj noskaidrot arī otro atšķirīgo monētu.

5.5.B5. Apgalvojuma pareizība izriet no vienādības
$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = (x - y)(x - z)(y - z)$,
ko viegli pārbaudīt, atverot iekavas.

5.5.B6. Skaidrs, ka jābūt $n \geq 3$. Pie $n = 3$ minētās virsotnes acīmredzot eksistē, jo vispār ir tikai viens triju virsotņu veidots trijstūris. Pie $n = 5$ var gadīties, ka uzdevumā minētās virsotnes neeksistē, kā redzams A184. zīm.



A184. zīm.

Visiem citiem n uzdevumā minētās virsotnes noteikti eksistē. Pierādīsim to, šķirojot divus gadījumus.
A: n – pāra skaitlis, $n \geq 4$. Pieņemsim, ka a un b pirmajā n-stūrī ir divās pretējās virsotnēs. Tad katram citam c trijstūris abc pirmajā n-stūrī ir taisnleņķa. Ja a un b ir pretējās virsotnēs arī otrajā n-stūrī, tad par meklējamām virsotnēm var ņemt a, b, c, kur c – patvaļīgs numurs, kas atšķiras no a un b.
Ja a un b otrajā n-stūrī nav pretējās virsotnēs, tad apzīmēsim ar d numuru, kas otrajā n-stūrī atrodas a pretējā virsotnē. Tad par meklējamām virsotnēm der virsotnes a, b, d, jo abi trijstūri ir taisnleņķa: pirmajā trijstūrī taisnais leņķis ir virsotnē d, otrajā – virsotnē b.
B: n – nepāra skaitlis, $n > 5$. Apzīmēsim $n = 2k + 1$, $k \geq 3$. Varam pieņemt, ka pirmajā n-stūrī virsotnes sanumurētas ar numuriem 1, 2, 3, ..., n pēc kārtas.

Izskaitīsim, cik ir šaurleņķu trijstūru ar vienu virsotni 1. Trijstūris ir šaurleņķu, ja starp katrām divām tā virsotnēm atrodas ne vairāk kā k - 1 citas n-stūra virsotnes; trijstūris ir platleņķa, ja starp kādām divām no tā virsotnēm atrodas k vai vairāk citas n-stūra virsotnes; skaidrs, ka mūsu gadījumā taisnleņķa trijstūru vispār nav.

Tāpēc ir 1 šaurleņķu trijstūris ar virsotnēm 1 un 2 (tas ir 1; 2; k + 2); ir 2 šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un 3 (tie ir 1; 3; k + 2 un 1; 3; k + 3); ir 3 šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un 4 (tie ir 1; 4; k + 2, 1; 4; k + 3 un 1; 4; k + 4); ...; ir k šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un k+1 (tie ir 1; k + 1; k + 2, 1; k + 1; k + 3, ..., 1; k + 1; 2k + 1). Līdzīgi ir k šaurleņķu trijstūru ar virsotnēm 1 un k + 2; k - 1 šaurleņķu trijstūru ar virsotnēm 1 un k + 3; ...; 1 šaurleņķu trijstūris ar virsotnēm 1 un 2k + 1.

Kopā esam uzskaitījuši $1 + 2 + ... + (k - 1) + k + k + (k - 1) + ... + 2 + 1$ šaurleņķu trijstūrus, bet katrs ir uzskaitīts divas reizes; tātad šaurleņķu trijstūru ar virsotni 1 pavisam ir $1 + 2 + ... + k$. Līdzīgi skaitot, iegūstam, ka vispār trijstūru ar virsotni 1 ir $1 + 2 + ... + (2k - 1)$.

Ievērosim, ka $1 + 2 + ... + (2k - 1) = (1 + 2 + ... + k) + ((k + 1) + (k + 2) + ... + 2k) - 2k =$
$= (1 + 2 + ... + k) + (1 + 2 + ... + k) + k \cdot k - 2k = 2(1 + 2 + ... + k) + k (k - 2) >$
$> 2(1 + 2 + ... + k)$, ja $k \geq 3$.

Tātad mūsu apskatāmajām n vērtībām šaurleņķu trijstūru ar virsotni 1 pavisam ir mazāk nekā puse no visiem trijstūriem ar virsotni 1. Tāpēc eksistē tādi skaitļi a un b, ka trijstūri ar virsotnēm 1; a; b abos n-stūros ir platleņķa.

5.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.6.A1. Katrs no skaitļiem a, b, c ir vai nu pāra, vai nepāra. Tā kā pastāv tikai 2 iespējas, bet skaitļu a, b, c skaits ir 3, tad no tiem var atrast divus, kuru paritātes ir vienādas: vai nu tie abi divi ir pāra skaitļi, vai arī abi ir nepāra skaitļi. Tāpēc to abu summa ir pāra skaitlis.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem šo abu skaitļu summa ir pirmskaitlis. Bet vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Savukārt skaitli 2 kā divu naturālu skaitļu summu var izsacīt tikai vienā veidā: 2 = 1 + 1. Tāpēc divi no skaitļiem a, b, c ir 1; varam pieņemt, ka a = b = 1.

Ja arī c = 1, tad a + b = a + c = b + c = 2, tātad pirmskaitļi. Šai gadījumā apskatāmajiem skaitļiem ir divas dažādas vērtības 1 un 2. Ja c = 2, tad a + c = b + c = 3; tā kā 3 ir pirmskaitlis, tad šis gadījums apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad apskatāmajiem skaitļiem var būt trīs dažādas vērtības.

Ja c > 2, tad $c \geq 3$. Tad izpildās sakarības

$a = b = 1 < 2 = a + b < 3 \leq c < c + 1 = c + a = c + b$.

Tātad uzdevumā apskatāmajiem skaitļiem ir četras dažādas vērtības 1; 2; c; c + 1. Ja ņem, piemēram, c = 4, tad c + a = c + b = 5 ir pirmskaitlis, un uzdevuma prasības ir izpildītas.

Tātad skaitļiem a, b, c, a + b, b + c, a + c var būt 2, 3 vai 4 dažādas vērtības.

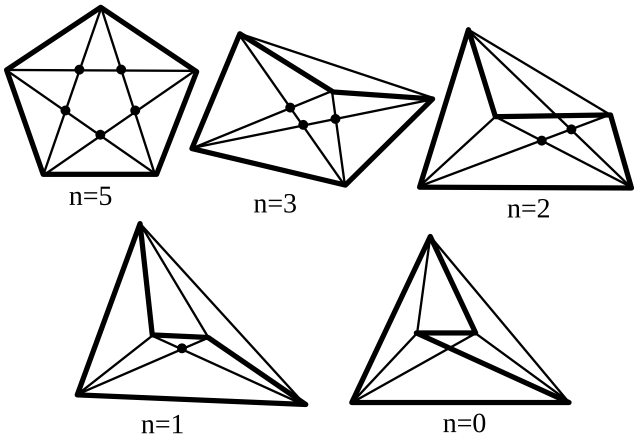
5.6.A2. Jā, var. Skat., piem., A185. zīm.

1	4	2
3	6	7
5	9	8

A185. zīm.

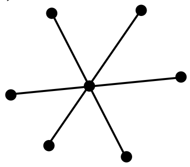
5.6.A3. Apzīmēsim piecstūri ar ABCDE. Tā diagonāles ir AC, CE, EB, BD, DA. Diagonāles, kam ir kopīga virsotne, nekrustojas. Tāpēc katra diagonāle krustojas ar augstākais divām citām (piemēram, AC varbūt krustojas tikai ar EB un BD).

Piešķirot katrai diagonālei par vienu krustošanos vienu žetonu, pavisam ir piešķirti ne vairāk kā $5 \cdot 2 = 10$ žetoni. Bet par katru krustpunktu tiek piešķirti vismaz 2 žetoni (jo tajā krustojas vismaz divas diagonāles). Tāpēc dažādu krustpunktu nav vairāk par 10 : 2 = 5. Kā redzams A186. zīm., iespējami 5; 3; 2; 1; 0 krustpunkti.

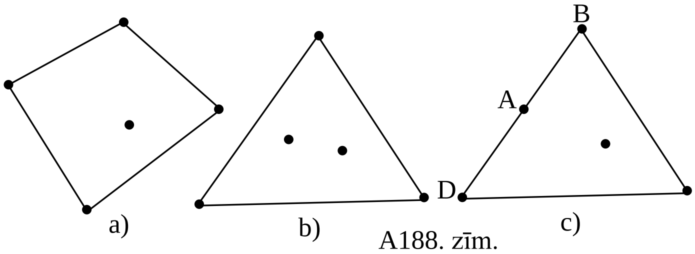


A186. zīm.

Piecstūru malas attēlotas ar resnākām līnijām.
Pierādīsim, ka tieši 4 krustpunkti nevar būt.
Iedomāsimies, ka katrā piecstūra virsotnē iedurta adata. Ņemam ļoti mazu elastīgu gumijas gredzenu, izstiepjam to, apliekam ap visām adatām vienlaikus un ļaujam tam savilkties. Skaidrs, ka gumijas gredzens ieņems tāda daudzstūra formu, kura virsotnes ir aplūkojamā piecstūra virsotnes. Līniju, uz kuras gredzens savelkoties stabilizējas, sauc par uzdevumā apskatāmā piecstūra izliekto apvalku; apzīmēsim to ar IA. Šķirosim divus gadījumus.
1. IA ir piecstūra kontūrs. Tad uzdevumā dotais piecstūris ir izliekts, katras divas tā diagonāles krustojas un pavisam ir 5 krustpunkti (nekādi divi krustpunkti nevar sakrist, jo tad pavisam būtu vismaz 6 virsotnes, skat. A187. zīm.)


A187. zīm.

2. IA ir daudzstūris ar 3 vai 4 virsotnēm (skat. A188. zīm.).



A188. zīm.

Tad vai nu kāda IA mala, vai nogrieznis, kas savieno divas uz IA malas esošas piecstūra virsotnes (piem., AD A188.c) zīmējumā) ir piecstūra diagonāle; apzīmēsim taisni, uz kuras tā atrodas, ar *t*, bet pašu šo diagonāli ar XY. Visas piecas piecstūra diagonāles atrodas uz *t* vai vienā pusē *t*. Tāpēc diagonāle XY nekrustojas ne ar vienu no pārējām diagonālēm. Uzskatīsim, ka piecstūris ir XPYST, un apskatīsim visus iespējamos tā diagonāļu pārus.

(XY, PS)	(XS, SP)	(XS, TY)
(XY, PT)	(YT, TP)	(PS, TY)
(XY, XS)	(TP, PS)	(XS, PT)

(XY, YT)

krustpunktu nav, jo XY nekrustojas ar citām diagonālēm	krustpunktu nav, jo diagonāles iziet no vienas virsotnes	varbūt ir pa vienam krustpunktam

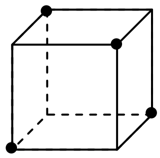
Tātad krustpunktu skaits šajā gadījumā nepārsniedz 3.

5.6.A4. Sauksim katrai šķautnei aprēķināto starpību par šīs šķautnes vērtību.

Aplūkosim trīs šķautnes, kas iziet no virsotnes A. Apzīmēsim skaitļus, kas uzrakstīti 3 skaldnēs ar kopējo virsotni A, ar a, b, c; varam pieņemt, ka a < b < c. Tad mūsu apskatāmo šķautņu vērtības ir b – c a, c – a un b – c. Viegli pārbaudīt, ka

(c – a) = (c – b) + (b – a)

Tātad divu no A izejošo šķautņu vērtību summa vienāda ar trešās šķautnes vērtību.



A189. zīm.

Apskatīsim četrus šķautņu trijniekus, kas iziet no A189. zīm. attēlotajām virsotnēm. Katra kuba šķautne ietilpst tieši vienā no šiem trijniekiem.

Apzīmēsim atbilstošās vērtības ar α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3; δ_1, δ_2, δ_3. Saskaņā ar augstāk pierādīto, varam pieņemt, ka

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_3 \quad \textbf{(1)}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3.$$

No vienādībām (1) seko vienādība $\alpha_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \delta_2 + \delta_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \delta_1$, kas dod uzdevuma atrisinājumu.

5.6.A5. Skat., piem., A190. zīm.

b	m					b	m
m	m					b	b
		b	b	m	m		
		b	m	b	m		
		m	b	m	b		
		m	m	b	b		
b	b					m	m
m	b					m	b

A190. zīm.

5.6.A6. Pierādīsim vispirms šādu rezultātu:

„katra 5 ciparu virkne, kurā katrs cipars ir vai nu 1, vai 2, vai nu pati ir simetriska, vai sadalāma divās simetriskās virknēs."

Apgalvojuma pareizība virknēm, kas sākas ar ciparu 1, redzama A191. zīm. tabulā; virknēm, kas sākas ar ciparu 2, to pierāda, aizstājot tabulā vieniniekus ar divniekiem un otrādi.

1 1 1 1 1	1 2 1|1 1
1 1 1 1|2	1|2 1 1 2
1 1|1 2 1	1 2 1 2 1
1 1 1|2 2	1 2 1|2 2
1 1 2 1 1	1 2 2 1|1
1 1|2 1 2	1 2 2 1|2
1|1 2 2 1	1 2 2 2 1
1 1|2 2 2	1|2 2 2 2

A191. zīm.

Lai atrisinātu uzdevumu, sagriežam vispirms lentu 50 gabalos, katrs no kuriem satur 5 ciparus. Ja uz kāda gabala nav uzrakstīts simetrisks skaitlis, tad saskaņā ar augstāk pierādīto to var sagriezt divos gabalos, uz katra no kuriem būs simetrisks skaitlis. Tātad gabalu nav vairāk par $50 \cdot 2 = 100$, k. b. j.

B GRUPA

5.6.B1. Nē, nevar.

Pieņemsim no pretējā, ka x un y – naturāli skaitļi un $x + y = MKD(x, y)$. Šķirosim divas iespējas:

1) x = y; tad $MKD(x, y) = x$, bet $x + y = 2x \neq x$ - pretruna.

2) $x \neq y$; varam pieņemt, ka $x > y$. Tad $x < x + y < 2x$ un $1 < \frac{x+y}{x} < 2$. Tātad $\frac{x+y}{x}$ nav vesels skaitlis, jo atrodas starp diviem blakus esošiem veseliem skaitļiem 1 un 2; tātad x + y nedalās ar x – pretruna, jo $MKD(x, y)$ dalās gan ar x, gan ar y.

5.6.B2. Pieņemsim no pretējā, ka ir kāds naturāls skaitlis, kas dalās ar 99999 un kam ir mazāk nekā 5 nenulles cipari; apzīmēsim mazāko no šādiem skaitļiem ar A. Skaidrs, ka A satur vismaz 6 ciparus, jo neviens skaitlis ar mazāk nekā 5 cipariem nedalās ar 99999, bet no piecciparu skaitļiem ar 99999 dalās tikai pats 99999; tomēr $A \neq 99999$, jo saskaņā ar pieņēmumu A ir mazāk nekā 5 nenulles cipari.

Sauksim A ciparus no kreisās puses par pirmo, otro, ..., sesto (un varbūt vēl septīto, astoto utt., ja tādi ir) cipariem. Skaidrs, ka A pirmais cipars nav 0; apzīmēsim to ar a.

$$A = a****b\underbrace{........}_{\substack{\text{var būt vēl n} \\ \text{citi cipari}}}$$

Mēs centīsimies parādīt, ka eksistē mazāks naturāls skaitlis nekā A, kas dalās ar 99999 un kam ir mazāk nekā 5 nenulles cipari. Tad būs iegūta pretruna (jo A saskaņā ar pieņēmumu ir mazākais no šādiem skaitļiem), un uzdevums būs atrisināts.

Atņemsim no skaitļa A skaitli $1\underbrace{00\ldots0}_{n+5\,\text{nulles}}$ un pieskaitīsim tam skaitli $1\underbrace{0\ldots0}_{n\,\text{nulles}}$. Šo operāciju rezultātā A samazinās par lielumu

$$\begin{array}{r} 10000000...0 \\ -\quad 1\underbrace{00...0}_{n\,\text{nulles}} \\ \hline 99999\underbrace{00...0}_{n\,\text{nulles}} \end{array}$$

t.i., par lielumu, kas dalās ar 99999. Tātad arī jauniegūtais skaitlis A' dalās ar 99999, bet $A' < A$.

Ievērosim, ka skaitļa $1\underbrace{00\ldots0}_{n+5\ \text{nulles}}$ atņemšana līdzvērtīga cipara a pamazināšanai par 1, bet skaitļa $1\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{nulles}}$ pieskaitīšana līdzvērtīga cipara b palielināšanai par 1 (ja vien b nav 9; tad b kļūst par 0, un rodas pārnesums 1 uz piekto šķiru).

Aplūkojam vairākas iespējas.

1) $b \neq 0$, $b \neq 9$. Tad b kā bijis, tā paliek nenulles cipars, bet a varbūt no nenulles cipara kļūst par 0; citi cipari nemainās, tātad nenulles ciparu skaits nepieaug.

2) b = 9. Tad b no nenulles cipara kļūst par 0, un pārnesumu rezultātā augstākais viena 0 kļūst par 1. Tā kā a izmaiņu rezultātā nenulles ciparu skaits nepieaug, tad arī šajā gadījumā kopējais nenulles ciparu skaits nepieaug.

3) b = 0. Tādā gadījumā atkārtojam minēto operāciju vēl un vēl, kamēr tā izpildīta a reizes. Rezultātā a no nenulles cipara kļuvis par 0, bet b – no 0 par nenulles ciparu a. Tātad nenulles ciparu skaits ir tāds pats kā sākotnējā skaitā A.

Visos gadījumos esam ieguvuši skaitli ar ne vairāk kā 4 nenulles cipariem, kas dalās ar 99999 un ir mazāks par A. Kā iepriekš atzīmēts, līdz ar to iegūta pretruna un uzdevums atrisināts.

5.6.B3. Atbilde: 4 pirmskaitļi.

Kā redzams A192. zīm., vienā rindā (vidējā) tiešām var būt 4 pirmskaitļi.

5	6	7	8	9
4	1	18	17	10
3	2	19	16	11
24	23	20	15	12
25	22	21	14	13

A192. zīm.

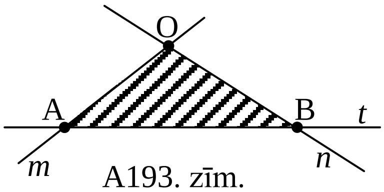
Ja rūtiņas izkrāso šaha galdiņa kārtībā, tad skaidrs, ka pāra skaitļi nonāk vienas krāsas rūtiņās, bet nepāra – otras. Tā kā rindā ir vismaz 2 baltas un 2 melnas rūtiņas, tad katrā rindā ir vismaz 2 pāra skaitļi. Bet ir tikai viens pāra pirmskaitlis. Tātad visi 5 skaitļi rindā nevar būt pirmskaitļi.

5.6.B4. Kā zināms, 99–stūra iekšējo leņķu summa ir $180^\circ \cdot (99-2) = 97 \cdot 180^\circ$. Trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°. Tā kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem visu dalījuma trijstūru visas virsotnes atrodas 99-stūra virsotnēs, tad visu dalījuma trijstūru visu leņķu summa ir vienāda ar 99-stūra visu leņķu summu. Tāpēc dalījuma trijstūru skaits ir $(97 \cdot 180^\circ) : 180^\circ = 97$.

Katra 99-stūra mala ir mala kādam no dalījuma trijstūriem. Skaidrs, ka nevienam trijstūrim visas malas nav 99-stūra malas. Tātad katram trijstūrim 0, 1 vai 2 malas ir 99-stūra malas. Tā kā 99 malas „jāsadala” pa 97 trijstūriem un katram trijstūrim „pienākas” ne vairāk par 2 malām, tad ir vismaz 99 – 97 = 2 trijstūri, katram no kuriem 2 malas ir 99-stūra malas. Skaidrs, ka tie abi ir vienādsānu. Ja ir vēl trešais šāds trijstūris, tad tas arī ir vienādsānu. Tātad atliek apskatīt gadījumu, kad ir tieši 2 trijstūri, kam divas malas ir 99-stūra malas, bet katram no pārējiem trijstūriem tieši viena mala ir 99-stūra mala.

Tagad viegli saprast, ka tam trijstūrim, kas satur regulārā 99-stūra centru, divas malas ir vienādas diagonāles, tāpēc tas ir vienādsānu.

5.6.B5. Apzīmēsim ar t vienu no novilktajām 30 taisnēm. Apskatīsim visus novilkto taišņu krustpunktus, kas neatrodas uz taisnes t; atradīsim starp tiem taisnei t tuvāko krustpunktu O. Pieņemsim, ka tajā krustojas taisnes m un n (skat. A193. zīm.).



A193. zīm.

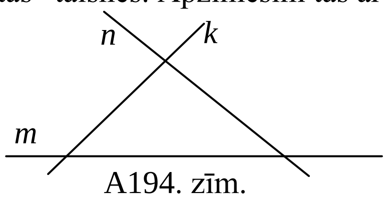
Iesvītroto trijstūri nekrusto neviena taisne. Tiešām, ja kāda taisne to krustotu, tad tā krustotu vai nu malu OA, vai malu OB, un tad O nebūtu taisnei t vistuvākais krustpunkts. Tātad „blakus" taisnei t noteikti atrodas vismaz viens trijstūris. Tas attiecas uz katru no 30 taisnēm. Tā kā katrs trijstūris atrodas blakus trim taisnēm, tad trijstūru ir vismaz $\frac{30}{3}=10$.

Lai atrisinātu uzdevuma otro daļu, ievērosim, ka taisnei t ir divas puses. Mēs varētu apskatīt taisnei t tuvāko krustpunktu gan vienā, gan otrā pusē un līdzīgi kā iepriekš iegūt, ka katrai taisnei blakus ir vismaz 2 trijstūri; tad kopējais trijstūru skaits būtu vismaz $\frac{30\cdot 2}{3}=20$.

Šai spriedumā ir viens defekts: var gadīties, ka vienā pusē taisnei t krustpunktu vispār nav (tātad nav arī tuvākā krustpunkta). Šo defektu izlabosim sekojoši: pierādīsim, ka **tādu „sliktu" taišņu t nav vairāk par divām**. Tad pārējām 28 taisnēm katrai blakus ir vismaz 2 trijstūri, divām sliktajām taisnēm – vismaz pa 1 trijstūrim, un trijstūru kopējais skaits nav mazāks par $\frac{2\cdot 28+1\cdot 2}{3}=\frac{58}{3}=19\frac{1}{3}$.Tā kā trijstūru skaits ir naturāls skaitlis, tad tas nav mazāks par 20.

Atliek pierādīt augstāk izcelto apbalvojumu.

Pieņemsim pretējo – ir 3 „sliktas" taisnes. Apzīmēsim tās ar m, n, k (skat. A194. zīm.)



A194. zīm.

Ja visi krustpunkti atrodas vienā pusē katrai no šīm taisnēm, tad tiem visiem jāatrodas kādā no tiem 7 apgabaliem, kuros tās sadala plakni (ieskaitot arī šo apgabalu robežas). Tomēr viegli pārbaudīt, ka nevar novilkt pat vēl vienu taisni, lai šis nosacījums izpildītos. Līdz ar to pierādīts, ka 3 sliktu taišņu nav. Uzdevums atrisināts.

5.6.B6. Pareizi spēlējot, uzvar pirmais spēlētājs. Ar savu pirmo gājienu viņš apēd 2 konfektes, atstājot $13\cdot 7+7$ konfektes. Tad ir spēkā sekojoši fakti (to pārbaude prasa tikai rūpīgu visu gadījumu izskatīšanu, un Profesors Cipariņš atstāj to izdarīt patstāvīgi).

I Pirmais spēlētājs ar savu gājienu vienmēr var panākt vienu no šādām situācijām:

a) palikušo konfekšu skaits dalās ar 13,

b) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 3, un otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu nevar ēst 3 konfektes,

c) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 5, un otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu nevar ēst 5 konfektes,

d) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 7.

II Otrais spēlētājs ar savu gājienu nekad nevar panākt, lai palikušo konfekšu skaits dalītos ar 13 bez atlikuma.

No II seko, ka otrais spēlētājs nevar panākt ,lai palikušo konfekšu skaits būtu 0; tad tas dalītos ar 13 bez atlikuma. Tātad otrais spēlētājs nevar uzvarēt. Tā kā augstākais pēc 100 gājieniem visas konfektes būs apēstas, tad uzvar pirmais spēlētājs, jo kāds noteikti uzvarēs.

6. 31. mācību gads (2004/ 2005)

6.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.1.A1. Kā zināms, naturāls skaitlis dalās ar 4 tad un tikai tad, kad tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. Iedomāsimies, ka mūsu meklējamie skaitļi, kam ir mazāk par 4 cipariem, papildināti ar nullēm skaitļa priekšā tā, lai iegūtu četrciparu skaitļus (piemēram, 17 vietā apskatām 0017). Apzīmēsim patvaļīgu meklējamo skaitli ar $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – cipari). Aplūkosim skaitļus no 0000 līdz 1999. Tad

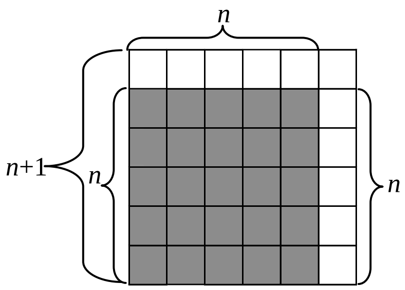
- a var pieņemt vērtības 0; 1 – skaitā divas,
- b var pieņemt vērtības 0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9 – skaitā 9,
- abu pēdējo ciparu veidotais skaitlis $\overline{cd}$ var pieņemt vērtības 00; 08; 12; 16; 20; 28; 32; 36; 52; 56; 60; 68; 72; 76; 80; 88; 92; 96 – skaitā 18 (apskatām visus divciparu skaitļus, kas dalās ar 4, un izsvītrojam no tiem tos, kas satur ciparu 4).

Katra pieļaujamā a vērtība var kombinēties ar katru pieļaujamo b vērtību un ar katru pieļaujamo $\overline{cd}$ vērtību. Iegūstam $2 \cdot 9 \cdot 18 = 324$ iespējas. No tām jāatskaita ciparu virkne 0000, kas attēlo skaitli 0, un tām jāpieskaita vēl viens skaitlis – 2000. Tātad atbilde ir 324.

6.1.A2. Ievērosim, ka patvaļīgam naturālam skaitlim *n* pastāv vienādība

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1 \qquad (*)$$

(Šo rezultātu iegūst arī ģeometriski, skaitot baltās rūtiņas divu kvadrātu „starpībā", skat. A195. zīm.)



A195. zīm.

Apskatīsim vispirms izteiksmi

$S = 2004^2 - 2003^2 + 2002^2 - 2001^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$, kas no publicētās atšķiras ar vienu locekli: 2^1 vietā ir 2^2.

No (*), pakāpeniski ievietojot *n*=1; 3; 5; 7; ...; 1999; 2001, 2003 iegūstam

$$2^2 - 1^2 = 3$$
$$4^2 - 3^2 = 7$$
$$6^2 - 5^2 = 11$$
$$\ldots$$
$$2002^2 - 2001^2 = 4003$$
$$2004^2 - 2003^2 = 4007$$

Mums tātad jāaprēķina summa ar 1002 saskaitāmajiem

A = 3 + 7 + 11 + 15 + ... + 4003 + 4007.

Šajā summā katrs nākošais saskaitāmais ir par 4 lielāks nekā iepriekšējais. Tiešām, ja izteiksmē 2n + 1 ievieto n = a un n = a + 2, tad

[2(a + 2) + 1] - [2a + 1] = 2a + 5 – 2a – 1 = 4

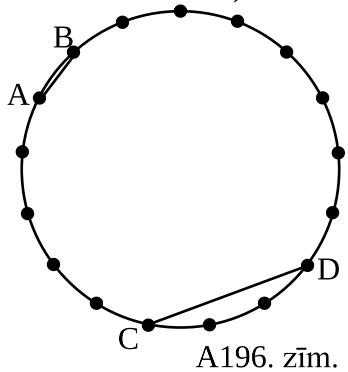
Tātad, uzrakstot A apgrieztā secībā, katrs nākošais saskaitāmais ir par 4 mazāks nekā iepriekšējais.

Uzrakstām summu A abos minētajos veidos:

$$A = 3 + 7 + 11 + ... + 4003 + 4007$$
$$A = 4007 + 4003 + 3999 + ... + 7 + 3 \qquad (**)$$

No augšminētā izriet, ka katru divu viens zem otra uzrakstīto saskaitāmo summa ir viena un tā pati, proti, 4010. Tāpēc, saskaitot abas vienādības (**) pa kolonnām, iegūstam $2A = 4010 \cdot 1002$, tātad $A = 2005 \cdot 1002 = 2009010$. Tā kā uzdevumā dotajā izteiksmē, salīdzinot ar mūsu aplūkoto, locekļa 2^2 vietā ir 2, tad aprēķināmās izteiksmes vērtība ir A – 2 = 2009008.

6.1.A3. Atcerēsimies, ka vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas. Apskatāmās lauztās līnijas posmi ir hordas, kam atbilst 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 mazie loki (piem., A196. zīm. AB atbilst viens mazais loks, bet CD – 3 mazie loki).



A196. zīm.

No šejienes seko, ka lauztās līnijas posmiem ir tikai 8 iespējami dažādi garumi. Tā kā šo posmu ir 17 un $17 > 8 \cdot 2$, tad kādam garumam jābūt sastopamam vairāk nekā 2 reizes, t.i., vismaz 3 reizes.

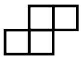
6.1.A4. Apzīmēsim Jānīša uzrakstītos skaitļus ar a; b; c; d; e. Tad (a + b + c) + (a + d + e) + (b + a + c) + (b + d + e) kā 4 pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Bet pēc pārveidojumiem iegūstam, ka šī izteiksme ir (a + b) + 2(a + b + c + d + e).
Tā kā 2(a + b + c + d + e) – pāra skaitlis, tad a + b arī ir pāra skaitlis. Tātad a un b paritātes ir vienādas. Līdzīgi pierāda, ka jebkuru divu no skaitļiem a; b; c; d; e paritātes ir vienādas. Ja tie visi būtu nepāra skaitļi, rastos pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad tie visi ir pāra skaitļi.

6.1.A5. Ja A satur ciparu 0, tad tā nospiedums ir 0. Ja A satur ciparu 5 un kaut vienu pāra ciparu, tad tā nospiedums ir 0; tātad ja A nospiedums nav 0 un tas satur ciparu 5, tad A nav vairāk par 5 cipariem.
Apskatām skaitļus, kam visi cipari dažādi un kas nesatur ne ciparu 0, ne ciparu 5. Ja tiem ir 8 cipari, tad to ciparu reizinājums ir $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 72576$; šī skaitļa ciparu reizinājums dalās ar 10, tātad nospiedums būs 0. Apskatām šādus 7-ciparu skaitļus; skaidrs, ka „atmestais" cipars nav 1, citādi nospiedums nemainītos un joprojām būtu 0. Atmetot ciparu 2, 7-ciparu skaitļa ciparu reizinājums būs $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 36288$, tā ciparu reizinājums – 2304, tātad nospiedums būs 0. „Atmetot" ciparu 3, 7-ciparu skaitļa ciparu reizinājums būs $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 24192$, tā ciparu reizinājums – 144, tā ciparu reizinājums – 16, tā ciparu reizinājums – 6. Tātad sākotnējā skaitļa nospiedums nav 0. Skaidrs, ka lielākais no šādiem skaitļiem ir **9876421**.
„Atmetot" kādu no cipariem 9; 8; 7; 6; 4 un tā vietā lietojot 3, iegūsim mazāku skaitli. Tātad izceltais skaitlis ir uzdevuma atbilde.

6.1.A6. Apzīmēsim draudzību skaitu starp zēnu un meiteni ar d, zēnu skaitu ar z un meiteņu skaitu ar m. Tad d = 3z, jo katrs zēns draudzējas ar 3 meitenēm. Līdzīgi d = 3m, jo katra meitene draudzējas ar 3 zēniem. Tātad 3z = 3m; tātad z = m.

B GRUPA

6.1.B1. Ievērosim, ka no 1 līdz 64 ieskaitot ir tieši

16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 0 (tie ir skaitļi 4; 8; 12; ...; 60; 64)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 1 (tie ir skaitļi 1; 5; 9; ...; 57; 61)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 2 (tie ir skaitļi 2; 6; 10; ...; 58; 62)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 3 (tie ir skaitļi 3; 7; 11; ...; 59; 63)
Ievērosim arī, ka vairāku skaitļu summa dalās ar 4 tad un tikai tad, ja ar 4 dalās to atlikumu summa, kurus iegūst, šos skaitļus katru atsevišķi dalot ar 4.
Katrā A197. zīmējuma rūtiņā ierakstīts skaitlis 0; 1; 2 vai 3; katra veida rūtiņu ir tieši 16.
Viegli pārbaudīt, ka katrā  tipa figūrā (arī pagrieztā vai spoguļattēlā) ierakstīto skaitļu summa dalās ar 4. Ja mēs ierakstīsim rūtiņās dažādus skaitļus no 1 līdz 64, kas dod tādus atlikumus, kādi redzami A197. zīm., iegūsim vajadzīgo.

0	3	2	1	0	3	2	1
0	3	2	1	0	3	2	1
2	1	0	3	2	1	0	3
2	1	0	3	2	1	0	3
0	3	2	1	0	3	2	1
0	3	2	1	0	3	2	1
2	1	0	3	2	1	0	3
2	1	0	3	2	1	0	3

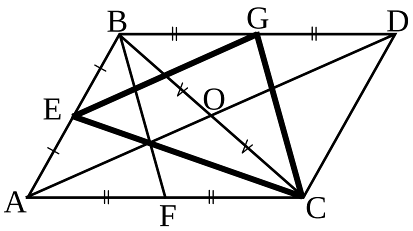
A197. zīm.

6.1.B2. Viegli pārbaudīt, ka visiem *a* pastāv vienādības

$$a^2+(a+1)^2+a^2\cdot(a+1)^2=a^2+(a^2+2a+1)+a^2\cdot(a^2+2a+1)=a^2+(a^2+a+1)+a+$$
$$+a^2(a^2+a+1)+a^2\cdot a=(a^3+a^2+a)+(a^2+a+1)+a^2(a^2+a+1)=$$
$$=(a^2+a+1)(a+1+a^2)=(a^2+a+1)^2$$

Ievietojot a = 2004, iegūstam: $2004^2+2005^2+2004^2\cdot 2005^2=(2004^2+2004+1)^2$

6.1.B3. Tā kā 4 + 4 = 8, 4 + 10 = 14, 10 + 10 = 20, tad ir vismaz viena 4 cm gara mediāna un vismaz viena 10 cm gara mediāna. Pierādīsim, ka katru divu mediānu garumu summa ir lielāka par trešās mediānas garumu. No tā sekos, ka trešās mediānas garums nav 4 cm (jo 4 + 4 < 10); tātad tas ir 10 cm.



A198. zīm.

Papildinām ΔABC līdz paralelogramam ABDC ar diagonāļu krustpunktu O. Tad O ir BC viduspunkts, tātad AO ir ΔABC mediāna pret malu BC. Atzīmējam malu AB, BD, AC viduspunktus E, G, F. tad EG ir ΔABD viduslīnija, tāpēc $EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(2AO)=AO$.

Tā kā $\Delta ABC=\Delta DCB$ (mmm), tad CG = BF (vienādos trijstūros atbilstošās mediānas ir vienādas). Redzam, ka ΔEGC malas vienādas ar ΔABC mediānām; no tā seko vajadzīgais, jo katrā trijstūrī (tātad arī ΔEGC) katru divu malu garumu summa lielāka par trešās malas garumu.

6.1.B4. a) nē, ne noteikti. Izvietosim zinātniekus pa apli un pieņemsim, ka katrs ir dzirdējis tos 5 zinātniekus, kas atrodas tieši aiz viņa pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Viegli pārbaudīt, ka nav tādu zinātnieku, kas abi būtu dzirdējuši viens otru.

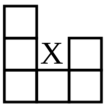
b) jā, noteikti. Ja katrs zinātnieks noklausījies 6 kolēģus, tad pavisam notikušas $6 \cdot 12 = 72$ noklausīšanās. No 12 zinātniekiem var izveidot 66 pārus (katru zinātnieku var ņemt pārī ar 11 citiem, bet skaitlis $12 \cdot 11$ jādala ar 2, jo pāri (A,B) un (B,A) ir viens un tas pats pāris). Uz šiem 66 pāriem attiecas 72 noklausīšanās. Tā kā 72 > 66, tad uz kādu pāri attiecas vairāk nekā viena noklausīšanās. Šajā pārī abi zinātnieki dzirdējuši viens otru.

6.1.B5. Pieņemam, ka rūtiņas malas garums ir 1.

Atbilde. Āķos var sagriezt tos un tikai tos taisnstūrus, kam vienlaicīgi ir spēkā šādi nosacījumi: a) m·n dalās ar 12, b) vai nu m, vai n dalās ar 4, c) ne m, ne n nav ne 1, ne 2, ne 5.

Risinājums. Skaidrs, ka ne taisnstūra garums, ne platums nevar būt ne 1, ne 2, jo neviens āķis neievietojas tādā taisnstūrī. Viegli pārbaudīt, ka ne platums, ne garums nevar būt arī 5 (analizējam visas iespējas, kā varētu mēģināt aizpildīt taisnstūri, sākot no malas ar garumu 5).

Turpmāk uzskatīsim, ka ir m rindiņas, n kolonnas un ne m, ne n nav ne 1, ne 2, ne 5.



A199. zīm.

Ar X apzīmēto rūtiņu sauksim par āķa centru. Skaidrs, ka katra āķa A centru aizpilda kāds cits āķis B. Acīmredzami, ka tad savukārt āķa B centru aizpilda āķis A. Tātad āķi apvienojas pa pāriem, un to skaitam jābūt pāra skaitlim. Tā kā vienā āķī ir 6 rūtiņas, tad taisnstūra rūtiņu skaitam jādalās ar 12. Pastāv 2 iespējas:

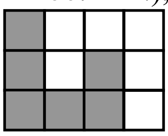
a) viens no skaitļiem m un n dalās ar 4,

b) neviens no skaitļiem m un n nedalās ar 4, bet tie abi ir pāra skaitļi.

Parādīsim, ka a) gadījumā taisnstūri var sagriezt āķos. Pastāv divi apakšgadījumi:

a1) viens no skaitļiem n un m dalās ar 3, bet otrs – ar 4.

Tad taisnstūri var sagriezt mazākos taisnstūros ar izmēriem 3×4. Tā kā katru 3×4 taisnstūri var sagriezt divos āķos (skat. A200. zīm.), vajadzīgais pierādīts.



A200. zīm.

a2) viens no skaitļiem m un n dalās ar 12 (pieņemsim, ka n dalās ar 12). Atceramies, ka $m \neq 1$, $m \neq 2$, $m \neq 5$. Pierādīsim, ka m var izteikt kā tādu saskaitāmo summu, katrs no kuriem ir vai nu 3, vai 4 daudzkārtnis.

$$4 = 4 \cdot 1$$
$$6 = 3 \cdot 2$$
$$7 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1$$
$$8 = 4 \cdot 2$$

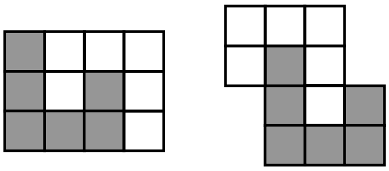
Tā 9 = 6 + 3, 10 = 7 + 3, 11 = 8 + 3, tad vajadzīgā veidā var izteikt arī 9; 10; 11. Tā kā 12 = 9 + 3, 13 = 10 + 3 un 14 = 11 + 3, tad vajadzīgā veidā var izteikt arī 12; 13; 14, utt.

Tātad apskatāmo taisnstūri var sagriezt strēmelēs, kuru platums ir n, kas dalās ar 12, bet augstums ir vai nu 3, vai 4. Skaidrs, ka katru šādu strēmeli var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 3×4, bet katru šādu taisnstūri var sagriezt āķos. Vajadzīgais pierādīts.

Tagad pierādīsim, ka b) gadījumā taisnstūri āķos sagriezt nevar. Līdz ar to uzdevums būs atrisināts.

Pieņemsim pretējo – taisnstūri izdevies sadalīt āķos.

Risinājuma sākumā mēs atzīmējām, ka āķi apvienojas pa pāriem, aizpildot viens otra centru. Šī apvienošanās var notikt divos veidos:



A201. zīm.

Lai arī kā novietotu jebkuru no šiem pāriem, pastāv viena no 2 iespējām:

I) pāris satur 4 kolonnas, katrā pa 3 rūtiņām, un 3 vai 4 rindiņas, katrā pa 2 vai 4 rūtiņām,

II) pāris satur 4 rindiņas, katrā pa 3 rūtiņām, un 3 vai 4 kolonnas, katrā pa 2 vai 4 rūtiņām.

Ja pavisam būtu pāra skaits šādu pāru, tad kopējais rūtiņu skaits dalītos ar $12 \cdot 2 = 24$. Tad vai nu m, vai n dalītos ar 4. Mēs apskatām gadījumu, kad ne m, ne n nedalās ar 4, tātad A201. zīmējumā attēloto pāru ir nepāra skaits. Tāpēc vai nu I, vai II tipa pāru ir nepāra skaits; varam pieņemt, ka I veida pāru ir nepāra skaits. Izkrāsosim taisnstūrī katru ceturto kolonnu melnu. Tad **kopējais melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis** (jo katra taisnstūra kolonna satur pāra skaitu melno rūtiņu). Bet katrs I veida pāris satur 3 melnas rūtiņas (tieši viena no tā četrām kolonnām ir melna), katrs II veida pāris satur pāra skaitu melno rūtiņu (katra tā kolonna satur 0, 2 vai 4 melnas rūtiņas). Tā kā I veida pāru ir nepāra skaits, secinām: **kopējais melno rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis** (nepāra skaits trijnieku un kaut kāds skaits saskaitāmo 0; 2; 4 dod summā pāra skaitli).

Pretruna starp abiem izceltajiem apgalvojumiem parāda, ka mūsu pieņēmums par sagriešanas iespējamību b) gadījumā ir nepareizs.

6.1.B6. Apskatām skaitļus

$$\begin{gathered} 32 \\ 3232 \\ 323232 \\ 32323232 \\ \ldots \\ \underbrace{323232323232\ldots32}_{n+1 \text{ ciparu grupa "32"}} \end{gathered}$$

Dalām katru no šiem skaitļiem ar n ar atlikumu. Tā kā, dalot ar n, iegūtajam atlikumam iespējamas tikai n dažādas vērtības (tās ir 0; 1; 2; ...; n-1), bet apskatāmo skaitļu ir n + 1 un n + 1 > n, tad kaut kādi divi apskatāmie skaitļi noteikti dos vienādus atlikumus, dalot ar n. Tad šo skaitļu starpība dalās ar n. Ievērojam: ja abi minētie skaitļi ir $\underbrace{3232\ldots32}_{i \text{ ciparu grupas "32"}}$ un $\underbrace{3232\ldots32}_{j \text{ ciparu grupas "32"}}$, kur i > j, tad starpība (kas dalās ar n) ir $S = \underbrace{3232\ldots32}_{i-j \text{ grupas "32"}}\underbrace{0000\ldots00}_{2j \text{ nulles}}$.

Ievērojam, ka $S = \underbrace{3232\ldots32}_{i-j \text{ grupas "32"}} \cdot 10^{2j}$. Tā kā n nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad 10^{2j} nav nekādas nozīmes tai apstāklī, ka S dalās ar n; ar n dalās reizinātājs $\underbrace{3232\ldots32}_{i-j \text{ grupas "32"}}$. Bet šis reizinātājs ir interesants skaitlis.

6.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.2.A1. <u>Atbilde</u>: nē, tā nevar gadīties.

Risinājums. Apskatāmo vienādojumu saknes ir: $\left(-\frac{b}{a}\right)$, $\left(-\frac{c}{b}\right)$, $\left(-\frac{d}{c}\right)$, $\left(-\frac{e}{d}\right)$ un $\left(-\frac{a}{e}\right)$.

Viegli pārbaudīt, ka to reizinājums ir (-1). Bet, sareizinot skaitļus, kas atrodas starp (-1) un 1, atkal iegūst skaitli, kas atrodas starp (-1) un 1.

6.2.A2. Atbilde: nē, neeksistē.

1. risinājums. Pastāv 4 iespējas:

a) x – pāra skaitlis, y – nepāra skaitlis,

b) x – nepāra skaitlis, y – pāra skaitlis,

c) x un y – abi pāra skaitļi,

d) x un y – abi nepāra skaitļi.

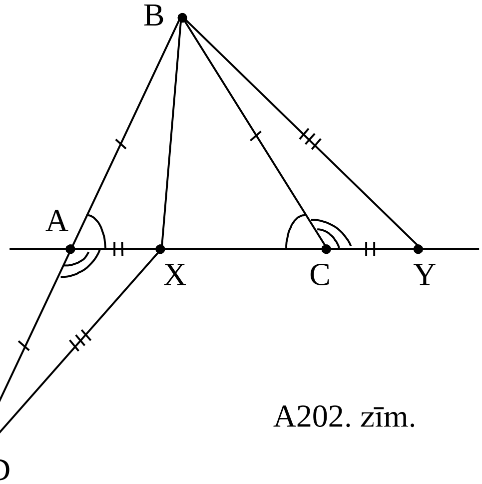
Atbilstoši šīm iespējām eksistē tādi veseli skaitļi n un k, ka

	x	y	x^2	y^2	x^2+y^2
a)	2n	2k+1	$4n^2$	$4k^2+4k+1$	$4(n^2+k^2+k)+1$
b)	2n+1	2k	$4n^2+4n+1$	$4k^2$	$4(n^2+n+k^2)+1$
c)	2n	2k	$4n^2$	$4k^2$	$4(n^2+k^2)$
d)	2n+1	2k+1	$4n^2+4n+1$	$4k^2+4k+1$	$4(n^2+n+k^2+k)+2$

No tabulas pēdējās kolonnas redzam, ka $x^2 + y^2$, dalot to ar 4, kā atlikumu var dot 0, 1 vai 2. Bet 1003 : 4 = 250 atl.3. Tātad 1003 nevar izsacīt prasītajā formā.

2. risinājums. Tā kā pie naturāliem x un y $x^2 > 0$ un $y^2 > 0$, tad x^2 nevar būt lielāks par 1003; tātad x^2 var pieņemt tikai vērtības no $1^2 = 1$ līdz $31^2 = 961$ (jo $32^2 = 1024 > 1003$ un pie $x > 32$ būs $x^2 > 32^2 = 1024 > 1003$). Pārbaudot visas (31) vērtības (x = 1; x = 2; ...; x = 31), nevienā gadījumā izteiksme $1003 - x^2$ neiznāk naturāla skaitļa kvadrāts. (Pārbaudi izdarīt patstāvīgi.) Iegūstam, ka 1003 nav divu naturālu skaitļu kvadrātu summa.

6.2.A3. Uz stara BA atliekam AD = BC. Ievērojam, ka ΔABC – vienādsānu, tāpēc $\angle BAC = \angle BCA$; tāpēc arī $\angle XAD = \angle YCB$. Iegūstam, ka $\Delta XAD = \Delta YCB$ (pazīme mlm). Tātad DX = BY. Trijstūrī BXD pastāv nevienādība BD < BX + XD, no kurienes seko BA + AD < BX + XD jeb BA + BC < BX + BY, k.b.j.



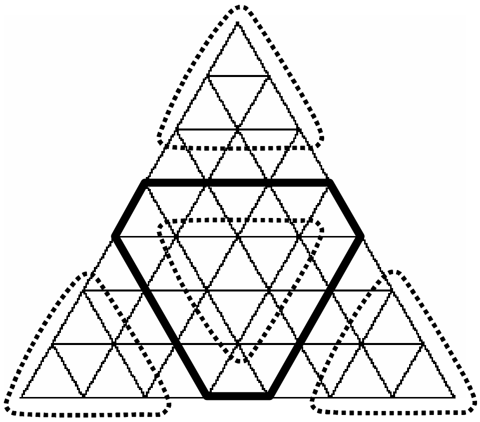
A202. zīm.

6.2.A4. Pirmais Andra gājiens parādīts A203. zīm. Atlikušos gājienus var izdarīt tikai četru apvilkto vienādo trijstūru iekšpusē. Andris domās apzīmē šos trijstūrus ar A, B, C, D un tālāk izmanto šādu stratēģiju:

a) ja Bruno izdara gājienu trijstūrī A, tad Andris izdara tādu pašu gājienu trijstūrī B,

b) ja Bruno izdara gājienu trijstūrī C, tad Andris izdara tādu pašu gājienu trijstūrī D.

Tā kā Andris vienmēr atjauno apgabalu (A un B) resp. (C un D) "vienādību" spēles mērķiem, bet Bruno to izjauc, tad Andrim gājienu nepietrūks. Tā kā kādam gājienu noteikti pietrūks, tad to pietrūks Bruno.



A203. zīm.

6.2.A5. Uzskatīsim attālumu starp diviem blakus esošiem skolēniem par 1 vienību. Katra gājiena rezultātā notiek pārvietošanās kopā par 2 vienībām. Pirmajā pozīcijā esošajam skolēnam jāpārvietojas vismaz par 7 vienībām, otrajā vietā esošajam – vismaz par 8 vienībām, trešajā vietā esošajam – vismaz par 9 vienībām, ceturtajā vietā esošajam – vismaz par 10 vienībām. (Līdzīgi izspriežam par 8., 7., 6., 5. vietās esošajiem skolēniem.) Tātad kopā jāpārvietojas vismaz par $2(7+8+9+10)=2\cdot 34$ vienībām. Tātad nepieciešami vismaz $\frac{2\cdot 34}{2}=34$ gājieni.

6.2.A6. Atbilde: 1 vai 2.

Risinājums. To, ka kvadrātos var būt 1 vai 2 dažādi melno rūtiņu daudzumi, skat. A204. zīm.

x							
	x						
		x					
			x				
				x			
					x		
						x	
							x

x							
					x		
		x					
						x	
				x			
	x						
							x
			x				

A204. zīm.

Pierādīsim, ka divos kvadrātos, kas saskaras tikai ar vienu stūri, melno rūtiņu daudzumi noteikti ir vienādi. Tad, tā kā a = c un b = d (skat. A205. zīm.), starp skaitļiem a, b, c, d ir 2 dažādi (ja $a \neq b$) vai arī tie visi ir vienādi (ja a = b); tātad noteikti x = 2 vai x = 1.

a	b
d	c

A205. zīm.

I	II
IV	III

A206. zīm.

Pieņemsim, ka I kvadrātā ir a melnas rūtiņas. Lai augšējās 4 rindiņās būtu pa melnai rūtiņai, II kvadrātā jābūt (4 - a) melnām rūtiņām. Lai labējās 4 kolonnās būtu pa melnai rūtiņai, III kvadrātā jābūt 4 -(4 -a) = a melnām rūtiņām. Tātad I un III kvadrātā melno rūtiņu daudzumi ir vienādi. Līdzīgi pierāda vajadzīgo par II un IV kvadrātu.

B GRUPA

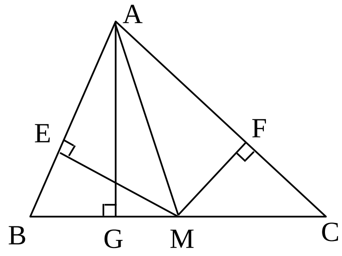
6.2.B1. Zēns, kuram uz krūtīm ir cipars 3, pietupstas; viņam blakus vienā pusē nostājas abi pārēji zēni. Izveidojas skaitlis 3^{14} vai 3^{41}, kas, protams, dalās ar 9.

6.2.B2. Nē, neeksistē. Skat. A grupas 2. uzdevuma pirmo atrisinājumu. Ievērojiet, ka 2. atrisinājumā piedāvātais risināšanas ceļš šoreiz praktiski nav lietojams.

6.2.B3. Figūras S laukumu apzīmēsim ar L(S). Acīmredzot L(ABC) = L(ABM) + L(ACM), no kurienes seko $\frac{1}{2}BC \cdot AG = \frac{1}{2}AB \cdot ME + \frac{1}{2}AC \cdot MF$ jeb

$$BC \cdot AG = AB \cdot ME + AC \cdot MF \quad (*)$$

Tā kā $BC > AB$ un $BC > AC$, tad, aizstājot (*) AB un AC ar BC, iegūstam $BC \cdot AG < BC \cdot ME + BC \cdot MF$ un, saīsinot ar BC, AG < ME + MF, k.b.j.



A207. zīm.

6.2.B4. Atbilde**:** nē, ne vienmēr.

Pieņemsim, ka sākumā uz tāfeles ir divi skaitļi, kuru starpība ir nepāra skaitlis. Pierādīsim, ka šādi divi skaitļi uz tāfeles būs vienmēr. Ja tas būs pierādīts, tad, piemēram, no situācijas 2; -1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 nevar iegūt 10 nulles.

Skaidrs, ka minētā īpašība saglabājas, visus 10 skaitļus samazinot par 1. Pieņemsim, ka minētie skaitļi pirms gājiena "3 zīmju maiņa" ir x un y. Pēc šāda gājiena šie skaitļi var kļūt par: x un y – starpība x-y nemainās;

(-x) un (-y) – starpībai mainās tikai zīme, tāpēc tā paliek nepāra skaitlis;

-x un y – starpība kļūst par (-x) – y = (x - y) - 2x, tātad joprojām paliek nepāra skaitlis;

x un –y – starpība kļūst x - (-y) = x + y = (x - y) + 2y, tātad joprojām paliek nepāra skaitlis.

6.2.B5. Augstākais divi skolnieki, pēdējo reizi sasnieguši rindas galu, var šajā galā palikt; citiem no turienes jāaiziet, lai atbrīvotu vietu nākošajiem. Turklāt "atbrīvošanas" procesā diviem skolēniem jāsper vismaz pa 1 solim, diviem – vismaz pa diviem soļiem, diviem – vismaz pa 3 soļiem (citādi nākošajiem, kas "atbrīvos" galus, nebūs, kur novietoties). Tāpēc kopā ar A grupas 5. uzdevuma risinājumā uzskaitītajiem soļiem jāsper vismaz $2 \cdot 34 + 12 = 80$ soļi, un kopā nepieciešami vismaz 40 gājieni.

Pierādīsim, ka ar 40 gājieniem mērķis ir sasniedzams.

Apzīmējam skolēnus ar cipariem 1 2 3 4 5 6 7 8. Vispirms mainām 1 ar 2; 3; 4, pēc tam 2 ar 3; 4, pēc tam 3 ar 4. Šo 6 gājienu rezultātā 1; 2; 3; 4 ir bijuši pirmajā vietā un radusies situācija 4 3 2 1 5 6 7 8. Nākamajos 6 gājienos līdzīgi panākam, ka 5; 6; 7; 8 ir bijuši pēdējā vietā un radusies situācija 4 3 2 1 8 7 6 5. Pēc tam "nogādājam" pēdējā vietā 1, pēc tam 2, pēc tam 3, pēc tam 4; rodas situācija 8 7 6 5 1 2 3 4, un patērēti vēl 4 + 5 + 6 + 7 = 22 gājieni. Pēc tam vēl ar 6 gājieniem pakāpeniski "nogādājam" pirmajā vietā pēc kārtas 7; 6; 5. Kopā patērēti 6 + 6 + 22 + 6 = 40 gājieni.

6.2.B6. Piešķiram dažām rūtiņām vērtības, kā parādīts A208. zīm. Viegli pārbaudīt: lai kā taisnstūris ar izmēriem 1×4 būtu novietots kvadrātā, tajā ierakstītais rindiņas vai vertikāles numurs dod tādu pašu atlikumu, dalot ar 4, kādu dod visu taisnstūra rūtiņu vērtību summa, dalot to ar 4. Bet visu kvadrāta rūtiņu vērtību summa ir $10 \cdot 16 = 160$, tātad dalās ar 4. Tātad ar 4 dalās arī visu taisnstūros ierakstīto rindiņu/kolonnu numuru summa.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1.		1				1				1				1		
2.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
3.		3				3				3				3		
4.		0				0				0				0		
5.		1				1				1				1		
6.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
7.		3				3				3				3		
8.		0				0				0				0		
9.		1				1				1				1		
10.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
11.		3				3				3				3		
12.		0				0				0				0		
13.		1				1				1				1		
14.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
15.		3				3				3				3		
16.		0				0				0				0		

A208. zīm.

6.3. TREŠĀ NODARBĪBA

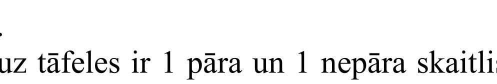
A GRUPA

6.3.A1. Atbilde: nē, nevar.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka tas iespējams. Apzīmēsim sākotnējos skaitļus ar *a, b, c* un *d*. Pēc izmaiņām Andra iegūtie skaitļi ir $\frac{11}{10}a$, $\frac{12}{10}b$, $\frac{9}{10}c$ un $\frac{8}{10}d$. Tātad Andra iegūto skaitļu reizinājums ir $\frac{11a}{10}\cdot\frac{12b}{10}\cdot\frac{9c}{10}\cdot\frac{8d}{10}=\frac{9504}{10000}abcd$.

Pēc uzdevuma jēgas ne *a*, ne *b*, ne *c*, ne *d* nav 0. Tāpēc $\frac{9504}{10000}abcd \neq abcd$. Tomēr, ja uz tāfeles būtu iegūti tādi paši skaitļi, kādi tur bija sākumā, tad šiem reizinājumiem būtu jāsakrīt. Iegūta pretruna.

6.3.A2. Jā, var. Skat., piem., A209. zīm.



A209. zīm.

6.3.A3. Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums. Sākotnēji uz tāfeles ir 1 pāra un 1 nepāra skaitlis. Ar vienu gājienu no tiem var iegūt vai nu atkal 1 pāra un 1 nepāra skaitli, vai arī 2 nepāra skaitļus. Savukārt no 2 nepāra skaitļiem noteikti iegūst 1 pāra un 1 nepāra skaitli. Tātad nav iespējams panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos 2 pāra skaitļi.

6.3.A4. Atbilde: 3.

Atrisinājums. Viegli saprast, ka ar 3 saskaitāmajiem var iztikt:
$2004 = 1000 + 1000 + 4 = 10^3 + 10^3 + 2^2$

Ja varētu iztikt ar diviem saskaitāmajiem, tad vismaz viens no tiem nepārsniegtu 1002. Apskatām sekojošu tabulu.

Naturālu skaitļu kvadrāti, kas nepārsniedz 1002	Naturālu skaitļu kubi, kas nepārsniedz 1002
1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 861; 900; 961	1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; 1000

Apskatot vienādojumu $x + y = 2004$ un ņemot x jebkuru skaitli no šīs tabulas, redzam, ka y neiznāk ne naturāla skaitļa kvadrāts, ne kubs. Tātad ar 2 saskaitāmajiem nepietiek.

6.3.A5. Atbilde: 16 konfektes.

Atrisinājums. Ja Andris izveido kaudzes, kas satur 1; 17; 33; 49 konfektes (tas ir iespējams, jo $1 + 17 + 33 + 49 = 100$), tad katrās divās kaudzēs konfekšu skaiti atšķiras viens no otra vismaz par 16, un tātad jebkuras Pētera izvēles gadījumā Andris apēdīs vismaz 16 konfektes.

Pieņemsim, ka Andris izveidojis kaudzes, kurās konfekšu daudzumi ir x; y; z; t, pie tam $x \le y \le z \le t$. Ja Andris varētu garantēt sev vairāk par 16 konfektēm, tad noteikti jāpastāv nevienādībām

$$x \ge 1;$$
$$y \ge x + 17 \text{, tātad } y \ge 18;$$
$$z \ge y + 17 \text{, tātad } z \ge 35;$$
$$t \ge z + 17 \text{, tātad } t \ge 52.$$

Iegūstam, ka $x + y + z + t \ge 1 + 18 + 35 + 52 = 106$ – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6.3.A6. Ja $0 < a < 1$, tad arī $0 < a^2 < 1$. Tāpēc $\{a^2\} - \{a\}^2 = a^2 - a^2 = 0 \ne \frac{1}{2004}$.

Ja $a = 1$, tad $\{a\} = \{a^2\} = 0$ un arī $\{a^2\} - \{a\}^2 \ne \frac{1}{2004}$.

Apskatīsim gadījumu $1 < a < 2$; apzīmēsim $a = 1 + x$. (Tad $x = \{a\}$). Iegūstam $a^2 = 1 + 2x + x^2$. Jo mazāks a, jo mazāks x; savukārt, jo mazāks x (pie $0 < x < 1$), jo mazāks $2x+x^2$. Tātad, jo mazāks a, jo mazāks $2x + x^2$. Mēs meklējam mazāko iespējamo a; ja atradīsim tādu a pie $2x + x^2 < 1$, tas būs meklējamais. Bet, ja $2x + x^2 < 1$, tad $\{a^2\} = 2x + x^2$, un iegūstam vienādojumu

$$2x + x^2 - x^2 = \frac{1}{2004}, \quad x = \frac{1}{4008}.$$

Viegli saprast, ka pie tāda x tiešām $2x + x^2 < 1$.

Tātad meklējamā *a* vērtība ir $1\frac{1}{4008}$.

B GRUPA

6.3.B1. Apzīmējam $2003 = x$. Tad apskatāmā izteiksme ir

$$(x+1)(x+3)^3 - (x+2)\cdot x^3 = (x+1)(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) -$$
$$-(x+2)x^3 = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 27x + x^3 + 9x^2 +$$
$$+27x + 27 - x^4 - 2x^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x+3)^3$$

Tā kā $2x + 3 = 4009$ – vesels skaitlis, vajadzīgais pierādīts.

6.3.B2. Apzīmējam skaitļus, kas uzrakstīti uz kartītēm, ar x_1, x_2, x_3, ..., x_9, pie tam tā, ka x_1 un x_2 pēdējie cipari ir dažādi. Apskatām šādas 10 izteiksmes:

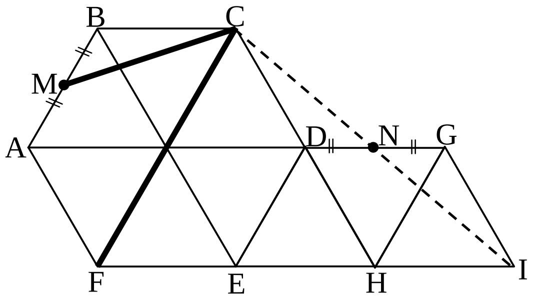
x_1
x_2
$x_1 + x_2$
$x_1 + x_2 + x_3$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$

Pastāv divas iespējas:

a) tām visām pēdējie cipari ir dažādi. Tā kā summu ir 10 un dažādu iespējamu ciparu arī 10, tad šai gadījumā sastopami visi iespējamie cipari, tai skaitā arī 0. Tā izteiksme, kuras pēdējais cipars ir 0, dalās ar 10.

b) ir divas izteiksmes, kurām pēdējie cipari ir vienādi. (Saskaņā ar konstrukciju tās nav x_1 un x_2.) Šo izteiksmju starpība S beidzas ar ciparu 0, tātad dalās ar 10. Bet šo izteiksmju starpība ir kāds no skaitļiem $x_1, x_2, ..., x_9$ vai dažu šo skaitļu summa (piemēram, $(x_1 + x_2) - x_1 = x_2$; $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_2) = = x_3 + x_4 + x_5$ utt.). Tātad arī šai gadījumā vajadzīgais pierādīts.

6.3.B3. Skat. A210. zīm. Ar tievām līnijām uzzīmētie 9 trijstūri visi ir vienādmalu, ABCDEF – regulārs sešstūris, M ir AB viduspunkts, N ir DG viduspunkts.



A210. zīm.

Viegli saprast, ka

1) $\Delta MBC = \Delta NDC$ (mlm)

2) FAMC = EDNI

3) C, N, I atrodas uz vienas taisnes (jo N kā paralelograma CDIG diagonāles DG viduspunkts ir arī otras tā diagonāles CI viduspunkts)

4) CF : FI = 2 : 3

Tāpēc uzdevumu var veikt, piemēram, tā: sagriezt ABCDEF pa biezajām līnijām, ΔMBC novietot ΔNDC vietā, bet četrstūri FAMC – četrstūra EDNI vietā, rezultātā iegūstot ΔCFI.

6.3.B4. To, ka skaitlis *y* stāv vietā, kurā jābūt skaitlim *x*, attēlosim ar $x \to y$. Tad

- tas, ka *x* stāv savā vietā, attēlojas ar x
- tas, ka *x* un *y* stāv viens otra vietā, attēlojas ar $x \leftrightarrows y$
- mums jāiegūst situācija $1 \; 2 \; 3 \; ... \; 100$

Apskatām kādu skaitli *x*, kas nav savā vietā; pieņemsim, ka skaitļa *x* vietā *y*, t.i., $x \to y$. Šķirosim divus gadījumus:

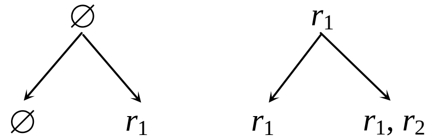
a) skaitļa *y* vietā stāv skaitlis *x*, t.i., $x \leftrightarrows y$. Apmaināmvietām *x* un *y*.

b) skaitļa *y* vietā stāv kāds skaitlis *z*, t.i., $x \to y \to z \to ...$. Novietojam skaitli *x* vietā, kur pašreiz ir *y*; skaitli *y* vietā, kur pašreiz ir *z*; skaitli *z* vietā, kur pašreiz ir *x*.

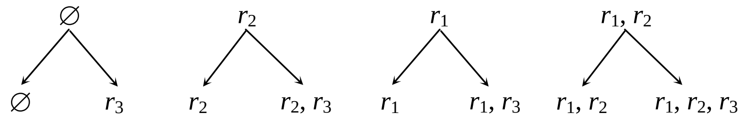
Gan vienā, gan otrā gadījumā vismaz divi skaitļi (x un y) nonāk savās vietās. Atkārtojam šādus gājienus, kamēr vien kāds skaitlis vēl nav savā vietā.
Sākumā ne vairāk kā 100 skaitļi atrodas „ne savās" vietās. Tā kā ar katru gājienu „nepareizi novietoto" skaitļu skaits samazinās vismaz par 2, tad augstākais pēc 50 gājieniem visi skaitļi būs savās vietās.

6.3.B5. Atbilde: $2^9 = 512$ apspriedes.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim šādu lemmu: no n rūķīšiem var izveidot 2^n dažādas grupas (ieskaitot grupu, kas nesatur nevienu rūķīti; apzīmēsim to ar $\varnothing$).
Ja n = 1, iespējamas 2 jeb 2^1 grupas: $\varnothing$ un r_1.
Ja n = 2, tad grupas var veidot sekojoši: vispirms izveidot grupu, izmantojot tikai vienu rūķīti un aizmirstot par otro, bet pēc tam šai grupai pēc mūsu izvēles vai nu pievienot, vai nepievienot otro rūķīti. Tā kā no katras „vecās" grupas rodas divas „jaunas", tad tagad grupu skaits būs divas reizes lielāks nekā viena rūķīša gadījumā, un tas būs $2^1 \cdot 2 = 2^2$:



Līdzīgi pie n = 3 grupu skaits būs divas reizes lielāks nekā pie n = 2, tātad tas būs $2^2 \cdot 2 = 2^3$:



Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.
Tagad pārejam pie uzdevuma atrisinājuma.

- 512 apspriedes var noorganizēt, piemēram, šādi: rūķītis r_1 piedalās visās apspriedēs, bet katrā apspriedē bez viņa piedalās cita no pārējiem 9 rūķīšiem izveidota grupa (saskaņā ar lemmu šādu grupu ir 2^9=512)
- Ievērosim, ka visas 1024 iespējamās rūķīšu grupas var sadalīt 512 pāros tā, ka vienā pārī ieejošām grupām nav kopīgu rūķīšu, bet kopā šīs abas grupas satur visus 10 rūķīšus. Šādi pāri ir, piemēram,

$\varnothing$ un $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$
r_1, r_3, r_7 un $r_2, r_4, r_5, r_6, r_8, r_9, r_{10}$
utt.
Ja G_1 un G_2 būtu vienā pārī ietilpstošās grupas un vienā apspriedē piedalītos G_1, bet otrā G_2, tad nebūtu izpildīts uzdevuma trešais nosacījums. Tātad no katra minētā pāra augstākais viena grupa var rīkot apspriedi. Tāpēc dažādu apspriežu nav vairāk kā minēto pāru, t.i., to nav vairāk par 512.

6.3.B6. Piemēram, var izvietot skaitļus tā, kā redzams A211. zīm.: katrā rindiņā un katrā kolonnā gan ir viens „8", viens „2" un seši „1". Tad katrā rindiņā un katrā kolonnā gan ierakstīto skaitļu reizinājums, gan summa ir 16.

8	2	1	1	1	1	1	1
1	8	2	1	1	1	1	1
1	1	8	2	1	1	1	1
1	1	1	8	2	1	1	1
1	1	1	1	8	2	1	1
1	1	1	1	1	8	2	1
1	1	1	1	1	1	8	2
2	1	1	1	1	1	1	8

A211. zīm.

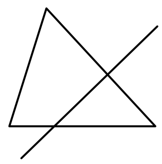
6.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.4.A1. Pieņemsim, ka Aija nosūtīja Paijai x kartiņas. Tad Aija Maijai nosūtīja (6 - x) kartiņas. Tātad Maija no Paijas saņēma 10 - (6 - x) = 4 + x kartiņas. Tātad Paija kopā nosūtīja vismaz 4 + x kartiņas, tātad arī saņēma vismaz 4 + x kartiņas. Tāpēc Paija no Maijas saņēma vismaz (x + 4) – x = 4 kartiņas. Tātad Maija un Paija sasvstarpēji nosūtīja vismaz $(4+x)+4=8+x\geq 8$ kartiņas, k.b.j.

6.4.A2. Tā kā a dalās ar b un 3b dalās ar b, tad arī 13 = a - 3b dalās ar b. Tāpēc vai nu b = 1 (tad a = 16), vai arī b = 13 (tad a = 52).

6.4.A3. Novelkot 3 taisnes, viens no radušamies apgabaliem ir trijstūris. Ja ceturtā taisne to nekrusto, trijstūris saglabājas arī pēc ceturtās taisnes novilkšanas. Ja ceturtā taisne to krusto, viena no daļām ir trijstūris (skat. A212. zīm.).



A212. zīm.

Līdzīgi izspriežam, ka vismaz viens trijstūris saglabājas arī pēc 5., 6., 7., 8., 9. taisnes novilkšanas.

6.4.A4. Ar pirmo svēršanu pārbaudām, vai „3”+„4”+„8”=„7”+„6”+„2”. Vienādības gadījumā šo atsvaru masas norādītas pareizi, un kļūda ir uz atsvara „1” vai „5”. Kura no šīm masām norādīta nepareizi, noskaidrojam, salīdzinot „1”+„4” ar „5”. Ja pirmajā svēršanā smagāks izrādījās svaru kauss ar atsvariem „3”, „4” un „8”, tad nepareizi uzrādīta viena no šīm masām. Kura – noskaidrojam otrajā svēršanā salīdzinot „3”+„5” ar „8”.

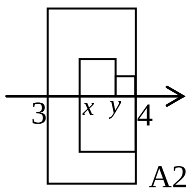
Ja pirmajā svēršanā smagāks izrādījās svaru kauss ar atsvariem „2”, „6” un „7”, tad nepareizi norādīta viena no šīm masām. Kura – noskaidrosim otrajā svēršanā salīdzinot „2”+„5” ar „7”.

6.4.A5. Plkst. 15^{00} pareizi ejoša pulksteņa minūšu rādītājs atpaliek no stundu rādītāja par piecpadsmit minūšu iedaļām. Pēc tam tas tuvojas stundu rādītājam, apsteidz to un atkal sāk tuvoties tam „no aizmugures”. Šajā posmā (līdz plkst. 16^{15}) minūšu rādītāja atpalicība no stundu rādītāja samazinās no 60 minūšu iedaļām līdz mazāk nekā 10 minūšu iedaļām. Tātad no plkst. 15^{00} līdz plkst. 16^{15} pareizi ejoša pulksteņa rādītāji veido visus iespējamos leņķus, arī to, kurā „sastinguši” apskatāmā pulksteņa rādītāji.

6.4.A6. <u>1.atrisinājums.</u> No dotā seko, ka $0\leq|4-x|\leq 1$, $|x-y|\leq 1$ un $0\leq|4-y|\leq 1$. Varam uzskatīt, ka $x\leq y$ (otrā gadījumā $y<x$ spriedums ir līdzīgs). Tad $(4-x)^2\leq 4-x$, $(x-y)^2\leq y-x$ un $(4-y)^2\leq 4-y$,

tāpēc $(4-x)^2+(4-y)^2+(x-y)^2\leq 4-x+4-y+y-x=8-2x\leq 2$, jo $x\geq 3$.

<u>2.atrisinājums.</u> Atkal pieņemam, ka $x\leq y$. Skat. A213. zīm., salīdzinot abu „lielo” kvadrātu laukums ar 3 „mazo” kvadrātu laukumiem.



A213. zīm.

B GRUPA

6.4.B1. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt.

Katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 4 un nav lielāka par 8; tāpēc tā ir 5, jo citi skaitļi šajās robežās ar 5 nedalās. Tā kā tabulā ir 7 kolonnas, tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summas ir $5 \cdot 7 = 35$.

Katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 7 un nav lielāka par 14, tātad tā ir 10. Tāpēc visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $10 \cdot 4 = 40$.

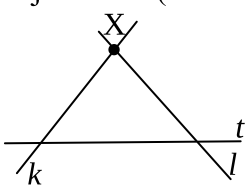
Iznāk, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir gan 35, gan 40. Tā ir pretruna, tātad tādas tabulas nav.

6.4.B2. Meklējamā skaitļa n lielākais dalītājs ir viņš pats. Apzīmēsim otro lielāko un trešo lielāko dalītāju attiecīgi ar x un y, x > y. No x + y = 499 seko, ka viens no skaitļiem x un y ir nepāra, bet otrs – pāra. Tātad n – pāra skaitlis, jo dalās ar pāra skaitli.

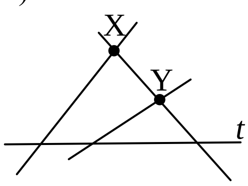
Viegli pārbaudīt, ka 499 ir pirmskaitlis. Tā kā x + y = 499, tad skaitļu x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 1 (ja tas būtu kāds d > 1, tad arī 499 dalās ar d – pretruna). Tāpēc n dalās ar $x \cdot y$. Tā kā viens no x un y – pāra skaitlis, tad $\frac{x \cdot y}{2}$ ir naturāls skaitlis, un n dalās arī ar $\frac{xy}{2}$. Pie x > 2 un y > 2 pastāvētu nevienādības $\frac{xy}{2} > x$ un $\frac{xy}{2} > y$, tāpēc ne x, ne y nebūtu skaitļa n otrais lielākais dalītājs (jo dalītāji xy un $\frac{xy}{2}$ būtu lielāki par x un y).

Tāpēc vai nu $x = 2$, vai $y = 2$. Ja $x = 2$, tad $y = 1$ (jo $x > y$), bet tā nevar būt, jo $x + y = 499$. Tāpēc $y = 2$ un $x = 499 - 2 = 497$. Pēc iepriekšējā n noteikti dalās arī ar $2 \cdot 497 = 994$. Tāpēc $n = 994 \cdot k$, k=1, 2, 3, ... Ja būtu k > 1, tad 497 nebūtu skaitļa n otrais lielākais dalītājs, jo n dalītos gan pats ar sevi, gan ar 994. Tāpēc nav citu iespēju kā vien (varbūt) k = 1 un n = 994. Pārbaudot šo iespēju, redzam, ka tā neder, jo skaitļa 994 otrais un trešais lielākais dalītājs ir attiecīgi 497 un 71. Tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

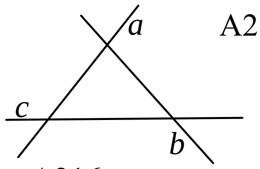
6.4.B3. Izvēlamies vienu taisni t. Apskatām visus citu taišņu krustpunktus, kas atrodas ārpus t vienā pusē no t; izvēlamies to krustpunktu, kas atrodas vistuvāk t. Ja šo krustpunktu X veido taisnes k un l, tad taisnes t, k un l veido plaknes apgabalu – trijstūri, kuru citas taisnes sīkākos apgabalos nesadala. Tiešām, ja kāda taisne h krustotu šo trijstūri, tad tai būtu jākrusto vai nu k, vai l kādā punktā Y, kas ir tuvāk taisnei t nekā punkts X. Tā būtu pretruna ar to, kā izvēlējāmies X (skat. A215. zīm.).



A214. zīm.



A215. zīm.



A216. zīm.

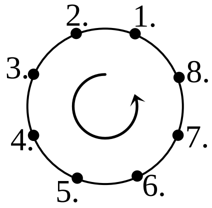
Sauksim šādu trijstūri par derīgu taisnei t. Ja abās pusēs taisnei t ir citu taišņu krustpunkti, varam atrast divus trijstūrus, kas derīgi taisnei t – pa vienam katrā pusē.

Pierādīsim, ka augstākais divas no apskatāmajām 9 taisnēm ir tādas, kam vienā pusē nav citu taišņu krustpunktu.

Pieņemsim, ka esam atraduši 3 tādas taisnes a, b, c. Apskatām a, b, c veidoto trijstūri. Viegli pārbaudīt: lai kā censtos novilkt ceturto taisni d, tā krusto vismaz vienas trijstūra malas pagarinājumu (nevis pašu malu), un tāpēc kādai no taisnēm a, b, c abās pusēs atrodas citu taišņu krustpunkti – pretruna.

Tātad ≥ 7 taisnēm ir vismaz pa 2 derīgiem trijstūriem un ≤ 2 taisnēm – vismaz pa vienam. Kopīgais „derīgumu" skaits ir vismaz $7 \cdot 2 + 2 = 16$. Ievērosim, ka katrs nesadalīts trijstūris ir derīgs trim taisnēm. Ja šādu trijstūru būtu ≤ 5, tad „derīgumu" skaits būtu $\leq 5 \cdot 3 = 15$ – pretruna. Tātad nesadalīto trijstūru ir vismaz 6, k.b.j.

6.4.B4. Skaidrs, ka 2., 4., 6., 8. rūķīšiem pēc 1000 minūtēm zelta gabalu vispār nav, jo visi 72 zelta gabali ir 1., 3., 5., 7. rūķīšiem ($4 \cdot 18 = 72$).



A217. zīm.

Pieņemsim, ka kāds rūķītis nav devis nevienu zelta gabalu rūķītim no sevis pa labi. Tad šis rūķītis ir 1., 3., 5. vai 7. rūķītis (jo viņa zelta gabalu skaits nav samazinājies, tātad nevar kļūt 0). Varam pieņemt, ka tas ir 1. rūķītis. Tad viņš no 8. rūķīša ir saņēmis tieši 18 – 9 = 9 zelta gabalus, t.i., visus zelta gabalus, kas 8. rūķītim bija sākumā. Tā kā 8. rūķītim beigās nav neviena zelta gabala, tad 7. rūķītis viņam neko nav devis. Līdzīgi turpinot, iegūstam: 2., 4., 6., 8. rūķīši ir atdevuši visus savus zelta gabalus un neko nav saņēmuši. Tātad pavisam zelta gabali ir doti $9 \cdot 4 = 36$ reizes. Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, tas ir noticis 1000 reizes. Iegūta pretruna, tātad tāda rūķīša, kurš nav devis nevienu zelta gabalu, nav.

6.4.B5. No katra stienīša garākais iegūtais gabals nav īsāks par 20 cm (jo 1m:5=20cm). Apskatām šos piecus gabalus; apzīmēsim to garumus centimetros ar a, b, c, d, e. Varam pieņemt, ka $a \leq b \leq c \leq d \leq e$; skaidrs, ka $20 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e < 100$.

Tā kā $a \geq 20$, $b \geq 20$ un $c \geq a$, $c \geq b$, tad no gabaliem a, b, c nevar izveidot trijstūri tikai tad, ja $c \geq a + b$. Tātad $c \geq 40$. Līdzīgi pieņemot, ka trijstūri nevar izveidot ne no b, c, d, ne no c, d, e, iegūstam $d \geq b + c \geq 20 + 40 = 60$ un $e \geq c + d \leq 40 + 60 = 100$ – pretruna.

6.4.B6. Pieņemsim pretējo. Tad neviena rindiņa (un neviena kolonna) nesastāv pilnībā no nenokrāsotām rūtiņām. Katrā rindiņā (un katrā kolonnā) nokrāsota tieši viena rūtiņa. Ņemsim rūtiņu R, kas nokrāsota pirmajā kolonnā. Nenokrāsotās rūtiņas, kas ir vienā rindiņā ar R, veido prasīto taisnstūri.

6.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

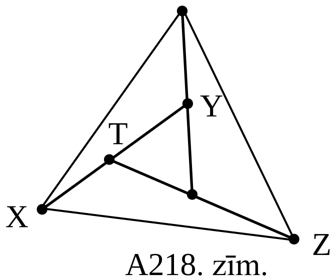
A GRUPA

6.5.A1. Nē, neeksistē. Ja n būtu 3 vai mazāk cipari, tad n^2 būtu ne vairāk par 6 cipariem. (Tiešām, ja n nav vairāk par 3 cipariem, tad n < 1000; tāpēc $n^2 < 1000 \cdot 1000$, tātad $n^2 < 1000000$.) Tad n un n^2 kopā nav vairāk par 9 cipariem. Ja turpretī n ir 4 vai vairāk cipari, tad n^2 ir vismaz 7 cipari (pierāda līdzīgi). Tad n un n^2 kopā ir vismaz 11 cipari. Bet dažādu ciparu pavisam ir 10.

6.5.A2. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas iespējams. Apzīmēsim pēc kārtas uzrakstītos skaitļus ar A, B, C, D, E. Tad katra no attiecībām $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}, \frac{D}{E}$ un $\frac{E}{A}$ ir vai nu pirmskaitlis, vai pirmskaitlim apgriezts skaitlis. Šo attiecību reizinājums ir $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{E}{A} = 1$. Tātad 1 izsacīts kā piecu tādu reizinātāju reizinājums, katrs no kuriem ir pirmskaitlis vai pirmskaitlim apgriezts skaitlis. Tā kā reizinājuma vērtība ir 1, tad skaitītājā esošo pirmskaitļu reizinājums vienāds ar saucējā esošo pirmskaitļu reizinājumu, un šo pirmskaitļu pavisam ir pieci. Tātad skaitītājā un saucējā ir vienādi skaitļi, kas satur dažādu daudzumu reizinātāju – pirmskaitļu (starp šiem pirmskaitļiem var būt vienādi). Tā ir pretruna, jo katram skaitlim eksistē tikai viens sadalījums reizinātājos – pirmskaitļos (ar precizitāti līdz reizinātāju kārtībai).

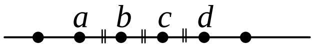
6.5.A3. Piemēram, skat. A218. zīm. Jāatceras: divi nogriežņi krustojas tad, ja tiem ir tieši viens kopējs iekšējs punkts. Tāpēc, piemēram, XY un TZ nekrustojas.



A218. zīm.

6.5.A4. Ja uz visām kartiņām uzrakstītie skaitļi ir vienādi, tad uzdevuma nosacījumi izpildās. Ja eksistē vismaz divi atšķirīgi skaitļi, tad katrs no tiem var būt uzrakstīts tikai uz vienas kartiņas. Pieņemsim, ka tā nav: ir vismaz divas kartītes, uz kurām uzrakstīts skaitlis *a*. Tā kā ir uzrakstīti vismaz divi dažādi skaitļi, starp tiem atrodam tādu skaitli *b*, ka starp *a* un *b* nav citu uzrakstīto skaitļu (piemēram, uzrakstām visas vērtības augošā secībā un izvēlamies *a* blakusesošo vērtību). Pieņemsim, ka $a < b$ (gadījumā $b < a$ pierādījums līdzīgs). Skaidrs, ka $a < \frac{a+a+b}{3} < b$. Saskaņā ar *a* un *b* izvēli skaitlis $\frac{a+a+b}{3}$ nav uzrakstīts ne uz vienas no kartiņām, iegūta pretruna.

Tātad, ja uzrakstītas vismaz divas atšķirīgas vērtības, pie tam katra no tām uzrakstīta tikai uz vienas no kartiņām, tad uz visām kartiņām jābūt uzrakstītiem dažādiem skaitļiem. Izrakstīsim šos skaitļus augošā secībā un izvēlamies trīs pēc kārtas sekojošus, piem. *a, b, c* (skat. A219. zīm.)



A219. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem seko, ka $\frac{a+b+c}{3} = b$, tātad $a+b+c = 3b \Rightarrow a+c = b+b \Rightarrow b-a = c-b = w$ jeb $b = a + w$ un $c = a + 2w$. Apskatot skaitļus b, c, d, līdzīgi iegūstam $\frac{b+c+d}{3} = c \Rightarrow c-b = d-c = w$ un $d = c + w = a + 3w$.

Izvēloties skaitļus a, b, d, to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{a+b+d}{3} = \frac{a+(a+w)+(a+3w)}{3} = \frac{3a+4w}{3} = a + \frac{4}{3}w.$$

Bet $b < a + \frac{4}{3}w < c$, tātad tas nav uzrakstīts ne uz vienas no kartiņām – pretruna.

6.5.A5. Atzīmēsim, ka $4865 \cdot 2 = 9730$ un četrciparu skaitļos 4865 un 9730 visi cipari ir dažādi. Tātad meklējamais lielākais kopīgais dalītājs varbūt ir 4865. Mēģināsim atrast lielāku vērtību.

Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar a un b, bet to lielāko kopīgo dalītāju ar d; tad $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ un skaitļu a_1 un b_1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Varam uzskatīt, ka $a > b$, tātad $a_1 > b_1$ (skaidrs, ka $a_1 \neq b_1$). Tāpēc $a_1 \geq 2$.

Ja $a_1 > 2$, tad $d < 4865$, jo $a_1 \cdot d$ ir četrciparu skaitlis. Tāpēc $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a = 2d$ un $b = d$. Mums jāpārbauda, vai var būt $4865 < b < 5000$ (ja $b \geq 5000$, tad a nebūs četrciparu skaitlis), turklāt skaitļos b un 2b visiem 8 cipariem jābūt dažādiem. To visvieglāk izdarīt, pārbaudot visas hipotētiskās b vērtības (jāpārbauda tikai tās, kurās nav vienādu ciparu). Izrādās, ka neviena no tām neder.

Tātad meklējamā vērtība ir 4865.

6.5.A6. Skaidrs, ka procesa attīstība atkarīga tikai no tā, uz kuru pusi katrā brīdī skatās 1., 2., 3., ..., 30. pirmklasnieks, nevis no tā, kurš pirmklasnieks stāv 1, 2., 3., ..., 30. vietā. Iedomāsimies, ka 2 pirmklasnieki, kas skatās viens uz otru, nevis apgriežas, bet sper soli viens otram pretī un tādējādi samainās vietām. Skaidrs, ka šajā procesā ik pēc sekundes jebkurā vietā stāvošais pirmklasnieks skatās uz to pašu pusi, uz kuru skatās šajā vietā stāvošais pirmklasnieks uzdevumā aprakstītajā procesā.

Bet ir skaidrs, ka mūsu aprakstītajā procesā neviens pirmklasnieks nespers vairāk par 29 soļiem. Tātad kustība noteikti beigsies. Tātad tā beigsies arī uzdevumā aprakstītajā procesā.

B GRUPA

6.5.B1. Patvaļīga naturāla skaitļa *x* ciparu skaitu apzīmēsim ar S(x). Tā kā

$S(10) + S(10^2) + S(10^3) = 2 + 3 + 4 = 9 < 10$ un

$S(100) + S(100^2) + S(100^3) = 3 + 5 + 7 = 15 > 10$, un

$S(a) + S(a^2) + S(a^3) \leq S(b) + S(b^2) + S(b^3)$, ja $a < b$, secinām: ja meklējamais skaitlis n eksistē, tad $10 < n < 100$. Tātad n ir divciparu skaitlis: $S(n) = 2$. Tāpēc jābūt $S(n^2) + S(n^3) = 8$. Ja $S(n^2) \geq 4$, tad $S(n^3) \geq 5$ ($n^3 = n^2 \cdot n$, un reizinot divciparu skaitli n ar vismaz četru ciparu skaitli n^2, iegūst vismaz piecu ciparu skaitli) – tā nevar būt, jo tad $S(n^2) + S(n^3) \geq 9$. Tā kā $S(n) = 2$, tad $S(n^2) \geq 2$; tāpēc $S(n^2) = 3$. Tad no $S(n^2) + S(n^3) = 8$ seko $S(n^3) = 5$.

Tā kā $S(32^2) = S(1024) = 4$, jābūt $n \leq 31$; tā kā $S(20^3) = S(8000) = 4$, jābūt $n \geq 21$. Tāpēc $21 \leq n \leq 31$. Pārbaudot šīs 11 n vērtības, redzam, ka neviena no tām neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tāpēc tāda n nav.

6.5.B2. Atbilde**:** nē, nevar.

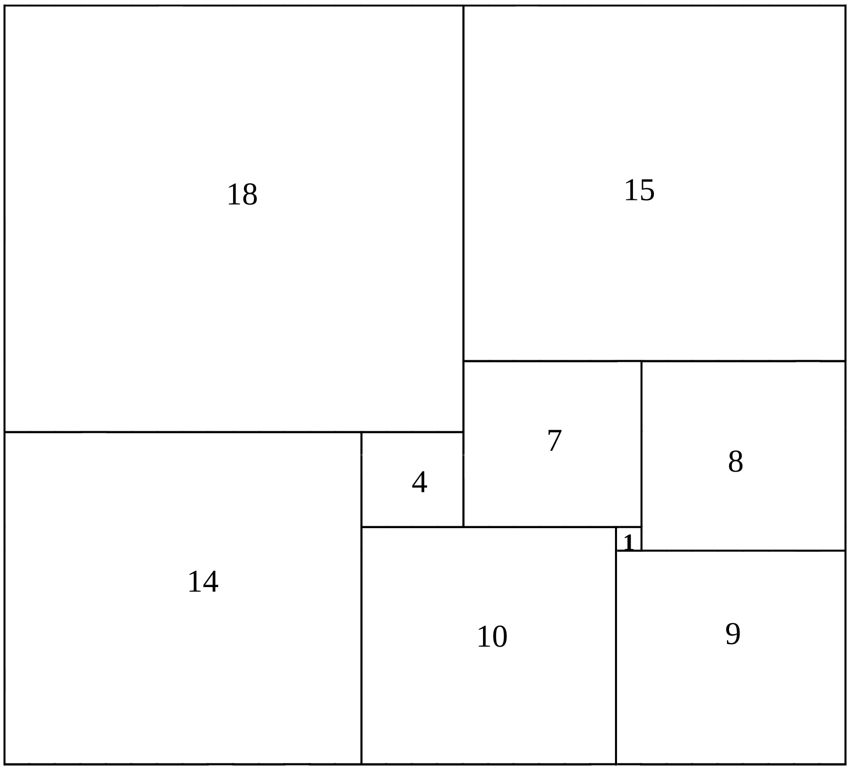
Risinājums. Abās vienādības pusēs kopā atrodas visas iespējamās pa pāriem ņemtu skaitļu *a, b, c, d, e* starpības (neņemot vērā to, kuru skaitli no kura atņem). Tāpēc

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)(a-c)(b-d)(c-e)(d-a)(e-b)| =$$
$$= |(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(2-3)(2-4)(2-5)(3-4)(3-5)(4-5)| =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 288$$

No otras puses, ja pastāvētu uzdevumā minētā vienādība, tad jābūt $A^2 = 288$, kur A – vienādības kreisās (tāpat arī labās) puses vērtība. Skaidrs, ka A ir vesels skaitlis, jo iegūts kā veselu skaitļu reizinājuma modulis. Bet 288 nav vesela skaitļa kvadrāts – tas atrodas starp divu viens otram sekojošu veselu skaitļu kvadrātiem: $16^2 = 256 < 288 < 289 = 17^2$.

Tātad uzdevumā minētā vienādība nevar pastāvēt.

6.5.B3. Skat. A220. zīm. Kvadrātos ierakstīti to malu garumi.



A220. zīm.

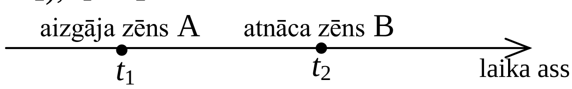
6.5.B4. To, ka var iztikt ar 9 atslēgām, redzam A221. zīm. Ja uz darbu atnāk C, D un E, viss kārtībā: visas vajadzīgās atslēgas pieejamas. Ja viens vai divi no C, D, E darbā neierodas, tad viņu vietā atnākuši tikpat daudz sargi ar visām atslēgām, un lādi joprojām var atvērt. Pierādīsim, ka ar 8 atslēgām nepietiek. Ja izgatavotas 8 (vai mazāk) atslēgas, tad kādai no 3 slēdzenēm izgatavotas ne vairāk par 2 atslēgām. Tātad vismaz 3 sargiem nav atslēgu no šīs slēdzenes. Ja darbā ierodas tieši šie 3 sargi, lādi atvērt nevar.

Sargs / Atslēga	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1.	x	x	x		
2.	x	x		x	
3.	x	x			x

A221. zīm.

6.5.B5. Var atrast skaistuli A, kuru apskauž ne vairāk kā viena cita. Izvēlamies A un no tālākās apspriešanas izslēdzam gan to skaistuli, kuru apskauž A, gan to skaistuli, kura apskauž A (ja tādas ir). Paliek vismaz 25 skaistules, kuras ne apskauž A, ne tiek apskaustas no A puses. Ar šīm 25 skaistulēm rīkojamies līdzīgi; paliek 22 skaistuļu grupa. Līdzīgi, atstājot grupas, kurās ir 19; 16; 13; 10; 7; 4; 1 skaistule, atrodam 9 skaistules, kuras viena otru neapskauž. Skaidrs, ka tām var pievienot pēdējo palikušo skaistuli.

6.5.B6. Pieņemsim, ka nebija tāda brīža, kad visi zēni vienlaicīgi atradās sarīkojumā. Tas nozīmē, ka pirmais aizgājušais zēns aizgāja agrāk (brīdī t_1), nekā atnāca pēdējais atnākušais zēns (brīdī t_2); $t_1 < t_2$.

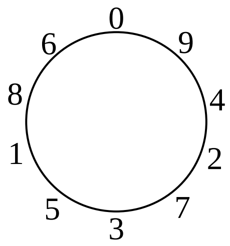


Tā kā A satika visas meitenes, tad visas meitenes ieradās sarīkojumā ne vēlāk kā brīdī t_1. Tā kā arī B satika visas meitenes, tad neviena meitene neaizgāja pirms brīža t_2. Tātad laika intervālā no t_1 līdz t_2 visas meitenes vienlaicīgi bija sarīkojumā.

6.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.6.A1. Jā, var. skat. A222. zīm.

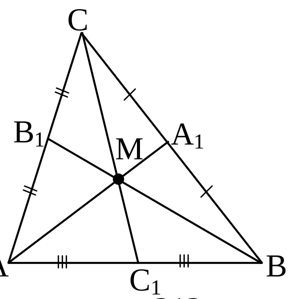


A222. zīm.

6.6.A2. Piemērs a = 1; b = 4; c = 9 parāda, ka visi šie skaitļi var būt kvadrāti. Piemērs a = 2; b = 8; c = 32 (tad $ab = 16 = 4^2$, $ac = 64 = 8^2$, $bc = 256 = 16^2$) parāda: var gadīties, ka neviens no šiem skaitļiem nav kvadrāts. Pierādīsim, ka citu iespēju nav.

Atceramies: skaitlis ir kvadrāts tad un tikai tad, ja katru pirmskaitli, ko tas vispār satur kā reizinātāju, tas satur pāra skaitu reižu. Ja, piemēram, a ir kvadrāts un a·b ir kvadrāts, tad gan a, gan ab katru pirmskaitli satur kā reizinātāju pāra skaitu reižu. Ja a kādu pirmskaitli p satur ar kāpinātāju α (varbūt $\alpha = 0$) un ab šo pašu pirmskaitli satur ar kāpinātāju β, tad $b = \frac{ab}{a}$ šo pirmskaitli satur ar kāpinātāju $\beta - \alpha$; tā kā α un β ir pāra skaitļi, tad $\beta - \alpha$ arī ir pāra skaitlis. No šejienes seko, ka arī b ir kvadrāts. Līdzīgi pierāda, ka c ir kvadrāts. Tātad, ja kvadrāts ir kaut viens no skaitļiem a; b; c, tad kvadrāti ir arī abi pārējie.

6.6.A3. Augstumu pret malu AB apzīmēsim ar h.



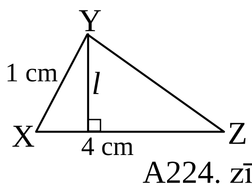
213. zīm.

Tad $L(ACC_1) = \frac{1}{2}AC_1 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB \cdot h\right) = \frac{1}{2}L(ABC)$. Augstumu pret malu CC_1 trijstūrī ACC_1 apzīmēsim ar t. Tad

$$L(AMC_1) = \frac{1}{2}MC_1 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}CC_1\right) \cdot t = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}CC_1 \cdot t\right) = \frac{1}{3}L(ACC_1) = \frac{1}{6}L(ABC).$$

(izmantojām to, ka mediānas krustpunktā dalās attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes). No šejienes seko, ka mediānas sadala trijstūri 6 daļās ar vienādiem laukumiem.

Katram šādam trijstūrim viena mala ir $\frac{1}{3}$ no vienas mediānas, bet otra mala ir $\frac{2}{3}$ no citas mediānas. Tātad trijstūrī ABC viena no 6 minētajām daļām ir trijstūrītis, kura divu malu garumi ir 1 cm un 4 cm.



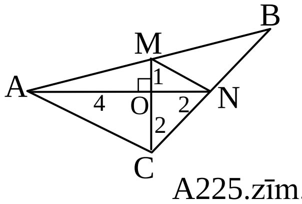
A224. zīm.

Tā kā $l \leq 1$ cm (slīpne garāka par perpendikulu), tad

$$L(XYZ) = \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot l \leq \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 1cm = 2cm^2.$$

No augstāk minētā seko, ka $L(ABC) = 6L(XYZ) \leq 6 \cdot 2cm^2 = 12cm^2$.

Skaidrs, ka L(ABC) = 12 cm^2, ja minētās 3 cm un 6 cm garās mediānas ir savstarpēji perpendikulāras. Tas ir iespējams (skat. A225. zīm.).



A225.zīm.

Tiešām, konstruējam AN = 6 cm, MC = 3 cm tā, lai tie krustotos punktā O, kas dala AN un CM attiecībās 2:1. No tā, ka OM:ON = OC:OA, seko, ka $\Delta MON \sim \Delta COA$. Tāpēc $MN = \frac{1}{2}AC$ un $\angle MNO = \angle CAO$, tātad $MN \parallel AC$ pēc iekšējiem šķērsleņķiem. Tāpēc $\Delta BMN \sim \Delta BAC$ ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$. Tātad M un N ir attiecīgi AB un CB viduspunkti un AN un CM ir ΔABC mediānas.

Esam pierādījuši, ka

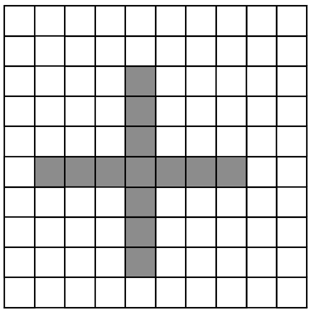
a) laukums nevar būt lielāks par 12 cm^2,

b) laukums var būt tieši 12 cm^2.

Tātad lielākā iespējamā laukuma vērtība ir 12 cm^2. Skaidrs, ka L(ABC) > 0.

Atbilde: $0cm^2 < L(ABC) \leq 12CM^2$.

6.6.A4. Skat., piem., A226. zīm.


A226.zīm.

6.6.A5. Viegli pārbaudīt, ka der, piemēram, a = 803; b = 801; c = 199; d = 202. Ir arī daudzi citi atrisinājumi.

6.6.A6. Tā kā $\frac{2005}{2^{2005}} = \frac{2005 \cdot 5^{2005}}{10^{2005}}$, pietiek atrast trešo ciparu no beigām skaitlī $2005 \cdot 5^{2005}$.

Viegli pārbaudīt, ka

$5^1 = ...005$
$5^2 = ...025$
$\underline{5^3 = ...125}$
$5^4 = ...625$
$\underline{5^5 = ...125}$

Redzam, ka 5^3 trīs pēdējie cipari sakrīt ar 5^5 pēdējiem trim cipariem. Tā kā $5^{n+1} = 5^n \cdot 5$, tad 5^{n+1} pēdējie trīs cipari atkarīgi tikai no 5^n trim pēdējiem cipariem. Tāpēc arī 5^7; 5^9; ...; 5^{2001}; 5^{2003}; 5^{2005} trīs pēdējie cipari būs ...125. Tā kā $005 \cdot 125 = 625$, tad meklējamais cipars ir 6.

B GRUPA

6.6.B1. Nē. Kaut kur uz riņķa līnijas jābūt skaitlim 0. Pārējos skaitļus var sadalīt grupās pa trim viensotram sekojošiem skaitļiem. Ja prasītais būtu iespējams, visu uzrakstīto skaitļu summa nepārsniedz $0+3\cdot 14=42$.

Bet šī summa ir 0 + 1 + 2 + ... + 8 + 9 = 45 – pretruna.

6.6.B2. Apzīmēsim šos saskaitāmos ar x; y; z. Tad eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $\frac{x}{n}=\frac{y}{n+1}=\frac{z}{n+2}=\frac{x+y+z}{3n+3}=\frac{180}{3n+3}=\frac{60}{n+1}$. No šejienes seko, ka y==60, $x=\frac{60\cdot n}{n+1}$, $z=\frac{60\cdot(n+2)}{n+1}$. Tā kā n un n + 1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad, lai x būtu naturāls skaitlis, 60 jādalās ar n+1 (šis nosacījums ir arī pietiekams, lai x; y; z visi būtu naturāli). Skaidrs, ka $n+1\geq 2$. Skaitļa 60 dalītāji, kas nav mazāki par 2, ir 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60. Tātad ir 11 uzdevumā minētie sadalījumi.

6.6.B3. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Pieņemsim, ka apskatāmais četrciparu skaitlis ir $x=\overline{abcd}=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d=(1000a+10c+d)+98b+2b$. Padomāsim, kā mainās x atlikums, dalot ar 7, ja b palielina par 1 (aizmirsīsim, ka b ir cipars, un apskatīsim b – jebkuru veselu skaitli). Saskaitāmais 1000a + 10c + d nemainās, tāpēc nemainās arī tā atlikums, dalot ar 7. Saskaitāmais 98b dalās ar 7 neatkarīgi no b vērtības, jo $98=7\cdot 14$. Saskaitāmais 2b palielinās par 2. Iegūstam situāciju, kas attēlota tabulā:

x atlikums, dalot ar 7, pirms *b* palielināšanas	*x* atlikums, dalot ar 7, pēc *b* palielināšanas
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	0
6	1
0	2
1	3
...	...

No šīs tabulas redzam, kādas b izmaiņas novestu pie summas x = (1000a + 10c + d) + 98b + 2b, kas dalās ar 7:

x atlikums, dalot ar 7, pirms b izmaiņas	b izmaiņa
1	palielināt par 3 vai samazināt par 4
2	palielināt par 6 vai samazināt par 1
3	palielināt par 2 vai samazināt par 5
4	palielināt par 5 vai samazināt par 2
5	palielināt par 1 vai samazināt par 6
6	palielināt par 4 vai samazināt par 3

Skaidrs, ka jebkuram ciparam b katrā gadījumā var veikt vismaz vienu no norādītajām operācijām tā, lai rezultāts arī būtu cipars.

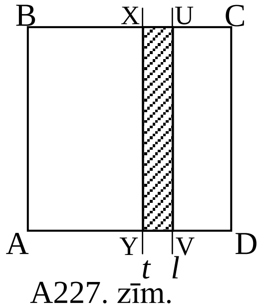
Vajadzīgais pierādīts.

6.6.B4. Apskatāmajam skaitlim būtu jābūt formā ...6...6...4...2...2... , kur pasvītrotais četrinieks ir vienīgais; tas tātad paliek, gan iegūstot 664, gan iegūstot 422. Iegūstot 664, kreisajā pusē no 4 jānodzēš vienāds skaits pāra un nepāra ciparu; iegūstot 422, kreisajā pusē jānodzēš vēl 2 sešinieki, tātad kreisajā pusē no 4 sākumā ir par diviem pāra cipariem vairāk nekā nepāra. Tāpēc iegūt 422 vispār nav iespējams.

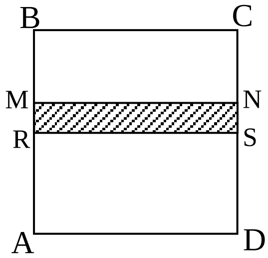
Tātad tāds skaitlis nevar saturēt tikai vienu ciparu 4.

6.6.B5. Atbilde: nē.

Risinājums. Apskatām pēc kārtas 1., 2., 3., ... vertikālo līniju kvadrāta rūtiņu režģī (no kreisās uz labo pusi). Atzīmējam pēdējo no tām līnijām, no kurām pa labi ir vismaz 10 atzīmētās rūtiņas. Skaidrs, ka šī līnija nav kvadrāta labās puses robeža (bet var būt kreisās puses robeža). Apzīmēsim šo līniju ar *t*. Tātad pa labi no nākošās līnijas *l* jau ir mazāk par 10 atzīmētām rūtiņām. Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem ABUV satur vismaz 10 atzīmētas rūtiņas. Tātad gan taisnstūrī ABUV, gan taisnstūrī XCDY ir vismaz 10 atzīmētas rūtiņas (A227. zīm.).



A227. zīm.



A228. zīm.

Līdzīgi atrodam tādu horizontālu rūtiņu rindu, ka katrā no taisnstūriem AMND un BCSR ir vismaz 10 atzīmētas rūtiņas.

Saskaitīsim atzīmēto rūtiņu daudzumu visos minētajos taisnstūros. Summa ir ≥ 40. Katra atzīmētā rūtiņa, izņemot iesvītrotās rindas un kolonnas „krustpunktā" esošo (ja tā ir atzīmēta), ieskaitīta ne vairāk kā 3 reizes; „krustpunktā" esošā rūtiņa (ja tā vispār ir atzīmēta) ieskaitīta 4 reizes. Tāpēc, ja atzīmēto rūtiņu būtu 12, apskatāmā summa nepārsniegtu $3 \cdot 11 + 4 = 37$ – pretruna.

6.6.B6. Atbilde: 25.

Risinājums. Sanumurēsim cepures no viena gala. To, ka i-tā cepure ir balta (sarkana), pierakstīsim kā i ~ b (i ~ s). Pieņemsim, ka 11 ~ s. Secīgi iegūstam 22 ~ s, 6 ~ s, 17 ~ s, 1 ~ s, 12 ~ s, 23 ~ s, 7 ~ s, 18 ~ s, 2 ~ s, 13 ~ s, 24 ~ s, 8 ~ s, 19 ~ s, 3 ~ s, 14 ~ s, 25 ~ s, 9 ~ s, 20 ~ s, 4 ~ s, 15 ~ s. Ja rūķīšu ir 25, varam izvēlēties 5 ~ b, 10 ~ b, 16 ~ b, 21 ~ b; pārbaudiet patstāvīgi, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

Ja rūķīšu ir ≥ 26, tad no 15 ~ s seko 26 ~ s; tālāk 10 ~ s, 21 ~ s, 5 ~ s un 16 ~ s. Tātad pirmajiem 26 rūķīšiem visiem ir sarkanas cepures. Skaidrs, ka tad arī citiem rūķīšiem (ja tādi ir) ir sarkanas cepures, un iegūta pretruna ar nosacījumiem, ka ir vismaz viena katras krāsas cepurīte.

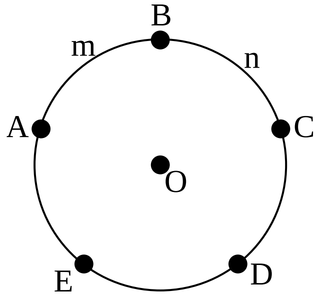
7. 32. mācību gads (2005/ 2006)

7.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.1.A1. Viegli pārbaudīt, ka $22 \cdot 23 \cdot 24 = 12144$. Tātad meklējamie skaitļi var būt 22; 23; 24. Pierādīsim, ka tie nevar būt citādi. Tiešām, izvēloties mazākus pēc kārtas ņemtus skaitļus, to reizinājums būs mazāks par 12144, bet, izvēloties lielākus pēc kārtas ņemtus reizinātājus (naturālus skaitļus), to reizinājums būs lielāks par 12144. Tātad reizinājums 12144 iegūstams tikai vienā gadījumā.

7.1.A2. Jā, var. Uzzīmēsim riņķa līniju, atzīmēsim 5 punktus, kas to dala 5 vienādās daļās, un atzīmēsim arī centru (skat. A229. zīm.). Pierādīsim, ka šī 6 punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus.



A229. zīm.

Trīs punktus no atzīmētajiem sešiem var izvēlēties 3 būtiski dažādos veidos.

1. Viens no izvēlētajiem punktiem ir O. Tad abi pārējie atrodas no tā vienādos attālumos (jo visi riņķa līnijas punkti atrodas vienādos attālumos no tās centra saskaņā ar riņķa līnijas definīciju).
2. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas cits aiz cita (piemēram, A; B; C). Tad vidējais no tiem ir vienādos attālumos no abiem pārējiem (piemēram, BA = BC), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AmB un BnC) atbilst vienādas hordas.
3. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas, bet ne pēc kārtas (piemēram, A; B; D). Tad tie divi punkti, kas ir blakus, atrodas vienādos attālumos no trešā (piemēram, AD = BD), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AED un BCD) atbilst vienādas hordas.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

7.1.A3. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas secībā ar a; b; c; d; e; f; g. Atradīsim tādu skaitli x, ka $b = a + x$. Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $c = b + x = (a + x) + x = a + 2x$; $d = c + x = (a + 2x) + x = a + 3x$; $e = a + 4x$; $f = a + 5x$; $g = a + 6x$. Saskaņā ar doto arī $a + c + e + g = b + d + e$, tātad

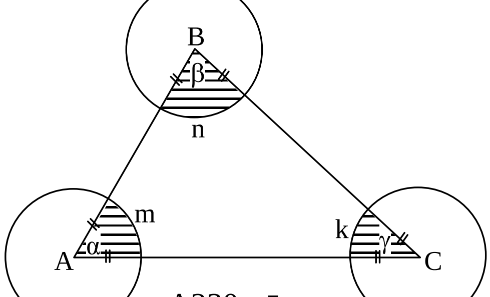
$$a + (a + 2x) + (a + 4x) + (a + 6x) = (a + x) + (a + 3x) + (a + 5x)$$
$$4a + 12x = 3a + 9x$$

No tā seko $a + 3x = 0$. Tāpēc

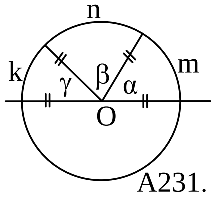
$$a + b + c + d + e + f + g == a + (a + x) + (a + 2x) + (a + 3x) + (a + 4x) +$$
$$+ (a + 5x) + (a + 6x) = 7a + 21x = 7(a + 3x) = 7 \cdot 0 = 0,$$

ko arī vajadzēja aprēķināt.

7.1.A4. Aplūkosim A230. zīm. (tajā nav ievērots mērogs).



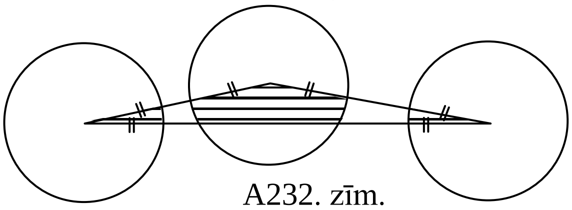
A230. zīm.



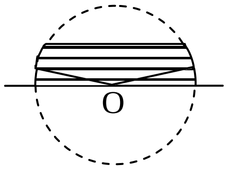
A231. zīm.

Atcerēsimies, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180º. Tā kā visu riņķu laukumi ir vienādi, tad arī to rādiusi ir vienādi. Tāpēc, saliekot iesvītrotos sektorus vienu otram blakus ar kopīgu virsotni O, iegūsim pusriņķi (skat. A231. zīm.). Tā kā pilna riņķa laukums ir 1 cm^2, tad šī pusriņķa laukums ir ½ cm^2.

Ja riņķi daļēji izietu ārpus trijstūra robežām, tad trijstūra iekrāsotās daļas laukums būtu vēl mazāks (skat. A232. un A233. zīm.)



A232. zīm.



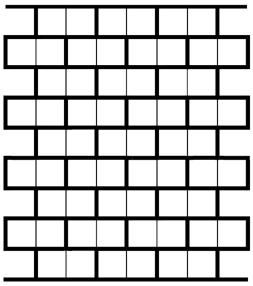
A233. zīm.

Piezīme. Skaidrs, ka trim melnajiem riņķiem nav kopīgu punktu. Tomēr, pat ja tādi būtu, trijstūra nokrāsotās daļas laukums no tā tikai samazinātos.

7.1.A5. Atbilde: ja abi pretinieki spēlē pareizi, tad neviens nevar uzvarēt.

Parādīsim, kā otrais spēlētājs var panākt, lai pirmais neuzvarētu.

Otrais spēlētājs domās sadala visu lapu „ķieģelīšos” tā, kā parādīts A234. zīm. (pie lapas malas daži ķieģelīši varbūt ir nepilni). Ja pirmais spēlētājs nokrāso baltu kādu rūtiņu x, tad otrais spēlētājs ar savu atbildes gājienu nokrāso sarkanu to rūtiņu y, kura kopā ar x veido vienu ķieģelīti.



A234. zīm.

Skaidrs, ka katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā viens ķieģelītis ietilpst pilnībā. Tāpēc otrais spēlētājs ar šādu stratēģiju panāk, ka katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā ir vismaz viena sarkana rūtiņa. Tātad pirmais spēlētājs uzvarēt nevar.

Tā kā pirmais spēlētājs var lietot līdzīgu stratēģiju, tad uzvarēt nevar arī otrais spēlētājs. (Pirmā spēlētāja stratēģija: viņš iedomājas lapas sadalījumu ķieģelīšos. Pirmo rūtiņu viņš nokrāso baltu vienalga kurā vietā. Ja otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu krāso sarkanu rūtiņu „jaunā” ķieģelīti, tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu v, kura kopā ar u veido ķieģelīti; ja otrais spēlētājs krāso rūtiņu ķieģelītī, kurā viena rūtiņa jau nokrāsota (tad tā noteikti ir balta), tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu vienalga kurā jaunā ķieģelītī.)

7.1.A6. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Uz kausa A uzliksim 10 monētas no pirmā maisa. Uz kausa B liksim 1 monētu no otrā maisa, 2 monētas no trešā maisa, 3 monētas no ceturtā maisa un 4 monētas no piektā maisa; ievērosim, ka 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Atzīmēsim visas iespējas.

Ja vieglākās monētas ir 1.maisā, tad kauss A ir vieglāks nekā kauss B.

Ja vieglākās monētas ir 2.maisā, tad kauss A ir par 1 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 3.maisā, tad kauss A ir par 2 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 4.maisā, tad kauss A ir par 3 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 5.maisā, tad kauss A ir par 4 g smagāks nekā B.

Atkarībā no tā, kuru no minētajiem rezultātiem novērojam, secinām ,kurā maisā ir vieglākās monētas.

B GRUPA

7.1.B1. Ja visi pirmskaitļi a, b, c būtu nepāra, tad nevarētu būt a + b + c = 38. Tāpēc vismaz viens no tiem ir 2.

Skaidrs, ka nevar būt a = b = c = 2 vai a = b = 2 (b = c = 2, a = c = 2). Tāpēc tieši viens no skaitļiem a, b, c ir 2. Pieņemsim, ka a = 2. Tad iegūstam **b + c = 36** un 2(b + c) + bc = 395, no kurienes **bc = 323**. No abām izceltajām vienādībām dažādos veidos (skat. tālāk) iegūstam, ka vai nu b = 17, c = 19, vai arī b = 19, c = 17. Tā kā 17 un 19 ir pirmskaitļi (par to noteikti jāpārliecinās), tad iegūtā atbilde 2; 17; 19 der. Gadījumus, kad b = 2 vai c = 2, apskata līdzīgi.

Parādīsim dažādus paņēmienus, kā no b + c = 36 un bc = 323 varēja atrast b un c vērtības.

1. Sadalot 323 pirmskaitļu reizinājumā, iegūstam $323 = 17 \cdot 19$. Tāpēc vienīgās iespējas ir abas augšminētās.

2. Sadalot 36 divu pirmskaitļu summā, iegūstam iespējas 5 + 31; 7 + 29; 13 + 23; 17 + 19. Tikai pēdējā gadījumā abu saskaitāmo reizinājums ir 323.

Abos šādos risinājumos pārbaude, vai 17 un 19 ir pirmskaitļi, vairs nav nepieciešama, jo šīs b un c vērtības jau tika atrastas kā pirmskaitļi.

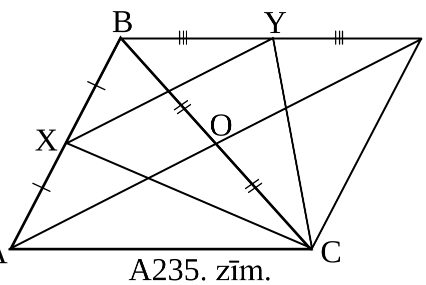
3. Izsakot $b = 36 - c$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $c(36 - c) = 323$, $c^2 - 36c + 323 = 0$, $c = 18 \mp \sqrt{18^2 - 323} = 18 \mp \sqrt{1}$, $c_1 = 17$, $c_2 = 19$; atbilstoši $b_1 = 36 - 17 = 19$, $b_2 = 36 - 19 = 17$.

Šajā risinājumā jāpārbauda, vai iegūtās vērtības ir pirmskaitļi, jo tās tika atrastas, par šo faktu nerūpējoties.

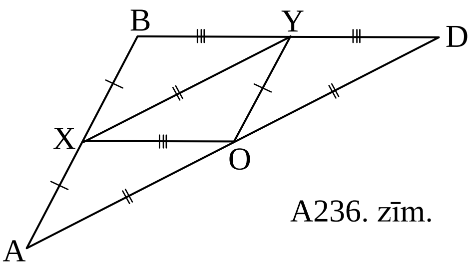
Tātad meklējamie pirmskaitļi ir 2; 17; 19.

7.1.B2. Pieņemsim, ka ABC ir trijstūris, par kuru runā uzdevumā. Papildināsim to līdz paralelogramam ABDC.

Apzīmēsim ΔABC mediānu garumus no virsotnēm A, B, C attiecīgi ar m_a, m_b, m_c. Paralelograma diagonāles krustojoties dalās uz pusēm; tāpēc, ja šo diagonāļu krustpunktu apzīmē ar O, tad $AO = m_a$ un $AD = 2 \cdot AO = 2m_a$. Ja X un Y ir attiecīgi malu AB un BD viduspunkti, tad XY ir ΔABD viduslīnija; tāpēc $XY = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 2m_a = m_a$. Labi zināms, ka $\Delta ABC = \Delta DCB$ (to viegli pierādīt pēc pazīmes mmm vai mlm, vai lml). Vienādos trijstūros **visi** atbilstošie elementi ir vienādi, tāpēc $CY = m_b$. Redzam, ka trijstūrī CXY malu garumi $XY = m_a$, $YC = m_b$, $CX = m_c$; tātad ΔCXY malu garumi ir 3; 4; 5. Tā kā $3^2 + 4^2 = 5^2$, tad ΔCXY ir taisnleņķa un tā katetes ir 3 un 4; tāpēc tā laukums ir $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ (\text{cm}^2)$.



A235. zīm.



A236. zīm.

Ja F – kaut kāda figūra, tad turpmākajā risinājuma gaitā L(F) apzīmēs figūras F laukumu. Mēs tagad atradīsim sakarību starp L(XYC) un L(ABDC) patvaļīgam paralelogramam, ne tikai tādam, kuram CY, CX un XY ir ar skaitliskajām vērtībām 3; 4; 5. Ievērosim, ka

$$L(ACX) = \frac{1}{2}AX \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB \cdot h\right) = \frac{1}{2}L(ABC) = \frac{1}{4}L(ABDC);$$

šeit h – augstums, kas ΔABD (un arī ΔACX) no virsotnes C vilkts pret malu AB (un arī AX). Līdzīgi iegūstam $L(DCY) = \frac{1}{4}L(ABDC)$. Tā kā O ir AD viduspunkts, tad (A236. zīm.) OY un OX arī, tāpat kā XY, ir ΔABD viduslīnijas; tāpēc OY = AX = XB, OX = BY = YD un XY = AO = OD. Tātad visi trijstūri AXO, XBY, YOX, OYD ir vienādi savā starpā pēc pazīmes mmm. Tāpēc to visu laukumi ir $\frac{1}{4}L(ABD) = \frac{1}{8}L(ABDC)$.

Ņemot to visu vērā, $L(CXY) = L(ABDC) - L(ACX) - L(DCY) - L(BXY) =$

$= \frac{3}{8}L(ABDC) = \frac{3}{8} \cdot 2L(ABC) = \frac{3}{4}L(ABC)$. Tā kā L(CXY) = 6 cm^2, tad no šejienes seko, ka $L(ABC) = 6\ cm^2 \cdot \frac{4}{3} = 8\ cm^2$.

7.1.B3. No vienādības xy+z=xz+y pakāpeniski iegūstam

xy – xz = y – z

x(y - z) = y – z, tāpēc y = z vai x = 1.

Ja y = z, tad skaidrs, ka $(x-y)(x-z)(y-z) = (x-y)(x-z) \cdot 0 = 0$

Ja x = 1, tad dotās vienādības pārvēršas par y + z = z + y = yz + 1

Pakāpeniski iegūstam

z+y=yz+1

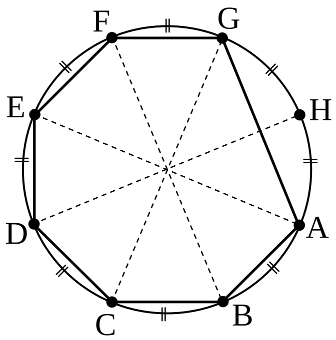
yz-z-y+1=0

(y-1)(z-1)=0, tāpēc y = 1 vai z = 1.

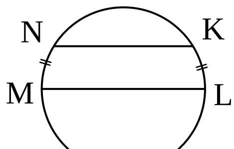
Atceroties, ka x = 1, iegūstam vajadzīgo.

7.1.B4. Atbilde: jā, eksistē.

Aplūkosim izliektu septiņstūri, kura virsotnes ir 7 no astoņiem punktiem, kas dala riņķa līniju astoņās vienādās daļās (skat. A237. zīm.).



A237. zīm.



A238. zīm.

Sekojošā tabulā redzams, ka uzdevums prasības izpildītas.

Savstarpēji paralēlas diagonāles	Tām perpendikulāras savstarpēji paralēlas diagonāles
AE, BD	FD, GC
AD	BG, FC
GE, AC	FB, EC
GD	FA, EB

Viegli redzēt, ka katra diagonāle sastopama šajā tabulā.

Par tabulas pareizību pārliecināmies, pamatojoties uz sekojošiem labi pazīstamiem ģeometrijas faktiem:

(1) Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir taisns

(2) Ja loku MN un KL lielumi ir vienādi, tad NK||ML (skat. A238. zīm.)

Parādīsim ar piemēru, kā tas tiek darīts.

Saskaņā ar (2) GD||FE. Saskaņā ar (1) $FE \perp EB$. Tāpēc $GD \perp EB$.

Lasītājs pats var pārbaudīt visas citas norādītās perpendikularitātes.

Piezīme. Iespējami arī citi pamatojumi, piemēram tādi, kas izmanto faktu: ja punkti X un X_1 ir simetriski viens otram attiecībā pret taisni t, tad $XX_1 \perp t$.

7.1.B5. Skaidrs, ka katrā mucā vienmēr ir vesels skaits litru ūdens. Ievērosim, ka 1 + 2 + ... + 10 = 55. Ja viss ūdens tiktu saliets vienā mucā, tad pirms pēdējās liešanas katrā mucā būtu bijis $27\frac{1}{2}$; skaidrs, ka tas nav iespējams. Tātad vienā mucā nevar būt vairāk par 54 litriem. Parādīsim, kā panākt, lai vienā mucā būtu 54 litri ūdens.

Vispirms panāksim, lai ūdens būtu tikai 3 mucās: 3*l*, 32*l* un 20*l*. Sekojošā tabulā parādītas secīgās pārliešanas. Ar aplīšiem attēlotas tās mucas, kuras izmanto attiecīgā pārliešanā.

Mucas numurs ➔	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	2	4	5	6	7	8	9	10
	4	2	2	4	3	6	7	8	9	10
	4	4	2	4	3	4	7	8	9	10
	4	4	4	4	3	4	5	8	9	10
	4	4	4	4	3	4	10	8	4	10
	4	4	4	4	3	4	20	8	4	0
	0	4	4	4	3	8	20	8	4	0
	0	0	4	8	3	8	20	8	4	0
	0	0	0	8	3	8	20	8	8	0
	0	0	0	0	3	8	20	16	8	0
	0	0	0	0	3	16	20	16	0	0
	0	0	0	0	3	32	20	0	0	0

Tālāk darbosimies tikai ar tām mucām, kurās vēl ir ūdens.

3	32	20
3	12	40
3	24	28
6	24	25
12	24	19
24	24	7
0	48	7
0	41	14
0	27	28
0	54	1

Lasītājs var patstāvīgi mēģināt sasniegt mērķi ar mazāku pārliešanu skaitu.

7.1.B6. Atbilde: jā, noteikti.

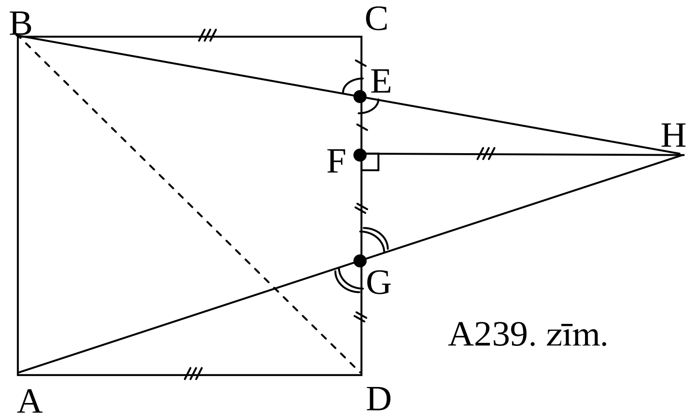
Risinājums. Garausītis liek kaudzītē 10 s monētas. Ja viņš ar tām spēj izveidot summā 3 latus, viss kārtībā. Ja 10 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā sasniegta summa Ls 3,00, Garausītis sāk pievienot kaudzītei pa vienai 5 s monētai. Ja viņš ar tām spēj sasniegt summā 3 latus, viss kārtībā. Pieņemsim, ka garausītim 5 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā summā sasniegti Ls 3,00. Tad pastāv 2 iespējas.

1. Garausītis kaudzītē salicis naudu pāra skaita santīmu vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis pāra skaits 5 s monētu). Tad Garausītis sāk kaudzītei pievienot pa vienai 2 s monētai. Ja ar tām tiek sasniegta summa Ls 3,00, viss kārtībā. Ja Garausītim 2 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā summā sasniegti 3 lati, tad atlikusī nauda (līdz 4 latiem) Garausītim ir 1 s monētās. Skaidrs, ka viņš var papildināt kaudzīti tā, lai tajā būtu tieši 3 lati.
2. Garausītis kaudzītē salicis naudu nepāra santīmu vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis nepāra skaits 5 s monētu). Tā kā Garausītim kopā 400 santīmu, tad starp atlikušajām monētām (kas var būt tikai 1 s un 2 s monētas) vismaz viena ir 1 s monēta. Pievienojot to kaudzītei, tajā ir nauda pāra skaita santīmu vērtībā. Tagad Garausītis mērķi sasniedz tāpat kā 1.gadījumā (vispirms pievienojot pa vienai 2 s monētai un tālāk, ja nepieciešams, pa vienai 1 s monētai).

7.2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.2.A1. Skat. A239. zīm.



A239. zīm.

Izvēlamies uz kvadrāta ABCD malas CD punktus E, F un G tā, ka CE = EF $\neq$ FG = GD un atliekam ārpus kvadrāta tādu punktu H, ka $FH \perp CD$ un FH = CD. Tad arī FH = CB un FH = DA. Tāpēc $\Delta EFH = \Delta ECB$ un $\Delta GFH = \Delta GDA$ (pazīme kk). Tāpēc $\angle BEC = \angle HEF$, tātad punkti B,E,H atrodas uz vienas taisnes; līdzīgi pierāda, ka punkti A,G,H atrodas uz vienas taisnes. Tāpēc, novietojot ΔBCE stāvoklī HFE un ΔADG – stāvoklī HFG, iegūstam trijstūri AHB. Pārbaudīsim, vai tas apmierina uzdevuma prasības.

1) tā kā $\angle EBA$ atrodas $\angle CBA$ iekšpusē, tad $\angle HBA = \angle EBA$ ir šaurs; līdzīgi pierāda, ka $\angle HAB = \angle GAB$ ir šaurs. Tā kā $\angle HBA > \angle DBA = 45^\circ$ un līdzīgi $\angle HAB > 45^\circ$, tad $\angle AHB = 180^\circ - \angle HBA - \angle HAB < 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$; tātad ΔHAB ir šaurleņķu trijstūris.
2) BH > BE > BC = AB, tātad $BH \neq AB$; līdzīgi pierāda, ka $AH \neq AB$.

Pieņemsim uz brīdi, ka AH = BH. No augstāk minētajām trijstūru vienādībām seko, ka AH = 2AG un BH = 2BE, tātad AG = BE. Tad $\Delta BCE = \Delta ADG$ (hk) , tāpēc EC = DG. Bet tā ir pretruna ar punktu E,F,G izvēli. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un $AH \neq BH$. Tāpēc ΔAHB visas malas ir dažāda garuma.

7.2.A2. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Aprēķināsim dažas pirmās n! vērtības: 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720. Skaidrs, ka arī visas tālākās n! vērtības beigsies ar ciparu 0. Aplūkojot iespējamos n! pēdējos ciparus 0;1;2;4;6, redzam, ka x! + y! var beigties ar ciparu 5 tad un tikai tad, ja viens saskaitāmais beidzas ar ciparu 1, bet otrs- ar ciparu 4. Bet tad šiem saskaitāmiem jābūt 1 un 24; to summa ir 25, un tā neapmierina uzdevuma nosacījumus.

7.2.A3. Lai cik arī no ābola būtu apēsts, no palikušās daļas vienmēr $\frac{1}{4}$ atradīsies virs ūdens un būs pieejama putniņam; savukārt $\frac{3}{4}$ atlikušā ābola atradīsies zem ūdens un būs pieejama zivtiņai. Tātad, kamēr vien viss ābols vēl nebūs apēsts, ko ēst būs gan vienam, gan otram. Tāpēc putniņš apēdīs 2 reizes vairāk nekā zivtiņa, t.i., putniņš apēdīs $\frac{2}{3}$ no ābola.

7.2.A4. Apzīmēsim uzdevumā minētos skaitļus augošā secībā ar x, y un z. Tad x + y + z = 100 un apskatāmās starpības ir y – x, z – y un z – x, bet to summa ir (y – x) + (z – y) + (z – x) = 2(z – x). Tā kā $x \geq 1$ un y > x, tad $y \geq 2$; tāpēc $z = 100 - (x + y) \leq \leq 100 - (1 + 2) = 97$. No sakarībām $x \geq 1$ un $z \leq 97$ iegūstam, ka apskatāmā summa 2(z – x) nevar būt lielāka par $2(97 - 1) = 2 \cdot 96 = 192$. Ja x = 1; y = 2; z = 97, tad tā <u>ir</u> 192.

Tātad meklējamā vērtība ir 192.

7.2.A5. Nē, tā nevar gadīties. Pieņemsim pretējo. Ja kādam rūķītim ir x gadu, tad viņš saņem 11x ķirbjus, tāpēc viņa saņemto ķirbju skaits dalās ar 11. Bet 123456 ar 11 nedalās: 123456:11 = 11223 atl.3. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

7.2.A6. Apzīmēsim traukus ar A, B, C, bet krāsas- ar a, b, c. Vispirms pārliesim krāsu a traukos B un C, piepildot tos līdz malām. Rodas situācija:

A- tukšs

B- $\frac{2}{3}$ krāsa b, $\frac{1}{3}$ krāsa a

C- $\frac{2}{3}$ krāsa c, $\frac{1}{3}$ krāsa a.

Traukos B un C krāsas sajaucam vienmērīgi un no katra no tiem pusi pārlejam traukā A. Tagad traukā A ir $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}a$ krāsas, tātad tur visu krāsu ir vienāds daudzums. Salejot visu atlikušo krāsu traukā B, arī tur iegūstam vienādus krāsu a, b, c daudzumus. Šo maisījumu patvaļīgi sadalot starp traukiem B un C, iegūstam vajadzīgo.

B GRUPA

7.2.B1. Skat. A240. zīm., kur parādīti 3 kuba slāņi.

Apakšējais:

z	**s**	**d**
d	**z**	**s**
s	**d**	**z**

Vidējais:

s	**d**	**z**
z	**s**	**d**
d	**z**	**s**

Augšējais:

d	**z**	**s**
s	**d**	**z**
z	**s**	**d**

A240.zīm.

7.2.B2. <u>Atbilde:</u> a) nē, b) jā.

<u>Risinājums.</u> Atgādināsim svarīgu aritmētikas faktu: naturāls skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Tiešām, ja naturāla skaitļa S cipari, sākot no kreisās puses, ir a_0, a_1, a_2, ..., a_n, tad $S = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n =$

$$= a_0\left(\underbrace{99...9}_{n}+1\right)+a_1\left(\underbrace{99...9}_{n-1}+1\right)+...+a_{n-1}(9+1)+a_n =$$

$$=\left(a_0\cdot\underbrace{99...9}_{n}+a_1\cdot\underbrace{99...9}_{n-1}+...+a_{n-1}\cdot 9\right)+\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}+a_n\right).$$

Pirmajā iekavā katrs saskaitāmais dalās ar 3, tātad arī visa iekavas vērtība dalās ar 3. Tātad skaitļa S atlikums, dalot S ar 3, ir tāds, kāds rodas, dalot ar 3 otro iekavu, t.i., skaitļa S ciparu summu.

Tātad x, S(x) un S(S(x)) dod vienādus atlikumus, dalot ar 3; tāpēc to summa dalās ar 3 un nevar būt 2005.

Viegli pārbaudīt, ka y = 1975 apmierina uzdevuma prasības.

7.2.B3. Pieņemsim, ka $n = x^2 + y^2 + z^2$, kur x, y, z – naturāli skaitļi, pie tam $x \geq y \geq z$. Tad

$$n^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(\left(x^2+y^2-z^2\right)+2z^2\right)\left(\left(x^2+y^2-z^2\right)+2z^2\right)=$$

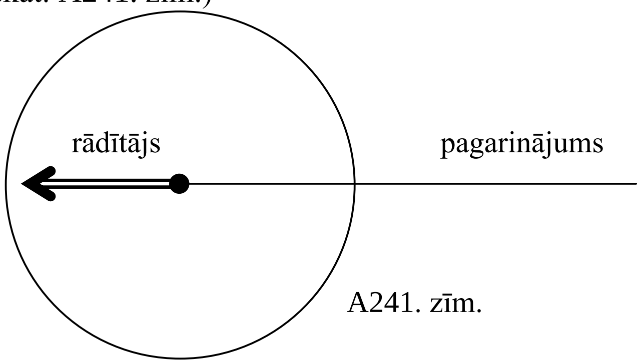
$$=\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(x^2+y^2-z^2\right)+\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot 2z^2+2z^2\left(x^2+y^2-z^2\right)+\left(2z^2\right)\cdot\left(2z^2\right)=$$

$$=\left(x^2+y^2-z^2\right)^2+2z^2\left(x^2+y^2-z^2+x^2+y^2-z^2+2z^2\right)=$$

$$=\left(x^2+y^2-z^2\right)^2+2z^2\left(2x^2+2y^2\right)=\left(x^2+y^2-z^2\right)^2+\left(2xz\right)^2+\left(2yz\right)^2.$$

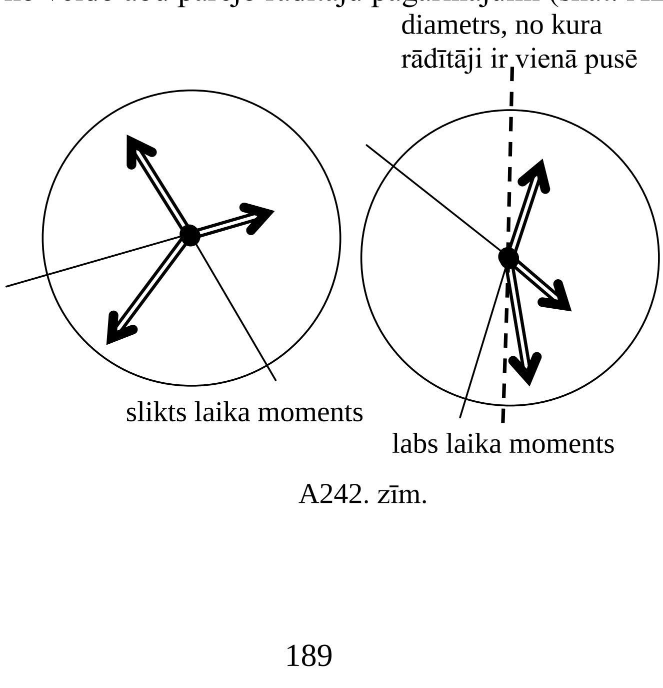
Ja x, y, z – naturāli skaitļi, tad 2xz un 2yz arī ir naturāli skaitļi, bet $x^2 + y^2 - z^2$ ir vesels skaitlis; ja pie tam $x \geq y \geq z$, tad $x^2 + y^2 - z^2 > 0$, tātad ir naturāls skaitlis. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

7.2.B4. Sauksim par rādītāja pagarinājumu staru, kas iziet no ciparnīcas centra pretēji rādītāja virzienam (skat. A241. zīm.)



A241. zīm.

Viegli saprast: laika moments ir slikts tad un tikai tad, ja kāds rādītājs atrodas leņķī (mazākā par 180°), ko veido abu pārējo rādītāju pagarinājumi (skat. A242. zīm.)



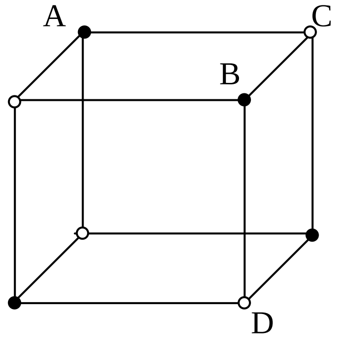
A242. zīm.

Ievērosim: ik pēc 6 stundām minūšu un sekunžu rādītāju pozīcijas atkārtojas, bet stundu rādītāja virziens mainās uz pretējo. Tāpēc 6 stundas pēc slikta momenta noteikti ir labs moments.

Bet ir arī labi momenti, 6 stundas pēc kuriem ir labs moments, piem., laika intervāls no 3 st. 0 min. 0 sek. līdz 3 st. 0 min. 15 sek. un tam atbilstošais intervāls no 9 st. 0 min. 0 sek. līdz 9 st. 0 min. 15 sek. No tā seko, ka diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā.

7.2.B5. Principā uzdevumu varētu atrisināt, pārbaudot visas iespējas, kā skaitļi uzrakstāmi kuba virsotnēs. Tomēr šādu iespēju ir ļoti daudz, un tāds risināšanas ceļš aizņemtu daudz laika. Tālāk dotajā risinājumā visi daudzie gadījumi apvienoti dažos „tipiskajos”, tādējādi samazinot veicamā darba apjomu.

Izkrāsojam kuba virsotnes baltā un melnā krāsā, kā parādīts A243. zīm. Katra šķautne savieno vienu baltu un vienu melnu virsotni.



A243. zīm.

Lauztu līniju, kas savieno kuba divas pretējas virsotnes un sastāv no 3 šķautnēm, sauksim par ceļu. Skaidrs, ka katrs ceļš satur 2 melnas un 2 baltas virsotnes. Tālākajam svarīgs būs šāds apgalvojums:

* ja mēs izvēlamies 3 virsotnes, kas visas nav vienā krāsā, tad eksistē 2 ceļi, katrs no kuriem satur šīs 3 virsotnes.

Apgalvojumu (*) viegli pārbaudīt, ja 3 tajā minētās virsotnes ir A, B, C vai A, B, D; visi citi gadījumi ir līdzvērtīgi vienam no šiem diviem.

Tagad apskatīsim dažādus „lielo skaitļu” izvietojumus.

a) 6;7;8 nav vienā un tai pašā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šis ceļš der par minēto, jo 6 + 7 + 8 = 21.

b) 5;7;8 nav vienā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šī ceļa ceturtajā virsotnē ir skaitlis x, kur $x \geq 1$. Tāpēc šajā ceļā skaitļu summa ir $5+7+8+x=20+x\geq 21$.

c) ja neizpildās ne a), ne b), tad visi „lielie” skaitļi 5;6;7;8 ir vienā krāsā (varam pieņemt, ka melnā). Tad 4 ir baltā krāsā. Apskatīsim tos 2 ceļus, kas satur 4;7;8. Vienā no tiem ceturto skaitli apzīmēsim ar x, otrā – ar y. Tad šajos ceļos skaitļu summas ir 19 + x un 19 + y. Vai nu x, vai y ir lielāks par 1, tātad vismaz 2. Atbilstošais ceļš der par meklēto.

7.2.B6. Sanumurēsim figūriņas sākuma pozīcijā no kreisās uz labo pusi ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 9 (skat. A244. zīm.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

A244. zīm.

Pieņemsim, ka figūriņas nostājušas tā, kā prasīts uzdevumā. Pastāv divas iespējas:

a) figūriņa Nr.9 nav pārbīdījusies,

b) figūriņa Nr.9 ir pārbīdījusies.

Parādīsim, ka iespēja a) patiesībā nevar būt. Tiešām, ja figūriņa Nr.9 palikusi uz vietas, tad vienīgais sākuma pozīcijā iespējamais gājiens ir lēciens ar figūriņu Nr.8, iegūstot A245. zīm. parādīto situāciju.

1	2	3	4	5	6	7		9	8	...

A245. zīm.

Tā kā beigās figūriņām jāstāv pēc kārtas, tad gan Nr.9, gan Nr.8 atrodas savās beigu pozīcijās. Tāpēc tās vairs nepārvietosies; ja tās pārvietotos, tad vairs nevarētu atgriezties šajās pozīcijās, jo kustība notiek tikai vienā virzienā.

Bet tādā gadījumā Nr.9 un Nr.8 veido „mūri”, kuram pāri nevar tikt citas figūriņas, un tātad beigās figūriņas nevar novietoties vajadzīgajā secībā. Tātad a) tiešām nav iespējama.

Tāpēc realizējas b), un Nr.9 ir pārbīdījusies vismaz 1 vietu pa labi. Pa labi no Nr.9 beigu pozīcijas jābūt vietai pārējām 8 figūriņām; tāpēc kopīgais rūtiņu skaits uz lentas ir vismaz n = 9 + 1 + 8 = 18.

Parādīsim, ka pie n = 18 uzdevuma prasības ir izpildāmas. Izdarām šādus pārvietojumus:

1) pārbīdām Nr.9 vienu vietu pa labi; iegūstam A246. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6	7	8		9								

A246. zīm.

2) ar 2 lēcieniem un 1 pārbīdīšanu novietojam īstajā vietā Nr.7; iegūstam A247. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6		8		9		7						

A247. zīm.

3) līdzīgā ceļā pēc kārtas novietojam beigu pozīcijās Nr.5, Nr.3, Nr.1, iegūstot A248. zīm. attēloto situāciju.

	2		4		6		8		9		7		5		3		1

A248. zīm.

4) ar vienu pārbīdīšanu un 7 lēcieniem nogādājam īstajā vietā Nr.2, iegūstot A249. zīm. attēloto situāciju.

			4		6		8		9		7		5		3	2	1

A249. zīm.

5) līdzīgā ceļā pēc kārtas nogādājam īstajās vietās Nr.4, Nr.6, Nr.8.

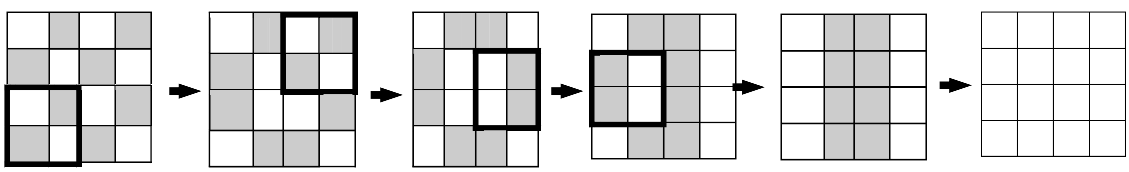
Tātad uzdevuma atbilde ir „18”.

7.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.3.A1. Atbilde: jā, var.

Vispirms parādīsim, kā var panākt, lai kvadrātā ar izmēriem 4×4 rūtiņas visas rūtiņas būtu baltas (skat. A250. zīm.)



A250. zīm.

Sadalot šaha galdiņu četros kvadrātos ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrs un katru no tiem pārkrāsojot atsevišķi, iegūstam vajadzīgo.

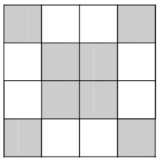
7.3.A2. Atbilde: 6 akmeņi.

Skaidrs, ka akmeņus, kuru masas ir 30 kg; 30 kg; 30 kg; 10 kg; 10 kg; 10 kg, var sadalīt prasītajā veidā, jo 30 + 10 = 30 + 10 = 30 + 10 un 30 = 30 = 30 = 10 + 10 + 10.

Parādīsim, ka mazāk par 6 akmeņiem nevar būt.

Paņemsim, ka kaudzē ir ne vairāk kā 5 akmeņi. Dalot tos 3 daļās, vismaz vienā kaudzē būs viens akmens (ja katrā kaudzē būtu vismaz 2 akmeņi, tad akmeņu kopīgais skaits būtu vismaz $3 \cdot 2 = 6$ – pretruna). Tātad šī akmens masa ir $\frac{1}{3}M$, kur M – kopējā kaudzes masa. Bet tādā gadījumā, dalot kaudzi 4 daļās, vismaz vienas daļas masa būs ne mazāka par $\frac{1}{3}M$ (tās daļas masa, kas satur iepriekš minēto akmeni). Tā nevar būt, jo, dalot kaudzi 4 daļās, katras daļas masai jābūt $\frac{1}{4}M$, un $\frac{1}{4}M < \frac{1}{3}M$. Iegūta pretruna.

7.3.A3. Jā, var. Skat. A251. zīm., kur „lielais" kvadrāts sadalīts 4×4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās.



A251. zīm.

7.3.A4. Naturālo skaitļu virknē nepāra un pāra skaitļi izvietoti pamīšus. Tāpēc no 18 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem 9 ir pāra skaitļi, bet 9 – nepāra skaitļi. Skaidrs, ka to visu summa ir nepāra skaitlis. Sešu skaitļu summa, kas ir pirmskaitlis, ir lielāka par 2; tāpēc tā ir nepāra skaitlis. Tātad atlikušo 12 skaitļu summa ir pāra skaitlis (nepāra sk. mīnus pāra sk. = nepāra sk.). Tā kā tā ir lielāka par 2, tad tā nevar būt pirmskaitlis.

7.3.A5. Uzrakstīsim dotos iespējamos skaitļa n dalītājus sekojošā formā :

7; 2·5; 3·9; 5·7; 5·9; 7·9.

Ja n nedalītos ar 5, tad tikai trīs no tiem būtu n dalītāji; tā būtu pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad n dalās ar 5. Līdzīgi iegūstam, ka n dalās ar 7 un ar 9. Tā kā skaitļiem 5, 7 un 9 pa pāriem nav lielāka kopīga dalītāja kā 1, tad no tā, ka n dalās ar 5, 7 un 9, seko: n dalās ar $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. Vienīgie trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 315, ir 315; 630; 945. Skaitlis 315 dalās ar 7; $5 \cdot 7$; $5 \cdot 9$ un $7 \cdot 9$, bet nedalās ar $2 \cdot 5$ un ar $3 \cdot 9$; tātad tas apmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 630 dalās ar 5 skaitļiem 7; $2 \cdot 5$; $5 \cdot 7$; $5 \cdot 9$; $7 \cdot 9$, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 945 dalās ar 5 skaitļiem 7; $3 \cdot 9$; $5 \cdot 7$; $5 \cdot 9$; $7 \cdot 9$, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad uzdevuma atbilde ir n = 315.

7.3.A6. Apskatām kvadrāta četras stūra rūtiņas. Tā kā krāsošanā izmantotas tikai trīs krāsas, tad divas no šīm stūra rūtiņām nokrāsotas vienādi. Apskatām divas iespējas:

a) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas pie vienas kvadrāta malas (piem., x un y A252. zīm.) Novelkam kvadrāta viduslīniju, kas dala šo malu uz pusēm (pārtrauktā līnija A252. zīm.).

x	1		1	y
9	2		2	9
8	3		3	8
7	4		4	7
6	5		5	6

A252. zīm.

Pārlokot kvadrātu pa šo viduslīniju, vienādi nokrāsotās rūtiņas x un y sakritīs; sakritīs arī vienādi nokrāsotās to rūtiņu puses, kuras šī viduslīnija krusto. Pat ja katrā ar vienādiem numuriem apzīmēto rūtiņu pārī abu rūtiņu krāsas ir dažādas, katrā pārī pietiek pārkrāsot vienu rūtiņu tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos. Tātad nav jāpārkrāso vairāk par 9 rūtiņām.
b) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas vienas kvadrāta diagonāles galos (piem., u un v A253. zīm.).

u	3	2	1	
4	9	8		1
5	7		8	2
6		7	9	3
	6	5	4	v

A253. zīm.

Pārlokām kvadrātu pa diagonāli, kas neskar šīs rūtiņas. To, ka uzdevuma nosacījumi izpildīti, izspriež tāpat kā a) gadījumā.

B GRUPA

7.3.B1. Atbilde: nē, to izdarīt nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Apzīmēsim rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, kā parādīts A254. zīm.

r_1			
r_2			
r_3			
	k_1	k_2	k_3

A254. zīm.

Katrs no skaitļiem k_1; k_2; k_3; r_1; r_2; r_3 var pieņemt vērtības 0;1;2;3;4;5;6. Ievērosim, ka gan summa $k_1 + k_2 + k_3$, gan summa $r_1 + r_2 + r_3$ ir vienāda ar visu tabulā ierakstīto skaitļu summu; tāpēc $r_1 + r_2 + r_3 + k_1 + k_2 + k_3$ ir pāra skaitlis (divkāršota visu tabulā ierakstīto skaitļu summa). Ievērosim, ka $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ – nepāra skaitlis. Tā kā summa $k_1 + k_2 + k_3 + r_1 + r_2 + r_3$ satur sešus no saskaitāmajiem 0;1;2;3;4;5;6, tad iztrūkstošais saskaitāmais ir nepāra skaitlis. Tātad starp skaitļiem r_1; r_2; r_3; k_1; k_2; k_3 sastopami visi skaitļi 0;2;4;6 un divi no skaitļiem 1;3;5.

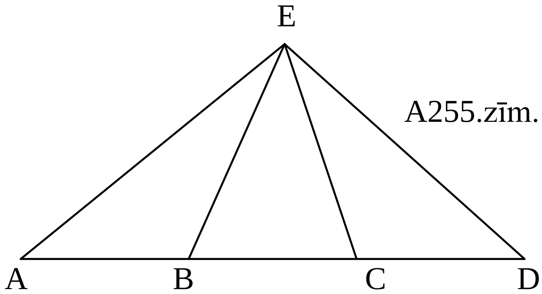
Ievērosim, ka summa 0 var rasties tikai kā $0 + 0 + 0$, bet summa 6 – tikai kā $2 + 2 + 2$. Nevar būt reizē rindiņa, kas sastāv tikai no nullēm, un kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (kas ierakstīts to kopējā rūtiņā?), vai otrādi – rindiņa, kas sastāv tikai no divniekiem, un kolonna, kas sastāv tikai no nullēm. Tāpēc varam pieņemt, ka ir kolonna, kas sastāv tikai no nullēm, un cita kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (otrs gadījums ir analoģisks). Lai visās rindiņās skaitļu summas būtu atšķirīgas, trešajā kolonnā visiem skaitļiem jābūt dažādiem; tātad tie ir $0;1;2$, un šīs kolonnas skaitļu summa ir 3. Bet tad tā ir vienāda ar tās rindas skaitļu summu, kurā atrodas „apvilktais" vieninieks. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

7.3.B2. Vieglajos maisos var būt 20kg cukura. Tāda situācija rodas, ja, piemēram, 50 maisos ir pa 400g cukura, bet 50 maisos – pa 1600g cukura. Tad visi maisi, kas satur 400g cukura, ir vieglie, un tajos kopā ir $50 \cdot 0{,}4\,\text{kg} = 20\,\text{kg}$ cukura.

Samazinot šajā piemērā vieglajos maisos esošā cukura daudzumus un attiecīgi palielinot smagajos maisos esošā cukura daudzumus, redzam, ka vieglajos maisos var būt arī jebkurš (pozitīvs) cukura daudzums, kas mazāks par 20kg.
Tagad pierādīsim, ka vieglajos maisos nevar būt vairāk cukura kā 20kg.
Skaidrs, ka vieglo maisu nav vairāk kā 50 (pretējā gadījumā nebūtu tādu 50 maisu, kas ir smagāki par smagāko no vieglajiem). Apzīmēsim vieglo maisu skaitu ar x. Pieņemsim no pretējā, ka vieglajos maisos kopā ir vairāk par 20kg cukura. Tad smagākajā no vieglajiem maisiem (apzīmēsim to ar S) ir vismaz $\frac{20}{x}$ kg cukura. Katrā no 50 maisiem, kas smagāki par S, ir vairāk nekā $\frac{20}{x}\cdot 4=\frac{80}{x}$ kg cukura. Šajos 50 maisos kopā tāpēc ir vairāk nekā $50\cdot\frac{80}{x}$ kg cukura.
Tā kā $x\le 50$, tad šis daudzums nav mazāks par 80kg. Tā ir pretruna: mēs pieņēmām, ka vieglajos maisos ir vairāk nekā 20kg cukura, tātad kopā ir vairāk nekā 80 kg + 20 kg = 100 kg cukura, bet tā nevar būt.
Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un vieglajos maisos nevar būt vairāk par 20kg cukura.

7.3.B3. Atbilde: 4.
Risinājums. Jebkuri trīs no skaitļiem 1; 3; 7; 9 summā dod pirmskaitli: 1 + 3 + 7 = 11, 1 + 3 + 9 = 13, 1 + 7 + 9 = 17, 3 + 7 + 9 = 19.
Pieņemsim, ka mums ir 5 dažādi naturāli skaitļi, un parādīsim, ka no tiem noteikti var izvēlēties tādus trīs skaitļus, kuru summa dalās ar 3. Tā kā šo trīs skaitļu summa noteikti nav mazāka par 1 + 2 + 3 = 6, tad tā nav pirmskaitlis.
Apskatīsim minēto 5 skaitļu atlikumus, kādus tie dod, dalot ar 3. Katrs atlikums var būt vai nu 0, vai 1, vai 2. Ja sastopami visi trīs atlikumi, tad ņemam vienu skaitli ar atlikumu 0, vienu skaitli ar atlikumu 1 un vienu skaitli ar atlikumu 2. Atbilstošo skaitļu summa dalās ar 3, jo 0 + 1 + 2 = 3 dalās ar 3.
Ja turpretī sastopami tikai divi dažādi atlikumi vai arī visi 5 atlikumi ir vienādi, tad var atrast 3 skaitļus ar vienādiem atlikumiem. Šo skaitļu summa dalās ar 3, jo gan 0 + 0 + 0 = 0, gan 1 + 1 + 1 = 3, gan 2 + 2 + 2 = 6 dalās ar 3.
Skaidrs: ja dažādo naturālo skaitļu ir vairāk nekā 5, tad no tiem vispirms var izvēlēties piecus un tālāk no tiem – trīs, kuru summa dalās ar 3. Tātad 4 tiešām ir lielākā vērtība, kas apmierina uzdevuma prasības.

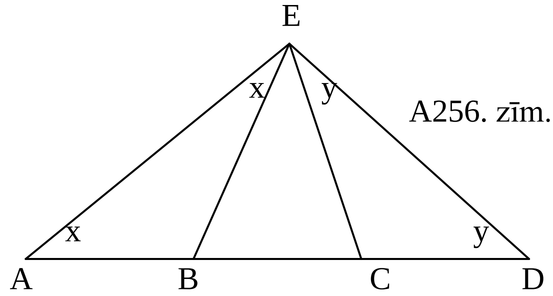
7.3.B4. Uzdevumā galvenās grūtības rada vēlēšanās noskaidrot, kuri divi no leņķiem katrā vienādsānu trijstūrī var būt vienādie.



A255.zīm.

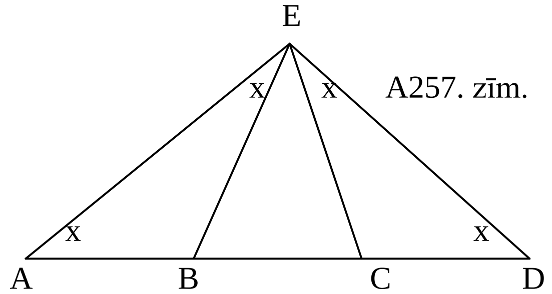
Ievērosim, ka vismaz viens no leņķiem $\angle EBC$ un $\angle ECB$ ir šaurs (jo ΔBEC nevar būt divi plati / taisni leņķi).
Pieņemsim, ka $\angle EBC$ ir šaurs (otru gadījumu analizē līdzīgi). Tad $\angle ABE$ ir plats; tāpēc ΔABE vienādi leņķi ir pie virsotnēm A un E. Apzīmēsim to lielumus ar x. Ja $\angle ACE$ būtu plats, tad ΔACE vienādi būtu leņķi pie virsotnēm A un E, bet tā nevar būt, jo

$\angle EAC = \angle AEB < \angle AEC$. Tāpēc $\angle ACE$ ir šaurs; tad $\angle ECD$ ir plats un ΔECD vienādie leņķi ir pie virsotnēm E un D. Apzīmēsim to lielumu ar y (A256. zīm.).



A256. zīm.

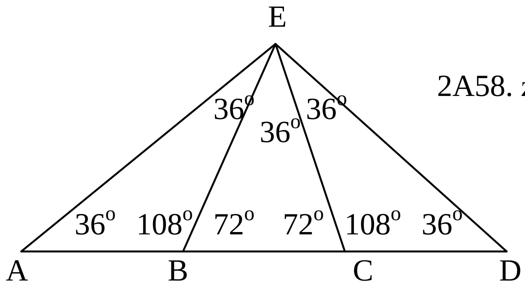
Acīmredzami, ka $\angle AED > \angle EAD$ un $\angle AED > \angle EDA$. Tāpēc vienādsānu trijstūrī AED vienādie leņķi ir pie virsotnēm A un D, t.i., x = y (A257. zīm.).



A257. zīm.

Tagad pakāpeniski iegūstam $\angle ECD = 180^o - 2x$ (no ΔECD), $\angle ECB = 180^o - (180^o - 2x) = 2x$. Tā kā $\angle ECA = 2x > x = \angle EAC$ un $\angle AEC > \angle EAC$, tad ΔACE vienādie leņķi ir $2x = \angle ACE = \angle AEC$. Tāpēc $\angle BEC = 2x - x = x$ un $\angle AED = 3x$. Tagad no ΔAED iekšējo leņķu summas iegūstam x + 3x + x = 180^o, 5x = 180^o, x = 36^o. Tātad ΔAED leņķu lielumi ir 36^o; 36^o; 108^o.

Vēl jāpārbauda, vai atrastā punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., vai visi trijstūri ir vienādsānu. Par to viegli pārliecināties A258. zīm.



2A58. zīm.

7.3.B5. Aplūkosim atlikumus, kādus ieguva, dalot doto nepāra skaitli n ar pāra skaitļiem 2; 4; 6; ... ; 2006. (Šo skaitļu skaits ir 1003.) Atlikumiem jābūt nepāra skaitļiem, un neviens no tiem nevar būt lielāks par 2006. Tātad iespējami nepāra atlikumi ir 1; 3; 5; ... ; 2005 (to skaits ir 1003). Tā kā visi iegūtie 1003 atlikumi ir dažādi, tad visām minētajām 1003 vērtībām jāparādās kā atlikumiem. Dalot ar 2, no tām iespējams tikai atlikums 1. Dalot ar 4, iespējami atlikumi 1 un 3; tā kā 1 jau ir „aizņemts”, tad, dalot ar 4, iegūst atlikumu 3. Līdzīgi, dalot ar 6, iegūst atlikumu 5; dalot ar 8, iegūst atlikumu 7; ... ; dalot ar 2006, iegūst atlikumu 2005.

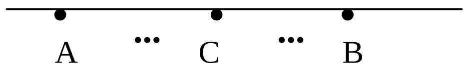
Pieņemsim, ka n izdalās bez atlikuma ar k un $k \le 1003$. Tad $n = k \cdot m_1$, m_1 – kaut kāds vesels skaitlis. Tā kā $k \le 1003$, tad $2k \le 2006$. No augstāk pierādītā seko, ka, dalot n ar 2k, iegūst atlikumu 2k-1. Tad $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$. No vienādībām $n = k \cdot m_1$ un $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$ pakāpeniski iegūstam

$$k \cdot m_1 = 2k \cdot m_2 + 2k - 1$$

$k \cdot (m_1 - 2m_2) = 2k - 1$

Kreisā puse šajā vienādībā dalās ar k, bet labā – nedalās. Tātad iegūta pretruna, un mūsu izdarītais pieņēmums ir nepareizs.

7.3.B6. Pieņemsim, ka izveidojusies situācija, kurā maiņas vairs nav iespējams izdarīt. Tas nozīmē, ka visi blakus stāvošo bērnu pāri jau ir mainījušies vietām. Ja tomēr ir kādi bērni, kas vēl nav mainījušies vietām, tad tie nestāv blakus. Atradīsim divus šādus vistuvāk stāvošos bērnus (t.i., tādus, starp kuriem stāv vismazākais daudzums citu bērnu). Pieņemsim, ka tie ir A un B. Izvēlēsimies vienu no bērniem, kas stāv starp A un B, un apzīmēsim to ar C.



A259. zīm.

Varam pieņemt, ka A, C, B stāv virzienā no kreisās uz labo pusi (skat. A259. zīm.). Tā kā C un A ir tuvāk viens otram nekā C un B, tad C un A jau ir mainījušies; līdzīgi iegūstam, ka C un B ir jau mainījušies.

Tā kā A un B nav mainījušies, tad A arī sākumā stāvēja pa kreisi no B. Tā kā A un C ir mainījušies, tad A sākumā stāvēja pa labi no C. Tā kā B un C ir mainījušies, tad B sākumā stāvēja pa kreisi no C. Esam ieguvuši, ka sākumā

- C stāvēja pa kreisi no A
- A stāvēja pa kreisi no B
- B stāvēja pa kreisi no C.

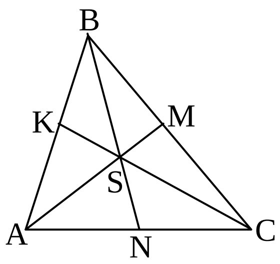
Tas vienlaicīgi nevar notikt. Tātad mūsu pieņēmums ir bijis nepareizs.

7.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.4.A1. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tātad mēs pieņemam, ka katrā kolonnā ir mazāk par 10 pāra skaitļiem. Tad visā tabulā ir mazāk par $30 \cdot 10 = 300$ pāra skaitļiem, jo tabulā ir 30 kolonnas. Bet no uzdevumā dotā seko, ka tabulā ir vismaz $20 \cdot 15 = 300$ pāra skaitli (jo tajā ir 20 rindiņas un katrā no tām – vismaz 15 pāra skaitļi). Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

7.4.A2. Kā zināms, trijstūra mediānas krustojas vienā punktā. Apzīmēsim ΔABC mediānu krustpunktu ar S.



250. zīm.

Ja X – patvaļīgs punkts, tad no trijstūra nevienādības seko, ka $AX + XM \geq AM$, $BX + XN \geq BN$ un $CX + XK \geq CK$, turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, kad X atrodas uz nogriežņa AM (resp. uz BN vai CK). Tātad

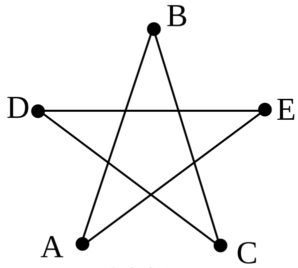
$AX + BX + CX + MX + NX + KX = (AX + XM) + (BX + XN) + (CX + XK) \geq$

$\geq AM + BN + CK$, un vērtība $AM + BN + CK$ tiek sasniegta tad un tikai tad, ja X vienlaicīgi pieder visiem nogriežņiem AM, BN, CK, resp., ja X ir ΔABC mediānu krustpunkts.

7.4.A3. Tā kā 10000 : 5 = 2000 un 10000 : 7 = 1428 atl. 4, tad no 1 līdz 10000 ieskaitot ir 2000 skaitļi, kas dalās ar 5, un 1428 skaitļi, kas dalās ar 7. Tā kā $5 \cdot 7 = 35$ un

$10000 : 35 = 285$ atl. 25, tad 285 no šiem skaitļiem dalās gan ar 5, gan ar 7. Tāpēc neizsvītroti paliek $2000 + 1428 - 285 = 3143$ skaitļi.
Lai atrastu, kurš skaitlis no neizsvītrotajiem atrodas 2006-ajā vietā, lietosim mēģinājumu un kļūdu metodi. Acīmredzot izsvītrotie skaitļi sadalās vairāk vai mazāk vienmērīgi. Tā kā $2006 : 3143 = 0{,}638...$, tad mūsu meklējamais skaitlis varētu būt apmēram $10000 \cdot 0{,}638 = 6380$. Atradīsim, cik neizsvītrotu skaitļu paliek robežās no 1 līdz 6380:
$6380 : 5 = 1276$;
$6380 : 7 = 911$ atl. 3;
$6380 : 35 = 182$ atl. 10,
tātad no 1 līdz 6380 ieskaitot paliek neizsvītroti $1276 + 911 - 182 = 2005$ skaitļi. Tātad mums jāatrod nākošais neizsvītrotais skaitlis aiz 6380. Viegli pārbaudīt, ka 6381; 6382; 6383 tiks izsvītroti, bet 6384 – nē, jo dalās ar 7.
Atbilde: 3143 skaitļi; 6384.

7.4.A4. Tā kā pārbīdīšana notiek tikai pa diagonālēm, apskatīsim diagonāļu veidoto noslēgto maršrutu ABCDEA (A261.zīm.).



A261. zīm.

Pieņemsim, ka sākumā monētas m_1, m_2, m_3 novietotas attiecīgi virsotnēs A, D, B; tad to secība minētajā maršrutā, neņemot vērā tukšās vietas starp monētām vienmēr paliks $<m_1; m_3; m_2>$ vai, līdzvērtīgi, $<m_3; m_2; m_1>$ resp. $<m_2; m_1; m_3>$. Ja vairāku pārbīžu rezultātā samainītos vietām m_1 un m_3, tad monētu secība minētajā maršrutā būtu kļuvusi par $<m_3; m_1; m_2>$. Kā redzam, neviena no šīm secībām nav starp tām, kuras mēs atzīmējām kā saglabājošās. Tāpēc uzdevumā minētā monētu pārkārtošana nav iespējama.

7.4.A5. Jā, var.
Vispirms sadalām 3 daļās ar vienādām summām skaitļus no 1 līdz 8 ieskaitot:
A: 4; 8
B: 5; 7
C: 1; 2; 3; 6
Atliek $2006 - 8 = 1998$ pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi (no 9 līdz 2006 ieskaitot). Tā kā $1998:6 = 333$, tad tos var sadalīt 333 grupās, katrā no kurām ietilpst 6 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.
Ņemam jebkuru no šīm grupām un apzīmējam tajā ietilpstošos skaitļus ar n; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$; $n + 4$; $n + 5$. Pievienojam daļai A skaitļus n un $n + 5$, daļai B – skaitļus $n + 1$ un $n + 4$, daļai C – skaitļus $n + 2$ un $n + 3$. Tā rezultātā A, B, C ietilpstošo skaitļu summas visas palielinājušās par $2n + 5$, tātad joprojām ir vienādas. Pēc tam, kad esam šādu operāciju veikuši ar visām 333 grupām, uzdevuma prasības ir izpildītas.

7.4.A6. Atbilde: skaitlis var beigties ar jebkuru ciparu no 1 līdz 9 ieskaitot.
Tiešām, piemērs 123456789123456789123456789123456789
parāda, ka skaitlis var beigties ar ciparu 9. Pārceļot pēdējo devītnieku uz skaitļa sākumu, iegūstam skaitli 912345678912345678912345678912345678,
kas beidzas ar 8 un arī apmierina uzdevuma prasības. Pakāpeniski šajā skaitlī pārceļot uz sākumu pēdējo astotnieku, pēdējo septītnieku, ..., pēdējo divnieku, iegūstam skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un beidzas ar 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1.

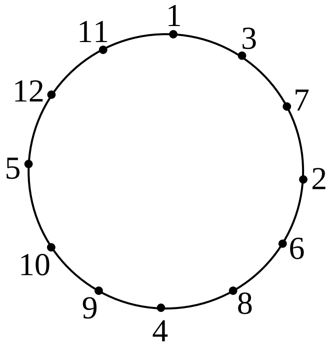
B GRUPA

7.4.B1. Olimpiādē pieņemtā punktu piešķiršanas sistēma ir līdzvērtīga sekojošai:

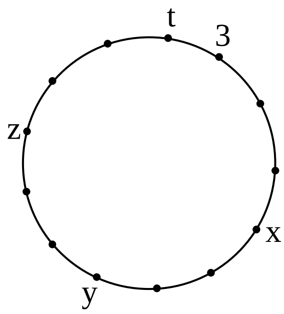
- par katru atrisinātu uzdevumu (vienalga, grūtu vai vieglu) piešķir 4 punktus;
- par katru vieglu uzdevumu (vienalga, atrisinātu vai neatrisinātu) atskaita 1 punktu.

Pēc šīs sistēmas Jānītis ir saņēmis $12 \cdot 4 = 48$ punktus, un viņam atskaitīti 48 – 18 = 30 punkti. Tātad vieglo uzdevumu olimpiādē bija 30.

7.4.B2. **a)** jā var. Skat., piem., A262. zīm.



A262. zīm.



A263. zīm.

b) nē, nevar. Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt. Kaut kur jābūt uzrakstītam skaitlim 3. Pakāpeniski iegūstam, ka ar 3 jādalās arī skaitļiem x; y; z; t (skat. A263. zīm.). Bet no 1 līdz 13 ieskaitot ir tikai 4 skaitļi, kas dalās ar 3. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

7.4.B3. **a)** acīmredzot, katras trīs taisnes veido trijstūri. Ja taisnes apzīmēsim ar a; b; c; d; e, tad trīs no tām var izvēlēties 10 veidos:

abc; abd; abe; acd; ace; ade;

bcd; bce; bde;

cde

Tātad pavisam būs 10 trijstūri.

b) pieņemsim, ka mums ir kāda 5 taišņu sistēma, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Pieņemsim vispirms, ka tajā ir 2 savstarpēji perpendikulāras taisnes l_1 un l_2. „Mazliet" pagriezīsim taisni l_2, citas taisnes nekustinot. Pagriešanas leņķi izvēlamies tik mazu, lai

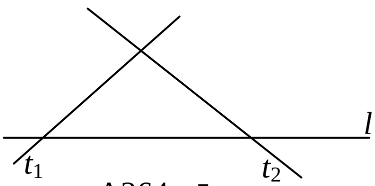
1) neviens šaurs leņķis starp taisnēm nekļūst taisns vai plats,

2) ne griešanas procesā, ne rezultātā nekādas trīs taisnes nevienu brīdi neiet caur vienu punktu un nekļūst paralēlas vai perpendikulāras.

Atkārtojot šādas pagriešanas vairākkārt (ja nepieciešamas), „likvidējam" visus savstarpēji perpendikulāro taišņu pārus. Rezultātā esam ieguvuši jaunu 5 taišņu sistēmu, kas joprojām apmierina visus uzdevuma nosacījumus, kurā nekādas trīs taisnes neveido taisnleņķa trijstūri un kurā šaurleņķu trijstūru ir tikpat, cik sākotnējā sistēmā; pārējie trijstūri tātad ir platleņķa.

Apzīmēsim šaurleņķu trijstūru skaitu ar x, bet platleņķa trijstūru skaitu ar y. No iepriekšējā zināms, ka x + y = 10.

Skaidrs, ka katrs šaurleņķu trijstūris pieskaras trim taisnēm ar diviem šauriem leņķiem, bet katrs platleņķa trijstūris šādi pieskaras tikai vienai taisnei. Tātad šādu pieskāršanos pavisam ir 3x + y.



A264. zīm.

Noskaidrosim, cik šādu pieskāršanos var būt vienai taisnei *l*. Pārējās četras taisnes attiecībā pret *l* noliektas vai nu pa labi (kā t_1 A264. zīm.), vai pa kreisi (kā t_2 A264. zīm.). Acīmredzot, *l*; t_1; t_2 veido trijstūri, kas pieskaras *l* ar diviem šauriem leņķiem, tad un tikai tad, ja viena no taisnēm t_1; t_2 attiecībā pret *l* noliekta pa kreisi, bet otra – pa labi.
Apskatām visas iespējas, kā attiecībā pret *l* var būt noliektas pārējās 4 taisnes:

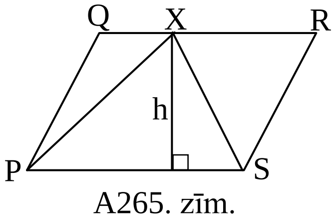
pa kreisi	pa labi	meklējamo trijstūru skaits
0	4	$0 \cdot 4 = 0$
1	3	$1 \cdot 3 = 3$
2	2	$2 \cdot 2 = 4$
3	1	$3 \cdot 1 = 3$
4	0	$4 \cdot 0 = 0$

Redzam, ka nevienai no 5 taisnēm apskatāmajā veidā nepieskaras vairāk par 4 trijstūriem. Tāpēc šādu pieskāršanos nav vairāk par 20, un iegūstam $3x + y \le 20$
Ievietojot $y = 10 - x$, iegūstam $3x + (10 - x) \le 20$, $2x \le 10$ un $x \le 5$, ko arī vajadzēja pierādīt.

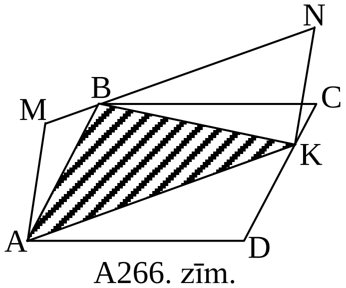
7.4.B4. Apzīmēsim ar p jebkuru pirmskaitli, ar kuru dalās n. Pieņemsim, ka, sadalot n pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p parādās a reizes; tad, sadalot n^3 pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p tur parādīsies 3a reizes.
Apzīmēsim ar d_1, d_2, d_3, d_4 tos skaitļa n dalītājus, par kuriem runā uzdevumā. Iedomāsimies uz brīdi, ka mēs protam pierādīt: **reizinājums $d_1d_2d_3d_4$ satur pirmskaitli p ne vairāk kā 3a reizes**. No tā sekotu, ka n^3 jebkuru pirmskaitli satur vismaz tikpat daudz reižu, cik to satur reizinājums $d_1d_2d_3d_4$; tātad n^3 dalās ar $d_1d_2d_3d_4$ un tātad $n^3 \ge d_1d_2d_3d_4$.
Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.
Tā kā d_1 ir n dalītājs, tad d_1 nevar saturēt pirmskaitli p vairāk nekā a reizes. Tas pats attiecas arī uz d_2; d_3; d_4. Turklāt vismaz viens no skaitļiem vispār nedalās ar p; pretējā gadījumā summa $d_1 + d_2 + d_3 + d_4$ dalītos ar p un nevarētu būt pirmskaitlis. Tātad p satur ne vairāk kā 3 no dalītajiem d_1; d_2; d_3; d_4, un neviens to nesatur vairāk kā a reizes. No tā seko izceltais apgalvojums.

7.4.B5. No kvadrātiem 8×8 varam salikt 2 taisnstūrus ar izmēriem 8×24; to laukumu starpība ir 0, tātad tie apmierina uzdevuma nosacījumus.

7.4.B6. Uzdevuma risinājums balstīts uz šādu vienkāršu lemmu.
<u>Lemma.</u> Ja PQRS – paralelograms un punkts X atrodas uz malas QR, tad ΔPXS laukums ir divas reizes mazāks par paralelograma PQRS laukumu.
Lemmas pierādījums: $L(PQRS) = PS \cdot h$ un $L(PXS) = \frac{1}{2} PS \cdot h$, tāpēc $L(PXS) = \frac{1}{2} L(PQRS)$.



A265. zīm.



A266. zīm.

Tagad atrisināsim doto uzdevumu. Saskaņā ar lemmu $L(ABK) = \frac{1}{2} L(ABCD)$ un $L(ABK) = \frac{1}{2} L(AMNK)$, tāpēc $\frac{1}{2} L(ABCD) = \frac{1}{2} L(AMNK)$, tātad L(ABCD) = L(AMNK).

7.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.5.A1. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Aplūkosim A267.zīm. rūtiņās ierakstītos skaitļus.

	e	f	i	j	k	...
a	b	c	d	x	y	

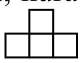
A267.zīm.

Saskaņā ar pieņēmumu jāizpildās sakarībām

$a + b + c + e > 0$

$a + b + c + f < 0$

No tām seko, ka e > f. Līdzīgi iegūstam, ka e > f > i > j > k > ... un a > b > c > d > x > y > ... .

Tā kā visi ierakstītie skaitļi ir veseli, tad, virzoties uz labo pusi, nonāksim apgabalā, kurā abās apskatāmajās horizontālēs ir tikai negatīvi skaitļi. Bet šajā apgabalā figūrā  ierakstīto skaitļu summa nevar būt pozitīva. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un prasītā ierakstīšana nav iespējama.

7.5.A2. Uzzīmēsim tik lielu riņķi, lai tā iekšpusē atrastos visi novilkto 10 taišņu krustpunkti. Tad katram bezgalīgajam apgabalam ir daļa ārpus riņķa, bet visi galīgie apgabali atrodas riņķa iekšpusē (tur atrodas arī bezgalīgo apgabalu daļas). Tāpēc bezgalīgo apgabalu ir tikpat, cik ir plaknes daļu ārpus riņķa. Ārpus riņķa ir 20 stari (pa diviem uz katras taisnes), kas savā starpā nekrustojas; tātad ārpus riņķa ir 20 plaknes daļas. Tas arī ir bezgalīgo apgabalu skaits.

7.5.A3. Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar x un y. Tad

$xy = x + y$

$xy - x - y = 0$

$xy - x - y + 1 = 1$

$(x-1)(y-1) = 1$

Tā kā x un y – naturāli skaitļi, tad $x - 1 \geq 0$ un $y - 1 \geq 0$. Skaitli 1 var sadalīt divu nenegatīvu veselu skaitļu reizinājumā tikai vienā veidā: $1 = 1 \cdot 1$.

Tāpēc x – 1 = 1 un y – 1 = 1, no kurienes x = 2 un y = 2.

7.5.A4. Apzīmēsim apskatāmā skaitļa A pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar x, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli – ar y. Tad $A = 100 \cdot x + y$. Tā kā A dalās ar x, tad arī y dalās ar x. Varam apzīmēt $y = x \cdot n$, n – naturāls skaitlis; tā kā $y \neq x$ (jo skaitlī A visi cipari ir dažādi), tad n > 1**.** Tā kā $A = 100x + y$ dalās ar y, tad iegūstam, ka

$$\frac{A}{y} = \frac{100 \cdot x + y}{y} = \frac{100 \cdot x}{n \cdot x} + 1 = \frac{100}{n} + 1 \text{ – vesels skaitlis;}$$

tātad 100 dalās ar n. Tā kā neviens no skaitļa A cipariem nav 0, tad x > 10; tāpēc n < 10 (ja būtu $n \geq 10$, tad $y = x \cdot n > 100$ – pretruna ar to, ka y – divciparu skaitlis). No trim izceltajiem apgalvojumiem seko, ka n = 2, n = 4 vai n = 5.

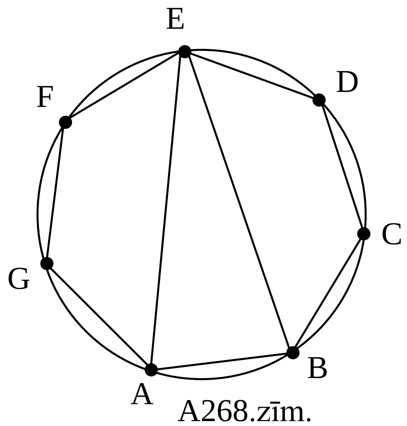
- Ja n = 2, tad y = 2x un $A = 102x = 17 \cdot 6 \cdot x$ dalās ar 17.

- Ja n = 4, tad y = 4x un $A = 104x = 13 \cdot 8 \cdot x$ dalās ar 13.
- Ja n = 5, tad y = 5x un $A = 105x = 7 \cdot 15 \cdot x$.

7.5.A5. Apskatīsim risinājumu, kas pārbauda visus iespējamos sadalījumus. Cits ceļš aplūkots 7.5.B5. uzdevuma atrisinājumā.

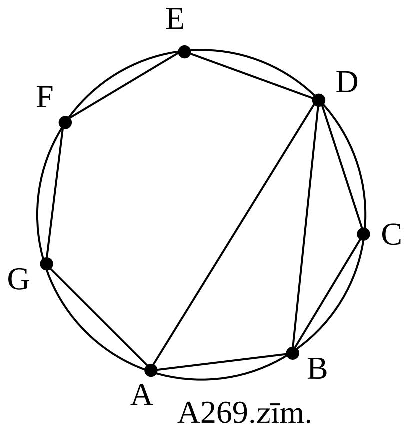
Apzīmēsim regulāro septiņstūri ar ABCDEFG. Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kuram trijstūrim pieder mala AB.

I. Mala AB ietilpst trijstūrī ABE (skat. A268.zīm.). Tad pats trijstūris ABE ir vienādsānu (AE=BE). Neatkarīgi no tā, kura diagonāle novilkta 4-stūrī AEFG resp. BEDC, viens no radušamies trijstūriem ir vienādsānu.

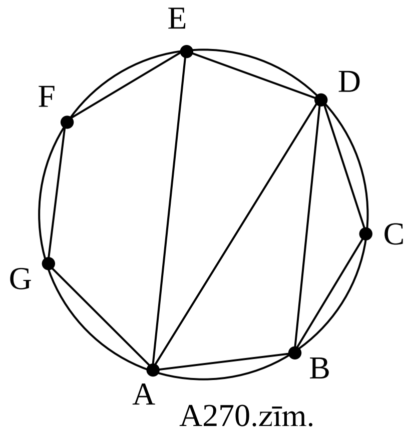


A268.zīm.

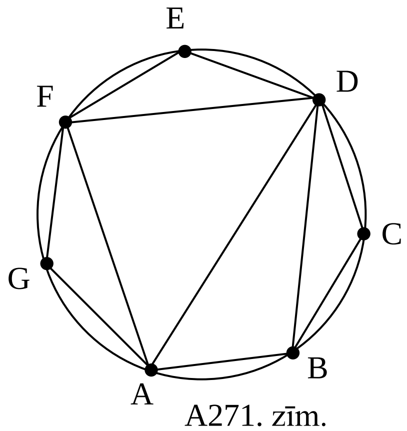
II. Mala AB ietilpst trijstūrī ABD (skat. A269. zīm.) Tad ΔBCD ir vienādsānu (CB = CD). Domājam, kā sadalīts piecstūris ADEFG. Šķirojam gadījumus atkarībā no tā, kurā trijstūrī ietilpst AD.



A269.zīm.



A270.zīm.



A271. zīm.

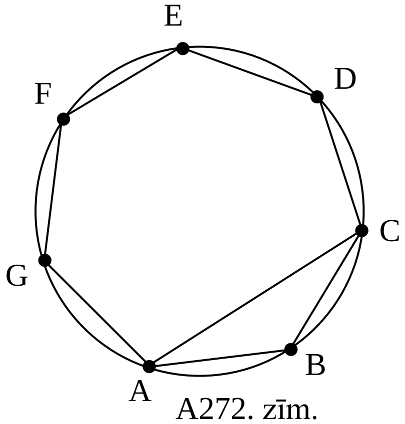
II₁. AD ietilpst trijstūrī AED; tas ir vienādsānu (AE = AD, skat. A270. zīm.). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AGFE, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.

II$_2$. AD ietilpst trijstūrī AFD (skat. A271. zīm.). Tad visi trijstūri AFD, AGF, DEF ir vienādsānu (AF = FD, AG = GF, FE = ED).

II$_3$. AD ietilpst trijstūrī AGD; spriežam analogi II$_1$ apakšgadījumam.

Gadījumu, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABF, apskata analogi nupat aplūkotajam.

III. Mala AB ietilpst trijstūrī ABC (skat. A272. zīm.). Ievērosim, ka ΔABC ir vienādsānu (AB = BC). Tālāk šķirojam apakšgadījumus.

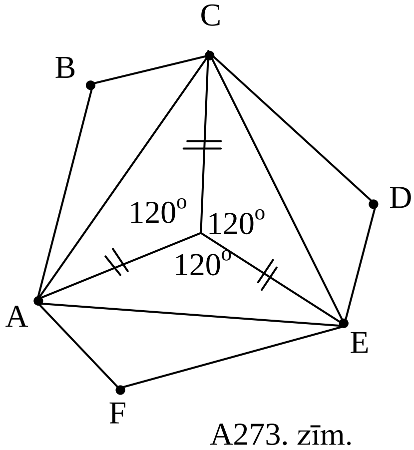


A272. zīm.

III$_1$. AC ietilpst trijstūrī ACD. Izveidojas A269. zīm. attēlotajai līdzīga aina, kas jau izanalizēta II gadījumā.

III$_2$. AC ietilpst trijstūrī AEC (A270.zīm.). Tad ΔEDC ir vienādsānu (ED = DC). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AEFG, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.

Apakšgadījumi, kad AC ietilpst trijstūrī AFC resp. AGC, līdzīgi apskatītajiem apakšgadījumiem III$_2$ resp. III$_1$.



A273. zīm.

IV. Gadījums, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABG, līdzīgs apskatītajam III gadījumam.

7.5.A6. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām. Ir 2 iespējas:

1) svari atrodas līdzsvarā. Tādu stāvokli uz svaru kausiem izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Salīdzinot tās savā starpā 4.svēršanā, noskaidrojam, kura no monētām ir 3g, kura – 4g monēta. Tad monēta, kas atradās uz viena kausa ar 4g smago monētu, sver 1g, bet tā monēta, kas atradās uz viena svaru kausa ar 3g smago monētu, attiecīgi sver 2g;
2) svari nav līdzsvarā. Ir divas iespējas: a) $1 + 2 < 3 + 4$ un b) $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzina abas monētas no smagākā pāra. Smagākā no tām sver 4g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas. Vieglākā no tām ir 1g monēta. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas vēl „neidentificētās" monētas: vieglākā no tām ir 2g smagā monēta, bet smagākā, attiecīgi, ir 3g smagā monēta.

B GRUPA

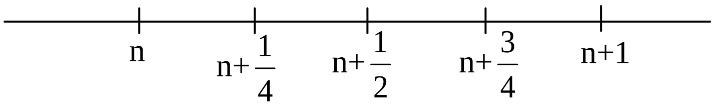
7.5.B1. Ja a ir vesels skaitlis, tad arī 4a ir vesels skaitlis. Tad

$$[4a] = 4a, \ [a] = \left[a + \frac{1}{4}\right] = \left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[a + \frac{3}{4}\right] = a$$

un vienādība ir pareiza, jo 4a = a + a + a + a.

Ja a nav vesels skaitlis, tad a atrodas starp diviem viens otram sekojošiem veseliem skaitļiem n un n + 1, t.i., n < a < n + 1.

Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kurai intervāla [n; n+1) ceturtdaļai pieder a (A274. zīm.):



A274. zīm.

- Skaitlis a pieder intervāla pirmajai ceturtdaļai, t.i., $n < a < n + \frac{1}{4}$. Tad $4n < 4a < 4n + 1$, $n + \frac{1}{4} < a + \frac{1}{4} < n + \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2} < n + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow n + \frac{3}{4} < a + \frac{3}{4} < n + 1.$

  Tāpēc [4a]=4n, [a]=n, $\left[a + \frac{1}{4}\right] = n$, $\left[a + \frac{1}{2}\right] = n$, $\left[a + \frac{3}{4}\right] = n$ un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka 4n = n + n + n + n.

- Skaitlis a pieder intervāla otrajai ceturtdaļai, t.i., $n + \frac{1}{4} \le a < n + \frac{1}{2}$.

  Tad $4n + 1 \le 4a < 4n + 2$, $n + \frac{1}{2} \le a + \frac{1}{4} < n + \frac{3}{4}$, $n + \frac{3}{4} \le a + \frac{1}{2} < n + 1$, $n + 1 \le a + \frac{3}{4} < n + 1\frac{1}{4}$. Tāpēc [4a] = 4n + 1, $[a] = \left[a + \frac{1}{4}\right] = \left[a + \frac{1}{2}\right] = n$ un $\left[a + \frac{3}{4}\right] = n + 1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka 4n + 1 = n + n + n + (n + 1).

- Skaitlis a pieder intervāla trešajai ceturtdaļai, t.i., $n + \frac{1}{2} \le a < n + \frac{3}{4}$. Tad

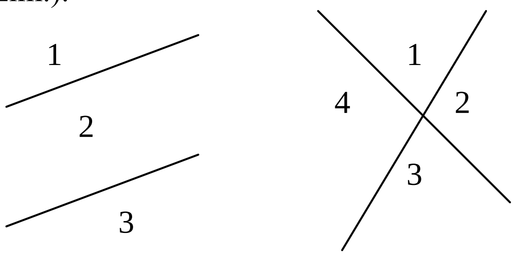
  $4n + 2 \le 4a < 4n + 3$, $n + \frac{3}{4} \le a + \frac{1}{4} < n + 1$, $n + 1 \le a + \frac{1}{2} < n + 1\frac{1}{4}$, $n + 1\frac{1}{4} \le a + \frac{3}{4} < n + 1\frac{1}{2}$. Tāpēc [4a] = 4n + 2, $[a] = \left[a + \frac{1}{4}\right] = n$ un $\left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[a + \frac{3}{4}\right] = n + 1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka 4n + 2 = n + n + (n + 1) + (n + 1).

- Skaitlis a pieder intervāla ceturtajai ceturtdaļai, t.i., $n + \frac{3}{4} \le a < n + 1$. Tad

$4n+3 \le 4a < 4n+4$, $\quad n+1 \le a+\frac{1}{4} < n+1\frac{1}{4}$, $\quad n+1\frac{1}{4} \le a+\frac{1}{2} < n+1\frac{1}{2}$,

$n+1\frac{1}{2} \le a+\frac{3}{4} < n+1\frac{3}{4}$. Tāpēc $[4a] = 4n + 3$, $[a] = n$ un $\left[a+\frac{1}{4}\right]=\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n + 3 = n + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1)$.

7.5.B2. Acīmredzot, viena taisne sadala plakni 2 apgabalos, bet divas taisnes – ne vairāk kā 4 apgabalos (skat. A275.zīm.).



A275.zīm.

Novelkot trešo taisni, uz tās rodas augstākais divi krustpunkti ar jau novilktajām. Šie jaunie krustpunkti sadala trešo taisni augstākais 3 daļās. Katra jaunās taisnes daļa sadala vienu no jau esošajiem apgabaliem divos, tāpēc apgabalu skaits pieaug par ne vairāk kā 3. Tāpēc triju taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 4 + 3 = 7 apgabali.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:
četru taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 7 + 4 = 11 apgabali
piecu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 11 + 5 = 16 apgabali
sešu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 16 + 6 = 22 apgabali
septiņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 22 + 7 = 29 apgabali
astoņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 29 + 8 = 37 apgabali
deviņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 37 + 9 = 46 apgabali
desmit taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 46 + 10 = 56 apgabali.
Skaidrs, ka 56 apgabali radīsies tad, ja katras divas taisnes krustosies un visi krustpunkti būs dažādi. Lasītājs var patstāvīgi mēģināt pierādīt: ja n taisnēm pavisam ir x krustpunkti, tad radušos plaknes apgabalu skaits ir n + x + 1.

7.5.B3. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka vai nu ab = a + b un cd = c + d, vai arī ab = c + d un cd = a + b. No 7.5.A2. uzdevuma risinājuma seko, ka pirmajā gadījumā a = b = 2 un c = d = 2; tas ir pretrunā ar doto, ka a, b, c, d – dažādi skaitļi. Tātad ab = c + d un cd = a + b.

No 7.5.A2. uzdevuma risinājuma izriet arī: ja $x \ge 2$ un $y \ge 2$ - naturāli skaitļi, tad $xy \ge x + y$ (tiešām, $xy-(x+y)=(x-1)(y-1)-1 \ge 0$). Tāpēc, ja mēs pieņemtu, ka visi skaitļi a, b, c, d ir vismaz 2, tad būtu $ab \ge a+b = cd \ge c+d = ab$. Skaidrs, ka abās vietās „$\ge$” zīmes vietā jābūt „=”, un tāpēc ab = a + b, no kurienes seko a = b = 2 (kā 7.5.A2. uzdevumā); tā ir pretruna. Tātad viens no skaitļiem a; b; c; d ir 1; varam pieņemt, ka a = 1. Iegūstam b = c + d un cd = b + 1. Tāpēc cd = c + d + 1 un (c-1)(d-1)=2. Tā kā c un d – naturāli skaitļi, tad vai nu c – 1 = 1 un d – 1 = 2, vai arī c – 1 = 2 un d-1=1. Tāpēc vai nu c = 2; d = 3, vai c = 3; d = 2. Abos gadījumos iznāk b = c + d = 5.

Līdzīgi apskata gadījumus, kad vērtība „1” ir kādam no skaitļiem b; c; d.

Tātad viens no komplektiem {a; b} un {c; d} ir {2; 3}, bet otrs – {1; 5}.

7.5.B4. Nē, tādu skaitļu nav.

Pieņemsim no pretējā, ka tādi skaitļi eksistē. No LKD(x;y) = 104 seko, ka gan x, gan y dalās ar 104; tā kā $104 = 4 \cdot 26$, tad gan x, gan y dalās ar 4. Līdzīgi no LKD(x;z) = 108 seko, ka gan x, gan z dalās ar 4. Tātad y un z abi dalās ar 4. Bet uzdevumā dots, ka $\text{LKD}(y, z) = 106 = 2 \cdot 53$. Tā ir pretruna, jo LKD(y,z) jādalās ar 4, ja gan y, gan z dalās ar 4.

7.5.B5. Skaidrs, ka neviens no trijstūriem nesatur trīs 25-stūra malas. Tātad katrs trijstūris satur nevienu, vienu vai divas 25-stūra malas. Tā kā šādu malu ir 25, bet trijstūru ir 23, tad ir vismaz 2 trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tie abi ir vienādsānu. Ja ir vēl kāds šāds trijstūris, viss kārtībā. Pieņemsim, ka ir tikai divi trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tad katrs no pārējiem trijstūriem satur tieši vienu 25-stūra malu, bet divas šī „pārējā" trijstūra malas ir 25-stūra diagonāles.

Apskatīsim abus tos trijstūrus, kas satur pa divām 25-stūra malām; sauksim tos par bāzes trijstūriem. Pārvietosimies no viena bāzes trijstūra uz otru, ar katru gājienu pārejot no iepriekšējā trijstūra uz tādu jaunu, kuram ar iepriekšējo ir kopēja mala (tā ir 25-stūra diagonāle). Saskaņā ar pieņēmumu, ka citu trijstūru, kas satur divas 25-stūra malas, bez bāzes trijstūriem nav, katrs gājiens noteikts viennozīmīgi. Pēc pirmā gājiena vienā pusē no trijstūra, kurā atrodamies, ir divas 25-stūra malas (tās, kas ietilpst pirmajā bāzes trijstūrī); ar katru gājienu šajā pusē esošo malu skaits aug par 1, ar priekšpēdējo gājienu kļūstot 23 (ar pēdējo mēs nonāksim otrā bāzes trijstūrī). Tāpēc būs tāds brīdis, kad šis skaits būs 12. Šai brīdī mēs atrodamies trijstūrī T, kam viena mala ir 25-stūra mala, bet 25-stūra pārējās 24 malas atrodas pa 12 uz katru pusi no trijstūra T. Tāpēc trijstūra T abas pārējās malas (tās, kas nav 25-stūra mala) ir vienādas, un T ir vienādsānu trijstūris.

7.5.B6. Sauksim to monētu, kas nav ne 1g, ne 4g smaga, par A, bet pārējās – par B; C; D. Ar pirmo svēršanu salīdzinām B un C. Varam pieņemt, ka B > C.

Otrajā svēršanā uz viena svaru kausa novietojam A un D, bet uz otra B un C. Šķirojam trīs gadījumus.

1) A + D = B + C. Tas var būt tikai tad, ja A un D masas ir 1g un 4g, bet B un C masas ir 2g un 3g, vai otrādi: B un C masas – 1g un 4g, bet A un D masas – 2g un 3g. Tā kā A nesver ne 1g, ne 4g, tad B un C ir masas 1g un 4g; tā kā B>C, tad B sver 4g, bet C sver 1g. Ar trešo svēršanu noskaidrojam, kura no monētām A un D ir smagāka; tā sver 3g, bet otra – 2g.

2) A + D > B + C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu A, vai D jābūt 4g smagai. Tā kā A nesver 4g, tad D sver 4g. Nevar būt, ka A sver 1g; tāpēc 1g sver vai nu B, vai C. Tā kā B > C, tad C sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un B; smagākā no tām sver 3g, vieglākā – 2g.

3) A + D < B + C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu B, vai C jābūt 4g smagai. Tā kā B>C, tad B sver 4g. Nevar būt, ka C sver 1g; tāpēc vai nu A, vai D sver 1g. Tā kā A nesver 1g, tad D sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un C; smagākā no tām sver 3g, bet vieglākā sver 2g.

7.6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

7.6.A1. Abos apskatāmajos gados ir 365 dienas. Ievērojam, ka $365 = 52 \cdot 7 + 1$. Katrās 7 pēc kārtas ņemtās dienās ir viena pirmdiena, viena otrdiena, ..., viena svētdiena, tātad 364 pēc kārtas ņemtās dienās visu nedēļas dienu ir vienādi daudzumi. Tātad pirmā apskatāmā gada pēdējā diena ir sestdiena. Tāpēc otrais apskatāmais gads sākas un arī beidzas ar svētdienu, un svētdienu tajā ir visvairāk.

7.6.A2. Apzīmēsim apskatāmos skaitļus ar

$$0 = x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{10} \le x_{11} = 1.$$

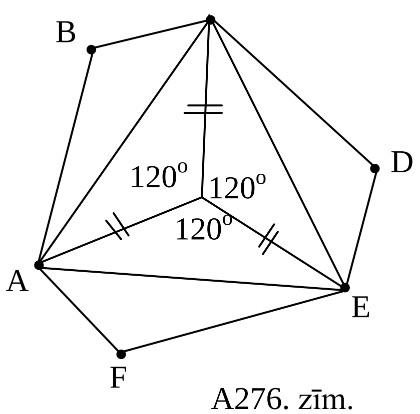
Apzīmēsim to vidējo aritmētisko lielumu ar a:

tātad $a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{11}}{11}$. Šķirosim divus gadījumus:

1) $a \le \frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_1=0$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 0 un $\frac{11a}{10}$, un to starpība ir $\frac{11}{10}a \le \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$.

2) $a \ge \frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_{11}=1$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 1 un $\frac{11a-1}{10}$, un to starpība ir $1 - \frac{11a-1}{10} = \frac{11(1-a)}{10} \le \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$.

7.6.A3. Atbilde: jā, eksistē. Skat., piem., A276.zīm., kur ΔACE ir regulārs, bet ΔABC, ΔCDE un ΔEFA ir savā starpā vienādi dažādmalu trijstūri. Uzdevumā minēto pagriešanu var izdarīt ap ΔABC centru O par 120°.



A276. zīm.

7.6.A4. Mazākie skaitļi, kurus var iegūt no 10, ir 13; 15; 16; 18; 19; 20; ... . Visus nākošos skaitļus no 10 var iegūt pēc sekojošas shēmas:

$18 \to 21 \to 24 \to 27 \to \ldots$

$19 \to 22 \to 25 \to 28 \to \ldots$

$20 \to 23 \to 26 \to 29 \to \ldots$

Viegli pārbaudīt, ka 13 un 16 nevar iegūt no 9, bet 15 nevar iegūt no 8. Tātad mazākā uzdevumā sasniedzamā 10 skaitļu kopējā vērtība varētu būt 18. To tiešām var sasniegt ar 33 gājieniem (sekojošā shēmā katram skaitlim no 1 līdz 10 uzrādīts „īsākais ceļš" līdz 18):

$1 \to 6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$2 \to 7 \to 12 \to 15 \to 18$

$3 \to 8 \to 13 \to 18$

$4 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$5 \to 10 \to 15 \to 18$

$6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$7 \to 12 \to 15 \to 18$

$8 \to 13 \to 18$

$9 \to 12 \to 15 \to 18$

$10 \to 15 \to 18$

Katram skaitam izmantots maksimāli iespējamais gājienu „+5” skaits, ar kuru vispār var nokļūt līdz 18.

Tātad mazākais gājienu skaits, ar ko var visus skaitļus pārveidot par 18, ir 33.

Tomēr mēs vēl nevaram būt pārliecināti, ka uzdevuma atbilde ir „33 gājieni”. Kā redzams no augstāk minētā, dažreiz lielākus skaitļus var sasniegt ar mazāku gājienu skaitu nekā mazākus. Varbūt kādu no kopīgām vērtībām 19; 20; 21; ... var sasniegt ar mazāk nekā 33 gājieniem?

Pieņemsim, ka a≥21. Tad a-1>15, a-2>15, ..., a-5>15. Tāpēc, lai sasniegtu vērtību a no 1; 2; 3; 4; 5, vajag vismaz 4 gājienus. Līdzīgi, lai sasniegtu vērtību a no 6; 7; 8; 8; 10, vajag vismaz 3 gājienus; tātad pavisam vajag vismaz 4·5+3·5=35 gājienus.

Tā kā 35>33, mums jāpārbauda vēl tikai skaitļu 19 un 20 sasniegšanas iespējas.

Lai sasniegtu 19, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→16→19
2→7→10→13→16→19
3→8→13→16→19
4→9→14→19
5→10→13→16→19
6→11→16→19
7→10→13→16
8→13→16→19
9→14→19
10→13→16→19.

Kopā izmantoti 34 gājieni.

Lai sasniegtu 20, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→14→17→20
2→7→12→17→20
3→8→11→14→17→20
4→9→14→17→20
5→10→15→20
6→11→14→17→20
7→12→17→20
8→11→14→17→20
9→14→17→20
10→15→20

Kopā izmantoti 37 gājieni. Tātad uzdevuma atbilde ir „ar 33 gājieniem”.

7.6.A5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. No 9 skolniekiem pavisam var izveidot 36 pārus, ja skolnieku kārtība pārī nav svarīga. (Attēlosim skolniekus ar punktiem un katrus divus punktus savienosim ar līnijām. No katra punkta iziet 8 līniju gali. Tātad līniju galu ir $9 \cdot 8 = 72$. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad līniju ir 72:2 = 36.) Katrā komisijā ir 3 skolēnu pāri, tāpēc pavisam 13 komisijās būtu $13 \cdot 3 = 39$ pāri. Tā kā 39 > 36, tad kāds pāris noteikti atkārtotos.

7.6.A6. Apzīmēsim 8g un 9g smago atsvaru daudzumus ar x resp. y. Tad 8x + 9y = 1728. Ievērosim, ka 1728 dalās ar 8, tāpēc 9y = 1728 - 8x dalās ar 8. No tā seko, ka y dalās ar 8. Tā kā 1728 dalās arī ar 9, līdzīgi iegūstam, ka x dalās ar 9. Sadalām 8 gramus smagos atsvarus grupās pa 9 un 9 gramus smagos atsvarus – grupās pa 8. Tad katras grupas svars ir 72g. Tā kā 1728:72 = 24, uzdevuma prasības ir izpildītas.

B GRUPA

7.6.B1. Atbilde: jā, eksistē.

Risinājums. Ja a = 4n, b = 4n - 1 un c = 2n - 1, kur n- naturāls skaitlis, tad

$a^2 - 1 = 16n^2 - 1 = (4n+1)(4n-1) = (4n+1) \cdot b$,

$b^2 - 1 = 16n^2 - 8n + 1 - 1 = 16n^2 - 8n = 8n(2n-1) = 8n \cdot c$,

$c^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = (n-1) \cdot 4n = (n-1) \cdot a$. Ņemot, piemēram, n = 1000, iegūstam vajadzīgo.

7.6.B2. Jā, var. Skaitļu 0 un 1 vidējā aritmētiskā vērtība ir $\frac{1}{2}$. Pārējo 9 skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība v ir starp 0 un 1, jo visi skaitļi ir šajās robežās. Tāpēc tā atšķiras no $\frac{1}{2}$ ne vairāk kā par $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{2} < \frac{11}{20}$.

7.6.B3. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Šādam 2006-stūrim leņķu summa nevar būt lielāka par $2006 \cdot 179^\circ = 359074^\circ$. No otras puses, tā leņķu summa ir $180^\circ \cdot (2006-2) = 180^\circ \cdot 2004 = 360720^\circ$. Tā kā 359074<360720, tad tāds daudzstūris nevar eksistēt.

7.6.B4. Atbilde: ar 11 gājieniem.

Risinājums. Vispirms parādīsim, kā ar 11 gājieniem mērķi var sasniegt.

Pirmajā gājienā apēdam pa 1 konfektei no visām kaudzītēm, kurās konfekšu ir nepāra daudzums. Tad visās kaudzītēs paliek pāra skaits konfekšu.

Otrajā gājienā apēdam pa 2 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4. Tad pēc otrā gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalās ar 4.

Līdzīgi turpinot, trešajā gājienā ēdīsim pa 4 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 8, utt. Tad pēc 11. gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalīsies ar 2^{11}=2048. Tā kā 2048>2006, tad šis skaits var būt tikai 0.

Tagad parādīsim, ka ar 10 gājieniem nepietiek.

Sākumā visās kastēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi. Viena gājiena rezultātā dažādo konfekšu daudzumu skaits var samazināties ne vairāk kā 2 reizes. Tiešām, ja pirms gājiena izdarīšanas bija y dažādi konfekšu daudzumi, pēc tā izdarīšanas – x dažādi konfekšu daudzumi un y>2x, tad eksistē trīs dažādi konfekšu daudzumi (no y daudzumiem), kas gājiena rezultātā visi kļuvuši par vienu un to pašu no x daudzumiem; skaidrs, ka tas nav iespējams.

Tātad pēc 10 gājieniem būs vismaz $n = \frac{2006}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{10 \text{ reizes}}}$ dažādi konfekšu daudzumi. Tā kā $2006 > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10 \text{ reizes}}$, tad n>1, tātad n≥2. Tātad visi konfekšu daudzumi kaudzēs nav vienādi, tātad, starp citu, tie nevar visi būt 0.

7.6.B5. Tādas 12 komisijas izveidot var. Ja skolniekus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F, G, H, I, tad varam izveidot komisijas ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG..

7.6.B6. Atbilde: 81 skaitli.

Risinājums. Vispirms parādīsim, ka vairāk par 81 skaitli izvēlēties nevar. Pieņemsim pretējo. Tad, tā kā 81>9·9, būtu jābūt vismaz 10 skaitļiem, kam ir viens un tas pats pirmais cipars (pirmajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). No šiem 10 skaitļiem atrastos divi, kam ir viens un tas pats otrais cipars (jo arī otrajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). Minētie skaitļi atšķiras ne vairāk kā vienā (trešajā) šķirā. Iegūta pretruna.

Tagad parādīsim, ka 81 skaitli saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvēlēties var. Uzrakstām vispirms visus 81 dažādos divciparu skaitļus, kas izveidojami no cipariem 1; 2; 3; ...; 9. Katram šādam skaitlim $\overline{ab}$ galā pierakstām tādu ciparu c, $1 \le c \le 9$, ka a + b + c dalās ar 9.

Skaidrs, ka tāds cipars c noteikti eksistē: ja a + b dod atlikumu r, dalot ar 9, tad jāņem c = 9-r. Pierādīsim, ka iegūtajā 81 trīsciparu skaitļa sistēmā katri divi skaitļi atšķiras vismaz divās šķirās.

Apskatām divus skaitļus $\overline{a_1b_1c_1}$ un $\overline{a_2b_2c_2}$. Ja $\overline{a_1b_1}$ un $\overline{a_2b_2}$ atšķiras gan pirmajā, gan otrajā šķirā, viss kārtībā. Ja vai nu $a_1 = a_2$, vai $b_1 = b_2$ (var izpildīties tikai viena no šīm vienādībām; pieņemsim, ka $a_1 = a_2$ un $b_1 \neq b_2$, otrs gadījums ir analoģisks) un ja papildus vēl būtu $c_1 = c_2$, tad no tā, ka $a_1 + b_1 + c_1$ dalās ar 9 un $a_2 + b_2 + c_2$ dalās ar 9, sekotu, ka arī starpība $(a_1 + b_1 + c_1) - (a_2 + b_2 + c_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = b_1 - b_2$ dalās ar 9.

Bet b_1 un b_2 abi ir no kopas {1; 2; 3; ...; 9}, tāpēc to starpība var dalīties ar 9 vienīgi tad, ja $b_1 = b_2$. Bet mēs jau zinām, ka $b_1 \neq b_2$. Iegūta pretruna. Tātad pieņēmums, ka $c_1 = c_2$, ir nepareizs.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās pa tēmām: skaitļu teorija, algebra, ģeometrija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 5. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēnu vecuma un tajā brīdī viņiem pieejamām zināšanām.

Algebra

Algebriski pārveidojumi – 1.1.B4., 1.6.A1., 2.3.A6., 2.6.A2., 2.6.A5., 2.6.B2., 4.2.A4., 4.4.A2., 4.4.B5., 5.1.B2., 5.4.B3., 5.5.B2., 6.1.A2., 6.1.B2., 6.1.B4., 6.3.B1., 7.1.A3., 7.1.B3., 7.2.B3., 7.6.B1.

vienādojumi – 3.2.B1., 3.3.A2., 3.4.A1., 3.4.A5., 3.5.A1., 4.6.3., 6.2.A1., 6.2.A2., 6.3.A4., 6.3.A6., 6.4.A1., 6.5.A5., 6.6.A5., 7.1.A1., 7.1.B1., 7.5.A3., 7.5.B1., 7.5.B3.

nevienādības – 1.1.B3., 1.3.B2., 1.4.B5., 2.1.B2., 2.2.A3., 2.2.B1., 2.3.B5., 2.6.A1., 3.6.A6., 3.6.B1., 3.6.B3., 4.1.A1., 4.1.A4., 4.1.B1., 4.1.B5., 4.2.A5., 5.1.A1., 5.1.B1., 5.2.A1., 5.2.B5., 5.3.A3., 5.3.B1., 5.5.B5., 6.4.A6., 7.2.A4., 7.3.B1., 7.3.B2., 7.6.A2., 7.6.B2.

vienādojumu sistēmas – 1.5.A6., 2.3.B3., 3.7.B6., 4.3.A2., 5.1.B2., 6.6.B2.

DIRIHLĒ PRINCIPS, INVARIANTU METODE – 3.6.A2., 4.1.A5., 4.2.A1., 4.2.B1., 6.3.A1.

ĢEOMETRIJA

KLASISKĀ ĢEOMETRIJA – 1.2.B2., 1.3.A4., 1.4.A2., 1.4.B2., 2.2.A2., 2.2.B5., 2.3.A2., 2.4.A5., 2.4.B2., 2.4.B6., 2.6.A4., 2.6.B4., 3.1.A2., 3.1.A4., 3.2.A5., 3.2.B5., 3.3.A6., 3.3.B4., 3.4.B2., 3.4.B5., 3.5.A5., 3.5.B5., 3.7.A1., 3.7.A5., 4.1.B2., 4.2.A6., 4.3.B3., 4.4.A3., 4.5.A2., 4.5.B2., 5.2.A4., 5.2.B1., 5.2.B4., 5.3.B4., 5.4.B4., 5.5.B3. ,6.1.B3., 6.2.A3., 6.2.B3., 6.4.A5., 6.4.B5., 6.6.A3., 7.1.A4., 7.1.B2. ,7.3.A6., 7.3.B4., 7.4.A2., 7.4.B6., 7.6.B3.

FIGŪRU *sistēmas*, PIEMĒRI – 1.2.A2., 1.2.A5., 1.5.A2., 1.5.B5., 2.3.B2., 2.3.B6., 2.4.A2., 2.4.A6., 2.4.B3., 3.1.B2., 3.4.A4., 3.5.B6., 3.6.B4., 3.7.B1., 4.1.B6., 4.2.A2., 4.4.B3., 4.5.A3., 4.5.A5., 4.5.B3., 4.5.B5., 4.5.A6., 4.5.B6., 5.1.B5., 5.4.B2., 5.5.B6., 5.6.A3., 5.6.A5., 5.6.B5., 6.2.A6., 6.3.A2., 6.4.A3., 6.4.B3., 6.5.A3., 6.6.A4., 7.1.A2., 7.1.B4., 7.2.B.1., 7.3.A3., 7.4.B3., 7.4.B5., 7.5.A2., 7.5.B2., 7.6.A3.

FIGŪRU SAGRIEŠANA UN SALIKŠANA – 1.1.A2., 1.1.A5., 1.1.B1., 1.5.A4., 2.1.A5., 2.2.A5., 2.2.B3., 2.5.A3., 2.5.A6., 2.5.B3., 2.5.B6., 3.2.A4., 3.2.B4., 3.6.A1., 3.6.A3., 4.1.A2., 4.2.B6., 4.3.A3., 4.4.B6., 5.1.A5., 5.3.A6., 5.4.A4., 5.5.A3., 5.6.B4., 6.1.B5., 6.2.B6., 6.3.B3., 6.5.B3., 7.2.A1., 7.5.A5.

INVARIANTU METODE, KRĀSOŠANA – 2.1.B5., 2.6.A3., 3.1.B4., 3.3.B3., 3.4.B4., 3.5.B3., 3.7.B5., 5.1.A4., 5.2.B6., 5.3.A6., 5.3.B3., 5.4.A5., 6.1.B5., 6.2.B6., 7.6.B3.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 1.3.A5., 1.3.B5., 1.5.B2., 3.4.A2., 3.7.A6., 4.3.A5., 4.5.B3., 5.3.B5., 6.1.A3., 6.4.B6., 7.5.B5.

EKSTREMĀLĀ ELEMENTA METODE – 5.6.A3., 6.6.B5.

SKAITĻU TEORIJA

DALĀMĪBA, DALĪŠANA AR ATLIKUMU – 1.1.A1., 1.2.B3., 1.3.A3., 1.3.A6., 1.3.B3., 1.4.A3., 1.5.B1., 1.5.B3., 1.5.B4., 2.1.A3., 2.2.A4., 2.2.B2., 2.4.B5., 2.5.A1., 2.5.B1., 3.2.A2., 3.2.B2., 3.3.A1., 3.3.B6., 3.6.A4., 3.6.A6., 3.6.B6., 3.7.A3., 4.1.B4., 4.2.A3., 4.2.B2., 4.3.A4., 4.3.B1., 4.5.A4., 4.5.B1., 4.6.5., 5.1.A3., 5.1.B3., 5.2.B2., 5.3.A5., 5.4.A6., 5.4.B1., 5.5.A1., 5.5.B1., 5.6.A1., 5.6.B1., 5.6.B2., 6.1.A1., 6.1.A4., 6.1.B1., 6.1.B6., 6.2.B2., 6.3.B2., 6.4.A2., 6.4.B1., 6.4.B2., 6.5.A2., 6.5.A5., 6.6.B2., 6.6.B3., 7.2.A2., 7.3.A4., 7.3.B3., 7.3.B5., 7.4.A3., 7.4.B2., 7.5.A4., 7.5.B4.

SKAITĻA SADALĪJUMS PIRMSKAITĻU REIZINĀJUMĀ – 1.2.A3., 1.3.A3., 1.6.B1., 2.3.A3., 2.5.A4., 3.2.B2., 3.4.A3., 3.7.A4., 3.7.B3., 5.5.B1., 6.6.A2., 7.3.A5., 7.4.B4.

SKAITĻA PIERAKSTS, ARITMĒTISKO DARBĪBU IZPILDE – 1.1.A3., 1.1.B6., 1.2.B5., 1.3.A1., 1.3.A2., 1.4.A4., 1.5.A1., 1.5.A3., 1.6.A2., 1.1.B4., 2.2.A1., 2.2.A4., 2.4.A1., 2.5.B2., 3.1.A1., 3.1.B1., 3.2.A1., 3.2.A2., 3.2.A3., 3.3.A4., 3.4.B3., 3.5.A2., 3.6.B2., 3.6.B6., 3.7.B2., 4.3.A1., 4.4.A4., 4.4.B4., 4.5.A1., 4.6.1., 5.1.A2., 5.1.B1., 5.2.A5., 5.3.A2., 5.3.B2., 5.4.B1., 5.5.A4., 6.1.A5., 6.2.B1., 6.5.A1., 6.5.B1., 6.6.A6., 7.2.B2.

GRUPĒŠANA – 1.1.B2., 1.2.A1., 3.4.A6., 3.4.B6., 3.5.B2., 5.2.A3., 6.6.A1.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 6.1.B6., 6.3.B2.

INVARIANTU METODE – 3.4.B1., 5.6.B3., 6.2.B4., 6.3.A3., 6.5.B2., 7.2.A5.

EKSTRĒMĀ ELEMENTA METODE – 5.6.B2.

KOMBINATORIKA

UZDEVUMI, KAS REDUCĒJAS UZ GRAFIEM – 3.1.B5., 4.3.B5., 4.4.A1., 4.4.A6., 4.4.B1., 5.1.B4., 5.3.A4., 6.1.A6.

SKAITĪŠANA – 2.1.A4., 2.5.A2., 2.6.A6., 3.2.A3., 4.6.2., 5.2.A2., 6.1.A1., 7.4.A3.

KOMBINATORISKAS STRUKTŪAS – 1.2.A6., 1.2.B6., 1.4.A5., 1.4.B3., 2.1.A6., 2.4.A3., 2.5.B4., 2.6.B1., 3.2.B3., 3.3.A3., 3.3.B5., 3.7.B4., 4.1.A6., 5.2.A3., 5.2.A6., 5.2.B3., 5.4.A3., 5.5.A2., 5.6.A2., 5.6.A4., 5.6.A6., 6.1.B4., 6.3.A5., 6.3.B5., 6.3.B6., 6.6.B6., 7.4.A6., 7.6.A1., 7.6.B5., 7.6.B6.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 1.3.B4., 1.4.A6., 1.6.B2., 2.5.B4., 2.6.B1., 2.6.B5., 3.1.A6., 3.1.B6., 3.2.B3., 3.5.A3., 4.1.B3., 4.2.B4., 4.3.B5., 4.4.A1., 5.3.A1., 6.1.B4., 6.3.A5., 6.3.B5., 6.5.B4., 7.2.B4., 7.2.B5., 7.2.B6., 7.6.A5., 7.6.B6.

INVARIANTU METODE – 1.1.A4., 2.2.B6., 2.6.B5., 3.1.A3., 3.1.B3., 3.3.A5., 4.4.B2., 5.5A5., 6.1.A6., 6.6.B1., 7.4.A1., 7.4.A4., 7.5.A1.

ALGORITMIKA

ALGORITMA IZSTRĀDE – 1.1.A6., 1.1.B5., 1.2.A4., 1.2.B4., 1.3.B1., 1.3.B6., 1.4.B1., 1.4.B2., 1.4.B4., 1.5.B6., 1.6.A3., 1.6.B2., 1.6.B3., 2.1.A1., 2.1.B1., 2.2.A5., 2.3.A1., 2.3.B1., 2.4.A4., 2.4.B4., 2.4.B6., 2.6.B6., 3.2.A6., 3.2.B6., 3.3.B2., 3.5.A6., 3.5.B4., 3.6.A5., 4.2.B3., 4.3.B2., 4.3.B4., 4.4.A5., 4.5.B4., 4.6.6., 5.3.B6., 5.4.A2., 5.4.B5., 5.5.A3., 5.5.A6., 5.5.B4., 5.6.B6., 6.2.A4., 6.3.B4., 6.4.A4., 6.5.B5., 7.1.A5., 7.1.A6., 7.1.B5., 7.1.B6., 7.2.A6., 7.2.B6., 7.3.A1., 7.5.A6., 7.5.B6., 7.6.A4., 7.6.A6., 7.6.B4.

PROCESU ANALĪZE – 1.1.A4., 1.2.B1., 1.4.B6., 1.5.A5., 2.1.A2., 2.2.A6., 2.2.B4., 2.3.A4., 2.3.A5., 2.3.B4., 2.5.A5., 2.5.B5., 3.5.B1., 3.6.B5., 4.1.A3., 4.2.B5., 4.5.A6., 4.5.B6., 4.6.4., 4.6.5., 5.1.A6., 5.1.B6., 5.4.A1., 5.4.B6., 5.5.A6., 6.2.A5., 6.2.B5., 6.4.B4., 6.5.A6., 6.5.B6., 6.6.B4., 7.1.B5., 7.2.A3., 7.3.A2., 7.3.B6., 7.4.A5., 7.4.B1.

LOĢISKA RAKSTURA UZDEVUMI – 1.1.A6., 1.4.A1., 2.1.A6., 2.1.B3., 2.1.B6., 2.4.B1., 2.6.B3., 3.1.A5., 3.3.B1., 3.5.A4., 3.7.A2.

LITERATŪRA

1. A. Andžāns, I. Kreicberga. Vai vari atrisināt? Rīga: Zvaigzne, 1984.
2. A. Andžāns, M. Seile, Z. Zvirbule. „Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi. Rīga: Zvaigzne ABC, 2000.
3. I. Tonov, K. Bankov, T. Vitanov, D. Rakovska. Selected Problems for 11 – 14 Years Old. Sofia: Regalia-6, 2001.
4. Sankt-Pēterburgas olimpiāžu materiāli (1970. – 2004.).
5. Maskavas olimpiāžu materiāli (1960. – 2000.).
6. „Квант” (1970. – 2005.).

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Andžāns, L. Egle, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
5. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
7. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
8. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
12. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
13. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
14. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
17. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.