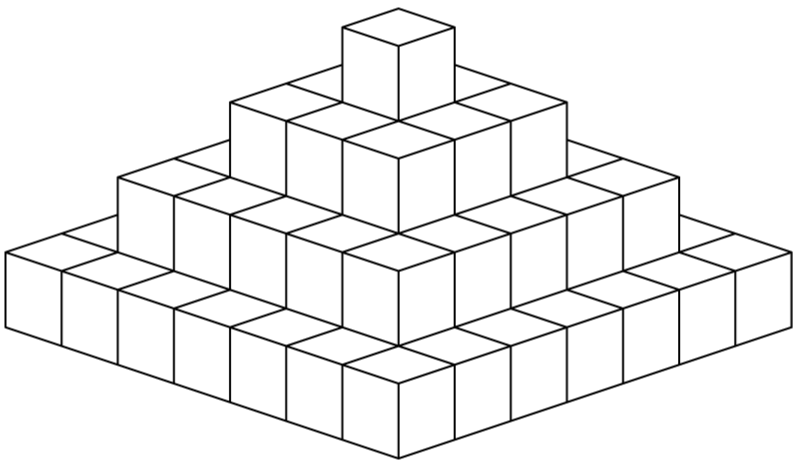
Maruta AVOTIŅA, Mārtiņš KOKAINIS

Matemātikas sacensības

9.–12. klasēm

2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā



Rīga 2015

M. Avotiņa, M. Kokainis. Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2015. – 220 lpp.

Grāmatā apkopoti 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. – 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija, Sagatavošanās un Novada matemātikas olimpiādei doti vērtēšanas kritēriji. Grāmatas sākumā dots īss teorijas izklāsts, kas varētu būt nepieciešams uzdevumu risināšanā.

Izsakām pateicību 2013./2014. un 2014./2015. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotājiem un uzdevumu autoriem Andrejam Cibulim, Filipam Jeļisejevam, Nikitam Larkam, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Jurim Smotrovam, Agnesei Šustei, Mārim Valdatam, Ingrīdai Veilandei, Jevgēnijam Vihrovam.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9934-517-95-2

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības iepriekšējā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā mūsdienu olimpiādes. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko daļu pasaules valstu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Tieši māku pierādīt kā galveno guvumu no Latvijas matemātikas olimpiādēm ir pieminējuši šobrīd pasaulslaveni latviešu zinātnieki. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.). Arī Tīmeklī atrodams bagātīgs mācību materiālu un uzdevumu klāsts. To varat sākt pārlūkot ar http://nms.lu.lv .

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs vidusskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm, un skolotājiem, lai veiksmīgi organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās. Šāda veida mācību līdzeklis kopš 2005./2006. mācību gada tiek izdots katru gadu. Lai gan dažādu gadu uzdevumu krājumu autori ir mainījušies, šajos uzdevumu krājumos iespēju robežās ir saglabāts profesora Agņa Andžāna iedibinātais formāts.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas šādas matemātikas olimpiādes, kurās 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā bija iespēja piedalīties Latvijas 9. – 12. klašu skolēniem:

- *Valsts matemātikas olimpiādes 1. posms jeb Izglītības iestādes* (*Sagatavošanās*) *olimpiāde.* Notiek kopš 1987./1988. mācību gada, tās rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Šī olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu. Lai gan katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs ieteicamie olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tikai no matemātikas skolotājiem ir atkarīgs, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi un kādus uzdevumus piedāvā skolēniem. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Valsts matemātikas olimpiādes 2. posms jeb Novada* (*agrāk – Rajona*) *olimpiāde.* Notiek kopš XX gadsimta piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Novada olimpiāde notiek novada/novadu apvienības/pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādes 3. posmā, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts matemātikas olimpiādes 3. posms jeb Valsts olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Novada olimpiāde, notiek kopš XX gadsimta piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek divas dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās tik auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, kā citās valstīs. Atklāto matemātikas olimpiādi rīko LU A. Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā. Kopš 2014./2015. gada olimpiāde vienlaicīgi notiek trīs pilsētās: Rīgā, Daugavpilī un Liepājā.
- *Starptautiskās komandu sacensības matemātikā „Baltic Way"* savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šīs sacensības pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis. Tagad sacensībās piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande (valsts, kurā notiek sacensības, var īpaši uzaicināt piedaļities vēl kādu valsti). Katra valsts šīm sacensībām izvirza piecu skolēnu komandu, kurai sacensību dienā 4,5 stundu laikā kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi.

Šajā uzdevumu krājumā apkopoti un izvērsti aprakstīti 2013./2014. un 2014./2015. mācību gada matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi, kā arī iekļauta nodaļa "Teorija" un „Ieteikumi". Šajās nodaļās skolēni var apgūt teorētisko materiālu un smelties idejas uzdevuma risināšanā, ja neizdodas uzdevumu atrisināt patstāvīgi. Skolotāji ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Grāmatā visiem uzdevumiem dots izvērsts un pilnīgs atrisinājums, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Lielākajam skaitam uzdevumu ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi, pareizi atrisinājumi. Bieži vien pat atrisinājumu idejas var būt radikāli atšķirīgas. Tāpēc doto atrisinājumu nevajag uztvert kā vienīgo iespējamo un nevajag nebaidīties meklēt jaunus ceļus līdz pilnam risinājumam.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām apgūt šos paņēmienus, lai varētu izmantot tos turpmāk.

Ceram, ka šī grāmata attīstīs Jūsu radošumu un risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Autori

TEORIJA

INVARIANTU METODE

TEORIJA NOVADA OLIMPIĀDEI

Ar vārdiem **invarianta īpašība** apzīmē īpašību, kas kādā procesā saglabājas, nemainās.

Par **invariantiem lielumiem** sauc tādus lielumus, kuri kādā procesā ir nemainīgi.

Piemēram, mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs, t.i., invariants.
Šūpojoties šūpolēs, attālums no šūpolēm līdz stienim, uz kura šūpoles ir pakārtas, ir invariants lielums, bet attālums no šūpolēm līdz šūpoļu balstiem nav invariants lielums.

INVARIANTU METODES BŪTĪBA

Ir uzdevumi, kuros ir prasīts noskaidrot, vai, izpildot noteiktas darbības, var iegūt prasīto rezultātu. Ja atbilde ir **"NĒ"**, tad pierādījumā var mēģināt lietot invariantu metodi. Uzdevuma risinājumā var vadīties pēc šāda plāna:

Jāatrod piemērota īpašība, kura
1) **piemīt sākumā dotajiem lielumiem;**
2) **ir invarianta, t.i., saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;**
3) **nepiemīt tam lielumam, kas jāiegūst galarezultātā.**

Par **invarianto īpašību** var izmantot, piemēram, elementu skaitu, summu, starpību, reizinājumu, paritāti (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmību ar 3, dalāmību ar 4, periodiskumu.

PARITĀTE

Uzdevumu risināšanas pamatā ir viens apsvērums – "**būt pāra vai nepāra skaitlim**".

1. uzdevums. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo – melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās – melnas. Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?
Atrisinājums
Uzdevuma risinājumā gan rindiņas, gan kolonnas sauksim par līnijām. Pieņemsim, ka kādā gājienā tiek izmainīts rūtiņu krāsojums līnijā t. Tabulā apskatīsim, kā gājiena rezultātā mainās melno rūtiņu skaits līnijā t un arī visā kvadrātā. Apskatīsim visus gadījumus, kā var izvietot melnās rūtiņas uz līnijas t:

Melno rūtiņu skaits līnijā t pirms gājiena	Melno rūtiņu skaits līnijā t pēc gājiena	Melno rūtiņu skaita izmaiņas (starpība)
4	0	– 4
3	1	– 2
2	2	0
1	3	+ 2
0	4	+ 4

Secinām, ka jebkura gājiena rezultātā melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par pāra skaitli. Tā kā uzdevuma sākumā ir 4 melnās rūtiņas (pāra skaitlis), tad melno rūtiņu skaits nevar kļūt vienāds ar 3 (nepāra skaitlis). Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – melno rūtiņu skaits ir **pāra** skaitlis.

2. uzdevums. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, ..., 2014. Vienā gājienā atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību. Vai iespējams, ka, veicot atļautos gājienus, uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

Atrisinājums

Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu:

$$1+2+3+...+2014=\frac{(1+2014)\cdot 2014}{2}=\frac{2015\cdot 2014}{2}=2015\cdot 1007.$$

Šī summa ir nepāra skaitlis.

Ja tiek nodzēsti divi blakus esoši skaitļi a un b, $a>b$, un to vietā uzrakstīta šo skaitļu starpība $a-b$, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par

$(a+b)-(a-b)=a+b-a+b=2b$, t. i., par pāra skaitli.

Ja visu sākumā doto skaitļu summa ir NEPĀRA skaitlis, bet, nodzēšot divus blakus esošus skaitļus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par pāra skaitli, tad, katrreiz atņemot no nepāra skaitļa pāra skaitli, iegūsim NEPĀRA skaitli. Līdz ar to skaitli 0 nevar iegūt, jo nulle ir pāra skaitlis. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – skaitļu summa ir **nepāra** skaitlis.

3. uzdevums. Uz displeja ekrāna uzrakstīta burtu virkne XXOXOO. Burtu grupu XO var aizstāt ar OOXXOO, bet burtu grupu OOX var aizstāt ar burtu X. Vai, izpildot šādas operācijas, var iegūt burtu virkni OXOXOXOXOXOXOXO?

Atrisinājums

Aplūkosim burtu X un burtu O skaita starpību.

Sākumā virknē šī burtu skaita starpība ir nulle, bet beigu virknē tā ir (–1).

Izdarot pirmā veida aizvietošanu, šī starpība samazinās par 2, bet, izdarot otrā veida aizvietošanu, tā palielinās par 2 (skat. tabulu).

	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	Starpības izmaiņas
XO→OOXXOO	1	1	0	2	4	–2	**–2**
OOX→X	1	2	–1	1	0	1	**+2**

Redzam, ka ar katru pieļaujamo operāciju starpība starp burtu O skaitu un burtu X skaitu mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnējā burtu virknē šī starpība ir nulle (pāra skaitlis), tad tā nevar beigu virknē kļūt vienāda ar nepāra skaitli (–1). Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – X un O skaita starpība virknēs, ko var iegūt uz ekrāna, ir **pāra** skaitlis.

DALĀMĪBA UN SPECIFISKAS ATLIKUMU VĒRTĪBAS

Dažreiz par invarianto īpašību var izvēlēties, piemēram, īpašību “**dalīties ar 3**”, “**dalot ar 3**, **dot atlikumu 1**”, “**dalot ar 3**, **dot atlikumu 2**”, “**dalīties ar 4**” utt.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2 (vai 5), ja tas beidzas ar pāra ciparu (ar 0 vai 5);
- skaitlis dalās ar 3 (vai 9), ja tā ciparu summa dalās ar 3 (vai 9);
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 3 (vai 9), ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 3 (vai 9) šī skaitļa ciparu summu.

4. uzdevums. Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

a) reizināt ar 2;

b) dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;

c) pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2015 var iegūt skaitli 20152015).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2015?

Atrisinājums

Izpētīsim vispirms abus skaitļus: doto un to, kuru jāiegūst. Skaitlim 24 izpildās īpašība "dalās ar 3", bet skaitlim 2015 šī īpašība nepiemīt.

Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, arī dalīsies ar 3. Tiešām:

a) ja n dalās ar 3, tad arī $2n$ dalās ar 3,

b) ja pāra skaitlis $2n$ dalās ar 3, tad n dalās ar 3,

c) apgalvojums par trešo operāciju izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa dalās ar 3, tad arī jauniegūtā skaitļa $\overline{nn}$ ciparu summa dalās ar 3, jo tā ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa. Tātad arī pats jauniegūtais skaitlis $\overline{nn}$ dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļi, kurus var iegūt no 24, dalās ar 3. Bet skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar uzdevumā dotajām operācijām skaitli 2015 nevarēs iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visi iegūtie skaitļi **dalās ar 3**.

5. uzdevums. Uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 2, 3, 4, 5. Atļauts izvēlēties dažus no tiem un sastādīt no tiem skaitli A. Pēc tam skaitli A reizina ar 13, un ciparus, kurus iegūst reizināšanas rezultātā, uzraksta uz tāfeles izvēlēto ciparu vietā. (Piemēram, izvēloties ciparus 2, 3, 4, varam no tiem sastādīt skaitli $A = 324$ un iegūt skaitli $13 \cdot A = 13 \cdot 324 = 4212$, pie tam cipars 2 tiek iegūts divas reizes. Tagad uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 1, 2, 2, 4, 5).

Vai ar aprakstīto operāciju palīdzību var panākt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti cipari:

2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ?

Atrisinājums

Izmantosim, ka naturāls skaitlis, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 3.

Ja vienas operācijas izpildes sākumā izvēlēto ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu r, tad tādu pašu atlikumu r dod arī no šiem cipariem izveidotais skaitlis A. Tā kā $13A = A + 12A$, un $12A$ dalās ar 3, tad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī jauniegūtais skaitlis $13A$; tātad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī to ciparu summa, kurus operācijas izpildes beigās uzraksta uz tāfeles sākumā izvēlēto ciparu vietā. Tātad operācijas izpildes gaitā nemainās uz tāfeles uzrakstīto ciparu summas atlikums, dalot to ar 3.

Ievērosim, ka sākumā uzrakstīto ciparu summa ir 14, un tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad visām ciparu virknēm, kas parādās uz tāfeles, ir atlikums 2, dalot to summu ar 3.

Bet galarezultātā prasītās virknes ciparu summa ir $2 \cdot (2+3+4+5+6+7) = 2 \cdot 27 = 54$; tā dod atlikumu 0, dalot ar 3.

Tātad prasīto ciparu virkni nevar iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – uz tāfeles esošo ciparu summa, **dalot to ar 3, dod atlikumu 2**.

PERIODISKUMS

6. uzdevums. Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākamais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

Atrisinājums

Pāra skaitļus apzīmēsim ar *p*, bet nepāra skaitļus – ar *n*.

Ievērojam, ka $n+n=n$, $n+p=n$, $p+n=n$, $p+p=p$.

Tā kā virknes locekļus nosaka divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars, tad tā veidojas šādi: *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; ... .

Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa (*n*; *p*; *n*). Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – virknē **periodiski atkārtojas grupa (*n*; *p*; *n*).**

SAREŽĢĪTĀKI INVARIANTI

7. uzdevums. Rindā uzrakstīti 2015 vieninieki. Atļauts nodzēst jebkurus divus uzrakstītus skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt vienu jaunu skaitli $\frac{a+b}{4}$. Tā turpina, kamēr paliek uzrakstīts viens skaitlis. Vai var gadīties, ka tas ir mazāks nekā $0{,}0001$?

Atrisinājums

Pieņemsim, ka tiek nodzēsti skaitļi *a* un *b* un to vietā uzrakstīts skaitlis $\frac{a+b}{4}$.

Pierādīsim, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{1}{\frac{a+b}{4}}$ (1), t. i., katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa nepalielinās.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam:

$$\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b} \quad\Rightarrow\quad (a+b)^2\geq 4ab \quad\Rightarrow\quad a^2+2ab+b^2\geq 4ab \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad a^2-2ab+b^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (a-b)^2\geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī nevienādība (1) ir patiesa.

Sākumā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa ir $2015\cdot\frac{1}{1}=2015$; tātad arī beigās tā nav lielāka kā 2015. Ja beigās palikušo vienīgo skaitli apzīmējam ar *x*, tad šī summa ir $\frac{1}{x}$; tāpēc $\frac{1}{x}\leq 2015$ un $x\geq\frac{1}{2015}>\frac{1}{10000}=0{,}0001$. Tātad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis nevar būt mazāks nekā $0{,}0001$. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visu ierakstīto **skaitļu apgriezto lielumu summa vienmēr lielāka vai vienāda ar 2015**.

PAR KĀDU BIEŽI SASTOPAMU KĻŪDU

Gadījumos, kad zināms, ka kāda īpašība piemīt sākotnējam lielumam, saglabājas izpildāmo gājienu rezultātā un piemīt arī beigās vajadzīgajam rezultātam, tad šī informācija vien vēl **neļauj secināt**, vai vajadzīgais beigu rezultāts iegūstams no sākotnējā lieluma, izpildot pieļautos gājienus. Tādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi – varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu, u.t.t.

Ja izdodas atrast īpašību, kas

1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem,
2) ir invarianta, t.i., saglabājas, veicot pieļaujamās operācijas,
3) piemīt tiem lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā,

tad no tā vien vēl **nevar secināt**, ka galarezultātā vajadzīgos lielumus tiešām varēs iegūt.

8. uzdevums. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2016. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 1000?

Kurš no risinājumiem ir pareizs?

Jānīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 1000 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 1000 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

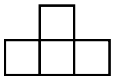
Pēterīša spriedums ir pareizs, bet Jānīša spriedums ir kļūdains.
Jānītis savā risinājumā koncentrējās uz īpašību "būt pāra skaitlim". Viņš atzīmējis, ka šī īpašība piemīt gan visiem skaitļiem, kurus var iegūt, gan arī skaitlim 1000, par kura iegūšanas iespējām jautāts uzdevumā. Tātad Jānītis konstatējis, ka ar skaitļa paritāti saistīti apsvērumi **netraucē** skaitļa 1000 iegūšanai. Bet no tā vēl neizriet, ka 1000 iegūšanai netraucē nekādi citi apsvērumi! Gluži otrādi, kā to savā risinājumā atradis Pēterītis, dalāmība ar 3 ir apsvērums, kas parāda, ka 1000 ar atļautajiem gājieniem nevar iegūt.
Situācija ir apmēram tāda pati, kāda rastos, ja Jānītim un Pēterītim būtu uzdots noskaidrot, vai celiņu cauri džungļiem no Mumbo ciema uz Tumbo ciemu neapdraud nekādas briesmas. Jānītis, ķīmiski analizējot gaisa sastāvu, nekļūdīgi noskaidro, ka celiņa tuvumā nav neviena lauvas, un no tā secina, ka var droši doties ceļā. Turpretī Pēterītis koncentrējas uz jaguāru meklēšanu un konstatē, ka 10 metrus no celiņa guļ vesela jaguāru saime. Kura zēna secinājums ir pareizs, varat saprast paši.

TEORIJA ATKLĀTAJAI MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDEI

INVARIANTU METODE – KRĀSOŠANA

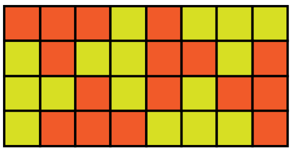
Invariantu metodi var izmantot arī uzdevumos par figūru sagriešanu vai salikšanu. Šādos gadījumos bieži tiek izmantota iekrāsošana.
Pats galvenais šāda tipa uzdevumos ir atrast tādu iekrāsošanas veidu, lai rastos pretruna – iekrāsoto rūtiņu skaits lielajā figūrā atšķirtos no kopējā iekrāsoto rūtiņu skaita mazajās figūrās.
Rūtiņas var iekrāsot dažādi. Visbiežāk tiek lietota iekrāsošana kā šaha galdiņam, taču rūtiņas pēc nepieciešamības var iekrāsot arī, piemēram, joslās, diagonālēs vai vispār atrast kādu citu iekrāsošanas veidu.

1. piemērs. Vai taisnstūri ar izmēriem a) 5×6, b) 4×8, c) 4×11 rūtiņas var noklāt ar 1. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

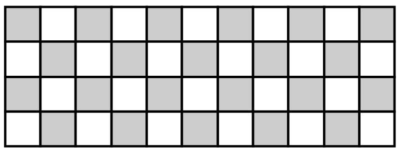


1. att.

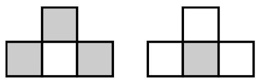
Atrisinājums
a) Nē, nevar. Ievērojam, ka katra mazā figūra satur 4 rūtiņas. Dotajā 5×6 rūtiņu taisnstūrī kopā ir 30 rūtiņas. Tā kā 30 nedalās ar 4, tad taisnstūri nevar noklāt.
b) Jā, var, skat. 2. att.
c) Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. 3. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 4. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



2. att.



3. att.



4. att.

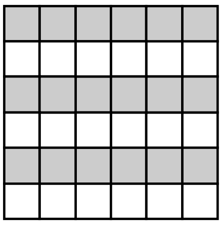
Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir

- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

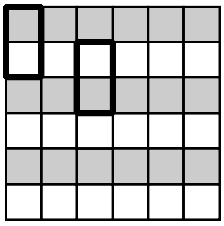
2. piemērs. Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 – vertikāli? Katrs kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas, kauliņi nedrīkst pārklāties.

Atrisinājums

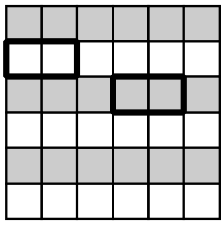
Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim doto kvadrātu joslās (skat. 5. att.). Tad kvadrātā ir 18 melnas un 18 baltas rūtiņas.



5. att.



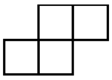
6. att.



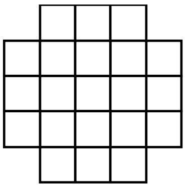
7. att.

Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur katru no tiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, viena balta (skat. 6. att.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melnas un 5 baltas rūtiņas. Nenoklātas paliek 13 melnas un 13 baltas rūtiņas. Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas, tas ir, pāra skaita melnas vai pāra skaita baltas (skat. 7. att.). Tātad ar 13 horizontālajiem kauliņiem var noklāt tikai pāra skaita melnas un pāra skaita baltas rūtiņas. Iegūta pretruna, jo pēc vertikālo kauliņu novietošanas vēl ir jānoklāj nepāra skaits melnās un nepāra skaits baltās rūtiņas.

3. piemērs. Kādu lielāko skaitu 8. att. doto figūru var izgriezt no 9. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 8. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



8. att.

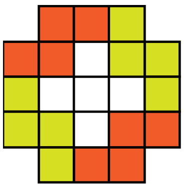


9. att.

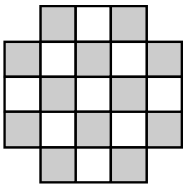
Atrisinājums

Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 4, skat. 10. att.

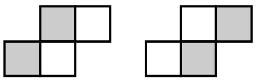
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim 9. att. figūru kā šaha galdiņu (skat. 11. att.). Lai kā novietotu 8. att. figūru, tā vienmēr noklāj tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas (skat. 12. att.). Tā kā 11. att. figūra satur tieši deviņas baltas rūtiņas, tad no tās var izgriezt ne vairāk kā četras figūras, jo $9:2=4,\ atl.\,1$.



10. att.



11. att.



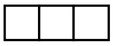
12. att.

Iegaumē!

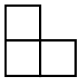
Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds ir lielākais…?”, „Kāds ir mazākais …?”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast šo vislielāko (vismazāko) vērtību un parādīt piemēru;
2) pierādīt, ka lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

4. piemērs. Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var noklāt ar 26 figūrām, kādas dotas 13. att., un vienu 14. att. doto figūru? Kvadrātam jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

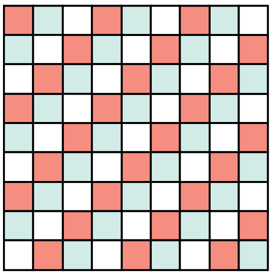


13. att.



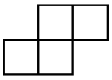
14. att.

Atrisinājums
Nē, prasīto nevar izdarīt. Izkrāsosim kvadrātu trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. 15. att.) tā, lai novietotā 14. att. figūra saturētu tieši divas vienas krāsas rūtiņas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tā satur divas zilas un vienu sarkanu rūtiņu. Tādā gadījumā nenoklātas paliek 25 zilas, 26 sarkanas un 27 baltas rūtiņas, jo kvadrātā katras krāsas rūtiņu skaits ir 27. Katra 13. att. figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu. Tā kā nenoklātajā daļā dažādo krāsu rūtiņu skaits nav vienāds, tad ar 13. att. figūrām to noklāt nav iespējams.

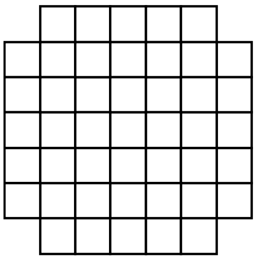


15. att.

5. piemērs. Kādu lielāko skaitu 16. att. doto figūru var izgriezt no 17. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 16. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.

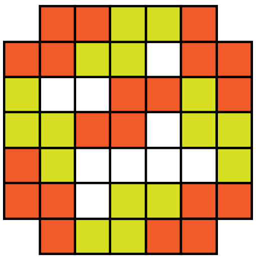


16. att.

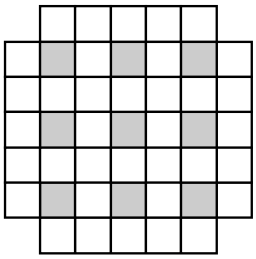


17. att.

Atrisinājums
Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9, skat. 18. att.
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim 17. att. figūru kā parādīts 19. att. Lai kā novietotu 16. att. figūru, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tā kā ir tieši deviņas iekrāsotas rūtiņas, tad nevar izgriezt vairāk kā 9 figūras.

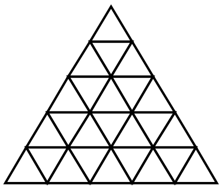


18. att.



19. att.

6. piemērs. Regulārs trijstūris ar malas garumu 5 sadalīts 25 mazākos regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. 20. att.). Kādu lielāko skaitu rombu, kas izveidots no diviem mazajiem trijstūriem, var izgriezt no dotā trijstūra?

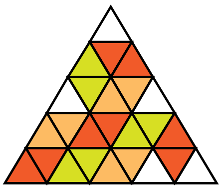


20. att.

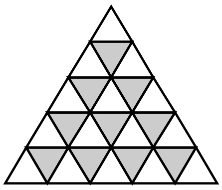
Atrisinājums

Lielākais rombu skaits, ko var izgriezt, ir 10, skat. 21. att.

Pierādīsim, ka vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar. Iekrāsosim mazos trijstūrus, kā parādīts 22. att. Ievērosim, ka katrs izgrieztais rombs satur vienu baltu un vienu melnu trijstūri. Tā kā melno trijstūru skaits ir 10, tad vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar.



21. att.

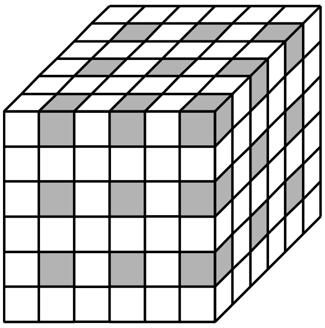


22. att.

7. piemērs. Vai kubu ar izmēriem $6 \times 6 \times 6$ vienības kubiņi var salikt no 27 paralēlskaldņiem, kuru izmēri ir $1 \times 2 \times 4$ vienības kubiņi?

Atrisinājums

Nē, nevar. Izkrāsosim kubiņus tā, kā parādīts 23. att. Izkrāsoto kubiņu skaits ir $9 \cdot 3 = 27$. Katrs paralēlskaldnis satur vai nu 0, vai 2 iekrāsotos kubiņus. Tas nozīmē, ka dotie paralēlskaldņi kopā satur pāra skaita iekrāsotos kubiņus. Tā kā ir 27 (nepāra skaitlis) iekrāsotie kubiņi, tad uzdevumā prasītais nav iespējams.



23. att.

TEORIJA GATAVOJOTIES LATVIJAS OLIMPIĀDĒM

BIEŽĀK SASTOPAMIE UZDEVUMU VEIDI

“Atrast vismazāko / vislielāko vērtību” – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām:

1) **atrast** šo vismazāko / vislielāko vērtību un **uzrādīt piemēru**;
2) **pierādīt**, ka mazāka / lielāka vērtība nevar būt.

Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2. daļu.

“Vai var ...?” – uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **“jā”**, vai atbilde **“nē”**.
Ja atbilde ir

- **“jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **“nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

“Kāds var būt ...?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības.

ALGEBRA

Saīsinātās reizināšanas formulas:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^k b^{n-1-k} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$, no kā izriet
  - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
  - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$.

Par reāla skaitļa a **moduli** jeb absolūto vērtību (apzīmē $|a|$) sauc lielāko no skaitļiem a un $-a$.
Moduļa īpašības:

- $|a| \geq 0$;
- $|a-b| = |b-a|$;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Par skaitļa x **veselo daļu** (apzīmē $[x]$) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x, t. i., tādu veselu skaitli m, ka $m \leq x < m+1$. Piemēram, $[3] = 3$, $[2{,}8] = 2$, $[-1{,}5] = -2$, $[0{,}2] = 0$.
Par skaitļa x **daļveida daļu** (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x - [x]$. Piemēram, $\{1{,}3\} = 0{,}3$.

POLINOMI

Par mainīgā x n-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kur n – vesels nenegatīvs skaitlis, $a_n, \ldots, a_1, a_0$ – patvaļīgi skaitļi ($a_n \neq 0$).

Bezū teorēma. Dalot polinomu $P(x)$ ar binomu $x - a$, atlikumā iegūst $P(a)$, t. i., skaitli, kas ir polinoma P vērtība pie $x = a$.

Algebras pamatteorēma. n-tās pakāpes polinomam ir ne vairāk kā n saknes.

KVADRĀTTRINOMS UN KVADRĀTVIENĀDOJUMS

Polinomu, kuru var pierakstīt formā $ax^2 + bx + c$, kur a, b un c – reāli nenulles skaitļi, sauc par **kvadrāttrinomu**.
Par **kvadrātvienādojumu** sauc vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$, kur x ir mainīgais, bet a, b, c ir reāli skaitļi ($a \neq 0$).
Kvadrātvienādojuma **sakņu skaits** ir atkarīgs no diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ vērtības:

- $D < 0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D = 0$ – vienādojumam ir viena sakne jeb divas vienādas saknes $x = -\frac{b}{2a}$
- $D > 0$ – vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Vjeta teorēma: kvadrātvienādojuma saknes apmierina $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Kvadrāttrinomu var **sadalīt reizinātājos** izmantojot formulu:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

FUNKCIJAS

Funkciju f sauc par **pāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = f(x)$. Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret y asi.
Funkciju f sauc par **nepāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = -f(x)$. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, t. i., punktu $(0; 0)$.
Funkciju sauc par **augošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1, x_2, kurām izpildās $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkciju sauc par **dilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1, x_2, kurām izpildās $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$.
Ja funkcija kādā intervālā ir tikai dilstoša vai tikai augoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju.

Funkciju vispārīgās īpašības:

- ja funkcija f ir augoša, tad funkcija $(-f)$ ir dilstoša;
- divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;
- pāra funkciju summa (reizinājums) ir pāra funkcija;
- divu nepāra funkciju reizinājums (dalījums) ir pāra funkcija;
- pāra un nepāra funkcijas reizinājums (dalījums) ir nepāra funkcija.

Funkcijas f grafika krustpunkti ar x asi ir vienādojuma $f(x) = 0$ saknes.
Funkciju f un g **grafiku krustpunktu *x* koordinātas** ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

FUNKCIONĀLVIENĀDOJUMI

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kas kā mainīgo satur nezināmo funkciju.
Risināšanas metodes:

- dažādu vērtību ievietošana (piemēram, $x = 0$, $x = 1$, $x = y = 0$);
- substitūciju metode (jāievēro sākotnējais definīcijas apgabals);
- ekvivalentu pārveidojumu veikšana;
- nenoteikto koeficientu metode.

Elementārās funkcijas. Ja f ir nepārtraukta funkcija, kas visiem $x, y \in \mathbb{R}$ apmierina vienādību:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Košī vienādība), tad $f(x) = Cx$, kur $C = f(1)$ ir konstante;
- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = C^x$, kur C – konstante;
- $f(xy) = f(x) + f(y)$, tad $f(x) = C \ln(x)$, kur C – konstante;
- $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = x^C$, kur C – konstante;
- $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (Jensena vienādība), tad $f(x) = C_1 x + C_2$, kur C_1, C_2 ir konstantes.

KLASISKĀS NEVIENĀDĪBAS

Reāla skaitļa (izteiksmes) kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs: $a^2 \geq 0$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo ģeometrisko** $A \geq G$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

jeb

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

visiem pozitīviem skaitļiem a_i, $i = 1,2, \ldots, n$.

Secinājumi:

- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pozitīviem skaitļiem a, b;
- $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ja x ir pozitīvs skaitlis.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko** $Q \geq A$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko** $A \geq H$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

visiem pozitīviem skaitļiem a_i, $i = 1,2, \ldots, n$.

Piezīme. $Q \geq A \geq G \geq H$.

Košī nevienādība:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2,$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi.

PROGRESIJAS

Virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par **aritmētisko progresiju**. Šo skaitli sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci** un apzīmē ar *d*: $a_{n+1} = a_n + d$.

Lai definētu aritmētisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un diferenci. Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Aritmētiskās progresijas pirmo *n* locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Virkni, kuras katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu nenulles skaitli, sauc par **ģeometrisko progresiju**. Šo skaitli sauc par ģeometriskās progresijas **kvocientu** q: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.
Lai definētu ģeometrisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un kvocientu. Lai aprēķinātu virknes n-to locekli, lieto formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$.
Ja $|q| < 1$, tad ģeometrisko progresiju sauc par **bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju** un tās visu locekļu summu aprēķina pēc formulas $S = \frac{b_1}{1-q}$.

TRIGONOMETRIJA

Pamatidentitāte

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Leņķu summas un starpības formulas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha\,;$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Divkāršā leņķa formulas

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta\,;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

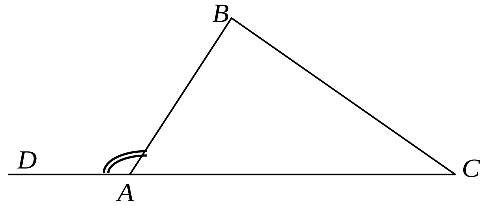
Pakāpes redukcijas formulas

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

ĢEOMETRIJA

TRIJSTŪRI

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.
Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis (skat. 24. att.).



$\angle BAD = \angle ABC + \angle BCA$

24. att.

Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.

Divus trijstūrus sauc par **vienādiem**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie pilnīgi sakrīt. Ja trijstūris *ABC* ir vienāds ar trijstūri $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Trijstūru vienādības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām
- „$m\ell m$" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām;
- „$\ell m\ell$" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem.

Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi. Ja trijstūris *ABC* ir līdzīgs trijstūrim $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Līdzīgu trijstūru atbilstošo malu garumu attiecību sauc par **līdzības koeficientu**.

Trijstūru līdzības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām ;
- „$m\ell m$" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi;
- „$\ell\ell$" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem .

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu k), bet laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k$$

un

$$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2.$$

Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu k.

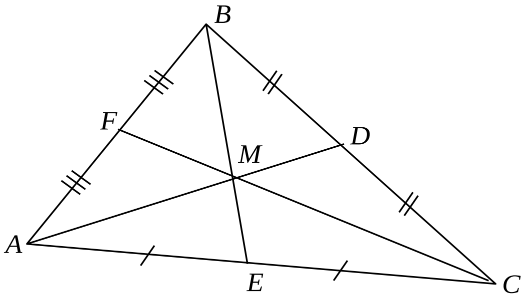
Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par trijstūra **viduslīniju**.

Viduslīnijas īpašības:

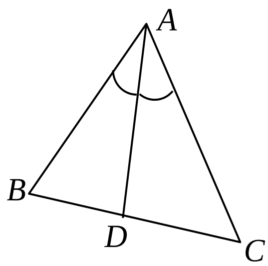
- trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- trijstūra viduslīnijas garums ir vienāda ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas;
- trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

Trijstūra mediānu īpašība. Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, t. i., $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}$, kur M – mediānu krustpunkts (skat. 25. att.).

Trijstūra bisektrises īpašība. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, t. i., $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (skat. 26. att.).



25. att.



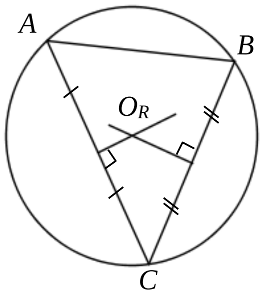
26. att.

Par nogriežņa **vidusperpendikulu** sauc taisni, kas iet caur dotā nogriežņa viduspunktu un ir perpendikulāra dotajam nogrieznim.

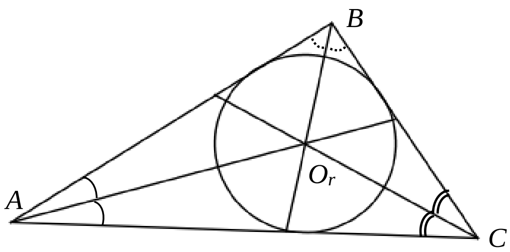
Vidusperpendikula īpašība. Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem.

Jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula.

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs (skat. 27. att.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs (skat. 28. att.).



27. att.



28. att.

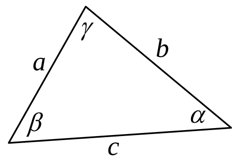
Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

$$S_\Delta = \frac{ah_a}{2} = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kur a, b, c – trijstūra malas γ – leņķis starp malām a un b, h_a – augstums, kas novilkts pret malu a, p – pusperimetrs, r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Sinusu teorēma. Trijstūra malas ir proporcionālas to pretleņķu sinusiem:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \quad \text{(skat. 29. att.)}$$



29. att.

Kosinusu teorēma. Trijstūra jebkuras malas kvadrāts ir vienāds ar abu pārējo malu kvadrātu summu, no kuras atņemts divkāršots šo malu reizinājums ar ietvertā leņķa kosinusu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(skat. 29. att.)}$$

Trijstūra nevienādības. Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un katras trijstūra malas garums ir lielāks nekā abu pārējo divu malu garumu starpība, t. i., ja a, b, c – trijstūra malu garumi, kur $a \le b \le c$, tad $a + b > c$ un $c - b < a$.

REGULĀRS TRIJSTŪRIS

Par **regulāru jeb vienādmalu trijstūri** sauc trijstūri, kuram visas malas ir vienādas.
Regulāra trijstūra visi leņķi ir vienādi, t. i., $60°$ lieli. Vienādmalu trijstūrī katra mediāna ir arī bisektrise un augstums.

Regulāra trijstūra laukums: $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kur a ir trijstūra malas garums.

Regulāra trijstūra augstums: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnija rādiuss: $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

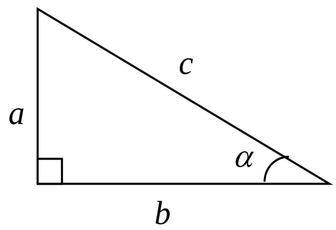
Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss: $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

TAISNLEŅĶA TRIJSTŪRIS

Pitagora teorēma. Taisnleņķa trijstūrī katešu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas garuma kvadrātu, t. i., $a^2 + b^2 = c^2$, kur a un b ir katešu garumi un c – hipotenūzas garums.

Trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī (skat. 30. att.):

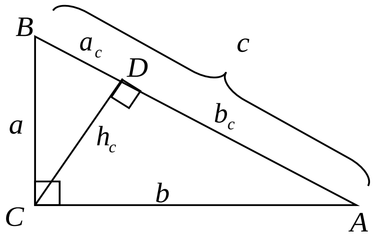
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$;
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.



30. att.

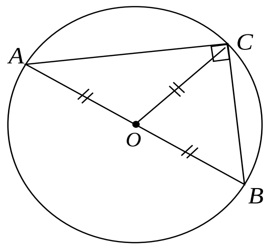
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, t. i., $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (skat. 31. att.). Ir spēkā šādas sakarības:

- $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
- $a^2 = a_c \cdot c$;
- $b^2 = b_c \cdot c$.



31. att.

Ap taisnleņķa trijstūri apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā, un tās rādiusa garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.
Taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta no taisnā leņķa virsotnes, ir vienāda ar trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu, t. i., ar pusi no hipotenūzas (skat. 32. att.).



32. att.

RIŅĶIS UN RIŅĶA LĪNIJA

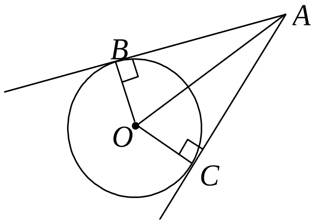
Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas **centru**, bet attiecīgo attālumu — par riņķa līnijas **rādiusu**.
Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.
Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
Par riņķa līnijas **loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.
Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.
Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.

Ar riņķi un riņķa līniju saistītās formulas:

- $D = 2R$, kur D – diametrs un R – riņķa līnijas rādiuss;
- riņķa laukums: $S = \pi R^2$;
- sektora laukums: $S_{\text{sektora}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$, kur α ir sektora centra leņķa lielums grādos;
- riņķa līnijas garums: $C = 2\pi R$;
- riņķa līnijas loka garums: $l_{\text{loka}} = \frac{\pi R \alpha}{180°}$, kur α ir lokam atbilstošā centra leņķa lielums grādos.

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti B un C – šo pieskaru pieskaršanās punkti un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 33. att.), tad

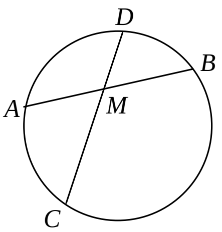
- $AB = BC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$;
- $OB \perp AB$.



33. att.

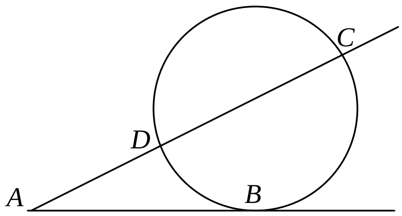
METRISKĀS SAKARĪBAS RIŅĶA LĪNIJĀ

Hordu īpašība



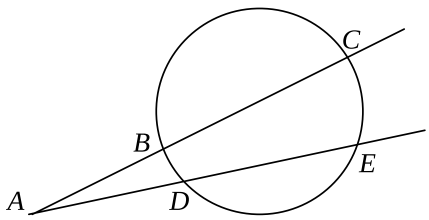
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Pieskares – sekantes īpašība



$AB^2 = AC \cdot AD$

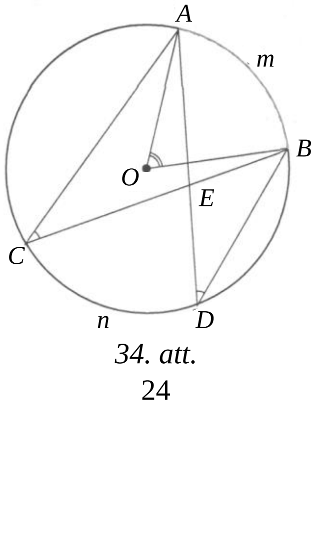
Sekanšu īpašība



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

LEŅĶI RIŅĶA LĪNIJĀ

Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju. Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka, uz kura tas balstās, leņķisko lielumu, t. i., $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}$ (skat. 34. att.).
Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.
Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma, t. i., $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ (skat. 34. att.).
Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (skat. 34. att.).
Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir 90° un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.



34. att.

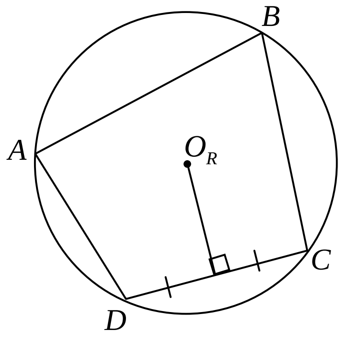
Par **hordas - pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.
Hordas - pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.

IEVILKTI UN APVILKTI ČETRSTŪRI

Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju.
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.

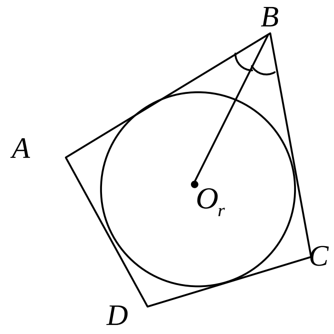
Ievilkts četrstūris



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

O_R – malu vidusperpendikulu krustpunkts

Apvilkts četrstūris



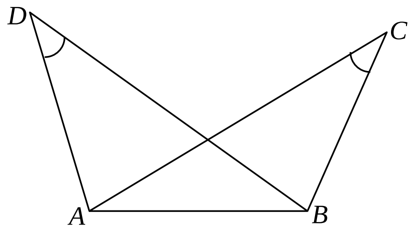
$$AB + CD = AD + BC$$

O_r – leņķu bisektrišu krustpunkts

Izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas.

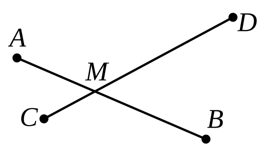
Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°;
- izpildās vienādība $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$ (skat. 35. att.);



35. att.

- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AB un CD krustpunkts (skat. 36. att.).



36. att.

- ir spēkā vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (skat. 35. att.). Šo sakarību sauc par Ptolemaja teorēmu.

SKAITĻU TEORIJA

Skaitļu iedalījums:

- $\mathbb{N}$ – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- $\mathbb{Z}$ – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- $\mathbb{Q}$ – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}$ – reālie skaitļi: racionālie skaitļi $\mathbb{Q}$ un iracionālie skaitļi (bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi, piemēram, $\sqrt{2}$, e, π).

Skaitļa pieraksts:

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis un $2n + 1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3 un $3n + 1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

DALĀMĪBA

Par vesela skaitļa b **dalītāju** sauc veselu skaitli a, ja eksistē tāds vesels skaitlis c, ka $ac = b$. Skaitli b sauc par skaitļa a **dalāmo** jeb **daudzkārtni**, bet a – par skaitļa b **dalītāju**.
Ja skaitlis b dalās ar skaitli a, tad to apzīmē ar $a|b$ vai $b \vdots a$.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2, ja tas beidzas ar pāra ciparu;
- skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3;
- skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4;
- skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5;
- skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3;
- skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8;
- skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9;
- skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0;
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Naturālo skaitļu īpašības:

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No *k* pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar *k*.

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.
Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmie pirmskaitļi ir šādi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.
Salikta skaitļa *n* mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis *n* ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).
Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$ dažādi naturālie dalītāji un šo dalītāju summa ir

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{k_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{k_2}\right)\ldots\left(1 + p_m + p_m^2 + \cdots + p_m^{k_m}\right).$$

Ja p ir pirmskaitlis un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

Skaitļa $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ īpašības:

- Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz n, ir $n!$ dalītāji.
- Visi skaitļa $n! + 1$ naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki nekā n.
- Visi veselie skaitļi intervālā $[n! + 2; n! + n]$ ir salikti skaitļi.

KONGRUENCES

Ja a ir vesels skaitlis, bet m – naturāls skaitlis, tad atlikums, ko iegūst, skaitli a dalot ar m, ir tāds vesels skaitlis r, ka $a = qm + r$, kur q ir vesels skaitlis, bet r ir robežās no 0 līdz $m-1$.
Divi skaitļi a un b ir **kongruenti pēc moduļa $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{m \geq 2}$)** tad un tikai tad, ja $a - b$ dalās ar m jeb skaitļi a un b dod vienādu atlikumu, ja tos dala ar m.
Lai pierakstītu, ka skaitļi a un b ir kongruenti pēc moduļa m, apzīmē $a \equiv b \ (mod\ m)$ vai $a \equiv_m b$.
Kongruences īpašības:

- visiem veseliem a izpildās kongruence: $a \equiv a \ (mod\ m)$;
- $a \equiv b \ (mod\ m)$ tad un tikai tad, ja $b \equiv a \ (mod\ m)$;
- ja $a \equiv b \ (mod\ m)$, tad $ka \equiv kb \ (mod\ m)$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis;
- ja $a \equiv b \ (mod\ m)$, tad $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$, kur n ir jebkurš naturāls skaitlis;
- ja $a \equiv b \ (mod\ m)$ un $c \equiv d \ (mod\ m)$, tad
  - $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$,
  - $a - c \equiv b - d \ (mod\ m)$,
  - $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.

Kombinatorika

Saikļu lietojums:

- saiklis „un” nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām vai nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- saiklis „vai” nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības vai nosacījumi);
- saiklis „vai nu ... , vai” nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam.

Kombinatorikas **saskaitīšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas **vai nu** viena, **vai** otra, **vai** trešā utt. veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $M = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$ veidos.

Kombinatorikas **reizināšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida **un** otrā veida, **un** trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ veidos.

Par **permutāciju** sauc visu dotās kopas elementu sakārtotu izlasi. Dažādo permutāciju (t. i., dotās kopas dažādo sakārtojumu) skaits ir vienāds ar $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.
Piezīme. Kopas S permutāciju var definēt arī kā bijekciju $\sigma: S \to S$ (bijekcijas jēdziens definēts teorijas materiālā starptautiskajām olimpiādēm).

Par **variāciju** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc sakārtotu izlasi, kurā ir tieši k dotās kopas elementi. Izlases atšķiras cita no citas vai nu ar elementu sastāvu, vai to izkārtojumu izlasē.
Dažādo variāciju skaitu no n elementiem pa k elementiem apzīmē ar A_n^k un aprēķina ar formulu

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Par **kombināciju** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc tādu dotās kopas apakškopu (jeb nesakārtotu izlasi), kurā ir tieši k dotās kopas elementi.

Kombinācijās elementu izkārtojums neņem vērā, t. i., divas kombinācijas, kurās ir vienāds elementu sastāvs, tiek uzskatītas par vienādām.
Dažādo kombināciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē kā C_n^k vai $\binom{n}{k}$.
Kombināciju skaitu aprēķina no formulas

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

Kombināciju skaita īpašības:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ja $0 \le k < n$.

Ņūtona binoma formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

VIDĒJĀS VĒRTĪBAS METODE

Uzdevumu risināšana balstās uz konkrēti formulētām teorēmām, piemēram,

- Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.
- Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.
- Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Viens no Vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.

Vispārinātais Dirihlē princips: ja vairāk nekā $m \cdot n$ truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz $m + 1$ trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

INVARIANTU METODE

Par **invariantiem lielumiem / īpašībām** sauc lielumus / īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt **nav** iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

- atrodam **invarianto īpašību**, t. i., īpašību, kura **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem un **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- parādam, ka šī īpašība **nepiemīt** lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā.

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml.
Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – **krāsošana** (bieži izmanto figūras iekrāsošanu kā šaha galdiņu), kur invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.
Par invariantu metodi vairāk skat. 7. lpp.

GRAFU TEORIJAS ELEMENTI

Grafs ir punktu (kurus sauc par virsotnēm) kopa kopā ar nogriežņiem (šķautnēm), kas tos savieno.
Grafus ir ērti izmantot, ja ir jāattēlo attiecības starp diviem objektiem.
Grafa šķautņu krustpunkts nav grafa virsotne.
Par grafa **virsotnes pakāpi** sauc virsotņu skaitu, kam viens no galapunktiem ir šī virsotne.
Katrā grafā virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šī grafa šķautņu skaitu.
Secinājumi:

- Virsotņu pakāpju summa ir pāra skaitlis.
- Grafā ir pāra skaits virsotņu, kuru pakāpe ir nepāra skaitlis.

MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODE

Par **indukciju** sauc spriešanas metodi, kurā no konkrētiem piemēriem iegūst vispārīgu slēdzienu. Lietojot matemātiskās indukcijas principu uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

- pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*indukcijas bāze*);
- pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (*induktīvais pieņēmums*);
- pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).
- secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Pierādījuma metodi, kas balstās uz matemātiskās indukcijas principa, sauc par **matemātiskās indukcijas metodi**.

Piemērs. Pierādīt, ka katram naturālam n ir patiesa vienādība

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Atrisinājums

Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $1 \cdot 4 = 1 \cdot 2^2$ jeb $4 = 4$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n = k$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k \cdot (3k + 1) = k(k + 1)^2$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + (k + 1) \cdot (3(k + 1) + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + (k + 1) \cdot (3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$$

Pārveidosim vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k \cdot (3k + 1)}_{induktīvais\ pieņēmums} + (k + 1) \cdot (3k + 4) =$$

$$= k(k + 1)^2 + (k + 1) \cdot (3k + 4) = (k + 1)(k(k + 1) + 3k + 4) =$$

$$= (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n = k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n = k + 1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

TEORIJA STARPTAUTISKAJĀM MATEMĀTIKAS SACENSĪBĀM

ALGEBRA

SAKĀRTOJUMA NEVIENĀDĪBA

Pieņemsim, ka dotas divas nedilstošā secībā sakārtotas reālu skaitļu virknes garumā n: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ un $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. Tad jebkurai kopas $\{1,2,\dots,n\}$ permutācijai $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ ir spēkā nevienādības

$$x_n\, y_1 + \cdots + x_1 y_n \leq x_{\sigma(1)} y_1 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n \leq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Turklāt, ja dotās nevienādības ir stingras (t. i., $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ un $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$), tad pirmā nevienādība kļūst par vienādību tad un tikai tad, ja visiem $i = 1,2,\dots,n$ ir spēkā $\sigma(i) = n - i + 1$, savukārt otrā nevienādība kļūst par vienādību tad un tikai tad, ja visiem $i = 1,2 \dots, n$ ir spēkā $\sigma(i) = i$.

Alternatīvi sakārtojuma nevienādību var formulēt šādi: pieņemsim, ka doti n reāli skaitļi, kas sakārtoti nedilstošā secībā: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Tad visiem reāliem skaitļiem $b_1, \dots, b_n$ izteiksme $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ savu lielāko iespējamo vērtību sasniedz gadījumā, ja skaitļi $b_1, \dots, b_n$ ir sakārtoti nedilstošā secībā (t. i., $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$), savukārt mazākā iespējamā vērtība tiek sasniegta gadījumā, ja skaitļi $b_1, \dots, b_n$ ir sakārtoti neaugošā secībā (t. i., $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$).

FUNKCIJAS

Funkciju $f: X \to Y$ sauc par **injektīvu funkciju** (vai **injekciju**), ja jebkuru divu dažādu kopas X elementu attēli attēlojumā f ir dažādi, t. i.,

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkciju $f: X \to Y$ sauc par **sirjektīvu funkciju** (vai **sirjekciju**), ja katrs kopas Y elements ir vismaz viena kopas X elementa attēls attēlojumā f, t. i.,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X: \ f(x) = y.$$

Funkciju $f: X \to Y$ sauc par **bijektīvu funkciju** (vai **bijekciju**), ja f vienlaicīgi ir injekcija un sirjekcija.

Par injektīvas funkcijas $f: X \to Y$ **inverso funkciju** sauc funkciju $g: E \to X$, kur $E \subset Y$ ir f vērtību kopa, kas katram kopas E elementam y piekārto tādu $x \in X$, ka izpildās vienādība $f(x) = y$, t.i., g apmierina sakarību

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

POLINOMI

Lai polinomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sadalītu reizinātājos, bieži izmanto šādas teorēmas:

- Katru polinomu P var sadalīt reizinātājos tā, lai katrs reizinātājs būtu pirmās vai otrās pakāpes polinoms.
- Ja $x = a$ ir polinoma P sakne, tad P dalās bez atlikuma ar binomu $x - a$ jeb polinoms P satur reizinātāju $x - a$.
- Ja polinoma P koeficienti ir veseli skaitļu un tam ir vesela sakne $x = a$, tad a ir brīvā locekļa a_0 dalītājs.
- Lai racionāls skaitlis $\frac{p}{q}$ (kur $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $LKD(p,q) = 1$) būtu polinoma (ar veseliem koeficientiem) sakne, nepieciešams, lai a_0 dalītos ar p, bet a_0 dalītos ar q.

Teorēma. Starpība $P(x) - P(y)$ dalās ar binomu $x - y$, kur $P(x)$ ir polinoms, kur koeficienti a_i, $i = 0,1, \dots, n$, ir veseli skaitļi.
Pierādījums. Apskatām starpību

$$P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \cdots + a_1(x - y).$$

Izmantojot formulu $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, kur n – naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i - y^i)$, $i = 1,2, \dots, n$, dalās ar $x - y$. Tātad arī starpība $P(x) - P(y)$ dalās ar binomu $x - y$, kas arī bija jāpierāda.

REKURENTAS VIRKNES

Par **rekurentu virkni** sauc skaitļu virkni u_0, u_1, …, u_n, …, kuras katrs loceklis ir vienā un tai pašā veidā, t. i., neatkarīgi no locekļa numura n, izsakāms ar noteikta skaita (piemēram, k) iepriekšējiem locekļiem:

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}), \text{ kur } n = k, k + 1, \dots$$

Par **rekurences sakarību** sauc vienādojumu, kas rekursīvi definē skaitļu virkni.
Ja rekurences sakarība pierakstāma formā

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \text{ kur } a_k \neq 0, \quad (*)$$

to sauc par ***k*-tās kārtas lineāru rekurentu jeb diferenču vienādojumu**.
Piezīme. Aritmētiskā un ģeometriskā progresija arī ir rekurentas virknes.

Lineāro diferenču vienādojumu atrisināšana
Diferenču vienādojumu (*) var apmierināt daudzas virknes. Lai k-tās kārtas lineārā diferenču vienādojuma (*) atrisinājums būtu viennozīmīgi noteikta virkne, jāuzdod šīs virknes pirmo k locekļu u_0, u_1, …, u_{k-1} vērtības. Tie ir sākumnosacījumi, kas ļauj viennozīmīgi aprēķināt turpmākos locekļus, sākot no u_k.

Lineāru diferenču vienādojumu galvenā risināšanas metode
Vispirms sastāda vienādojumam (*) atbilstošo **raksturīgo jeb harakteristisko vienādojumu** $r(t) = 0$ ar mainīgo t, kur

$$r(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - \cdots - a_{k-1} t - a_k$$

ir k-tās pakāpes polinoms.
Ja polinoma $r(t)$ visas saknes $r_1, \dots, r_k$ ir reālas un dažādas, vienādojuma (*) vispārīgais atrisinājums ir lineāra kombinācija no k ģeometriskām progresijām:

$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \cdots + C_k r^n.$$

Konstantes $C_1, C_2, \dots, C_k$ atrod no sākumnosacījumiem, izmantojot zināmās vērtības u_0, u_1, …, u_{k-1}, t. i., atrisinot k lineāru vienādojumu sistēmu

$$C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + \cdots + C_k r^i = u_i, \quad i = 0,1, \dots, k - 1.$$

Apskatīsim speciālgadījumu $k = 2$, t.i., kad dots otrās kārtas lineārs diferenču vienādojums $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$. Tam atbilstošais harakteristiskais vienādojums ir kvadrātvienādojums formā $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$. Ja šī kvadrātvienādojuma saknes r_1 un r_2 ir

- reālas un dažādas, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir
$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n;$$
- vienādas: $r_1 = r_2 \coloneqq r$, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir
$$u_n = C_1 r^n + n \cdot C_2\, r^n = (C_1 + n \cdot C_2) r^n.$$

Vienkāršākais otrās kārtas lineārais diferenču vienādojums $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ar sākuma nosacījumiem $u_0 = 0$ un $u_1 = 1$ definē virkni, kuras locekļus sauc par **Fibonači skaitļiem** (apzīmē F_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Fibonači skaitļiem ir spēkā vispārīgā locekļa formula ($n \in \mathbb{N}$)

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

ĢEOMETRIJA

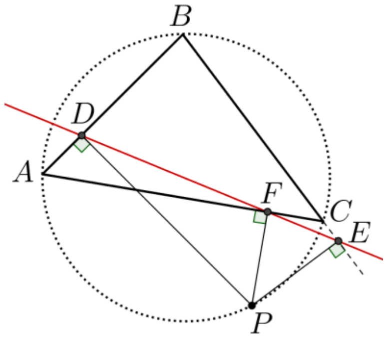
Nevienādības trijstūros. Trijstūra mediāna ir mazāka nekā malu, starp kurām tā atrodas, pussumma, t. i., ja pret malu a novilkta mediāna ar garumu m_a, tad $m_a < \frac{b+c}{2}$.

Ravi substitūcija. Pozitīvi skaitļi a, b, c ir kāda trijstūra malas tad un tikai tad, ja eksistē tādi pozitīvi skaitļi x, y un z, kam vienlaicīgi izpildās vienādības

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + a.$$

Viegli saprast, ka skaitļi x, y un z tādā gadījumā ir nogriežņu garumi, kādos trijstūra malas sadala šajā trijstūrī ievilktā riņķa līnija.
Ravi substitūcija noder, piemēram, gadījumos, kad jāpierāda kāda nevienādība mainīgajiem, kas ir trijstūra malas: izmantojot šo substitūciju, var pāriet uz nevienādību, kur vienīgais nosacījums uz mainīgajiem ir, ka tie ir pozitīvi.

Simsona teorēma. Ja no trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas punkta P novelk perpendikulus pret taisnēm AB, BC, CA, tad perpendikulu pamati D, E, F atrodas uz vienas taisnes (skat. 37. att.). Šo taisni sauc par Simsona taisni.

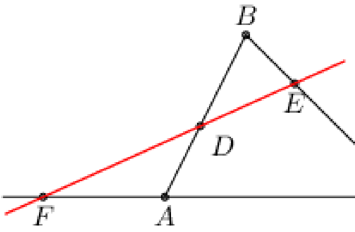


37. att.

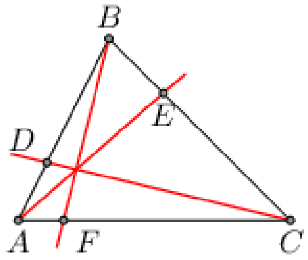
Menelāja teorēma. Ja uz trijstūra ABC malām AB, BC, CA vai to pagarinājumiem ņemti attiecīgi punkti D, E, F, tad tie pieder vienai taisnei tad un tikai tad, ja izpildās vienādība

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

turklāt uz ΔABC malām atrodas vai nu tieši divi, vai neviens no punktiem D, E, F (skat. 38. att.).



38. att.



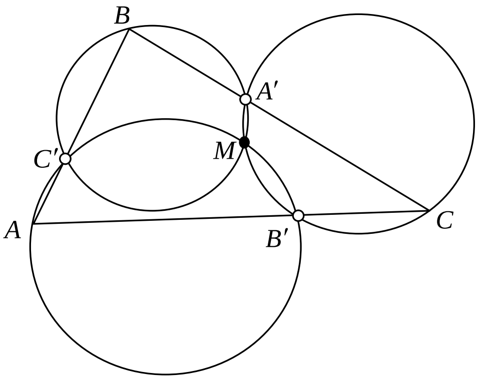
39. att.

Čevas teorēma. Ja uz trijstūra ABC malām AB, BC, CA vai to pagarinājumiem ņemti attiecīgi punkti D, E, F, tad taisnes AE, BF un CD krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja izpildās vienādība

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

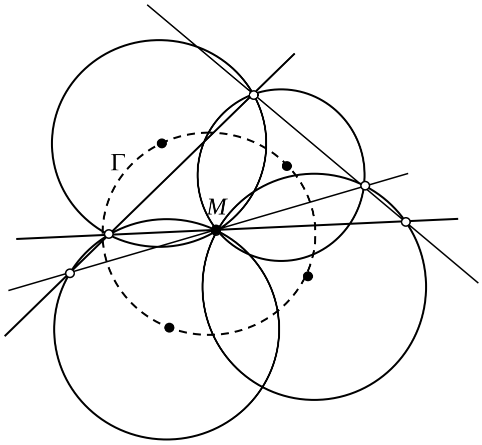
turklāt uz ΔABC malām atrodas vai nu viens, vai visi trīs punkti D, E, F (skat. 39. att.).

Mikela teorēma. Ja uz katras no trijstūra *ABC* malām vai to pagarinājumiem ir atlikts punkts, tad trīs riņķi, kur katrs no tiem iet caur citu trijstūra *ABC* virsotni un abiem punktiem, kas atlikti uz attiecīgās virsotnes piemalām, krustojas vienā punktā *M* (skat. 40. att.). Punktu *M* sauc par Mikela punktu un trīs riņķus sauc par Mikela riņķiem.



40. att.

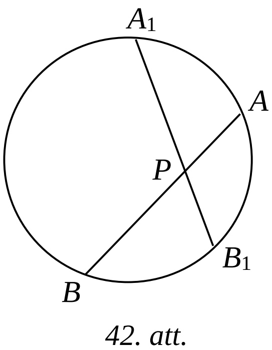
Mikela teorēmas vispārinājums četrām taisnēm. Ja dotas četras taisnes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4, kur katra krustojas ar katru, un četri riņķi, kur katrs no tiem iet caur citiem trim taišņu ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4 krustpunktiem, tad tās krustojas punktā *M*. Punktu *M* sauc par Mikela ceturto punktu un četrus riņķus sauc par Mikela riņķiem. Šo četru Mikela riņķu centri atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. 41. att.).



41. att.

Radikālā ass un punkta pakāpe attiecībā pret riņķa līniju

Ja dota riņķa līnija, patvaļīgi izvēlēts punkts *P* un taisne, kas iet caur šo punktu *P* un krusto riņķa līniju punktos *A* un *B* (skat. 42. att.), tad nogriežņu garumu reizinājums $PA \cdot PB$ nav atkarīgs no taisnes *AB* izvēles. Šo reizinājumu $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1$ sauc par **punkta *P* pakāpi attiecībā pret riņķa līniju**.



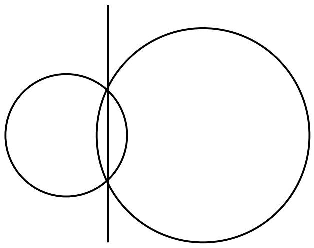
42. att.

Ja punkts *P* atrodas ārpus riņķa līnijas, tad tā pakāpe attiecībā pret šo riņķa līniju ir vienāda ar no šī punkta vilktās pieskares nogriežņa garuma kvadrātu.

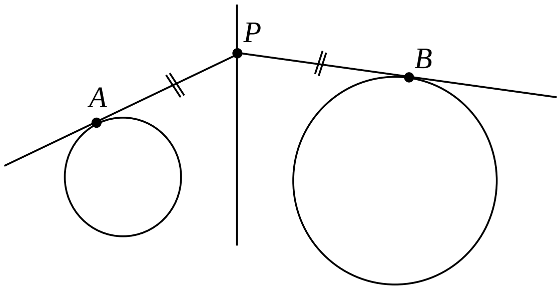
Par divu riņķa līniju **radikālo asi** sauc to punktu kopu, kuru pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas. Radikālā ass eksistē tad un tikai tad, ja riņķa līnijas nav koncentriskas. Radikālā ass ir perpendikulāra taisnei, kas iet caur abu riņķa līniju centriem

Punktam, kas atrodas uz divu riņķa līniju kopējās hordas, pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas. Tātad divām krustiskām riņķa līnijām radikālā ass ir taisne, kas iet caur šo riņķa līniju kopējiem punktiem (skat. 43. att.).

Ja riņķa līnijām nav kopīgu punktu, tad radikālā ass ir taisne, kas sastāv no visiem tiem punktiem, no kuriem vilkto pieskaru nogriežņi pret šīm riņķa līnijām ir vienādi (skat. 44. att.).



43. att.



44. att.

SKAITĻU TEORIJA

Teorēma (naturālas pakāpes sadalījums savstarpēju pirmskaitļu reizinājumā). Ja divu savstarpēju pirmskaitļu reizinājums ir vesela skaitļa n-tā pakāpe, tad arī katrs no reizinātājiem ir vesela skaitļa n-tā pakāpe.

KONGRUENCES

Ja $f(a_1, \dots, a_k)$ ir patvaļīgs polinoms ar veseliem koeficientiem un $a_1 \equiv b_1\ (mod\ n)$, $a_2 \equiv b_2\ (mod\ n), \dots, a_k \equiv b_k\ (mod\ n)$, tad

$$f(a_1, \dots, a_k) \equiv f(b_1, \dots, b_k)\ (mod\ n).$$

Tas nozīmē, ka, veicot aprēķinus pēc moduļa n, jebkuru skaitli polinomā var aizvietot ar jebkuru citu tam kongruentu skaitli. Parasti skaitli a aizvieto ar skaitļa a atlikumu pēc moduļa n, bet atsevišķos gadījumos var ņemt citu tam kongruentu skaitli.

Teorēma. Virkne $x_m = a^m$ pēc moduļa n ir periodiska.
Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus a^m pēc moduļa n. Tiklīdz virknē $a^m\ (mod\ n)$ parādās vienādi skaitļi, mēs esam atraduši periodu. Perioda garums nepārsniedz n.

Skaitļa inversais elements pēc moduļa $\boldsymbol{n}$. Ja $n \geq 2$ ir naturāls skaitlis, bet a – vesels skaitlis, tad par skaitļa a inverso elementu pēc moduļa n sauc tādu veselu skaitli b robežās no 1 līdz $n-1$, kas apmierina kongruenci $a \cdot b \equiv 1\ (mod\ n)$. Skaitļa a inversais elements pēc moduļa n eksistē tad un tikai tad, ja $LKD(a, n) = 1$, t. i., a un n ir savstarpēji pirmskaitļi.

Fermā mazā teorēma. Ja p ir pirmskaitlis un a nedalās ar p, tad $a^{p-1} - 1$ dalās ar p jeb, pierakstot šo apgalvojumu ar kongruencēm, $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Eilera funkcija. Par Eilera funkciju sauc funkciju $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas katram naturālam n piekārto visu to naturālo skaitļu skaitu, kas nepārsniedz n un ir savstarpēji pirmskaitļi ar n. Var pierādīt, ka

$$\varphi\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}\right) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1} \cdot (p_2 - 1)p_2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot (p_m - 1)p_m^{k_m-1},$$

kur $p_1, p_2, \dots, p_m$ ir dažādi pirmskaitļi, bet $k_1, k_2, \dots, k_m$ ir naturāli skaitļi.

Eilera teorēma. Ja n ir naturāls skaitlis, bet vesels skaitlis a ir savstarpējs pirmskaitlis ar n, tad $a^{\varphi(n)} - 1$ dalās ar n jeb $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (mod\ n)$.

Vilsona teorēma. Ja p ir pirmskaitlis, tad skaitlis $(p-1)! + 1$ dalās ar p.

LIELĀKAIS KOPĪGAIS DALĪTĀJS UN MAZĀKAIS KOPĪGAIS DALĀMAIS

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **lielāko kopīgo dalītāju** sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru katrs no dotajiem skaitļiem dalās bez atlikuma. Divu skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju apzīmē ar $LKD\,(a, b)$.
Skaitļus a un b sauc par **savstarpējiem pirmskaitļiem**, ja $LKD(a, b) = 1$.
Operācijai LKD piemīt šādas īpašības (a, b, c, x, y ir veseli skaitļi, m, n ir naturāli skaitļi):

- $LKD(a, a) = a$.
- $LKD(a, 1) = 1$ (jebkurš naturāls skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli 1).
- $LKD(a, b) = LKD(b, a)$.
- $LKD(a, b) = LKD(b, a)$ (secīgi naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi).
- $LKD(ma, mb) = m \cdot LKD(a, b)$.
- $LKD(a, b) = LKD(a, b + ac)$.

- Ja a un b dalās ar m, tad $LKD(a,b)$ arī dalās ar m; turklāt tad izpildās vienādība $LKD\left(\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right)=\frac{LKD(a,b)}{m}$.
- $LKD(a^m,b^m)=\left(LKD(a,b)\right)^m$.
- $LKD(a^m,a^n)=a^{\min(m,n)}$
- Eksistē tādi veseli skaitļi x un y, ka izpildās vienādība $LKD(a,b)=ax+by$. Turklāt, ja a un b ir pozitīvi, tad ir iespējams atrast tādus x un y, ka $LKD(a,b)=ax+by$, turklāt x ir pozitīvs, bet y – negatīvs. Šis fakts izriet no **Eiklīda algoritma**.

Ar **Eiklīda algoritmu** var atrast divu veselu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju. Algoritms balstīts uz dalīšanu ar atlikumu: vispirms nepilni izdala lielāko skaitli ar mazāko un tad katrā nākamajā solī iepriekšējās darbības dalītāju dala ar iegūto atlikumu. Lielākais kopīgais dalītājs ir pēdējais iegūtais nenulles atlikums.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **mazāko kopīgo dalāmo** sauc mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no dotajiem skaitļiem bez atlikuma. Divu skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo apzīmē ar $MKD(a,b)$. Mazāko kopīgo dalāmo var izteikt ar LKD palīdzību no formulas

$$MKD(a,b)=\frac{ab}{LKD(a,b)}\ \text{ jeb }\ MKD(a,b)\cdot LKD(a,b)=ab.$$

VIENĀDOJUMI VESELOS SKAITĻOS

Par **Diofanta vienādojumiem** sauc vienādojumus veselos skaitļos (t.i., atrisinājumiem jābūt veseliem skaitļiem). Par **eksponenciāliem Diofanta vienādojumiem** sauc vienādojumus, kuros ietilpst saskaitāmie ar mainīgo kāpinātājā. Gadījumā, kad dots polinomiāls Diofanta vienādojums ar veseliem koeficientiem un visu vienādojumā ietilpstošo monomu pakāpe nepārsniedz 1, vienādojumu sauc par **lineāru Diofanta vienādojumu**.
Ja lineārā Diofanta vienādojumā ietilpst tikai divi mainīgie (vienkāršākais netriviālais gadījums), vienādojumu var pierakstīt formā

$$ax+by=c,$$

kur a,b,c ir veseli skaitļi, bet x,y – nezināmie. Šādam vienādojumam **atrisinājums veselos skaitļos eksistē tad un tikai tad, ja** skaitlis c dalās ar $LKD(a,b)$. Turklāt, ja vienādojumam eksistē atrisinājums (x,y), tad tam eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu, kas visi pierakstāmi formā $\left(x+k\cdot\frac{a}{d},y-k\cdot\frac{b}{d}\right)$, kur k ir patvaļīgs vesels skaitlis, bet ar d apzīmējam $d=LKD(a,b)$.

KOMBINATORIKA

GRAFI

Piezīme. Šajā materiālā netiek atļauti grafi, kur kādai šķautnei abi galapunkti ir viena un tā pati virsotne, t. i., apskatāmie grafi ir bez *cilpām*.

Par **ceļu** no virsotnes A_n uz virsotni A_k sauc tādu šķautņu virkni, kura sākas virsotnē A_n un beidzas virsotnē A_k, un kurā katrām divām blakus šķautnēm ir viena kopīga virsotne, un neviena šķautne nav sastopama vairāk par vienu reizi. Ceļu sauc par vienkāršu, ja tas nevienā grafa virsotnē neieiet vairāk kā vienu reizi.
Par **ciklu** sauc ceļu, kuram sakrīt beigu un sākuma virsotnes. Ciklu sauc par vienkāršu, ja tas nevienā grafa virsotnē neieiet vairāk par vienu reizi (izņemot to, ka sakrīt beigu un sākuma virsotnes).
Par **ceļa (cikla) garumu** sauc tā šķautņu skaitu.

Grafu sauc par **sakarīgu**, ja jebkuras 2 tā virsotnes var savienot ar ceļu, t.i., no vienas grafa virsotnes var tikt uz kādu citu virsotni, ejot pa grafa šķautnēm. Pretējā gadījumā grafu sauc par **nesakarīgu**. Par grafa **komponenti** sauc jebkuru tā maksimālu sakarīgu apakšgrafu.

Teorēma. Jebkurā n $(n \geq 2)$ virsotņu grafā noteikti ir vismaz divas virsotnes, kuru pakāpes ir vienādas.

Teorēma. Ja n $(n \geq 2)$ virsotņu grafā tieši divu virsotņu pakāpes sakrīt, tad šajā grafā noteikti ir vai nu viena izolēta virsotne (t.i., virsotne ar pakāpi 0), vai virsotne, kuras pakāpe ir $n-1$.

Grafu galvenie veidi:

- Pilns grafs – grafs, kuram katras divas virsotnes ir savienotas ar šķautni.
- Koks – sakarīgs grafs bez cikliem.
- Divdaļīgs grafs – grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas ar šķautni.

Par **Hamiltona ceļu** sauc ceļu, kas satur visas grafa virsotnes, katru tieši vienu reizi. Par **Hamiltona ciklu** sauc ciklu, kas satur visas grafa virsotnes, katru tieši vienu reizi.

Par **Eilera ceļu** sauc ceļu, kas satur visas grafa šķautnes, katru tieši vienu reizi. Par **Eilera ciklu** sauc ciklu, kas satur visas grafa šķautnes, katru tieši vienu reizi.

Teorēma. Sakarīgs grafs satur Eilera ciklu tad un tikai tad, ja visu grafa virsotņu pakāpes ir pāra skaitļi.
Secinājums. Grafu var uzzīmēt ar vienu rokas vilcienu, nepārklājot līnijas un beidzot zīmēt tajā pašā vietā, kur sāka, tad un tikai tad, ja visām grafa virsotnēm ir pāra pakāpe.

Teorēma. Sakarīgs grafs satur Eilera ceļu tad un tikai tad, ja tas vai nu satur Eilera ciklu, vai arī tam ir tieši divas virsotnes, kuru pakāpes ir nepāra skaitļi.

VISPĀRĪGIE VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

Latvijas matemātikas olimpiādēs par katru uzdevumu var iegūt 0 – 10 punktus.

Kritēriji	**Punkti**
Uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.	– (svītriņa)
Tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.	0
Dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.	1 – 2
Veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.	3 – 4
Puse risinājuma.	5
Pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.	6
Principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.	7
Uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.	8 – 9
Absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.	10

UZDEVUMI

2013./2014. MĀCĪBU GADS

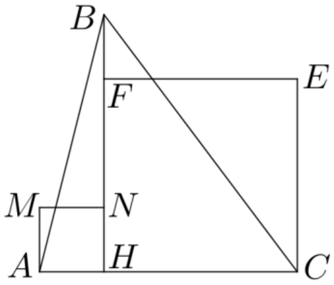
S1. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S1.9.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{9}{10}\ .$$

S1.9.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BH*. Zināms, ka $AC = BH$ un četrstūri *AMNH* un *HCEF* ir kvadrāti (skat. 45. att.) Pierādīt, ka taisnes *AE*, *CM* un *BH* krustojas vienā punktā!



45. att.

S1.9.3. Dots, ka *a* un *b* ir naturāli skaitļi un $a+b=210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

S1.9.4. Dots, ka *a* un *b* ir naturāli skaitļi un $a+b$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordinātu dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu *a*, vai *b*.

S1.9.5. Vairākās kaudzēs kopā ir *n* konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras divas kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).
Vai taisnība, ka visas konfektes var apvienot vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja **a)** $n=64$; **b)** $n=100$?

10. klase

S1.10.1. Atrisināt vienādojumu $x^2+y^2+4x-6y+13=0$.

S1.10.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD*. No punkta *D* novilkti perpendikuli pret malām *AB* un *CB*; to pamati ir attiecīgi *M* un *N*. Pierādīt, ka punkti *A*, *M*, *N*, *C* atrodas uz vienas riņķa līnijas!

S1.10.3. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu skaitlim, kas dalās ar 8?

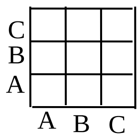
S1.10.4. Kādu lielāko skaitu dažādu komisiju var izveidot no 4 cilvēkiem tā, lai katrām divām komisijām būtu vismaz viens kopīgs loceklis? Nekādas divas komisijas nesastāv no vieniem un tiem pašiem cilvēkiem. Komisija var sastāvēt arī no viena dalībnieka.

S1.10.5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz. Ja kaut kāds skaitlis *x* jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu $x+1$, vai $2x$ (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Uzvar tas, kurš uzraksta 1000. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

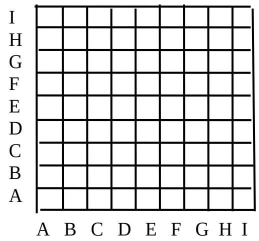
11. klase

S1.11.1. Atrisināt vienādojumu $x^2+5y^2+2xy+4y+1=0$.

S1.11.2. a) Vai 46. att. dotās tabulas rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?
b) Vai 47. att. dotās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 81 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?



46. att.



47. att.

S1.11.3. Pierādīt, ka punkti, kas ir simetriski trijstūra augstumu krustpunktam attiecībā pret trijstūra malām, atrodas uz trijstūrim apvilktās riņķa līnijas!
(Punktu A_1 sauc par punktam A simetrisku punktu attiecībā pret taisni a, ja $AA_1 \perp a$ un $AO = OA_1$, kur O ir AA_1 un a krustpunkts.)

S1.11.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā novelk vienu diagonāli un vienu no iegūtajiem trijstūriem nokrāso baltu, otru – melnu. Nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Cik dažādi kvadrāta krāsojumi ir iespējami?

S1.11.5. Dots, ka n ir naturāls skaitlis un skaitļi $2n+1$ un $3n+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti.
a) Atrodiet kaut vienu tādu n!
b) Vai $5n+3$ var būt pirmskaitlis?

12. klase

S1.12.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot2014}=\frac{2013}{2014}.$$

S1.12.2. Trijstūra ABC visas malas ir dažāda garuma un $\angle B = 60°$. Uz stariem AB un CB attiecīgi atlikti tādi punkti X un Y, ka $AX = CY = AC$. Pierādīt, ka taisne XY iet caur trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru!

S1.12.3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 6^n-1 dalās ar 4^n-1?

S1.12.4. Ja uz tāfeles uzrakstīti polinomi f un g, tad tur drīkst uzrakstīt arī polinomus $f+g$, $f-g$ un $f\cdot g$ (par f un g var ņemt arī vienu un to pašu polinomu). Vai var iegūt uz tāfeles polinomu x, ja sākotnēji uz tāfeles uzrakstīti polinomi **a)** x^2+x un x^2+2; **b)** x^2+x un x^2-2?

S1.12.5. Rindā salikti 12 krēsli; uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā secībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu iepriekšējā vietā, vai tieši blakus iepriekšējai vietai. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārkārtošanās?

N1. NOVADA OLIMPIĀDE

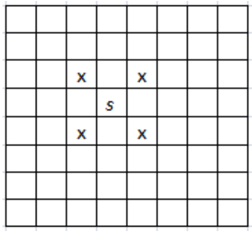
9. klase

N1.9.1. Vai vienādojumam $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ ir atrisinājums, ja a un b ir dažādi skaitļi?

N1.9.2. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, taisnstūra perimetrs ir par 8 mazāks nekā tā laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus!

N1.9.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc+3a+3b=7bc+7$.

N1.9.4. Figūra „sienāzis" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat. 48. att., kur s – sienāzis, x – rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz 8×8 rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu sienāzi (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?



48. att.

N1.9.5. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1, punkts *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu!

10. klase

N1.10.1. Dots, ka $x^3>2$. Pierādīt, ka **a)** $x^6>4$; **b)** $x^7>5$.

N1.10.2. Pierādīt, ka, izvēloties 52 no aritmētiskās progresijas $1, 4, 7, 10, \ldots$ locekļiem, kas nepārsniedz 300, vienmēr starp šiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir 302.

N1.10.3. Piecstūris *ABCDE* ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi *AD* un *BE* krustojas punktā *F*. Zināms, ka $BC=DF=DE$. Pierādīt, ka $AC=CE$.

N1.10.4. Zināms, ka $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ ir tādi dažādi nepāra naturāli skaitļi, ka $a_1>\sqrt{a_2}$, $a_2>\sqrt{a_3}$, ..., $a_9>\sqrt{a_{10}}$ un $a_{10}>\sqrt{a_1}$. Aprēķināt vismazāko summas $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$ vērtību!

N1.10.5. Grozos pa apli izvietotas 2014 konfektes tā, ka blakus grozos konfekšu skaits atšķiras tieši par 1. Zināms, ka ir vismaz divi grozi un katrā grozā ir vismaz viena konfekte. Kāds var būt **a)** vismazākais; **b)** vislielākais grozu skaits?

11. klase

N1.11.1. Polinoms $P(x)$, kura visi koeficienti ir veseli skaitļi, piecām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

N1.11.2. Riņķa līnijā ar centru punktā *O* novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi *OA* un *OB*. Caur hordas *AB* viduspunktu *C* novilkta horda *DE*, kas paralēla *OA* (punkts *D* atrodas uz mazākā loka *AB*). Aprēķināt leņķa *AOD* lielumu!

N1.11.3. Kādiem naturāliem skaitļiem n piemīt šāda īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa ir vienāda ar pašu skaitli n?

N1.11.4. Kādā pilsētā ir n detektīvi ($n \geq 2$) un cita starpā tie izseko arī viens otru. Zināms, ka jebkuriem diviem detektīviem A un B vai nu A izseko B, vai B izseko A. Pierādīt, ka visus detektīvus var nostādīt vienā rindā tā, ka pirmais izseko otro, otrais izseko trešo, ..., $(n-1)$-ais izseko n-to.

N1.11.5. Neviens no reāliem skaitļiem x, y, z nav nulle un $x+y+z=xyz$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geq 1.$$

12. klase

N1.12.1. Zināms, ka $a>\frac{1}{2}$, $b>\frac{1}{2}$, $c>\frac{1}{2}$ un x ir vienādojuma $x^3-ax^2+bx-c=0$ sakne. Pierādīt, ka $x>-\frac{1}{2}$.

N1.12.2. Uz paralelograma $ABCD$ pretējām malām AB un CD atzīmēti attiecīgi punkti E un F. Nogriežņu AF un DE krustpunkts ir H, bet BF un CE krustpunkts ir G. Pierādīt, ka $S_{EGFH}=S_{ADH}+S_{BCG}$.

N1.12.3. Uz tāfeles uzrakstīti visi trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 31:

124, 155, 186, 217, ..., 961, 992.

Vai no šiem skaitļiem var izvēlēties **a)** deviņus, **b)** desmit tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 līdz 9?

N1.12.4. Alise nēsā rokassprādzes, kas sastāv no virtenē savērtām 10 melnām un 20 baltām pērlītēm. Marta zaķis prot rokassprādzei samainīt divas pērlītes vietām tad, ja starp tām atrodas tieši trīs citas pērlītes. Cik rokassprādzes Alise var vienlaicīgi nēsāt, lai Marta zaķis ar atkārtotām darbībām no tām nevarētu iegūt divas vienādas? Rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja tās sakrīt pagriežot pa apli (ap roku).

N1.12.5. Vai var atrast tādus 2014 dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, ka

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2014}}=1?$$

V1. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

V1.9.1. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\dfrac{2014}{x}$, ja $x>0$?

V1.9.2. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo locekļu summu. Cik starp virknes pirmajiem **a)** 100, **b)** 2014 locekļiem ir tādi, kas dalās ar 5?

V1.9.3. Taisnleņķa trijstūra *ABC* taisnais leņķis ir *A*. Punkts *X* ir no *A* pret *BC* vilktā augstuma pamats. Nogriežņa *XC* viduspunkts ir *Y*. Uz malas *AB* pagarinājuma izvēlēts punkts *D* tā, ka $AB = BD$. Pierādīt, ka $DX \perp AY$!

V1.9.4. Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.
a) Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm!
b) Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk nekā viens diplomāts!

V1.9.5. Atrast vienādojuma $(x^2+5x-7)^2-2(x^2+5x-6)-4=0$ sakņu kubu summu!

10. klase

V1.10.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5(x+y+z)=xyz \\ x=y+z \end{cases}$$

kur *x*, *y*, *z* – veseli nenegatīvi skaitļi!

V1.10.2. Atrast visas tādas vesela skaitļa *n* vērtības, kurām gan $\dfrac{n^3+3}{n+3}$, gan $\dfrac{n^4+4}{n+4}$ ir veseli skaitļi!

V1.10.3. Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

V1.10.4. Divas dažāda rādiusa riņķa līnijas ar centriem punktos *B* un *C* ārēji saskaras punktā *A*. Abu riņķa līniju kopējā pieskare, kas neiet caur punktu *A*, pirmajai riņķa līnijai pieskaras punktā *D*, bet otrai – punktā *E*. Taisne, kas novilkta caur *A* perpendikulāri *DE*, krusto nogriežņa *BC* vidusperpendikulu punktā *F*. Pierādīt, ka $BC = 2AF$!

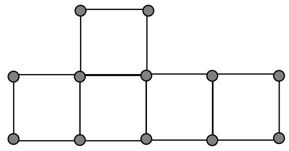
V1.10.5. Gatavojoties vēlēšanām politiskās partijas saviem vēlētājiem kopumā ir devušas *s* (naturāls skaitlis) dažādus solījumus. Zināms, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Tajā pat laikā nav iespējams atrast divas partijas, kuru dotie solījumi sakristu pilnībā – ir iespējams atrast vismaz vienu solījumu, ko viena partija ir devusi, bet otra – nē. Kāds ir lielākais iespējamais partiju skaits, kas gatavojas vēlēšanām?

11. klase

V1.11.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka, noapaļojot izteiksmju $\sqrt{10^{2n}-10^n}$ un $\sqrt{10^{2n}-10^n+1}$ vērtības līdz tuvākajam naturālajam skaitlim, iegūtie skaitļi ir vienādi?

V1.11.2. Noteikt, kāds ir lielākais skaits, cik no pieciem naturāliem skaitļiem a, $a+14$, $a+22$, $a+32$, $a+46$ var būt pirmskaitļi!

V1.11.3. Figūras (skat. 49. att.) divpadsmit virsotnēs nepieciešams ierakstīt pirmos 12 naturālos skaitļus (katrā virsotnē – vienu) tā, lai katras rūtiņas virsotnēs ierakstīto četru skaitļu summa būtu vienāda ar M. Vai to var izdarīt, ja **a)** $M=28$; **b)** $M=26$?



49. att.

V1.11.4. Platleņķa trijstūra ABC platais leņķis ir BAC. Novilktas trīs riņķa līnijas tā, ka trijstūra ABC malas ir attiecīgi šo riņķa līniju diametri. Bez trijstūra virsotnēm riņķa līnijas pa pāriem krustojas vēl trīs punktos – P, Q un R. Pierādīt, ka A ir trijstūra PQR bisektrišu krustpunkts!

V1.11.5. Naturālus skaitļus a, b un c saista sakarība $c^2=a^2+b^2$. Pierādīt, ka katru no skaitļiem c^2+ab un c^2-ab var izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu!

12. klase

V1.12.1. Izteiksmē $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm100=2014$ katru zīmi „ $\pm$ ” aizvietoja vai nu ar „+”, vai ”–„ tā, lai izteiksme būtu patiesa. Kāds lielākais „+” zīmju skaits var būt šajā izteiksmē?

V1.12.2. Katram naturālam skaitlim n ir definēta funkcija $f(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. Pierādīt, ka visiem $n>1$ ir spēkā sakarība $n+f(1)+f(2)+...+f(n-1)=nf(n)$.

V1.12.3. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Nogrieznis AC ir trijstūra BAO mediāna, CD ir trijstūra ACO bisektrise, punkts E izvēlēts uz mazākā loka AB tā, ka ED ir trijstūra AEO augstums. Aprēķināt leņķa AED lielumu grādos.

V1.12.4. Šaha festivālā piedalījās 2014 dalībnieki, daži savā starpā arī izspēlēja vienu šaha partiju. Zināms, ka starp jebkuriem trim festivāla dalībniekiem noteikti ir divi, kuri savā starpā ir izspēlējuši partiju. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais šaha partiju skaits, kas ir izspēlētas šajā festivālā?

V1.12.5. Vai var atrast tādu naturālu n vērtību, kam piemīt īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa vienāda ar n^2?

P1. PAPILDUS SACENSĪBAS

P1.1. Atrast izteiksmes $\dfrac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$ lielāko iespējamo vērtību, ja x, y un z – reāli pozitīvi skaitļi!

P1.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC, nogrieznis CP ir augstums; punkts H ir augstumu krustpunkts un O ir apvilktās riņķa līnijas centrs. Punkts D ir taišņu CO un AB krustpunkts; E ir CD viduspunkts. Pierādīt, ka EP iet caur OH viduspunktu!

P1.3. Aprīlī 2014 skolēni tika sadalīti N ($N<2014$) grupās un katra grupa strādāja pie sava projekta. Maijā šie paši skolēni tika sadalīti $N+1$ grupā un atkal katra grupa strādāja pie sava projekta. Pierādīt, ka vismaz divi skolēni maijā strādāja skaitliski mazākā grupā nekā aprīlī!

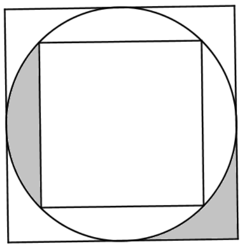
P1.4. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2=6ab+7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

P1.5. Vai eksistē tāds rūtiņu kvadrāts, kuru var sagriezt daudzstūros $D_1, D_2, ..., D_n$ tā, ka k-tais daudzstūris, $k=1, 2, ..., n$, sastāv tieši no k rūtiņām? Vai var gadīties, ka šāda kvadrāta laukums ir lielāks nekā 2013 rūtiņas?

A1. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

9. klase

A1.9.1. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts (skat. 50. att.). Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!



50. att.

A1.9.2. Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 1276. Atrast dotos četrus ciparus!

A1.9.3. Trijstūris *ABC* ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi *ABC*. Punkti *M* un *N* ir attiecīgi nogriežņu *AC* un *AM* viduspunkti. Caur *B, M* un *N* vilktā riņķa līnija krusto malas *AB* un *BC* attiecīgi to iekšējos punktos *P* un *Q*. Zināms, ka $AC || PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ vērtību!

A1.9.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 51. att.). Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?

	6	
	?	
7		

51. att.

A1.9.5. Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

10. klase

A1.10.1. Noteikt, vai virkne $a_n = \dfrac{3n+7}{n+2}$, *n* – naturāls skaitlis, ir augoša vai dilstoša!

A1.10.2. Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti 14 zaļi punkti, uz otras – 14 sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?
Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts (ja nogriežņiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas).

A1.10.3. Aplūkosim funkcijas $y = x^2 + ax + b$, kur $a + 2b = 2014$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

A1.10.4. Doti septiņi dažādi naturāli skaitļi; katriem diviem no dotajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

A1.10.5. Uz taisnstūra *ABCD* diagonāles *BD* atlikts iekšējs punkts *P* tā, ka $\angle PAB = \angle PCB$. Pierādīt, ka *ABCD* ir kvadrāts!

11. klase

A1.11.1. Uz riņķa līnijas atlikti **a)** 6; **b)** 2014 punkti. Viens no tiem nokrāsots sarkans, bet pārējie – balti. Apskatām visus daudzstūrus, kuriem visas virsotnes ir kādi no nokrāsotajiem punktiem. Kādu daudzstūru ir vairāk – to, kam viena virsotne ir sarkana, vai to, kam visas virsotnes ir baltas?

A1.11.2. Skaitļu virknei (a_n) visiem $n > 1$ ir spēkā sakarība $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n$. Aprēķināt a_{50}, ja zināms, ka $a_1 = 1000$.

A1.11.3. Ap šaurleņķu trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija. Loka *AB* (kuram nepieder punkts *C*) viduspunkts ir *N*, bet loka *AC* (kuram nepieder punkts *B*) viduspunkts ir *M*. Nogrieznis *NM* krusto malu *AB* punktā *K*. Trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas centrs ir punktā *O*. Pierādīt, ka $OK \parallel AC$!

A1.11.4. Doti 99 naturāli skaitļi. Zināms, ka nav tāda skaitļa, ar ko dalītos visi šie skaitļi, un ka jebkuru 50 skaitļu reizinājums dalās ar atlikušo 49 skaitļu reizinājumu. Pierādīt, ka visu 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts!

A1.11.5. Pierādīt, ka izliektu 2014-stūri nevar sadalīt 167 izliektos 14-stūros!

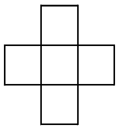
12. klase

A1.12.1. Atrisināt nevienādību $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \leq 0$.

A1.12.2. Caur trijstūra *ABC* malas *AB* iekšēju punktu *P* novilkta taisne, kas ir paralēla *BC* un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos *M* un *N* (*M* atrodas uz īsākā loka *AB*, bet *N* – uz īsākā loka *AC*). Nogrieznis *MC* krusto *AB* punktā *Q*. Pierādīt, ka *NQ* iet caur trijstūriem *AMQ* un *APN* apvilkto riņķa līniju krustpunktu!

A1.12.3. Atrast visus pirmskaitļus *p*, kuriem $p^4 - 6$ arī ir pirmskaitlis!

A1.12.4. Vai kvadrātu ar malas garumu 10 var noklāt ar 25 „krustiņiem" (skat. 52. att.), kuri sastāv no 5 kvadrātiem ar malas garumu 1? „Krustiņi" drīkst pārklāties, kā arī iziet ārpus dotā kvadrāta malām.



52. att.

A1.12.5. Funkcija $f: R \to R$ definēta visiem reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības. Visiem reāliem skaitļiem *a* un *b* izpildās

$$2f(a) \leq f(b) + f(2a - b).$$

Vai tiesa, ka visiem reāliem *a*, *b* un *c* izpildās

$$3f(a) \leq f(b) + f(c) + f(3a - b - c)?$$

BW1. BALTIC WAY 2013

Algebra

BW1.1. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pieņemsim, ka no tabulas

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

izvēlas n skaitļus tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nebūtu vienā rindā vai vienā kolonnā. Noteikt, kāda ir lielākā iespējamā vērtība šo n skaitļu reizinājumam!

BW1.2. Pieņemsim, ka k un n ir naturāli skaitļi un $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ ir pa pāriem atšķirīgi veseli skaitļi. Polinomam P ar veseliem koeficientiem izpildās

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54$$

un

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013.$$

Noteikt lielāko iespējamo reizinājuma kn vērtību!

BW1.3. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ – reālo skaitļu kopa) kurām izpildās

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y, \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}.$$

BW1.4. Pierādīt, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x, y, z izpildās nevienādība

$$\frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{y^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

BW1.5. Kuba divās pretējās virsotnēs ierakstīti skaitļi 0 un 2013. Pārējās 6 kuba virsotnēs jāieraksta kaut kādi reāli skaitļi. Kad tas ir izdarīts, uz katras kuba šķautnes uzraksta šīs šķautnes galapunktos esošo skaitļu starpību. Kādi skaitļi jāieraksta kuba virsotnēs, lai uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa būs vismazākā?

Kombinatorika

BW1.6. Ziemassvētku vecītim ir vismaz n dāvanas, kas paredzētas n bērniem. Zināms, ka katram $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i-tais bērns uzskata $x_i > 0$ no tām par labām dāvanām. Pieņemsim, ka

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Pierādīt, ka Ziemassvētku vecītis var iedot katram bērnam pa dāvanai tā, ka katrs bērns saņem dāvanu, ko viņš uzskata par labu!

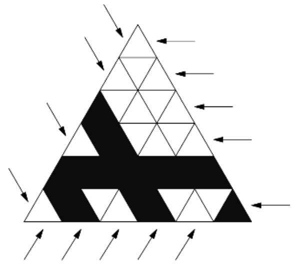
BW1.7. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis. Spēlētāji *A* un *B* spēlē šādu spēli: katrā gājienā spēlētājs izvēlas uz tāfeles esošā skaitļa n dalītāju m, kur $1 < m < n$, un aizstāj n ar $n - m$. Spēlētāji gājienus izdara pārmaiņus, *A* izdara pirmo gājienu. Spēlētājs, kuram nav iespējama gājiena, zaudē spēli. Pie kādiem sākotnējiem skaitļiem spēlētājam *B* ir uzvaroša stratēģija?

BW1.8. Saunā ir n istabas, katrai no kurām ir neierobežota ietilpība. Nevienā istabā nevar vienlaikus būt vīrietis un sieviete. Vīrieši grib būt vienā istabā tikai ar vīriešiem, ar kuriem viņi nav savstarpēji pazīstami, un sievietes – tikai ar sievietēm, ar kurām viņas ir pazīstamas. Noteikt lielāko k, kuram k laulāti pāri var vienlaikus apmeklēt saunu, ja zināms, ka divi vīrieši pazīst viens otru tad un tikai tad, ja viņu sievas pazīst viena otru!

BW1.9. Valstī ir 2014 lidostas un nekādas trīs no tām nav uz vienas taisnes. Divas lidostas savieno tiešs reiss tad un tikai tad, ja taisne, kas savieno šīs divas lidostas, sadala valsti divās daļās, katrā no kurām ir 1006 lidostas. Pierādīt, ka nav divu lidostu ar īpašību, ka no pirmās var aizlidot uz otro, apmeklējot katru no 2014 lidostām tieši vienu reizi!

BW1.10. Balts vienādmalu trijstūris ir sadalīts n^2 vienādos mazākos trijstūros, izmantojot taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Par trijstūru rindu nosauksim visu to trijstūru kopu, kas atrodas starp divām blakusesošām paralēlām taisnēm, kas veido trijstūru režģi. Viens stūrī esošs trijstūris arī tiek uzskatīts par trijstūru rindu.

Mēs gribam nokrāsot visus trijstūrus melnus ar šādu darbību virkni: izvēlamies trijstūru rindu, kas satur vismaz vienu baltu trijstūri un pārkrāsojam visus šīs rindas trijstūrus melnus (piemērs ar iespējamu situāciju pēc četriem gājieniem pie $n = 6$ parādīts 53. att.; bultiņas parāda iespējamos variantus nākamajam gājienam). Atrast mazāko un lielāko iespējamo darbību skaitu, pēc kura visi trijstūri būs melni!



53. att.

Ģeometrija

BW1.11. Dots šaurleņķa trijstūris *ABC* ar $AC > AB$. Ar *D* apzīmēsim *A* projekciju uz *BC* un ar *E* un *F* apzīmēsim *D* projekcijas attiecīgi uz *AB* un *AC*. Ar *G* apzīmēsim taišņu *AD* un *EF* krustpunktu. Ar *H* apzīmēsim otru taisnes *AD* krustpunktu ar trijstūra *ABC* apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka $AG \cdot AH = AD^2$!

BW1.12. Trapece *ABCD* ar pamatiem *AB* un *CD* ir tāda, ka trijstūrim *BCD* apvilktā riņķa līnija krusto taisni *AD* punktā *E*, kas atšķiras no *A* un *D*. Pierādīt, ka trijstūrim *ABE* apvilktā riņķa līnija ω pieskaras taisnei *BC*!

BW1.13. Visas tetraedra skaldnes ir taisnleņķa trijstūri. Ir zināms, ka trim no tetraedra malām ir vienāds garums *s*. Aprēķināt tetraedra tilpumu!

BW1.14. Riņķa līnijas α un β ar vienādu rādiusu krustojas divos punktos, viens no kuriem ir *P*. Ar *A* un *B* apzīmēsim, attiecīgi, punktam *P* diametrāli pretējos punktus uz riņķa līnijām α un β. Trešā riņķa līnija ar tādu pašu rādiusu iet caur *P* un krusto α un β attiecīgi punktos *X* un *Y*. Pierādīt, ka taisnes *XY* un *AB* ir paralēlas!

BW1.15. Četrām riņķa līnijām, kas atrodas vienā plaknē, ir viens un tas pats centrs. Riņķa līniju rādiusi veido stingri augošu aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka nav kvadrāta, kuram katra virsotne atrodas uz citas riņķa līnijas!

Skaitļu teorija

BW1.16. Naturālu skaitli *n* sauc par skaistu, ja eksistē naturāls skaitlis *k*, $1 < k < n$, kuram izpildās vienādība

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \ldots + n.$$

Vai eksistē skaists skaitlis *N*, kuram izpildās nevienādības

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4\ ?$$

BW1.17. Pieņemsim, ka c un $n > c$ ir naturāli skaitļi. Marijas skolotājs uzraksta uz tāfeles n naturālus skaitļus. Vai ir taisnība, ka visiem n un c Marija var apzīmēt skolotāja uzrakstītos skaitļus ar $a_1, \ldots, a_n$ tā, lai cikliskais reizinājums

$$(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$$

būtu kongruents ar 0 vai ar c pēc moduļa n?

BW1.18. Atrast visus veselu skaitļu pārus (x, y), kuriem $y^3 - 1 = x^4 + x^2$!

BW1.19. Pieņemsim, ka a_0 ir naturāls skaitlis un $a_n = 5a_{n-1} + 4$ visiem $n \geq 1$. Vai a_0 var izvēlēties tā, lai a_{54} dalītos ar 2013?

BW1.20. Atrast visus polinomus P ar nenegatīviem veseliem koeficientiem un īpašību, ka visiem pirmskaitļiem p un naturāliem skaitļiem n eksistē pirmskaitlis q un naturāls skaitlis m, kuriem izpildās $P(p^n) = q^m$.

2014./2015. MĀCĪBU GADS

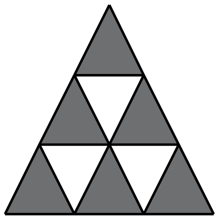
S2. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S2.9.1. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai ir tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

S2.9.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* augstums no virsotnes *A*, leņķa *B* bisektrise un malas *AB* vidusperpendikuls krustojas vienā punktā *O*. Aprēķināt $\angle ABC$!

S2.9.3. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 54. att.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?



54. att.

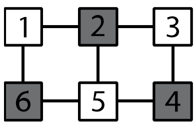
10. klase

S2.10.1. Dots, ka *x* un *y* ir naturāli skaitļi. Kāds ir mazākais skaits dažādu pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties izteiksme $3x(x+2y+1)(7y+1)$?

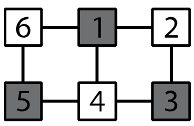
S2.10.2. Uz kvadrāta *ABCD* diagonāles *AC* atlikts iekšējs punkts *M*. Pierādīt, ka

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD = AB^2 \text{ !}$$

S2.10.3. Kvadrātos ierakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (skat. 55. att.). Vienā gājienā ir atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus, kurus savieno nogrieznis, un pie katra no tiem pieskaitīt vienu un to pašu veselu skaitli (šis skaitlis katrā gājienā var būt cits). Vai, veicot šādus gājienus, var iegūt 56. att. parādīto skaitļu izvietojumu?



55. att.



56. att.

11. klase

S2.11.1. Šaha turnīrā piedalās 9 spēlētāji, kuri katrs ar katru spēlē tieši vienu reizi. Katrā spēlē uzvarētājs saņem vienu punktu, zaudētājs – 0 punktus, bet par neizšķirtu katrs spēlētājs saņem 0,5 punktus. Turnīra beigās katrs spēlētājs bija saņēmis vienādu punktu skaitu.
a) Vai ir iespējams, ka katrs spēlētājs nospēlēja neizšķirti atšķirīgu skaitu reižu?
b) Vai ir iespējams, ka katram spēlētājam ir atšķirīgs zaudējumu skaits?

S2.11.2. Izliektam četrstūrim novilktas visu astoņu ārējo leņķu bisektrises. Pierādīt, ka tās veido četrstūri, kuram var apvilkt riņķa līniju!

S2.11.3. Tabulas 3×3 rūtiņās ierakstītas nulles. Vienā gājienā atļauts dotajā tabulā izvēlēties kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas un palielināt par 1 visus tajā ierakstītos skaitļus. Pierādīt, ka pēc vairākiem šādiem gājieniem nevar iegūt 57. att. doto tabulu!

4	9	5
10	18	12
6	13	7

57. att.

12. klase

S2.12.1. Deviņciparu naturāla skaitļa *n* ciparu summa ir 3. Kāda var būt n^3 ciparu summa?

S2.12.2. Trapeces diagonāles ir vienādas. Pierādīt, ka ap šo trapeci var apvilkt riņķa līniju!

S2.12.3. Deviņi rūķīši izvietoti kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa (8×8 rūtiņas) kreisajā apakšējā stūrī. Katrs rūķītis var pārlēkt pāri tam rūķītim, kas atrodas blakus, ja tur ir brīva rūtiņa. Lēkt var gan vertikāli, gan horizontāli, gan arī pa diagonāli. Vai var pārvietot rūķīšus citā kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa **a)** kreisajā augšējā stūrī; **b)** labajā augšējā stūrī?

N2. NOVADA OLIMPIĀDE

9. klase

N2.9.1. Atrisināt vienādojumu $\frac{5}{x^2-9}-\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}$.

N2.9.2. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

N2.9.3. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt **a)** 2014, **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

N2.9.4. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 13. Dārta grib nodzēst vienu no tiem, bet pārējos ierakstīt 3×4 rūtiņu tabulā (katru skaitli vienā rūtiņā) tā, lai visās rindās un kolonnās skaitļu vidējais aritmētiskais būtu vienāds.
a) Pierādīt, ka ir tieši viens skaitlis, kuru nodzēšot, viņa to varēs izdarīt!
b) Atrast vienu skaitļu izvietojuma piemēru!

N2.9.5. Apskata visas funkcijas $y=ax^2+bx+c$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a+2b=2015$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

10. klase

N2.10.1. Uz parabolas $y=ax^2+bx+c$ atrodas punkts $M(1;15)$, tās virsotne ir punktā $N(-3;-1)$. Noteikt koeficientus *a, b* un *c*!

N2.10.2. Ar naturālu skaitli atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt 6;
- dalīt ar 4, ja skaitlis dalās ar 4;
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 2015?

N2.10.3. Vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir 177. Kādas vērtības var pieņemt mazākais no šiem saskaitāmajiem?

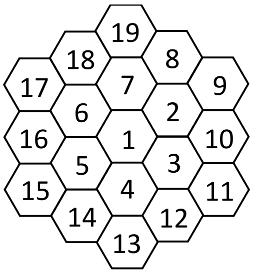
N2.10.4. Vai eksistē tāds vesels skaitlis *x*, ka **a)** visi skaitļi x; $x+23$; $x+45$; $x+121$; **b)** visi skaitļi x; $x+23$; $x+46$; $x+121$ ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1 (kāpinātāji var būt dažādi)?

N2.10.5. Uz kvadrāta *ABCD* malas *AB* kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris *AEB*. Taisne, kas vilkta no *E* caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu *O*, krusto kvadrāta malu *AB* punktā *F* un malu *DC* – punktā *G*. Zināms, ka $\angle OEB=\angle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris *AEB* ir taisnleņķa!

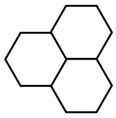
11. klase

N2.11.1. Atrisināt nevienādību $|x-2|-6+\frac{5}{|x-2|}>0$.

N2.11.2. Vienā gājienā no 58. att. attēlotās figūras var izvēlēties jebkuru 59. att. redzamo figūru (figūru var arī pagriezt) un tajā ierakstītajiem skaitļiem vai nu pieskaitīt 1, vai arī atņemt 1. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka visās šūnās ir ierakstīts skaitlis 2015?



58. att.



59. att.

N2.11.3. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis *n*, kuru iespējams izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu *a, b* un *c* summu tā, ka visi skaitļi $a+b$, $a+c$, $b+c$ ir naturālu skaitļu kvadrāti?

N2.11.4. Uz trijstūra *XAC* malas *XC* atlikts iekšējs punkts *B* tā, ka $AB = AC$. Leņķu *ACB* un *ABX* bisektrises krustojas punktā *D*. Pierādīt, ka $AD = AB$!

N2.11.5. Dots taisnstūris ar izmēriem $n \times m$ rūtiņas. Sākumā katrā rūtiņā ir ierakstīts 5. Māris dotajā taisnstūrī veic secīgas darbības:

1) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 1;
2) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 2;
3) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 3;
4) visbeidzot izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 4.

Katra izvēlētā taisnstūra malām jāiet pa rūtiņu līnijām un cipars vienmēr jāraksta rūtiņā jau esošā skaitļa labajā pusē. Vai iespējams, ka visās rūtiņās ierakstītie skaitļi ir dažādi, ja dotā taisnstūra izmēri ir **a)** 3×6; **b)** 3×5; **c)** 4×4 rūtiņas?

12. klase

N2.12.1. Atrisināt vienādojumu $(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x) = 2x - \log_{\sqrt{6}} 36$.

N2.12.2. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas darbības:

- pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu;
- atņemt no skaitļa tā ciparu summu.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 139 var iegūt skaitli **a)** 63; **b)** 193?

N2.12.3. Cik daudz ir piecciparu skaitļu, kas sastāv no tieši trīs dažādiem cipariem, no kuriem neviens nav 0 un neviens neatkārtojas vairāk kā divas reizes?

N2.12.4. Izliekta četrstūra *ABCD* malu *AB, BC, CD* un *DA* viduspunkti ir attiecīgi *E, F, G* un *H*. Nogrieznis *AF* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *K* un *L*, bet *CH* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *N* un *M*. Pierādīt, ka $S_{BFL} + S_{CMG} + S_{DNH} + S_{AKE} = S_{KLMN}$!

N2.12.5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *a, b* un *c*, ka skaitļa $a^2+b^2+c^2$

a) pēdējie divi cipari ir 15;

b) pēdējie četri cipari ir 2015?

V2. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

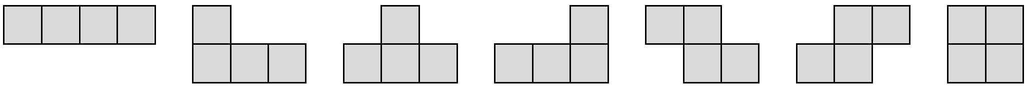
V2.9.1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus n un m, kuriem $\dfrac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis!

V2.9.2. Pierādīt, ka, izmantojot

a) visas septiņas dotās figūras (skat. 60. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

b) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri.

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



60. att.

V2.9.3. Aija izvēlas naturālu skaitli $n \le 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \le 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis n, tad skaitli n sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo 40; 80; 60; 20; 40; …, bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; … (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

V2.9.4. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BL (L atrodas uz malas AC), tā krusto taisni, kas no A vilkta paralēli BC, punktā K. Zināms, ka $LK = AB$. Pierādīt, ka $AB > BC$!

V2.9.5. Kāda ir izteiksmes $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4 + 1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja a ir reāls skaitlis?

10. klase

V2.10.1. Kvadrātvienādojuma

$$(1+\sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}} \cdot (1+\sqrt{5})^2 x + \sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}} = 0$$

saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3$ vērtība ir vesels skaitlis!

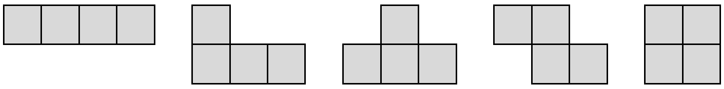
V2.10.2. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

V2.10.3. Pozitīviem skaitļiem a, b, c, d, e, f ir spēkā sakarības $a^2 + b^2 = c^2$ un $d^2 + e^2 = f^2$. Pierādīt, ka $(a+d)^2 + (b+e)^2 = (c+f)^2$.

V2.10.4. Pierādīt, ka regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2 + R = A_1A_4$, kur R ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

V2.10.5. a) Pierādīt, ka, izmantojot visas piecas dotās figūras (skat. 61. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri!

b) Vai, izmantojot četras no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri? Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt vai apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



61. att.

11. klase

V2.11.1. Kvadrātvienādojuma $(1+\sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})^2 x + \sqrt[4]{7} = 0$ saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3 + 16a^4b^3 + 16a^3b^4$ vērtība ir vesels skaitlis!

V2.11.2. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

V2.11.3. Pirātam Džonam Silveram kajītē ir 38 papagaiļi un 39 papagaiļu krātiņi. Katram papagailim ir savs krātiņš un vēl viens krātiņš stāv tukšs. Kādu dienu vētras laikā tie visi izmuka, tika noķerti un uz ātru roku salikti atpakaļ krātiņos (katrā krātiņā ne vairāk kā viens), bet ne obligāti savos. Vienā gājienā Džons Silvers var paņemt vienu papagaili un pārlikt uz to krātiņu, kurš dotajā brīdī ir tukšs. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru viņam noteikti pietiek, lai panāktu, ka visi papagaiļi atrodas savos sākotnējos krātiņos?

V2.11.4. Naturāli skaitļi *a, b* un *c* ir savstarpēji pirmskaitļi un visi ir lielāki nekā 50. Zināms, ka $a+b$ dalās ar *c* un $b+c$ dalās ar *a*. Atrast mazāko iespējamo *b* vērtību!

V2.11.5. Pierādīt, ka regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4 + R$, kur *R* ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

12. klase

V2.12.1. Zināms, ka $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{1}{2015}$. Aprēķināt $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ vērtību!

V2.12.2. Paralelograma *ABCD* iekšpusē atzīmēts punkts *P* tā, ka $\angle PAB = \angle PCB$. Pierādīt, ka $\angle PBC = \angle PDC$!

V2.12.3. Pierādīt, ka jebkuram naturālam nepāra skaitlim *n* izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 2015.

V2.12.4. Katrs no skaitļu ass punktiem ar veselu koordinātu ir nokrāsots vai nu baltā, vai melnā krāsā. Nekādi divi balti punkti neatrodas viens no otra attālumā 1 un nekādi divi melni punkti neatrodas viens no otra attālumā *d*. Noteikt, kādām naturālām *d* vērtībām šāds krāsojums ir iespējams!

V2.12.5. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no diviem burtiem *a* un *b*. Jebkuru vārdu var iegūt no vārda "*a*", atkārtoti lietojot šādus trīs likumus:

1) pierakstot vārdam galā burtu *b*;
2) pierakstot vārdam galā sevi pašu;
3) aizstājot vārdā trīs pēc kārtas esošus burtus *a* ar vienu burtu *b*.

Vai votivapu valodā ir vārdi **a)** *abbababab*; **b)** *baabaabaa*?

P2. PAPILDUS SACENSĪBAS

P2.1. Pierādīt, ka dažādiem reāliem skaitļiem *a*, *b* un *c* sakarība $a+b+c=0$ ir spēkā tad un tikai tad, ja $a^3+b^3+c^3=3abc$.

P2.2. Uz trijstūra *ABC* malām *AC* un *BC* uz āru ir konstruēti kvadrāti ACA_1A_2 un BCB_1B_2. Pierādīt, ka taisnes A_1B, A_2B_2 un AB_1 krustojas vienā punktā!

P2.3. Naturālus skaitļus *x* un *y* sauc par *draudzīgiem*, ja $xy+1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Piemēram, skaitļi 2 un 40 ir draudzīgi. Pierādīt: ja skaitļi *a* un *b* ir *draudzīgi*, tad eksistē tāds naturāls skaitlis *c*, ka vienlaikus *a* un *c* ir *draudzīgi*, un arī *b* un *c* ir *draudzīgi*!

P2.4. Atrast visas funkcijas, kas definētas veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tādas, ka $f(1)=f(-1)$ un visiem veseliem *x* un *y* izpildās

$$f(x)+f(y)=f(x+2xy)+f(y-2xy).$$

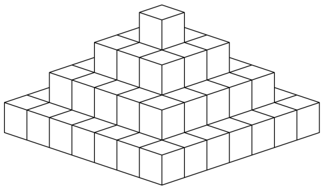
P2.5. Parlamentā, kurā ir $n\geq 2$ deputāti, darbojas $k\geq 0$ komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi *n* deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai *k* vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas?

A2. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

9. klase

A2.9.1. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

A2.9.2. Tornis ir salikts no vienības kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$. Apakšējā slānī ir 7×7 kubiņi. Otrs slānis ir novietots virs pirmā slāņa centrālās daļās, tajā ir 5×5 kubiņi. Trešajā slānī, kurš novietots apakšējās daļas centrā, ir 3×3 kubiņi un augšā centrā ir 1 vienības kubiņš (skat. 62. att.). Vai šo torni var salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$?



62. att.

A2.9.3. Pierādīt, ka x^5-5x^3+4x dalās ar 120, ja *x* ir vesels skaitlis!

A2.9.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, bet diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *CDE* apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu *AD* iekšējā punktā *F*. Nogriežņu *CF* un *BD* krustpunkts ir *G*. Nosaki $\angle CGD$ lielumu, ja $\angle CAD=\alpha$!

A2.9.5. Parādīt, kā naturālos skaitļus no 1 līdz $2n-1$ uzrakstīt rindā tā, ka visas blakus esošo skaitļu starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko) ir dažādas un skaitlis 1 ir vidējais (*n*-tais), ja **a)** $n=5$; **b)** $n=1008$.

10. klase

A2.10.1. Noteikt funkcijas **a)** $y=x^2+2x+2$, **b)** $y=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ vērtību kopu!

A2.10.2. Kādām naturālām *n* vērtībām kvadrātu $n\times n$ rūtiņas var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

A2.10.3. Atrast visus naturālos skaitļus, kas ir vienādi ar savu ciparu reizinājumu! (Par viencipara skaitļa ciparu reizinājumu sauc tā vienīgo ciparu.)

A2.10.4. Uz vienādsānu trijstūra *ABC* pamata *AC* atlikts iekšējs punkts *D*, bet uz *AC* pagarinājuma – punkts *E* (punkts *C* atrodas starp *D* un *E*) tā, ka $AD=CE$. Pierādīt, ka $BD+BE>2BC$!

A2.10.5. Jura dzimšanas dienas torte ir biezpiena kubs, kura četras sānu skaldnes un augšējā skaldne ir noklāta ar šokolādes glazūru (visur vienādi biezu). Kā šo torti sadalīt **a)** četrās daļās, **b)** trīs daļās tā, lai katras daļas forma ir taisna prizma un gan biezpiena, gan glazūras daudzums visās daļās ir vienāds?

11. klase

A2.11.1. Aplūkojam visus deviņciparu skaitļus, kas nesatur 0 un kam visi cipari ir dažādi. Pierādīt, ka starp tiem pāra skaitļu ir tieši divas reizes mazāk nekā tādu, kas dalās ar 3, bet nedalās ar 5.

A2.11.2. Taisnstūri var pārklāt ar mazākiem taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×4 un 2×2. Vienu mazo taisnstūri, kura izmēri ir 2×2, aizvietoja ar taisnstūri 1×4. Vai, izmantojot šos taisnstūrus, vēl joprojām var pārklāt doto taisnstūri?

A2.11.3. Naturālam skaitlim n ar $M(n)$ apzīmēsim mazāko naturālo skaitli, kas beidzas ar n un kura ciparu summa ir n. Piemēram, $M(13)=913$. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu n, ka $M(n)$ dalās ar n.

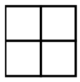
A2.11.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, garākais pamats ir *AD*. Diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *ABE* apvilkta riņķa līnija ω_1, bet ap *CDE* – riņķa līnija ω_2. Pierādīt, ka trapecei *ABCD* apvilktās riņķa līnijas ω centrs atrodas ω_1 un ω_2 krustpunktā, kas atšķirīgs no punkta *E*!

A2.11.5. Atrast funkcijas $f(x)=8\sin x+8\cos x-12\sin x\cos x$ mazāko un lielāko vērtību!

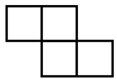
12. klase

A2.12.1. Uz funkcijas $y=|x-3|+2$ grafika atrast tādu punktu *P*, kura attālumu kvadrātu summa līdz koordinātu asīm būtu vismazākā!

A2.12.2. Taisnstūrim ar izmēriem 10×10 rūtiņas izgrieza visas četras stūra rūtiņas. Vai iegūto figūru var pārklāt ar vienu 63. att. redzamo figūru un 23 figūrām, kas redzamas 64. att.? Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



63. att.



64. att.

A2.12.3. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$, ja *a*, *b*, *c*, *d* ir pozitīvi skaitļi!

A2.12.4. Taisnleņķa trijstūrī *ABC* uz katetes *AC* atzīmēts punkts *P*, uz katetes *BC* – punkts *S*, uz hipotenūzas *AB* – punkti *R* un *Q* tā, ka *PSRQ* ir kvadrāts. Pierādīt, ka $AB\geq3PS$! Kādā gadījumā $AB=3PS$?

A2.12.5. Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (*a*; *b*; *c*) tādus, ka $a\geq b\geq c\geq2$ un $ab-1$ dalās ar *c*, $bc-1$ dalās ar *a*, $ac-1$ dalās ar *b*.

BW2. BALTIC WAY 2014

Algebra

BW2.1. Pierādīt vienādību

$$\cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)=\frac{1}{2^{24}}.$$

BW2.2. Doti reāli skaitļi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kas apmierina vienādības $a_0 = a_n = 0$ un

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2$$

visiem $i = 1,2,\ldots,n-1$. Pierādīt, ka nevienādība $a_i \leq 0$ izpildās visiem $i = 1,2,\ldots,n-1$.

BW2.3. Pozitīvi skaitļi $a,\ b,\ c$ apmierina vienādību $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

BW2.4. Atrast visas funkcijas f, kas definētas reālo skaitļu kopā, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem skaitļiem x, y apmierina vienādību

$$f\big(f(y)\big)+f(x-y)=f(xf(y)-x).$$

BW2.5. Doti tādi pozitīvi skaitļi a, b, c, d, kas apmierina vienādības

$$a^2+d^2-ad=b^2+c^2+bc \quad \text{un} \quad a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Atrast izteiksmes $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ visas iespējamās vērtības!

Kombinatorika

BW2.6. Rindā izvietotas 16 sēdvietas. Katra no tām jānokrāso vai nu zaļa, vai sarkana, turklāt tā, lai vienā krāsā nokrāsotu secīgu sēdvietu skaits vienmēr būtu nepāra skaitlis. Cik dažādos veidos ir iespējams šīs 16 sēdvietas nokrāsot?

BW2.7. Cik ir tādu kopas $\{1,2,\ldots.,30\}$ permutāciju $\sigma\colon\{1,2,\ldots,30\}\to\{1,2,\ldots.,30\}$, kurām izpildās vienādība

$$\sum_{k=1}^{30}|\sigma(k)-k|=450\ ?$$

BW2.8. Alberts un Betija spēlē šādu spēli. Sākotnēji ir sarkans un zils trauks, turklāt sarkanajā traukā atrodas 100 zilas bumbiņas, bet zilajā traukā atrodas 100 sarkanas bumbiņas. Katrā gājienā spēlētājs izpilda vienu no šādām darbībām:

1. paņem divas sarkanas bumbiņas no zilā trauka un pārliek tās sarkanajā traukā;
2. paņem divas zilas bumbiņas no sarkanā trauka un pārliek tās zilajā traukā;
3. paņem no kāda trauka divas dažādas krāsas bumbiņas un aizmet tās prom.

Abi spēlētāji gājienus izdara pamīšus, pirmais sāk Alberts. Uzvar tas spēlētājs, kurš vai nu pirmais paņem pēdējo sarkano bumbiņu no zilā trauka, vai arī pēdējo zilo bumbiņu no sarkanā trauka. Kuram spēlētājam, pareizi spēlējot, ir uzvaroša stratēģija?

BW2.9. Dots kvadrāts ar izmēriem $n\times n$ rūtiņas. Tajā jāiekrāso dažas rūtiņas sarkanas tā, lai visiem $m>\frac{n}{2}$ izpildās īpašība: katrā kvadrātā ar izmēriem $m\times m$ rūtiņas (kvadrāts atrodas dotā kvadrāta iekšpusē un tā malas iet pa rūtiņu līnijām) abas diagonāles satur vismaz vienu sarkanu rūtiņu. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso sarkanas, lai šāda īpašība būtu spēkā?

BW2.10. Kādā valstī ir 100 lidostas. Dažiem šo lidostu pāriem aviokompānija *SuperAir* nodrošina tiešos reisus (gan turp, gan atpakaļ). Par lidostas X *satiksmi* sauksim to lidostu skaitu, ar kurām *SuperAir* nodrošina tiešos reisus ar X.

Jauna aviokompānija *ConcurAir* piedāvā tiešos reisus starp divām šīs valsts lidostām tad un tikai tad, ja šo lidostu satiksmju summa ir vismaz 100. Izrādās, ka ir tāds maršruts, kas ļauj apceļot visas lidostas ar *ConcurAir* reisiem un atgriezties sākotnējā, turklāt katrā lidostā iegriežoties tikai vienu reizi. Pierādīt, ka ir arī tāds maršruts, kas ļauj apceļot visas lidostas ar *SuperAir* reisiem un atgriezties sākotnējā, turklāt katrā lidostā iegriežoties tikai vienu reizi!

Ģeometrija

BW2.11. Šaurleņķu trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija Γ. Nogrieznis CD ir šī trijstūra augstums, bet punkts E ir CD krustpunkts ar riņķa līniju Γ. Leņķa C bisektrise krusto malu AB punktā F, bet riņķa līniju Γ arī punktā G, kas atšķirīgs no C. Taisne GD krusto Γ arī punktā H, bet taisne HF krusto Γ arī punktā I. Pierādīt, ka $AI = EB$!

BW2.12. Dots trijstūris ABC. Punkts M ir nogriežņa AB viduspunkts, bet T – trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas loka BC (tā, kurš nesatur A) viduspunkts. Trijstūra ABC iekšpusē izvēlēts tāds punkts K, ka $MATK$ ir vienādsānu trapece ar pamatiem AT un MK. Pierādīt, ka $AK = KC$!

BW2.13. Dots, ka $ABCD$ ir kvadrāts; tam apvilktā riņķa līnija apzīmēta ar ω. Uz ω īsākā loka AB atlikts punkts P. Punkts R ir taišņu CP un BD krustpunkt, bet Q – taišņu DP un AC krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūri ARB un DQR ir vienlieli!

BW2.14. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāle BD vienlaikus ir arī leņķa ABC bisektrise. Trijstūrim ABC apvilktā riņķa līnija ω krusto malas AD un CD vēl attiecīgi punktos P un Q. Taisne, kas iet caur D un ir paralēla AC, krusto taisnes BC un BA attiecīgi punktos R un S. Pierādīt, ka punkti P, Q, R un S atrodas uz vienas riņķa līnijas!

BW2.15. Izliekta četrstūra $ABCD$ leņķu A un C summa ir mazāka nekā 180°. Pierādīt, ka
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD)!$$

Skaitļu teorija

BW2.16. Noteikt, vai skaitlis $712! + 1$ ir pirmskaitlis!

BW2.17. Vai eksistē tādi dažādi racionāli skaitļi x, y, z, kuriem izpildās vienādība
$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

BW2.18. Dots pirmskaitlis p un naturāls skaitlis n. Atrast, cik dažādos veidos var izvēlēties tādus veselu nenegatīvu skaitļu četriniekus $(a_1; a_2; a_3; a_4)$, kam $a_i < p^n$ visiem $i = 1,2,3,4$, turklāt skaitlis $a_1a_2 + a_3a_4 + 1$ dalās ar p^n.

BW2.19. Doti pozitīvi savstarpēji pirmskaitļi m un n. Atrast skaitļu $2^m - 2^n$ un $2^{m^2+mn+n^2} - 1$ lielākā kopīgā dalītāja visas iespējamās vērtības!

BW2.20. Apskatām tādu naturālu skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ka visiem $k \geq 2$ izpildās vienādība
$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$
kur i ir tāds nenegatīvs vesels skaitlis, ka $a_k + a_{k-1}$ dalās ar 2015^i, bet nedalās ar 2015^{i+1}. Pierādīt, ka gadījumā, ja šī virkne ir periodiska, tās perioda garums dalās ar 3.

IETEIKUMI

2013./2014. MĀCĪBU GADS

S1. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S1.9.1. Ievēro, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

S1.9.2. Atceries, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

S1.9.3. Pierādi no pretējā.

S1.9.4. Pierādi no pretējā.

S1.9.5. a) Parādi, kā konfektes var apvienot vienā kaudzē. **b)** Izdomā pretpiemēru.

10. klase

S1.10.1. Atdali pilnos kvadrātus.

S1.10.2. Atceries, kādos gadījumos ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

S1.10.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) atrast lielāko ciparu summu un parādīt šāda skaitļa piemēru; 2) pierādīt, ka lielāku ciparu summu iegūt nevar.

S1.10.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādīt piemēru lielākajam dažādo komisiju skaitam; 2) pierādīt, ka vairāk komisijas izveidot nevar.

S1.10.5. Pierādi, ka, pareizi spēlējot, vienmēr uzvar Gunārs. Izdomā stratēģiju, kā Gunāram jāspēlē.

11. klase

S1.11.1. Atdali pilnos kvadrātus.

S1.11.2. a) Parādi piemēru, kā ierakstīt skaitļus. **b)** Apskati pirmskaitļus, kas lielāki nekā 40, un izdomā, kur tie būtu jāieraksta. Iegūsti pretrunu.

S1.11.3. Izmanto, ka leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām ir vienādi.

S1.11.4. a) Atrodi vienu piemēru. **b)** Izmanto, ka $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)$.

12. klase

S1.12.1. Ievēro, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

S1.12.2. Izmanto trijstūru vienādību un trijstūru īpašības.

S1.12.3. Pieņem pretējo un, apskatot starpību $(6^n-1)-(4^n-1)$, iegūsti pretrunu.

S1.12.4. a) Pierādi, ka polinomu x nevar iegūt. **b)** Parādi, kā iegūt polinomu x.

S1.12.5. Apzīmē atbilstošo pārkārtojumu skaitu n skolēnu gadījumā ar a_n. Apskati $n+2$ skolēnus un izdomā formulu, kas izsaka a_{n+2} ar a_n un a_{n+1}.

N1. NOVADA OLIMPIĀDE

9. klase

N1.9.1. Atdali pilnos kvadrātus.

N1.9.2. Apzīmē taisnstūra malu garumus un uzraksti vienādojumu. Pārveido vienādojumu tā, lai tā vienā pusē būtu reizinājums, bet otrā pusē vesels skaitlis.

N1.9.3. Izsaki mainīgo a un uzraksti iegūto izteiksmi kā skaitļa un algebriskas daļas summu.

N1.9.4. Apskati trīs principiāli atšķirīgos sienāža novietojumus.

N1.9.5. Izmanto līdzīgu trijstūru īpašības.

10. klase

N1.10.1. Ja nevienādības abas puses ir nenegatīvas, tad, kāpinot nevienādību pakāpē ar naturālu kāpinātāju, atkal iegūst patiesu nevienādību.

N1.10.2. Sadali dotos skaitļus grupās tā, lai katras grupas, kurā ir divi skaitļi, skaitļu summa būtu 302. Izmanto Dirihlē principu.

N1.10.3. Izmanto ievilkto leņķu īpašības.

N1.10.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādīt piemēru mazākajai summai; 2) pierādīt, ka mazāku summu nevar iegūt.

N1.10.5. a) Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs mazākajam grozu skaitam; 2) jāpierāda, ka mazāk grozu nevar būt.
b) Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajam grozu skaitam; 2) jāpierāda, ka vairāk grozu nevar būt.

11. klase

N1.11.1. Apskati polinomu $F(x) = P(x) - 2000$.

N1.11.2. Pierādi, ka četrstūris *DOEB* ir rombs.

N1.11.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visi n, kam izpildās dotā īpašība; 2) jāpierāda, ka citiem n šī īpašība nepiemīt.

N1.11.4. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

N1.11.5. Reizini doto nevienādību ar $(xyz)^2 > 0$ un izmanto doto vienādību $x + y + z = xyz$.

12. klase

N1.12.1. Pierādi, ka vienādojumam nav negatīvu sakņu.

N1.12.2. Izsaki trijstūra *ABF* un *CDE* laukumu vairākos veidos.

N1.12.3. a) Pierādi, ka deviņus skaitļus nevar izvēlēties. **b)** Parādi piemēru, ka desmit skaitļus var izvēlēties.

N1.12.4. Pierādi, ka Alise vienlaicīgi var nēsāt 6 rokassprādzes.

N1.12.5. Ievēro, ka $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ un $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

V1. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

V1.9.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod izteiksmes mazākā vērtība un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāku vērtību nevar iegūt.

V1.9.2. Aplūko atlikumu virkni, kas rodas, virknes elementus dalot ar 5. Nosaki virknes periodu.

V1.9.3. Pagarini nogriezni AY aiz punkta Y un atliec punktu P tā, ka $AY = YP$. Atceries, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

V1.9.4. a) Katrai galda pozīcijai i ($1 \le i \le 13$) ar p_i apzīmē diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, un apskati summu $p_1 + p_2 + ... + p_{13}$. **b)** Atrodi atbilstošu piemēru.

V1.9.5. Apzīmē $p = x^2 + 5x - 8$.

10. klase

V1.10.1. Ievēro, ka sistēmas atrisinājums ir (0, 0, 0). Pirmajā vienādojumā aizstāj $y + z$ ar x.

V1.10.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visas derīgās n vērtības; 2) jāpierāda, ka citas vērtības neder. Apzīmē $k = n + 3$ un pārveido pirmo izteiksmi.

V1.10.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākā summa, kuru nevar apmaksāt; 2) jāparāda, ka visas summas, kas ir lielākas, var apmaksāt.

V1.10.4. Izmanto trapeces viduslīnijas un pieskaru, kas vilktas no viena punkta, īpašības.

V1.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais partiju skaits un jāparāda, kā partijas var būt devušas solījumus; 2) jāpierāda, ka lielāks partiju skaits nevar būt.

11. klase

V1.11.1. Novērtē, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas izteiksmes $10^{2n} - 10^n + \frac{1}{4}$ vērtība.

V1.11.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādīt piemēru lielākajam pirmskaitļu skaitam; 2) pierādīt, ka lielāks skaits pirmskaitļu nevar būt.

V1.11.3. a) Parādi piemēru. **b)** Pierādi, ka skaitļus figūras virsotnēs nevar ierakstīt tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi.

V1.11.4. Pierādi, ka punkti P, A un C atrodas uz vienas taisnes un arī punkti B, A un Q atrodas uz vienas taisnes. Izmanto ievilkto leņķu īpašības

V1.11.5. Apskati skaitļus $x = \frac{a+b+c}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $p = \frac{c+a-b}{2}$ un $q = \frac{c-a+b}{2}$.

12. klase

V1.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais iespējamais „+” zīmju skaits un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka vairāk „+” zīmju nevar būt.

V1.12.2. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

V1.12.3. Pagarini OA tā, ka AF ir diametrs un novelc nogriezni EF. Atrodi līdzīgus trijstūrus.

V1.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs mazākajam izspēlēto šaha partiju skaitam; 2) jāpierāda, ka mazāks partiju skaits nevar būt izspēlēts.

V1.12.5. Pierādi, ka nav tādas n vērtības, kurai piemīt dotā īpašība.

P1. PAPILDUS SACENSĪBAS

P1.1. Izmanto sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

P1.2. Izmanto līdzīgu trijstūru un ievilkto leņķu īpašības.

P1.3. Pieņem, ka visi skolēni, kas strādāja pie viena projekta, veica vienādu darba daudzumu – ja grupā strādāja m skolēni, tad katrs ir veicis darba apjomu $\frac{1}{m}$.

P1.4. Pārveido doto vienādojumu un apskati vienādojumu pēc moduļa 4.

P1.5. Parādi piemērus, ka šādi kvadrāti eksistē.

A1. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

9. klase

A1.9.1. Izsaki iekrāsoto figūru laukumu, izmantojot kvadrāta un riņķa laukumu.

A1.9.2. Dotos ciparus apzīmē ar *a, b, c, d* un atrodi izteiksmes $a+b+c+d$ vērtību.

A1.9.3. Ievēro, ka mediānas, kas vilkta no taisnā leņķa virsotnes, garums ir puse no hipotenūzas garuma.

A1.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatroda mazākais skaitlis, kas ierakstīts centrālajā rūtiņā un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāks skaitlis centrālajā rūtiņā nevar būt ierakstīts.

A1.9.5. Divos veidos saskaiti kopējo antenu skaitu un iegūsti pretrunu.

10. klase

A1.10.1. Apskati starpību $a_{n+1}-a_n$ un pierādi, ka $a_{n+1}-a_n<0$.

A1.10.2. Uzdevuma atrisinājumama ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs, kā novilkt lielāko skaitu nogriežņu; 2) jāpierāda, ka vairāk nogriežņu novilkt nevar.

A1.10.3. Pietiek atrast vienu punktu, kas pieder visiem grafikiem.

A1.10.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajam summu skaitam, kas var būt pirmskaitļi; 2) jāpierāda, ka lielāks skaits summu nevar būt pirmskaitļi.

A1.10.5. Pierādi no pretējā.

11. klase

A1.11.1. Pierādi, ka abos gadījumos daudzstūru ar sarkano virsotni ir vairāk.

A1.11.2. Apzīmē $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ un apskati starpību $S_{n+1}-S_n$.

A1.11.3. Izmanto ievilkto leņķu īpašības. Pierādi, ka ap četrstūri *BOKN* var apvilkt riņķa līniju.

A1.11.4. Ievēro, ka no dotā izriet, ka visi skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Apskati patvaļīgu pirmskaitli *p*, ar kuru dalās visu doto skaitļu reizinājums.

A1.11.5. Aprēķini 2014-stūra iekšējo leņķu summu un 167 izliektu 14-stūru kopējo iekšējo leņķu summu.

12. klase

A1.12.1. Apzīmē $3^x=t$ un iegūsti kvadrātnevienādību.

A1.12.2. Apzīmē ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustpunktu ar *X*. Ievēro, ka pietiek pierādīt, ka $\angle AXQ+\angle AXN=180°$.

A1.12.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) atrast visus pirmskaitļus *p*, kas apmierina uzdevuma nosacījumus; 2) pierādīt, ka citi *p* neder.

A1.12.4. Parādi, ka prasīto var izdarīt.

A1.12.5. Dotajā nevienādībā izvēlies $a=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ un $b=\frac{x_1+x_2}{2}$.

BW1. BALTIC WAY 2013

Algebra

BW1.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajai iespējamai skaitļu reizinājumam vērtībai; 2) jāpierāda, ka lielāku vērtību iegūt nevar.

BW1.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajai iespējamai reizinājuma vērtībai; 2) jāpierāda, ka lielāku vērtību iegūt nevar. Apzīmē $Q(x) = P(x) - 54$. Ievēro, ka $1959 = 3 \cdot 653$, turklāt 653 ir pirmskaitlis.

BW1.3. Atrodi visas funkcijas un pamato, ka citas neder. Apzīmē $f(0) = c$ un ievietodažādas mainīgo vērtības dotajā vienādībā.

BW1.4. Izmanto sakārtojuma nevienādību.

BW1.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs mazākajai uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summai; 2) jāpierāda, ka mazāku vērtību iegūt nevar. Izmanto faktu, ka funkcija $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ savu minimumu sasniedz pie $x = \frac{a+b+c}{3}$.

Kombinatorika

BW1.6. Izdomā un pamato, kā sadalīt dāvanas.

BW1.7. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

BW1.8. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

BW1.9. Izmanto punktu izliekto apvalku.

BW1.10. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

Ģeometrija

BW1.11. Pierādi, ka ap četrstūri *AFDE* var apvilkt riņķa līniju un arī ap četrstūri *BEGH* var apvilkt riņķa līniju.

BW1.12. Šķiro gadījumus atkarībā no punkta *E* novietojuma.

BW1.13. Izdomā, kuru tetraedra šķautņu garums ir s.

BW1.14. Pierādi, ka punkti *A*, *X*, *Z* atrodas uz vienas taisnes un arī punkti *B*, *Y*, *Z* atrodas uz vienas taisnes.

BW1.15. Pierādi lemmu: ja *ABCD* ir kvadrāts, tad patvaļīgam punktam *E* izpildās

$$EA^2 + EC^2 = EB^2 + ED^2.$$

Skaitļu teorija

BW1.16. Pierādi, ka neeksistē tāds *N*, kuram izpildās dotās nevienādības.

BW1.17. Pierādi, ka visiem *n* un *c* uzrakstītos skaitļus var apzīmēt tā, lai izpildītos prasītais.

BW1.18. Pierādi, ka vienīgais vienādojuma atrisinājums ir $(x, y) = (0,1)$. Sadali izteiksmi $x^4 + x^2 + 1$ reizinātājos.

BW1.19. Apzīmē $x_n = \frac{a_n}{5^n}$.

BW1.20. Pierādi, ka vienīgie polinomi, kas apmierina uzdevuma prasības, ir $P(t) = t^k$, kur k ir naturāls skaitlis, un konstantie polinomi $P(t) = q^m$, kur q ir pirmskaitlis, bet *m* ir naturāls skaitlis.

2014./2015. MĀCĪBU GADS

S2. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S2.9.1. Izdomā, kāds var būt izspēlēto spēļu skaits. Pierādi no pretējā.

S2.9.2. Izmanto trijstūru vienādību.

S2.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajam iespējamajam summu skaitam, kas ir pirmskaitļi; 2) jāpierāda, ka lielāks skaits summu, kas ir pirmskaitļi, nevar būt.

10. klase

S2.10.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs mazākajam pirmskaitļu skaitam, ar ko var dalīties dotā izteiksme; 2) jāpierāda, ka ar mazāk pirmskaitļiem dotā izteiksme nevar dalīties.

S2.10.2. Izmanto kvadrāta īpašības un Pitagora teorēmu.

S2.10.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasīto skaitļu izvietojumu nevar iegūt.

11. klase

S2.11.1. Aprēķini, cik punktus ieguva katrs spēlētājs, un secini, cik reizes katrs spēlētājs varēja būt nospēlējis neizšķirti. Izmanto Dirihlē principu.

S2.11.2. Izdomā, kad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

S2.11.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasīto skaitļu izvietojumu nevar iegūt.

12. klase

S2.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemēri, kas parāda, kāda var būt n^3 ciparu summa; 2) jāpierāda, ka citas summas nevar iegūt.

S2.12.2. Atrodi vienādus taisnleņķa trijstūrus.

S2.12.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka abos gadījumos rūķīšus nevar pārvietot.

N2. NOVADA OLIMPIĀDE

9. klase

N2.9.1. Atceries veikt sakņu pārbaudi vai nosaki definīcijas kopu.

N2.9.2. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

N2.9.3. Parādi piemērus, kā prasīto var izdarīt. Pamato un izmanto, ka katru taisnleņķa trijstūri var sadalīt divos tam līdzīgos trijstūros.

N2.9.4. Pierādi, ka gan rindā, gan kolonnā ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais ir naturāls skaitlis.

N2.9.5. Ievēro, ka, lai pierādītu vajadzīgo, pietiek atrast divus punktus, kas pieder visu funkciju grafikiem.

10. klase

N2.10.1. Uzraksti vienādības, kuras iegūst, ja punkta koordinātas ievieto funkcijas formulā atrisini iegūto vienādojumu sistēmu.

N2.10.2. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

N2.10.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visas iespējamās mazākā saskaitāmā vērtības; 2) jāpierāda, ka citas vērtības nevar būt.

N2.10.4. **a)** Atrodi tādu x vērtību, ka visi dotie skaitļi ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1.
b) Pierādi, ka neeksistē tāda x vērtība, ka visi dotie skaitļi ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1.

N2.10.5. Pamato un izmanto, ka punkti A, E, B, O atrodas uz vienas riņķa līnijas.

11. klase

N2.11.1. Ievēro, ka $|x-2|>0$. Atceries noteikt nevienādības definīcijas kopu.

N2.11.2. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

N2.11.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) atrast mazāko n vērtību un parādīt piemēru; 2) pierādīt, ka mazāka n vērtība nevar būt.

N2.11.4. Ievēro: ja leņķa lielums ir tieši divas reizes mazāks nekā centra leņķim, tad tas ir ievilktais leņķis.

N2.11.5. Ja prasītais ir iespējams, tad parādi piemēru. Ja prasītais nav iespējams, tad pierādi to.

12. klase

N2.12.1. Ievēro, ka $\log_{\sqrt{6}} 36 = \log_{\sqrt{6}} (\sqrt{6})^4 = 4$. Atceries noteikt vienādojuma definīcijas kopu.

N2.12.2. **a)** Parādi, kā iegūt skaitli 63. **b)** Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka skaitli 193 nevar iegūt.

N2.12.3. Izmanto reizināšanas likumu.

N2.12.4. Izsaki laukumus dažādos veidos. Novelc nogriezni AC un aplūko trijstūrus ABF, AFC, ACH un CDH.

N2.12.5. **a)** Atrodi piemēru. **b)** Izmantojot dalāmības pazīmi ar 8, pierādi, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi, lai izpildītos uzdevumā prasītais.

V2. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

V2.9.1. Sadali izteiksmi $n^4 - m^4$ reizinātājos. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visus naturālus skaitļus n un m, kuriem $\frac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis; 2) jāpierāda, ka citi skaitļi neder.

V2.9.2. a) Iekrāso figūras kā šaha galdiņu. **b)** Izdomā, kuru figūru nedrīkst izmantot, un parādi, kā no atlikušajām figūrām salikt taisnstūri.

V2.9.3. Noskaidro, kuri skaitļi ir *patīkami*, un pamato, ka citi skaitļi nav *patīkami*.

V2.9.4. Izmanto vienādsānu trijstūra īpašības un trijstūra nevienādību.

V2.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemēs izteiksmes mazākajai vērtībai; 2) jāpamato, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

10. klase

V2.10.1. Izmanto Vjeta teorēmu un pārveido doto izteiksmi.

V2.10.2. Izmanto matemātiskās indukcijas principu.

V2.10.3. Ievēro, ka visi skaitļi ir pozitīvi un tos var uztvert kā nogriežņu garumus. Interpretē uzdevumu ģeometriski un izmanto Pitagora teorēmu.

V2.10.4. Aprēķini, cik grādus lielu loku savelk katra desmitstūra mala. Izmanto ievilkto leņķu un vienādsānu trijstūra īpašības.

V2.10.5. a) Iekrāso figūras kā šaha galdiņu. **b)** Izmantojot krāsojumu joslās, pierādi, ka taisnstūri nevar salikt.

11. klase

V2.11.1. Izmanto Vjeta teorēmu un pārveido doto izteiksmi.

V2.11.2. Apraksti, kā uzzīmēt prasīto daudzstūri.

V2.11.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda, kā papagaiļus pārvietot uz saviem krātiņiem; 2) jāparāda, ka ar mazāk gājieniem prasīto vienmēr nevar panākt.

V2.11.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) atrast mazāko b vērtību; 2) pierādīt, ka mazāku b vērtību iegūt nevar.

V2.11.5. Aprēķini, cik grādus lielu loku savelk katra četrpadsmitstūra mala. Izmanto ievilkto leņķu un vienādsānu trijstūra īpašības.

12. klase

V2.12.1. Aplūko starpību $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

V2.12.2. No virsotnes D velc nogriezni DQ, kas paralēls AP, bet no C – nogriezni $CQ||BP$.

V2.12.3. Ievēro, ka $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, un pietiek pierādīt, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās gan ar 5, gan ar 13, gan 31.

V2.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visas d vērtības, kurām izpildās uzdevuma nosacījumi; 2) jāpierāda, ka citām d vērtībām krāsojums nav iespējams.

V2.12.5. a) Izdomā, kā iegūt doto vārdu. **b)** Atrodi invarianto īpašību un pierādi, ka dotā burtu virkne nav vārds.

P2. PAPILDUS SACENSĪBAS

P2.1. Ievēro, ka jāpierāda gan nepieciešamais, gan pietiekamais nosacījums.

P2.2. Izmanto pagriezienu par $90°$.

P2.3. Ievēro, ka pietiek parādīt, ka eksistē skaitlis c. Izdomā, kādam jābūt c.

P2.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visas funkcijas; 2) jāpierāda, ka citas funkcijas neder.

P2.5. Izmanto matemātiskās indukcijas metodi.

A2. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

9. klase

A2.9.1. Izmanto, ka kvadrātfunkcijai, kuras zari ir vērsti uz augšu, eksistē vismazākā vērtība.

A2.9.2. Izmantojot krāsošanu, pierādi, ka torni nevar salikt.

A2.9.3. Sadali izteiksmi $x^5 - 5x^3 + 4x$ reizinātājos.

A2.9.4. Izmanto vienādsānu trapeces un ievilkto leņķu īpašības.

A2.9.5. Pietiek parādīt, kā naturālos skaitļus uzrakstīt rindā.

10. klase

A2.10.1. Izmanto, ka kvadrātfunkcijas, kuras zari vērsti uz augšu, vērtību kopa ir $[y_v; +\infty)$, kur y_v ir parabolas virsotnes y koordināta.

A2.10.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod tās n vērtības, kurām kvadrātu var sagriezt taisnstūros; 2) jāpamato, ka citām n vērtībām kvadrātu nevar sagriezt taisnstūros.

A2.10.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visi skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus; 2) jāpamato, ka citi skaitļi neapmierina uzdevuma nosacījumus.

A2.10.4. Pagarini malu BC un uz tās atliec punktu F tā, ka $BC = CF$.

A2.10.5. Parādi, kā torti sagriezt, un pamato, ka izpildās uzdevuma nosacījumi.

11. klase

A2.11.1. Izmanto dalāmības pazīmes ar 2, 3 un 5.

A2.11.2. Izmantojot krāsošanu, pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

A2.11.3. Izdomā vispārīgu formulu, kādam ir jābūt n.

A2.11.4. Izmanto ievilkto leņķu īpašības.

A2.11.5. Apzīmē $t = \sin x + \cos x$ un, izmantojot trigonometrijas formulas, pārveido t^2 izteiksmi.

12. klase

A2.12.1. Uzzīmē dotās funkcijas grafiku.

A2.12.2. Izmantojot krāsošanu, pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

A2.12.3. Pierādi un izmanto nevienādību $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

A2.12.4. Uz nogriežņa AB atliec punktu B' tā, ka $PB' \parallel BC$.

A2.12.5. Ievēro, ka $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$ dalās ar abc.

BW2. BALTIC WAY 2014

Algebra

BW2.1. Izmanto divkāršā leņķa formulu $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

BW2.2. Pierādi no pretējā.

BW2.3. Izmanto sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

BW2.4. Dotajā vienādībā ievieto $x = y = 0$. Atrodi visas funkcijas un pamato, ka citas neder.

BW2.5. Apzīmē $a = T\sin\alpha$; $b = T\cos\alpha$; $c = T\sin\beta$; $d = T\cos\beta$, kur T ir pozitīvs skaitlis, kam $T^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Kombinatorika

BW2.6. Izdomā rekurences formulu.

BW2.7. Izdomā, kadā gadījumā summa $\sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} b_k$ sasniedz savu maksimālo vērtību.

BW2.8. Pierādi, ka, pareizi spēlējot, Betijai ir uzvaroša stratēģija.

BW2.9. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs mazākajam iekrāsoto rūtiņu skaitam; 2) jāpierāda, ka mazāk rūtiņas iekrāsot nevar, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

BW2.10. Izmanto grafus.

Ģeometrija

BW2.11. Pierādi, ka četrstūrim $CHDF$ var apvilkt riņķa līniju.

BW2.12. Pierādi, ka četrstūris $ATBS$ ir vienādsānu trapece.

BW2.13. Pierādi, ka četrstūrim $BCQT$ var apvilkt riņķa līniju.

BW2.14. Pierādi, ka ap četrstūri $BRDP$ var apvilkt riņķa līniju ω_1 un ap četrstūri $BSDQ$ var apvilkt riņķa līniju ω_2.

BW2.15. Izmanto kosinusu teorēmu un Ptolemaja teorēmu.

Skaitļu teorija

BW2.16. Pierādi, ka $712! + 1$ dalās ar 719 (kas ir pirmskaitlis). Izmanto Vilsona teorēmu.

BW2.17. Apzīmē $a = x - y$ un $b = y - z$.

BW2.18. Šķiro gadījumus: $a_1 \not\equiv 0 \ (mod\ p)$ un $a_1 \equiv 0 \ (mod\ p)$.

BW2.19. Pierādi lemmu: ja a, b, n ir naturāli skaitļi, tad

$$\text{LKD}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\text{LKD}(a,b)} - 1.$$

BW2.20. Pamato, ka var pieņemt, ka virkne satur kādu nepāra skaitli. Apskati virkni pēc moduļa 2.

ATRISINĀJUMI

2013./2014. MĀCĪBU GADS

S1. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S1.9.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{9}{10}\ .$$

Atrisinājums

Visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība

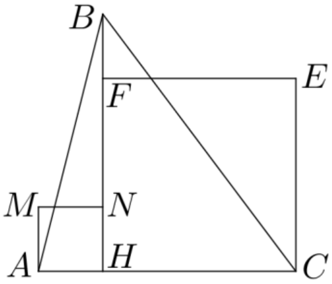
$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{9\cdot 10}=$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

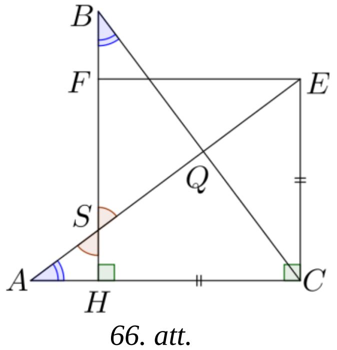
S1.9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BH. Zināms, ka $AC=BH$ un četrstūri $AMNH$ un $HCEF$ ir kvadrāti (skat. 65. att.) Pierādīt, ka taisnes AE, CM un BH krustojas vienā punktā!



65. att.

Atrisinājums

Pierādīsim, ka $AE\perp BC$. Ar Q apzīmējam AE un BC krustpunktu (skat. 66. att.). Tā kā $CE=HC$ un $AC=BH$, tad $\Delta ACE=\Delta BHC$ (pēc taisnleņķu trijstūru vienādības pazīmes *kk*). Tāpēc $\angle QBS=\angle HAS$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūrus un $\angle BSQ=\angle ASH$ kā krustleņķi. Līdz ar to $\Delta AHS\sim\Delta BQS$ (pēc pazīmes $\ell\ell$) un $\angle BQS=\angle AHS=90°$. Tātad $AE\perp BC$ jeb AQ ir trijstūra ABC augstums.



66. att.

Līdzīgi pierāda, ka $CM\perp AB$ un CM ir trijstūra ABC augstums. Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā, tāpēc taisnes AE, CM un BH krustojas vienā punktā.

S1.9.3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a+b=210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

Atrisinājums

Pieņemsim pretējo, ka $a \cdot b$ dalās ar 210.

Ievērosim, ka $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$. Ar p apzīmēsim jebkuru no pirmskaitļiem 2, 3, 5, 7. Tad $a \cdot b$ dalās ar p un vismaz viens no skaitļiem a, b dalās ar p. Tā kā $a+b=210$ dalās ar p, tad arī otrs skaitlis dalās ar p.

Līdz ar to gan a, gan b dalās ar $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$, bet tādā gadījumā $a \geq 210$, $b \geq 210$ un $a+b>210$. Iegūta pretruna. Tātad ab nedalās ar 210.

S1.9.4. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a+b$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordinātu dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu a, vai b.

Atrisinājums

Pieņemsim pretējo – nav tādu divu vienas cilts rūķīšu, starp kuriem attālums ir vai nu a, vai b. Viens no skaitļiem a un b ir pāra, otrs – nepāra; pieņemsim, ka a – pāra, b – nepāra.

Ja punktā 0 dzīvo votivapa, punktā $1\cdot a$ dzīvo šillišalla, punktā $2\cdot a$ – votivapa, punktā $3\cdot a$ – šillišalla, ..., punktā $b\cdot a$ – šillišalla. No otras puses, punktā $1\cdot b$ dzīvo šillišalla, punktā $2\cdot b$ – votivapa, ..., punktā $a\cdot b$ – votivapa. Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla. Pieņēmums ir aplams, tātad eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu a, vai b.

S1.9.5. Vairākās kaudzēs kopā ir n konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras divas kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).

Vai taisnība, ka visas konfektes var apvienot vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja **a)** $n=64$; **b)** $n=100$?

Atrisinājums

a) Tas ir iespējams. Sākumā kaudzīšu ar nepāra skaitu konfekšu ir pāra skaits. Apvienojam tās pa pāriem un no lielākās kaudzītes pārliekam mazākajā kaudzītē atbilstošo konfekšu skaitu. Tagad visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu. Uzskatīsim, ka mums tagad ir 32 dubultkonfektes, kuras turpmāk neatdalīsim. Tagad mums atkal ir pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits dubultkonfekšu. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 16 kvadrokonfektes (4 apvienotas konfektes). Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 8 oktāvkonfektes (8 apvienotas konfektes). Līdzīgi iegūstam četras 16-konfektes, divas 32-konfektes un vienu kaudzi ar 64 konfektēm.

b) Nē, ne vienmēr. Pieņemsim, ka sākumā mums ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai visas konfektes pēdējā gājienā apvienotu vienā kaudzē, iepriekšējā gājienā jāiegūst divas kaudzes ar 50 konfektēm katrā. Taču visās kaudzēs konfekšu skaits vienmēr dalīsies ar 20, bet 50 ar 20 nedalās.

10. klase

S1.10.1. Atrisināt vienādojumu $x^2+y^2+4x-6y+13=0$.

Atrisinājums

Atdalām pilnos kvadrātus:

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0,$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=0.$$

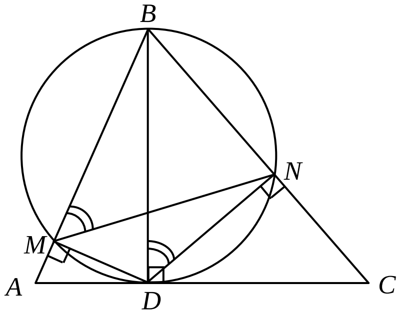
Divu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja abu saskaitāmo vērtība ir 0. Tātad $x+2=0$ un $y-3=0$ jeb $x=-2$ un $y=3$.

S1.10.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD*. No punkta *D* novilkti perpendikuli pret malām *AB* un *CB*; to pamati ir attiecīgi *M* un *N*. Pierādīt, ka punkti *A, M, N, C* atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums

Tā kā $\angle BMD + \angle BND = 90° + 90° = 180°$, tad ap četrstūri *BNDM* var apvilkt riņķa līniju (skat. 67. att.). Tāpēc $\angle BMN = \angle BDN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku *BN*. Bet $\angle NCD = 90° - \angle NDC = \angle BDN$, tātad $\angle NCD = \angle BMN$.

Tāpēc $\angle AMN + \angle ACN = \angle AMN + \angle BMN = 180°$ jeb punkti *A, M, N, C* atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.



67. att.

S1.10.3. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu skaitlim, kas dalās ar 8?

Atrisinājums

Septiņciparu skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8 (jo $\overline{...abc} = ...000 + \overline{abc} = ... \cdot 10^3 + \overline{abc}$).

Ja pirmie četri cipari ir 9 un $\overline{abc} = 888$, tad septiņciparu skaitļa ciparu summa ir $4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 60$. Pierādīsim, ka $\overline{abc}$ ciparu summa nevar būt lielāka kā 24. Lai tā būtu lielāka nekā 24, pastāv šādas iespējas:

- viens no cipariem *a, b, c* ir 9, bet divi – 8;
- divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 8;
- visi cipari *a, b, c* ir 9;
- divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 7.

Pārbaudot visus šādus skaitļus (988; 898; 889; 998; 989; 899; 999; 997; 979; 799), iegūstam, ka neviens no tiem nedalās ar 8.

Tātad lielākā iespējamā septiņciparu skaitļa, kas dalās ar 8, ciparu summa ir 60.

S1.10.4. Kādu lielāko skaitu dažādu komisiju var izveidot no 4 cilvēkiem tā, lai katrām divām komisijām būtu vismaz viens kopīgs loceklis? Nekādas divas komisijas nesastāv no vieniem un tiem pašiem cilvēkiem. Komisija var sastāvēt arī no viena dalībnieka.

Atrisinājums

Apzīmēsim cilvēkus ar *A, B, C, D*. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, var izveidot 8 komisijas:

$$A,\ AB,\ AC,\ AD,\ ABC,\ ABD,\ ACD,\ ABCD.$$

Pierādīsim, ka vairāk komisijas izveidot nevar: četru elementu kopai ir $2^4 = 16$ apakškopas, un, ja kādu apakškopu izvēlas par komisiju, tad tās papildinājumu par komisiju ņemt vairs nevar. Tātad lielākais dažādo komisiju skaits ir 8.

S1.10.5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz. Ja kaut kāds skaitlis *x* jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu $x+1$, vai $2x$ (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Uzvar tas, kurš uzraksta 1000. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

Atrisinājums

Pierādīsim, ka, pareizi spēlējot, uzvar Gunārs. Tā kā pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999, tad zaudē tas, kurš uzraksta vienu no šiem skaitļiem. Pieņemsim, ka zaudētājs uzraksta 500. Tas tiek darīts tāpēc, ka citu iespēju (izņemot varbūt rakstīt 999) viņam nav. Tas nozīmē, ka visi skaitļi 1; 2; 3; ...; 499 jau ir uzrakstīti (citādi varētu rakstīt mazāko vēl neuzrakstīto no tiem) un tātad arī divas reizes lielākie skaitļi 502; 504; ...; 998 ir uzrakstīti; no tā savukārt izriet, ka arī 503; 505; ...; 997 jau ir uzrakstīti. Savukārt 999 vēl nav uzrakstīts (citādi spēle būtu beigusies jau ātrāk) un arī 501 vēl nav uzrakstīts (citādi jau iepriekš būtu uzrakstīts 500, un spēle būtu beigusies ātrāk). Tātad brīdī, kad zaudētājs uzrakstījis 500, uz tāfeles atrodas 997 skaitļi (ieskaitot 500). Tāpēc skaitli 500 uzraksta sācējs, proti, Dzintars. Tāpēc viņš zaudē.

Gadījumu, ja „zaudējošais gājiens” ir skaitļa 999 uzrakstīšana, analizē līdzīgi.

11. klase

S1.11.1. Atrisināt vienādojumu $x^2+5y^2+2xy+4y+1=0$.

Atrisinājums

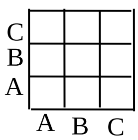
Atdalām pilnos kvadrātus:

$$(x^2+2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)=0,$$
$$(x+y)^2+(2y+1)^2=0.$$

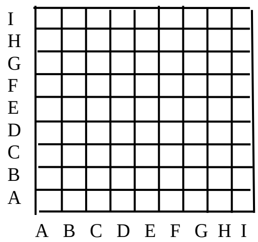
Divu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja abu saskaitāmo vērtība ir 0. Tātad $x+y=0$ un $2y+1=0$ jeb $y=-\dfrac{1}{2}$ un $x=\dfrac{1}{2}$.

S1.11.2. a) Vai 68. att. dotās tabulas rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?

b) Vai 69. att. dotās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 81 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?



68. att.



69. att.

Atrisinājums

a) Jā, skaitļus var ierakstīt tabulas rūtiņās tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi, skat., piemēram, 70. att.

8	3	9
1	5	6
7	2	4

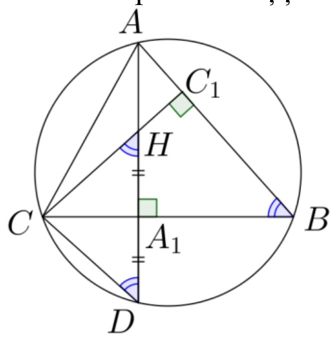
70. att.

b) Pierādīsim, ka prasīto nevar izpildīt. Apskatām pirmskaitļus 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Tā kā tie visi ir lielāki nekā $\dfrac{1}{2}\cdot 81$, tad neviens cits ierakstāmais skaitlis ne ar vienu no tiem nedalās. Tāpēc šiem skaitļiem jābūt uz diagonāles (ja kāds pirmskaitlis ir rindā esošo elementu reizinājumā, tad tam jābūt arī atbilstošās kolonnas elementu reizinājumā). No Dirihlē principa izriet, ka to nevar izdarīt, jo ir desmit pirmskaitļi un tie jāizvieto deviņās rūtiņās.

S1.11.3. Pierādīt, ka punkti, kas ir simetriski trijstūra augstumu krustpunktam attiecībā pret trijstūra malām, atrodas uz trijstūrim apvilktās riņķa līnijas!
(Punktu A_1 sauc par punktam A simetrisku punktu attiecībā pret taisni a, ja $AA_1 \perp a$ un $AO = OA_1$, kur O ir AA_1 un a krustpunkts.)

Atrisinājums

Ar H apzīmējam augstumu krustpunktu un ar D – punktam H simetrisko punktu attiecībā pret taisni BC (skat. 71. att.). Tā kā punkti H un D ir simetriski attiecībā pret taisni BC, tad $\angle CDA = \angle CHA_1$, bet $\angle CHA_1 = \angle CBA$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. Tātad $\angle CDA = \angle CBA$ un tāpēc punkts D atrodas uz trijstūrim ABC riņķa līnijas. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie punkti atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas.



71. att.

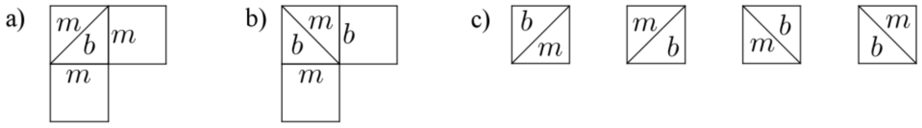
Piezīme. Vienādību $\angle CHA_1 = \angle CBA$ var pamatot arī izmantojot līdzīgus trijstūrus CA_1H un CC_1B.

S1.11.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā novelk vienu diagonāli un vienu no iegūtajiem trijstūriem nokrāso baltu, otru – melnu. Nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Cik dažādi kvadrāta krāsojumi ir iespējami?

Atrisinājums

Ievērosim, ka rūtiņas uz vienas kvadrāta diagonāles var nokrāsot patvaļīgi. Pamatosim, ka šādā gadījumā tiek pilnībā noteikts citu rūtiņu krāsojums. Apskatīsim, kā jākrāso rūtiņas pēc tam, kad diagonāles rūtiņas jau ir nokrāsotas. Gadījumā, kad vēl nenokrāsotai rūtiņai ir divas kopīgas blakus malas ar jau nokrāsotām rūtiņām, ir noteikts, kādam jābūt nenokrāsotās rūtiņas krāsojumam. Jāapskata divi atšķirīgi gadījumi:

- abas blakusesošās rūtiņas jau ir nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka abas malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir vienā krāsā (abas melnas vai abas baltas). Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu vienā trijstūrī (skat., piemēram, 72. att. a));
- abas blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir dažādās krāsās (viena melna, otra balta). Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu dažādos trijstūros (skat., piemēram, 72. att. b)).



72. att.

Līdz ar to esam pamatojuši, ka nokrāsota diagonāle viennozīmīgi nosaka pārējo rūtiņu krāsojumu.

Apskatīsim, cik veidos iespējams nokrāsot diagonāli. Katru diagonāles rūtiņu iespējams nokrāsot 4 dažādos veidos (skat. 72. att. c)). Tā kā vienas diagonāles rūtiņas nokrāsošana neietekmē pārējo diagonāles rūtiņu krāsošanu, tad kopā iespējami $4^4 = 256$ dažādi diagonāles krāsojumi. Tātad arī kopējais kvadrāta dažādo krāsojumu skaits ir 256.

S1.11.5. Dots, ka *n* ir naturāls skaitlis un skaitļi $2n+1$ un $3n+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti.

a) Atrodiet kaut vienu tādu *n*!

b) Vai $5n+3$ var būt pirmskaitlis?

Atrisinājums

a) Der, piemēram, $n=40$. Tad $n=40$. Tad $2\cdot 40+1=81=9^2$ un $3\cdot 40+1=121=11^2$.

b) Pierādīsim, ka $5n+3$ nevar būt pirmskaitlis. Apzīmējam $2n+1=x^2$ un $3n+1=y^2$. Tad $x>1$, $y>1$ un $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$. Tā kā *x* un y ir naturāli skaitļi un $5n+3$ – pirmskaitlis, tad jābūt $2x-y=1$ un $2x+y=5n+3$. No šejienes $2y=5n+2$. Tāpēc $4y^2=25n^2+20n+4>12n+4=4(3n+1)=4y^2$. Iegūta pretruna, tātad $5n+3$ nav pirmskaitlis.

12. klase

S1.12.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{2013}{2014}.$$

Atrisinājums

Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem *n* izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2013\cdot 2014}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2014}=\frac{2013}{2014}.$$

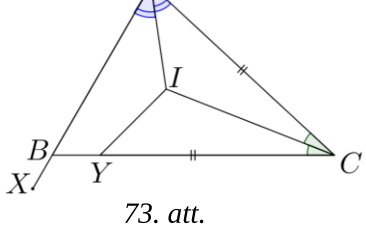
S1.12.2. Trijstūra *ABC* visas malas ir dažāda garuma un $\angle B=60^\circ$. Uz stariem *AB* un *CB* attiecīgi atlikti tādi punkti *X* un *Y*, ka $AX=CY=AC$. Pierādīt, ka taisne *XY* iet caur trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas centru!

Atrisinājums

Apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru (bisektrišu krustpunkts) ar *I* (skat. 73. att.). No ΔAIC iegūstam, ka

$$\angle AIC=180^\circ-(\angle IAC+\angle ACI)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)=120^\circ.$$

Tad $\Delta ACI=\Delta YCI$ (pēc pazīmes $m\ell m$), jo $AC=YC$, $\angle ACI=\angle ICY$ un *IC* – kopīga mala. Tāpēc $\angle CIY=120^\circ$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle AIX=120^\circ$. Bet no tā izriet, ka stari *IY* un *IX* sakrīt. Tātad punkti *X*, *Y* un *I* atrodas uz vienas taisnes jeb *I* atrodas uz taisnes *XY*, kas arī bija jāpierāda.



73. att.

S1.12.3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$?

Atrisinājums

Pieņemsim, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$. Apskatām starpību

$$(6^n - 1) - (4^n - 1) = 6^n - 4^n = 2^n(3^n - 2^n),$$

kas arī dalās ar $4^n - 1$, jo gan mazināmais, gan mazinātājs dalās ar $4^n - 1$. Tad $3^n - 2^n$ jādalās ar $4^n - 1$, jo reizinātājs 2^n neiespaido dalīšanos ar nepāra skaitli $4^n - 1$. Bet $3^n - 2^n < 3^n - 1 < 4^n - 1$ un tāpēc $3^n - 2^n$ nevar dalīties ar $4^n - 1$. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka neeksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī pamatojot, ka $4^n - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$ dalās ar 3, bet $6^n - 1 = 3^n \cdot 2^n - 1$ ar 3 nedalās, līdz ar to $6^n - 1$ nedalās ar $4^n - 1$.

S1.12.4. Ja uz tāfeles uzrakstīti polinomi f un g, tad tur drīkst uzrakstīt arī polinomus $f + g$, $f - g$ un $f \cdot g$ (par f un g var ņemt arī vienu un to pašu polinomu). Vai var iegūt uz tāfeles polinomu x, ja sākotnēji uz tāfeles uzrakstīti polinomi **a)** $x^2 + x$ un $x^2 + 2$; **b)** $x^2 + x$ un $x^2 - 2$?

Atrisinājums

a) Polinomu x nevar iegūt. Ja $x = 2$, tad abu sākotnējo polinomu vērtības dalās ar 3, tāpēc ar 3 jādalās arī visu iegūstamo polinomu vērtībām. Bet polinoms x nedalās ar 3, ja $x = 2$.

b) Parādīsim, kā iegūt polinomu x. Ja $x^2 + x = f$ un $x^2 - 2 = g$, tad $x = (f - g)(f - g) + 2g - 3f$, jo

$$\begin{aligned}
&(f - g)(f - g) + 2g - 3f = \\
&= ((x^2 + x) - (x^2 - 2))((x^2 + x) - (x^2 - 2)) + 2(x^2 - 2) - 3(x^2 + x) = \\
&= (x^2 + x - x^2 + 2)(x^2 + x - x^2 + 2) + 2x^2 - 4 - 3x^2 - 3x = \\
&= (x + 2)(x + 2) - 4 - x^2 - 3x = x^2 + 4x + 4 - 4 - x^2 - 3x = x.
\end{aligned}$$

S1.12.5. Rindā salikti 12 krēsli; uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā secībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu iepriekšējā vietā, vai tieši blakus iepriekšējai vietai. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārkārtošanās?

Atrisinājums

Apzīmēsim atbilstošo pārkārtojumu skaitu n skolēnu gadījumā ar a_n. Ievērojam, ka $a_1 = 1$ un $a_2 = 2$.

Apskatām $n + 2$ skolēnus un meklējam formulu, kas izsaka a_{n+2} ar a_n un a_{n+1}. Visi pārvietojumi iedalās divās daļās:

1) pirmais skolēns paliek uz vietas. Tad pārkārtojas tikai atlikušie $n+1$ skolēni. Šādu pārkārtojumu pēc definīcijas ir a_{n+1};
2) pirmais skolēns pāriet uz otro krēslu. Tad uz pirmo krēslu pāriet skolēns no otrā krēsla. Pārējie n skolēni pārkārtojas "savā starpā". Tādu pārkārtojumu pēc definīcijas ir a_n.

Tātad $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Iegūstam $a_3 = 1 + 2 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$.

Līdz ar to iespējami 233 dažādi skolēnu izvietojumi pēc pārkārtošanās.

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDES IETEICAMIE VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

2013./2014. mācību gada Sagatavošanās olimpiādes ieteicamie vērtēšanas kritēriji izstrādāti, balstoties uz grāmatā dotajiem uzdevumu atrisinājumiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 10 punktus.

	Kritēriji	**Punkti**
9. klase		
S1.9.3.	Par atsevišķiem piemēriem	1
	Veikta pilnā pārlase	10
S1.9.5.	a) Par pamatojumu	5
	b) Par pretpiemēru	5
10. klase		
S1.10.3.	Par atbildi	1
	Par atsauci uz dalāmības pazīmi ar 8	1
S1.10.4.	Par piemēru, kā sadalīt komisijās	4
	Par pamatojumu, ka vairāk komisijas izveidot nevar	6
S1.10.5.	Par atsevišķiem piemēriem – 1 punkts	1
11. klase		
S1.11.2.	a) Par piemēru	4
	b) Par pamatojumu	6
S1.11.5.	a) Par atrastu *n* vērtību	4
	b) Par pamatojumu	6
12. klase		
S1.12.3.	Par atsevišķiem piemēriem	1
S1.12.4.	Par katru daļu	5

N1. NOVADA OLIMPIĀDE

9. klase

N1.9.1. Vai vienādojumam $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ ir atrisinājums, ja *a* un *b* ir dažādi skaitļi?

1. risinājums. Ievērojam, ka

$$2x^2-2x\cdot(a+b)+a^2+b^2=(x^2-2ax+a^2)+(x^2-2bx+b^2)=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

Tāpēc doto vienādojumu var pārveidot formā

$$(x-a)^2+(x-b)^2=0.$$

Divu skaitļu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai, ja abi šie skaitļi ir nulles. Ja *x* ir dotā vienādojuma sakne, tad jābūt $x=a$ un $x=b$; bet tas nozīmē, ka $a=b$; pretruna ar uzdevuma nosacījumu. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

2. risinājums. Uzrakstām dotā kvadrātvienādojuma diskriminatu:

$$D=4(a+b)^2-8(a^2+b^2)=4a^2+8ab+4b^2-8a^2-8b^2=$$

$$=-4a^2+8ab-4b^2=-4(a^2-2ab+b^2)=-4(a-b)^2.$$

Lai kvadrātvienādojumam būtu atrisinājums, diskriminanta vērtībai jābūt nenegatīvai. Tā kā $-4(a-b)^2\le 0$, tad vienīgā iespēja, lai dotajam vienādojumam eksistētu atrisinājums, ir gadījums, kad $a=b$.

Tātad, ja *a* un *b* ir dažādi skaitļi, dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

N1.9.2. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, taisnstūra perimetrs ir par 8 mazāks nekā tā laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus!

Atrisinājums

Ja *a* un *b*, $a\ge b$ ir taisnstūra malu garumi, tad $ab=2a+2b+8$. Ekvivalenti pārveidojot, iegūstam $ab-2a-2b+4=12$ jeb $(a-2)(b-2)=12$. Pēdējā vienādojuma kreisās puses reizinātāji var pieņemt tikai vērtības 1 un 12, 2 un 6 vai 3 un 4 (tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgajiem *a* un *b*, tad reizinātāju secība nav svarīga). Līdz ar to iespējami trīs gadījumi:

- $a-2=1$ un $b-2=12$ jeb $a=3$ un $b=14$;
- $a-2=2$ un $b-2=6$ jeb $a=4$ un $b=8$;
- $a-2=3$ un $b-2=4$ jeb $a=5$ un $b=6$.

Uzdevuma nosacījumus apmierina taisnstūri ar izmēriem 3×14, 4×8 un 5×6.

N1.9.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc+3a+3b=7bc+7$.

Atrisinājums

Izsakām mainīgo *a*:

$a(3bc+3)=7bc+7-3b$;

$$a=\frac{7bc+7-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)}{3(bc+1)}-\frac{3b}{3(bc+1)}=\frac{7}{3}-\frac{b}{bc+1}=2\frac{1}{3}-\frac{b}{bc+1}.$$

Lai *a* būtu naturāls skaitlis, tad jābūt $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$ vai $\frac{b}{bc+1}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

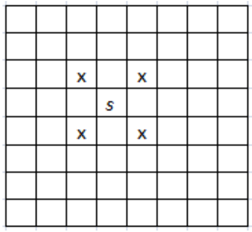
Apskatām abus gadījumus:

- Ja $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$, tad $a=2$ un $bc+1=3b$ jeb $c=\frac{3b-1}{b}=\frac{3b}{b}-\frac{1}{b}=3-\frac{1}{b}$. Skaitlis *c* ir naturāls tikai tad, ja $\frac{1}{b}$ ir naturāls. Vienīgā iespēja, ja $b=1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a=2$, $b=1$ un $c=2$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.

- Ja b un c ir naturāli skaitļi, tad $b < bc+1$ jeb $\frac{b}{bc+1} < 1$. Tātad $\frac{b}{bc+1} \neq \frac{4}{3}$ un šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens vienīgs atrisinājums $a=2$, $b=1$ un $c=2$.

N1.9.4. Figūra „sienāzis" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat. 74. att., kur *s* – sienāzis, *x* – rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz 8×8 rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu sienāzi (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?



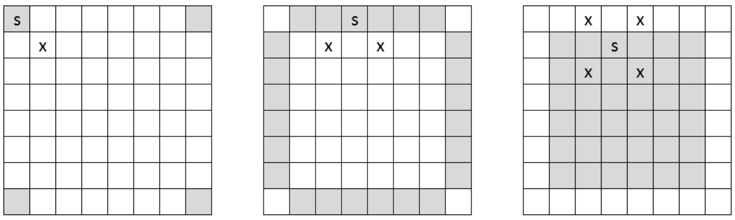
74. att.

Atrisinājums

Apskatām trīs principiāli atšķirīgus baltā sienāža izvietojumus:

- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa stūra rūtiņā, tad tas apdraud tikai vienu rūtiņu *x* (skat. 75. att. a)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-1=62$ rūtiņām. Tā kā ir četras stūra rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $4\cdot 62=248$.
- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa malējā rūtiņā (ne stūrī), tad tas apdraud divas rūtiņas *x* (skat. 75. att. b)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-2=61$ rūtiņām. Tā kā ir 24 malējās rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $24\cdot 61=1464$.
- Ja baltais sienāzis atrodas kādā no šaha galdiņa vidus rūtiņā (ne stūrī un ne pie šaha galda malas), tad tas apdraud četras rūtiņas *x* (skat. 75. att. c)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-4=59$ rūtiņām. Tā kā ir 36 vidus rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $36\cdot 59=2124$.

Tātad kopējais dažādo figūru izvietojumu skaits ir $248+1464+2124=3836$.



a) b) c)

75. att.

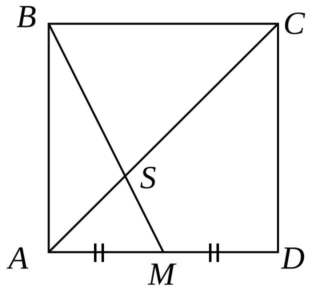
N1.9.5. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1, punkts *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu!

Atrisinājums

Trijstūri *ASM* un *CSB* ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle ASM=\angle CSB$ kā krustleņķi un $\angle SAM=\angle SCB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC* (skat. 76. att.). Tā kā $AM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$, tad $\frac{BS}{SM}=\frac{BC}{AM}=2$. Šo trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar trijstūru līdzības koeficienta kvadrātu, t. i., $\frac{S_{CSB}}{S_{ASM}}=2^2=4$ jeb $S_{CSB}=4S_{ASM}$.

Ievērojam, ka trijstūriem *ASM* un *ASB* ir kopīgs augstums un malu, pret kurām novilkts kopīgais augstums, attiecība ir $\frac{BS}{SM} = 2$. Līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība ir 2, t. i., $\frac{S_{ABS}}{S_{ASM}} = 2$ jeb $S_{ABS} = 2S_{ASM}$.

Esam ieguvuši, ka $S_{ABC} = S_{ABS} + S_{SBC} = 2S_{ASM} + 4S_{ASM}$. Tā kā $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, tad $6S_{ASM} = \frac{1}{2}$ jeb $S_{ASM} = \frac{1}{12}$.



76. att.

10. klase

N1.10.1. Dots, ka $x^3 > 2$. Pierādīt, ka **a)** $x^6 > 4$; **b)** $x^7 > 5$.

Atrisinājums

a) 1. risinājums. Ievērojam, ka $x^6 = x^3 \cdot x^3 > 2 \cdot 2 = 4$. Tātad esam pierādījuši, ka $x^6 > 4$.

2. risinājums. Dotās nevienādības $x^3 > 2$ abas puses ir pozitīvas. Tāpēc, ceļot to pakāpē ar naturālu kāpinātāju, atkal iegūst patiesu nevienādību. Tātad, ceļot $x^3 > 2$ kvadrātā, iegūst $x^6 > 4$, kas arī bija jāpierāda.

b) 1. risinājums. Tā kā $2^7 = 128 > 125 = 5^3$, tad, doto izteiksmi kāpinot septītajā pakāpē, iegūstam:

$$(x^3)^7 > 2^7 > 5^3 \quad \Rightarrow \quad (x^7)^3 > 5^3 \quad \Rightarrow \quad x^7 > 5.$$

2. risinājums. Velkot trešās pakāpes sakni no dotās nevienādības abu pušu izteiksmēm, iegūstam $x > \sqrt[3]{2}$.

Tā kā nevienādību $x > \sqrt[3]{2}$ un $x^6 > 4$ abas puses ir pozitīvas, tad varam šīs nevienādības reizināt

$$x \cdot x^6 > \sqrt[3]{2} \cdot 4.$$

Veicot pārveidojumus un novērtējot, iegūstam prasīto:

$$x^7 > \sqrt[3]{2} \cdot 4 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{128} > \sqrt[3]{125} = 5.$$

N1.10.2. Pierādīt, ka, izvēloties 52 no aritmētiskās progresijas $1, 4, 7, 10, \ldots$ locekļiem, kas nepārsniedz 300, vienmēr starp šiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir 302.

Atrisinājums

Lielākais minētās aritmētiskās progresijas loceklis, kas nepārsniedz 300, ir 298. Sadalām visus progresijas locekļus kopās (katras kopas, kurā ir divi progresijas locekļi, elementu summa ir 302):

$$\{1\}, \{151\}, \{4, 298\}, \{7, 295\}, \{10, 292\}, \ldots, \{148, 154\}.$$

Šādu kopu skaits ir 51. Tā kā ir jāizvēlas 52 skaitļi, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi no tiem būs no vienas kopas. Šie skaitļi ir meklētie divi skaitļi, kas summā dod 302.

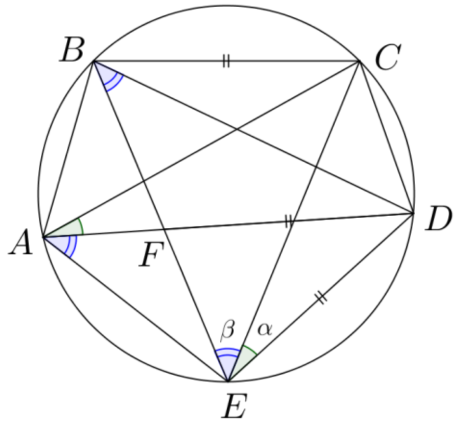
N1.10.3. Piecstūris *ABCDE* ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi *AD* un *BE* krustojas punktā *F*. Zināms, ka $BC = DF = DE$. Pierādīt, ka $AC = CE$.

Atrisinājums

Novelkam *BD, AC* un *EC* (skat. 77. att.). Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām, ir vienādi, tad $\angle EBD = \angle BEC = \angle DAE = \beta$ un $\angle DEC = \angle CAD = \alpha$. Vienādsānu trijstūra *DEF* leņķi pie pamata ir vienādi, t. i., $\angle DEF = \angle EFD = \alpha + \beta$. Tad no blakusleņķu īpašības iegūstam $\angle AFE = 180° - \angle EFD = 180° - (\alpha + \beta)$. No ΔAEF iegūstam, ka

$$\angle AEF = 180° - \angle FAE - \angle AFE = 180° - \beta - 180° + \alpha + \beta = \alpha .$$

Esam ieguvuši, ka $\angle EAC = \angle AEC = \alpha + \beta$. Tātad trijstūris *AEC* ir vienādsānu un $AC = CE$ kā atbilstošās sānu malas.



77. att.

N1.10.4. Zināms, ka $a_1, a_2, ..., a_{10}$ ir tādi dažādi nepāra naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ un $a_{10} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt vismazāko summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ vērtību!

Atrisinājums

Tā kā visi a_i $(i = 1, 2, ..., 10)$ ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 3 (skaitlis 2 neder, jo tas ir pāra skaitlis). Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13$, $a_7 = 15$, $a_8 = 17$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 21$ apmierina dotās nevienādības. Tā kā tie ir mazākie dažādie nepāra naturālie skaitļi, kas apmierina dotās nevienādības, tad summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ mazākā iespējamā vērtība ir $3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=120$.

N1.10.5. Grozos pa apli izvietotas 2014 konfektes tā, ka blakus grozos konfekšu skaits atšķiras tieši par 1. Zināms, ka ir vismaz divi grozi un katrā grozā ir vismaz viena konfekte. Kāds var būt **a)** vismazākais; **b)** vislielākais grozu skaits?

Atrisinājums

a) Vismazākais grozu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 4. Konfekšu izvietojums grozos ir šāds: (503, 504, 503, 504).

Ar diviem groziem nepietiek, jo tad vienā grozā konfekšu skaits būtu *k*, bet otrā $k+1$, kas kopā dotu nepāra skaitli. Nepietiek arī ar trijiem groziem, jo tad grozā ar mazāko konfekšu skaitu būtu *k* konfektes un blakus grozos pa $k+1$ konfektei, bet saskaņā ar uzdevuma noteikumiem blakus grozos nevar būt vienāds konfekšu skaits.

b) Pierādīsim, ka grozu skaitam vienmēr ir jādalās ar 4. Blakus esošos grozos konfekšu skaitam vienmēr ir pretēja paritāte – līdz ar to grozu skaitam noteikti jādalās ar 2 (citādi kaut kur blakus būs divi grozi, kuros abos ir vai nu pāra, vai nepāra skaits konfekšu).
Ievērosim, ka divos blakus esošos grozos konfekšu summa vienmēr ir nepāra skaitlis. Apzīmējam grozu skaitu ar $2n$ un sadalām visus grozus n blakusstāvošu grozu pāros, katrā šādā pārī konfekšu skaits ir nepāra, tātad kopējais konfekšu skaits ir n nepāra skaitļu summa. Tā kā kopējais konfekšu skaits ir 2014, tad n jābūt pāra skaitlim. Tātad grozu skaits dalās ar 4. (*Piezīme*. Šis spriedums arī parāda, ka mazākais grozu skaits var būt 4).
Lielākais iespējamais grozu skaits ir 1340. Konfektes grozos var izvietot šādi (divos grozos ir trīs konfektes, pārējos grozos – viena vai divas konfektes):

3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, …, 2, 1, 2.

Ja grozu skaits būtu lielāks, tad būtu vismaz 1344 grozi, tātad 672 blakusstāvošu grozu pāri un, ja katrā pārī būtu minimālais konfekšu skaits (t. i., trīs konfektes), tad kopējais konfekšu skaits būtu vismaz $672 \cdot 3 = 2016$, kas pārsniedz 2014.

11. klase

N1.11.1. Polinoms $P(x)$, kura visi koeficienti ir veseli skaitļi, piecām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

Atrisinājums

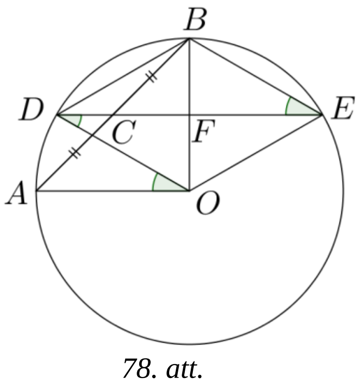
Apzīmējam $F(x) = P(x) - 2000$. Tādā gadījumā a, b, c, d, e ir polinoma $F(x)$ saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)R(x)$.

Ja $P(n) = 2014$, tad $F(n) = 14 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)(n-e)R(n)$. Esam ieguvuši, ka skaitlis 14 ir uzrakstīts kā vismaz piecu dažādu veselu skaitļu reizinājums. Iegūta pretruna, jo $14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$ vai $14 = 1 \cdot 14$. Tātad nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

N1.11.2. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Caur hordas AB viduspunktu C novilkta horda DE, kas paralēla OA (punkts D atrodas uz mazākā loka AB). Aprēķināt leņķa AOD lielumu!

Atrisinājums

Ar F apzīmējam nogriežņu OB un DE krustpunktu un $\angle AOD = \alpha$ (skat. 78. att.). Tā kā $AC = CB$ un $AO \parallel DE$, tad CF ir trijstūra AOB viduslīnija un $OF = BF$.



78. att.

No OA un DE paralelitātes izriet, ka $DE \perp OB$ un $\angle ODE = \angle AOD = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi. Četrstūris $DOEB$ ir rombs, jo $DE \perp OB$, $OF = FB$ un $DF = FE$, jo rādiuss, kas perpendikulārs hordai, dala to uz pusēm. No romba īpašībām izriet, ka $\angle DEB = \alpha$. Līdz ar to $\angle DOB = 2\angle DEB = 2\alpha$ kā centra leņķis un ievilktais leņķis, kas balstās uz viena un tā paša loka DB. Ievērojam, ka $\angle DOB + \angle AOD = 90°$ jeb $3\alpha = 90°$ un $\alpha = \angle AOD = 30°$.

N1.11.3. Kādiem naturāliem skaitļiem n piemīt šāda īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa ir vienāda ar pašu skaitli n?

Atrisinājums

Parādīsim, ka uzdevuma nosacījumus apmierina visi naturālie skaitļi, kas ir pirmskaitļu kvadrāti, t. i., $n = p^2$, kur p – pirmskaitlis.

Pirmkārt, skaitlis $n = p^2$ der, jo p^2 vienīgais dalītājs, kas nav ne 1, ne arī p^2, ir pirmskaitlis p. Tātad skaitļa $n = p^2$ naturālo dalītāju (izņemot 1 un n) kvadrātu summa ir $p^2 = n$.

Otrkārt, pierādīsim, ka citi naturālie skaitļi neder. Skaitlis 1 neder, jo tam nav citu naturālu dalītāju kā tikai skaitlis 1. Apskatām saliktu skaitli $n = a \cdot b$, kur $a > 1$ un $b > 1$. Tad skaitļa n dalītāju (kas atšķiras no 1 un n) kvadrātu summa ir vismaz $a^2 + b^2$. Taču $a^2 + b^2 \geq 2ab > ab = n$, kur pirmā nevienādība izriet no patiesas nevienādības $(a-b)^2 \geq 0$. Līdz ar to saliktiem skaitļiem n apskatāmo dalītāju kvadrātu summa ir lielāka nekā n.

N1.11.4. Kādā pilsētā ir n detektīvi ($n \geq 2$) un cita starpā tie izseko arī viens otru. Zināms, ka jebkuriem diviem detektīviem A un B vai nu A izseko B, vai B izseko A. Pierādīt, ka visus detektīvus var nostādīt vienā rindā tā, ka pirmais izseko otro, otrais izseko trešo, ..., $(n-1)$-ais izseko n-to.

Atrisinājums

Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc detektīvu skaita n.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad apgalvojums ir patiess, t. i., $A_1 \to A_2$ (detektīvs A_1 izseko detektīvu A_2).

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka k detektīvi $A_1, A_2, ..., A_k$ nostādīti rindā atbilstoši uzdevuma nosacījumiem: $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k$.

Induktīvā pāreja. Aplūkojam detektīvu A_{k+1}. Iespējami divi gadījumi:

1) Ja detektīvs A_{k+1} izseko detektīvu A_1 (apzīmēsim $A_{k+1} \to A_1$), tad detektīvu A_{k+1} var novietot rindas sākumā.

2) Ja $A_1 \to A_{k+1}$, tad iespējami divi gadījumi:

- visiem i izpildās $A_i \to A_{k+1}$, tad detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindas beigās;
- ja visiem i neizpildās, ka $A_i \to A_{k+1}$, tad ņemsim mazāko i tādu, ka $A_{k+1} \to A_i$, tādā gadījumā $A_{i-1} \to A_{k+1}$ un detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindā starp detektīviem A_{i-1} un A_i.

Līdz ar to esam pieradījuši uzdevumā prasīto.

N1.11.5. Neviens no reāliem skaitļiem x, y, z nav nulle un $x + y + z = xyz$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 1.$$

Atrisinājums

Reizinot doto nevienādību ar $(xyz)^2 > 0$, iegūstam ekvivalentu nevienādību:

$$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq (xyz)^2.$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq xyz(x + y + z)$;

$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$;

$2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2$;

$2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 \geq 0$;

$(x^2y^2 - 2x^2yz + x^2z^2) + (x^2y^2 - 2xy^2z + y^2z^2) + (x^2z^2 - 2xyz^2 + y^2z^2) \geq 0$;

$(xy - xz)^2 + (yz - xy)^2 + (xz - yz)^2 \geq 0$.

Trīs kvadrātu summa ir nenegatīvs skaitlis, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa.

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa.

12. klase

N1.12.1. Zināms, ka $a > \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$, $c > \frac{1}{2}$ un x ir vienādojuma $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ sakne. Pierādīt, ka $x > -\frac{1}{2}$.

Atrisinājums

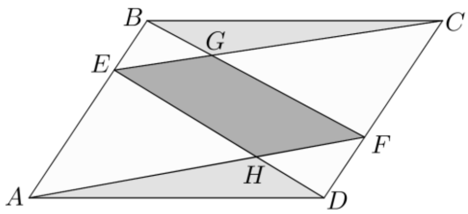
Pieņemsim, ka $x < 0$. Tad $x^3 < 0$, $-ax^2 < 0$, $bx < 0$, $-c < 0$, tāpēc $x^3 - ax^2 + bx - c < 0$. Tātad vienādojuma $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ sakne x nevar būt negatīvs skaitlis un $x \geq 0 > -\frac{1}{2}$.

N1.12.2. Uz paralelograma *ABCD* pretējām malām *AB* un *CD* atzīmēti attiecīgi punkti *E* un *F*. Nogriežņu *AF* un *DE* krustpunkts ir *H*, bet *BF* un *CE* krustpunkts ir *G*. Pierādīt, ka $S_{EGFH} = S_{ADH} + S_{BCG}$.

Atrisinājums

Izsakām trijstūra *ABF* (skat. 79. att.) laukumu vairākos veidos:

- $S_{ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$;
- $S_{ABF} = S_{ADF} + S_{BCF}$;
- $S_{ABF} = S_{AHE} + S_{BEG} + S_{GEHF}$.



79. att.

Līdzīgi vairākos veidos izsakām trijstūra *CDE* laukumu:

- $S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot h_{CD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$;
- $S_{CDE} = S_{ADE} + S_{BCE} = S_{ADH} + S_{AHE} + S_{BCG} + S_{BEG}$.

Tā kā $S_{ABF} = S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, tad

$$S_{AHE} + S_{BEG} + S_{GEHF} = S_{ADH} + S_{AHE} + S_{BCG} + S_{BEG};$$

$$S_{GEHF} = S_{ADH} + S_{BCG},$$

kas arī bija jāpierāda.

N1.12.3. Uz tāfeles uzrakstīti visi trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 31:

124, 155, 186, 217, ..., 961, 992.

Vai no šiem skaitļiem var izvēlēties **a)** deviņus, **b)** desmit tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 līdz 9?

Atrisinājums

a) Lai pa reizei būtu pārstāvēts katrs no nenulles cipariem, tiem katrā pozīcijā jāparādās tieši vienu reizi. Tātad katrā pozīcijā ciparu summa ir 45 un visu izvēlēto skaitļu summas vērtība ir

$45 \cdot 111 = 3^3 \cdot 5 \cdot 37$. Tā kā visi izvēlētie skaitļi dalās ar 31, tad arī šo skaitļu summa dalās ar 31. Esam ieguvuši pretrunu, jo aprēķinātā summas vērtība nedalās ar 31. Tātad no dotajiem skaitļiem nevar izvēlēties deviņus tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 līdz 9

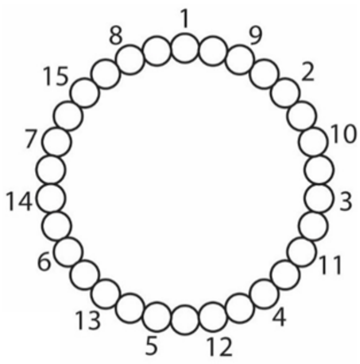
b) Uzdevuma prasīto var izpildīt. Der, piemēram, skaitļi

124, 248, 372, 465, 496, 589, 651, 713, 837, 992.

N1.12.4. Alise nēsā rokassprādzes, kas sastāv no virtenē savērtām 10 melnām un 20 baltām pērlītēm. Marta zaķis prot rokassprādzei samainīt divas pērlītes vietām tad, ja starp tām atrodas tieši trīs citas pērlītes. Cik rokassprādzes Alise var vienlaicīgi nēsāt, lai Marta zaķis ar atkārtotām darbībām no tām nevarētu iegūt divas vienādas? Rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja tās sakrīt pagriežot pa apli (ap roku).

Atrisinājums

Pierādīsim, ka Alise vienlaicīgi var nēsāt 6 rokassprādzes. Aplūkojam 15 pērlītes, kas atrodas pāra pozīcijās, un parādīsim, ka Marta zaķis tās var sakārtot patvaļīgā secībā. Sanumurēsim tās šādi (skat. 80. att.)



80. att.

Marta zaķis var mainīt vietām 1 ar 2, 2 ar 3, …, 15 ar 1. Tātad viņš var no sākuma iemainīt pareizo pērlīti vietā nr. 1, pēc tam, neaiztiekot vietu nr. 1, iemainīt pareizo pērlīti vietā nr. 2, pēc tam, nemainot 1 un 2 iemainīt pareizajā pērlīti vietā nr. 3 utt. To pašu var izdarīt arī ar pērlītēm, kas atrodas nepāra pozīcijās. Tātad atšķirīgas būs 6 rokassprādzes, kurām pāra pozīcijās būs dažāds melno pērlīšu skaits: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sešas vai vairāk melnās pērlītes pāra pozīcijās nozīmē 4 vai mazāk nepāra pozīcijās, un, tā kā rokassprādzi var pagriezt tā, ka pāra pozīcijas pāriet par nepāra pozīcijām, tad šādas rokassprādzes varēs pārtaisīt par jau kādu no esošajām.

N1.12.5. Vai var atrast tādus 2014 dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2014}} = 1?$$

Atrisinājums

Ievērojam, ka $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Parādīsim paņēmienu, kā no k saskaitāmajiem var iegūt $k+1$ saskaitāmo. Izdalām iegūtās vienādības abas puses ar 2 un pieskaitām $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Procesu turpinām $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Skaidrs, ka šādā veidā tiks iegūti 2014 saskaitāmie un tie visi būs dažādi.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izmantojot matemātisko indukciju un vienādību $\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$.

NOVADA OLIMPIĀDES IETEICAMIE VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

2013./2014. mācību gada Novada matemātikas olimpiādes ieteicamie vērtēšanas kritēriji izstrādāti, balstoties uz grāmatā dotajiem uzdevumu atrisinājumiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 10 punktus.

	Kritēriji	**Punkti**
9. klase		
N1.9.2.	Par katru uzdevuma nosacījumiem atbilstošo taisnstūri (bez pamatojuma)	1
N1.9.3.	Par atbildi bez pamatojuma	2
10. klase		
N1.10.1.	Par a) gadījumu	4
	Par b) gadījumu	6
N1.10.2.	Par atsevišķiem piemēriem	kopā ne vairāk kā 1 punkts
N1.10.4.	Par risinājumu bez pamatojuma, ka neder $a_1 = 1$ un bez pārbaudes, ka izpildās dotās nevienādības	līdz 6 punktiem
	Par pamatojumu, ka neder $a_1 = 1$	2
	Par vismazākās summas aprēķināšanu	1
N1.10.5.	a) Piemērs, ka der 4 grozi	2
	Pamatojums, ka mazāk grozu nevar būt	2
	b) Par piemēru un pamatojumu, ka atrastais ir vislielākais grozu skaits	6
11. klase		
N1.11.3.	Par pierādījumu, ka der $n = p^2$, p – pirmskaitlis	5
	Pierādījums, ka neder citas n vērtības	5
N1.11.5.	Par atsevišķām n vērtībām	līdz 2 punktiem
12. klase		
N1.12.3.	Par a) gadījumu	5
N1.12.4.	Par b) gadījumu	5

NOVADA OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2013./2014. mācību gada Novada matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (753 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	0%	3%	1%	1%
0	37%	11%	56%	44%	24%
1	28%	18%	17%	15%	26%
2	13%	20%	13%	7%	13%
3	5%	18%	4%	2%	10%
4	4%	9%	3%	2%	5%
5	2%	5%	1%	3%	3%
6	2%	2%	0%	2%	2%
7	1%	1%	1%	3%	2%
8	1%	3%	0%	7%	4%
9	2%	5%	1%	4%	3%
10	4%	8%	1%	9%	7%
vidēji	**1,82**	**3,46**	**1,05**	**2,76**	**2,76**

10. klase (696 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	0%	1%	1%	0%	1%
0	14%	24%	29%	10%	35%
1	15%	17%	22%	4%	8%
2	14%	11%	15%	8%	15%
3	7%	7%	11%	1%	11%
4	19%	5%	6%	1%	13%
5	9%	4%	3%	3%	6%
6	4%	4%	2%	4%	4%
7	3%	6%	2%	3%	2%
8	4%	6%	2%	9%	2%
9	3%	4%	2%	12%	0%
10	8%	10%	5%	44%	2%
vidēji	**3,73**	**3,63**	**2,40**	**7,06**	**2,39**

11. klase (522 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	2%	0%	1%	2%	1%
0	34%	12%	23%	53%	36%
1	10%	13%	10%	21%	25%
2	7%	11%	15%	10%	20%
3	5%	6%	11%	6%	11%
4	4%	7%	9%	2%	3%
5	4%	4%	15%	1%	2%
6	4%	3%	3%	1%	1%
7	6%	6%	3%	1%	0%
8	5%	8%	3%	1%	0%
9	9%	6%	2%	0%	0%
10	10%	25%	5%	2%	1%
vidēji	**3,69**	**5,22**	**3,16**	**1,17**	**1,40**

12. klase (468 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	3%	2%	0%	7%	2%
0	32%	29%	18%	67%	59%
1	16%	18%	6%	9%	20%
2	6%	15%	7%	4%	4%
3	6%	8%	4%	2%	3%
4	3%	1%	3%	1%	3%
5	3%	4%	13%	1%	1%
6	2%	2%	8%	1%	0%
7	2%	2%	6%	1%	0%
8	4%	2%	7%	2%	1%
9	3%	2%	6%	1%	0%
10	19%	15%	21%	5%	4%
vidēji	**3,61**	**3,07**	**5,30**	**1,23**	**1,20**

V1. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

V1.9.1. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\frac{2014}{x}$, ja $x>0$?

1. risinājums. Pārveidojam doto izteiksmi, atdalot pilno kvadrātu:

$$x+\frac{2014}{x}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{2014}+\left(\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}.$$

Tā kā kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir tad, kad

$$\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}=0,\ \sqrt{x}=\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\text{ jeb } x=\sqrt{2014}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka izteiksmes $x+\frac{2014}{x}$ mazākā vērtība ir $2\sqrt{2014}$ un tā tiek sasniegta pie $x=\sqrt{2014}$.

2. risinājums. No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$x+\frac{2014}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2014}{x}}=2\sqrt{2014}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja abi saskaitāmie ir vienādi, t. i., $x=\frac{2014}{x}$ jeb $x^2=2014$ un $x=\sqrt{2014}$.

V1.9.2. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo locekļu summu. Cik starp virknes pirmajiem **a)** 100, **b)** 2014 locekļiem ir tādi, kas dalās ar 5?

Atrisinājums

Katra virknes elementa, dalot to ar 5, atlikums, ir atkarīgs tikai no triju iepriekšējo elementu atlikumiem, dalot ar 5.

Aplūkojam atlikumu virkni, kas rodas virknes elementus, dalot ar 5:

1, 1, 1, 3, 0, 4, 2, 1, 2, 0, 3, 0, 3, 1, 4, 3, 3, 0, 1, 4, 0, 0, 4, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, ...

Tātad atlikumi ir periodiski ar periodu 31. Tas nozīmē, ka katrā 31 locekļu grupā ir 6 locekļi, kas dalās ar 5.

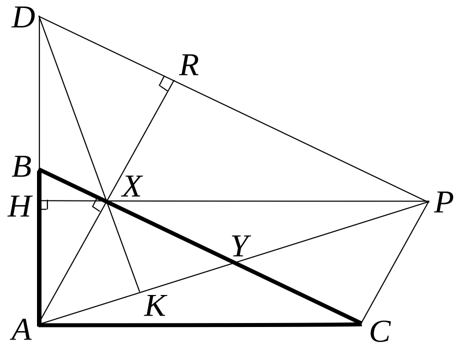
a) 100 locekļi veido trīs pilnas grupas un vēl septiņus locekļus, jo $100=3\cdot31+7$. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5, ir $6\cdot3+1=19$.

b) 2014 locekļi veido 64 pilnas grupas un vēl 30 locekļus, jo $2014=31\cdot64+30$. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5, ir $6\cdot64+6=390$.

V1.9.3. Taisnleņķa trijstūra *ABC* taisnais leņķis ir *A*. Punkts *X* ir no *A* pret *BC* vilktā augstuma pamats. Nogriežņa *XC* viduspunkts ir *Y*. Uz malas *AB* pagarinājuma izvēlēts punkts *D* tā, ka $AB=BD$. Pierādīt, ka $DX\perp AY$!

Atrisinājums

Nogriezni *AY* pagarina aiz punkta *Y* un atliek punktu *P* tā, ka $AY=YP$ (skat. 81. att.). Tas nozīmē, ka četrstūris *AXPC* ir paralelograms, jo tā diagonāles *AP* un *XC* to krustpunktā *Y* dalās uz pusēm. Nogriezni *XP* pagarinot līdz krustpunktam ar *AD*, iegūst, ka $PH\perp AD$, jo $AC\perp AD$ un $PH\parallel AC$. Aplūkojam trijstūri *ADP*. No tā, ka $AB=BD$ un $AY=YP$ izriet, ka BY ir ΔADP viduslīnija. Tātad $BY\parallel DP$. Tā kā $AX\perp BY$, tad $AR\perp DP$, kur $R\in DP$. Tas nozīmē, ka trijstūrī *ADP* ir novilkti divi augstumi *PH* un *AR*, kas krustojas punktā *X*. Līdz ar to nogrieznis *DK*, kas vilkts no virsotnes *D* caur punktu X, ir trešais šī trijstūra augstums, tātad $DK \perp AP$ jeb $DX \perp AY$, kas arī bija jāpierāda.



81. att.

V1.9.4. Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

a) Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm!

b) Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk nekā viens diplomāts!

Atrisinājums

a) Apaļajam galdam pavisam ir 13 derīgas pozīcijas, kuras var iegūt galda pagriešanas par noteiktu vietu skaitu rezultātā. Katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tikai vienā no šīm pozīcijām. Katrai galda pozīcijai i $(1 \le i \le 13)$ ar p_i apzīmējot diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, iegūstam $p_1 + p_2 + ... + p_{13} = 13$.

Zināms, ka viena no p_i vērtībām ir 0, jo sākumā neviens no diplomātiem neatrodas pretī savai plāksnītei. Pēc Dirihlē principa kādai no atlikušajām p_j vērtībām jābūt vismaz 2, t. i., ir vismaz divi diplomāti, kas kādā pozīcijā atrodas pretī savām plāksnītēm.

b) Pieņemot, ka diplomāti numurēti ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 13 pēc kārtas un sēdināt tos ap galdu bija paredzēts pulksteņrādītāja virzienā (plāksnītes saliktas 1-2-3-...-12-13), tad diplomātiem pie galda apsēžoties, piemēram, šādi 1-13-12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2, izpildās uzdevumā prasītais. Diplomātiem *i* un *j*, ja *i* sēž savā vietā, tad *j*-tā plāksnīte atrodas $j - i$ vietas pa labi, bet *j*-tais diplomāts atrodas $j - i$ vietas pa kreisi. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad *j* nevar sēdēt pie savas plāksnītes.

Piezīme. Pavisam iespējami 13723 atšķirīgi diplomātu izvietojuma varianti ar iepriekšminēto īpašību.

V1.9.5. Atrast vienādojuma $(x^2 + 5x - 7)^2 - 2(x^2 + 5x - 6) - 4 = 0$ sakņu kubu summu!

Atrisinājums

Apzīmējot $p = x^2 + 5x - 8$ un ievietojot apzīmējumu dotajā vienādojumā, iegūstam $(p+1)^2 - 2(p+2) - 4 = 0$ jeb $p^2 = 7$ un $p = \pm\sqrt{7}$. Esam ieguvuši, ka šo vienādojumu var sadalīt reizinātājos $(p - \sqrt{7})(p + \sqrt{7}) = 0$. Tas nozīmē, ka sākotnējā vienādojuma saknes sakrīt ar vienādojumu $x^2 + 5x - (8 + \sqrt{7}) = 0$ un $x^2 + 5x - (8 - \sqrt{7}) = 0$ saknēm (šo vienādojumu diskriminanti attiecīgi ir $D_{v1} = 57 + 4\sqrt{7} > 0$ un $D_{v2} = 57 - 4\sqrt{7} > 0$, tāpēc katram no tiem ir divas saknes). Apzīmēsim šīs saknes pa pāriem ar x_1, x_2 un x_3, x_4. Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam sakarības:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -5,$$
$$x_1 x_2 = -(8+\sqrt{7}),$$
$$x_3 x_4 = -(8-\sqrt{7}).$$

Ievērojam, ka $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$.

Tāpēc $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -5\cdot(25+3(8+\sqrt{7})) - 5\cdot(25+3(8-\sqrt{7})) = -490$.

10. klase

V1.10.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5(x+y+z) = xyz \\ x = y+z \end{cases}$$

kur *x*, *y*, *z* – veseli nenegatīvi skaitļi!

Atrisinājums

Ievērojam, ka sistēmas atrisinājums ir (0, 0, 0).

Pirmajā vienādojumā aizstājot $y+z$ ar *x*, iegūstam $5(x+x) = xyz$ jeb $10x = xyz$.

Ja $x \neq 0$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam

$$10 = yz \quad \text{jeb} \quad y = \frac{10}{z}.$$

Apskatām visus veselos pozitīvos skaitļa 10 dalītājus:

- $z = 1$, tad $y = 10$ un $x = 10+1 = 11$;
- $z = 2$, tad $y = 5$ un $x = 5+2 = 7$;
- $z = 5$, tad $y = 2$ un $x = 2+5 = 7$;
- $z = 10$, tad $y = 1$ un $x = 1+10 = 11$.

Tātad dotajai sistēmai ir pieci atrisinājumi: (0, 0, 0), (11, 10, 1), (7, 5, 2), (7, 2, 5), (11, 1, 10).

V1.10.2. Atrast visas tādas vesela skaitļa *n* vērtības, kurām gan $\frac{n^3+3}{n+3}$, gan $\frac{n^4+4}{n+4}$ ir veseli skaitļi!

Atrisinājums

Apzīmējam $k = n+3$. Tad $n = k-3$ un pārveidojam pirmo izteiksmi:

$$\frac{n^3+3}{n+3} = \frac{(k-3)^3+3}{k} = \frac{k^3 - 9k^2 + 27k - 27 + 3}{k} = k^2 - 9k + 27 - \frac{24}{k}.$$

Līdzīgi, apzīmējot $m = n+4$, pārveidojam otro daļu:

$$\frac{n^4+4}{n+4} = \frac{(m-4)^4+4}{m} = \frac{m^4 - 16m^3 + 96m^2 - 256m + 256 + 4}{m} = m^3 - 16m^2 + 96m - 256 + \frac{260}{m}.$$

Lai abu daļu vērtības būtu veseli skaitļi, tad skaitlim $k = n+3$ jābūt 24 dalītājam un atbilstošajam skaitlim $m = n+4$ jābūt 260 dalītājam.

Derīgās $n+3$ vērtības apkopotas tabulas otrajā rindā:

n	–27	–15	–11	**–9**	–7	**–6**	**–5**	–4	–2	–1	**0**	**1**	3	5	**9**	21
$n+3$	–24	–12	–8	–6	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	6	8	12	24
$n+4$	–23	–11	–7	**–5**	–3	**–2**	**–1**	0	**2**	3	**4**	**5**	7	9	**13**	25

No skaitļu $n+4$ vērtībām ietonētās ir skaitļa 260 dalītāji.

Tātad meklētās *n* vērtības ir –9, –6, –5, –2, 0, 1, 9.

V1.10.3. Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

Atrisinājums

Parādīsim, ka 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Šajā summā ir ne vairāk kā piecas 13 centu pastmarkas. Aplūkosim, kāda summa atkarībā no izmantoto 13 centu pastmarku skaita būtu jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām:

13 centu pastmarku skaits	*Summa, kas apmaksāta ar 13 centu pastmarkām*	*Summa, kas jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām*
0	0	71
1	13	58
2	26	45
3	39	32
4	52	19
5	65	6

Nevienā no variantiem atlikusī summa nav 7 daudzkārtnis, tātad šo summu nav iespējams apmaksāt ar 7 centu pastmarkām. Tātad 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Pierādīsim, ka jebkuru lielāku summu ir iespējams samaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Ievērojam, ka ja *N* centu apmaksāšanā ir izmantota vismaz viena 13 centu pastmarka, tad, aizvietojot to ar divām 7 centu pastmarkām, varēs apmaksāt $N+1$ centu. Šādu aizvietošanu apzīmēsim ar „*A*”.

Ja *N* centu apmaksāšanā ir izmantotas vismaz vienpadsmit 7 centu pastmarkas, tad, aizvietojot tās ar sešām 13 centu pastmarkām, varēs apmaksāt $N+1$ centu. Šādu aizvietošanu apzīmēsim ar „*B*”.

Ievērojam, ka $72=1\cdot 7+5\cdot 13$ un

$$72 \overset{A}{\Rightarrow} 73 \overset{A}{\Rightarrow} 74 \overset{A}{\Rightarrow} 75 \overset{A}{\Rightarrow} 76 \overset{A}{\Rightarrow} 77 \overset{B}{\Rightarrow} 78.$$

Visas summas, kas lielākas nekā 78 centi, var iegūt izvēloties kādu no summām 72, 73, …, 78 un pievienojot nepieciešamo 7 centu pastmarku skaitu.

V1.10.4. Divas dažāda rādiusa riņķa līnijas ar centriem punktos *B* un *C* ārēji saskaras punktā *A*. Abu riņķa līniju kopējā pieskare, kas neiet caur punktu *A*, pirmajai riņķa līnijai pieskaras punktā *D*, bet otrai – punktā *E*. Taisne, kas novilkta caur *A* perpendikulāri *DE*, krusto nogriežņa *BC* vidusperpendikulu punktā *F*. Pierādīt, ka $BC=2AF$!

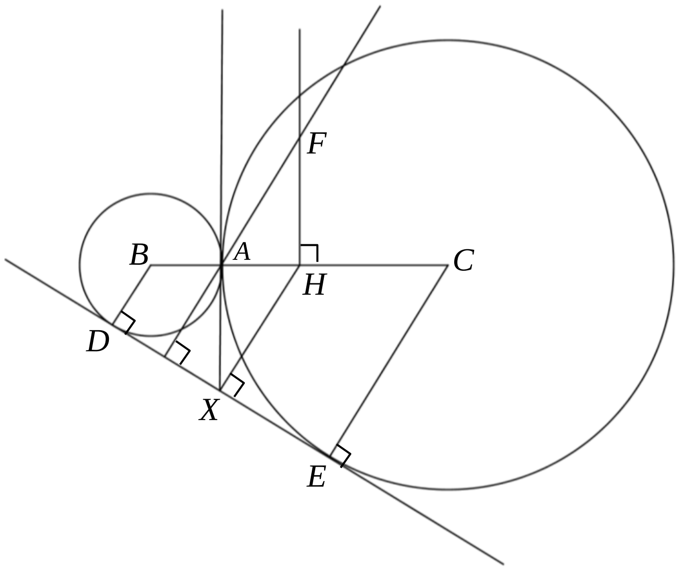
Atrisinājums

Apzīmējam $AB=r$ un $AC=R$.

Tad $BC=AB+BC=r+R$ un jāpierāda, ka $AF=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{r+R}{2}$.

No nogriežņa vidusperpendikula definīcijas izriet, ka $BH=HC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{r+R}{2}$.

No punkta *H* novelkam perpendikulu pret *DE*, perpendikula un *DE* krustpunktu apzīmējam ar *X* (skat. 82. att.).



82. att.

Nogrieznis HX ir trapeces $DBCE$ ($BD \parallel EC$ kā rādiusi pret pieskari DE) viduslīnija, tātad $HX = \frac{BD + CE}{2} = \frac{r + R}{2}$ un $DX = EX$.

Nogrieznis HX ir paralēls AF, jo $HX \perp DE$ un $AF \perp DE$.

Novelkam abu riņķu kopējo pieskari caur punktu A – šī pieskare krusto DE punktā Y. Tā kā $BC \perp AY$ un $BC \perp FH$, tad $AY \parallel FH$.

Izmantojot pieskaru, kas vilktas no viena punkta pret riņķa līniju, īpašību, iegūstam $EY = AY$ un $DY = AY$. Tātad $DY = EY$ un Y ir DE viduspunkts. Esam ieguvuši, ka X un Y ir viens un tas pats punkts, jo abi atrodas DE viduspunktā.

Apskatām četrstūri $AFHX$, tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas, tātad $AFHX$ ir paralelograms un $AF = HX = \frac{r + R}{2}$ kā paralelograma pretējās malas. Līdz ar to esam pierādījuši vajadzīgo.

V1.10.5. Gatavojoties vēlēšanām politiskās partijas saviem vēlētājiem kopumā ir devušas s (naturāls skaitlis) dažādus solījumus. Zināms, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Tajā pat laikā nav iespējams atrast divas partijas, kuru dotie solījumi sakristu pilnībā – ir iespējams atrast vismaz vienu solījumu, ko viena partija ir devusi, bet otra – nē. Kāds ir lielākais iespējamais partiju skaits, kas gatavojas vēlēšanām?

Atrisinājums

Lielākais iespējamais dažādo solījumu komplektu skaits ir $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{s} = 2^s$ (kopas, kuras apjoms ir s, visu apakškopu skaits).

Zināms, ka katrai kopas A apakškopai B eksistē tās papildinājums C līdz kopai A, un kopu B un C šķēlums ir tukša kopa, t. i., kopām B un C nav kopīgu elementu. Šādus divus solījumu komplektus (apakškopu un tās papildinājumu) nevar piekārtot partijām, jo neizpildās uzdevuma nosacījums, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Līdz ar to no katra šādu solījumu komplektu pāra partijām var piekārtot ne vairāk kā vienu solījumu komplektu. Tātad iespējamais partiju skaits ir vismaz divas reizes mazāks nekā visu kopas apakškopu skaits, t. i., $2^s : 2 = 2^{s-1}$.

Parādīsim, ka šāds partiju skaits ir iespējams.

Pieņemsim, ka eksistē viens solījums, kas kopīgs visām partijām. Tad no atlikušajiem $s-1$ solījumiem var izveidot 2^{s-1} dažādus solījumu komplektus (kopas, kuras apjoms ir $s-1$ dažādo apakškopu skaits). Līdz ar to esam izveidojuši 2^{s-1} atšķirīgus solījumu komplektus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad lielākais iespējamais partiju skaits ir 2^{s-1}.

11. klase

V1.11.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka, noapaļojot izteiksmju $\sqrt{10^{2n}-10^n}$ un $\sqrt{10^{2n}-10^n+1}$ vērtības līdz tuvākajam naturālajam skaitlim, iegūtie skaitļi ir vienādi?

Atrisinājums

Ievērojam, ka

$$10^{2n}-10^n<10^{2n}-10^n+\frac{1}{4}<10^{2n}-10^n+1;$$

$$10^{2n}-10^n<\left(10^n-\frac{1}{2}\right)^2<10^{2n}-10^n+1;$$

$$\sqrt{10^{2n}-10^n}<10^n-\frac{1}{2}<\sqrt{10^{2n}-10^n+1}.$$

Tātad izteiksmes $\sqrt{10^{2n}-10^n}$ vērtība tiks noapaļota uz 10^n-1, bet $\sqrt{10^{2n}-10^n+1}$ – uz 10^n. Tas nozīmē, ka nevienai naturālai *n* vērtībai šie skaitļi nav vienādi.

V1.11.2. Noteikt, kāds ir lielākais skaits, cik no pieciem naturāliem skaitļiem a, $a+14$, $a+22$, $a+32$, $a+46$ var būt pirmskaitļi!

Atrisinājums

Ja *a* ir pāra skaitlis, tad starp dotajiem pieciem skaitļiem ir ne vairāk kā viens pirmskaitlis, t. i., ja $a=2$, tad pirmskaitlis ir 2, vai ja *a* ir kāds cits pāra skaitlis, tad starp dotajiem pieciem skaitļiem nav neviena pirmskaitļa.

Ja $a=3$, tad ir divi pirmskaitļi 3 un 17, pārējie skaitļi ir 25, 35 un 49, kas nav pirmskaitļi.

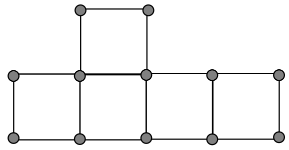
Ja $a>3$, tad tieši viens no skaitļiem a, $a+14$, $a+22$ dalās ar 3:

- ja $a=3k$, tad *a* dalās ar 3;
- ja $a=3k+1$, tad $a+14=3k+1+14=3k+15$ dalās ar 3;
- ja $a=3k+2$, tad $a+22=3k+2+22=3k+24$ dalās ar 3.

Tā kā šajā gadījumā vismaz viens no skaitļiem dalās ar 3, tad ne vairāk kā 4 no šiem skaitļiem var būt pirmskaitļi.

Četrus pirmskaitļus var iegūt, ja izvēlas, piemēram, $a=15$. Tad $a+14=29$, $a+22=37$, $a+32=47$ un $a+46=61$ ir pirmskaitļi.

V1.11.3. Figūras (skat. 83. att.) divpadsmit virsotnēs nepieciešams ierakstīt pirmos 12 naturālos skaitļus (katrā virsotnē – vienu) tā, lai katras rūtiņas virsotnēs ierakstīto četru skaitļu summa būtu vienāda ar *M*. Vai to var izdarīt, ja **a)** $M=28$; **b)** $M=26$?



83. att.

Atrisinājums

a) Jā, skaitļus dotās figūras virsotnēs var ierakstīt, viens no atrisinājumiem parādīts 84. att.

b) Pierādīsim, ka skaitļu izvietojums ar *M* = 26 neeksistē.

Pieņemsim, ka šāds izvietojums eksistē. Aplūkosim trīs kvadrātus, kuru malas attēlotas ar treknām līnijām (skat. 85. att.).

Uzrakstām trīs vienādības:

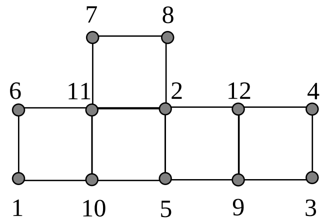
$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = M\ ;$$

$$x_3 + x_4 + x_8 + x_9 = M\ ;$$

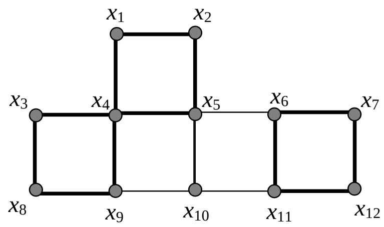
$$x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12} = M\ .$$

Apzīmēsim ar S visu skaitļu no 1 līdz 12 summu: $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 78$. Tad, saskaitot šīs trīs vienādības, iegūstam, ka $S + x_4 - x_{10} = 3M$.

Ja $M = 26$, tad $S = 78 = 3 \cdot 26 = 3M$. Līdz ar to $x_4 = x_{10}$. Iegūta pretruna ar to, ka virsotnēs jāieraksta dažādi skaitļi.



84. att.

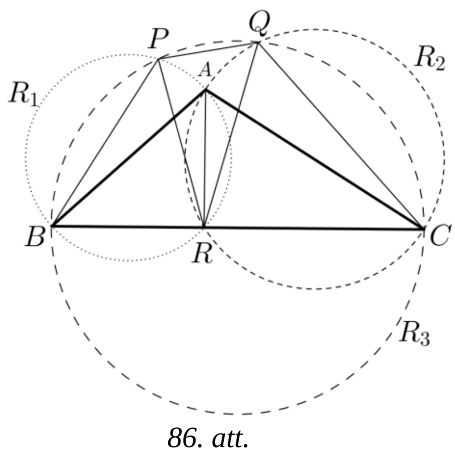


85. att.

V1.11.4. Platleņķa trijstūra ABC platais leņķis ir BAC . Novilktas trīs riņķa līnijas tā, ka trijstūra ABC malas ir attiecīgi šo riņķa līniju diametri. Bez trijstūra virsotnēm riņķa līnijas pa pāriem krustojas vēl trīs punktos – P, Q un R. Pierādīt, ka A ir trijstūra PQR bisektrišu krustpunkts!

Atrisinājums

Riņķa līniju, kuras diametrs ir AB, apzīmējam ar R_1, kuras diametrs ir AC – ar R_2 un kuras diametrs ir BC – ar R_3 (skat. 86. att.).



86. att.

Šīs riņķa līnijas katra iet caur attiecīgās malas galapunktiem un caur to augstumu pamatiem, kas atrodas uz divām pārējām malām vai to pagarinājumiem:

- R_1 iet caur punktiem A, R, B un P;
- R_2 – caur A, R, C un Q;
- R_3 – caur B, C, Q un P,

pie kam $\angle BPC = \angle BQC = \angle ARB = 90°$. Punkts A atrodas trijstūra PQR iekšpusē (CP un BQ krustpunktā:

- gan AP, gan CP ir perpendikulārs pret BP (R_1 un R_3 īpašības) – tātad P, A un C atrodas uz vienas taisnes;
- gan AQ, gan BQ ir perpendikulārs pret CQ (R_2 un R_3 īpašības) – tātad B, A un Q atrodas uz vienas taisnes).

No R_1 ievilkto leņķu īpašībām: $\angle ABP = \angle ARP$, jo abi balstās uz viena un tā paša loka *AP*.
No R_2: $\angle ARQ = \angle ACQ$ (abi balstās uz loka *AQ*).
No R_3: $\angle PBQ = \angle PCQ$ (abi balstās uz loka *PQ*).
Ievērojot, ka $\angle ABP = \angle QBP$ un $\angle ACQ = \angle PCQ$, iegūstam, ka $\angle ARP = \angle ARQ$. Tātad *RA* ir $\angle PRQ$ bisektrise.
No R_2 ievilkto leņķu īpašībām: $\angle AQR = \angle ACR$ (abi balstās uz *AR*).
No R_3: $\angle PQB = \angle PCB$ (abi balstās uz *BP*).
Ievērojot, ka $\angle ACR = \angle PCB$, iegūstam $\angle PQB = \angle AQR$. Tātad *QA* ir $\angle PQR$ bisektrise.
Tātad divas no trijstūra *PQR* bisektrisēm krustojas punktā *A* – tātad *A* ir trijstūra *PQR* bisektrišu krustpunkts, kas arī bija jāpierāda.

V1.11.5. Naturālus skaitļus *a, b* un *c* saista sakarība $c^2 = a^2 + b^2$. Pierādīt, ka katru no skaitļiem $c^2 + ab$ un $c^2 - ab$ var izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu!

Atrisinājums

Aplūkojam skaitļus $x = \dfrac{a+b+c}{2}$, $y = \dfrac{a+b-c}{2}$, $p = \dfrac{c+a-b}{2}$ un $q = \dfrac{c-a+b}{2}$.

No sakarības $c^2 = a^2 + b^2$ secinām: ja kāds no skaitļiem *a, b, c* ir nepāra skaitlis, tad no atlikušajiem viens ir nepāra, bet otrs – pāra. Tātad vai nu visi skaitļi *a, b, c* ir pāra, vai starp tiem ir tieši divi nepāra skaitļi. Tas nozīmē, ka visi skaitļi *x, y, p, q* ir veseli skaitļi.
Skaitļi *a, b, c* ir Pitagora trijstūra malas, tāpēc no trijstūra nevienādībām $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ izriet, ka visi skaitļi *x, y, p, q* ir lielāki nekā nulle – tātad naturāli skaitļi.
Apskatām summas:

- $x^2 + y^2 = \dfrac{(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2}{4} + \dfrac{(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2}{4} = \dfrac{(a+b)^2 + c^2}{2} =$
  $= \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 + c^2}{2} = \dfrac{2c^2 + 2ab}{2} = c^2 + ab$;
- $p^2 + q^2 = \dfrac{c^2 + 2c(a-b) + (a-b)^2}{4} + \dfrac{c^2 - 2c(a-b) + (a-b)^2}{4} = \dfrac{c^2 + (a-b)^2}{2} =$
  $= \dfrac{c^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} = \dfrac{2c^2 - 2ab}{2} = c^2 - ab$.

12. klase

V1.12.1. Izteiksmē $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm100 = 2014$ katru zīmi „$\pm$” aizvietoja vai nu ar „+”, vai ”–„ tā, lai izteiksme būtu patiesa. Kāds lielākais „+” zīmju skaits var būt šajā izteiksmē?

Atrisinājums

Pierādīsim, ka „+” zīmju skaits nevar būt lielāks kā 83.
Pieņemsim pretējo, ka var būt 84 saskaitāmie ar „+” zīmi. Šajā gadījumā mazākā iespējamā izteiksmes vērtība būs tad, ja pie mazākajiem virknes locekļiem būs zīme „+”, bet pie lielākajiem „–”. Tad mazākā izteiksmes vērtība ir

$$1+2+3+...+84-85-...-100 = \frac{1+84}{2}\cdot 84 - \frac{85+100}{2}\cdot 16 = 85\cdot 42 - 185\cdot 8 = 2090 > 2014.$$

Tā kā tika izveidota mazākā iespējamā izteiksmes vērtība ar šo „+” skaitu, tad visas citas izteiksmes būs ar vēl lielāku vērtību.
Pareizu izteiksmi ar 83 „+” zīmēm var iegūt, ja iepriekšējā izteiksmē nomaina „+” pret „–” pie saskaitāmā 38. Izteiksmes vērtība samazināsies par $38\cdot 2 = 76$ un būs vienāda ar $2090 - 76 = 2014$. Tātad lielākais „+” zīmju skaits izteiksmē ir 83.

V1.12.2. Katram naturālam skaitlim n ir definēta funkcija $f(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. Pierādīt, ka visiem $n>1$ ir spēkā sakarība $n+f(1)+f(2)+...+f(n-1)=n\,f(n)$.

Atrisinājums

Izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Ievērojam, ka $f(1)=1$.

Indukcijas bāze. Ja $n=2$, tad $f(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ un dotā sakarība $2+f(1)=3=2f(2)$ ir patiesa.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka sakarība ir spēkā, ja $n=k$:

$$k+f(1)+f(2)+...+f(k-1)=k\,f(k). \qquad (*)$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka sakarība ir spēkā, ja $n=k+1$.

Abām vienādības (*) pusēm pieskaitām $f(k)+1$:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}=f(k)+1,$$

un iegūstam

$$k+f(1)+f(2)+...+f(k-1)+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}=k\,f(k)+f(k)+1;$$

$$(k+1)+1+(f(1)+\frac{1}{2})+(f(2)+\frac{1}{3})+...+(f(k-1)+\frac{1}{k})=(k+1)\,f(k)+1.$$

Izmantojot, ka $1=f(1)$ un $f(k-1)+\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}=f(k)$, iegūstam

$$(k+1)+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k)=(k+1)\,f(k)+\frac{k+1}{k+1}.$$

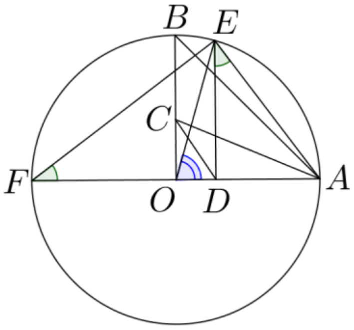
Tātad $(k+1)+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k)=(k+1)(f(k)+\frac{1}{k+1})=(k+1)f(k+1)$.

Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n=2$, un no tā, ka apgalvojums ir spēkā, ja $n=k$, izriet, ka apgalvojums ir spēkā arī $n=k+1$, secinām, ka apgalvojums ir spēkā visām naturālām n ($n>1$) vērtībām.

V1.12.3. Riņķa līnijā ar centru punktā *O* novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi *OA* un *OB*. Nogrieznis *AC* ir trijstūra *BAO* mediāna, *CD* ir trijstūra *ACO* bisektrise, punkts *E* izvēlēts uz mazākā loka *AB* tā, ka *ED* ir trijstūra *AEO* augstums. Aprēķināt leņķa *AED* lielumu grādos.

Atrisinājums

Pagarinām *OA* tā, ka *AF* ir diametrs un novelkam nogriezni *EF* (skat. 87. att.). Tad trijstūris *AEF* ir taisnleņķa, jo $\angle AEF$ balstās uz diametru *AF*.



87. att.

$\Delta AEF \sim \Delta ADE$ (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle AEF=\angle ADE=90°$ un $\angle EAD$ ir kopīgs. Apzīmējam $\angle AFE=\angle AED=\alpha$ (kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros). Tad $\angle EOD=2\angle AFE=2\alpha$ kā centra leņķis, kas balstās uz to pašu loku kā $\angle AFE$.

Apzīmējam $OA = OB = OE = 2x$. Tad $OC = x$ un no Pitagora teorēmas trijstūrī *AOC* izriet, ka $AC = \sqrt{OC^2 + AO^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$. Izmantojot bisektrises īpašību (bisektrise *CD* trijstūrī *AOC*), iegūstam

$$\frac{OD}{DA} = \frac{OC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{OD}{AO - OD} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow OD\sqrt{5} = 2x - OD \quad \Rightarrow \quad OD = \frac{2x}{1+\sqrt{5}}.$$

No trijstūra *ODE* iegūstam, ka $\cos 2\alpha = \dfrac{OD}{OE} = \dfrac{2x}{(1+\sqrt{5})\cdot 2x} = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Izmantojot trigonometrisko formulu $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, iegūstam

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Tā kā α ir šaurs trijstūra leņķis, tad

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}+1}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Tātad $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{4-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \dfrac{-4-2\sqrt{5}}{8} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Esam ieguvuši, ka $\cos 4\alpha = -\cos\alpha$ jeb, izmantojot redukcijas formulas, $\cos 4\alpha = \cos(\pi - \alpha)$.
Ievērojot, ka α ir šaurs trijstūra leņķis, iegūstam

$$4\alpha = \pi - \alpha \quad \Rightarrow \quad 5\alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ jeb } \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ.$$

V1.12.4. Šaha festivālā piedalījās 2014 dalībnieki, daži savā starpā arī izspēlēja vienu šaha partiju. Zināms, ka starp jebkuriem trim festivāla dalībniekiem noteikti ir divi, kuri savā starpā ir izspēlējuši partiju. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais šaha partiju skaits, kas ir izspēlētas šajā festivālā?

Atrisinājums

Apzīmējam festivāla dalībniekus ar punktiem un, ja divi spēlētāji sava starpā ir izspēlējuši šaha partiju, tad atbilstošos punktus savienojam ar nogriezni. Tātad mums jānoskaidro, kāds ir mazākais novilkto nogriežņu skaits.

Ar $f(n)$ apzīmēsim mazāko nogriežņu skaitu, kas novilkti starp *n* punktiem un kam ir spēkā uzdevumā dotā īpašība – starp katriem trim punktiem ir novilkts vismaz viens nogrieznis.

Apskatām $n+1$ punktu. Izmetot jebkuru vienu punktu, ir jābūt spēkā īpašībai $f(n+1) - d(i) \ge f(n)$, kur $d(i)$ – *i*-tajā punktā ieejošo nogriežņu skaits. Saskaitot šīs nevienādības visiem $n+1$ punktiem, iegūstam, ka $(n+1)f(n+1) - \sum d(i) \ge (n+1)f(n)$. Tā kā katrs nogrieznis ieskaitīts tieši divas reizes, tad $\sum d(i) = 2f(n+1)$. Tātad

$$(n+1)f(n+1) - 2f(n+1) \ge (n+1)f(n);$$

$$f(n+1) \ge \frac{(n+1)f(n)}{n-1}. \qquad (*)$$

Zināms, ka $f(3) = 1$.

Ievērojot, ka nogriežņu skaits ir naturāls skaitlis, pēc formulas (*) iegūstam, ka $f(4) \ge 2$, $f(5) \ge 4$, $f(6) \ge 6$, $f(7) \ge 9$, $f(8) \ge 12 \ldots$.

Ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim, ka visiem naturāliem $k \ge 3$ izpildās $f(2k) \ge k(k-1)$ un $f(2k-1) \ge (k-1)^2$.

Indukcijas bāze. $f(3)=1$, $f(4)=2$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka katram k ($2 \le k \le i$) izpildās nevienādības $f(2k) \ge k(k-1)$ un $f(2k-1) \ge (k-1)^2$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka minētās sakarības ir spēkā arī pie $k = i+1$.

Pēc pieņēmuma $f(2i) \ge i(i-1)$, $i > 1$.

No (*) izriet, ka

$$f(2i+1) \ge \frac{f(2i)\cdot(2i+1)}{2i-1} \ge \frac{i(i-1)(2i+1)}{2i-1} = \frac{2i^3-i^2-i}{2i-1} = \frac{i^2(2i-1)-i}{2i-1} = i^2 - \frac{i}{2i-1} > i^2-1.$$

Tātad $f(2i+1) \ge i^2$.

No (*) izriet, ka

$$f(2(i+1)) = f(2i+1+1) \ge \frac{2(i+1)f(2i+1)}{2i+1-1} = \frac{2(i+1)f(2i+1)}{2i} \ge \frac{(i+1)i^2}{i} = i(i+1).$$

Līdz ar to pierādījām, ka $f(2k) \ge k(k-1)$ un $f(2k-1) \ge (k-1)^2$ ir spēkā visiem naturāliem $k \ge 3$.

Vēl jāparāda, ka šāda situācija ir iespējama, t. i., starp 2014 punktiem, ievērojot uzdevuma nosacījumus, novilkti 1013042 nogriežņi.

Ievērojam, ka $f(2014) = f(2\cdot 1007) \ge 1007\cdot 1006 = 1013042$. Sadalām visus 2014 punktus divās vienāda izmēra grupās (katrā grupā 1007 punkti) un starp visiem vienas grupas punktiem novelkam visus nogriežņus. Katrā grupā nogriežņu skaits ir $\frac{1007\cdot 1006}{2}$, kopējais nogriežņu skaits ir $\frac{1007\cdot 1006}{2}\cdot 2 = 1007\cdot 1006$. Tādējādi ir iegūts tieši vajadzīgais nogriežņu skaits. Izvēloties jebkurus trīs punktus, no Dirihlē principa izriet, ka divi no šiem punktiem pieder vienai no izveidotajām divām grupām, līdz ar to starp šiem diviem vienas grupas punktiem ir novilkts nogrieznis. Tātad starp jebkuriem trīs punktiem ir novilkts vismaz viens nogrieznis.

V1.12.5. Vai var atrast tādu naturālu *n* vērtību, kam piemīt īpašība: visu skaitļa *n* naturālo dalītāju, izņemot 1 un *n*, kvadrātu summa vienāda ar n^2?

Atrisinājums

Pierādīsim, ka šādu naturālu skaitļu *n* nav.

Apzīmējam apskatāmo dalītāju kvadrātu summu ar $S(n)$. Ievērosim, ka

$$S(n) < \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{16} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{n^2}.$$

Pamatosim, ka

$$\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{16} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{n^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \ldots < n^2$$

jeb, dalot ar n^2, iegūstam

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots < 1. \qquad (*)$$

Ja naturāls skaitlis k atrodas starp divnieka pakāpēm, t. i., $2^a \le k \le 2^{a+1}$, kur a – naturāls skaitlis, tad $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2^a}$ un $\frac{1}{k^2} \ge \frac{1}{2^{2a}}$.

Nevienādības (*) katru kreisās puses saskaitāmo $\frac{1}{k^2}$ aizstāsim ar $\frac{1}{2^{2a}}$, ja $2^a \le k \le 2^{a+1}$, tā tikai palielinot summas vērtību:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+... < \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+....$$

Ievērojam, ka ir tieši 2^a tādi naturāli skaitļi, kas apmierina nevienādības $2^a \le k \le 2^{a+1}$. Tātad iegūtajā summā būs tieši 2^a saskaitāmie ar saucēju 2^{2a}. Līdz ar to iegūtā summa ir

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+... = \frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^4}+\frac{8}{8^2}+... = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Tika izmantota bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas (ar kvocientu 0,5 un pirmo locekli 0,5) visu locekļu summas formula.
Esam pamatojuši, ka

$$\frac{S(n)}{n^2} < \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2}+... < 1.$$

Tātad $S(n) < n^2$, līdz ar to nevienam *n* nav iespējama vienādība $S(n) = n^2$.

Piezīme. Ir spēkā sakarība $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+... = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0{,}63...$.

VALSTS OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2013./2014. mācību gada Valsts matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējo iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (62 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	2%	0%	2%	5%	16%
0	5%	0%	8%	10%	55%
1	13%	2%	81%	27%	3%
2	21%	10%	6%	23%	2%
3	11%	10%	2%	6%	5%
4	8%	3%	2%	5%	6%
5	13%	0%	0%	6%	5%
6	0%	2%	0%	3%	2%
7	6%	2%	0%	8%	3%
8	2%	8%	0%	3%	3%
9	2%	16%	0%	0%	0%
10	18%	48%	0%	3%	0%
vidēji	4,43	7,77	1,07	2,92	1,54

10. klase (96 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	0%	7%	14%	19%	15%
0	13%	19%	33%	77%	78%
1	9%	47%	3%	0%	2%
2	11%	18%	6%	0%	1%
3	5%	3%	4%	0%	0%
4	6%	0%	4%	0%	1%
5	4%	1%	5%	0%	1%
6	3%	2%	2%	0%	0%
7	3%	0%	7%	0%	0%
8	6%	0%	4%	1%	1%
9	26%	2%	1%	1%	0%
10	13%	1%	16%	2%	1%
vidēji	5,44	1,49	3,86	0,47	0,38

11. klase (74 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	4%	8%	23%	19%
0	64%	8%	16%	38%	74%
1	4%	20%	19%	9%	1%
2	3%	4%	1%	4%	0%
3	1%	7%	1%	4%	1%
4	4%	4%	1%	0%	1%
5	3%	11%	5%	0%	0%
6	3%	3%	30%	8%	0%
7	3%	8%	4%	1%	0%
8	0%	3%	0%	8%	0%
9	1%	9%	0%	0%	0%
10	14%	19%	14%	4%	3%
vidēji	2,29	5,08	4,35	2,51	0,47

12. klase (59 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	0%	10%	5%	19%	10%
0	8%	15%	51%	53%	12%
1	20%	7%	27%	7%	29%
2	2%	2%	3%	0%	31%
3	3%	2%	3%	2%	5%
4	2%	0%	7%	7%	2%
5	3%	3%	0%	10%	2%
6	7%	2%	0%	3%	5%
7	3%	2%	0%	0%	2%
8	5%	0%	2%	0%	0%
9	10%	3%	0%	0%	0%
10	36%	54%	2%	0%	3%
vidēji	6,10	6,98	1,07	1,35	2,19

P1. PAPILDUS SACENSĪBAS

P1.1. Atrast izteiksmes $\dfrac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$ lielāko iespējamo vērtību, ja *x*, *y* un *z* – reāli pozitīvi skaitļi!

1. risinājums. Pārrakstām doto izteiksmi, saucējā visas iekavas izdalot ar 3 (skaitītāju attiecīgi ar 81) un katras iekavas otro saskaitāmo izsakot kā divu vienādu saskaitāmo summu:

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}=\frac{\frac{xyz}{81}}{\frac{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{3}\frac{\left(x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\right)}{3}\frac{\left(y+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right)}{3}\frac{(z+8+8)}{3}}\le$$

$$\le\frac{\frac{xyz}{81}}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{yz^2}{4}}\cdot\sqrt[3]{64z}}=\frac{1}{81}.$$

Lai iegūtu novērtējumu, katram no četriem saucēja reizinātajiem tika pielietota sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka sākotnējās izteiksmes lielākā vērtība ir $\left(\frac{2}{3\cdot 6}\right)^2=\frac{1}{81}$, ko iegūst, ja $x=2,\ y=4,\ z=8$.

2. risinājums. Sākumā pierādīsim lemmu.

Lemma. *Ja a un b pozitīvi reāli skaitļi, tad izteiksmes* $\dfrac{q}{(q+a)(q+b)}$*, kur* $q>0$*, lielākā vērtība ir pie* $q=\sqrt{ab}$.

Lemmas pierādījums. Pārveidojam lemmā doto izteiksmi $\dfrac{q}{(q+a)(q+b)}=\dfrac{1}{q+(a+b)+\dfrac{ab}{q}}$.

Sākotnējās izteiksmes lielāko vērtību iegūst, ja $q+\dfrac{ab}{q}$ vērtība ir mazākā iespējamā.

Pārveidojam šo izteiksmi, atdalot pilno kvadrātu $q+\dfrac{ab}{q}=\dfrac{(q-\sqrt{ab})^2}{q}+2\sqrt{ab}$.

Tā kā kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir pie $q=\sqrt{ab}$. Līdz ar to esam pierādījuši lemmu.

Uzdevumā doto izteiksmi pārrakstām formā $\dfrac{x}{(1+x)(x+y)}\cdot y\cdot\dfrac{z}{(y+z)(z+16)}$.

Ja pieņemam, ka izdevies atrast *y* vērtību, pie kuras izteiksme sasniedz savu maksimumu, tad pēc lemmas pirmais reizinātājs lielāko vērtību sasniedz pie $x=\sqrt{y}$, bet pēdējais – pie $z=4\sqrt{y}$. Ievietojot *x* un *z* vērtības, iegūstam, ka sākotnējās izteiksmes lielākā vērtība, kas izteikta ar *y*, ir

$$\frac{\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})(\sqrt{y}+y)}\cdot y\cdot\frac{4\sqrt{y}}{(y+4\sqrt{y})(4\sqrt{y}+16)}=\frac{\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})\sqrt{y}(1+\sqrt{y})}\cdot y\cdot\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+4)\cdot 4(\sqrt{y}+4)}=$$

$$=\frac{y}{(1+\sqrt{y})^2(4+\sqrt{y})^2}=\left(\frac{\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})(4+\sqrt{y})}\right)^2.$$

.

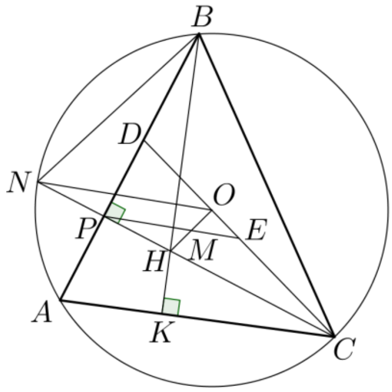
Pēc lemmas iekavās esošās izteiksmes lielākā vērtība ir pie $\sqrt{y}=2$ jeb $y=4$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka sākotnējās izteiksmes lielākā vērtība ir $\left(\frac{2}{3\cdot 6}\right)^2=\frac{1}{81}$, ko iegūst, ja $x=2$, $y=4$, $z=8$.

P1.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC*, nogrieznis *CP* ir augstums; punkts *H* ir augstumu krustpunkts un *O* ir apvilktās riņķa līnijas centrs. Punkts *D* ir taišņu *CO* un *AB* krustpunkts; *E* ir *CD* viduspunkts. Pierādīt, ka *EP* iet caur *OH* viduspunktu!

Atrisinājums

Apzīmējam nogriežņa *CP* un ΔABC apvilktās riņķa līnijas otro krustpunktu ar *N*, nogriežņu *PE* un *OH* krustpunktu – ar *M* (skat. 88. att.).



88. att.

Tā kā $\angle DPC=90°$, tad ΔDPC ir taisnleņķa un $PE=EC$ kā mediāna pret hipotenūzu. Savukārt $NO=OC$ kā ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusi. Tāpēc $\Delta PEC\sim\Delta NOC$ (pēc pazīmes $m\ell m$, jo tie ir vienādsānu trijstūri ar kopīgu leņķi pie pamata), un $NO\parallel PE$. (*)

Ievērojam, ka $\angle NBA=\angle NCA=\angle ABH$ kā ievilktie leņķi riņķa līnijā un atbilstošie leņķi līdzīgos taisnleņķa trijstūros *ABK* un *ACP*, tāpēc *BP* ir ΔNBH bisektrise.

Nogrieznis *BP* ir ΔNBH augstums, jo $CP\perp AB$. Tāpēc ΔNBH ir vienādsānu un *BP* ir arī mediāna, t. i., $NP=PH$. No šī un (*) izriet, ka *PM* ir ΔONH viduslīnija, tāpēc $OM=MH$ jeb *M* ir nogriežņa *OH* viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

P1.3. Aprīlī 2014 skolēni tika sadalīti *N* ($N<2014$) grupās un katra grupa strādāja pie sava projekta. Maijā šie paši skolēni tika sadalīti $N+1$ grupā un atkal katra grupa strādāja pie sava projekta. Pierādīt, ka vismaz divi skolēni maijā strādāja skaitliski mazākā grupā nekā aprīlī!

Atrisinājums

Pieņemsim, ka visi projekti bija vienādi sarežģīti un darba apjoms, kāds nepieciešams viena projekta izpildei ir viena vienība. Pieņemsim, ka visi skolēni, kas strādāja pie viena projekta, veica vienādu darba daudzumu – ja grupā strādāja *m* skolēni, tad katrs ir veicis darba apjomu $\frac{1}{m}$. Katrs skolēns ir veicis pozitīvu darba daudzumu un neviens skolēns nav veicis vairāk kā vesela projekta izpildi. Kopējais visu skolēnu paveiktā darba apjoms aprīlī ir *N*, bet maijā – $N+1$. Tātad vismaz vienam skolēnam maijā vajadzēja paveikt vairāk nekā aprīlī. Aplūkosim šādu skolēnu, kas aprīlī ir veicis darba apjomu $\frac{1}{m}$, bet maijā – $\frac{1}{n}$, pie kam $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$ jeb $m>n$.

Papildus ir spēkā sakarība: $0<\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\le 1$. Tātad $0<\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<1$, kas nozīmē, ka viens skolēns nevarēja paveikt darba apjoma starpību starp projektiem maijā un aprīlī (vienu veselu projektu jeb vienu vienību). Tātad bija jābūt vismaz diviem šādiem skolēniem.

P1.4. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2 = 6ab+7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

1. risinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 6ab + 7;$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 10ab + 7;$$
$$(a+b)^2 = 10ab + 7.$$

Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai 0, 1, 4, 5, 6, 9, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

2. risinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā $a^2 + b^2 = 8ab + 7$. Aplūkojot šo vienādojumu pēc moduļa 4, iegūstam $a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod 4$.

Bet gan a^2, gan b^2 pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0 un 1, tāpēc šim vienādojumam nav atrisinājuma. Līdz ar to atrisinājuma nav arī dotajam vienādojumam.

3. risinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā $a^2 + b^2 = 8ab + 7$. Šī vienādojuma atrisinājumam (ja tāds eksistē) ir spēkā sakarība: $a^2 + b^2 \equiv 7 \pmod 8$.

Izteiksim $a = 4a_1 + a_2$ un $b = 4b_1 + b_2$, kur $0 \le a_2, b_2 \le 3$.

Tad $a^2 + b^2 = 16(a_1^2 + b_1^2) + 8(a_1a_2 + b_1b_2) + a_2^2 + b_2^2$ un $a^2 + b^2 \equiv a_2^2 + b_2^2 \pmod 8$.

Rezultātus apkopojam tabulā, katrā rūtiņā ierakstot $a_2^2 + b_2^2 \pmod 8$ vērtību:

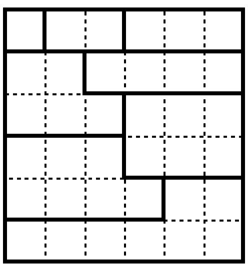
b_2 \ a_2	0	1	2	3
0	0	1	4	1
1	1	2	5	2
2	4	5	0	5
3	1	2	1	2

Kā redzams, nav tādu a_2 un b_2 vērtību, kurām $a_2^2 + b_2^2 \equiv 7 \pmod 8$. Līdz ar to arī sākotnējam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

P1.5. Vai eksistē tāds rūtiņu kvadrāts, kuru var sagriezt daudzstūros $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tā, ka k-tais daudzstūris, $k = 1, 2, \ldots, n$, sastāv tieši no k rūtiņām? Vai var gadīties, ka šāda kvadrāta laukums ir lielāks nekā 2013 rūtiņas?

Atrisinājums

Šāds kvadrāts eksistē, piemēram, uzdevuma nosacījumus apmierina kvadrāts ar izmēriem 6×6 (skat. 89. att.).



89. att.

Parādīsim, ka uzdevumā prasītā kvadrāta laukums var būt lielāks nekā 2013 rūtiņas.

Daudzstūru $D_1, D_2, \ldots, D_n$ laukumu summai jābūt kāda naturāla skaitļa kvadrātam:

$$1+2+...+n=m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2}=m^2 \quad \Rightarrow \quad (2n+1)^2=8m^2+1.$$

Ja apzīmējam $x=2n+1$ un $y=2m$, tad no tiem vienādojuma

$$x^2=2y^2+1 \qquad (*)$$

atrisinājumiem, kuriem *x* ir nepāra un *y* ir pāra skaitlis, varēs iegūt meklētā kvadrāta izmēru un daudzstūru D_i skaitu. Var pārbaudīt, ka $x=3$ un $y=2$ ir vienādojuma (*) atrisinājums.

Tālāk parādīsim: ja x_i un y_i ir vienādojuma (*) atrisinājums, tad x_{i+1} un y_{i+1}, kur

$$\begin{cases} x_{i+1}=3x_i+4y_i \\ y_{i+1}=2x_i+3y_i \end{cases}, \qquad (**)$$

arī ir (*) atrisinājums.

Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus, pārbaudām, ka šīs rekurences sakarības apmierina vienādojumu (*):

$$x_i^2=2y_i^2+1;$$

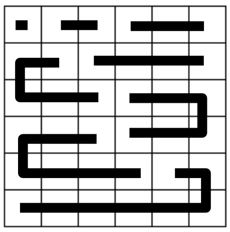
$$9x_i^2+24x_iy_i+16y_i^2=8x_i^2+24x_iy_i+18y_i^2+1;$$

$$(3x_i+4y_i)^2=2(2x_i+3y_i)^2+1;$$

$$x_{i+1}^2=2y_{i+1}^2+1.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka vienādojumam (*) ir bezgalīgi daudz atrisinājumu un, izmantojot sakarības (**), atrisinājumu vērtības palielinās. Tātad kādā brīdī to vērtības kļūs tik lielas, ka meklētā kvadrāta laukums būs lielāks nekā 2013 rūtiņas.

Vēl jāparāda, kā sadalīt kvadrātu daudzstūros $D_1, D_2, ..., D_n$. To var izdarīt, piemēram, pēc šādas shēmas: pārvietojamies pa kvadrāta rindiņām, sākot ar augšējās rindas pirmo rūtiņu un beidzot ar apakšējās rindas gala rūtiņu (skat. 90. att.) un atvēlam daudzstūrim D_1 vienu rūtiņu, daudzstūrim D_2 divas rūtiņas utt.

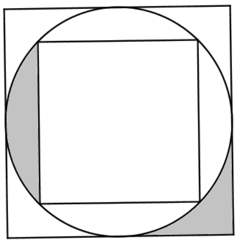


90. att.

A1. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

9. klase

A1.9.1. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts (skat. 91. att.). Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!



91. att.

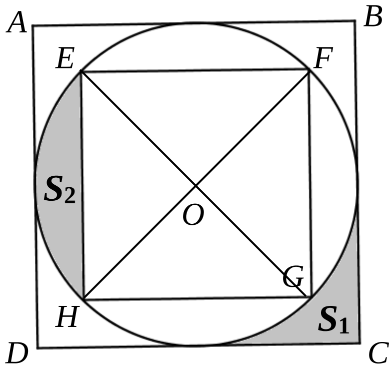
Atrisinājums

Ievilktā riņķa rādiusa garums ir puse no kvadrāta *ABCD* malas garuma, t. i., $EO = FO = \frac{1}{2}AB = 1$ (skat. 92. att.). Izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī *EOF*, iegūstam $EF = \sqrt{EO^2 + FO^2} = \sqrt{2}$.

Aprēķinām katras iekrāsotās daļas laukumu:

- $S_1 = \frac{1}{4}(S_{ABCD} - S_{\text{O}}) = \frac{1}{4}(AB^2 - \pi \cdot EO^2) = \frac{1}{4}(4-\pi)$;
- $S_2 = \frac{1}{4}(S_{\text{O}} - S_{EFGH}) = \frac{1}{4}(\pi \cdot EO^2 - EF^2) = \frac{1}{4}(\pi - 2)$.

Līdz ar to $S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(4-\pi) + \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{4 - \pi + \pi - 2}{4} = \frac{1}{2}$.



92. att.

A1.9.2. Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 1276. Atrast dotos četrus ciparus!

Atrisinājums

Dotos ciparus apzīmējam ar *a, b, c, d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

$$4 \cdot 10 \cdot (a+b+c+d) + 4 \cdot (a+b+c+d) = 44(a+b+c+d) = 1276,$$

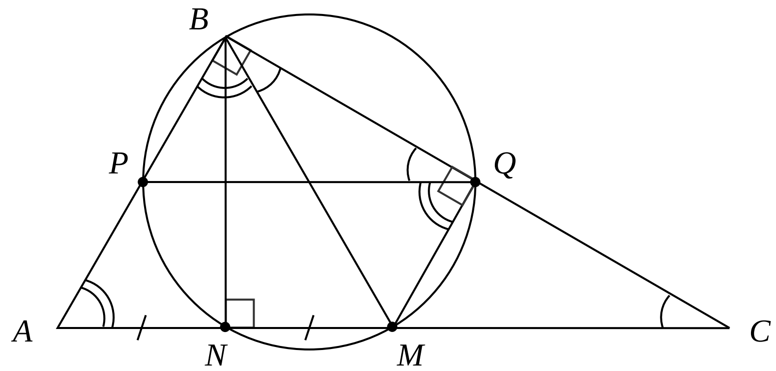
tātad $a+b+c+d = 1276 : 44 = 29$. Ievērojam, ka, saskaitot četrus lielākos ciparus, iegūstam $9+8+7+6 = 30 > 29$. Tātad kāds no saskaitāmajiem jāņem par 1 mazāks. Lai visi cipari būtu dažādi, tad vienīgā iespēja ir 6 vietā ņemt 5. Tātad meklētie cipari ir 5, 7, 8 un 9.

A1.9.3. Trijstūris *ABC* ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi *ABC*. Punkti *M* un *N* ir attiecīgi nogriežņu *AC* un *AM* viduspunkti. Caur *B*, *M* un *N* vilktā riņķa līnija krusto malas *AB* un *BC* attiecīgi to iekšējos punktos *P* un *Q*. Zināms, ka $AC||PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ vērtību!

Atrisinājums

Apzīmējam $\angle BAC = \alpha$ un $\angle BCA = \beta$, tad $\alpha + \beta = 90°$ (skat. 93. att.). No $AC||PQ$ izriet, ka $\angle BQP = \angle BCA = \beta$. Tā kā $\angle ABC = 90°$ un *M* ir hipotenūzas *AC* viduspunkts, tad $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$, jo $BM = \frac{1}{2}AC = AM$ un trijstūris *AMB* ir vienādsānu. Tad $\angle PQM = \angle PBM = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *PM*. Līdz ar to $\angle BQM = \angle PQM + \angle BQP = \alpha + \beta = 90°$.

Tādā gadījumā $\angle BNM = 180° - \angle BQM = 90°$ kā ievilkta četrstūra *NBQM* pretējie leņķi. Bet no dotā $AN = NM$, tāpēc *BN* ir ΔABM mediāna un arī augstums, tāpēc $AB = BM$. Savukārt no $\angle ABM = \angle BAM$ izriet, ka $BM = AM$. Līdz ar to ΔABM ir regulārs un $\angle BAC = \angle BAM = 60°$.



93. att.

A1.9.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 94. att.). Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?

	6	
	?	
7		

94. att.

Atrisinājums

Apzīmējam skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar *x*, bet apakšējā – ar *y* (skat. 95. att.). Tad katras rindas, katras kolonnas un katras diagonāles skaitļu summa ir $6 + x + y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi:

	6	
	x	
7	y	

→

	6	$y-1$
	x	
7	y	

→

	6	$y-1$
	x	
7	y	$x-1$

→

	6	$y-1$
	x	8
7	y	$x-1$

→

$x+1$	6	$y-1$
	x	8
7	y	$x-1$

→

$x+1$	6	$y-1$
$y-2$	x	8
7	y	$x-1$

95. att.

Vienas diagonāles skaitļu summa ir $(x+1)+x+(x-1)=3x$. Tātad $6+x+y=3x$ jeb $y=2x-6$. Ievietojam iegūto sakarību un iegūstam 96. att. doto tabulu.

$x+1$	6	$2x-7$
$2x-8$	x	8
7	$2x-6$	$x-1$

96. att.

Atliek izvēlēties tādu mazāko *x*, lai visi tabulā ierakstītie skaitļi būtu naturāli un savā starpā atšķirīgi. Jāizpildās nevienādībai $2x-8>0$ jeb $x>4$.

Apskatām iespējamās *x* vērtības:

- $x=5$ neder, jo $x+1=6$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 6;
- $x=6$, $x=7$ un $x=8$ neder, jo tabulā jau ir ierakstīti skaitļi 6, 7, 8;
- $x=9$ neder, jo $x-1=8$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 8;
- $x=10$ der un aizpildīta tabula parādīta 97. att.

11	6	13
12	10	8
7	14	9

97. att.

Līdz ar to mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā, ir 10.

A1.9.5. Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

Atrisinājums

Iedomāsimies, ka katram marsietim katrā rokā ir tik margrietiņu, cik viņam ir antenu. Tādā gadījumā margrietiņu kopējais skaits būs trīs reizes lielāks nekā kopējais antenu skaits, t. i., margrietiņu skaits būs $3\cdot 2014$.

No otras puses pēc uzdevumā dotā („antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes") katras divas savienotas rokas kopā tur margrietiņu skaitu, kas ir skaitļa 7 daudzkārtnis (ja vienam marsietim vienā rokā ir *x* margrietiņas, bet otram – $6x$ margrietiņas, tad abiem kopā ir $7x$ margrietiņas). Tātad margrietiņu kopējam skaitam jādalās ar 7, bet $3\cdot 2014=3\cdot 2\cdot 19\cdot 53$ nedalās ar 7. Līdz ar to esam parādījuši, ka kopējais antenu skaits nevar būt 2014.

10. klase

A1.10.1. Noteikt, vai virkne $a_n=\dfrac{3n+7}{n+2}$, *n* – naturāls skaitlis, ir augoša vai dilstoša!

Atrisinājums

Virkni sauc par augošu (dilstošu), ja katrs nākamais virknes loceklis ir lielāks (mazāks) nekā iepriekšējais.

Apskatām starpību $a_{n+1}-a_n$:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)+7}{(n+1)+2}-\frac{3n+7}{n+2}=\frac{3n+10}{n+3}-\frac{3n+7}{n+2}=\frac{(3n+10)(n+2)-(3n+7)(n+3)}{(n+3)(n+2)}=$$

$$=\frac{3n^2+6n+10n+20-(3n^2+7n+9n+21)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-1}{(n+3)(n+2)}<0.$$

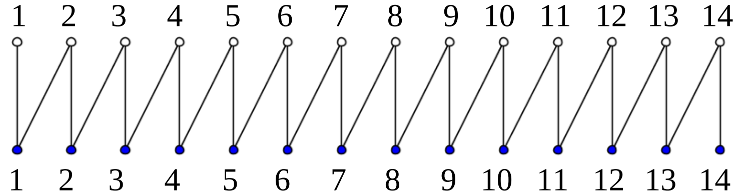
Esam ieguvuši, ka $a_{n+1}<a_n$ visiem naturāliem *n*. Tātad virkne $a_n=\dfrac{3n+7}{n+2}$ ir dilstoša.

A1.10.2. Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti 14 zaļi punkti, uz otras – 14 sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?

Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts (ja nogriežņiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas).

Atrisinājums

Visus zaļos punktus sanumurējam no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz 14 (skat. 98. att.). Līdzīgi sanumurējam visus sarkanos punktus. Tā kā nogriežņi nekrustojas, tad tie sakārtoti virzienā no kreisās uz labo pusi. Aplūkojam katra nogriežņa galapunktos ierakstīto skaitļu summas. Tā ir stingri augoša virkne. Mazākā summa ir 2, lielākā – 28. Pavisam iespējamas 27 vērtības. Kā uzzīmēt 27 nogriežņus skat., piemēram, 98. att.



98. att.

A1.10.3. Aplūkosim funkcijas $y = x^2 + ax + b$, kur $a + 2b = 2014$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

Atrisinājums

Aplūkojam funkcijas $y = x^2 + ax + b$ vērtību, ja $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}(a + 2b) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2014 + \frac{1}{4} = 1007\frac{1}{4}.$$

Tātad punkts $\left(\frac{1}{2}; 1007\frac{1}{4}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem.

A1.10.4. Doti septiņi dažādi naturāli skaitļi; katriem diviem no dotajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

Atrisinājums

Ja starp dotajiem ir k pāra skaitļi un $7 - k$ nepāra skaitļi, tad starp summām ir $k(7-k)$ nepāra skaitļi (jo pāra un nepāra skaitļa summa ir nepāra skaitlis), bet pārējie ir pāra skaitļi un nav pirmskaitļi (neviena no summām nav 2, jo 2 nav izsakāms kā divu dažādu naturālu skaitļu summa). Apskatot izteiksmes $k(7-k)$ vērtību, ja $k = 0; 1; 2; ...; 7$, iegūstam, ka lielāko vērtību tā sasniedz pie $k = 3$ un $k = 4$, un šī lielākā vērtība ir 12.

Divpadsmit pirmskaitļi ir iespējami, piemēram, ja doti skaitļi 2, 4, 8, 14, 3, 9, 15, tad nepāra summas ir 5, 11, 17, 7, 13, 19, 11, 17, 23, 17, 23, 29, kas visas ir pirmskaitļi.

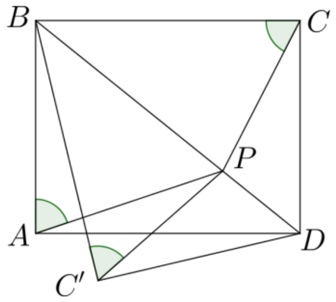
Piezīme. Pamatot, ka izteiksme $k(7-k)$ savu lielāko vērtību pieņem pie $k = 3$ un $k = 4$, var izmantojot kvadrātfunkcijas īpašību: ja kvadrātfunkcijas zari vērsti uz leju, tad tai ir lielākā vērtība un tā tiek sasniegta virsotnē.

A1.10.5. Uz taisnstūra $ABCD$ diagonāles BD atlikts iekšējs punkts P tā, ka $\angle PAB = \angle PCB$. Pierādīt, ka $ABCD$ ir kvadrāts!

Atrisinājums

Pieņemsim pretējo, ka $ABCD$ nav kvadrāts. Ar C' apzīmējam punktam C simetrisko piunktu attiecībā pret taisni BC (skat. 99. att.). No pieņēmuma izriet, ka A nesakrīt ar C'. Ievērojam, ka $\angle BAD = 90°$ un simetrijas dēļ $\angle BC'D = \angle BCD = 90°$. Tāpēc $\angle BAD = \angle BC'D$ un ap četrstūri $C'ABD$ var apvilkt riņķa līniju. No dotā $\angle PAB = \angle PCB$ un no simetrijas $\angle PAB = \angle PC'B$.

Tātad $\angle PAB = \angle PC'B$ un arī ap četrstūri $C'ABP$ var apvilkt riņķa līniju. Bet caur trīs punktiem (šajā gadījumā C', A un B) var novilkt tikai vienu riņķa līniju, tāpēc P sakrīt ar D, kas ir pretrunā ar to, ka P ir BD iekšējs punkts. Tātad pieņēmums ir aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $ABCD$ ir kvadrāts.



99. att.

Piezīme. Prasīto iespējams pierādīt arī ar proporciju palīdzību.

11. klase

A1.11.1. Uz riņķa līnijas atlikti **a)** 6; **b)** 2014 punkti. Viens no tiem nokrāsots sarkans, bet pārējie – balti. Apskatām visus daudzstūrus, kuriem visas virsotnes ir kādi no nokrāsotajiem punktiem. Kādu daudzstūru ir vairāk – to, kam viena virsotne ir sarkana, vai to, kam visas virsotnes ir baltas?

Atrisinājums

Aplūkosim visus daudzstūrus, kam visas virsotnes ir baltas. Pievienojot katram no tiem sarkano virsotni, iegūsim daudzstūrus, kam viena virsotne ir sarkana, pie tam tie visi būs dažādi. Bez tam vēl ir trijstūri, kam viena virsotne ir sarkana un kurus nevar iegūt no daudzstūriem, kam visas virsotnes ir baltas. Tātad abos gadījumos daudzstūru ar sarkano virsotni ir vairāk.

A1.11.2. Skaitļu virknei (a_n) visiem $n>1$ ir spēkā sakarība $a_1+a_2+...+a_n=n^2a_n$. Aprēķināt a_{50}, ja zināms, ka $a_1=1000$.

1. risinājums. Apzīmējam $S_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tad $n^2a_n=S_n$, $(n+1)^2a_{n+1}=S_{n+1}$ un

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}(n^2+2n)=n^2a_n \quad\Rightarrow$

$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}\cdot a_n=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2}=...=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot 2\cdot 1\cdot a_1$.

Esam ieguvuši, ka $a_n=\frac{2a_1}{(n+1)n}$ un varam aprēķināt prasīto $a_{50}=\frac{2\cdot 1000}{51\cdot 50}=\frac{40}{51}$.

2. risinājums. Ievērojam, ka

$$a_n=\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n^2-1}. \qquad (*)$$

Aprēķinām dažu pirmo virknes elementu vērtības atkarībā no a_1 vērtības:

$$a_2=a_1\frac{1}{2^2-1};$$

$$a_1+a_2=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)=a_3(3^2-1);$$

$$a_3=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\frac{1}{3^2-1};$$

$$a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)=a_4(4^2-1).$$

Pierādīsim formulu

$$a_n = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)...\left(1+\frac{1}{(n-1)^2-1}\right)\frac{1}{n^2-1}$$

vispārīgā veidā, izmantojot matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Ja $n=2$, tad jau parādījām, ka $a_2 = a_1\frac{1}{2^2-1}$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā arī, ja $n=k$

$$a_k = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)...\left(1+\frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā gadījumā, ja $n=k+1$.
No vienādības (*) pie $n=k+1$ iegūstam

$$a_{k+1} = \frac{a_1+a_2+...+a_k}{(k+1)^2-1}.$$

No uzdevumā dotās vienādības izriet $a_1+a_2+...+a_k = k^2a_k$, tātad

$$a_{k+1} = \frac{k^2a_k}{(k+1)^2-1}.$$

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam vajadzīgo

$$a_{k+1} = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)...\left(1+\frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{k^2}{(k+1)^2-1} =$$

$$= a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)...\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)\frac{1}{(k+1)^2-1}.$$

Pārveidojam pierādīto vienādību:

$$a_n = a_1\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}...\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-1}\cdot\frac{1}{n^2-1} = a_1\frac{2^2\cdot3^2\cdot...\cdot(n-1)^2}{(2^2-1)(3^2-1)...((n-1)^2-1)(n^2-1)}.$$

Izmantojot formulu $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, pārveidojam iegūto vienādību:

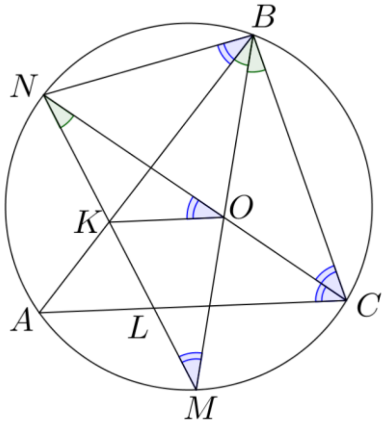
$$a_n = a_1\frac{2^2\cdot3^2\cdot...\cdot(n-1)^2}{(1\cdot2\cdot...\cdot(n-2)\cdot(n-1))\cdot(3\cdot4\cdot...\cdot n\cdot(n+1))} = a_1\frac{2}{n(n+1)}.$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, aprēķinām prasīto $a_{50} = 1000\cdot\frac{2}{50\cdot51} = \frac{40}{51}$.

A1.11.3. Ap šaurleņķu trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija. Loka *AB* (kuram nepieder punkts *C*) viduspunkts ir *N*, bet loka *AC* (kuram nepieder punkts *B*) viduspunkts ir *M*. Nogrieznis *NM* krusto malu *AB* punktā *K*. Trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas centrs ir punktā *O*. Pierādīt, ka $OK \parallel AC$!

Atrisinājums

Tā kā *N* un *M* ir attiecīgo loku viduspunkti, tad $\angle ABM = \angle CBM = \angle CNM = \alpha$ un $\angle ACN = \angle BCN = \angle ABN = \angle NMB = \beta$ kā ievilktie leņķi, kas attiecīgi balstās uz vienādiem lokiem (skat. 100. att.). Tātad *CN* un *BM* ir trijstūra *ABC* bisektrises un to krustpunkts ir ΔABC ievilktās riņķa līnijas centrs *O*. Ap četrstūri *BOKN* var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle ONK = \angle OBK = \alpha$ un abi leņķi balstās uz nogriežņa *OK*. Tātad $\angle KON = \angle NBK = \beta$ kā ievilktie leņķi un nogriežņi *OK* un *AC* veido vienādus leņķus ar nogriezni *CN*. Tā kā tie ir kāpšļu leņķi, tad $OK \parallel AC$, kas arī bija jāpierāda.



100. att.

A1.11.4. Doti 99 naturāli skaitļi. Zināms, ka nav tāda skaitļa, ar ko dalītos visi šie skaitļi, un ka jebkuru 50 skaitļu reizinājums dalās ar atlikušo 49 skaitļu reizinājumu. Pierādīt, ka visu 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums

Izvēlamies patvaļīgu pirmskaitli *p*, ar kuru dalās visu doto skaitļu reizinājums. No dotā izriet, ka visi skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Tāpēc atradīsies tāds skaitlis *c*, kas nav *p* daudzkārtnis. Sadalām atlikušos skaitļus divās grupās katrā pa 49 skaitļiem, grupu skaitļu reizinājumus apzīmējam ar *a* un *b*. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $ac \vdots b$ un $bc \vdots a$. Tas nozīmē, ka reizinājumi *a* un *b* satur skaitli *p* vienā un tajā pašā pakāpē, jo skaitlis *c* nesatur reizinātāju *p*. Tātad visu skaitļu reizinājumā, kas ir vienāds ar abc, pirmskaitlim *p* ir pāra pakāpe. Tā kā iegūtais secinājums ir spēkā visiem pirmskaitļiem *p*, tad esam pierādījuši, ka visu doto 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts.

A1.11.5. Pierādīt, ka izliektu 2014-stūri nevar sadalīt 167 izliektos 14-stūros!

Atrisinājums

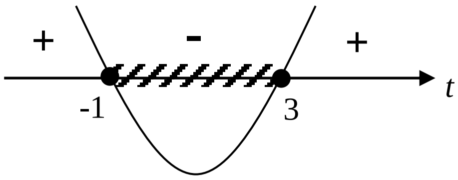
Izliekta 2014-stūra iekšējo leņķu summa ir $2012\cdot 180°$. Tos ir jānoklāj ar 167 izliektu 14-stūru leņķiem, kuru kopējais lielums ir $167\cdot 12\cdot 180° = 2004\cdot 180° < 2012\cdot 180°$. Tātad prasīto izdarīt nav iespējams.

12. klase

A1.12.1. Atrisināt nevienādību $9^x - 2\cdot 3^x - 3 \le 0$.

Atrisinājums

Pārveidojam nevienādību formā $3^{2x} - 2\cdot 3^x - 3 \le 0$ un, apzīmējot $3^x = t$, iegūstam kvadrātnevienādību $t^2 - 2t - 3 \le 0$. Kvadrāttrinoma saknes ir $t_1 = 3$ un $t_2 = -1$. Atrisinām iegūto kvadrātnevienādību (skat. 101. att.).



101. att.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\begin{cases} t \ge -1 \\ t \le 3 \end{cases}$ jeb $\begin{cases} 3^x \ge -1 \\ 3^x \le 3 \end{cases}$.

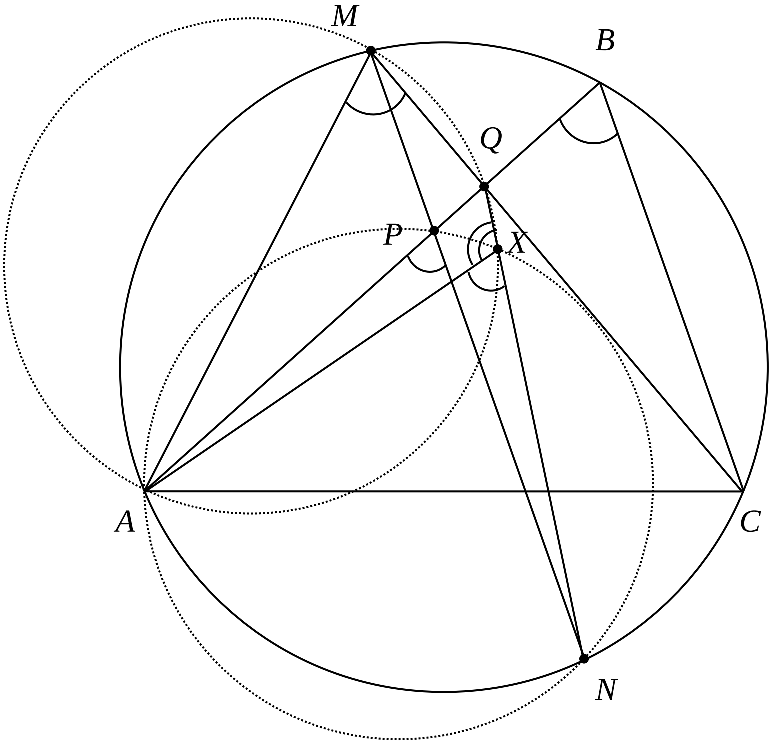
Sistēmas pirmā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem *x*, tāpēc sistēmas un līdz ar to arī dotās nevienādības atrisinājums ir $3^x \le 3^1$ jeb $x \le 1$.

A1.12.2. Caur trijstūra ABC malas AB iekšēju punktu P novilkta taisne, kas ir paralēla BC un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos M un N (M atrodas uz īsākā loka AB, bet N – uz īsākā loka AC). Nogrieznis MC krusto AB punktā Q. Pierādīt, ka NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu!

Atrisinājums

Apzīmējam ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustpunktu ar X (skat. 102. att.). Lai pierādītu, ka X atrodas uz nogriežņa QN, pietiek parādīt, ka $\angle AXQ + \angle AXN = 180°$.

Tā kā $MN || BC$, tad $\angle APN = \angle ABC$ kā kāpšļu leņķi. Savukārt $\angle AXN = \angle APN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loka AN, kā arī $\angle AMC = \angle ABC$, jo balstās uz viena loka AC. Bet tā kā A, M, Q, X atrodas uz riņķa līnijas, tad $\angle AXQ = 180° - \angle AMC$. Ieguvām, ka $\angle AXN = \angle ABC$ un $\angle AXQ = 180° - \angle ABC$, no kā izriet, ka $\angle AXQ + \angle AXN = 180°$. Tātad NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu X.



102. att.

A1.12.3. Atrast visus pirmskaitļus p, kuriem $p^4 - 6$ arī ir pirmskaitlis!

Atrisinājums

Ja $p = 2$, tad $p^4 - 6 = 16 - 6 = 10$ – nav pirmskaitlis.

Ja $p = 3$, tad $p^4 - 6 = 81 - 6 = 75$ – nav pirmskaitlis.

Ja $p = 5$, tad $p^4 - 6 = 625 - 6 = 619$ – pirmskaitlis.

Ja $p > 5$, tad to var uzrakstīt formā $p = 5k + a$, kur k – naturāls skaitlis un $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Apskatām iespējamos gadījumus atkarībā no a vērtības:

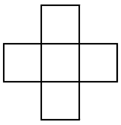
- ja $p = 5k + 1$, tad $p^4 - 6 = (5k+1)^4 - 6 = (5k)^4 + 4 \cdot (5k)^3 + 6 \cdot (5k)^2 + 4 \cdot 5k + 1 - 6 =$ $= (5k)^4 + 4 \cdot (5k)^3 + 6 \cdot (5k)^2 + 4 \cdot 5k - 5$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;

- ja $p = 5k + 2$, tad
  $(5k+2)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 2 + 6\cdot(5k)^2\cdot 2^2 + 4\cdot 5k\cdot 2^3 + 2^4 - 6 =$
  $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 2 + 6\cdot(5k)^2\cdot 2^2 + 4\cdot 5k\cdot 2^3 + 10.$
  Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5k + 3$, tad $(5k+3)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 3 + 6\cdot(5k)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 5k\cdot 3^3 + 3^4 - 6 =$ $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 3 + 6\cdot(5k)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 5k\cdot 3^3 + 75$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5k + 4$, tad
  $(5k+4)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 4 + 6\cdot(5k)^2\cdot 4^2 + 4\cdot 5k\cdot 4^3 + 4^4 - 6 =$
  $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 4 + 6\cdot(5k)^2\cdot 4^2 + 4\cdot 5k\cdot 4^3 + 250.$

  Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis

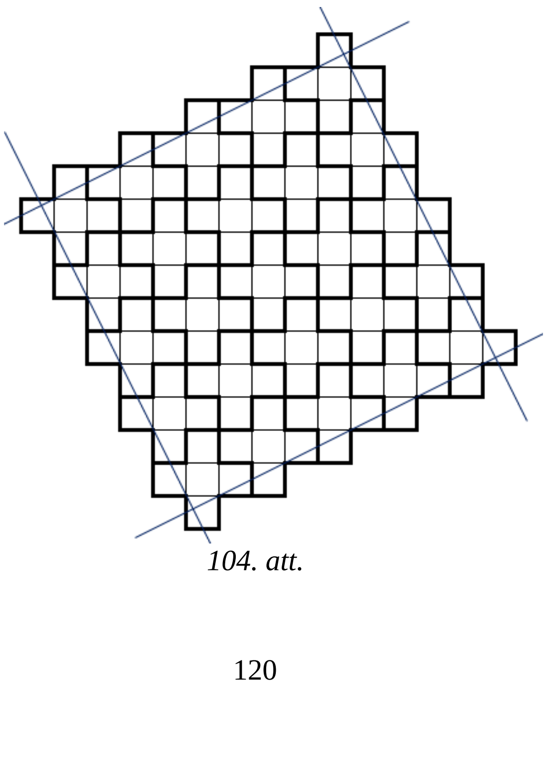
Esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumus apmierina tikai viena vērtība $p = 5$.

A1.12.4. Vai kvadrātu ar malas garumu 10 var noklāt ar 25 „krustiņiem” (skat. 103. att.), kuri sastāv no 5 kvadrātiem ar malas garumu 1? „Krustiņi” drīkst pārklāties, kā arī iziet ārpus dotā kvadrāta malām.



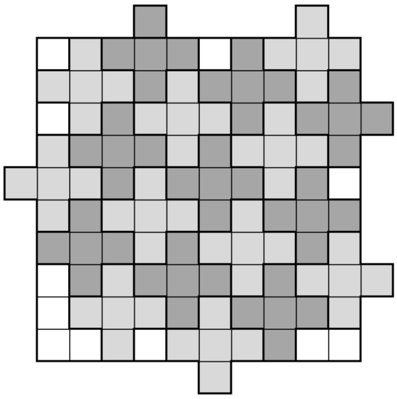
103. att.

1. risinājums. Apskatām kvadrātu, ko ierobežo četras taisnes (skat. 104. att.). Ievērojam, ka mazā trijstūra, kas atrodas kvadrāta stūrī, katešu garumi attiecas kā $1:2$ un tie attiecīgi ir $\frac{1}{\sqrt{5}}$ un $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Kvadrāta malas garums ir vienāds ar $4\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{23}{\sqrt{5}} > 10$. Tā kā kvadrāts ir pārklāts ar 25 “krustiņiem”, tad arī kvadrātu ar malas garumu 10 rūtiņas var pārklāt ar 25 dotajām figūrām.

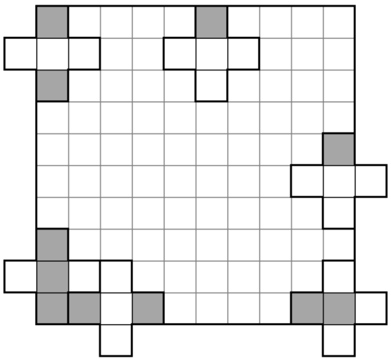


104. att.

2. risinājums. (balstās uz Katrīnas Sproģes, Rīgas Valsts 1. ģimnāzija, risinājumu) Ar 19 "krustiņiem" var noklāt 89 rūtiņas (skat. 105. att.). Atlikušās 11 rūtiņas var noklāt ar sešiem "krustiņiem" (skat. 106. att.). Tātad kvadrātu ar malas garumu 10 var noklāt ar 25 „krustiņiem".



105. att.



106. att.

A1.12.5. Funkcija $f: R \to R$ definēta visiem reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības. Visiem reāliem skaitļiem *a* un *b* izpildās

$$2f(a) \le f(b) + f(2a-b).$$

Vai tiesa, ka visiem reāliem *a*, *b* un *c* izpildās

$$3f(a) \le f(b) + f(c) + f(3a-b-c)?$$

Atrisinājums

Dotajā nevienādībā ņemam $a = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ un $b = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Tad $2f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$.

Reizinām abas nevienādības puses ar 2 un pielietojam doto nevienādību katram nevienādības labās puses saskaitāmajam

$$4f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \le$$

$$\le f(x_2) + f\left(2\frac{x_1+x_2}{2} - x_2\right) + f(x_4) + f\left(2\frac{x_3+x_4}{2} - x_3\right) =$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4).$$

Tātad $4f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$.

Pēdējā nevienādībā x_4 vietā ievietojot pirmo trīs skaitļu vidējo aritmētisko $x_4 = A_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, iegūstam vajadzīgo nevienādību:

$$4f\left(\frac{3A_3+A_3}{4}\right) = 4f(A_3) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(A_3);$$

$$3f(A_3) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3);$$

$$3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \le f(x_1) + f(x_2) + f\left(3\frac{x_1+x_2+x_3}{3} - x_1 - x_2\right);$$

$$3f(a) \le f(b) + f(c) + f(3a-b-c).$$

ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2013./2014. mācību gada Atklātās matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (321 dalībnieks)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	7%	8%	22%	20%	14%
0	5%	17%	59%	36%	18%
1	4%	5%	10%	6%	30%
2	2%	14%	3%	9%	10%
3	2%	3%	1%	3%	8%
4	2%	2%	3%	7%	2%
5	4%	3%	0%	5%	4%
6	7%	2%	1%	2%	0%
7	11%	2%	0%	2%	1%
8	15%	2%	0%	2%	5%
9	22%	11%	0%	2%	0%
10	19%	30%	1%	5%	9%
vidēji	**7,13**	**5,57**	**0,61**	**2,51**	**2,77**

10. klase (272 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	0%	1%	17%	11%	5%
0	4%	1%	60%	28%	88%
1	1%	2%	1%	6%	4%
2	46%	4%	1%	6%	1%
3	6%	68%	0%	9%	0%
4	4%	17%	2%	3%	0%
5	3%	6%	0%	6%	0%
6	6%	1%	0%	8%	0%
7	4%	0%	4%	8%	0%
8	4%	0%	0%	7%	0%
9	7%	0%	1%	3%	0%
10	15%	1%	13%	3%	1%
vidēji	**4,54**	**3,28**	**2,20**	**3,51**	**0,26**

11. klase (146 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	3%	22%	15%	45%	27%
0	7%	53%	43%	42%	38%
1	14%	1%	12%	10%	2%
2	25%	2%	7%	2%	1%
3	1%	1%	8%	1%	4%
4	6%	1%	4%	0%	3%
5	14%	3%	3%	0%	1%
6	10%	12%	1%	0%	7%
7	1%	0%	0%	0%	10%
8	0%	0%	0%	0%	3%
9	2%	1%	0%	0%	2%
10	18%	4%	8%	1%	1%
vidēji	**4,35**	**1,97**	**1,90**	**0,41**	**2,81**

12. klase (127 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	0%	17%	10%	4%	32%
0	0%	0%	12%	4%	6%
1	3%	34%	8%	2%	50%
2	3%	15%	6%	33%	7%
3	1%	14%	6%	0%	0%
4	20%	0%	3%	1%	0%
5	6%	0%	13%	0%	0%
6	6%	1%	6%	1%	0%
7	6%	0%	2%	0%	1%
8	13%	0%	8%	0%	1%
9	13%	0%	3%	0%	0%
10	29%	19%	23%	55%	3%
vidēji	**7,09**	**3,63**	**5,39**	**6,53**	**1,59**

BW1. BALTIC WAY 2013

Algebra

BW1.1. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pieņemsim, ka no tabulas

$$\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{matrix}$$

izvēlas n skaitļus tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nebūtu vienā rindā vai vienā kolonnā. Noteikt, kāda ir lielākā iespējamā vērtība šo n skaitļu reizinājumam!

Atrisinājums

Apskatāmais reizinājums ir $R(\sigma) = \prod_{i=0}^{n-1}(ni + \sigma(i))$, kur funkcija

$$\sigma: \{0,1,\dots,n-1\} \to \{0,1,\dots,n-1\}$$

ir kopas $\{0,1,\dots,n-1\}$ permutācija (skat. teorijas materiālu). Izvēlēsimies tādu permutāciju σ, lai reizinājums būtu vislielākais. Tad visi reizinātāji $ni + \sigma(i)$ ir pozitīvi, pretējā gadījumā (tā kā šie reizinātāji ir nenegatīvi) kāds no tiem būs nulle un arī viss reizinājums būs nulle, taču tas ir mazākais iespējamais reizinājums.

Apskatīsim gadījumu, kad eksistē tādi kopas $\{0,1,\dots,n-1\}$ elementi a un b, ka $a > b$ un vienlaikus $\sigma(a) > \sigma(b)$. Definēsim permutāciju

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(b), & i = a; \\ \sigma(a), & i = b; \\ \sigma(i), & \text{citos gadījumos.} \end{cases}$$

Apskatām attiecību $\frac{R(\tau)}{R(\sigma)}$ un, pēc vienādo reizinātāju saīsināšanas, iegūstam

$$\frac{R(\tau)}{R(\sigma)} = \frac{(na + \tau(a))(nb + \tau(b))}{(na + \sigma(a))(nb + \sigma(b))} = \frac{(na + \sigma(b))(nb + \sigma(a))}{(na + \sigma(a))(nb + \sigma(b))}.$$

Apskatām iegūtās daļas skaitītāja un saucēja starpību:

$$\begin{gathered} \big(na + \sigma(b)\big)\big(nb + \sigma(a)\big) - \big(na + \sigma(a)\big)\big(nb + \sigma(b)\big) = \\ = n\big(a\sigma(a) + b\sigma(b) - a\sigma(b) - b\sigma(a)\big) = \\ = n(a-b)\big(\sigma(a) - \sigma(b)\big) > 0. \end{gathered}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\frac{R(\tau)}{R(\sigma)} > 1$ jeb $R(\tau) > R(\sigma)$. Taču tā ir pretruna ar to, ka vērtība $R(\sigma)$ ir maksimāla. Tātad σ apmierina $\sigma(a) < \sigma(b)$ visiem $a > b$. Secinām, ka $\sigma(i) = n - 1 - i$ visiem i un lielākā iespējamā izvēlēto n skaitļu reizinājuma vērtība ir

$$R(\sigma) = \prod_{i=0}^{n-1}(ni + n - 1 - i) = \prod_{i=0}^{n-1}(i+1)(n-1) = (n-1)^n n!.$$

BW1.2. Pieņemsim, ka k un n ir naturāli skaitļi un $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ ir pa pāriem atšķirīgi veseli skaitļi. Polinomam P ar veseliem koeficientiem izpildās

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54$$

un

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013.$$

Noteikt lielāko iespējamo reizinājuma kn vērtību!

Atrisinājums

Apzīmējam $Q(x) = P(x) - 54$. Tad no dotā izriet, ka polinomam Q ir k saknes $x_1, \dots, x_k$ un $Q(y_i) = 1959$ visiem $i = 1, \dots, n$. Ievērosim, ka $1959 = 3 \cdot 653$, turklāt 653 ir pirmskaitlis.

Tā kā

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - x_j)S(x),$$

kur $S(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem, tad izpildās

$$Q(y_i) = \prod_{j=1}^{k}(y_i - x_j)S(y_i) = 1959.$$

Tātad visi skaitļi $a_i = y_i - x_1$ ir skaitļa 1959 dalītāji, līdz ar to pieder kopai $\{\pm1, \pm3, \pm653, \pm1959\}$. Skaitlis n nevar būt lielāks kā 4 (tad reizinājums ir lielāks nekā 1959), un, ja $n = 4$, tad divi no skaitļiem a_i ir ±1, trešais no skaitļiem a_i ir ar absolūto vērtību 3 un ceturtais ir ar absolūto vērtību 653.

Parādīsim, ka no $n = 4$ izriet, ka $k = 1$. Pieņemot, ka $a_1 = 1$ un $a_2 = -1$, iegūstam $y_1 - x_1 = 1$ un $y_2 - x_1 = -1$ jeb $x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, t. i., skaitlis x_1 ir skaitļu $y_1$un y_2 vidējais aritmētiskais. Pieņemam, ka $|a_3| = 3$, tādā gadījumā $\left|y_3 - \frac{y_1+y_2}{2}\right| = 3$ un $\left|y_4 - \frac{y_1+y_2}{2}\right| = 653.$ Ja $k \geq 2$, tad $x_2 \neq x_1$ un var aplūkot $b_i = y_i - x_2$. Skaitļi b_i apmierina tādas pašas īpašības kā a_i un x_2 ir skaitļu $y_1$un y_3 vai $y_2$un y_3 vidējais aritmētiskais. Jebkurā gadījumā $|y_4 - x_2| \neq 653$. Taču tas nozīmē, ka n nevar būt 4, pretruna.

Tātad, ja $k \geq 2$, tad $n \leq 3$. Līdzīgi parāda, ka no $k \geq 3$ izriet, ka $n \leq 2$. Līdz ar to $nk \leq 6$.

To, ka gadījums $nk = 6$ ir iespējams, parāda polinoms

$$P(x) = 653x^2(x^2 - 4) + 2013.$$

Tātad lielākā iespējamā nk vērtība ir 6.

BW1.3. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ – reālo skaitļu kopa) kurām izpildās

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y, \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}.$$

Atrisinājums

Apzīmējam $f(0) = c$. Ievietosim konkrētas mainīgo vērtības dotajā vienādībā:

- $x = 0, y = 0$, tad $f(0) + f(-c) = f(0)$ jeb $f(-c) = 0$;
- $x = 0, y = -c$, tad $f(-c) + f(-c) = f(c - c^2) - c$ jeb $f(c - c^2) = c$;
- $x = -c, y = -c$, tad $f(-c) + f(0) = f(c) - c$ jeb $f(c) = 2c$;
- $x = 0, y = c$, tad $f(c) + f(-c) = f(c^2 - c) + c$ jeb $f(c^2 - c) = c$;
- $x = -c, y = c^2 - c$, tad $f(-c) + f(0) = f(c - c^2) + c^2 - c = c^2$ jeb $c = c^2$ un $c = 0$ vai $c = 1$.

Apskatām gadījumu, kad $c = 0$. Apzīmē $f(-1) = d + 1$. Ievietosim šādas mainīgo vērtības dotajā vienādībā:

- $x = 0$, tad $f(y) + f(0) = f(-y) + y$ jeb $y - f(y) = -f(-y)$ visiem $y \in \mathbb{R}$;
- $y = 0$, tad $f(0) + f(-f(x)) = f(0)$ jeb $f(-f(x)) = 0$ visiem $x \in \mathbb{R}$;
- $x = -1$, tad $f(-f(y) + y) + f\big(-f(-1)\big) = f(y(d + 1) - y) + y$ jeb $f(dy) = -y + f(-f(-y)) = -y$ visiem $y \in \mathbb{R}$.

No pēdējās vienādības (ņemot $y = -x$) iegūstam, ka visiem reāliem x izpildās $f(x) = f(-f(dx)) = 0$. Taču šī funkcija neapmierina doto vienādību. Tāpēc $c = 0$ neder.

Apskatām gadījumu, kad $c = 1$. Dotajā vienādībā ievietojam $x = 0$ un iegūstam

$$f(y) + f(-c) = f(0) + y,$$

no kā izriet $f(y) = y + 1$ visiem reāliem skaitļiem y. Pārbaudot redzams, ka šī funkcija apmierina doto vienādību.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai funkcija $f(x) = x + 1$.

BW1.4. Pierādīt, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x, y, z izpildās nevienādība
$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{y^2+x^2}\geq\frac{x+y+z}{2}.$$

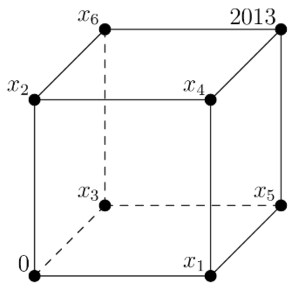
Atrisinājums

Nevienādība ir simetriska pret mainīgajiem, tāpēc varam pieņemt, ka $x \leq y \leq z$. Tādā gadījumā $x^3 \leq y^3 \leq z^3$ un $\frac{1}{y^2+z^2} \leq \frac{1}{x^2+z^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$.

Izmantosim sakārtojuma nevienādību (skat. teorijas materiālu). No tās izriet, ka ir spēkā nevienādības:
$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{y^2+x^2}\geq\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}+\frac{x^3}{y^2+x^2}$$
un
$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{y^2+x^2}\geq\frac{z^3}{y^2+z^2}+\frac{x^3}{z^2+x^2}+\frac{y^3}{y^2+x^2}.$$
Saskaitot abas iegūtas nevienādības un dalot ar 2, iegūstam
$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{y^2+x^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+x^2}+\frac{x^3+y^3}{y^2+x^2}\right).$$
Vēl jo vairāk, no sakārtojuma nevienādības izriet
$$x^3+y^3\geq xy^2+x^2y;$$
$$2x^3+2y^3\geq(x^2+y^2)(x+y);$$
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\geq\frac{x+y}{2}.$$
Pielietojot šo nevienādību iepriekš iegūtajai nevienādībai, iegūstam prasīto
$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{y^2+x^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x+y+z}{2}.$$

BW1.5. Kuba divās pretējās virsotnēs ierakstīti skaitļi 0 un 2013. Pārējās 6 kuba virsotnēs jāieraksta kaut kādi reāli skaitļi. Kad tas ir izdarīts, uz katras kuba šķautnes uzraksta šīs šķautnes galapunktos esošo skaitļu starpību. Kādi skaitļi jāieraksta kuba virsotnēs, lai uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa būs vismazākā?

1. risinājums. Izmantosim faktu, ka funkcija $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ savu minimumu sasniedz pie $x=\frac{a+b+c}{3}$. Sauksim divas kuba virsotnes par blakusvirsotnēm, ja tās ir savienotas ar šķautni. Ja summa S ir minimāla, tad skaitļi $x_1, \ldots, x_6$ (skat. 107. att.) ir tādi, ka jebkurš no tiem ir blakusesošajās virsotnēs ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais (pretējā gadījumā S varētu samazināt). Iegūstam sešas vienādības:
$$x_1=\frac{x_4+x_5+0}{3};$$
$$x_2=\frac{x_4+x_6+0}{3};$$
$$x_3=\frac{x_5+x_6+0}{3};$$
$$x_4=\frac{x_1+x_2+2013}{3};$$
$$x_5=\frac{x_1+x_3+2013}{3};$$
$$x_6=\frac{x_2+x_3+2013}{3}.$$
Atrisinot šo sistēmu, iegūstam atbildi: $x_1=x_2=x_3=\frac{2\cdot 2013}{5}$, $x_4=x_5=x_6=\frac{3\cdot 2013}{5}$.



107. att.

2. risinājums. Apzīmējam kuba 6 virsotnes ar $x_1,\ x_2, \dots, x_6$ (skat. 107. att.). Uzrakstām uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summu:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_4-x_1)^2+(x_4-x_2)^2+(x_5-x_1)^2+(x_5-x_3)^2+(x_6-x_2)^2+$$
$$+(x_6-x_3)^2+(2013-x_4)^2+(2013-x_5)^2+(2013-x_6)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{2}x_1^2+(x_4-x_1)^2+\frac{1}{2}(2013-x_4)^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_1^2+(x_5-x_1)^2+\frac{1}{2}(2013-x_5)^2\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}x_2^2+(x_4-x_2)^2+\frac{1}{2}(2013-x_4)^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_2^2+(x_6-x_2)^2+\frac{1}{2}(2013-x_6)^2\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}x_3^2+(x_5-x_3)^2+\frac{1}{2}(2013-x_5)^2\right)+\left(\frac{1}{2}\,x_3^2+(x_6-x_3)^2+\frac{1}{2}(2013-x_6)^2\right).$$

Apskatām izteiksmi

$$\frac{1}{2}x_1^2+(x_4-x_1)^2+\frac{1}{2}(2013-x_4)^2=$$
$$=\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+(x_4-x_1)^2+\left(\frac{2013\ -\ x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{2013\ -\ x_4}{2}\right)^2$$

un ievērojam, ka

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)+\left(\frac{x_1}{2}\right)+(x_4-x_1)+\left(\frac{2013\ -\ x_4}{2}\right)+\left(\frac{2013\ -\ x_4}{2}\right)=2013.$$

Ja piecu skaitļu summa ir fiksēta, tad to kvadrātu summa ir vismazākā tad, ja visi pieci skaitļi ir vienādi. Līdz ar to iegūstam vienādību

$$\frac{x_1}{2}=x_4-x_1=\frac{2013-x_4}{2},$$

no kurienes izriet $x_1=\frac{2\cdot 2013}{5}$ un $x_4=\frac{3\cdot 2013}{5}$. Pārējās mainīgo vērtības atrod līdzīgi. Tātad, lai uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa būtu vismazākā, pārējās 6 kuba virsotnēs jāieraksta skaitļi $x_1=x_2=x_3=\frac{2\cdot 2013}{5}$, $x_4=x_5=x_6=\frac{3\cdot 2013}{5}$.

Kombinatorika

BW1.6. Ziemassvētku vecītim ir vismaz *n* dāvanas, kas paredzētas *n* bērniem. Zināms, ka katram $i\in\{1,2,\dots,n\}$ *i*-tais bērns uzskata $x_i>0$ no tām par labām dāvanām. Pieņemsim, ka

$$\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\le 1.$$

Pierādīt, ka Ziemassvētku vecītis var iedot katram bērnam pa dāvanai tā, ka katrs bērns saņem dāvanu, ko viņš uzskata par labu!

Atrisinājums

Tā kā bērnu numerācijai nav nozīmes, varam pieņemt, ka

$$1\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n.$$

Apskatīsim šādu dāvanu sadales procedūru. Vispirms 1. bērns izvēlas dāvanu, kas viņam liekas laba, tad 2. bērns no atlikušajām dāvanām izvēlas kādu dāvanu, kuru viņš uzskata par labu utt., līdz vai nu visas dāvanas ir sadalītas tā, ka katrs bērns ir ieguvis dāvanu, kuru uzskata par labu, vai arī kādam bērnam ir nācies ņemt dāvanu, kas viņam nepatīk.

Pieņemsim, ka šāda situācija (kad bērnam jāņem dāvana, kas nepatīk) notiek ar k-to bērnu, kur $1 \leq k \leq n$. Tā kā 1. bērnam patīk vismaz viena no Ziemassvētku vecīša dāvanām, tad $k \geq 2$. Turklāt, kad k-tajam bērnam jāizdara izvēle, tikai $k-1$ dāvana jau ir izdalīta, tātad $x_k \leq k-1$. Līdz ar to

$$\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k} \geq \underbrace{\frac{1}{k-1}+\ldots+\frac{1}{k-1}}_{k\text{ saskaitāmie}}=\frac{k}{k-1}>1,$$

kas ir pretrunā dotajam. Tādējādi aprakstītā procedūra ļauj katram bērnam saņemt dāvanu, kuru viņš uzskata par labu.

BW1.7. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli: katrā gājienā spēlētājs izvēlas uz tāfeles esošā skaitļa n dalītāju m, kur $1<m<n$, un aizstāj n ar $n-m$. Spēlētāji gājienus izdara pārmaiņus, A izdara pirmo gājienu. Spēlētājs, kuram nav iespējama gājiena, zaudē spēli. Pie kādiem sākotnējiem skaitļiem spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums

Vispirms ievērosim, ka dotam skaitlim n tieši vienam spēlētājam ir uzvaroša stratēģija. Ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim, ka spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija, ja n ir nepāra skaitlis.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad spēlētājs A nevar izdarīt gājienu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka n ir nepāra un B ir uzvaroša stratēģija visiem nepāra skaitļiem, kas mazāki nekā n.

Induktīvā pāreja. Ja spēlētājs A nevar izdarīt gājienu, B uzvar. Pretējā gadījumā, A izvēlas dalītāju m. Tā kā n ir nepāra, tad $m \leq \frac{n}{3}$, no kā izriet, ka $m<n-m$ un $n-m$ dalās ar m. Tad B var izvēlēties skaitli m (un izdarīt gājienu) un aizstāt uz tāfeles uzrakstīto skaitli $n-m$ ar $n-2m$. Šis skaitlis ir nepāra un mazāks nekā n, tāpēc induktīvā pāreja ir pamatota.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad n ir pāra skaitlis, bet ne divnieka pakāpe. Tad n jābūt nepāra dalītājam, lielākam nekā 1. Tad spēlētājs A var izvēlēties nepāra dalītāju un uz tāfeles uzrakstīt nepāra skaitli. Iegūta situācija, kad uz tāfeles uzrakstīts nepāra skaitlis un pirmais gājienu veic B. Tātad uzvaroša stratēģija ir otrajam spēlētājam, šajā gadījumā A.

Pieņemsim, ka $n=2^k$. Ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim apgalvojumu: ja k ir nepāra, tad spēlētājam B ir uzvarošā stratēģija, bet, ja k ir pāra, tad uzvarošā stratēģija ir spēlētājam A.

Indukcijas bāze. Ja $k=1$, tad uzvar B, jo A nevar izdarīt pat pirmo gājienu. Ja $k=2$, tad A skaitli 4 var aizstāt ar 2 un B zaudē. *Induktīvo pāreju* sadalīsim divās daļās:

- Pieņemsim, ka A ir uzvaroša stratēģija skaitlim 2^k un k ir pāra skaitlis. Pamatosim, ka B ir uzvarošā stratēģija skaitlim $n=2^{k+1}$. Spēlētājam A ir jāizvēlas skaitļa 2^{k+1} dalītājs, kas ir formā 2^l, $l=1,2,\ldots,k$. Ja A izvēlas 2^k, tad uz tāfeles paliek skaitlis $n-2^k=2^k$ un, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, B ir uzvarošā stratēģija. Ja A izvēlas mazāku dalītāju, tad uz tāfeles paliek skaitlis, kas nav divnieka pakāpe, jo $2^k<n-2^l<n=2^{k+1}$. Šajā gadījumā jau pierādījām, ka spēlētājam, kurš gājienu izdara pirmais (šajā gadījumā B), ir uzvarošā stratēģija.
- Pieņemsim, ka B ir uzvaroša stratēģija skaitlim 2^k un k ir nepāra skaitlis. Parādīsim, ka tad spēlētājam A ir uzvaroša stratēģija skaitlim $n=2^{k+1}$. Spēlētājs A var izvēlēties dalītāju 2^k, tad uz tāfeles paliek skaitlis 2^k. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, otrajam spēlētājam (šajā gadījumā A) ir uzvaroša stratēģija.

Līdz ar to pamatots, ka B ir uzvaroša stratēģija tad un tikai tad, ja sākotnējais skaitlis ir nepāra vai formā $2 \cdot 4^l$, kur l ir vesels nenegatīvs skaitlis.

BW1.8. Saunā ir n istabas, katrai no kurām ir neierobežota ietilpība. Nevienā istabā nevar vienlaikus būt vīrietis un sieviete. Vīrieši grib būt vienā istabā tikai ar vīriešiem, ar kuriem viņi nav savstarpēji pazīstami, un sievietes – tikai ar sievietēm, ar kurām viņas ir pazīstamas. Noteikt lielāko k, kuram k laulāti pāri var vienlaikus apmeklēt saunu, ja zināms, ka divi vīrieši pazīst viens otru tad un tikai tad, ja viņu sievas pazīst viena otru!

Atrisinājums

Vispirms ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim, ka $n-1$ pāris var vienlaicīgi apmeklēt saunu.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $n-1=0$ un apgalvojums ir patiess. Ja $n=2$, tad ir $n-1=1$ pāris un vīrietis no šī pāra var doties uz vienu telpu, bet sieviete – uz otru telpu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $n-2$ pāri ir izvietoti $n-1$ istabās vajadzīgajā veidā.

Induktīvā pāreja. Apskatām vēl vienu laulāto pāri. Ar l apzīmējam to laulāto pāru skaitu, ko šis jaunpienākušais pāris pazīst, un ar m apzīmējam istabu skaitu, kuras ir aizņēmuši vīrieši.

Ja $m>l$, tad ir tāda istaba ar vīriešiem, kurus jaunpienākušais vīrietis nepazīst. Tādā gadījumā viņš var iet šajā istabā, bet viņa sieva doties uz tukšo (n-to) telpu.

Ja $m \leq l$, tad $n-2-l<n-1-m$. Tātad ir $n-2-l$ sievietes, kuras jaunpienākusī sieviete nepazīst un $n-1-m$ telpas, kurās ir sievietes (varbūt kāda no tām ir tukša). Līdz ar to ir telpa, kurā esošās sievietes pazīst jaunpienākušo sievieti, tātad viņa var doties uz šo telpu. Savukārt jaunpienākušais vīrietis var doties uz tukšo (n-to) telpu. Induktīvā pāreja pamatota.

Atliek vien parādīt, ka vairāk pāru nevar vienlaicīgi apmeklēt saunu. Ja ir n laulāto pāri, kas visi savā starpā ir nepazīstami, tad sievietes ir jāizvieto katra savā istabā, un līdz ar to nepaliek neviena brīva istaba vīriešiem.

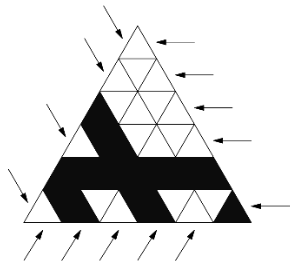
BW1.9. Valstī ir 2014 lidostas un nekādas trīs no tām nav uz vienas taisnes. Divas lidostas savieno tiešs reiss tad un tikai tad, ja taisne, kas savieno šīs divas lidostas, sadala valsti divās daļās, katrā no kurām ir 1006 lidostas. Pierādīt, ka nav divu lidostu ar īpašību, ka no pirmās var aizlidot uz otro, apmeklējot katru no 2014 lidostām tieši vienu reizi!

Atrisinājums

Apzīmēsim katru lidostu ar punktu plaknē. Katrai lidostai, kas ir virsotne šo punktu izliektajam apvalkam, ir tikai viens tiešais reiss (ja rotē taisni, kas iet caur šādas lidostas atbilstošo punktu, tad abās pusplaknēs esošo punktu skaits mainās monotoni). Ja lidostai ir tikai viens tiešais reiss, tā var būt tikai vai nu sākumpunkts, vai beigu punkts maršrutam, kas ved cauri visām 2014 lidostām, katru apmeklējot tieši vienu reizi. Tā kā izliektais apvalks satur vismaz 3 virsotnes (jo lidostas neatrodas uz vienas taisnes), tad ir vismaz trīs lidostas, kurām ir tikai viens tiešais reiss. Tas nozīmē, ka šāds maršruts nav iespējams. Līdz ar to nav divu lidostu ar uzdevumā prasīto īpašību.

BW1.10. Balts vienādmalu trijstūris ir sadalīts n^2 vienādos mazākos trijstūros, izmantojot taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Par trijstūru rindu nosauksim visu to trijstūru kopu, kas atrodas starp divām blakusesošām paralēlām taisnēm, kas veido trijstūru režģi. Viens stūrī esošs trijstūris arī tiek uzskatīts par trijstūru rindu.

Mēs gribam nokrāsot visus trijstūrus melnus ar šādu darbību virkni: izvēlamies trijstūru rindu, kas satur vismaz vienu baltu trijstūri un pārkrāsojam visus šīs rindas trijstūrus melnus (piemērs ar iespējamu situāciju pēc četriem gājieniem pie $n=6$ parādīts 108. att.; bultiņas parāda iespējamos variantus nākamajam gājienam). Atrast mazāko un lielāko iespējamo darbību skaitu, pēc kura visi trijstūri būs melni!



108. att.

Atrisinājums

Mazākais iespējamais šādu darbību skaits ir n un lielākais iespējamais darbību skaits ir $3n-2$. Ja visas darbības tiek izpildītas trijstūru rindām, kas ir paralēlas vienai trijstūra malai, tad spēle beigsies pēc n darbībām. Ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim, ka ar mazāku darbību skaitu nepietiek.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad vienu trijstūri var nokrāsot ar vienu gājienu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka pie $n=k$ ir vajadzīgas vismaz k darbības.

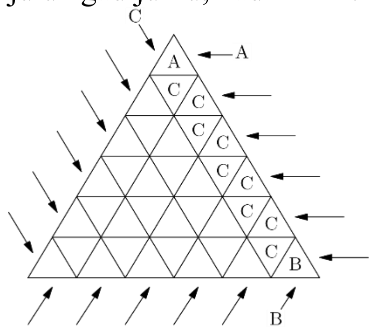
Induktīvā pāreja. Pie $n=k+1$ būs tāda darbība, kas nokrāso apakšējo labējo stūra trijstūri. Var uzskatīt, ka tas tiek izdarīts, nokrāsojot visus apakšējās rindas trijstūrus (tas var tikai palielināt melno trijstūru skaitu). Darbību secība nav svarīga, tāpēc šo darbību var izdarīt pirmo, pēc kuras paliek balts trijstūris, kam $n=k$, un vēl vismaz k darbības ir nepieciešamas.

Tagad parādīsim, ka ir iespējams izdarīt $3n-2$ darbības.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad vienu trijstūri var nokrāsot ar vienu gājienu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vajadzīgais pamatots pie $n=k$.

Induktīvā pāreja. Pie $n=k+1$ sāk ar trim operācijām A, B un C (skat. 109. att.), nokrāsojot abus labējos stūrus un tad visus trijstūrus rindā, kas abus šos stūra trijstūrus satur. Pēc šīm trim darbībām esam reducējuši situāciju uz gadījumu, kad $n=k$.



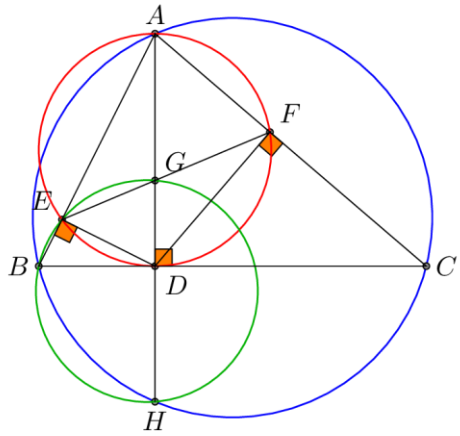
109. att.

Visbeidzot parādīsim, ka nevar izdarīt vairāk kā $3n-2$ darbības. Ja tiek nokrāsotas visas n taisnes, kas ir paralēlas vienai trijstūra malai, tad viss trijstūris ir melns. Tādējādi darbību skaits, kas tiek izdarīts pirms beidzamās darbības, nevar būt lielāks kā $3(n-1)$, līdz ar to kopā nevar izdarīt vairāk kā $3n-2$ darbības.

Ģeometrija

BW1.11. Dots šaurleņķa trijstūris *ABC* ar $AC > AB$. Ar *D* apzīmēsim *A* projekciju uz *BC* un ar *E* un *F* apzīmēsim *D* projekcijas attiecīgi uz *AB* un *AC*. Ar *G* apzīmēsim taišņu *AD* un *EF* krustpunktu. Ar *H* apzīmēsim otru taisnes *AD* krustpunktu ar trijstūra *ABC* apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka $AG \cdot AH = AD^2$!

1. risinājums. Tā kā $\sphericalangle AED$ un $\sphericalangle AFD$ ir taisni, ap četrstūri *AFDE* var apvilkt riņķa līniju (skat. 110. att.). Tāpēc $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ADF$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *AF*. Nogrieznis *DF* ir taisnleņķa trijstūra *ADC* augstums, tātad $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ACD$, savukārt $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AHB$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz viena loka *AB*. Tādējādi $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AHB$ un ap četrstūri *BEGH* var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle BHG + \sphericalangle BEG = \sphericalangle AEF + \sphericalangle BEG = 180°$. Saskaņā ar sekanšu īpašību $AE \cdot AB = AG \cdot AH$.



110. att.

No otras puses, tā kā *DE* ir taisnleņķa trijstūra *ADB* augstums, tad no Eiklīda teorēmas (vai no līdzīgiem trijstūriem) izriet $AE \cdot AB = AD^2$. Secinām, ka $AG \cdot AH = AD^2$, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. No līdzīgiem taisnleņķa trijstūriem iegūstam (skat. 111. att.):

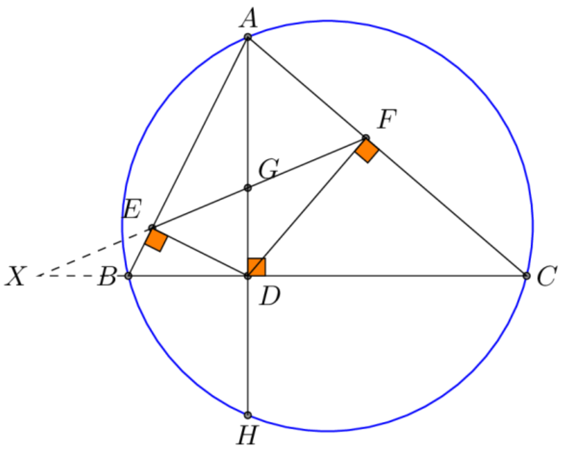
- $\Delta BED \sim \Delta BDA \Rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{ED}{AD}$;
- $\Delta AED \sim \Delta ADB \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{BD}$.

Tad

$$\frac{BE}{AE} = \frac{\frac{BD}{AD}ED}{\frac{AD}{BD}ED} = \left(\frac{BD}{AD}\right)^2$$

un analoģiski

$$\frac{CF}{AF} = \left(\frac{CD}{AD}\right)^2.$$



111. att.

Tā kā $AC > BC$, tad taisnes *BC* un *EF* krustojas punktā *X* uz nogriežņa *BC* pagarinājuma aiz punkta *B*. No Menelāja teorēmas (skat. teorijas materiālu) izriet vienādības

- $BX \cdot CF \cdot AE = BE \cdot CX \cdot AF$ (no ΔABC));
- $CX \cdot DG \cdot AF = CF \cdot DX \cdot AG$ (no ΔCDA);
- $DX \cdot BE \cdot AG = DG \cdot BX \cdot AE$ (no ΔDBA).

No šīm vienādībām savukārt iegūstam vienādības:

$$BX\frac{CF}{AF} = CX\frac{BE}{AE},\quad CX\frac{DG}{AG} = DX\frac{CF}{AF},\quad DX\frac{BE}{AE} = BX\frac{DG}{AG}.$$

Saskaitot iegūtās vienādības un pārgrupējot saskaitāmos, iegūstam

$$BC\frac{DG}{AG} = BD\frac{CF}{AF} + CD\frac{BE}{AE} = BD \cdot \left(\frac{CD}{AD}\right)^2 + CD \cdot \left(\frac{BD}{AD}\right)^2 = \frac{BD \cdot CD \cdot (CD + BD)}{AD^2}.$$

Tā kā $CD + BD = BC$, secinām, ka

$$BC\frac{DG}{AG} = BC\frac{BD\cdot CD}{AD^2} \quad \text{jeb} \quad \frac{DG}{AG} = \frac{BD\cdot CD}{AD^2}.$$

Izmantojot krustisko hordu īpašību, pārveidojam iegūtās vienādības labo pusi:

$$\frac{DG}{AG} = \frac{BD \cdot CD}{AD^2} = \frac{AD \cdot HD}{AD^2} = \frac{HD}{AD}.$$

Secinām, ka

$$\frac{DG}{AG} = \frac{HD}{AD}.$$

Līdz ar to

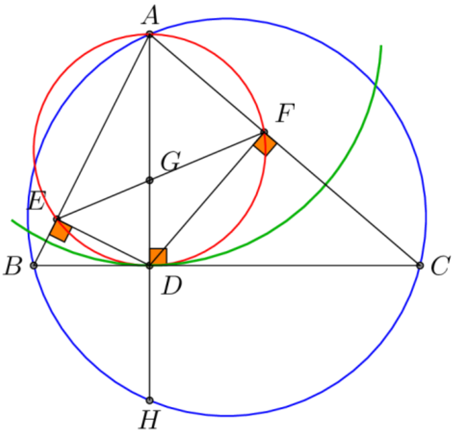
$$\frac{AD}{AG} = \frac{AG + DG}{AG} = 1 + \frac{DG}{AG} = 1 + \frac{HD}{AD} = \frac{AD + HD}{AD} = \frac{AH}{AD}$$

jeb

$$AG \cdot AH = AD^2,$$

kas arī bija jāpierāda.

3. risinājums. Inversija riņķī ar centru *A* un rādiusu *AD* taisni *BC* attēlo par riņķa līniju ar diametru *AD*, kas iet caur punktiem *E* un *F* (skat. 112. att.). Tātad punkts *B* tiek attēlots par *E* un punkts *C* tiek attēlots par *F*, līdz ar to trijstūrim *ABC* apvilktā riņķa līnija tiek attēlota par taisni *EF*. No tā izriet, ka punkts *H* šajā inversijā tiek attēlots par *G*, no kā arī izriet prasītais.



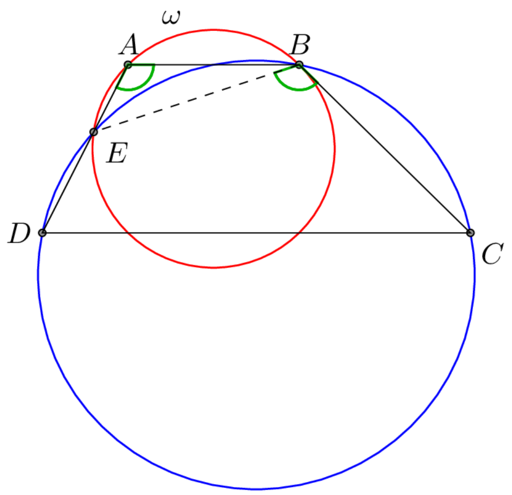
112. att.

BW1.12. Trapece *ABCD* ar pamatiem *AB* un *CD* ir tāda, ka trijstūrim *BCD* apvilktā riņķa līnija krusto taisni *AD* punktā *E*, kas atšķiras no *A* un *D*. Pierādīt, ka trijstūrim *ABE* apvilktā riņķa līnija ω pieskaras taisnei *BC*!

Atrisinājums

Šķirojam gadījumus atkarībā no punkta *E* novietojuma.

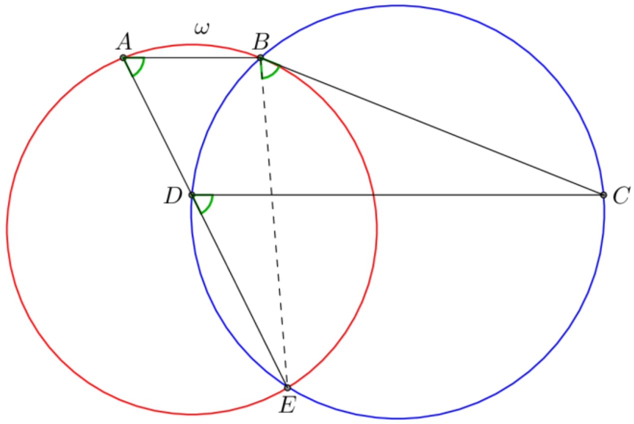
1. Punkts *E* atrodas uz nogriežņa *AD* (skat. 113. att.).



113. att.

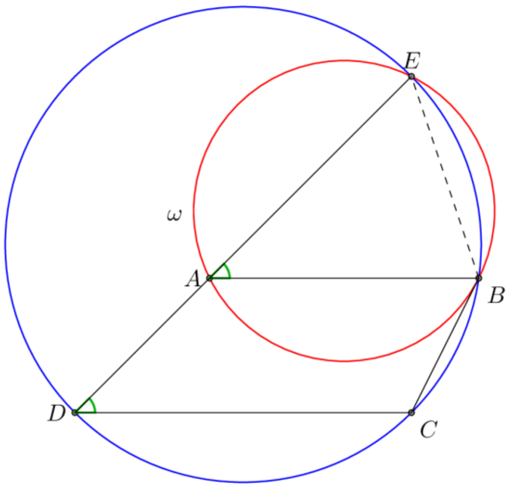
Tad $\sphericalangle BAE = 180° - \sphericalangle ADC$ kā trapeces malas pieleņķis un $\sphericalangle CBE = 180° - \sphericalangle ADC$ kā apvilkta četrstūra pretējie leņķi. Tā kā $\sphericalangle BAE$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loka *EB*, un $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CBE$, tad *BC* ir *ω* pieskare, jo $\sphericalangle CBE$ ir hordas-pieskares leņķis.

2. Punkts *D* atrodas uz nogriežņa *AE* (skat. 114. att.). Tad izpildās vienādības $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CDE = \sphericalangle BAE$, kas pierāda vajadzīgo.



114. att.

3. Punkts *A* atrodas uz nogriežņa *DE* (skat. 115. att.). Tad $180° - \sphericalangle CBE = \sphericalangle CDE = \sphericalangle BAE$, no kā izriet vajadzīgais.



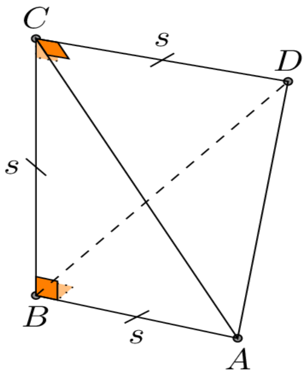
115. att.

BW1.13. Visas tetraedra skaldnes ir taisnleņķa trijstūri. Ir zināms, ka trim no tetraedra malām ir vienāds garums s. Aprēķināt tetraedra tilpumu!

Atrisinājums

Šīs trīs vienādās malas nevar piederēt vienai un tai pašai skaldnei, pretējā gadījumā atbilstošais trijstūris būtu vienādmalu, nevis taisnleņķa. Tās arī nevar visas iziet no vienas un tās pašas virsotnes, pretējā gadījumā šai virsotnei pretī esošā skaldne būtu vienādmalu trijstūris.

Tātad tetraedra virsotnes var apzīmēt ar A, B, C un D tā, ka $AB = BC = CD = s$ (skat. 116. att.).



116. att.

Tādā gadījumā $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 90°$ un no Pitagora teorēmas izriet, ka $AC = BD = s\sqrt{2}$.

Apskatām gadījumu, kad $\sphericalangle ADC$ ir taisns. Tad no Pitagora teorēmas trijstūrī ACD izriet, ka $AD = s$. No apgrieztās Pitagora teorēmas trijstūrī ABD izriet, ka $\sphericalangle DAB$ arī ir taisns.

Plaknē ABD atliek punktu C' tā, lai $ABC'D$ būtu kvadrāts (t. i., simetriski punktam A pret taisni BD). Tad $BC' = s$. Punkts C nesakrīt ar C', citādi $ABCD$ būtu kvadrāts, nevis tetraedrs.

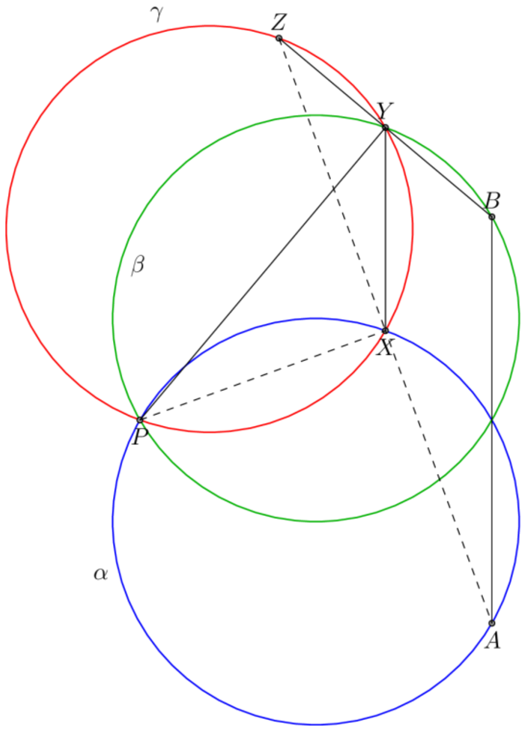
Tā kā $BC \perp AB$ un $BC' \perp AB$, tad taisne AB ir perpendikulāra plaknei BCC'. Analoģiski, AD ir perpendikulāra plaknei DCC'. Taču tad taisne CC' ir perpendikulāra gan taisnei AD, gan taisnei AB, tātad CC' ir perpendikulārs plaknei ABD. Līdz ar to $\sphericalangle CC'B$ ir taisns un nav iespējams, ka $BC = BC' = s$. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums, ka $\sphericalangle ADC$ ir taisns, ir aplams.

Tā kā jau zinām, ka $AC = s\sqrt{2} > s = CD$, tad $\sphericalangle CAD$ arī nevar būt taisns, līdz ar to trijstūra ACD taisnais leņķis ir $\sphericalangle ACD$. No Pitagora teorēmas izriet, ka $AD = s\sqrt{3}$. No apgrieztās Pitagora teorēmas izriet, ka $\sphericalangle ABD$ ir taisns. Līdz ar to AB ir perpendikulārs plaknei BCD un tetraedra tilpums ir

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AB = \frac{AB \cdot BC \cdot CD}{6} = \frac{s^3}{6}.$$

BW1.14. Riņķa līnijas α un β ar vienādu rādiusu krustojas divos punktos, viens no kuriem ir P. Ar A un B apzīmēsim, attiecīgi, punktam P diametrāli pretējos punktus uz riņķa līnijām α un β. Trešā riņķa līnija ar tādu pašu rādiusu iet caur P un krusto α un β attiecīgi punktos X un Y. Pierādīt, ka taisnes XY un AB ir paralēlas!

Atrisinājums
Ar γ apzīmēsim trešo riņķa līniju (skat. 117. att.). Uz γ atliekam punktam *P* diametrāli pretēju punktu *Z*.



117. att.

Tā kā $\sphericalangle AXP = \sphericalangle PXZ = 90°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametriem, tad visi trīs punkti *A*, *X*, *Z* atrodas uz vienas taisnes. Analoģiski iegūst, ka arī punkti *B*, *Y*, *Z* atrodas uz vienas taisnes. Punkts *P* atrodas vienādos attālumos no trijstūra *ABZ* virsotnēm, jo $PA = PB = PZ$ kā vienādo riņķa līniju diametri. Tātad *P* ir Δ*ABZ* apvilktās riņķa līnijas centrs. Tā kā *PX* un *PY* ir perpendikulāri attiecīgi pret malām *AZ* un *BZ*, tad tie ir šo malu vidusperpendikuli. Tātad *X* un *Y* ir attiecīgi malu *AZ* un *BZ* viduspunkti, bet *XY* ir trijstūra *ABZ* viduslīnija. No viduslīnijas īpašības izriet, ka $XY \parallel AB$, kas arī bija jāpierāda.

BW1.15. Četrām riņķa līnijām, kas atrodas vienā plaknē, ir viens un tas pats centrs. Riņķa līniju rādiusi veido stingri augošu aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka nav kvadrāta, kuram katra virsotne atrodas uz citas riņķa līnijas!

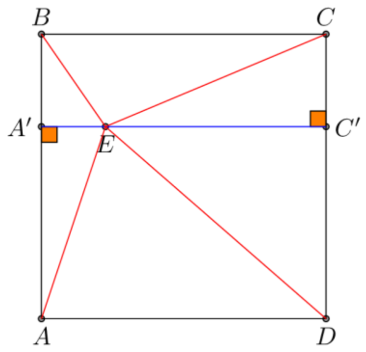
Atrisinājums
Vispirms pierādīsim šādu lemmu.

Lemma. *Ja ABCD ir kvadrāts, tad patvaļīgam punktam E izpildās* $EA^2 + EC^2 = EB^2 + ED^2$.

Lemmas pierādījums. Ar *A'* un *C'* apzīmēsim punkta *E* projekcijas attiecīgi uz malām *AB* un *CD* (skat. 118. att.). Tad, izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam

$$EA^2 + EC^2 = (EA'^2 + AA'^2) + (EC'^2 + CC'^2);$$
$$EB^2 + ED^2 = (EA'^2 + A'B^2) + (EC'^2 + C'D^2).$$

Tā kā $A'B = CC'$ un $AA' = C'D$, tad $EA^2 + EC^2 = EB^2 + ED^2$. Ievērojam, ka *E* var būt jebkurš punkts, tam nav noteikti jāatrodas kvadrāta iekšpusē. Lemma pierādīta.



118. att.

Ar O apzīmējam četru riņķa līniju kopējo centru. Pieņemsim, ka $ABCD$ ir kvadrāts, kura katra virsotne atrodas uz citas riņķa līnijas, turklāt A atrodas uz lielākās riņķa līnijas. Ja r ir mazākās riņķa līnijas rādiuss un d ir aritmētiskās progresijas diference, tad riņķa līniju rādiusi ir $r, r+d$, $r+2d$, $r+3d$, kas vienlaikus ir arī attālumi no punkta O līdz kvadrāta $ABCD$ virsotnēm, turklāt $OA = r+3d$. Apskatām izteiksmi $OA^2 + OC^2 - OB^2 - OD^2$. Šīs izteiksmes mazākā iespējamā vērtība tiek sasniegta pie $OC = r$, tātad

$$OA^2 + OC^2 - OB^2 - OD^2 \geq (r+3d)^2 + r^2 - (r+d)^2 - (r+2d)^2 = 4d^2 > 0,$$

kas ir pretrunā ar pierādīto lemmu. Tātad nav tāda kvadrāta, kura katra virsotne atrastos uz citas riņķa līnijas.

Skaitļu teorija

BW1.16. Naturālu skaitli n sauc par skaistu, ja eksistē naturāls skaitlis k, $1 < k < n$, kuram izpildās vienādība

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \ldots + n.$$

Vai eksistē skaists skaitlis N, kuram izpildās nevienādības

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4\ ?$$

Atrisinājums

Apskatām skaistu skaitli n. Tad eksistē tāds naturāls skaitlis x, $1 < x < n$, kas apmierina vienādību

$$\sum_{i=1}^{x-1} i = \sum_{i=x+1}^{n} i,$$

no kurienes

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{x-1} i + x + \sum_{i=x+1}^{n} i = x + 2\sum_{i=1}^{x-1} i = x + 2 \cdot \frac{(x-1)x}{2} = x^2.$$

Tā kā

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

tad secinām, ka izpildās vienādība

$$x^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tā kā vienādības kreisajā pusē ir x^2 un skaitļi n un $n+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra skaitļa kvadrāts. Apskatām nevienādības

$$(2013^{2013})^2 < n < (2013^{2013})^2 + 4 \cdot 2013^{2013} = (2013^{2013}+2)^2 - 4.$$

Vienīgais vesela skaitļa kvadrāts šajā intervālā ir $(2013^{2013}+1)^2$, kas ir pāra skaitlis. Tātad ne n, ne $n+1$ nevar būt nepāra skaitļa kvadrāts. Līdz ar to nav neviena skaista skaitļa N, kas apmierinātu dotās nevienādības.

BW1.17. Pieņemsim, ka c un $n > c$ ir naturāli skaitļi. Marijas skolotājs uzraksta uz tāfeles n naturālus skaitļus. Vai ir taisnība, ka visiem n un c Marija var apzīmēt skolotāja uzrakstītos skaitļus ar $a_1, \ldots, a_n$ tā, lai cikliskais reizinājums

$$(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$$

būtu kongruents ar 0 vai ar c pēc moduļa n?

Atrisinājums

Pierādīsim, ka visiem n un c uzrakstītos skaitļus var apzīmēt tā, lai izpildītos prasītais.

Ja starp skolotāja uzrakstītajiem skaitļiem ir divi skaitļi, kas ir kongruenti pēc moduļa n, tad Marija tos var izvēlēties kā pēc kārtas ņemtus skaitļus, panākot, ka cikliskais reizinājums ir kongruents ar 0 pēc moduļa n. Tāpēc tālāk varam uzskatīt, ka visi n uzrakstītie skaitļi ir dažādi pēc moduļa n. Tādā gadījumā starp tiem parādās visi iespējamie atlikumi pēc moduļa n, katrs tieši vienu reizi.

Ja n ir salikts skaitlis, tad eksistē tādi veseli skaitļi k un l, ka $n = kl$ un $2 \leq k \leq l \leq n - 2$. Marija var apzīmēt skaitļus ar a_1, a_2, a_3, a_4 tā, lai $a_1 \equiv k$, $a_2 \equiv 0$, $a_3 \equiv l + 1$ un $a_4 \equiv 1$ (šeit un turpmāk šajā uzdevumā visas kongruences ir pēc moduļa n). Atlikušos skaitļus var apzīmēt patvaļīgā secībā.

Tad pirmais reizinātājs $a_1 - a_2$ būs kongruents ar $k - 0 \equiv k$ un trešais $a_3 - a_4$ reizinātājs būs kongruents ar $(l + 1) - 1 \equiv l$, tātad viss reizinājums būs kongruents ar 0 pēc moduļa n.

Ja n ir pirmskaitlis, tad starp skaitļiem ci, $i = 0,1, \ldots, n - 1$, arī parādās visi iespējamie atlikumi pēc moduļa n. Tad Marija var apzīmēt skolotāja uzrakstītos skaitļus tā, lai $a_i \equiv c(n - i)$ visiem $i = 1, \ldots, n$. Līdz ar to katrs reizinātājs $a_i - a_{i+1}$ ir kongruents ar c pēc moduļa n:

$$a_i - a_{i+1} \equiv c(n - i) - c\big(n - (i + 1)\big) \equiv c.$$

Tas nozīmē, ka to reizinājums ir kongruents ar c^n pēc moduļa n. No Fermā mazās teorēmas izriet, ka $c^n \equiv c$, un Marija ir panākusi vajadzīgo.

BW1.18. Atrast visus veselu skaitļu pārus $(x; y)$, kuriem $y^3 - 1 = x^4 + x^2$!

Atrisinājums

Ja $x = 0$, tad iegūstam vienu dotā vienādojuma atrisinājumu $(x; y) = (0; 1)$. Pierādīsim, ka šis ir vienīgais atrisinājums.

Ja $(x; y)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums, tad atrisinājums ir arī $(-x; y)$, tāpēc varam uzskatīt, ka $x \geq 1$. Pieskaitot abām vienādojuma pusēm 1 un sadalot reizinātājos, iegūstam

$$y^3 = x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Pierādīsim, ka reizinātāji $x^2 + x + 1$ un $x^2 - x + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Pieņemsim pretējo, ka eksistē pirmskaitlis p, ar ko dalās abi šie skaitļi. Tad arī šo skaitļu starpība $2x$ dalās ar p. Tā kā $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ ir nepāra skaitlis, arī p ir nepāra skaitlis, tātad x jādalās ar p. Taču tad $x^2 + x + 1$ nedalās ar p, iegūta pretruna, tātad pieņēmums bija aplams.

Tā kā $x^2 + x + 1$ un $x^2 - x + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi un to reizinājums ir vesela skaitļa kubs, tad abiem šiem skaitļiem jābūt veselu skaitļu kubiem (kas izriet no aritmētikas pamatteorēmas). Tātad eksistē tādi veseli nenegatīvi skaitļi a un b, ka

$$x^2 + x + 1 = a^3 \quad \text{un} \quad x^2 - x + 1 = b^3.$$

Tā kā $x \geq 1$, no pirmās vienādības izriet $a > x^{\frac{2}{3}}$. No otras puses, $b < a$, tāpēc iegūstam

$$x^2 - x + 1 = b^3 \leq (a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 < a^3 - 3a^2 + 3a \leq a^3 - 2a^2,$$

kur pēdējā nevienādība izpildās, kad $2a^2 \leq 3a^2 - 3a$, kas ir spēkā, ja $a \geq 3$. Taču $a = 2$ nav iespējams (jo $x^2 + x + 1$ ir nepāra skaitlis), savukārt $a = 1$ dotu $x = 0$.

No otras puses,

$$a^3 - 2a^2 = x^2 + x + 1 - 2a^2 < x^2 + x + 1 - 2x^{\frac{4}{3}}.$$

Esam pamatojuši, ka

$$x^2 - x + 1 < x^2 + x + 1 - 2x^{\frac{4}{3}},$$

no kurienes izriet, ka $2x^{\frac{4}{3}} < 2x$, taču šī nevienādība ir aplama visiem $x \geq 1$. Iegūta pretruna, tātad $(x; y) = (0; 1)$ ir vienīgais atrisinājums.
Piezīme. Izteiksmi $x^4 + x^2 + 1$ sadalīt reizinātājos var arī apzīmējot $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ un uzrakstot dažas no $p(x)$ vērtībām: $p(0) = 1 \cdot 1$, $p(1) = 3 \cdot 1$, $p(2) = 7 \cdot 3$, kas liek domāt, ka polinomam p ir kvadrātisks reizinātājs $q(x)$ (skaidrs, ka nevar būt lineāru reizinātāju). Tad var saskatīt, ka $q(x) = x^2 + x + 1$ un izmantot polinomu dalīšanu, lai atrastu otru reizinātāju. Visbeidzot, var izmantot nenoteikto koeficientu metodi un rakstīt

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

pēc tam salīdzināt koeficientus pie mainīgā pakāpēm abās vienādības pusēs.
Ir labi zināms šāds apgalvojums: ja s un t ir savstarpēji pirmskaitļi, kuru reizinājums ir vesela skaitļa k-tā pakāpe, tad gan s, gan t ir veselu skaitļu k-tās pakāpes. Pierādījuma būtība ir šāda: uzraksta visus trīs skaitļus kanoniskajā sadalījumā pirmreizinātājos, t. i.,

$$s = p_1^{\alpha_1} \dots p_h^{\alpha_h}, t = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}, u = r_1^{\gamma_1} \dots r_m^{\gamma_m},$$

kur apzīmē $u = st$. Skaitļa u sadalījumā pirmreizinātājos katrs kāpinātājs γ_i dalās ar k. Taču s un t ir savstarpēji pirmskaitļi, tātad visi pirmskaitļi $p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_l$ ir dažādi, $m = h + l$ un skaitļi α_i un β_i arī dalās ar k, kas pierāda apgalvojumu.

BW1.19. Pieņemsim, ka a_0 ir naturāls skaitlis un $a_n = 5a_{n-1} + 4$ visiem $n \geq 1$. Vai a_0 var izvēlēties tā, lai a_{54} dalītos ar 2013?

1. risinājums. Apzīmējam $x_n = \frac{a_n}{5^n}$. Tad $x_0 = a_0$ un

$$5^n x_n = a_n = 5a_{n-1} + 4 = 5^n x_{n-1} + 4,$$
$$x_n = x_{n-1} + \frac{4}{5^n}.$$

Tad

$$x_n = x_{n-1} + \frac{4}{5^n} = x_{n-2} + \frac{4}{5^{n-1}} + \frac{4}{5^n} = \dots = x_0 + \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{4}{5^n}\right) =$$
$$= a_0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 - \frac{1}{5}} = a_0 + 1 - \frac{1}{5^n}.$$

Tātad $a_n = 5^n x_n = 5^n(a_0 + 1) - 1$.
Ievērojam, ka 2013 un 5^n ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad eksistē tāds vesels skaitlis b, $0 < b < 2013$, kas arī ir savstarpējs pirmskaitlis ar 2013 un kas apmierina $5^{54} = 2013c + b$.
Lai a_{54} dalītos ar 2013, pietiekami atrast tādu veselu y, ka $(a_0 + 1)b - 1 = 2013y$. Taču tas ir lineārs Diofanta vienādojums (skat. teorijas materiālu) pret y un $a_0 + 1$; tam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, starp tiem arī tādi, ka $a_0 + 1 \geq 2$.

2. risinājums (balstās uz Vācijas komandas risinājumu). Definējam funkciju $f: \{0,1,\dots,2012\} \to \{0,1,\dots,2012\}$ tā, lai $f(x)$ būtu skaitļa $5x + 4$ atlikums, dalot to ar 2013. Tad $f(x) \equiv 5x + 4 \ (mod\ 2013)$ un f ir bijekcija. Šai funkcijai eksistē inversā funkcija g (var pārliecināties, ka $g(x)$ ir skaitļa $1208x + 1207$ dalīšanas atlikums, dalot ar 2013: viegli pārbaudīt, ka tad visiem $x \in \{0,1,\dots,2012\}$ izpildās $f(g(x)) = g(f(x)) = x$).
Apzīmējam

$$f^0(x) = x, \qquad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)),$$

citiem vārdiem, $f^n(x)$ ir funkcijas f n-tā iterācija punktā x. Ja izvēlas $a_0 = g^{54}(0)$, tad $a_0 > 0$ un

$$a_{54} \equiv f^{54}(a_0) \equiv f^{54}(g^{54}(a_0)) \equiv 0 \ (mod\ 2013).$$

BW1.20. Atrast visus polinomus *P* ar nenegatīviem veseliem koeficientiem un īpašību, ka visiem pirmskaitļiem p un naturāliem skaitļiem n eksistē pirmskaitlis q un naturāls skaitlis m, kuriem izpildās $P(p^n) = q^m$.

Atrisinājums

Ievērojam, ka starp konstantajiem polinomiem vienīgie atrisinājumi ir formā $P(t) = q^m$, kur q ir pirmskaitlis un m ir naturāls skaitlis.

Pieņemsim, ka $P(t) = a_k t^k + \ldots + a_0$, kur $a_k \neq 0$ un $a_0, a_1, \ldots, a_k$ ir nenegatīvi veseli skaitļi, apmierina uzdevuma prasības.

Apskatām gadījumu, kad $a_0 \neq 1$. Tā kā a_0 ir vesels nenegatīvs skaitlis, atšķirīgs no 1, tad eksistē tāds pirmskaitlis p, ka a_0 dalās ar p un līdz ar to $P(p^n)$ dalās ar p visiem naturāliem skaitļiem *n*. No otras puses, $P(p^n) = q^m$, kur q ir pirmskaitlis un m naturāls skaitlis, saskaņā ar doto. Līdz ar to vienīgā iespēja ir $q = p$, tātad $P(p^n)$ ir skaitļa *p* pakāpe visiem naturāliem *n*. Ja eksistē tāds indekss *l*, ka $l < k$ un $a_l \neq 0$, tad pietiekami lieliem *n* izpildās

$$(p^n)^k > a_{k-1}(p^n)^{k-1} + \ldots + a_0 > 0,$$

no kā izriet, ka $P(p^n) \not\equiv 0 \ (mod\ p^{nk})$. No otras puses, $P(p^n) > p^{nk}$, turklāt $P(p^n) = p^m$ kāda veselam skaitlim m, atbilstoši mūsu pieņēmumiem. Līdz ar to $m > nk$, taču tad būtu jāizpildās $P(p^n) \equiv 0 \ (mod\ p^{nk})$, pretruna. Tātad šajā gadījumā vienīgā iespēja ir, ka $a_l = 0$ visiem $l = 0,1, \ldots, k-1$ un $P(t) = a_k t^k$. Ievērojam, ka uzdevuma nosacījumi izpildās tad un tikai tad, ja $a_k = 1$.

Apskatām gadījumu, kad $a_0 = 1$. Apzīmējam $Q(t) = P(P(t))$. Tad arī Q, tāpat kā P, apmierina uzdevuma prasības. Tā kā $Q(0) = P(P(0)) = P(a_0) = P(1) > 1$ un Q nav konstants, no iepriekšējā gadījuma izriet, ka $Q(t) = t^r$ kādam naturālam skaitlim *r*. Taču tas ir pretrunā ar nevienādību $Q(0) > 1$. Līdz ar to šajā gadījumā nav tādu polinomu P, kas apmierinātu uzdevuma prasības.

Līdz ar to vienīgie polinomi, kas apmierina uzdevuma prasības, ir $P(t) = t^k$, kur *k* ir naturāls skaitlis, un konstantie polinomi $P(t) = q^m$, kur q ir pirmskaitlis, bet *m* ir naturāls skaitlis.

"Baltic Way 2013" rezultātu apkopojums

Zemāk tabulā dota informācija par starptautisko komandu sacensību matemātikā "Baltic Way 2013" rezultātiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 5 punktus.

	Algebra					Kombinatorika					Ģeometrija					Skaitļu teorija					Kopā
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	
Dānija	1	1	0	5	4	5	5	1	0	3	5	0	4	5	0	2	4	0	5	0	**50**
Igaunija	5	1	0	0	4	5	5	0	4	5	5	5	2	4	1	1	1	2	5	1	**56**
Islande	2	1	0	5	0	0	1	0	0	1	5	5	1	5	2	1	1	0	5	0	**35**
Krievija	5	2	0	5	0	5	5	1	5	2	5	5	5	5	5	5	5	4	5	2	**76**
Latvija	5	1	0	5	0	5	5	1	5	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	2	**77**
Lietuva	5	1	0	5	5	5	5	1	5	5	5	3	3	5	5	0	5	1	5	2	**71**
Norvēģija	5	3	1	1	0	5	5	0	0	0	0	0	3	0	0	2	1	3	5	1	**35**
Polija	5	2	5	5	5	5	5	0	4	4	5	5	5	5	0	2	4	5	5	0	**76**
Somija	4	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	4	4	0	1	2	0	5	0	**23**
Vācija	5	2	1	5	0	5	5	0	5	5	5	3	4	5	0	1	5	4	5	0	**65**
Zviedrija	5	2	0	5	5	5	5	0	0	5	5	5	5	5	0	5	2	0	5	0	**64**

2014./2015. MĀCĪBU GADS

S2. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

9. klase

S2.9.1. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai ir tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

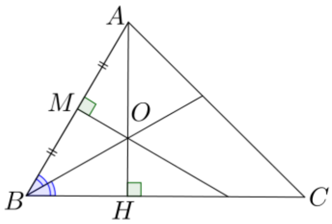
Atrisinājums

Vienas komandas izspēlēto spēļu skaits var būt tikai 0, 1, 2, ... , 9 (desmit dažādas vērtības). Ja visas 10 komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu, tad ir komanda, kas izspēlējusi 9 spēles – tātad spēlējusi ar visām pārējām komandām. Tas nozīmē, ka nav komandas, kura ir izspēlējusi 0 spēles. Tātad nav tāda brīža, kad visas komandas ir izspēlējušas dažādu spēļu skaitu.

S2.9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā O. Aprēķināt $\angle ABC$!

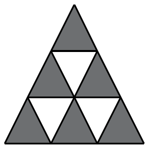
Atrisinājums

Apzīmējam $\angle BAO = \alpha$ (skat. 119. att.). Ievērojam, ka $\Delta AMO = \Delta BMO$ (pēc pazīmes $m\ell m$), jo $BM = MA$ (pēc vidusperpendikula definīcijas), $\angle AMO = \angle BMO = 90°$ un mala MO kopīga. Tad $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. No bisektrises definīcijas izriet, ka $\angle ABC = 2\alpha$. No ΔABH iekšējo leņķu summas iegūstam $\alpha + 2\alpha + 90° = 180°$ jeb $\alpha = 30°$. Tātad $\angle ABC = 2\alpha = 60°$.



119. att.

S2.9.3. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 120. att.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

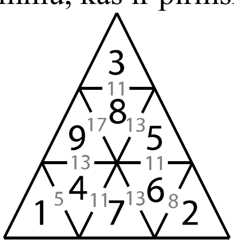


120. att.

Atrisinājums

Pavisam ir 9 summas. Astoņas no šīm summām var būt pirmskaitļi (skat. 121. att.).

Pierādīsim, ka visas 9 summas nevar būt pirmskaitļi. Ja visas summas būtu pirmskaitļi, tad šīs summas būtu nepāra skaitļi (vienīgo pāra pirmskaitli 2 nevar iegūt, saskaitot divus dažādus naturālus skaitļus); tāpēc blakus esošiem skaitļiem būtu jābūt dažādas paritātes skaitļiem. Tātad vienas paritātes skaitļiem jāatrodas baltajos laucinos, bet otras paritātes skaitļiem – pelēkajos laucinos (skat. 120. att.). Tas nav iespējams, jo ir 5 nepāra skaitļi un 4 pāra skaitļi, bet pelēko lauciņu skaits ir 6. Tātad lielākais summu, kas ir pirmskaitļi, skaits ir 8.



121. att.

10. klase

S2.10.1. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi. Kāds ir mazākais skaits dažādu pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties izteiksme $3x(x+2y+1)(7y+1)$?

Atrisinājums

Dotā izteiksme dalās ar 3 neatkarīgi no x un y, jo satur reizinātāju 3.

Parādīsim, ka tā nav trijnieka pakāpe. Izteiksme var būt trijnieka pakāpe tikai divos gadījumos:

- ja $x=1$, tad $x+2y+1=2y+2=2(y+1)$ ir pāra skaitlis, kas dalās ar 2;
- ja x ir trijnieka pakāpe, tad x ir nepāra skaitlis un $x+2y+1$ ir pāra skaitlis, kas dalās arī ar 2.

Tātad dotā izteiksme satur vismaz divus pirmreizinātājus 2 un 3. Vēl jāparāda piemērs, ka izteiksme var saturēt tieši divus dažādus pirmreizinātājus, kas ir pirmskaitļi. Izvēloties $x=24$ un $y=1$, iegūstam vajadzīgo

$$3x(x+2y+1)(7y+1)=3\cdot 24(24+2\cdot 1+1)(7\cdot 1+1)=3\cdot 24\cdot 27\cdot 8=2^6\cdot 3^5.$$

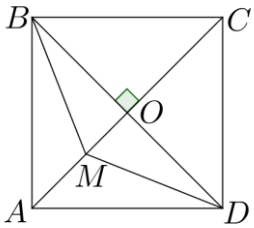
Līdz ar to esam pierādījuši, ka mazākais skaits dažādo pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties dotā izteiksme, ir 2.

S2.10.2. Uz kvadrāta *ABCD* diagonāles *AC* atlikts iekšējs punkts *M*. Pierādīt, ka

$$MA\cdot MC+MB\cdot MD=AB^2\,!$$

Atrisinājums

Apzīmējam $AC=d$ un $OM=x$ (skat. 122. att.). Diagonāle *AC* ir kvadrāta simetrijas ass, tāpēc $BM=MD$.



122. att.

Kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc trijstūrī *MBO* var izmantot Pitagora teorēmu: $MB^2=OB^2+OM^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2$. Tad

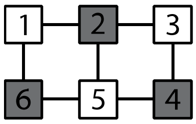
$$MA\cdot MC+MB\cdot MD=(AO-OM)(OC+OM)+MB^2=$$
$$=\left(\frac{d}{2}-x\right)\left(\frac{d}{2}+x\right)+\left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2=$$
$$=\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2=\frac{d^2}{2}.$$

Izmantojot Pitagora teorēmu vienādsānu ΔABC, iegūstam

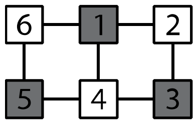
$$AB^2+BC^2=AC^2;$$
$$2AB^2=d^2;$$
$$AB^2=\frac{d^2}{2}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $MA\cdot MC+MB\cdot MD=\frac{d^2}{2}=AB^2$, kas arī bija jāpierāda.

S2.10.3. Kvadrātos ierakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (skat. 123. att.). Vienā gājienā ir atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus, kurus savieno nogrieznis, un pie katra no tiem pieskaitīt vienu un to pašu veselu skaitli (šis skaitlis katrā gājienā var būt cits). Vai, veicot šādus gājienus, var iegūt 124. att. parādīto skaitļu izvietojumu?



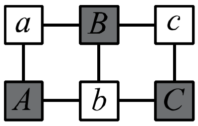
123. att.



124. att.

Atrisinājums

Apzīmējam skaitļus, kas ierakstīti kvadrātos ar *a*, *b*, *c*, *A*, *B* un *C* (skat. 125. att.). Apskatām starpību $S=(a+b+c)-(A+B+C)$. Tā kā katrā gājienā katrai izteiksmei $a+b+c$ un $A+B+C$ pieskaita vienu un to pašu skaitli, tad *S* nemainās. Sākumā (skat. 123. att.) šī starpība ir $S_1=(1+5+3)-(6+2+4)=9-12=-3$. Beigās (skat. 124. att.) starpība ir $S_2=(6+4+2)-(5+1+3)=12-9=3$. Tā kā $S_1 \neq S_2$, tad, veicot atļautos gājienus, nevar iegūt 124. att. parādīto skaitļu izvietojumu.



125. att.

11. klase

S2.11.1. Šaha turnīrā piedalās 9 spēlētāji, kuri katrs ar katru spēlē tieši vienu reizi. Katrā spēlē uzvarētājs saņem vienu punktu, zaudētājs – 0 punktus, bet par neizšķirtu katrs spēlētājs saņem 0,5 punktus. Turnīra beigās katrs spēlētājs bija saņēmis vienādu punktu skaitu.

a) Vai ir iespējams, ka katrs spēlētājs nospēlēja neizšķirti atšķirīgu skaitu reižu?

b) Vai ir iespējams, ka katram spēlētājam ir atšķirīgs zaudējumu skaits?

Atrisinājums

Pavisam notika $C_9^2=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$ spēles, katrs spēlētājs spēlēja 8 spēles. Tā kā beigās visi spēlētāji bija ieguvuši vienādu punktu skaitu, tad katrs spēlētājs ieguva $36:9=4$ punktus.

a) Ja spēlētājs ir savācis 4 punktus, tad viņš nospēlējis neizšķirti pāra skaitu reižu: 0, 2, 4, 6 vai 8. Redzam, ka 9 spēlētājiem ir 5 iespējas, tātad no Dirihlē principa izriet, ka turnīrā atradīsies tādi spēlētāji, kas būs nospēlējuši neizšķirti vienādu skaitu reižu.

b) Pierādīsim, ka uzdevumā prasītais nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka visiem spēlētājiem ir atšķirīgs zaudējumu skaits. Tad spēlētājs var būt zaudējis 0, 1, 2, 3, ..., 8 reizes. Tā kā ir 9 dažādas zaudējumu skaita vērtības un katram spēlētājam ir jābūt atšķirīgam zaudējumu skaitam, tad ir spēlētājs, kas zaudējis 8 reizes, ir spēlētājs, kas zaudējis 7 reizes utt. Spēlētājs, kas turnīrā zaudējis 8 reizes, turnīrā ir ieguvis 0 punktus, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdz ar to pēc Dirihlē principa esam ieguvuši, ka eksistē vismaz divi spēlētāji, kam ir vienāds zaudējumu skaits.

S2.11.2. Izliektam četrstūrim novilktas visu astoņu ārējo leņķu bisektrises. Pierādīt, ka tās veido četrstūri, kuram var apvilkt riņķa līniju!

Atrisinājums

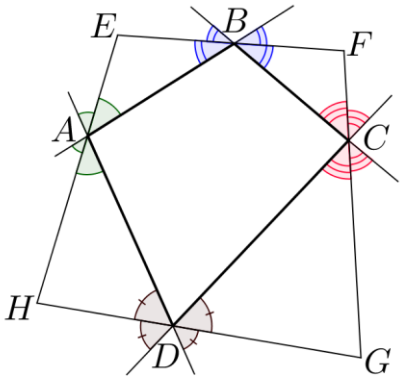
Uzdevumā jāpierāda, ka ap četrstūri *EFGH* var apvilkt riņķa līniju (skat. 126. att.).

Ievērojam, ka $\angle EAB+\angle EBA+\angle GCD+\angle GDC=180°$, jo šo četru leņķu lielumu summa ir puse no četrstūra *ABCD* dažādo ārējo leņķu lielumu summas.

Apskatām četrstūra *EFGH* divu pretējo leņķu summu:

$$\angle E + \angle G = 180^\circ - \angle EAB - \angle EBA + 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC =$$
$$= 360^\circ - \angle EAB - \angle EBA - \angle GCD - \angle GDC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka ap četrstūri *EFGH* var apvilkt riņķa līniju.



126. att.

S2.11.3. Tabulas 3×3 rūtiņās ierakstītas nulles. Vienā gājienā atļauts dotajā tabulā izvēlēties kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas un palielināt par 1 visus tajā ierakstītos skaitļus. Pierādīt, ka pēc vairākiem šādiem gājieniem nevar iegūt 127. att. doto tabulu!

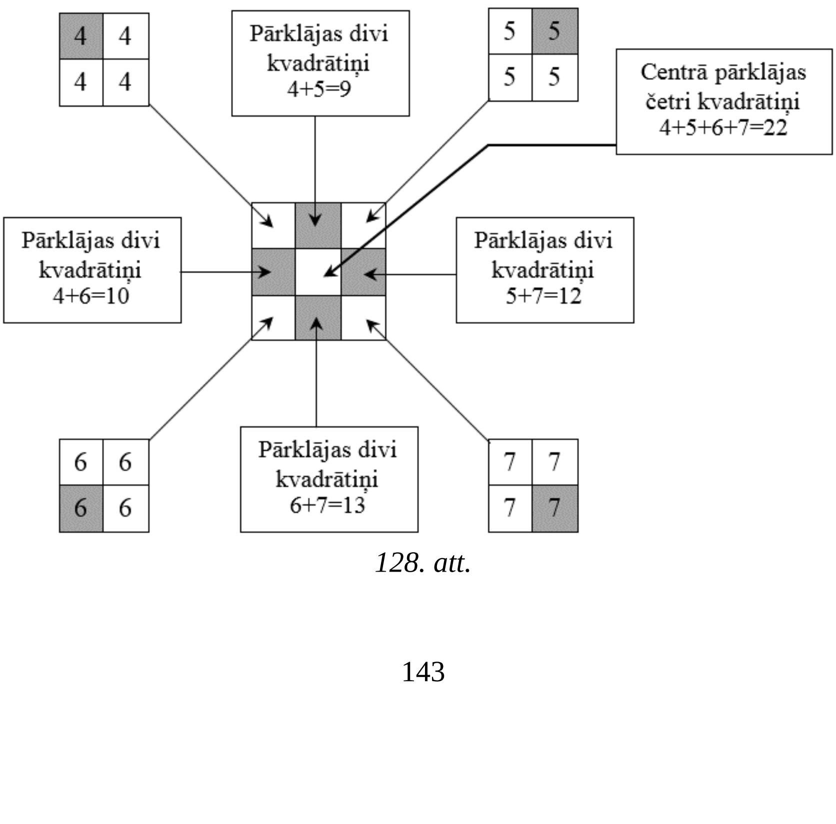
4	9	5
10	18	12
6	13	7

127. att.

Atrisinājums

Izpētīsim, kā veidota gala rezultātā iegūtā tabula. Redzam (skat. 128. att.), ka kvadrātā 2×2, kurš atrodas kreisajā augšējā stūrī, visi skaitļi palielināti par 1 četras reizes, jo pašā stūrī atrodas skaitlis 4. Labajā augšējā stūrī atrodas skaitlis 5, tātad atbilstošajā kvadrātā 2×2 visus skaitļus palielina par 1 piecas reizes, bet apakšējos kvadrātos – attiecīgi 6 un 7 reizes.

Apskatām, kā tiek aizpildīts kvadrāts 3×3 rūtiņas, ar mazajiem kvadrātiņiem 2×2 rūtiņas. No šejienes redzam: par cik palielinās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa *S*, par tik palielinās arī centrālajā rūtiņā ierakstītais skaitlis *c*. Tātad lielums $(S - c)$ ir nemainīgs. Sākumā $S - c = 0$. Beigās jāiegūst, ka $S - c = 2 - 18 = 4$. Tā kā $0 \neq 4$, tad nevar iegūt 127. att. doto tabulu.



128. att.

12. klase

S2.12.1. Deviņciparu naturāla skaitļa n ciparu summa ir 3. Kāda var būt n^3 ciparu summa?

Atrisinājums

Lai skaitļa ciparu summa būtu 3, tad skaitlis var saturēt:

- trīs vieniniekus un pārējās nulles;
- vienu vieninieku, vienu divnieku un pārējās nulles;
- vienu trijnieku un pārējās nulles.

Tātad deviņciparu skaitli, kura ciparu summa ir 3, var pierakstīt formā $n = 10^8 + 10^a + 10^b$, $a, b = 0, 1, 2, ..., 8$ (a un b var arī būt vienādi).

Tādā gadījumā $n^3 = (10^8 + 10^a + 10^b)^3$. Atverot iekavas, iegūsim summu, kas sastāv no $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ saskaitāmajiem, un katra saskaitāmā ciparu summa ir 1. Skaitļa n^3 ciparu summa nevar pārsniegt skaitli, ko iegūstam, saskaitot šo 27 saskaitāmo ciparu summas. Tātad tā nepārsniedz 27.

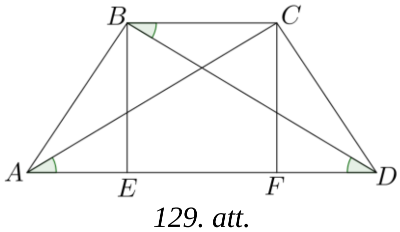
Skaitlis n dalās ar 3, jo tā ciparu summa dalās ar 3. Tāpēc skaitlis n^3 dalās ar $3^3 = 27$. Ja skaitlis dalās ar 27, tad tas dalās arī ar 9, tāpēc arī tā ciparu summa dalās ar 9. Ciparu summa noteikti ir naturāls skaitlis (vienīgais skaitlis, kura ciparu summa ir 0, ir skaitlis 0). Vienīgie naturālie skaitļi, kas nepārsniedz 27 un dalās ar 9, ir 9, 18 un 27. Visi šie skaitļi var būt n^3 ciparu summa:

- ja $n = 300000000$, tad n^3 ciparu summa ir 9 (jo $3^3 = 27$);
- ja $n = 210000000$, tad n^3 ciparu summa ir 18 (jo $21^3 = 9261$);
- ja $n = 111000000$, tad n^3 ciparu summa ir 27 (jo $111^3 = 1367631$).

S2.12.2. Trapeces diagonāles ir vienādas. Pierādīt, ka ap šo trapeci var apvilkt riņķa līniju!

Atrisinājums

Ievērojam, ka $\Delta ACF = \Delta DBE$ (pēc taisnleņķu trijstūru līdzības pazīmes *kh*), jo $BE = CF$ kā trapeces augstumi un $BD = AC$ pēc dotā. Tad $\angle CAD = \angle ADB$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros (skat. 129. att.). Tā kā $\angle ADB = \angle DBC$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AD un BC, tad $\angle DAC = \angle DBC$ un ap trapeci $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

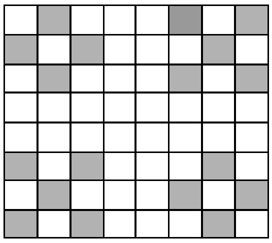


129. att.

S2.12.3. Deviņi rūķīši izvietoti kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa (8×8 rūtiņas) kreisajā apakšējā stūrī. Katrs rūķītis var pārlēkt pāri tam rūķītim, kas atrodas blakus, ja tur ir brīva rūtiņa. Lēkt var gan vertikāli, gan horizontāli, gan arī pa diagonāli. Vai var pārvietot rūķīšus citā kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa **a)** kreisajā augšējā stūrī; **b)** labajā augšējā stūrī?

Atrisinājums

a) Aplūkojam sākumā doto kvadrātu 3×3 rūtiņas; tajā 5 rūķīši atrodas uz melnajām rūtiņām un 4 – uz baltajām. Tā kā rūķīši pārvietojoties paliek uz tās pašas krāsas rūtiņām, tad rūķīši nevar izvietoties kreisajā augšējā 3×3 kvadrātā, jo tur ir 4 melnās un 5 baltās rūtiņas (skat. 130. att.).



130. att.

b) Ievērojam, ka sākotnējā 3×3 rūtiņu kvadrātā, skaitot no kreisās puses, seši rūķīši atrodas nepāra vertikālēs un trīs – pāra vertikālēs. Rūķīšiem pārvietojoties, tie rūķīši, kas atrodas nepāra vertikālēs, tādās arī paliek, bet tie rūķīši, kas atrodas pāra vertikālēs – tādās arī paliek. Labējā augšējā kvadrātā ir 6 rūtiņas pāra vertikālēs un 3 rūtiņas nepāra vertikālēs, tātad rūķīšus nevarēs pārvietot uz labējo augšējo kvadrātu.

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDES IETEICAMIE VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

2014./2015. mācību gada Sagatavošanās olimpiādes ieteicamie vērtēšanas kritēriji izstrādāti, balstoties uz grāmatā dotajiem uzdevumu atrisinājumiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 10 punktus.

	Kritēriji	Punkti
9. klase		
S2.9.3.	Piemērs, kur 8 summas ir pirmskaitļi un uzrakstītas summas	4
	Piemērs, kur 8 summas ir pirmskaitļi, bet nav uzrakstītas summas	3
	Pierādījums, ka visas summas nevar būt pirmskaitļi	6
10. klase		
S2.10.1.	Piemērs, ka izteiksme var dalīties tikai ar diviem dažādiem pirmskaitļiem (parādīts izteiksmes sadalījums pirmreizinātājos)	4
	Piemērs, ka izteiksme var dalīties tikai ar diviem dažādiem pirmskaitļiem (nav parādīts izteiksmes sadalījums pirmreizinātājos)	3
	Pierādījums, ka izteiksme nevar dalīties ar mazāk kā diviem dažādiem pirmskaitļiem	6
11. klase		
S2.11.1.	Par atsevišķiem piemēriem	1
	Aprēķināts katra spēlētāja iegūto punktu skaits	2
	Par a) un b) gadījumu	Par katru 4 punkti
S2.11.3.	Par atsevišķiem piemēriem	1
12. klase		
S2.12.1.	Par katru piemēru ar iegūtu atšķirīgu ciparu summas vērtību	1
S2.12.3.	Par atsevišķiem piemēriem	Katrā gadījumā 1 punkts
	Par pierādījumu a) un b) gadījumā	Par katru 5 punkti

N2. NOVADA OLIMPIĀDE

9. klase

N2.9.1. Atrisināt vienādojumu $\frac{5}{x^2-9}-\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}$.

Atrisinājums

Definīcijas kopa: $\begin{cases} x^2-9\neq 0 \\ 3-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\neq 3 \text{ un } x\neq -3 \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{5}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{10}{2(x-3)(x+3)}+\frac{2x+6}{2(x-3)(x+3)}=\frac{x^2-9}{2(x-3)(x+3)}; \qquad |\cdot 2(x-3)(x+3)\neq 0$$

$$10+2x+6=x^2-9;$$

$$x^2-2x-25=0.$$

Izmantojot kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas, iegūstam

$$D=4-4\cdot(1)\cdot(-25)=4+100=104=4\cdot 26$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 26}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{26}}{2}=1\pm\sqrt{26}$$

Abas x vērtības pieder vienādojuma definīcijas kopai. Atbilde: $x=1+\sqrt{26}$ vai $x=1-\sqrt{26}$.

N2.9.2. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

Atrisinājums

Visi skaitļi, kas uzrakstīti regulārā astoņstūra virsotnēs, sākumā ir nepāra skaitļi.

Ievērojam, ka

1) nepāra skaitlim pieskaitot divus nepāra skaitļus, iegūst nepāra skaitli;

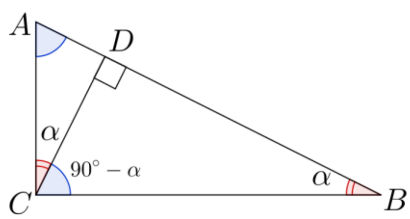
2) no nepāra skaitļa atņemot divkāršotu nepāra skaitli, iegūst nepāra skaitli.

Tātad gan pēc pirmās, gan pēc otrās darbības astoņstūra virsotnē atkal būs ierakstīts nepāra skaitlis. Līdz ar to visi skaitļi, kas atrodas astoņstūra virsotnēs, vienmēr paliek nepāra. Bet skaitlis 2014 ir pāra skaitlis, tātad skaitli 2014 iegūt nevarēs.

N2.9.3. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt **a)** 2014, **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums

Taisnstūra diagonāle sadala taisnstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros. Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.



131. att.

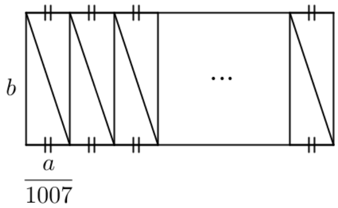
Ja taisnais leņķis ir $\angle ACB$ (skat. 131. att.), tad no tā velk perpendikulu *CD* pret hipotenūzu *AB*. Trijstūri *ABC*, *ACD* un *CBD* ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo

- $\angle ACB = \angle ADC = \angle CDB = 90°$;
- $\angle CBA = \angle DCA = \angle DBC = \alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pat veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai N ($N \geq 2$) vērtībai.

Tātad šādu sadalījumu var atrast arī, ja $N = 2014$ vai $N = 2015$.

Piezīme. Doto taisnstūri var sadalīt 2014 vienādos trijstūros (tie ir līdzīgi ar līdzības koeficientu 1). Vispirms doto taisnstūri sadala 1007 vienādos taisnstūros un pēc tam katru no iegūtajiem taisnstūriem sadala divos vienādos taisnleņķa trijstūros (skat. 132. att., kur dotā taisnstūra malu garumi ir *a* un *b*).



132. att.

4	13	1	10
6	5	8	9
11	3	12	2

13	1	10	4
2	11	3	12
6	9	8	5

133. att.

N2.9.4. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 13. Dārta grib nodzēst vienu no tiem, bet pārējos ierakstīt 3×4 rūtiņu tabulā (katru skaitli vienā rūtiņā) tā, lai visās rindās un kolonnās skaitļu vidējais aritmētiskais būtu vienāds.

a) Pierādīt, ka ir tieši viens skaitlis, kuru nodzēšot, viņa to varēs izdarīt!

b) Atrast vienu skaitļu izvietojuma piemēru!

Atrisinājums

Pieņemsim, ka tabulā ir trīs rindas un četras kolonnas. Ar *A* apzīmējam rindā ierakstīto četru skaitļu vidējo aritmētisko. Tad rindā ierakstīto skaitļu summa ir 4*A* un trīs rindās (jeb visā tabulā) ierakstīto skaitļu summa ir 12*A*. Pirmo trīspadsmit naturālu skaitļu summa ir

$$\frac{(1+13)\cdot 13}{2} = 91.$$

Ar *x* apzīmējam skaitli, kuru Dārta nodzēsīs. To nosakām no vienādojuma

$$12A = 91 - x. \qquad (*)$$

Pierādīsim, ka *A* ir naturāls skaitlis. Ja $A = n + p$, kur $n \in N$, $0 < p < 1$, tad no nosacījuma, ka katrā rindā ierakstīto skaitļu summa ir 4*A*, izriet, ka $4p \in N$. Savukārt no nosacījuma, ka katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 3*A*, izriet, ka $3p \in N$. Tātad $4p - 3p = p \in N$, kas ir pretrunā ar to, ka $0 < p < 1$.

Esam pierādījuši, ka vienādības (*) abu pušu izteiksmju vērtība ir naturāls skaitlis. Tā kā (*) kreisās puses izteiksme dalās ar 12, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar 12.

Ievērojam, ka skaitlis 91, dalot ar 12, dod atlikumu 7, tāpēc $91 - x$ dalīsies ar 12, ja *x* būs formā $12k + 7$, kur *k* ir nenegatīvs vesels skaitlis, no kā izriet, ka $x = 7$, jo dotie skaitļi nepārsniedz 13. Tātad tabulā nebūs ierakstīts skaitlis 7. Vidējā aritmētiskā vērtība ir $A = 84 : 12 = 7$.

Lai iegūtu 12 skaitļu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 vajadzīgo izvietojumu, vispirms divās rindās ierakstām tādus skaitļus, kuru summa katrā rindā ir 4*A* = 28. Trešajā rindā ierakstām atlikušos četrus skaitļus. Tad mainām skaitļu secību pa rindām, lai katras kolonnas skaitļu summa būtu 21. Skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 133. att.

N2.9.5. Apskata visas funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a + 2b = 2015$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums

Aplūkojam funkcijas vērtību, ja $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$y = a \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2015}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tātad punkti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ir kopīgi visu aplūkoto funkciju grafikiem.

Piezīmes.

1. Ievērot to, ka šie punkti pieder visām parabolām, var, pamanot, ka izteiksmes $\frac{1}{2}a + b$ vērtība ir $\frac{2015}{2}$ neatkarīgi no a un b vērtībām. Tad, ņemot $x^2 = \frac{1}{2}$, funkcijas vērtība nebūs atkarīga no konkrētajām a un b vērtībām.

2. Kopīgos punktus $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ var iegūt arī no dotajām parabolām paņemot divas patvaļīgas (piemēram, $a = 0, b = \frac{2015}{2}$ un $a = 1, b = 1007$) un atrodot to krustpunktus (t. i., atrisinot kvadrātvienādojumu).

10. klase

N2.10.1. Uz parabolas $y = ax^2 + bx + c$ atrodas punkts $M(1; 15)$, tās virsotne ir punktā $N(-3; -1)$. Noteikt koeficientus a, b un c!

Atrisinājums

Ja punkts $M(1; 15)$ atrodas uz parabolas, tad iegūstam vienādību:

$$15 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad \text{jeb} \quad 15 = a + b + c.$$

Ja punkts $N(-3; -1)$ atrodas uz parabolas, tad iegūstam

$$-1 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \quad \text{jeb} \quad -1 = 9a - 3b + c.$$

Parabolas virsotnes x koordinātu aprēķina pēc formulas $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Tātad iegūstam, ka $-3 = \frac{-b}{2a}$ jeb $b = 6a$.

Lai noteiktu koeficientus a, b, c, sastādām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a + b + c = 15 & (1) \\ 9a - 3b + c = -1 & (2) \\ b = 6a & (3) \end{cases}$$

No (1) atņemot (2), iegūstam $4b - 8a = 16$ jeb $b - 2a = 4$.

Izmantojot (3), pakāpeniski iegūstam koeficientu vērtības:

$$6a - 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 8.$$

Tātad koeficientu vērtības ir $a = 1,\ b = 6,\ c = 8$.

Piezīmes.
1. Trešo sistēmas vienādojumu var iegūt, ja izvēlas punktam $(1;15)$ simetrisko punktu $(-7;15)$ attiecībā pret parabolas simetrijas asi $x=-3$:

$$15 = a\cdot(-7)^2 + b\cdot(-7)+c \quad \text{jeb} \quad 15 = 49a-7b+c.$$

2. Risinājumā var izmantot, ka parabolas ar virsotni punktā $(x_v; y_v)$ vienādojums ir $y=a(x-x_v)^2+y_v$. Tad, vienādojumā $y=a(x+3)^2-1$ ievietojot punkta M koordinātas ($x=1, y=15$), var atrast a vērtību $a=1$. Tātad meklētā parabola ir $y=1\cdot(x+3)^2-1=x^2+6x+8$.

N2.10.2. Ar naturālu skaitli atļauts veikt šādas darbības:
- pieskaitīt 6;
- dalīt ar 4, ja skaitlis dalās ar 4;
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 2015?
Atrisinājums
Skaitlim 30 izpildās īpašība "dalās ar 3", bet skaitlim 2015 šī īpašība neizpildās.
Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī dalās ar 3.
Ievērojam, ka
- ja skaitlis *n* dalās ar 3, tad arī $n+6$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa dalās ar 3);
- ja pāra skaitlis 4*n* dalās ar 3, tad arī skaitlis *n* dalās ar 3 (*n* joprojām satur reizinātāju 3);
- apgalvojums „mainīt vietām skaitļa ciparus" izriet no dalāmības pazīmes ar 3 (ja skaitlis *n* dalās ar 3, tad arī tā ciparu summa dalās ar 3, bet summa nemainās, ja maina saskaitāmo secību).

Tātad, ja dotais skaitlis dalās ar 3, tad pēc atļauto darbību izpildes arī jauniegūtais skaitlis dalīsies ar 3.
Skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar atļautajām darbībām skaitli 2015 iegūt nevar.

N2.10.3. Vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir 177. Kādas vērtības var pieņemt mazākais no šiem saskaitāmajiem?
Atrisinājums
Izmantojam aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$,
ko, lietojot formulu $a_n=a_1+(n-1)d$, var pārrakstīt formā: $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$.
Mazāko no skaitļiem apzīmējam ar *a*. Ievērojam, ka diference $d=1$, tāpēc iegūstam

$$S_n=\frac{2a+n-1}{2}\cdot n \quad \text{jeb} \quad 2S_n=(2a-1+n)\cdot n.$$

Tā kā pēc uzdevumā dotā $S_n=177$, tad iegūstam vienādojumu:

$$(2a-1+n)\cdot n = 2\cdot 177 \quad \text{jeb} \quad (2a-1+n)\cdot n = 2\cdot 3\cdot 59.$$

Mazākais no diviem reizinātājiem vienādības kreisajā pusē ir *n,* jo *a* un *n* ir naturāli skaitļi. Vērtība $n=1$ neder, jo tad ir viens saskaitāmais, tāpēc *n* var pieņemt tikai trīs vērtības: 2, 3 un 6. Aprēķinām, kādas vērtības var pieņemt *a*:
- $n=2 \;\Rightarrow\; 2a+1=3\cdot 59 \;\Rightarrow\; 2a=176 \;\Rightarrow\; a=88$;
- $n=3 \;\Rightarrow\; 2a+2=2\cdot 59 \;\Rightarrow\; 2a=116 \;\Rightarrow\; a=58$;
- $n=6 \;\Rightarrow\; 2a+5=59 \;\Rightarrow\; 2a=54 \;\Rightarrow\; a=27$.

Tātad mazākais no saskaitāmajiem var būt 88, 58 vai 27.

N2.10.4. Vai eksistē tāds vesels skaitlis *x*, ka **a)** visi skaitļi x; $x+23$; $x+45$; $x+121$; **b)** visi skaitļi x; $x+23$; $x+46$; $x+121$ ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1 (kāpinātāji var būt dažādi)?

Atrisinājums

a) Jā, piemēram, var ņemt $x=4$, tad

$$x=4=2^2;\quad x+23=27=3^3;\quad x+45=49=7^2;\quad x+121=125=5^3.$$

b) Ievērosim, ja *y* ir pāra skaitlis un vienlaikus vesela skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kas ir lielāks nekā 1, tad *y* dalās ar 4 (t. i., $y=a^n$ kādam veselam skaitlim *a* un naturālam $n\geq 2$; ja *y* ir pāra skaitlis, tad *a* arī ir pāra skaitlis, līdz ar to a^n dalās ar 2^n dalās ar 4, jo $n\geq 2$).

Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds *x*, ka visi skaitļi x; $x+23$; $x+46$; $x+121$ ir veselu skaitļu pakāpes ar kāpinātāju, kas lielāks nekā 1.

Tieši viens no skaitļiem $x; x+23$ ir pāra skaitlis; aplūkosim abus iespējamos gadījumus.

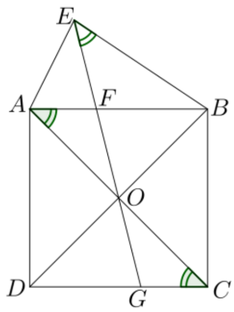
- Ja x ir pāra skaitlis, tad tas dalās ar 4, pēc iepriekš pamatotā. Taču tad $x+46=(x+44)+2$ nedalās ar 4, tātad nevar būt vesela skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kas lielāks nekā 1 – pretruna.
- Ja $x+23$ ir pāra skaitlis, tad tas dalās ar 4, saskaņā ar iepriekš pamatoto. Taču tad $x+121=((x+23)+96)+2=((x+23)+4\cdot 24)+2$ nedalās ar 4, tātad nevar būt vesela skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kas lielāks nekā 1 – pretruna.

Tātad neeksistē tāds vesels skaitlis *x*, ka visi skaitļi x; $x+23$; $x+46$; $x+121$ ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1.

N2.10.5. Uz kvadrāta *ABCD* malas *AB* kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris *AEB*. Taisne, kas vilkta no *E* caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu *O*, krusto kvadrāta malu *AB* punktā *F* un malu *DC* – punktā *G*. Zināms, ka $\angle OEB=\angle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris *AEB* ir taisnleņķa!

Atrisinājums

Kvadrāta pretējās malas *AB* un *CD* ir paralēlas, tāpēc $\angle BAC=\angle ACD$ kā iekšējie šķērsleņķi (skat. 134. att.).



134. att.

Punkti *A*, *E*, *B*, *O* atrodas uz vienas riņķa līnijas ω, jo $\angle BAO=\angle OEB$. Tā kā kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras, tad $\angle AOB=90°$; no kā izriet, ka *AB* ir riņķa līnijas ω diametrs. Tātad $\angle AEB=90°$ kā ievilktais leņķis, kas balstās uz diametra. Līdz ar to esam pierādījuši, ka trijstūris *AEB* ir taisnleņķa.

Piezīme. Risinājumā var izmantot arī to, ka $\angle AOB+\angle AEB=180°$, jo četrstūris *AEBO* ir ievilkts riņķa līnijā.

11. klase

N2.11.1. Atrisināt nevienādību $|x-2|-6+\dfrac{5}{|x-2|}>0$.

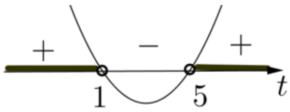
Atrisinājums

Dotās nevienādības definīcijas kopa ir visi reālie skaitļi, izņemot skaitli 2, t. i., $x \in (-\infty;\, 2) \cup (2;\, +\infty)$.

Tā kā $|x-2|>0$ visām x vērtībām no definīcijas kopas, tad dotās nevienādības abas puses reizinot ar pozitīvu skaitli $|x-2|$, iegūstam ekvivalentu nevienādību:

$$|x-2|^2-6\cdot|x-2|+5>0.$$

Apzīmējot $|x-2|=t$, iegūstam kvadrātnevienādību: $t^2-6t+5>0$.



135. att.

Iegūstam, ka $t<1$ vai $t>5$ (skat. 135. att.).

Vēl jāiegūst atbilstošās x vērtības:

1) no nevienādības $|x-2|<1$ iegūstam, ka

$$-1<x-2<1 \quad \text{jeb} \quad 1<x<3;$$

2) no nevienādības $|x-2|>5$ iegūstam, ka

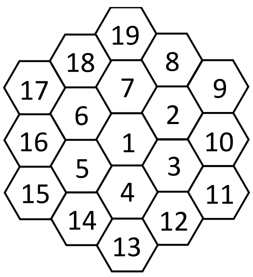
$$x-2<-5 \quad \text{vai arī} \quad x-2>5.$$

Līdz ar to iegūstam, ka $x<-3$ vai arī $x>7$.

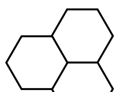
Ievērojot definīcijas kopu, iegūstam, ka dotās nevienādības atrisinājums ir $x \in (-\infty;\, -3) \cup (1;\, 2) \cup (2;\, 3) \cup (7;\, +\infty)$.

Piezīme. Nevienādību var risināt arī ar intervālu metodi.

N2.11.2. Vienā gājienā no 136. att. attēlotās figūras var izvēlēties jebkuru 137. att. redzamo figūru (figūru var arī pagriezt) un tajā ierakstītajiem skaitļiem vai nu pieskaitīt 1, vai arī atņemt 1. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka visās šūnās ir ierakstīts skaitlis 2015?



136. att.



137. att.

Atrisinājums

Šūnās ierakstītie skaitļi 1, 2, …, 19 veido aritmētisko progresiju ar diferenci 1. Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām sākumā šūnās ierakstīto skaitļu summu $\dfrac{(1+19)\cdot 19}{2}=190$.

Ja katrā šūnā ir ierakstīts skaitlis 2015, tad visu šo skaitļu summa ir $2015\cdot 19=38285$.

Ievērojam, ka pēc katra gājiena visu šūnās ierakstīto skaitļu summa vai nu palielinās par 3, vai arī samazinās par 3. Tas nozīmē, ka visu šūnās ierakstīto skaitļu summas atlikums, dalot ar 3, visu laiku paliek nemainīgs. Sākumā doto skaitļu summa 190, dalot ar 3, dod atlikumu 1, bet beigās nepieciešamā summa 38285, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (skaitļa 38285 ciparu summa ir 26 un, dalot ar 3, tā dod tādu pašu atlikumu, kā skaitli dalot ar 3). Tā kā atlikumi ir dažādi, tad uzdevumā prasītais nav izpildāms, t. i., nevar panākt, ka katrā šūnā būtu ierakstīts skaitlis 2015.

N2.11.3. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis *n*, kuru iespējams izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu *a*, *b* un *c* summu tā, ka visi skaitļi $a+b$, $a+c$, $b+c$ ir naturālu skaitļu kvadrāti?

Atrisinājums

Mazākā iespējamā *n* vērtība ir $55=6+19+30$.

Pierādīsm, ka mazāku *n* vērtību iegūt nevar.

Apzīmējam $a+b=p^2, a+c=q^2, b+c=r^2$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $0<a<b<c$, tad $p^2<q^2<r^2$.

Izmantojot šīs sakarības un pieņemot, ka zināmas p^2, q^2, r^2 vērtības, varam izteikt *a, b, c* un *n* vērtības:

$$a=\frac{p^2+q^2-r^2}{2}, b=\frac{p^2-q^2+r^2}{2}, c=\frac{-p^2+q^2+r^2}{2}, n=\frac{p^2+q^2+r^2}{2}<\frac{3r^2}{2}.$$

Tā kā *n* jābūt naturālam skaitlim, tad $p^2+q^2+r^2$ ir jābūt pāra skaitlim, tātad starp *p, q, r* ir vai nu tieši divi nepāra skaitļi, vai arī neviens nepāra skaitlis.

Tā kā *a* jābūt naturālam skaitlim, tad $p^2+q^2>r^2$. Tā kā $r^2<n$, tad jāaplūko tikai tādas skaitļu kvadrātu vērtības, kas mazākas nekā 55:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49.$$

Mazākā r^2 vērtība, kurai var atrast tādas p^2, q^2 vērtības, kas apmierina nevienādību $p^2+q^2>r^2$, ir $r^2=36$ un $p^2=16,\ q^2=25$. Šo skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tāpēc neapmierina uzdevuma prasības.

Nākamā r^2 vērtība, kurai var atrast tādas p^2, q^2 vērtības, kas apmierina nevienādību $p^2+q^2>r^2$, ir $r^2=49$.

Iespējami divi gadījumi:

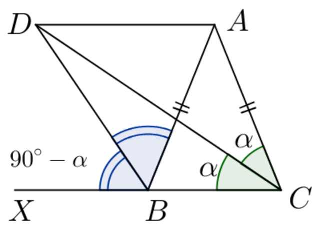
- $r^2=49, p^2=16,\ q^2=36$ – šo skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tāpēc neapmierina uzdevuma prasības;
- $r^2=49, p^2=25,\ q^2=36$ – šīs vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus un no vienādojumu sistēmas $\begin{cases} a+b=25 \\ a+c=36 \\ b+c=49 \end{cases}$ iegūstam, ka $a=6, b=19, c=30$.

Tātad mazākā iespējamā *n* vērtība ir $6+19+30=55$.

N2.11.4. Uz trijstūra *XAC* malas *XC* atlikts iekšējs punkts *B* tā, ka $AB=AC$. Leņķu *ACB* un *ABX* bisektrises krustojas punktā *D*. Pierādīt, ka $AD=AB$!

Atrisinājums

Apzīmējam $\angle ACD=\angle DCB=\alpha$ (pēc bisektrises definīcijas). Tad $\angle BCA=\angle ABC=2\alpha$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī un $\angle ABX=180°-2\alpha$ (pēc blakusleņķu īpašības). Nogrieznis *BD* ir leņķa *ABX* bisektrise, tāpēc $\angle ABD=\angle DBX=90°-\alpha$ (skat. 138. att.).



138. att.

Tā kā trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad no ΔABC un ΔDBC iegūstam

$$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 4\alpha;$$

$$\angle BDC = 180° - \angle DCB - \angle ABC - \angle ABD = 180° - \alpha - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - 2\alpha.$$

Ievērojam, ka $\angle BDC = 90° - 2\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Aplūkojam riņķa līniju ω ar centru punktā A un rādiusu AB. Tad $\angle BAC$ ir centra leņķis, kas balstās uz hordas BC. Tā kā leņķa BDC lielums ir tieši divas reizes mazāks nekā centra leņķim, tad tas ir ievilkts leņķis. Tātad punkts D atrodas uz riņķa līnijas ω. Līdz ar to $AD = AB$ kā riņķa līnijas ω rādiusi, kas arī bija jāpierāda.

N2.11.5. Dots taisnstūris ar izmēriem $n \times m$ rūtiņas. Sākumā katrā rūtiņā ir ierakstīts 5. Māris dotajā taisnstūrī veic secīgas darbības:

1) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 1;
2) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 2;
3) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 3;
4) visbeidzot izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 4.

Katra izvēlētā taisnstūra malām jāiet pa rūtiņu līnijām un cipars vienmēr jāraksta rūtiņā jau esošā skaitļa labajā pusē. Vai iespējams, ka visās rūtiņās ierakstītie skaitļi ir dažādi, ja dotā taisnstūra izmēri ir **a)** 3×6; **b)** 3×5; **c)** 4×4 rūtiņas?

Atrisinājums

Rūtiņās var būt ierakstīti 16 atšķirīgi skaitļi (skat. 139. att.).

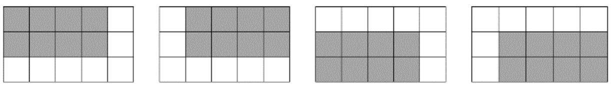
5
51; 52; 53; 54;
512; 513; 514; 523; 524; 534;
5123; 5124; 5134; 5234;
51234.

139. att.

a) Tā kā taisnstūrī 3×6 ir 18 rūtiņas, tad pēc Dirihlē principa vismaz divās rūtiņās ierakstītie skaitļi būs vienādi. Tātad nav iespējams, ka visās laukuma rūtiņās ierakstītie skaitļi atšķiras.

b) Tā kā taisnstūrī 3×5 ir 15 rūtiņas, tad tieši viens skaitlis nebūs ierakstīts. Ievērojam, ka katrs no cipariem 1, 2, 3 un 4 parādās astoņos skaitļos. Tātad katrs no cipariem 1, 2, 3, 4 būs ierakstīts 7 vai 8 rūtiņās. Tā kā katrs cipars ir ierakstīts taisnstūrveida laukumā, tad vienīgais iespējamais taisnstūra izmērs ir 2×4 rūtiņas (pretējā gadījumā pēc Dirihlē principa vismaz divās rūtiņās ierakstītie skaitļi būs vienādi). Vēl varam ievērot, ka jebkuru divu ciparu pāris ir sastopams tieši četros skaitļos. Līdz ar to katriem diviem taisnstūriem drīkst būt kopīgas ne vairāk kā četras rūtiņas.

Taisnstūrī ar izmēriem 3×5 rūtiņas taisnstūri 2×4 rūtiņas var novietot četros dažādos veidos (skat. 140. att.).



140. att.

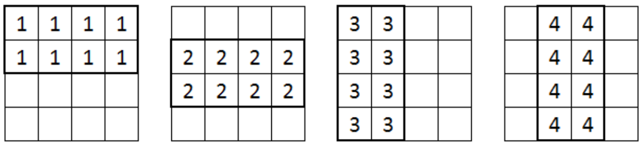
Taisnstūriem, kas atrodas pie augšējās malas, pārklājas sešas rūtiņas – tātad vairākās no tām ierakstīto skaitļu komplekti būs vienādi un panākt, ka visās rūtiņās ierakstītie skaitļi ir atšķirīgi, nav iespējams.

c) Jā, ir iespējams, ka visās laukuma rūtiņās ierakstītie skaitļi atšķiras (skat., piemēram, 141. att.).

513	5134	514	51
5123	51234	5124	512
523	5234	524	52
53	534	54	5

141. att.

Taisnstūrus var izvēlēties, piemēram, kā parādīts 142. att.



142. att.

12. klase

N2.12.1. Atrisināt vienādojumu $(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2x-\log_{\sqrt{6}}36$.

Atrisinājums

Definīcijas kopa: $x^2-5x>0$. No kā izriet, ka $x\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$.

Ievērojam, ka $\log_{\sqrt{6}}36=\log_{\sqrt{6}}(\sqrt{6})^4=4$, tad doto vienādojumu var pārveidot formā:

$$(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2x-4;$$

$$(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2(x-2). \qquad (*)$$

Ievērojam, ka $x-2$ ir abu saskaitāmo kopīgais reizinātājs:

$$(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)-2(x-2)=0;$$

$$(x-2)(\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)-2)=0.$$

Reizinājums ir vienāds ar 0, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar 0. Iegūstam divus gadījumus:

1) $x-2=0$ jeb $x=2$ – šī vērtība neder, jo nepieder definīcijas kopai;

2) $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)-2=0$ jeb $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2$. Izmantojot logaritma definīciju, iegūstam

$$x^2-5x=(\sqrt{6})^2 \quad \text{jeb} \quad x^2-5x-6=0.$$

Pēc Vjeta teorēmas $x_1=6$ un $x_2=-1$. Abas iegūtās *x* vērtības pieder vienādojuma definīcijas kopai. Atbilde: $x=6$ vai $x=-1$.

Piezīme. Vienādojuma (*) abas puses var izdalīt ar $x-2\neq 0$ (jo *x* vērtība 2 nepieder definīcijas kopai) un iegūt vienādojumu: $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2$.

N2.12.2. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas darbības:

- pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu;
- atņemt no skaitļa tā ciparu summu.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 139 var iegūt skaitli **a)** 63; **b)** 193?

Atrisinājums

a) Skaitli 63 var iegūt šādi:

$$139\xrightarrow{-13}126\xrightarrow{-9}117\xrightarrow{-9}108\xrightarrow{-9}99\xrightarrow{-18}81\xrightarrow{-9}72\xrightarrow{-9}63.$$

b) Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 9, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 9 šī skaitļa ciparu summu. Tāpēc naturāla skaitļa un tā ciparu summas starpība noteikti dalīsies ar 9. Kaut vienu reizi izpildot atņemšanu, visi turpmāk iegūstamie skaitļi dalīsies ar 9.
Tā kā 193 nedalās ar 9, tad skaitli 193 varētu iegūt tikai tad, ja skaitlim visu laiku pieskaitīs tā ciparu summu. Tātad skaitļi pārveidosies šādi:

$$139 \xrightarrow{+13} 152 \xrightarrow{+8} 160 \xrightarrow{+7} 167 \xrightarrow{+14} 181 \xrightarrow{+10} 191 \xrightarrow{+11} 202 \longrightarrow \ldots$$

Visi tālāk iegūstamie skaitļi ir lielāki nekā 193, tātad skaitli 193 nevarēs iegūt.

N2.12.3. Cik daudz ir piecciparu skaitļu, kas sastāv no tieši trīs dažādiem cipariem, no kuriem neviens nav 0 un neviens neatkārtojas vairāk kā divas reizes?

Atrisinājums

Ar a apzīmējam ciparu, kas skaitlī ir vienu reizi, bet ar b un c – ciparus, kas skaitlī ir divas reizes. Cipars a var būt 5 dažādās vietās, ciparu b var novietot $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ veidos (atlikušajās 4 vietās ir jānovieto divi cipari b), ciparu c atlikušajās vietās var novietot 1 veidā. Tātad ir $5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$ (reizināšanas likums) dažādas kombinācijas, kā cipari a, b, c var veidot meklēto piecciparu skaitli.

Ciparu a no cipariem 1, 2, .., 9 var izvēlēties 9 veidos, bet b un c – $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ veidos. Tātad pavisam ir $30 \cdot 9 \cdot 28 = 7560$ piecciparu skaitļi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

N2.12.4. Izliekta četrstūra *ABCD* malu *AB, BC, CD* un *DA* viduspunkti ir attiecīgi *E, F, G* un *H*. Nogrieznis *AF* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *K* un *L*, bet *CH* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *N* un *M*. Pierādīt, ka $S_{BFL} + S_{CMG} + S_{DNH} + S_{AKE} = S_{KLMN}$!

Atrisinājums

Novelkam nogriezni *AC* un aplūkojam trijstūrus *ABF*, *AFC*, *ACH* un *CDH* (skat. 143. att.).

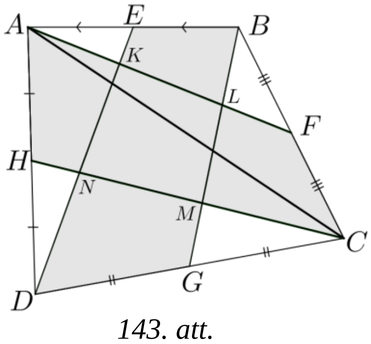
Izmantojot trijstūra laukuma formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, iegūstam

- $S_{ABF} = \frac{1}{2} BF \cdot h_{BC} = \frac{1}{2} FC \cdot h_{BC} = S_{AFC}$;
- $S_{ACH} = \frac{1}{2} AH \cdot h_{AD} = \frac{1}{2} HD \cdot h_{AD} = S_{CDH}$.

Ievērojam, ka $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{AFC} + S_{ACH} + S_{CDH} = 2 \cdot (S_{AFC} + S_{ACH}) = 2S_{AFCH}$.

Tātad $S_{AFCH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Analoģiski, novelkot *BD*, pierāda, ka $S_{BGDE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



143. att.

Iekrāsotās daļas laukumu (skat. 143. att.) apzīmējam ar *S*.

Esam ieguvuši, ka

$$S_{ABCD} = S_{AFCH} + S_{BGDE};$$
$$S_{BFL} + S_{CMG} + S_{DNH} + S_{AKE} + S = S + S_{KLMN}$$
$$S_{BFL} + S_{CMG} + S_{DNH} + S_{AKE} = S_{KLMN},$$

kas arī bija jāpierāda.

N2.12.5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *a*, *b* un *c*, ka skaitļa $a^2 + b^2 + c^2$

a) pēdējie divi cipari ir 15;
b) pēdējie četri cipari ir 2015?

Atrisinājums

a) Jā, eksistē, piemēram, $a = 9$, $b = 5$, $c = 3$. Tad $a^2 + b^2 + c^2 = 81 + 25 + 9 = 115$.

b) Pierādīsim, ka šādi skaitļi neeksistē. Apskatām vienādojumu

$$a^2 + b^2 + c^2 = \overline{...2015}. \qquad (*)$$

Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.

Skaitli $\overline{...2015}$ dalot ar 8, iegūst atlikumu 7 ($\overline{...2015} = \underbrace{\overline{...2000}}_{\vdots 8} + 15 = \underbrace{\overline{...2000}}_{\vdots 8} + \underbrace{8}_{\vdots 8} + 7$).

Jebkuru naturālu skaitli var pierakstīt formā $8m + k$, kur $k = 0, 1, ..., 7$.

Apskatām skaitļa kvadrātu $(8m+k)^2 = 64m^2 + 16mk + k^2 = 8 \cdot (8m^2 + 2mk) + k^2$. Skaitli $(8m+k)^2$ dalot ar 8, iegūsim tādu pašu atlikumu, kā k^2, dalot ar 8.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
k^2	0	1	4	9	16	25	36	49
Atlikums, dalot ar 8	0	1	4	1	0	1	4	1

Tātad skaitļa kvadrātu, dalot ar 8, atlikumā var iegūt 0, 1, 4.

Skaitli 7 (vienādojuma (*) labās puses atlikums) nevar iegūt, izmantojot tikai minētos atlikumus. Tātad vienādojumam (*) nav atrisinājuma jeb neeksistē tādi naturāli skaitļi *a*, *b* un *c*, ka skaitļa $a^2 + b^2 + c^2$ pēdējie četri cipari ir 2015.

Piezīme. Uzdevumu var risināt, izmantojot kongruenci pēc moduļa 8.

NOVADA OLIMPIĀDES IETEICAMIE VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

2014./2015. mācību gada Novada matemātikas olimpiādes ieteicamie vērtēšanas kritēriji izstrādāti, balstoties uz grāmatā dotajiem uzdevumu atrisinājumiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 10 punktus.

	Kritēriji	Punkti
9. klase		
N2.9.1.	Nosaka pieļaujamās vērtības vai nosacījumu par saucēju	2
	Uzraksta atbildi, ņemot vērā pieļaujamās vērtības	1
N2.9.2.	Apskatīti tikai atsevišķi piemēri	Ne vairāk kā 2 punkti
	Uzraksta, ka sākumā visi ierakstītie skaitļi ir nepāra	1
	Pamato, ka pēc katras darbības virsotnē atkal būs ierakstīts nepāra skaitlis	Par katru 3 punkti
	Secina, ka virsotnēs vienmēr būs ierakstīti nepāra skaitļi	1
	Uzraksta, ka 2014 ir pāra skaitlis, un secina, ka 2014 nebūs ierakstīts nevienā virsotnē	2
N2.9.3.	Tikai par a) gadījuma sadalījumu (kopā **4** punkti):	
	Secina, ka vienādi trijstūri ir arī līdzīgi	1
	Uzraksta, ka taisnstūri, novelkot vienu diagonāli, var sadalīt divos vienādos trijstūros	1
	Izveido zīmējumu vai apraksta, kā sadalīt doto taisnstūri 2014 daļās	2
	Tikai par b) gadījuma sadalījumu (kopā **6** punkti)	6
	Ja risinājums vienlaicīgi ietver gan a), gan b) gadījumu (kopā 10 punkti):	
	Uzraksta, ka taisnstūri, novelkot vienu diagonāli, var sadalīt divos vienādos trijstūros	1
	Izveido zīmējumu vai apraksta, kā taisnleņķa trijstūri sadalīt līdzīgos trijstūros	3
	Pierāda, ka zīmējumā redzamie trīs taisnleņķa trijstūri visi ir līdzīgi:	
	Uzraksta līdzīgos trijstūrus	1
	Līdzības pamatošana	3
	Secina, ka, dalot iegūtos taisnleņķa trijstūrus, var iegūt prasīto taisnstūra sadalījumu	2
N2.9.4.	Par a) daļu (kopā **6** punkti):	
	Pamato, ka vidējais aritmētiskais var būt tikai naturāls skaitlis	2
	Iegūst, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 12	2
	Pamato, ka tikai skaitli 7 nav iespējams ierakstīt tabulā	2
	Par b) daļu (kopā **4** punkti):	
	Par pareizu skaitļu izvietojumu	3
	Uzraksta vidējā aritmētiskā vērtību	1
N2.9.5.	Pamato, ka vērtībām $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ funkciju vērtības nav atkarīgas no a un b vērtībām	8
	Uzraksta krustpunktu koordinātas	2
	Tikai iegūtas vērtības $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	4
	Iegūtas vērtības $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ un aprēķinātas tikai divu konkrētu funkciju vērtības nevis krustpunktu vērtības vispārīgā gadījumā	6

10. klase		
N2.10.1.	Sastāda trīs vienādojumus	Par katru 2 punkti
	Atrisina vienādojumu sistēmu	4
N2.10.2.	Apskatīti tikai atsevišķi piemēri	Ne vairāk kā 2 punkti
	Uzraksta, ka sākumā dotais skaitlis dalās ar 3	1
	Pamato, ka pēc katras darbības atkal iegūs skaitli, kas dalās ar 3	Par katru 2 punkti
	Secina, ka, izpildot darbības, vienmēr iegūs skaitli, kas dalās ar 3	2
	Uzraksta, ka 2015 nedalās ar 3, un secina, ka to nevarēs iegūt	2
N2.10.3.	Uzraksta aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu	1
	Izmantojot, ka $d=1$ un $S_n=177$, iegūst vienādojumu, kas atkarīgs tikai no mazākā locekļa un locekļu skaita	2
	Apskata visas iespējamās n vērtības	6
	Uzraksta atbildi	1
N2.10.4.	a) gadījums – atrasta x vērtība un uzrādītas veselo skaitļu pakāpes	3
	b) gadījums	7
N2.10.5.	Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
	Uzraksta vai atzīmē, ka kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras	1
	Uzraksta vai atzīmē, ka diagonāle ir arī kvadrāta leņķu bisektrise (vai arī leņķis starp malu un diagonāli ir $45°$)	1
11. klase		
N2.11.1.	Uzraksta pieļaujamās x vērtības (definīcijas kopu)	1
	Uzraksta atbildi, ņemot vērā pieļaujamās vērtības	1
N2.11.2.	Risinājumā izmanto šūnās ierakstīto skaitļu summu	1
	Aprēķina sākumā šūnās ierakstīto skaitļu summu	1
	Uzraksta, ka sākumā dotais skaitlis, dalot to ar 3, dod atlikumu 1	2
	Uzraksta, ka pēc katra gājiena visu šūnās ierakstīto skaitļu summa vai nu palielinās par 3, vai arī samazinās par 3	2
	Secina, ka visu šūnās ierakstīto skaitļu summas atlikums, dalot ar 3, visu laiku paliek nemainīgs	1
	Aprēķina beigās nepieciešamo summu	1
	Uzraksta, ka beigās nepieciešamā summa, dalot to ar 3, dod atlikumu 2	1
	Secina, ka prasītais nav iespējams	1
N2.11.3.	Atrasta n vērtība, kas apmierina uzdevuma prasības, kas nav mazākā n vērtība	1
	Uzraksta tikai n vērtību 55	1
	Uzraksta a, b un c vērtības	1
	Uzraksta summu $a+b$, $a+c$, $b+c$ vērtības	1
	Pamato, ka vērtība $n=55$ ir mazākā iespējamā	7
N2.11.4.	Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
	Izmantojot vienādsānu trijstūra un blakusleņķu īpašības, pamato, ka $\angle BDC = 90° - 2\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$	5
N2.11.5.	Pamana, ka ir iespējami 16 atšķirīgi skaitļi	1
	a) gadījums – pamato, ka prasītais nav iespējams	2
	b) gadījums – pamato, ka prasītais nav iespējams	4
	c) gadījums – parāda piemēru, ka prasītais izpildās	3

12. klase		
N2.12.1.	Uzraksta pieļaujamās *x* vērtības (definīcijas kopu)	1
	Uzraksta atbildi, ņemot vērā pieļaujamās vērtības	1
N2.12.2.	a) gadījums – parāda, kā iegūt skaitli 63	3
	b) gadījums (kopā **7** punkti):	
	Uzraksta, ka atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 9, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 9 šī skaitļa ciparu summu	1
	Secina, ka naturāla skaitļa un tā ciparu summas starpība noteikti dalīsies ar 9	1
	Secina, ka kaut vienu reizi izpildot atņemšanu, visi turpmāk iegūstamie skaitļi dalīsies ar 9	1
	Uzraksta, ka skaitlis 193 nedalās ar 9	1
	Secina, ka skaitli 193 varētu iegūt tikai tad, ja skaitlim visu laiku pieskaita tā ciparu summu	1
	Uzraksta skaitļu virkni, ko var iegūt, ja skaitlim visu laiku pieskaita tā ciparu summu	1
	Secina, ka skaitli 193 nevar iegūt	1
N2.12.4.	Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
	Pamato, ka $S_{ABF} = \frac{1}{2} S_{ABC}$	1
	Pamatota vienādība $S_{AFCH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (vai arī $S_{ABF} + S_{CDH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$)	4
N2.12.5.	a) gadījums – atrastas *a*, *b* un *c* vērtības un uzrakstīta iegūtā kvadrātu summa	4
	b) gadījums – pierāda, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi *a*, *b*, *c*, kuriem izpildās prasītais	6

NOVADA OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2014./2015. mācību gada Novada matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (726 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	3%	2%	4%	8%
0	20%	17%	36%	33%	71%
1	15%	10%	22%	12%	14%
2	11%	6%	14%	8%	2%
3	5%	3%	9%	4%	1%
4	4%	3%	8%	8%	1%
5	5%	3%	3%	8%	0%
6	7%	2%	2%	7%	1%
7	13%	2%	1%	3%	0%
8	9%	4%	1%	9%	0%
9	5%	6%	0%	2%	0%
10	5%	40%	2%	3%	1%
vidēji	**3,91**	**6,00**	**1,73**	**3,06**	**0,47**

10. klase (621 dalībnieks)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	2%	4%	5%	1%
0	14%	26%	29%	40%	12%
1	8%	22%	20%	5%	25%
2	9%	16%	15%	3%	34%
3	4%	4%	7%	14%	10%
4	17%	2%	8%	25%	6%
5	8%	2%	4%	5%	2%
6	7%	2%	2%	0%	2%
7	3%	3%	2%	0%	1%
8	2%	4%	2%	0%	1%
9	2%	7%	3%	0%	1%
10	25%	9%	4%	1%	5%
vidēji	**5,00**	**3,12**	**2,40**	**2,07**	**2,45**

11. klase (633 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	2%	2%	2%	3%
0	15%	30%	45%	49%	45%
1	18%	31%	18%	20%	9%
2	12%	9%	6%	10%	7%
3	7%	4%	10%	6%	11%
4	7%	2%	6%	7%	3%
5	8%	2%	6%	3%	2%
6	3%	1%	0%	0%	6%
7	4%	1%	1%	1%	2%
8	6%	1%	1%	0%	3%
9	3%	3%	0%	0%	3%
10	16%	13%	3%	3%	5%
vidēji	**4,13**	**2,61**	**1,75**	**1,38**	**2,36**

12. klase (422 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	1%	2%	6%	1%
0	16%	15%	19%	68%	22%
1	9%	7%	20%	13%	11%
2	6%	3%	17%	4%	3%
3	3%	18%	5%	0%	2%
4	2%	11%	10%	1%	40%
5	1%	10%	6%	1%	13%
6	2%	5%	4%	0%	2%
7	9%	5%	4%	0%	2%
8	9%	6%	1%	0%	2%
9	16%	8%	2%	1%	0%
10	26%	11%	10%	5%	2%
vidēji	**5,96**	**4,59**	**3,26**	**1,01**	**3,10**

V2. VALSTS OLIMPIĀDE

9. klase

V2.9.1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus *n* un *m*, kuriem $\frac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis!

Atrisinājums

Ievērojam, ka $n^4 - m^4 = (n-m)(n+m)(n^2+m^2)$. Tā kā n un m ir naturāli skaitļi, tad $\frac{2015}{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}$ var būt naturāls skaitlis tikai tad, ja $n > m \geq 1$. Līdz ar to $1 \leq n-m < n+m < n^2+m^2$. Tas nozīmē, ka $n-m$, $n+m$ un n^2+m^2 ir trīs dažādi skaitļa 2015 dalītāji. Sadalām skaitli 2015 pirmreizinātājos: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Uzrakstām augošā secībā visus skaitļa 2015 dalītājus: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015.

Novērtējam saucēja izteiksmi:

$$n^4 - m^4 \geq n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = 4n(n-1)^2 + 2n^2 - 1 > 4(n-1)^3 - 1.$$

Tā kā $n^4 - m^4 \leq 2015$, tad arī $4(n-1)^3 - 1 < 2015$. No kurienes iegūstam, ka $(n-1)^3 < 504 < 512 = 8^3$, tātad $n-1 < 8$ jeb $n < 9$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka lielākā iespējamā *n* vērtība ir 8 un $n+m \leq 8+7 = 15$. Apskatām visus iespējamos gadījumus.

$n-m$	$n+m$	n	m	n^2+m^2	
1	5	**3**	**2**	13	Der, jo $2015:(1 \cdot 5 \cdot 13) = 31$.
1	13	7	6	85	Neder, jo nav 2015 dalītājs.
5	13	9	4	97	Neder, jo nav 2015 dalītājs.

Tātad vienīgās iespējamās vērtības ir $n = 3$ un $m = 2$.

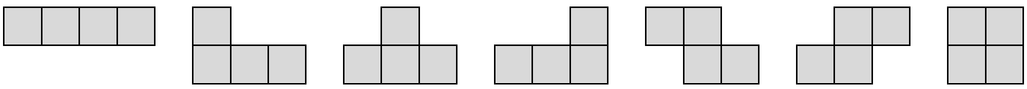
Piezīme. Var iegūt arī vājāku summas $n+m$ novērtējumu. Ievērojam: ja $n^2+m^2 = 2015$, tad $n-m = n+m = 1$, kas nav dažādi skaitļi. Tātad $n^2+m^2 \leq 403 < 441 = 21^2$. Līdz ar to ne *n*, ne *m* nevar pārsniegt 21, tātad $n+m \leq 42$. Šajā gadījumā papildus jāpārbauda vēl arī tās vērtības, kurām $n+m = 31$.

V2.9.2. Pierādīt, ka, izmantojot

c) visas septiņas dotās figūras (skat. 144. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

d) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri!

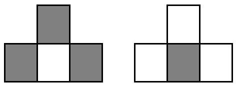
Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



144. att.

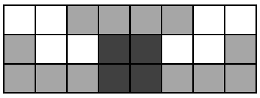
Atrisinājums

a) Visas septiņas dotās figūras kopā satur 28 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 28 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×28 (neder), 2×14, 4×7. Izkrāsojot taisnstūrus kā šaha galdiņu, katrā no tiem melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja visas dotās figūras izkrāsotu kā šaha galdiņu, tad tās visas, izņemot trešo, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Trešā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. 145. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām septiņām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk nekā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot visas septiņas dotās figūras, taisnstūri izveidot nav iespējams.

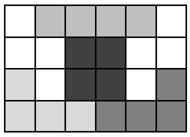


145. att.

b) Ja neizmanto trešo figūru, tad taisnstūri ir iespējams izveidot (skat., piemēram, 146. att. vai 147. att.).



146. att.



147. att.

V2.9.3. Aija izvēlas naturālu skaitli $n \leq 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \leq 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis *n,* tad skaitli *n* sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo 40; 80; 60; 20; 40; …, bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; … (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

1. risinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Katrs no tiem pieder vienam no trim cikliem:

100→100;

20→40→80→60→20;

4→8→16→32→64→28→56→12→24→48→96→92→84→68→36→72→44→88→76→5 2→4.

Pierādīsim, ka tie skaitļi, kas nedalās ar 4, nevar būt patīkami. Šķirojam divus gadījums.

- Nepāra skaitļi nevar būt patīkami, jo visi nākamie virknes locekļi būs tikai pāra skaitļi un, tātad, sākotnējā *n* vērtība tajā atkārtoti parādīties nevar.
- Pāra skaitli, kas nedalās ar 4, var pierakstīt formā $n = 4k + 2$. Šajā gadījumā otrais virknes loceklis ir vai nu $2 \cdot (4k + 2) = 4 \cdot (2k + 1)$, vai $2 \cdot (4k + 2) - 100 = 4 \cdot (2k - 24)$. Abos gadījumos virknes otrais loceklis dalās ar 4 un tas ir uzrakstāms formā $4m$. Visi nākamie virknes locekļi arī dalīsies ar 4, jo vai nu $2 \cdot 4m = 8m$, vai $2 \cdot 4m - 100 = 4 \cdot (2m - 25)$. Līdz ar to virknē nevar atkārtoti parādīties skaitlis, kas nedalās ar 4, un skaitlis $n = 4k + 2$ nav patīkams.

Tātad pavisam ir **25** patīkami skaitļi.

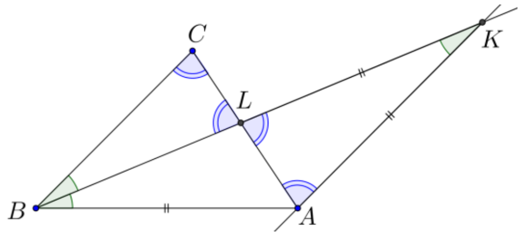
2. risinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Ja skaitlis *x* dalās ar 4, tad gan 2*x*, gan $2x - 100$ arī dalīsies ar 4. Aplūkosim virkni, sākot ar patvaļīgu skaitli x_1, kas dalās ar 4: $x_1, x_2, x_3, ...$ Tā kā ir tikai 25 skaitļi, kas tajā var parādīties, tad skaidrs, ka kādā brīdī virknes locekļi sāks atkārtoties. Aplūkosim pirmo skaitli virknē, kas atkārtojas, tas ir, tādu x_{j+1}, ka visi iepriekšējie $x_1, x_2, ..., x_j$ ir dažādi, bet x_{j+1} ir vienāds ar kādu no tiem. Pierādīsim, ka $x_{j+1} = x_1$, ar to arī būs pierādīts, ka skaitlis x_1 ir patīkams. Pieņemsim pretējo, ka $x_{j+1} = x_{k+1}$ un aplūkosim, kādi varēja būt iepriekšējie skaitļi x_j un x_k. Tā kā tiem jābūt dažādiem, tad skaidrs, ka x_{j+1} un x_{k+1} tika iegūti ar dažādām darbībām, tas ir, $x_{j+1} = 2x_j$ un $x_{k+1} = 2x_k - 100$ (vai otrādi), kas nozīmē, ka $2x_j = 2x_k - 100$ jeb $x_k - x_j = 50$ un tā ir pretruna, jo gan x_j, gan x_k dalās ar 4, bet 50 nedalās ar 4.

Vēl jāpierāda, ka pārējie skaitļi nav patīkami. Skaidrs, ka nepāra skaitļi nav patīkami, jo, ja x ir nepāra skaitlis, tad gan $2x$, gan $2x-100$ ir pāra skaitļi un tālāk virknē visi skaitļi būs pāra.
Ja skaitlis x dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tad x nav patīkams, jo gan $2x$, gan $2x-100$ dalās ar 4 un tālāk virknē visi skaitļi dalīsies ar 4.

V2.9.4. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BL (L atrodas uz malas AC), tā krusto taisni, kas no A vilkta paralēli BC, punktā K. Zināms, ka $LK=AB$. Pierādīt, ka $AB>BC$!

Atrisinājums

Tā kā $\angle LBC=\angle LBA$ pēc bisektrises definīcijas un $\angle LBC=\angle AKB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm BC un AK, tad $\angle LBA=\angle AKB$ un trijstūris AKB ir vienādsānu, pie kam $AB=AK$ (skat. 148. att.). Arī trijstūris AKL ir vienādsānu, jo pēc dotā un iepriekš iegūtā $LK=AB=AK$. Vienādsānu trijstūrim leņķi pie pamata ir vienādi, tāpēc $\angle ALK=\angle LAK$.
Tā kā $\angle ALK=\angle BLC$ kā krustleņķi un $\angle LAK=\angle ACB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm BC un AK, tad $\angle BLC=\angle BCL$ un trijstūris LBC ir vienādsānu, pie kam $BL=BC$.
No trijstūra nevienādības $AB+AK>BK=BL+LK=BC+AK$ un līdz ar to $AB>BC$.



148. att.

V2.9.5. Kāda ir izteiksmes $a^{20}+a^4+\dfrac{1}{a^4+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja a ir reāls skaitlis?

1. risinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a=0$.
Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^{20}+a^4+\frac{1}{a^4+1}=a^{20}+\frac{a^8+a^4+1}{a^4+1}=a^{20}+\frac{a^8}{a^4+1}+1.$$

Pirmie divi saskaitāmie ir nenegatīvi, tātad šīs izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

2. risinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a=0$.
Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^{20}+a^4+\frac{1}{a^4+1}=a^{20}-1+(a^4+1)+\frac{1}{a^4+1}.$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$(a^4+1)+\frac{1}{a^4+1}\geq 2\cdot\sqrt{(a^4+1)\cdot\frac{1}{a^4+1}}=2.$$

Tā kā $a^{20}\geq 0$, tad iegūstam $a^{20}+a^4+\dfrac{1}{a^4+1}\geq 0-1+2=1$. Tātad dotās izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

10. klase

V2.10.1. Kvadrātvienādojuma

$$(1+\sqrt{5})x^2-\sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}}\cdot(1+\sqrt{5})^2x+\sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}}=0$$

saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3$ vērtība ir vesels skaitlis!

Atrisinājums
No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a+b=\sqrt[4]{\dfrac{7}{3+\sqrt{5}}}\cdot(1+\sqrt{5}) \\ ab=\sqrt[4]{\dfrac{7}{3+\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3=ab(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)=ab(a+b)^3=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{7}{3+\sqrt{5}}\right)^3}\cdot(1+\sqrt{5})^3=\frac{7}{3+\sqrt{5}}\cdot(1+\sqrt{5})^2=$$

$$=\frac{7\cdot(1+2\sqrt{5}+5)}{3+\sqrt{5}}=\frac{7\cdot 2\cdot(3+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}=14.$$

Tā kā skaitlis 14 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

V2.10.2. Pierādīt, ka katram naturālam *n* izteiksme $3n^5+5n^4-8n$ dalās ar 10.

1. risinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $3+5-8=0$ dalās ar 10.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ja $n=k$, tad $3k^5+5k^4-8k$ dalās ar 10.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ja $n=k+1$, tad $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās ar 10.

Ekvivalenti pārveidojam izteiksmi $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$:

$$3(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)+5(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-8(k+1)=$$

$$=3k^5+20k^4+50k^3+60k^2+27k=3k^5+5k^4-8k+15k^4+50k^3+60k^2+35k=$$

$$=3k^5+5k^4-8k+5k\cdot(3k^3+10k^2+12k+7).$$

Saskaitāmais $3k^5+5k^4-8k$ dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.

Saskaitāmais $5k\cdot(3k^3+10k^2+12k+7)$ dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo

- ja *k* ir pāra skaitlis, tad reizinātājs *k* dalās ar 2;
- ja *k* ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs $3k^3+10k^2+12k+7$ ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā izteiksme $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās gan ar 2, gan ar 5, tad tā dalās arī ar 10 un līdz ar to esam pierādījuši, ka $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās ar 10.

No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka katram naturālam *n* izteiksme $3n^5+5n^4-8n$ dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Pārveidojam doto izteiksmi:

$$3n^5+5n^4-8n=n\,(3n^4-3n^3+8n^3-8)=n\,(3n^3(n-1)+8\,(n^3-1))=$$

$$=n\,(3n^3(n-1)+8\,(n-1)(n^2+n+1))=n\,(n-1)\,(3n^3+8(n^2+n+1))$$

Viens no reizinātājiem *n* vai $n-1$ ir pāra skaitlis, tāpēc dotā izteiksme noteikti dalās ar 2. Vēl jāpierāda, ka dotā izteiksme dalās ar 5.

Skaitli *n* dalot ar 5, iespējamas piecas dažādas atlikumu vērtības: 0, 1, 2, 3, 4. Apskatām visus gadījumus:

- $n=5k$, tad reizinātājs *n* dalās ar 5;
- $n=5k+1$, tad reizinātājs $n-1$ dalās ar 5;
- $n=5k+2$ jeb $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,5)$, tad

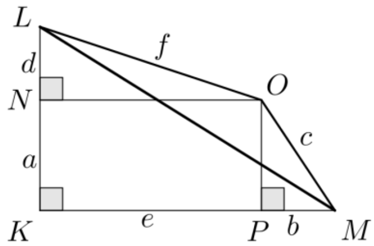
$$3n^3+8\cdot(n^2+n+1)\equiv 3\cdot 8+8\cdot(4+2+1)\equiv 4+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5);$$

- $n = 5k + 3$ jeb $n \equiv 3 \pmod 5$, tad
$$3n^3 + 8 \cdot (n^2 + n + 1) \equiv 3 \cdot 27 + 8 \cdot (9 + 3 + 1) \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5;$$
- $n = 5k + 4$ jeb $n \equiv 4 \pmod 5$, tad
$$3n^3 + 8 \cdot (n^2 + n + 1) \equiv 3 \cdot 64 + 8 \cdot (16 + 4 + 1) \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod 5.$$

Esam ieguvuši, ka visos gadījumos dotā izteiksme dalās gan ar 2, gan ar 5, tātad tā dalās ar 10.

V2.10.3. Pozitīviem skaitļiem *a, b, c, d, e, f* ir spēkā sakarības $a^2 + b^2 = c^2$ un $d^2 + e^2 = f^2$. Pierādīt, ka $(a+d)^2 + (b+e)^2 \le (c+f)^2$.

1. risinājums. Tā kā visi dotie skaitļi ir pozitīvi, varam tos uztvert kā nogriežņu garumus. Apskatām taisnleņķa trijstūri *KLM* ar katešu garumiem $KL = a + d$ un $KM = e + b$ (skat. 149. att.). Novelkam nogriežņus $NO \parallel KM$ un $OP \parallel KL$ tā, ka $KN = OP = a$ un $KP = NO = e$. No dotajām sakarībām un Pitagora teorēmas trijstūros *OPM* un *LNO*, iegūstam, ka $OM = c$ un $LO = f$.



149. att.

Aprēķinām trijstūra *KLM* hipotenūzas garumu: $LM = \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2}$. No trijstūra nevienādības trijstūrī *LMO* izriet, ka $\sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2} \le c + f$. Tā kā abas nevienādības puses ir pozitīvas, tad, kāpinot kvadrātā, iegūst $(a+d)^2 + (b+e)^2 \le (c+f)^2$, kas arī bija jāpierāda.

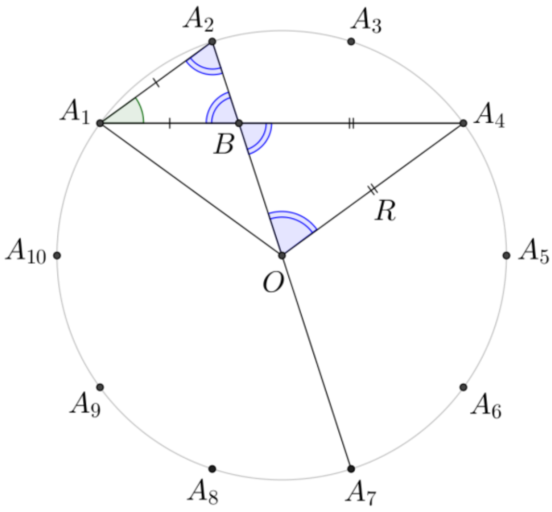
2. risinājums. Aplūkojam vektorus $\vec{x} = (a; b)$ un $\vec{y} = (d; e)$, tad
$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2} = c \text{ un } |\vec{y}| = \sqrt{d^2 + e^2} = \sqrt{f^2} = f;$$
$$\vec{x} + \vec{y} = (a+d; b+e) \text{ un } |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2}.$$

Tad izteiksmi $(a+d)^2 + (b+e)^2 \le (c+f)^2$ var pārrakstīt $|\vec{x} + \vec{y}|^2 \le (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$, kas ir patiesa, jo jebkuriem diviem vektoriem $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

V2.10.4. Pierādīt, ka regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2 + R = A_1A_4$, kur *R* ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

1. risinājums. Regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. 150. att.). Regulāra desmitstūra katra mala savelk $360° : 10 = 36°$ lielu loku. Tad $\angle A_1A_2A_7 = \frac{1}{2} \cup A_1A_9A_7 = 72°$ un $\angle A_2A_1A_4 = \frac{1}{2} \cup A_2A_3A_4 = 36°$ kā ievilktie leņķi un $\angle A_2OA_4 = \cup A_2A_3A_4 = 72°$ kā centra leņķis. No ΔA_1A_2B iegūstam, ka $\angle A_1BA_2 = 180° - 36° - 72° = 72°$.

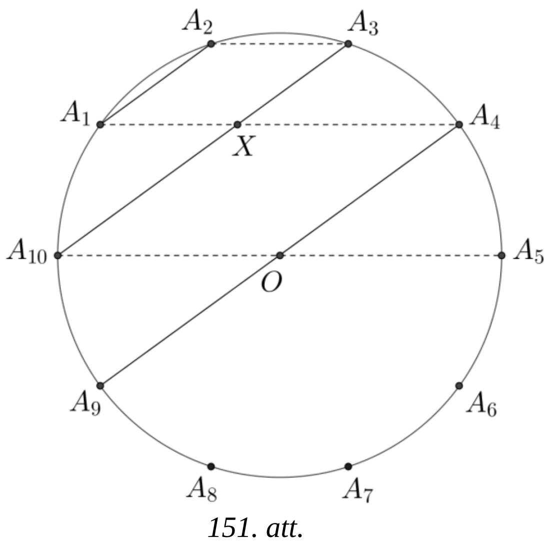
Ievērojam, ka $\angle OBA_4 = \angle A_1BA_2 = 72°$ kā krustleņķi. Tātad ΔA_1A_2B un ΔOA_4B ir vienādsānu, jo leņķi pie pamata ir vienādi, līdz ar to $A_1A_2 = A_1B$ un $BA_4 = OA_4 = R$. Tad $A_1A_2 + R = A_1B + BA_4 = A_1A_4$, kas arī bija jāpierāda.



150. att.

2. risinājums. Regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar O (skat. 151. att.). Regulāra desmitstūra visas malas savelk vienāda lieluma lokus. Diagonāles A_1A_2, A_3A_{10} un A_4A_9 ir savā starpā paralēlas, jo starp paralēlām hordām ir vienādi loki. Līdzīgi paralēlas ir arī diagonāles A_2A_3, A_1A_4 un A_5A_{10}, pie kam $A_3A_{10} = A_1A_4$, jo vienādus lokus savelk vienādas hordas.

Nogriežņi A_4A_9 un A_5A_{10} ir diametri. Nogriežņu A_1A_4 un A_3A_{10} krustpunktu apzīmējam ar X. Četrstūri $A_1A_2A_3X$ un $A_{10}XA_4O$ ir paralelogrami, jo to pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $A_1A_2 = XA_3$ un $OA_4 = XA_{10} = R$. Tātad $A_1A_2 + OA_4 = A_3A_{10}$ jeb $A_1A_2 + R = A_1A_4$, kas arī bija jāpierāda.

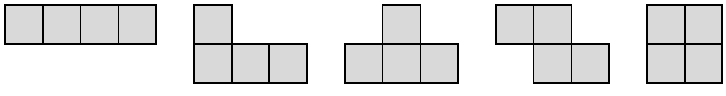


151. att.

V2.10.5. a) Pierādīt, ka, izmantojot visas piecas dotās figūras (skat. 152. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri!

b) Vai, izmantojot četras no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri?

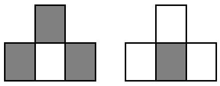
Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt vai apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



152. att.

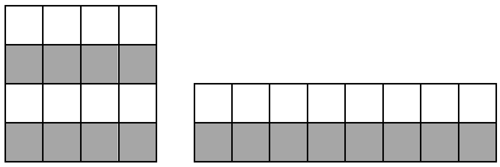
Atrisinājums

a) Visas piecas dotās figūras kopā satur 20 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 20 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×20 (neder, jo ir figūras, kuru augstums ir divas rūtiņas), 2×10, 4×5. Izkrāsojot taisnstūrus kā šaha galdiņu, katrā no tiem melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja visas dotās figūras izkrāsotu kā šaha galdiņu, tad tās visas, izņemot trešo, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Trešā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. 153. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām piecām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk kā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot visas piecas dotās figūras, taisnstūri izveidot nav iespējams.



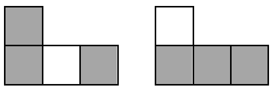
153. att.

b) Četras no dotajām figūrām kopā satur 16 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 16 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×16 (neder, jo ir figūras, kuru augstums ir divas rūtiņas), 2×8, 4×4. Spriežot līdzīgi kā a) gadījumā, secinām, ka nevar izmantot 153. att. redzamo figūru. Apskatīsim atlikušās četras figūras. Izkrāsosim taisnstūrus joslās (skat. 154. att.).



154. att.

Ievērojam, ka katrā taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja arī figūras izkrāsotu joslās, tad tās visas, izņemot otro, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Otrā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. 155. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām četrām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk kā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot četras no dotajām figūrām, taisnstūri izveidot nav iespējams.



155. att.

11. klase

V2.11.1. Kvadrātvienādojuma $(1+\sqrt{5})x^2-\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})^2x+\sqrt[4]{7}=0$ saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3+16a^4b^3+16a^3b^4$ vērtība ir vesels skaitlis!

Atrisinājums

No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a+b=\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5}) \\ ab=\dfrac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3+16a^4b^3+16a^3b^4=ab(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+16a^3b^2+16a^2b^3)=$$

$$=ab((a+b)^3+16a^2b^2(a+b))=\frac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[4]{7^3}\cdot(1+\sqrt{5})^3+16\cdot\frac{\sqrt[4]{7^2}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2}\right)=$$

$$= 7\cdot(1+\sqrt{5})^2 + \frac{16\cdot 7}{(1+\sqrt{5})^2} = 7\cdot\left((6+2\sqrt{5}) + \frac{16}{6+2\sqrt{5}}\right) =$$

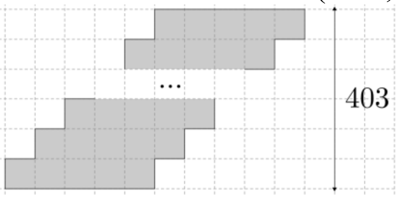
$$= 7\cdot\frac{36+24\sqrt{5}+20+16}{6+2\sqrt{5}} = 7\cdot 12\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = 84.$$

Tā kā skaitlis 84 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

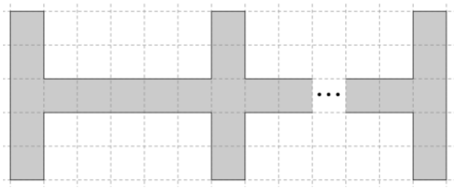
V2.11.2. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

Atrisinājums

Jā, šādu daudzstūri var uzzīmēt (skat., piemēram, 156. att.).



156. att.



157. att.

Figūras salikšanai izmantoti 403 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas. Tātad iegūtā daudzstūra laukums ir $5\cdot 403 = 2015$ rūtiņas. Tā kā katrs taisnstūris satur tieši četras iegūtā daudzstūra malas, tad uzzīmēts ir $4\cdot 403 = 1612$-stūris.

Piezīme. Daudzstūri var uzzīmēt arī, piemēram, kā parādīts 157. att.

V2.11.3. Pirātam Džonam Silveram kajītē ir 38 papagaiļi un 39 papagaiļu krātiņi. Katram papagailim ir savs krātiņš un vēl viens krātiņš stāv tukšs. Kādu dienu vētras laikā tie visi izmuka, tika noķerti un uz ātru roku salikti atpakaļ krātiņos (katrā krātiņā ne vairāk kā viens), bet ne obligāti savos. Vienā gājienā Džons Silvers var paņemt vienu papagaili un pārlikt uz to krātiņu, kurš dotajā brīdī ir tukšs. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru viņam noteikti pietiek, lai panāktu, ka visi papagaiļi atrodas savos sākotnējos krātiņos?

Atrisinājums

Apzīmēsim papagaiļus ar numuriem no 1 līdz 38 un krātiņus ar numuriem no 1 līdz 39 tā, ka sākotnēji papagaiļa numurs sakrīt ar krātiņa numuru. Vienkāršības dēļ tukšajā vietā sākumā ieliksim iedomātu papagaili ar numuru 39. Ņemsim patvaļīgu papagaili a_1, kas neatrodas savā krātiņā, pieņemsim, ka tas atrodas krātiņā a_2. Tad a_2 arī neatrodas savā vietā un atrodas kādā vietā a_3, utt., līdz papagailis a_n atrodas vietā a_1 ($2 \le n \le 39$). Tādā veidā visi papagaiļi sadalās ciklos. Ja ciklā ir n papagaiļi, tad šī cikla sakārtošanai nepieciešams tieši

a) $n-1$ gājiens, ja tajā ietilpst tukšais krātiņš. Tad tur ir $n-1$ papagailis un ar katru gājienu ne vairāk kā vienu var ielikt savā krātiņā, tātad mazāk gājienu nevar būt. Ar $n-1$ gājienu pietiek, jo vienmēr būs kāds papagailis, kuru ielikt savā vietā;

b) $n+1$ gājiens, ja tajā neietilpst tukšais krātiņš. Ar pirmo gājienu nevienu papagaili nevar ielikt savā vietā un ar katru nākamo gājienu ne vairāk kā vienu papagaili var ielikt savā vietā, tāpēc mazāk būt nevar. Pirmajā gājienā jebkuru papagaili pārceļ uz tukšo krātiņu, atlikušos $n-1$ sakārto kā a) gadījumā ar $n-1$ gājienu un pēdējā gājienā ieceļ savā vietā to, kuru pārcēla pirmo.

Tātad kopējais nepieciešamais gājienu skaits ir

- papagaiļu skaits + ciklu skaits, ja nevienā ciklā neietilpst tukšais krātiņš;
- papagaiļu skaits + ciklu skaits – 1, ja kādā ciklā ietilpst tukšais krātiņš.

Redzams, ka maksimālais gājienu skaits būs nepieciešams tad, kad ciklu skaits ir maksimālais un nevienā ciklā neietilpst tukšais krātiņš. Minimālais papagaiļu skaits ciklā ir 2, tāpēc maksimālais ciklu skaits ir $38:2=19$, tātad maksimālais gājienu skaits, kāds var būt nepieciešams, ir $38+19=57$ gājieni. Redzam: ja papagaiļus samaina vietām pa pāriem, tad tieši tik daudz gājieni arī ir vajadzīgi.

V2.11.4. Naturāli skaitļi *a*, *b* un *c* ir savstarpēji pirmskaitļi un visi ir lielāki nekā 50. Zināms, ka $a+b$ dalās ar *c* un $b+c$ dalās ar *a*. Atrast mazāko iespējamo *b* vērtību!

Atrisinājums

Mazākā iespējamā *b* vērtība ir 2549. Pierādīsim, ka mazāku *b* vērtību nav iespējams atrast.

Skaitlis $a+b+c$ dalās gan ar *a* gan ar *c*, tātad $a+b+c$ dalās ar *ac* (jo tie ir savstarpēji pirmskaitļi).

Tātad $a+b+c \geq ac$ jeb $b \geq ac-a-c = ac-a-c+1-1 = (a-1)(c-1)-1$. Līdz ar to mazākā *b* vērtība ir gadījumā, ja $a=51$ un $c=52$ (vai otrādi), t. i., $b = 50\cdot 51-1 = 2549$. Skaitļi 51, 2549, 52 apmierina dotos nosacījumus.

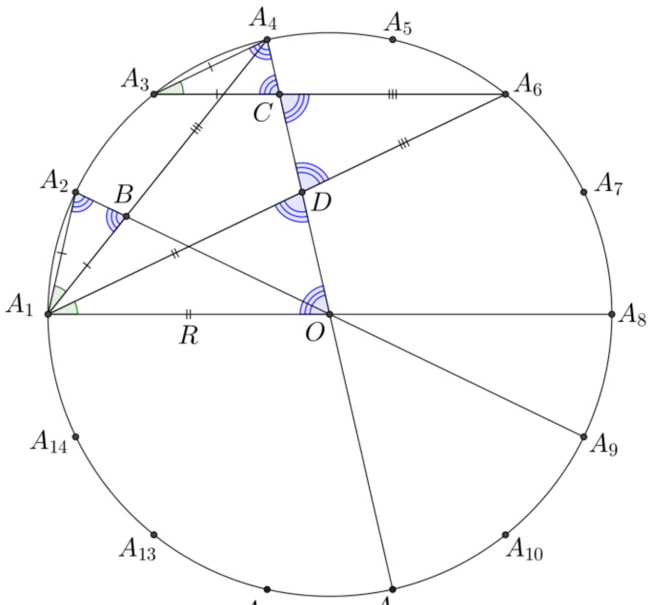
V2.11.5. Pierādīt, ka regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4 + R$, kur *R* ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

1. risinājums. Regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. 158. att.). Regulāra četrpadsmitstūra katras malas savilkto loku apzīmējam ar $\alpha = 360° : 14$.

Tad $\angle A_2A_1A_4 = \angle A_4A_3A_6 = \angle A_6A_1A_8 = \alpha$ un $\angle A_1A_2A_9 = \angle A_3A_4A_{11} = 3\alpha$ kā ievilktie leņķi un $\angle A_1OA_4 = 3\alpha$ kā centra leņķis.

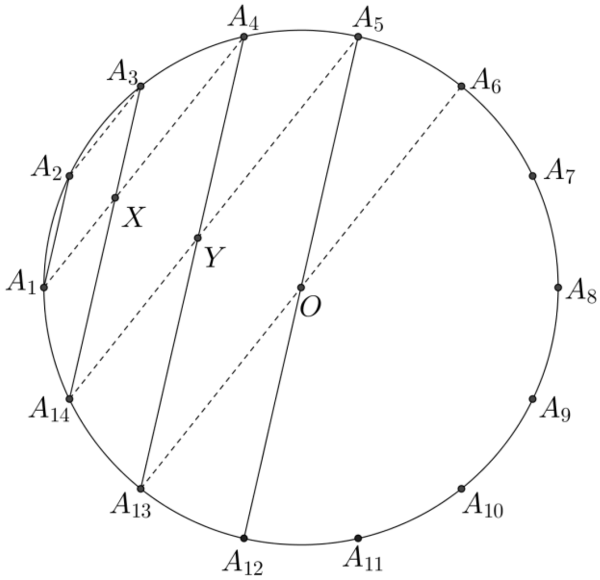
Ievērojam, ka $180° = 7\alpha$. No ΔA_1A_2B iegūstam, ka $\angle A_1BA_2 = 7\alpha-\alpha-3\alpha = 3\alpha$, līdzīgi no ΔA_3A_4C iegūst $\angle A_3CA_4 = 3\alpha$ un no ΔA_1OD iegūst $\angle A_1DO = 3\alpha$. Ievērojam, ka $\angle A_1DO = \angle A_6DC = 3\alpha$ un $\angle A_3CA_4 = \angle DCA_6 = 3\alpha$ kā krustleņķi. Tātad ΔA_1A_2B, ΔA_3A_4C, ΔOA_1D un ΔA_6CD ir vienādsānu, jo leņķi pie pamata ir vienādi. Līdz ar to $A_1B = A_1A_2 = A_3A_4 = A_3C$ un $A_1O = A_1D = R$, un $A_6D = A_6C$.

Tad $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1B + A_1D + DA_6 = A_3C + R + CA_6 = A_3A_6 + R = A_1A_4 + R$, kas arī bija jāpierāda.



158. att.

2. risinājums. Regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. 159. att.). Regulāra četrpadsmitstūra visas malas savelk vienāda lieluma lokus. Diagonāles A_1A_2, A_3A_{14}, A_4A_{13} un A_5A_{12} ir savā starpā paralēlas, jo starp paralēlām hordām ir vienādi loki. Līdzīgi paralēlas ir arī diagonāles A_2A_3, A_1A_4, A_5A_{14} un A_6A_{13}, pie kam $A_3A_{14} = A_1A_4$ un $A_4A_{13} = A_5A_{14}$, jo vienādus lokus savelk vienādas hordas.



159. att.

Nogriežņi A_5A_{12} un A_6A_{13} ir diametri. Nogriežņu A_1A_4 un A_5A_{14} krustpunktu apzīmēsim ar *Y*. Četrstūris XA_4YA_{14} ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $A_1A_2 = XA_3$ un $XA_{14} = A_3A_{14} - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1A_2$.

Nogriežņu A_4A_{13} un A_3A_{14} krustpunktu apzīmēsim ar *X*. Četrstūris $A_1A_2A_3X$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $A_4Y = A_{14}X$ un $YA_{13} = A_4A_{13} - XA_{14} = A_1A_6 - A_1A_4 + A_1A_2$.

Četrstūris $A_{13}YA_5O$ arī ir paralelograms un $OA_5 = YA_{13} = R$. Tātad $A_1A_6 - A_1A_4 + A_1A_2 = R$ jeb $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4 + R$, kas arī bija jāpierāda.

12. klase

V2.12.1. Zināms, ka $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{2015}$. Aprēķināt $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ vērtību!

1. risinājums. Aplūkojam starpību

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = 2.$$

Tātad $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 + \frac{1}{2015} = \frac{4031}{2015}$.

2. risinājums. Izmantojot trigonometrijas formulas, pārveidojam doto sakarību:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\cos(2x + x)}{\cos x} = \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x}{\cos x} =$$

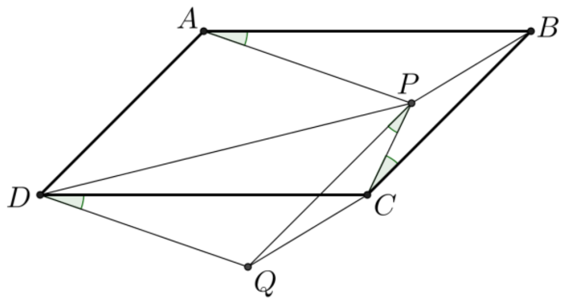
$$= \cos 2x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x = \frac{1}{2015}.$$

Izsakot iegūstam $4\sin^2 x = \frac{2014}{2015}$. Aprēķinām $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ vērtību:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{\sin(2x+x)}{\sin x}=\frac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}{\sin x}=\frac{2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\sin x}{\sin x}=$$
$$=2\cos^2 x+\cos 2x=2(1-\sin^2 x)+(1-2\sin^2 x)=3-4\sin^2 x=3-\frac{2014}{2015}=\frac{4031}{2015}.$$

V2.12.2. Paralelograma *ABCD* iekšpusē atzīmēts punkts *P* tā, ka $\angle PAB=\angle PCB$. Pierādīt, ka $\angle PBC=\angle PDC$!

1. risinājums. Apzīmējam $\angle PAB=\angle PCB=\alpha$. No virsotnes *D* novelkam nogriezni *DQ*, kas paralēls *AP*, bet no *C* – nogriezni *CQ*, kas paralēls *BP* (skat. 160. att.). Trijstūri *ABP* un *DCQ* ir vienādi pēc pazīmes $\ell m\ell$ un to attiecīgie elementi ir vienādi, t. i., $PB=QC$ un $\angle PAB=\angle QDC=\alpha$. Tad *PBCQ* ir paralelograms, jo $PB=QC$ un $PB\parallel QC$. Līdz ar to $\angle CPQ=\angle PCB=\alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *PQ* un *BC*. Ap četrstūri *DPCQ* var apvilkt riņķa līniju, jo vienādi leņķi $\angle CPQ$ un $\angle CDQ$ balstās uz *CQ*. Tātad $\angle PDC=\angle PQC$, jo abi ir ievilkti leņķi, kas balstās uz hordas *PC*. Paralelograma *PBCQ* pretējie leņķi ir vienādi, tāpēc $\angle PBC=\angle PQC$. Tātad $\angle PBC=\angle PDC$.

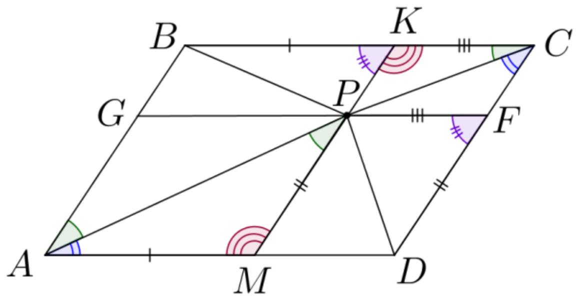


160. att.

2. risinājums. (balstās uz Viktora Iļdeikina, Rīgas Valsts 1. ģimnāzija, risinājumu) Tā kā pēc dotā $\angle PAB=\angle PCB$ un $\angle BAD=\angle BCD$ kā paralelograma pretējie leņķi, tad $\angle PAD=\angle PCD$. Caur punktu *P* novelkam $MK\parallel AB$, $M\in AD$, $K\in BC$, un $FG\parallel AD$, $F\in CD$, $G\in AB$ (skat. 161. att.). Tad iegūstam, ka $\angle AMP=\angle PKC$ un $\angle BAP=\angle APM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Tātad $\Delta PCK\sim\Delta APM$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un to atbilstošās malas ir proporcionālas:

$$\frac{MP}{AM}=\frac{KC}{PK}. \qquad (*)$$

Tā kā paralelograma pretējās malas ir vienādas, tad $MP=FD$ (no paralelograma *MPFD*), $AM=BK$ (no paralelograma *AMKB*), $KC=PF$ (no paralelograma *KCFP*). Tad vienādību (*) var pārrakstīt kā $\frac{FD}{BK}=\frac{PF}{PK}$. No $GF\parallel BC$ un $KM\parallel BC$ izriet, ka $\angle PFD=\angle BKP$. Līdz ar to $\Delta PFD\sim\Delta PKB$ pēc pazīmes $m\ell m$ un $\angle PDF=\angle PBK$ jeb $\angle PDC=\angle PBC$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.



161. att.

Piezīme. Uzdevumu var risināt trijstūri *ABP* paralēli pārnesot par vektoru $\overrightarrow{AD}$.

V2.12.3. Pierādīt, ka jebkuram naturālam nepāra skaitlim n izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 2015.

1. risinājums. Ievērojam, ka $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Tā kā visi pirmreizinātāji ir dažādi, tad pietiek pierādīt, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās gan ar 5, gan ar 13, gan 31.

Izmantosim teorēmu: ja veseli skaitļi *A* un *B*, dalot ar *n*, dod attiecīgi atlikumus *a* un *b*, tad dalot ar *n* skaitļus $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$ rodas tādi paši atlikumi, kādus dod $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ dalot ar *n*.

Apskatām dotās izteiksmes dalāmību ar katru pirmreizinātāju.

- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 5, ir $4^n + 1^n + 4^n - 4^n$ jeb $4^n + 1$. Tā kā *n* ir nepāra skaitlis, tad $4^n + 1 = 4^{2k+1} + 1 = 4 \cdot 16^k + 1$. No tā, ka 16, dalot ar 5 dod atlikumu 1, iegūst, ka $4 \cdot 16^k + 1$ dalot ar 5, dod atlikumu $4 \cdot 1^k + 1 = 5$ jeb dalās ar 5. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 5.
- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 13, ir $7^n + 6^n + 11^n - 11^n$ jeb $7^n + 6^n = 7^{2k+1} + 6^{2k+1} = 7 \cdot 49^k + 6 \cdot 36^k$. No tā, ka 49 un 36, dalot ar 13, abi dod atlikumu 10, iegūst, ka $7 \cdot 49^k + 6 \cdot 36^k$, dalot ar 13, dod atlikumu $7 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^k = 13 \cdot 10^k$ jeb dalās ar 13. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 13.
- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 31, ir $6^n + 12^n + 25^n - 12^n$ jeb $6^n + 25^n = 6^{2k+1} + 25^{2k+1} = 6 \cdot 36^k + 25 \cdot 625^k$. No tā, ka 36 un 625, dalot ar 31, abi dod atlikumu 5, iegūst, ka $6 \cdot 36^k + 25 \cdot 625^k$, dalot ar 31, dod atlikumu $6 \cdot 5^k + 25 \cdot 5^k = 31 \cdot 5^k$ jeb dalās ar 31. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 31.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās ar 5, 13 un 31, tātad tā dalās ar 2015.

2. risinājums. Ievērojam, ka $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Tā kā visi pirmreizinātāji ir dažādi, nepieciešams pierādīt, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās gan ar 5, gan ar 13, gan 31.

Apskatām dotās izteiksmes dalāmību ar katru pirmreizinātāju:

- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 4^n + 1^n + 4^n - 4^n \equiv 4^n + 1^n \equiv$
  $\equiv (-1)^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 7^n + 6^n + 11^n - 11^n \equiv 7^n + 6^n \equiv$
  $\equiv (-6)^{2k+1} + 6^{2k+1} \equiv 0 \pmod{13}$;
- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 6^n + 12^n + 25^n - 12^n \equiv 6^n + 25^n \equiv$
  $\equiv 6^{2k+1} + (-6)^{2k+1} \equiv 0 \pmod{31}$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās ar 5, 13 un 31, tātad tā dalās ar 2015.

V2.12.4. Katrs no skaitļu ass punktiem ar veselu koordinātu ir nokrāsots vai nu baltā, vai melnā krāsā. Nekādi divi balti punkti neatrodas viens no otra attālumā 1 un nekādi divi melni punkti neatrodas viens no otra attālumā *d*. Noteikt, kādām naturālām *d* vērtībām šāds krāsojums ir iespējams!

Atrisinājums

Šāds krāsojums iespējams tikai tad, ja *d* ir nepāra skaitlis. Tad der krāsojums, kur punkti nokrāsoti pamīšus baltā un melnā krāsā (skat. 162. att.).

162. att.

Skaidrs, ka divi baltie punkti nevar atrasties blakus. Ja divi melnie punkti atrodas blakus (piemēram, pozīcijās 1 un 2), tad *d* vienības tālāk (pozīcijās $d+1$ un $d+2$) atrodas divi baltie punkti, kas nav iespējams pēc uzdevuma nosacījumiem. Tātad punktiem jābūt izkrāsotiem pamīšus. Redzams, ka pamīšus izvietojot punktus, uzdevuma nosacījumi tiek apmierināti, ja *d* ir nepāra skaitlis, bet, ja *d* ir pāra skaitlis, tad ne.

V2.12.5. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no diviem burtiem *a* un *b*. Jebkuru vārdu var iegūt no vārda "*a*", atkārtoti lietojot šādus trīs likumus:

4) pierakstot vārdam galā burtu *b*;
5) pierakstot vārdam galā sevi pašu;
6) aizstājot vārdā trīs pēc kārtas esošus burtus *a* ar vienu burtu *b*.

Vai votivapu valodā ir vārdi **a)** *abbababab*; **b)** *baabaabaa*?

Atrisinājums

a) Vārdu "*abbababab*" var iegūt šādi:

$$a \xrightarrow{2)} aa \xrightarrow{2)} aaaa \xrightarrow{2)} aaaaaaaa \xrightarrow{2)} aaaaaaaaaaaaaaaa \xrightarrow{3)} abaaaaaaaaaaaa \xrightarrow{3)}$$

$$\xrightarrow{3)} abbaaaaaaaaa \xrightarrow{3)} abbabaaaaa \xrightarrow{3)} abbababa \xrightarrow{1)} abbababab$$

b) Vārdu "*baabaabaa*" nevar iegūt. Burtu *a* aizstājam ar ciparu 1, bet burtu *b* – ar ciparu 3. Tad visi vārdi votivapu valodā tiek aizstāti ar naturāliem skaitļiem, kuru pierakstā izmantoti tikai cipari 1 un 3.

Ievērojam, ka sākotnējais vārds "*a*" jeb skaitlis 1 nedalās ar 3.

Pierādīsim, ja kāds skaitlis nedalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī nedalās ar 3:

1) ja skaitlis nedalās ar 3, tad, pierakstot tam galā 3, arī iegūtais skaitlis nedalās ar 3, jo ciparu summas atlikums, dalot ar 3, nemainās;
2) ja skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad iegūtā skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2; ja skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad iegūtā skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1; abos gadījumos iegūtais skaitlis nedalās ar 3;
3) skaitļa ciparu summa nemainās, aizstājot 111 ar 3, tātad iegūtais skaitlis nedalās ar 3.

Aizstājot vārda "*baabaabaa*" burtus ar cipariem, iegūst skaitli 311311311, kas dalās ar 3, jo tā ciparu summa ir 15. Tātad, vairākkārt izmantojot dotos likumus, šo vārdu nav iespējams iegūt.

VALSTS OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2014./2015. mācību gada Valsts matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (73 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	3%	0%	0%	1%	10%
0	23%	12%	18%	7%	33%
1	23%	7%	16%	15%	11%
2	25%	1%	7%	11%	23%
3	5%	0%	15%	21%	19%
4	4%	0%	21%	8%	1%
5	8%	15%	1%	14%	0%
6	5%	26%	4%	10%	0%
7	3%	1%	8%	1%	0%
8	0%	0%	1%	1%	0%
9	0%	1%	1%	0%	0%
10	0%	36%	7%	11%	3%
vidēji	**2,04**	**6,19**	**3,38**	**3,93**	**1,64**

10. klase (64 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	16%	5%	9%	8%	3%
0	19%	9%	16%	17%	6%
1	20%	11%	5%	9%	8%
2	6%	3%	9%	5%	20%
3	9%	14%	25%	0%	8%
4	0%	3%	2%	5%	13%
5	0%	3%	3%	2%	6%
6	3%	2%	3%	2%	16%
7	3%	3%	5%	0%	2%
8	0%	6%	0%	2%	2%
9	0%	6%	3%	0%	6%
10	23%	34%	20%	52%	11%
vidēji	**3,98**	**5,97**	**4,45**	**6,32**	**4,50**

11. klase (57 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	12%	9%	4%	28%	30%
0	32%	28%	11%	54%	25%
1	12%	5%	33%	5%	30%
2	2%	2%	4%	0%	4%
3	7%	2%	5%	0%	5%
4	2%	0%	0%	2%	0%
5	0%	0%	5%	2%	4%
6	4%	2%	9%	4%	0%
7	4%	0%	2%	0%	0%
8	2%	2%	5%	4%	2%
9	0%	9%	7%	0%	0%
10	25%	42%	16%	2%	2%
vidēji	**3,98**	**5,90**	**4,25**	**1,22**	**1,45**

12. klase (82 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	10%	10%	6%	6%	1%
0	52%	84%	49%	11%	13%
1	5%	5%	6%	9%	2%
2	1%	0%	11%	6%	1%
3	1%	0%	15%	6%	1%
4	1%	0%	1%	11%	0%
5	1%	0%	0%	22%	9%
6	1%	0%	0%	4%	11%
7	1%	0%	1%	0%	9%
8	0%	0%	0%	2%	17%
9	2%	0%	0%	4%	2%
10	23%	1%	11%	20%	33%
vidēji	**3,23**	**0,19**	**2,08**	**4,92**	**6,73**

P2. PAPILDUS SACENSĪBAS

P2.1. Pierādīt, ka dažādiem reāliem skaitļiem *a*, *b* un *c* sakarība $a+b+c=0$ ir spēkā tad un tikai tad, ja $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Atrisinājums

Otro sakarību pārrakstām formā $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. Ievērojam, ka

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2-ab+b^2-ac+c^2-bc)=$$

$$=(a+b+c)\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}.$$

Lai pierādītu prasīto, jāpierāda nepieciešamais un pietiekamais nosacījums.

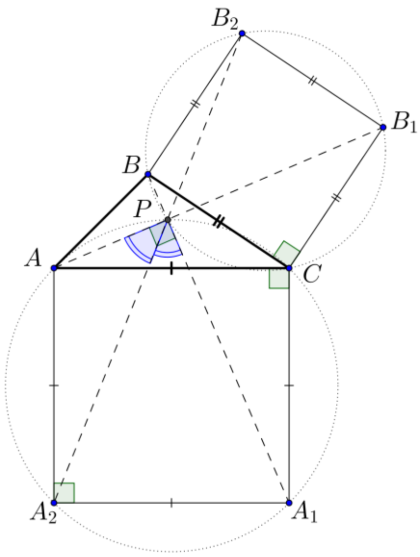
$\Rightarrow$ Ja $a+b+c=0$, tad $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ jeb $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$\Leftarrow$ Ja $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, tad tā kā *a*, *b* un *c* visi ir atšķirīgi, otrais reizinātājs vienmēr ir pozitīvs, līdz ar to jābūt $a+b+c=0$.

P2.2. Uz trijstūra *ABC* malām *AC* un *BC* uz āru ir konstruēti kvadrāti ACA_1A_2 un BCB_1B_2. Pierādīt, ka taisnes A_1B, A_2B_2 un AB_1 krustojas vienā punktā!

Atrisinājums

Tā kā $AC=A_1C$, $\angle ACB_1=\angle ACB+\angle BCB_1=\angle ACB+\angle ACA_1=\angle A_1CB$, $BC=B_1C$, tad $\Delta ACB_1=\Delta A_1CB$ pēc pazīmes $m\ell m$ (skat. 163. att.). Ievērojam, ka ΔACB_1, pagriežot to par $90°$, sakrīt ar ΔA_1CB. Tāpēc $AB_1\perp BA_1$. Apzīmējam AB_1 un BA_1 krustpunktu ar *P*. Tā kā $\angle AA_2A_1=\angle APA_1=90°$, tad ap četrstūri PA_1A_2A var apvilkt riņķa līniju. Tad $\angle A_1PA_2=\angle A_2PA=45°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām. Līdzīgi iegūst, ka $\angle BPB_2=\angle B_2PB_1=45°$. Tas nozīmē, ka punkti A_2, *P* un B_2 atrodas uz vienas taisnes jeb taisnes A_1B, A_2B_2 un AB_1 krustojas vienā punktā, kas arī bija jāpierāda.



163. att.

P2.3. Naturālus skaitļus x un y sauc par *draudzīgiem*, ja $xy+1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Piemēram, skaitļi 2 un 40 ir draudzīgi. Pierādīt: ja skaitļi a un b ir *draudzīgi*, tad eksistē tāds naturāls skaitlis c, ka vienlaikus a un c ir *draudzīgi*, un arī b un c ir *draudzīgi*!

Atrisinājums

Pēc dotā $ab+1=k^2$, kur k ir naturāls skaitlis. Ja $c=2k+a+b$, tad

- $ac+1=2ka+a^2+ab+1=2ka+a^2+k^2=(a+k)^2$;
- $bc+1=2kb+b^2+ab+1=2kb+b^2+k^2=(b+k)^2$.

Līdz ar to esam parādījuši, ka vērtība $c=2k+a+b$, kur k ir naturāls skaitlis, atbilst uzdevuma nosacījumiem.

P2.4. Atrast visas funkcijas, kas definētas veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tādas, ka $f(1)=f(-1)$ un visiem veseliem x un y izpildās

$$f(x)+f(y)=f(x+2xy)+f(y-2xy).$$

Atrisinājums

Der visas funkcijas formā $f(m\cdot 2^i)=k_i$, kur k_i katram $i\geq 0$ ir kāds patvaļīgs vesels skaitlis un m ir nepāra.

Ievietojam $x=1$ un $y=n$, tad

$$f(1)+f(n)=f(1+2n)+f(-n). \qquad (*)$$

Ievietojot $x=n$ un $y=-1$, iegūst $f(n)+f(-1)=f(-n)+f(2n-1)$.

Salīdzinot šos vienādojumus, iegūstam, ka $f(2n-1)=f(2n+1)$, tas nozīmē, ka

$$...=f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=f(3)=f(5)=...$$

Tātad funkcijas vērtība ir viena un tā pati visiem nepāra skaitļiem, citiem vārdiem sakot, $f(2n+1)=f(1)$ visiem veseliem n.

Ievietojot vienādojumā (*) sakarību $f(2n+1)=f(1)$, iegūstam, ka $f(n)=f(-n)$ visiem veseliem n.

Dotajā vienādībā ievietojot $x=2k+1$ un $y=n$ un ievērojot, ka $x+2xy$ šajā gadījumā ir nepāra skaitlis, tātad $f(x)$ un $f(x+2xy)$ saīsinās, iegūstam

$$f(n)=f(n-2\cdot(2k+1)\cdot n)=f(-(4k+1)\cdot n)=f((4k+1)\cdot n).$$

Dotajā vienādībā ievietojot $x=n$ un $y=2k+1$ un ievērojot, ka $y-2xy$ šajā gadījumā ir nepāra skaitlis, tātad $f(y)$ un $f(y-2xy)$ saīsinās, iegūstam

$$f(n)=f(n+2\cdot(2k+1)\cdot n)=f((4k+3)\cdot n).$$

Tātad $f(n)=f(mn)$ jebkuram nepāra skaitlim m.

Tas nozīmē, ka funkcijas vērtības tiek viennozīmīgi noteiktas ar tās vērtībām punktos 2^i, jo jebkuru naturālu skaitli n var izteikt formā $n=m\cdot 2^i$, kur m – nepāra skaitlis, tātad $f(n)=f(m\cdot 2^i)=f(2^i)$. Funkcijas vērtības punktos 2^i, var izvēlēties patvaļīgi, t. i., $f(2^i)=k_i$, kur k_i ir patvaļīgs vesels skaitlis visiem $i\geq 0$. Funkcijas vērtība tad tiek definēta ar izteiksmi $f(m\cdot 2^i)=k_i$ visiem nepāra m un $i\geq 0$. Parādīsim, ka visas šādas funkcijas der.

Pieņemsim, ka $x=u\cdot 2^i$ un $y=v\cdot 2^j$, kur u un v ir nepāra. Tad

$$f(x)=k_i,\ f(y)=k_j;$$

$$f(x+2xy)=f(u\cdot 2^i+uv\cdot 2^{i+j+1})=f(2^i(u+uv\cdot 2^{j+1}))=k_i;$$

$$f(y-2xy)=f(v\cdot 2^j-uv\cdot 2^{i+j+1})=f(2^j(v-uv\cdot 2^{i+1}))=k_j$$

un dotā vienādība $f(x)+f(y)=f(x+2xy)+f(y-2xy)$ izpildās.

P2.5. Parlamentā, kurā ir $n \geq 2$ deputāti, darbojas $k \geq 0$ komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi n deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai k vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas?

Atrisinājums

Lielākā k vērtība ir $k = n-2$.

Pierādīsim, ka lielāka k vērtība nav iespējama.

Apzīmējam deputātus ar numuriem no 1 līdz n, tad komisijas būs skaitļu no 1 līdz n apakškopas. Ja $k = n-1$, tad var izvēlēties komisijas, piemēram, šādi: $\{1;\, 2\}$, $\{1;\, 3\}$, ..., $\{1;\, n-1\}$, $\{1;\, n\}$. Tā kā 1 noteikti atradīsies rindā blakus kādam citam deputātam, tad ir komisija, kuras visi deputāti sēž pēc kārtas.

Pamatosim, ka vērtība $k = n-2$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Pierādīsim to ar matemātiskās indukcijas principu. Komisiju, kurā ir tikai 2 deputāti, sauksim par 2-komisiju.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad $k = 0$ un nevienas komisijas deputāti nesēž pēc kārtas.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā tā, ka nevienas no $k = n-3$ komisijām visi locekļi nesēž pēc kārtas.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka n deputātus var nosēdināt rindā tā, ka nevienas no $k = n-2$ komisijām visi locekļi nesēž pēc kārtas.

- Pieņemsim, ka ir deputāts *A*, kurš nav nevienā komisijā. Tad atlikušo $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā pēc induktīvā pieņēmuma un deputātu *A* nosēdināt rindas beigās (vai jebkurā citā vietā).
- Pieņemsim, ka ir deputāts *B*, kurš ietilpst tikai vienā komisijā *K*. Tad, izslēdzot deputātu *B* un likvidējot komisiju *K*, pārējo $n-1$ deputātu pēc induktīvā pieņēmuma var sasēdināt tā, ka nosacījums izpildās. Tad, ja kādā galā nesēž neviens no komisijas *K*, deputātu *B* var sēdināt tajā galā, pretējā gadījumā jebkur (jo tad komisijas *K* locekļiem jau tāpat kāds sēž pa vidu).
- Atliek gadījums, kad katrs deputāts ietilpst vismaz divās komisijās. Šajā gadījumā noteikti atradīsies deputāts, kurš piedalās ne vairāk kā vienā 2-komisijā – pretējā gadījumā, ja katrs no n deputātiem piedalās vismaz divās 2-komisijās, tad kopējais 2-komisiju skaits būtu vismaz $2n : 2 = n$, bet kopējais komisiju skaits ir $n-2$.

  Izvēlamies deputātu *C*, kurš piedalās ne vairāk kā vienā 2-komisijā. Apzīmēsim šo 2-komisiju ar K_2, bet, ja tādas nav, tad par K_2 ņemsim jebkuru komisiju, kurā šis deputāts piedalās. Izslēgsim *C* no parlamenta un no visām komisijām, kur tas ietilpst, komisiju K_2 likvidēsim. Tad pēc induktīvā pieņēmuma atlikušo $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā tā, lai atlikušo $n-3$ komisiju deputāti tajā nesēdētu pēc kārtas. Tad deputātu *C* (analogi kā otrajā gadījumā) var nosēdināt tā, lai komisija K_2 arī nesēdētu pēc kārtas.

A2. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

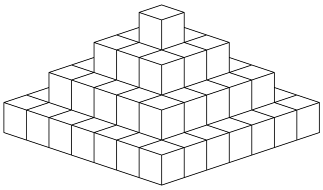
9. klase

A2.9.1. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

Atrisinājums

Dotos skaitļus apzīmējam ar x un $x+2015$. Šo skaitļu reizinājums ir $x\cdot(x+2015)$. Apskatām funkciju $f(x)=x\cdot(x+2015)=x^2+2015x$. Funkcijas grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_v=\dfrac{-2015}{2}=-1007{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tātad meklētie divi skaitļi ir $-1007{,}5$ un 1007,5.

A2.9.2. Tornis ir salikts no vienības kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$. Apakšējā slānī ir 7×7 kubiņi. Otrs slānis ir novietots virs pirmā slāņa centrālās daļās, tajā ir 5×5 kubiņi. Trešajā slānī, kurš novietots apakšējās daļas centrā, ir 3×3 kubiņi un augšā centrā ir 1 vienības kubiņš (skat. 164. att.). Vai šo torni var salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$?



164. att.

Atrisinājums

Katru slāni izkrāsosim trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. 165. att.). Katrs bloks ar izmēriem $1\times1\times3$ satur visas trīs krāsas, tāpēc visi bloki kopā satur vienāda skaita katras krāsas kubiņu. Tā kā tornis satur 29 vienības kubiņus krāsā 1, 28 – krāsā 2, 27 – krāsā 3, tad torni nevar salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1

165. att.

A2.9.3. Pierādīt, ka x^5-5x^3+4x dalās ar 120, ja x ir vesels skaitlis!

Atrisinājums

Sadalām doto izteiksmi reizinātājos:

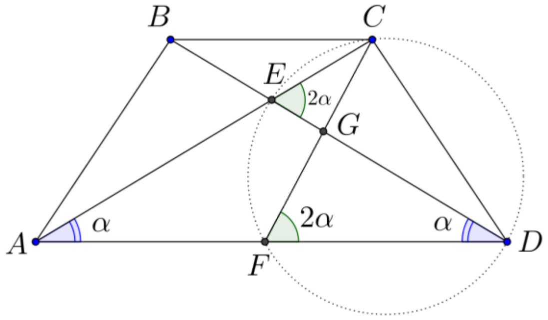
$$x^5-5x^3+4x=x\cdot(x^4-5x^2+4)=x\cdot(x^4-x^2-4x^2+4)=x\cdot(x^2(x^2-1)-4(x^2-1))=$$

$$=x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-4)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2).$$

Esam ieguvuši, ka dotā izteiksme ir piecu pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums. Vismaz divi no šiem skaitļiem dalās ar 2, no kuriem viens dalās arī ar 4, vismaz viens – ar 3, un vismaz viens – ar 5. Tātad šo skaitļu reizinājums dalās ar $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

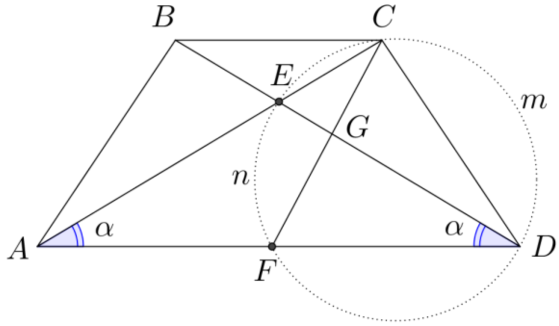
A2.9.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, bet diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *CDE* apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu *AD* iekšējā punktā *F*. Nogriežņu *CF* un *BD* krustpunkts ir *G*. Nosaki $\angle CGD$ lielumu, ja $\angle CAD=\alpha$!

1. risinājums. Tā kā trapece *ABCD* ir vienādsānu, tad arī $\angle ADE=\alpha$ (skat. 166. att.). No trijstūra *AED* iegūstam, ka $\angle AED=180°-2\alpha$. Pēc blakusleņķu īpašības $\angle CED=2\alpha$. Punkti *C, E, F, D* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\angle CED=\angle CFD=2\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka *CD*. No trijstūra *FGD* iegūstam, ka $\angle FGD=180°-3\alpha$, un šī leņķa blakusleņķis $\angle CGD=3\alpha$.



166. att.

2. risinājums. Tā kā trapece *ABCD* ir vienādsānu, tad arī $\angle ADE=\alpha$ (skat. 167. att.). Punkti *C, E, F, D* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\overset{\smile}{EnF}=2\alpha$ kā ievilktajam leņķim *FDE* atbilstošā loka lielums. Leņķis *CAD* ir riņķa līnijas ārējais leņķis, tāpēc $\angle CAD=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{CmD}-\overset{\smile}{EnF})$. Ievietojot zināmos lielumus un izsakot $\overset{\smile}{CmD}$, iegūstam $\overset{\smile}{CmD}=2\alpha+2\alpha=4\alpha$. Tā kā $\angle CGD$ ir riņķa līnijas iekšējais leņķis, tad $\angle CGD=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{CmD}+\overset{\smile}{EnF})=\frac{1}{2}(4\alpha+2\alpha)=3\alpha$.



167. att.

A2.9.5. Parādīt, kā naturālos skaitļus no 1 līdz $2n-1$ uzrakstīt rindā tā, ka visas blakus esošo skaitļu starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko) ir dažādas un skaitlis 1 ir vidējais (n-tais), ja **a)** $n=5$; **b)** $n=1008$.

Atrisinājums

a) Der, piemēram, virkne

7; 4; 6; 5; 1; 9; 2; 8; 3

3 2 1 4 8 7 6 5

b) Aplūkosim skaitļu virkni 1; 2015; 2; 2014; 3; 2013; 4; 2012; ...; 1007; 1009; 1008 (šī virkne sastāv no divām virknēm – vienas augošas 1; 2; 3; …; 1008 un otras dilstošas 2015; 2014; …; 1009). Šajā virknē ir visi skaitļi no 1 līdz 2015 un starpības starp katriem diviem blakus esošiem skaitļiem dilst no 2014 līdz 1. Šī virkne pēc savām īpašībām ir ļoti līdzīga nepieciešamajai, tikai skaitlis 1 šajā virknē ir pirmais nevis 1008. loceklis. Virknes 1008. loceklis (jeb 504. loceklis dilstošajā virknē ir $a_{504}=2015+(-1)(504-1)=1512$) ir 1512, virknes 1009. loceklis (jeb 505. loceklis augošajā virknē) ir 505. Starpība starp virknes 1008.

un 1009. locekli ir $1512-505=1007$. „Pārgriezīsim” izveidoto virkni starp 1008. un 1009. elementu, iegūstot divus virknes fragmentus, no kuriem pirmais satur 1008 locekļus, bet otrais satur 1007 locekļus. No sākotnējām blakus elementu starpībām ir pazaudēta tikai „pārgrieztā” starpība 1007. Tagad saliksim šos fragmentus pretējā secībā – tā, ka vispirms ir fragments, kurā ir 1007 skaitļi un kurš beidzas ar skaitli 1008, un pēc tam fragments, kurā ir 1008 skaitļi un kurš sākas ar skaitli 1. „Salīmēsim” šos fragmentus kopā, iegūstot trūkstošo starpību 1007. Vajadzīgā virkne ir izveidota, skaitlis 1 ir jaunās virknes 1008. loceklis un starp blakus elementu starpībām atrodami visi skaitļi no 1 līdz 2014:

505; 1511; 506; 1510; … 1010; 1007; 1009; 1008; **1;** 2015; 2; 2014; 3; … 504; 1512

1006 1005 1004 1003 … 4 3 2 1 1007 2014 2013 2012 2011 2010 … 1009 1008

10. klase

A2.10.1. Noteikt funkcijas **a)** $y=x^2+2x+2$, **b)** $y=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ vērtību kopu!

Atrisinājums

a) Dotās funkcijas grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu, tāpēc funkcijai ir vismazākā, bet nav vislielākās vērtības. Parabolas virsotnes abscisa $x_v=\dfrac{-2}{2}=-1$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību $y_v=1-2+2=1$. Tātad funkcijas vērtību kopa ir $[1;+\infty)$.

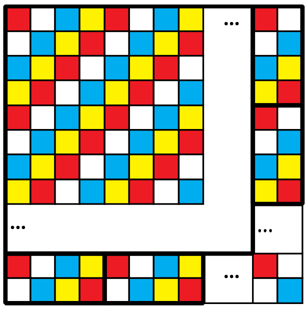
b) Pārrakstām doto funkciju formā $y=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$. Skaitītāja izteiksme nav vienāda ar 0 un saucējs ir pozitīvs, tāpēc $y>0$. Tā kā $(x+1)^2+1\ge 1$, tad $y=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}\le\dfrac{1}{1}=1$. Tātad funkcijas vērtību kopa ir $(0;1]$.

A2.10.2. Kādām naturālām *n* vērtībām kvadrātu $n\times n$ rūtiņas var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

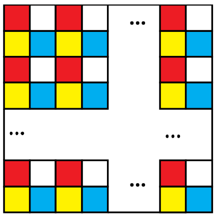
Atrisinājums

Ja *n* – nepāra skaitlis, tad kvadrāts $n\times n$ satur nepāra skaita rūtiņas, kas nedalās ar 4 – rūtiņu skaitu taisnstūrī. Tātad *n* jābūt pāra skaitlim. Aplūkosim divus iespējamos gadījumus.

- Ja $n=4k$ (*k* – naturāls skaitlis), tad kvadrātu ir iespējams sagriezt prasītajā veidā, piemēram, vispirms kvadrātu sagriež pa rindām (taisnstūros $1\times 4k$) un tad katru rindu *k* taisnstūros, kuru izmēri ir 1×4.
- Ja $n=4k+2$ (*k* – naturāls skaitlis), tad izkrāsosim kvadrātu četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. 168. att.). Lai kā arī grieztu, taisnstūris 1×4 vienmēr saturēs visu četru krāsu rūtiņas. Tātad kvadrātā visu krāsu rūtiņām ir jābūt vienādā skaitā. Noskaidrosim, cik katras krāsas rūtiņu ir kvadrātā. Tā kā kvadrātu $4k\times 4k$ var sagriezt taisnstūros 1×4, tad tajā visu krāsu rūtiņas ir vienādā skaitā. Pēdējās divas kolonnas un rindas dalām taisnstūros 4×2, arī tajos visu krāsu rūtiņas ir vienādā skaitā, jo katru no tiem var sadalīt divos taisnstūros 1×4. Vēl paliek kvadrāts 2×2, kurā vienas krāsas rūtiņas nav vispār un ir divas rūtiņas, kas nokrāsotas vienā krāsā. Iegūta pretruna ar to, ka kvadrātā visu krāsu rūtiņas ir vienādā skaitā. Līdz ar to kvadrātu, kura malas garums ir $n=4k+2$, nav iespējams sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas.



168. att.



169. att.

Esam ieguvuši, ka vienīgais gadījums, kad kvadrātu $n \times n$ rūtiņas var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4, ja $n = 4k$, kur k – naturāls skaitlis.

Piezīme. Gadījumā, kad $n = 4k + 2$ (k – naturāls skaitlis), kvadrātu var izkrāsot četrās krāsās tā, kā parādīts 169. att. Tad, lai kā arī grieztu, taisnstūris 1×4 vienmēr saturēs tieši divas vienas krāsas un tieši divas citas krāsas rūtiņas. Tātad kvadrātā katras krāsas rūtiņām ir jābūt pāra skaitā, kas ir pretruna tam, ka katras krāsas rūtiņu skaits kvadrātā ir $\frac{(4k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, kas ir nepāra skaitlis.

A2.10.3. Atrast visus naturālos skaitļus, kas ir vienādi ar savu ciparu reizinājumu! (Par viencipara skaitļa ciparu reizinājumu sauc tā vienīgo ciparu.)

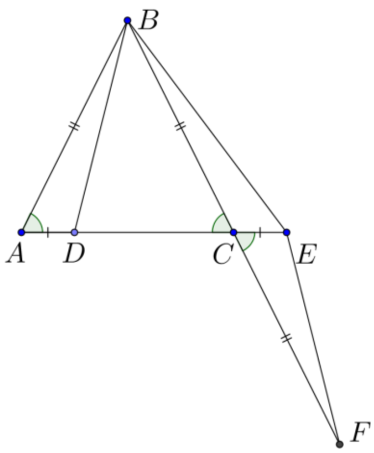
Atrisinājums

Ievērojam, ka visi viencipara skaitļi atbilst uzdevuma nosacījumiem. Pierādīsim, ka citu šādu skaitļu nav. Pieņemsim, ka $n = \overline{c_1 c_2 ... c_k}$, kur $k \geq 2$ un $c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_k = n$. Tā kā $c_1, c_2, ..., c_k$ ir cipari, tad $c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_k \leq c_1 \cdot 9^{k-1}$. No otras puses $\overline{c_1 c_2 ... c_k} \geq \overline{c_1 \underbrace{0...0}_{k-1}} = c_1 \cdot 10^{k-1}$. Esam ieguvuši, ka $n \leq c_1 \cdot 9^{k-1}$ un $n \geq c_1 \cdot 10^{k-1}$, kas vienlaicīgi nevar izpildīties. Tātad vienīgie skaitļi, kas apmierina uzdevuma prasības, ir visi viencipara skaitļi.

A2.10.4. Uz vienādsānu trijstūra *ABC* pamata *AC* atlikts iekšējs punkts *D*, bet uz *AC* pagarinājuma – punkts *E* (punkts *C* atrodas starp *D* un *E*) tā, ka $AD = CE$. Pierādīt, ka $BD + BE > 2BC$!

Atrisinājums

Pagarinām malu *BC* un uz tās atliekam punktu *F* tā, ka $BC = CF$ (skat. 170. att.). Trijstūri *DAB* un *ECF* ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, jo $AB = BC = CF$, $\angle BAC = \angle BCA = \angle ECF$ un $AD = CE$. Tāpēc $BD = EF$ kā atbilstošās malas. No trijstūra nevienādības ΔBEF izriet, ka $BE + EF > BF = BC + CF = 2BC$ jeb $BD + BE > 2BC$.

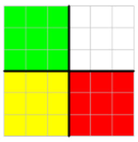


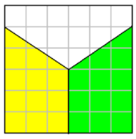
170. att.

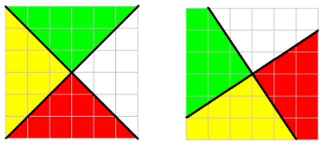
A2.10.5. Jura dzimšanas dienas torte ir biezpiena kubs, kura četras sānu skaldnes un augšējā skaldne ir noklāta ar šokolādes glazūru (visur vienādi biezu). Kā šo torti sadalīt **a)** četrās daļās, **b)** trīs daļās tā, lai katras daļas forma ir taisna prizma un gan biezpiena, gan glazūras daudzums visās daļās ir vienāds?

Atrisinājums

Tortes augšējo skaldni sadalām n vienlielās figūrās tā, lai augšējās skaldnes perimetrs būtu sadalīts n vienādās daļās. Skat., piemēram, 171. att., kur $n=4$, un 172. att., kur $n=3$.


171. att.


172. att.


173. att.

Lai iegūtās daļas būtu taisnas prizmas, veicam vertikālus griezienus perpendikulāri tortes pamatam. Tā kā visu daļu pamata laukumi ir vienādi un vienāds ir arī visu daļu augstums, tad visu daļu tilpumi ir vienādi jeb biezpiena daudzums visās daļās ir vienāds. Arī ar šokolādi noklātās virsmas laukums (glazūras daudzums) visām daļām ir vienāds, jo katrai daļai ar šokolādi noklātās virsmas laukums ir $\frac{P}{n}\cdot H+\frac{S}{n}$, kur P – kuba (tortes) augšējās skaldnes perimetrs, S – augšējās skaldnes laukums, H – kuba augstums.

Piezīme. a) Sadalīt tortes augšējo skaldni četrās vienlielās figūrās tā, lai augšējās skaldnes perimetrs būtu sadalīts četrās vienādās daļās, var veicot jebkādus divus perpendikulārus griezienus, kas iet caur augšējās skaldnes centru (skat., piemēram, 173. att.).

11. klase

A2.11.1. Aplūkojam visus deviņciparu skaitļus, kas nesatur 0 un kam visi cipari ir dažādi. Pierādīt, ka starp tiem pāra skaitļu ir tieši divas reizes mazāk nekā tādu, kas dalās ar 3, bet nedalās ar 5.

Atrisinājums

Visi deviņciparu skaitļi, kas nesatur nulli un kuriem nav vienādu ciparu, dalās ar 3, jo to ciparu summa ir $1+2+3+...+9=45$, kas dalās ar 3.

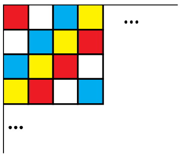
Atliek noskaidrot, cik starp tiem ir pāra skaitļu un cik tādu, kas nedalās ar 5.

Pāra skaitļi ir tie, kas beidzas ar 2, 4, 6, 8, tātad deviņciparu skaitļa pēdējo ciparu var izvēlēties 4 veidos un visus atlikušos 8 ciparus izvēlēties $8!$ veidos, līdz ar to kopējais pāra skaitļu skaits ir $4\cdot 8!$.

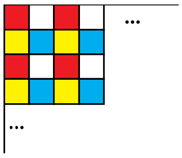
Lai skaitlis nedalītos ar 5, tā pēdējais cipars nedrīkst būt 5, tātad to var izvēlēties 8 veidos (tas var būt jebkurš no cipariem $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$), pārējos 8 ciparus var salikt $8!$ veidos, tātad kopējais šādu skaitļu skaits ir $8\cdot 8!$. Redzams, ka tas ir tieši divas reizes lielāks nekā pāra skaitļu skaits.

A2.11.2. Taisnstūri var pārklāt ar mazākiem taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×4 un 2×2. Vienu mazo taisnstūri, kura izmēri ir 2×2, aizvietoja ar taisnstūri 1×4. Vai, izmantojot šos taisnstūrus, vēl joprojām var pārklāt doto taisnstūri?

1. risinājums. Izkrāsosim taisnstūri četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. 174. att.) Kvadrāts 2×2 vienmēr pārklāj tieši divas rūtiņas, kurām ir vienāda krāsa. Tātad figūrai, kas to aizvieto, arī jāpārklāj pāra skaita rūtiņas, kurām ir vienāda krāsa, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj pa vienai rūtiņai no katras krāsas, tāpēc tas nav iespējams.



174. att.



175. att.

2. risinājums. Izkrāsosim taisnstūri četrās krāsās tā, kā parādīts 175. att. Kvadrāts 2×2 vienmēr pārklāj tieši vienu (nepāra skaitlis) baltu rūtiņu. Tātad figūrai, kas to aizvieto, arī jāpārklāj nepāra skaita baltās rūtiņas, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj vai nu tieši divas baltas rūtiņas, vai nevienu baltu rūtiņu, tas ir, pāra skaita baltās rūtiņas, tāpēc tas nav iespējams.

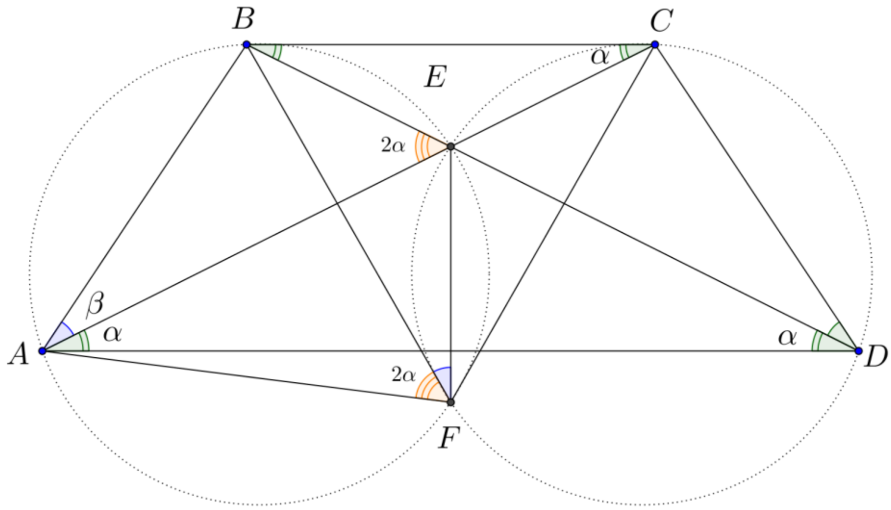
A2.11.3. Naturālam skaitlim *n* ar $M(n)$ apzīmēsim mazāko naturālo skaitli, kas beidzas ar *n* un kura ciparu summa ir *n*. Piemēram, $M(13)=913$. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu *n*, ka $M(n)$ dalās ar *n*.

Atrisinājums

Ja $n=10^k$, kur *k* – naturāls skaitlis, tad $M(n)=M(10^k)=\underbrace{9...9}_{(10^k-1):9}1\underbrace{0...0}_{k}$. Ievērojam, ka skaitlis $9...910...0$ tiešām ir mazākais naturālais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, jo devītnieki skaitļa sākumā nodrošina mazāko iespējamo skaitļa *garumu*, tātad arī mazāko skaitļa vērtību. Tā kā skaitlis $M(10^k)=9...91\underbrace{0...0}_{k}$ dalās ar 10^k un naturālo skaitļu *k* ir bezgalīgi daudz, tad ir arī bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu *n*, ka $M(n)$ dalās ar *n*.

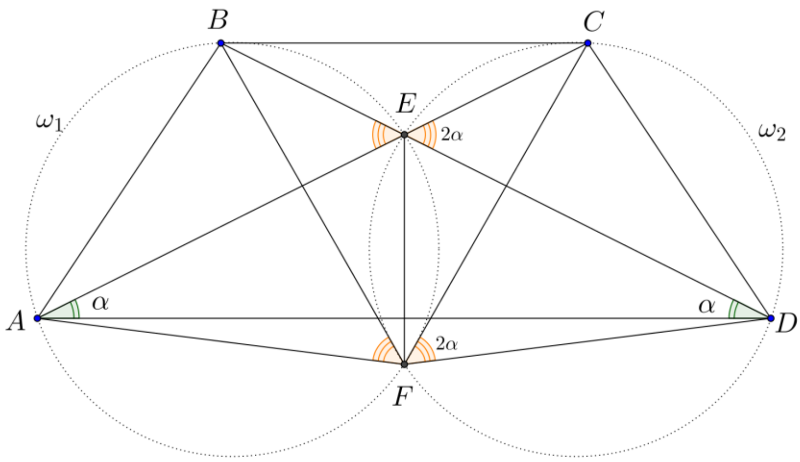
A2.11.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, garākais pamats ir *AD*. Diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *ABE* apvilkta riņķa līnija ω_1, bet ap *CDE* – riņķa līnija ω_2. Pierādīt, ka trapecei *ABCD* apvilktās riņķa līnijas ω centrs atrodas ω_1 un ω_2 krustpunktā, kas atšķirīgs no punkta *E*!

1. risinājums. Riņķa līniju ω_1 un ω_2 otru krustpunktu apzīmējam ar *F* (skat. 176. att.). Tad ir jāpierāda, ka ω centrs ir punktā *F*. Izmantosim, ka četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs ir četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.
Tā kā *ABCD* ir vienādsānu trapece, tad simetrijas dēļ *EF* ir malu *AD* un *BC* vidusperpendikuls. Apzīmējam $\angle EAD=\angle EDA=\alpha$ un $\angle BAE=\beta$. Tad no trijstūra iekšējo leņķu summas izriet, ka $\angle AED=180°-\angle EAD-\angle ADE=180°-2\alpha$ un no blakusleņķu īpašības $\angle AEB=2\alpha$. Punkti *E* un *F* atrodas uz riņķa līnijas ω_1, tāpēc $\angle AFB=\angle AEB=2\alpha$ un $\angle BAE=\angle BFE=\beta$ kā ievilktie leņķi, kas balstās attiecīgi uz viena un tā paša loka. Simetrijas dēļ $\angle FBC=\angle BCF=(180°-2\beta):2=90°-\beta$. No trijstūra *ABC* iegūstam, ka $\angle ABC=180°-\alpha-\beta$, tad $\angle ABF=180°-\alpha-\beta-(90°-\beta)=90°-\alpha$. No ΔBAF iegūstam, ka $\angle BAF=180°-(90°-\alpha)-2\alpha=90°-\alpha$. Līdz ar to ΔBAF ir vienādsānu trijstūris un punkts *F* atrodas uz trijstūra malas *AB* vidusperpendikula. Tātad punkts *F* ir četrstūrim *ABCD* apvilktās riņķa līnijas ω centrs.



176. att.

2. risinājums. Ar *F* apzīmējam riņķa līniju ω_1 un ω_2 otru krustpunktu (skat. 177. att.). Tā kā *ABCD* ir vienādsānu trapece, tad simetrijas dēļ $\angle EAD = \angle EDA = \alpha$. Tad $\angle CED = \angle EDA + \angle EAD = 2\alpha$ (kā trijstūra *AED* trešā leņķa *AED* ārējais leņķis). Apskatām, kādi leņķi balstās uz loka *CD*, pieņemot, ka arī trapecei *ABCD* ir apvilkta riņķa līnija ω. Riņķa līnijā ω ievilktais leņķis *CAD* balstās uz loka *CD*, tam atbilstošā centra leņķa lielums ir 2α. Visi leņķi, kas balstās uz loka *CD* un kuru lielums ir 2α, atrodas uz ω_2. Tātad arī ω centrs atrodas uz ω_2. Analoģiski pierāda, ka ω centrs atrodas uz ω_1. Tātad ω centrs atrodas riņķa līniju ω_1 un ω_2 krustpunktā – vai nu punktā *E*, vai punktā *F*. Riņķa līnijas ω centrs nevar būt punkts *E*, jo *BE* un *AE* tad būtu rādiusi, bet $BE \neq AE$ (vienādsānu trapeces diagonāles krustpunktā nedalās uz pusēm). Līdz ar to punkts *F* ir trapecei *ABCD* apvilktās riņķa līnijas ω centrs.



177. att.

A2.11.5. Atrast funkcijas $f(x) = 8\sin x + 8\cos x - 12\sin x\cos x$ mazāko un lielāko vērtību!

Atrisinājums

Apzīmējam $t = \sin x + \cos x$. Tad

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x.$$

Tā kā $\sin 2x \leq 1$, tad $t^2 = 1 + \sin 2x \leq 2$. Līdz ar to $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Izmantojot apzīmējumus, pārrakstām doto funkciju: $F(t)=8t-6(t^2-1)=-6t^2+8t+6$. Funkcijas $F(t)$ grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz leju, tāpēc tās vislielākā vērtība ir parabolas virsotnē: $t_v=\dfrac{-8}{2\cdot(-6)}=\dfrac{2}{3}\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ un $F(t_v)=-6\cdot\dfrac{4}{9}+8\cdot\dfrac{2}{3}+6=\dfrac{26}{3}$.

Minimālā vērtība ir vienā no intervāla $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ galapunktiem:

$$F(-\sqrt{2})=-12-8\sqrt{2}+6=-6-8\sqrt{2} \text{ vai } F(\sqrt{2})=-12+8\sqrt{2}+6=-6+8\sqrt{2}.$$

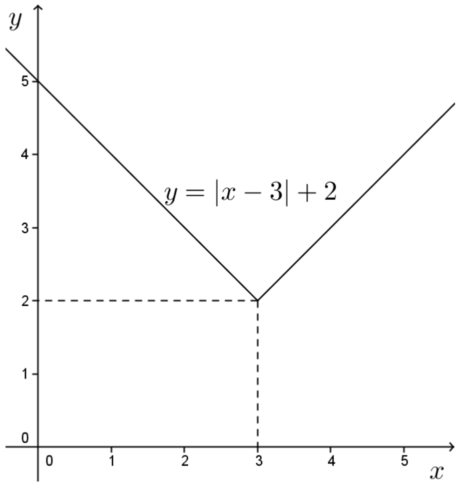
Tātad dotās funkcijas mazākā vērtība ir $f_{\min}=-6-8\sqrt{2}$ un lielākā vērtība ir $f_{\max}=\dfrac{26}{3}$.

12. klase

A2.12.1. Uz funkcijas $y=|x-3|+2$ grafika atrast tādu punktu *P*, kura attālumu kvadrātu summa līdz koordinātu asīm būtu vismazākā!

Atrisinājums

Uzzīmējam funkcijas $y=|x-3|+2$ grafiku (skat. 178. att.).



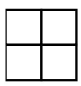
178. att.

Tā kā funkcijas grafiks ir simetrisks pret taisni $x=3$, tad punkta *P* abscisa ir mazāka nekā 3 (t. i., punkts *P* atradīsies uz tās grafika daļas, ko nosaka funkcija $y=-x+5$). Punkta *P* koordinātas apzīmējam ar $(x;\ y)$. Tātad jāatrod izteiksmes x^2+y^2 vismazākā vērtība:

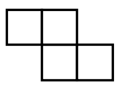
$$x^2+y^2=x^2+(-x+5)^2=2x^2-10x+25.$$

Funkcijas $f(x)=2x^2-10x+25$ grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_v=\dfrac{10}{4}=2{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tad $y_v=-x_v+5=2{,}5$ un punkta *P* koordinātas ir $(2{,}5;\ 2{,}5)$.

A2.12.2. Taisnstūrim ar izmēriem 10×10 rūtiņas izgrieza visas četras stūra rūtiņas. Vai iegūto figūru var pārklāt ar vienu 179. att. redzamo figūru un 23 figūrām, kas redzamas 180. att.? Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.

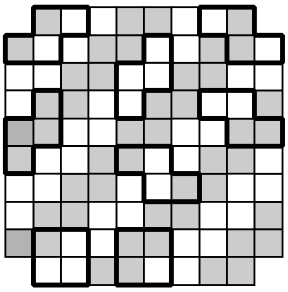


179. att.



180. att.

1. risinājums. Izkrāsosim iegūto figūru divās krāsās tā, kā parādīts 181. att. Lai kā arī tiktu novietota 180. att. figūra, tā vienmēr pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas. Tātad 23 šādas figūras kopā pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas. Tā kā 179. att. figūra pārklāj nepāra skaita melnās rūtiņas, tad visas 24 figūras kopā pārklāj nepāra skaita melnās rūtiņas, bet 181. att. figūra satur pāra skaita melnās rūtiņas, tātad prasīto nevar izdarīt.

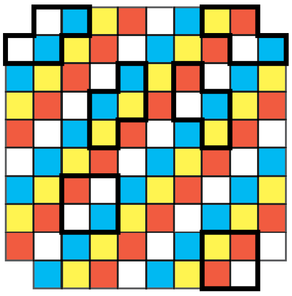


181. att.

2. risinājums. Izkrāsosim iegūto figūru četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. 182. att.). Tā satur 24 katras krāsas rūtiņas. Lai kā novietotu 7. att. figūru, tā vienmēr pārklāj divas vienas krāsas rūtiņas un pa vienai rūtiņai no divām citām krāsām. Tad katrā krāsā nepārklātas paliek attiecīgi 22, 23, 23, 24 rūtiņas (divi pāra skaitļi, divi nepāra skaitļi). Iespējami divi gadījumi, kā novietot 180. att. figūru.

- Ja tā pārklāj pa vienai katras krāsas rūtiņai, tad nepārklāto rūtiņu skaits katrā krāsā samazinās par 1, tas ir, nepārklāto rūtiņu skaita paritāte katrā krāsā mainās uz pretējo. Tātad joprojām divām no četrām krāsām nepārklātas paliek nepāra skaita rūtiņas, divām – pāra skaita rūtiņas.
- Ja tā pārklāj divas rūtiņas no vienas krāsas, divas – no citas, tad katras krāsas nepārklāto rūtiņu skaits samazinās par pāra skaitli (vai nu par 2, vai 0) un nepārklāto rūtiņu skaita paritāte katrā krāsā saglabājas. Tātad joprojām divām no četrām krāsām nepārklātas paliek nepāra skaita rūtiņas, divām – pāra skaita rūtiņas.

Ja prasīto varētu izdarīt, tad katrā krāsā nepārklātas paliktu attiecīgi 0, 0, 0, 0 rūtiņas, bet tie visi ir pāra skaitļi. Tātad tas nav iespējams.



182. att.

A2.12.3. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$, ja *a, b, c, d* ir pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums

Lai pierādītu prasīto, pamatosim, ka pozitīviem skaitļiem ir spēkā $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad | \cdot xy(x+y)>0$;

$xy+y^2+x^2+xy \geq 4xy$;

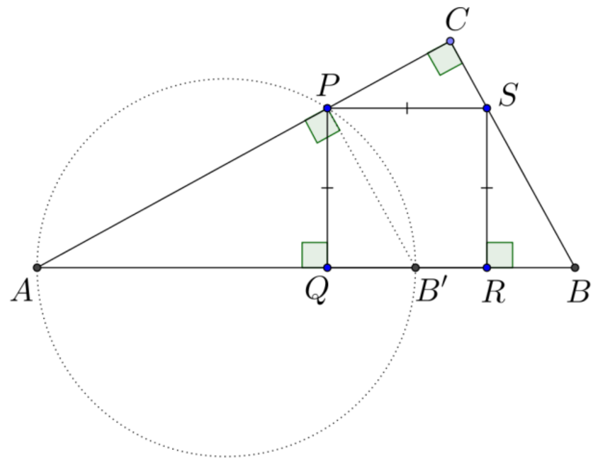
$x^2-2xy+y^2 \geq 0$;

$(x-y)^2 \geq 0.$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība, tad arī $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ ir patiesa. Izmantojot šo nevienādību trīs reizes, iegūstam prasīto: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\right)+\frac{16}{d}\geq\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$.

A2.12.4. Taisnleņķa trijstūrī ABC uz katetes AC atzīmēts punkts P, uz katetes BC – punkts S, uz hipotenūzas AB – punkti R un Q tā, ka $PSRQ$ ir kvadrāts. Pierādīt, ka $AB\geq 3PS$! Kādā gadījumā $AB=3PS$?

1. risinājums. Tā kā $PS=QR$ un $AB=AQ+QR+RB$ (skat. 183. att.), tad pietiek pierādīt, ka $AQ+RB\geq 2PS$. Uz nogriežņa AB atliekam punktu B' tā, ka $PB'\parallel BC$. Tad $\Delta SRB=\Delta PQB$ pēc pazīmes $\ell m\ell$.



183. att.

Tātad paliek pierādīt, ka $AB'\geq 2PQ$. Nogrieznis AB' ir diametrs riņķa līnijai, kas apvilkta ap $\Delta APB'$, jo $\angle APB'=\angle ACB=90°$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Nogrieznis PQ nav garāks kā šīs riņķa līnijas rādiuss, kas ir puse no diametra. Līdz ar to $AB'\geq 2PQ$ un arī $AB\geq 3PS$. Vienādība iespējama tikai tad, kad PQ ir vienāds ar riņķa līnijas rādiusu. Tādā gadījumā $\Delta APB'$ ir vienādsānu trijstūris, tāpēc arī ΔACB ir vienādsānu, jo $\angle CAB=45°$. Tātad vienādība iespējama tikai tad, ja $AC=CB$.

2. risinājums. Kvadrāta malas garumu ņemsim par vienu vienību $PS=SR=RQ=PQ=1$, tad jāpierāda, ka $AB\geq 3$. Ievērojam, ka $AB=AQ+QR+RB$ (skat. 183. att.). Apzīmējam $\angle CAB=\alpha$. No ΔAPQ iegūst, ka $AQ=\frac{1}{tg\alpha}$ un no ΔRSB iegūstam, ka $AQ=tg\alpha$. Līdz ar to

$$AB=\frac{1}{tg\alpha}+1+tg\alpha=\frac{tg^2\alpha+tg\alpha+1}{tg\alpha}=\frac{tg^2\alpha-2tg\alpha+1+3tg\alpha}{tg\alpha}=\frac{(tg\alpha-1)^2+3tg\alpha}{tg\alpha}\geq\frac{3tg\alpha}{tg\alpha}=3$$

jo $tg\alpha\neq 0$ un $(tg\alpha-1)^2\geq 0$.

Vienādība ir spēkā, ja $(tg\alpha-1)^2=0$ jeb $tg\alpha=1$. Tā kā α ir trijstūra leņķis, tad $\alpha=45°$, kas nozīmē, ka ΔACB ir vienādsānu. Tātad vienādība iespējama tikai tad, ja $AC=CB$.

A2.12.5. Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a; b; c) tādus, ka $a \geq b \geq c \geq 2$ un $ab-1$ dalās ar c, $bc-1$ dalās ar a, $ac-1$ dalās ar b.

Atrisinājums

No dotā izriet, ka $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$ dalās ar abc. Atverot iekavas iegūst, ka $a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + bc + ac - 1$ dalās ar abc. Tā kā pirmie četri saskaitāmie katrs dalās ar abc, tad

$$ab + bc + ac - 1 \text{ jādalās ar } abc. \quad (1)$$

Tas nozīmē, ka

$$ab + bc + ac - 1 \geq abc. \quad (2)$$

No otras puses, tā kā $a \geq b \geq c$, tad

$$ab + bc + ac - 1 < ab + ab + ab = 3ab. \quad (3)$$

No nevienādībām (2) un (3) iegūst, ka $3ab > abc$, tātad $c < 3$. Tā kā no dotā $c \geq 2$, tad vienīgā iespējamā vērtība ir $c = 2$. Ievietojot to (1), iegūstam $ab + 2(a+b) - 1$ jādalās ar $2ab$. No (3) izriet, ka $ab + 2(a+b) - 1 < 3ab$, tātad vienīgā iespējamā izteiksmes $ab + 2(a+b) - 1$ vērtība, lai tā dalītos ar $2ab$, ir $2ab$. Tātad $ab + 2(a+b) - 1 = 2ab$, no kurienes $ab - 2a - 2b + 4 = 3$ jeb $(a-2)(b-2) = 3$. No dotā izriet, ka abi reizinātāji ir pozitīvi un $a - 2 \geq b - 2$, tātad $a - 2 = 3$ un $b - 2 = 1$, no kurienes $a = 5$ un $b = 3$. Pārbaude parāda, ka skaitļu trijnieks (5; 3; 2) ir uzdevuma atrisinājums.

ATKLĀTĀS OLIMPIĀDES REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulās apkopota informācija par 2014./2015. mācību gada Atklātās matemātikas olimpiādes rezultātiem (cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu).

9. klase (351 dalībnieks)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	3%	1%	11%	0%	4%
0	31%	22%	21%	7%	7%
1	26%	17%	52%	15%	19%
2	9%	27%	6%	22%	32%
3	10%	9%	3%	24%	5%
4	4%	5%	3%	9%	11%
5	1%	1%	0%	7%	12%
6	4%	1%	1%	3%	7%
7	2%	3%	1%	2%	2%
8	1%	2%	0%	2%	1%
9	1%	2%	0%	5%	1%
10	6%	9%	1%	5%	1%
vidēji	**2,24**	**2,87**	**1,27**	**3,42**	**2,87**

10. klase (301 dalībnieks)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	6%	1%	4%	8%	6%
0	30%	22%	12%	82%	5%
1	1%	34%	2%	5%	4%
2	1%	22%	3%	0%	25%
3	0%	8%	15%	0%	22%
4	1%	5%	10%	0%	13%
5	17%	1%	36%	0%	6%
6	2%	3%	8%	0%	2%
7	1%	1%	4%	0%	5%
8	2%	1%	1%	1%	4%
9	17%	1%	0%	0%	5%
10	23%	1%	4%	5%	4%
vidēji	**5,38**	**1,82**	**4,18**	**0,62**	**3,79**

11. klase (216 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	4%	3%	15%	18%	13%
0	4%	70%	52%	69%	69%
1	6%	0%	5%	9%	14%
2	3%	1%	2%	0%	2%
3	6%	0%	0%	0%	0%
4	1%	0%	3%	0%	0%
5	4%	0%	5%	0%	0%
6	4%	1%	2%	0%	0%
7	6%	0%	3%	0%	0%
8	10%	1%	5%	0%	0%
9	24%	0%	1%	0%	0%
10	30%	22%	7%	3%	0%
vidēji	**7,34**	**2,56**	**2,32**	**0,56**	**0,30**

12. klase (124 dalībnieki)

punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
--	1%	12%	26%	5%	19%
0	25%	10%	48%	10%	17%
1	12%	60%	16%	16%	56%
2	2%	2%	2%	6%	1%
3	1%	1%	2%	27%	5%
4	12%	0%	1%	5%	0%
5	0%	1%	0%	6%	0%
6	5%	0%	1%	6%	0%
7	2%	2%	0%	0%	0%
8	12%	0%	0%	0%	0%
9	1%	0%	0%	2%	0%
10	27%	12%	4%	18%	2%
vidēji	**4,90**	**2,32**	**1,00**	**4,13**	**1,19**

BW2. BALTIC WAY 2014

Algebra

BW2.1. Pierādīt vienādību

$$\cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)=\frac{1}{2^{24}}.$$

Atrisinājums

Ekvivalenti pārveidosim pierādāmās vienādības kreiso pusi. Vispirms reizinām kreisās puses izteiksmi ar $\sin 56° > 0$:

$$\cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)=$$
$$=\frac{\sin(56°)\ \cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)}{\sin(56°)}.$$

Izmantojot divkāršā leņķa formulu $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$ ar $\alpha=56°$, iegūstam

$$\frac{\sin(56°)\ \cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)}{\sin(56°)}$$
$$=\frac{\sin(2\cdot 56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)}{2\cdot\sin(56°)}.$$

Izmantojot divkāršā leņķa formulu vēl 23 reizes, iegūstam

$$\cos(56°)\cdot\cos(2\cdot 56°)\cdot\cos(2^2\cdot 56°)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56°)=\frac{\sin(2^{24}\cdot 56°)}{2^{24}\cdot\sin(56°)}.$$

Atliek pierādīt, ka $\frac{\sin(2^{24}\cdot 56°)}{\sin(56°)}=1$ jeb $\sin(2^{24}\cdot 56°)=\sin(56°)$. Ja izdotos pamatot, ka eksistē tāds vesels skaitlis k, kam

$$2^{24}\cdot 56°=360°\cdot k+56°,$$

tad vajadzīgā vienādība izrietētu no tā, ka sinusa funkcija ir periodiska ar periodu $360°$. Atrisinot šo vienādojumu attiecībā pret k, redzam, ka

$$k=56\cdot\frac{2^{24}-1}{360}=7\cdot\frac{2^{24}-1}{45}.$$

Tā kā $\varphi(45)=24$, tad no Eilera teorēmas izriet, ka $2^{24}-1$ dalās ar 45, līdz ar to k ir vesels skaitlis un vajadzīgais ir pierādīts.

BW2.2. Doti reāli skaitļi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kas apmierina vienādības $a_0=a_n=0$ un

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2$$

visiem $i=1,2,\ldots,n-1$. Pierādīt, ka nevienādība $a_i\le 0$ izpildās visiem $i=1,2,\ldots,n-1$.

Atrisinājums

Pieņemsim pretējo: starp skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ir vismaz viens pozitīvs skaitlis, t. i., eksistē tāds indekss i, ka $a_i=\max\limits_{0\le j\le n} a_j$ un $a_i>0$. Tā kā $a_0=a_n=0$, tad $1\le i\le n-1$. Tad no nevienādībām $a_i\ge a_{i-1}$ un $a_i\ge a_{i+1}$ iegūstam

$$a_{i-1}-2a_i+a_{i-1}=(a_{i-1}-a_i)+(a_{i+1}-a_i)\le 0.$$

Saskaņā ar doto $a_{i-1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2>0$. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums, ka kāds no dotajiem skaitļiem ir pozitīvs, ir aplams un līdz ar to esam pierādījuši, ka $a_i\le 0$ visiem $i=1,2,\ldots,n-1$.

BW2.3. Pozitīvi skaitļi $a,\ b,\ c$ apmierina vienādību $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Atrisinājums

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka $a^3+b\ge 2\sqrt{a^3b}=2a\sqrt{ab}$, tātad

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}\le\frac{1}{\sqrt{2a\sqrt{ab}}}.$$

Pielietojot analoģiskus novērtējumus pārējiem saskaitāmajiem, iegūstam

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{1}{\sqrt{2a\sqrt{ab}}}+\frac{1}{\sqrt{2b\sqrt{bc}}}+\frac{1}{\sqrt{2c\sqrt{ca}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}}{a\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b\sqrt{bc}}}{b\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{c\sqrt{ca}}}{c\sqrt{ca}}\right).$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka $\sqrt{a\sqrt{ab}}\le\frac{a+\sqrt{ab}}{2}$. Pielietojot analoģiskas nevienādības pārējiem saskaitāmajiem, iegūstam

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}}{a\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b\sqrt{bc}}}{b\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{c\sqrt{ca}}}{c\sqrt{ca}}\right)\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{a\sqrt{ab}}+\frac{b+\sqrt{bc}}{b\sqrt{bc}}+\frac{c+\sqrt{ca}}{c\sqrt{ca}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{\sqrt{bc}}{bc}+\frac{\sqrt{ca}}{ca}\right).$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. Pielietojot šo nevienādību arī pārējiem saskaitāmajiem, iegūstam

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{\sqrt{bc}}{bc}+\frac{\sqrt{ca}}{ca}\right)\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{c+a}{2ca}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(3+3)=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Secinām, ka

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}},$$

kas arī bija jāpierāda.

BW2.4. Atrast visas funkcijas f, kas definētas reālo skaitļu kopā, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem skaitļiem x un y apmierina vienādību

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x).$$

Atrisinājums

Dotajā vienādībā ievietojot $x=y=0$, iegūstam $f(f(0))+f(0)=f(0)$, no kurienes izriet

$$f(f(0))=0. \tag{1}$$

Ievietojot dotajā vienādībā $x=\frac{f(0)}{2}$ un $y=f(0)$, iegūstam vienādību

$$f\left(f(f(0))\right)+f\left(-\frac{f(0)}{2}\right)=f\left(\frac{f(0)}{2}\cdot f(f(0))-\frac{f(0)}{2}\right).$$

Izmantojot vienādību (1), iegūstam, ka

$$f(0)+f\left(-\frac{f(0)}{2}\right)=f\left(-\frac{f(0)}{2}\right).$$

Tātad
$$f(0) = 0. \tag{2}$$
Dotajā vienādībā ievietojam $y = 0$ un iegūstam $f\big(f(0)\big) + f(x) = f(xf(0) - x)$. Izmantojot vienādību (2), secinām, ka visiem x izpildās
$$f(x) = f(-x). \tag{3}$$
Dotajā vienādībā ievietojam $x = 0$; izmantojot vienādības (2) un (3), iegūstam $f\big(f(y)\big) + f(y) = 0$, t. i., visiem reāliem y izpildās
$$f\big(f(y)\big) = -f(y). \tag{4}$$
Līdz ar to visiem reāliem skaitļiem y izpildās
$$f(y) = -f\big(f(y)\big) = f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f\big(-f(y)\big),$$
kur visas vienādības izriet no (4). No (3) iegūstam, ka $f\big(-f(y)\big) = f\big(f(y)\big)$, bet no (4) – ka $f\big(f(y)\big) = -f(y)$. Esam pierādījuši, ka visiem reāliem skaitļiem y ir spēkā vienādība $f(y) = -f(y)$; taču tas nozīmē, ka $f(y) = 0$.
Līdz ar to $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x.

BW2.5. Doti tādi pozitīvi skaitļi a, b, c, d, kas apmierina vienādības
$$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc \quad \text{un} \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$
Atrast izteiksmes $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ visas iespējamās vērtības!

Atrisinājums

Ar T apzīmēsim tādu pozitīvu skaitli, kam $T^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Tad eksistē tādi leņķi $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ka
$$a = T\sin\alpha\,;\ b = T\cos\alpha\,;\ c = T\sin\beta\,;\ d = T\cos\beta.$$
No pirmās dotās vienādības (dalot to ar T^2) izriet
$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \sin\beta\cos\alpha\,;$$
$$(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$
Līdz ar to, izmantojot divkāršā leņķa formulu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ un leņķu summas formulu $\sin(x + y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$, iegūstam
$$\cos 2\beta - \cos 2\alpha = \sin(\alpha + \beta).$$
No otras puses, $\cos 2\beta - \cos 2\alpha = 2\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$. Tā kā $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ (jo $\sin(\alpha + \beta) = \frac{ad+bc}{T^2} > 0$), tad iegūstam, ka $2\sin(\alpha - \beta) = 1$ jeb $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$. Tā kā $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tad secinām, ka
$$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Atliek ievērot, ka
$$ab + cd = T^2(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta) = \frac{T^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) =$$
$$= T^2\cos(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$$
un
$$ad + bc = T\sin\alpha \cdot T\cos\beta + T\cos\alpha \cdot T\sin\beta = T^2\sin(\alpha + \beta).$$
Tātad
$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{T^2\cos(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{T^2\sin(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kombinatorika

BW2.6. Rindā izvietotas 16 sēdvietas. Katra no tām jānokrāso vai nu zaļa, vai sarkana, turklāt tā, lai vienā krāsā nokrāsotu secīgu sēdvietu skaits vienmēr būtu nepāra skaitlis. Cik dažādos veidos ir iespējams šīs 16 sēdvietas nokrāsot?

Atrisinājums

Apskatīsim vispārīgāku gadījumu, t. i., kad rindā ir k sēdvietas. Ar z_k apzīmējam dažādo veidu skaitu, kā šīs k sēdvietas var izkrāsot prasītajā veidā, turklāt krāsojot pirmo sēdvietu zaļu, un ar s_k – dažādo veidu skaitu, kā šīs k sēdvietas var izkrāsot prasītajā veidā, turklāt krāsojot pirmo sēdvietu sarkanu. Simetrijas dēļ visiem k izpildās $s_k = z_k$.

Ievērojam, ka $z_k = s_{k-1} + z_{k-2} = z_{k-1} + z_{k-2}$, jo s_{k-1} ir pareizu krāsojumu skaits, kam pirmā sēdvieta ir zaļa, bet otrā sarkana, savukārt z_{k-2} ir pareizu krāsojumu skaits, kam pirmās trīs sēdvietas ir zaļas. Vēl jo vairāk, $z_1 = z_2 = 1$. Tātad $z_k = s_k$ ir Fibonači virknes k-tais loceklis (kuru apzīmēsim ar F_k) un, ja rindā ir n sēdvietas, tad pareizu krāsojumu skaits ir

$$z_n + s_n = 2F_n.$$

Ievietojot $n = 16$, iegūstam, ka dažādo krāsojumu skaits ir $2F_{16} = 2 \cdot 987 = 1974$.

BW2.7. Cik ir tādu kopas $\{1,2,\ldots,30\}$ permutāciju $\sigma: \{1,2,\ldots,30\} \to \{1,2,\ldots,30\}$, kurām izpildās vienādība

$$\sum_{k=1}^{30} |\sigma(k) - k| = 450\ ?$$

Atrisinājums

Definējam skaitļu pārus $(a_i; b_i)$ tā, lai vienlaikus izpildītos:

1. $\{a_i; b_i\} = \{i; \sigma(i)\}$,
2. $a_i \geq b_i$.

Tad visiem $k = 1,2,\ldots,30$ izpildās $|\sigma(k) - k| = a_k - b_k$, līdz ar to

$$\sum_{k=1}^{30} |\sigma(k) - k| = \sum_{k=1}^{30} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} b_k.$$

Ievērojam, ka starp skaitļiem $a_1; a_2; \ldots; a_{30}; b_1; b_2; \ldots; b_{30}$ katra no vērtībām 1; 2; …; 30 parādās tieši divas reizes. Tātad neviena no vērtībām neparādās vairāk kā divas reizes. No tā izriet, ka arī starp skaitļiem $a_1; a_2; \ldots; a_{30}$ katra vērtība parādās ne vairāk kā divas reizes (t. i., starp $a_1; a_2; \ldots; a_{30}$ nav trīs vienādu skaitļu); analoģisks apgalvojums ir spēkā skaitļiem $b_1; b_2; \ldots; b_{30}$. Tad summa $\sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} b_k$ sasniedz savu maksimālo vērtību gadījumā, ja

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_{30}\} = \{16; 17; \ldots; 30\} \text{ un } \{b_1; b_2; \ldots; b_{30}\} = \{1; 2; \ldots; 15\}$$

un katrs skaitlis $16; 17; \ldots; 30$ parādās tieši divas reizes starp $a_1; a_2; \ldots; a_{30}$, un katrs skaitlis $1; 2; \ldots; 15$ parādās tieši divas reizes starp $b_1; b_2; \ldots; b_{30}$. Turklāt maksimālā vērtība, kuru summa $\sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} b_k$ šajā gadījumā arī sasniedz, ir

$$2(16 + 17 + \cdots + 30 - 1 - 2 - \cdots - 15) = 450.$$

Tātad katrai šādai permutācijai σ atbilstošajiem pāriem $(a_i; b_i)$ jābūt tādiem, ka

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_{30}\} = \{16; 17; \ldots; 30\} \text{ un } \{b_1; b_2; \ldots; b_{30}\} = \{1; 2; \ldots; 15\}.$$

Tas notiek tad un tikai tad, ja

$$\{\sigma(1); \sigma(2); \ldots; \sigma(15)\} = \{16; 17; \ldots; 30\}$$

un

$$\{\sigma(16); \sigma(17); \ldots; \sigma(30)\} = \{1; 2; \ldots; 15\}.$$

Ir 15! veidi, kā definēt σ skaitļiem 1; 2; …; 15, lai izpildītos pirmā no šīm vienādībām, un 15! veidi, kā definēt σ skaitļiem 16; 17; …; 30, lai izpildītos otrā no šīm vienādībām (kas nav atkarīgi no σ vērtībām skaitļiem 1; 2; …; 15). No kombināciju reizināšanas likuma izriet, ka permutāciju σ skaits ir vienāds ar $(15!)^2$.

BW2.8. Alberts un Betija spēlē šādu spēli. Sākotnēji ir sarkans un zils trauks, turklāt sarkanajā traukā atrodas 100 zilas bumbiņas, bet zilajā traukā atrodas 100 sarkanas bumbiņas. Katrā gājienā spēlētājs izpilda vienu no šādām darbībām:

1. paņem divas sarkanas bumbiņas no zilā trauka un pārliek tās sarkanajā traukā;
2. paņem divas zilas bumbiņas no sarkanā trauka un pārliek tās zilajā traukā;
3. paņem no kāda trauka divas dažādas krāsas bumbiņas un aizmet tās prom.

Abi spēlētāji gājienus izdara pamīšus, pirmais sāk Alberts. Uzvar tas spēlētājs, kurš vai nu pirmais paņem pēdējo sarkano bumbiņu no zilā trauka, vai arī pēdējo zilo bumbiņu no sarkanā trauka. Kuram spēlētājam, pareizi spēlējot, ir uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums

Betijai ir uzvaroša stratēģija:

- ja Alberts izdara 1. veida gājienu, tad Betija izdara 2. veida gājienu;
- ja Alberts izdara 2. veida gājienu, tad Betija izdara 1. veida gājienu;
- ja Alberts izdara 3. veida gājienu no viena trauka, tad Betija izdara 3. veida gājienu no otra trauka.

Vienīgais izņēmums šai stratēģijai ir tad, ja Betija var izdarīt uzvarošo gājienu, t. i., vai nu paņemt pēdējo sarkano bumbiņu no zilā trauka, vai arī pēdējo zilo bumbiņu no sarkanā trauka, tādējādi uzvarot spēli.

Vispirms pierādīsim, ka šādu stratēģiju ir iespējams realizēt. Ar Z un S apzīmēsim vektorus

$$\vec{Z} = (Z_1; Z_2), \quad \vec{S} = (S_1; S_2),$$

kur Z_1 ir sarkano bumbiņu skaits zilajā traukā; Z_2 ir zilo bumbiņu skaits zilajā traukā; S_1 ir sarkano bumbiņu skaits sarkanajā traukā; S_2 ir zilo bumbiņu skaits sarkanajā traukā.

Sākotnēji $\vec{Z} = \vec{S} = (100; 0)$. Ja $\vec{Z} = \vec{S}$ un Alberts izdara 1. veida gājienu, tad Betija var izdarīt 2. veida gājienu, turklāt panākot, ka pēc viņas gājiena atkal $\vec{Z} = \vec{S}$. Līdzīgi ir gadījumā, ja $\vec{Z} = \vec{S}$ un Alberts izdara 2. veida gājienu. Savukārt, ja $\vec{Z} = \vec{S}$ un Alberts izdara 3. veida gājienu no viena trauka, tad Betija var izdarīt 3. veida gājienu no otra trauka, atkal panākot $\vec{Z} = \vec{S}$. Tātad, sekojot šai stratēģijai, Betija vienmēr pēc Alberta gājiena var panākt, ka $\vec{Z} = \vec{S}$, izņemot gadījumu, kad viņa izdara uzvarošo gājienu.

Ievērosim, ka ir tikai viens gadījums, kad nav iespējams izdarīt gājienu – kad $\vec{Z} = \vec{S} = (1; 0)$. Tomēr šāds gadījums nevar iestāties, jo bumbiņu skaits katrā traukā vienmēr ir pāra skaitlis (vai nu palielinās, vai samazinās par 2, vai nemainās).

Tagad parādīsim, ka, izmantojot šo stratēģiju, Betija uzvar. Pieņemsim pretējo, ka Alberts kādā mirklī izdara uzvarošo gājienu. Atbilstoši Betijas stratēģijai, pirms viņa gājiena izpildījās vienādība $\vec{Z} = \vec{S}$. Tā kā Alberts izdara uzvarošo gājienu, tad pirms viņa gājiena bija vai nu $\vec{Z} = \vec{S} = (1; p)$, $p \geq 1$, vai arī $\vec{Z} = \vec{S} = (2; q)$, $q \geq 0$. Taču tas savukārt nozīmē, ka pirms Betijas pēdējā gājiena vai nu vektors Z, vai S bija vienāds vai nu ar $(1; p')$, $p' \geq 1$ (jo $1 + p'$ ir pāra), vai $(2; q')$, $q' \geq 0$. Taču tādā gadījumā Betija būtu varējusi izdarīt uzvarošo gājienu – pretruna ar izvēlēto stratēģiju "ja Betiaja var izdarīt uzvarošo gājienu, viņa to izdara". Tātad Alberts nevar uzvarēt, ja Betija spēlē atbilstoši aprakstītajai stratēģijai.

BW2.9. Dots kvadrāts ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas. Tajā jāiekrāso dažas rūtiņas sarkanas tā, lai visiem $m > \frac{n}{2}$ izpildās īpašība: katrā kvadrātā ar izmēriem $m \times m$ rūtiņas (kvadrāts atrodas dotā kvadrāta iekšpusē un tā malas iet pa rūtiņu līnijām) abas diagonāles satur vismaz vienu sarkanu rūtiņu. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso sarkanas, lai šāda īpašība būtu spēkā?

Atrisinājums

Ir iespējams iekrāsot n rūtiņas tā, lai prasītā īpašība izpildītos, piemēram, iekrāsojam visas rūtiņas, kas atrodas rindā ar numuru $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ (šeit ar $\lceil x \rceil$ apzīmēts mazākais veselais skaitlis, kas ir ne mazāks kā x). Pierādīsim, ka tas ir mazākais rūtiņu skaits, ar kuru iespējams nodrošināt vajadzīgo īpašību.

Sauksim dotā kvadrāta rūtiņu virkni par īpašu, ja vienlaikus

- tā ir "paralēla" kādai no dotā kvadrāta abām diagonālēm (t. i., veido kāda $m \times m$ apakškvadrāta diagonāli);
- tās abas galējās rūtiņas atrodas uz dotā kvadrāta kontūra (t. i., uz dotā kvadrāta malējās rindas vai kolonnas);
- tās garums ir vairāk nekā $\frac{n}{2}$ rūtiņas.

Var ievērot, ka katra īpaša virkne ir kāda $m \times m$ apakškvadrāta diagonāle ar $m > \frac{n}{2}$; tātad katrā no īpašajām virknēm vismaz viena rūtiņa jāiekrāso sarkana.
Iespējami divi gadījumi.

- Ja n ir nepāra, tad ir $2n$ īpašas virknes. Katra rūtiņa, kas tiek dotajā kvadrātā iekrāsota, pieder ne vairāk kā divām no šīm $2n$ virknēm; tātad nepieciešams iekrāsot vismaz n rūtiņas.
- Ja n ir pāra; tad ir $2n-2$ īpašas virknes. Vispirms izkrāsosim doto kvadrātu kā šaha galdiņu; tad katra īpaša virkne sastāv vai nu tikai no melnām rūtiņām (sauksim tādu virkni par melnu), vai tikai no baltām rūtiņām (sauksim šādu virkni par baltu). Simetrijas dēļ balto un melno virkņu skaits ir vienāds, tātad ir $n-1$ balta un $n-1$ melna īpaša virkne. Katra rūtiņa, kas tiek dotajā kvadrātā iekrāsota sarkana, pieder ne vairāk kā divām no īpašajām virknēm, turklāt abām virknēm jābūt vai nu baltām, vai melnām. Tā kā ir $n-1$ melna īpaša virkne, tad nepieciešams iekrāsot sarkanas vismaz $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = \frac{n}{2}$ melnas rūtiņas; tā kā ir $n-1$ balta īpaša virkne, tad nepieciešams iekrāsot sarkanas vismaz $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = \frac{n}{2}$ baltas rūtiņas. Tātad kopā vismaz $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$ rūtiņas nepieciešams iekrāsot sarkanas, lai prasītā īpašība izpildītos.

BW2.10. Kādā valstī ir 100 lidostas. Dažiem šo lidostu pāriem aviokompānija *SuperAir* nodrošina tiešos reisus (gan turp, gan atpakaļ). Par lidostas X *satiksmi* sauksim to lidostu skaitu, ar kurām *SuperAir* nodrošina tiešos reisus ar X.
Jauna aviokompānija *ConcurAir* piedāvā tiešos reisus starp divām šīs valsts lidostām tad un tikai tad, ja šo lidostu satiksmju summa ir vismaz 100. Izrādās, ka ir tāds maršruts, kas ļauj apceļot visas lidostas ar *ConcurAir* reisiem un atgriezties sākotnējā, turklāt katrā lidostā iegriežoties tikai vienu reizi. Pierādīt, ka ir arī tāds maršruts, kas ļauj apceļot visas lidostas ar *SuperAir* reisiem un atgriezties sākotnējā, turklāt katrā lidostā iegriežoties tikai vienu reizi!

Atrisinājums

Ar G un G' apzīmēsim grafus, kas attiecīgi atbilst *SuperAir* un *ConcurAir* reisiem (katram grafam ir 100 virsotnes, kas atbilst lidostām; divas virsotnes grafā G ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja starp attiecīgajām lidostām *SuperAir* nodrošina tiešo reisu; līdzīgi tiek definēts G'). Tad lidostas satiksme ir attiecīgās grafa G virsotnes pakāpe un jāpierāda, ka grafā G eksistē Hamiltona cikls. Vispirms pierādīsim šādu lemmu:

Lemma. *Pieņemsim, ka grafā H ir 100 virsotnes un tajā eksistē Hamiltona ceļš, kas iziet no virsotnes A un beidzas virsotnē B. Ja $\deg A + \deg B \geq 100$, tad grafs H satur Hamiltona ciklu.*

Lemmas pierādījums. Apzīmēsim $N = \deg A$. Tad $\deg B \geq 100 - N$. Sanumurēsim H virsotnes atbilstoši Hamiltona ceļam: $C_1 = A$, $C_2, C_3, \ldots, C_{99}, C_{100} = B$. Pieņemsim, ka N virsotnes, ar ko savienota A, ir $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_N}$. Apskata N iepriekšējās virsotnes $C_{j_1-1}, C_{j_2-1}, \ldots, C_{j_N-1}$. Tā kā ir tikai $100-N$ citas virsotnes (ieskaitot B) un $\deg B \geq 100-N$, tad B ir savienota ar vismaz vienu no virsotnēm $C_{j_1-1}, C_{j_2-1}, \ldots, C_{j_N-1}$ (var pieņemt, ka B ir savienota ar C_{j_1}).

Tādā gadījumā

$$A = C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{j_1-1} \to B = C_{100} \to C_{99} \to C_{98} \to \cdots \to C_{r+1} \to C_r \to A$$

ir Hamiltona cikls. Lemma pierādīta.

Atgriezīsimies pie sākotnējā uzdevuma. Pieņemsim pretējo, ka G nesatur Hamiltona ciklu. Apskatām jebkuras divas tādas virsotnes A un B, kas nav savienotas ar šķautni grafā G, taču ir savienotas ar šķautni grafā G' (t. i., *ConcurAir* nodrošina tiešo reisu starp lidostām A un B). Tad $\deg A + \deg B \geq 100$ grafā G, saskaņā ar nosacījumiem, pie kuriem strādā *ConcurAir*.
Savienosim grafā G virsotnes A un B ar šķautni. No lemmas izriet, ka neeksistēja Hamiltona ceļš no *A* uz *B* (jo pretējā gadījumā grafā *G* eksistētu arī Hamiltona cikls, bet tas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu). Tātad G nesatur Hamiltona ceļu arī pēc šķautnes AB pievienošanas. Atkārtojot šo darbību, iegūstam, ka visas virsotnes, kas ir savienotas ar šķautni grafā G', ir savienotas ar šķautni grafā G, taču grafs G nesatur Hamiltona ceļu (atšķirībā no grafa G'). Taču tas nav iespējams, tātad iegūta pretruna un pieņēmums, ka G nesatur Hamiltona ciklu, ir aplams.

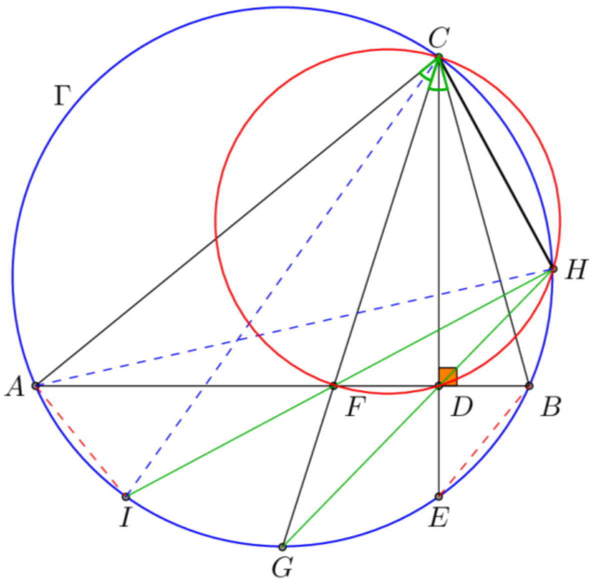
Ģeometrija

BW2.11. Šaurleņķu trijstūrim *ABC* apvilkta riņķa līnija Γ. Nogrieznis *CD* ir šī trijstūra augstums, bet punkts *E* ir *CD* krustpunkts ar riņķa līniju Γ. Leņķa *C* bisektrise krusto malu *AB* punktā *F*, bet riņķa līniju Γ arī punktā *G*, kas atšķirīgs no C. Taisne *GD* krusto Γ arī punktā *H*, bet taisne *HF* krusto Γ arī punktā *I*. Pierādīt, ka $AI = EB$!

Atrisinājums

Tā kā CG ir $\sphericalangle ACB$ bisektrise, tad $\sphericalangle AHG = \sphericalangle ACG = \sphericalangle GCB$, kur pirmā vienādība izpildās, jo atbilstošie leņķi balstās uz vienu un to pašu loku $\overset{\frown}{AG}$ (skat. 184. att.). No trijstūra ADH ārējā leņķa īpašības iegūstam $\sphericalangle HDB = \sphericalangle HAB + \sphericalangle AHG$. Ievērojam, ka $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HCB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku $\overset{\frown}{HB}$. Iegūstam

$$\sphericalangle HDB = \sphericalangle HAB + \sphericalangle AHG = \sphericalangle HCB + \sphericalangle GCB = \sphericalangle GCH.$$



184. att.

Tātad $\sphericalangle HDF = 180° - \sphericalangle HDB = 180° - \sphericalangle GCH$. Secinām, ka četrstūrim $CHDF$ var apvilkt riņķa līniju. Šajā riņķa līnijā $\sphericalangle FCD = \sphericalangle FHD$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku $\overset{\frown}{FD}$; trijstūrim ABC apvilktajā riņķa līnijā $\sphericalangle IHG = \sphericalangle ICG$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku $\overset{\frown}{IG}$. Tātad $\sphericalangle GCE = \sphericalangle FCD = \sphericalangle FHD = \sphericalangle IHG = \sphericalangle ICG$.
Pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle ACG = \sphericalangle GCB$, tātad

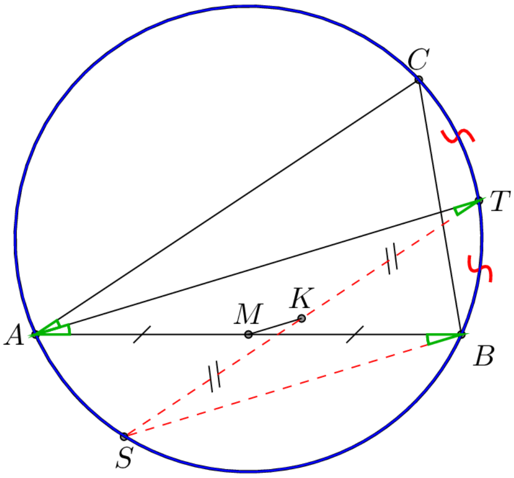
$$\sphericalangle ACI = \sphericalangle ACG - \sphericalangle ICG = \sphericalangle GCB - \sphericalangle GCE = \sphericalangle BCE.$$

Līdz ar to $AI = BE$ kā hordas, uz kurām balstās vienādi ievilktie leņķi.

BW2.12. Dots trijstūris *ABC*. Punkts *M* ir nogriežņa *AB* viduspunkts, bet *T* – trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas loka *BC* (tā, kurš nesatur *A*) viduspunkts. Trijstūra *ABC* iekšpusē izvēlēts tāds punkts *K*, ka *MATK* ir vienādsānu trapece ar pamatiem *AT* un *MK*. Pierādīt, ka $AK = KC$!

Atrisinājums

Ar S apzīmējam trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un taisnes TK otru krustpunktu (skat. 185. att.). Tad $\sphericalangle ABS = \sphericalangle ATS$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku $\overset{\frown}{AS}$, savukārt $\sphericalangle ATS = \sphericalangle TAB$ kā vienādsānu trapeces pamata pieleņķi. Tātad $\sphericalangle ABS = \sphericalangle TAB$ un taisnes AT un BS ir paralēlas, jo iekšējie šķērsleņķi pie taisnes AB ir vienādi. Secinām, ka $AT \parallel MK \parallel BS$.



185. att.

Tātad $ATBS$ ir vienādsānu trapece, jo tā ir ievilkta riņķa līnijā; tās viduslīnija ir paralēla pamatiem AT un BS un iet caur $ATBS$ diagonāļu viduspunktiem. Secinām, ka MK atrodas uz $ATBS$ viduslīnijas, jo caur M var novilkt tikai vienu taisni, kas paralēla AT. Līdz ar to K ir diagonāles TS viduspunkts.

Tā kā $\sphericalangle CAT = \sphericalangle TAB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, un $\sphericalangle TAB = \sphericalangle ATS$ kā vienādsānu trapeces pamata pieleņķi, tad $CA \parallel TS$, jo iekšējie šķērsleņķi pie taisnes AT ir vienādi. Tātad $ACTS$ ir vienādsānu trapece (jo tā ir ievilkta riņķa līnijā), kuras pamata TS viduspunkts ir K; simetrijas dēļ iegūstam $AK = CK$, kas arī bija jāpierāda.

BW2.13. Dots, ka *ABCD* ir kvadrāts; tam apvilktā riņķa līnija apzīmēta ar ω. Uz ω īsākā loka *AB* atlikts punkts *P*. Punkts *R* ir taišņu *CP* un *BD* krustpunkt, bet *Q* – taišņu *DP* un *AC* krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūri *ARB* un *DQR* ir vienlieli!

Atrisinājums

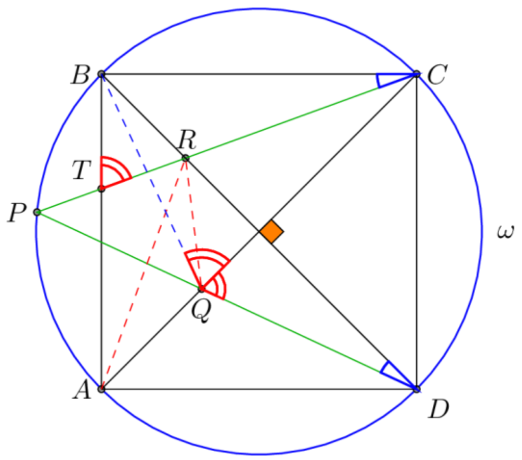
Ar T apzīmējam PC un AB krustpunktu (skat. 186. att.). Tā kā $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PDB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku $\overset{\frown}{PB}$, tad

$$\sphericalangle BTC = 90° - \sphericalangle PCB = 90° - \sphericalangle PDB = 90° - \sphericalangle QDB = \sphericalangle CQD = \sphericalangle CQB$$

(pēdējā vienādība pamatota, izmantojot simetriju pret AC). Tātad četrstūrim $BCQT$ var apvilkt riņķa līniju. Līdz ar to $\sphericalangle TQC = 180° - \sphericalangle TBC = 90°$. Tātad gan TQ, gan BD ir perpendikulāri taisnei AC, līdz ar to $TQ \parallel BD$.

Izmantojot faktu, ka divu trijstūru laukumi ir vienādi, ja tiem ir kopīga mala un vienādi augstumi pret šo malu, iegūstam

$$S_{DQR} = S_{DTR} = S_{DTB} - S_{TBR} = S_{CTB} - S_{TBR} = S_{CRB} = S_{ARB}.$$

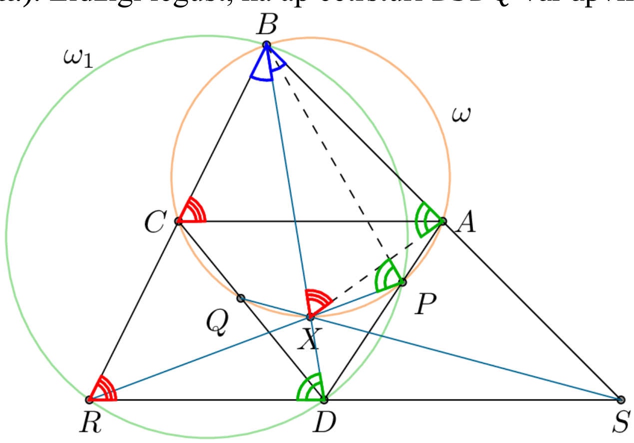


186. att.

BW2.14. Izliekta četrstūra *ABCD* diagonāle *BD* vienlaikus ir arī leņķa *ABC* bisektrise. Trijstūrim *ABC* apvilktā riņķa līnija ω krusto malas *AD* un *CD* vēl attiecīgi punktos *P* un *Q*. Taisne, kas iet caur *D* un ir paralēla *AC*, krusto taisnes *BC* un *BA* attiecīgi punktos *R* un *S*. Pierādīt, ka punkti *P*, *Q*, *R* un *S* atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums

Tā kā $\sphericalangle SDP = \sphericalangle CAP = \sphericalangle RBP$ (pirmā vienādība izriet no iekšējo šķērsleņķu vienādības pie paralēlām taisnēm AC un RS, kuras krusto AD; savukārt $\sphericalangle CAP = \sphericalangle RBP$ kā riņķa līnijā ω ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku CP), tad ap četrstūri $BRDP$ var apvilkt riņķa līniju ω_1 (skat. 187. att.). Līdzīgi iegūst, ka ap četrstūri $BSDQ$ var apvilkt riņķa līniju ω_2.



187. att.

Ar X apzīmējam nogriežņa BD un riņķa līnijas ω otru krustpunktu. Tā kā $\sphericalangle AXB$ un $\sphericalangle ACB$ ir riņķa līnijā ω ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku AB, bet $\sphericalangle ACB$ un $\sphericalangle DRB$ ir kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm AC un RS, kuras krusto BR, tad $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DRB$, turklāt $\sphericalangle ABX = \sphericalangle DBR$ (jo BD ir $\sphericalangle ABC$ bisektrise). Tas nozīmē, ka trijstūri ABX un DBR ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$). Līdz ar to

- $\sphericalangle RPB = \sphericalangle RDB$ kā riņķa līnijā ω_1 ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku RB;
- $\sphericalangle RDB = \sphericalangle XAB$ kā līdzīgu trijstūru atbilstošie leņķi;
- $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XPB$ kā riņķa līnijā ω ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku XB.

Secinām, ka $\sphericalangle RPB = \sphericalangle XPB$, no kā izriet, ka punkti R, X un P atrodas uz vienas taisnes. Līdzīgi pierāda, ka arī punkti S, X un Q atrodas uz vienas taisnes.

No hordu īpašības riņķa līnijā ω_1 izriet, ka $RX \cdot XP = DX \cdot XB$; no hordu īpašības riņķa līnijā ω_2 izriet, ka $SX \cdot XQ = DX \cdot XB$; tātad $RX \cdot XP = SX \cdot XQ$, un punkti P, Q, R un S atrodas uz vienas riņķa līnijas.

BW2.15. Izliekta četrstūra *ABCD* leņķu *A* un *C* summa ir mazāka nekā 180°. Pierādīt, ka

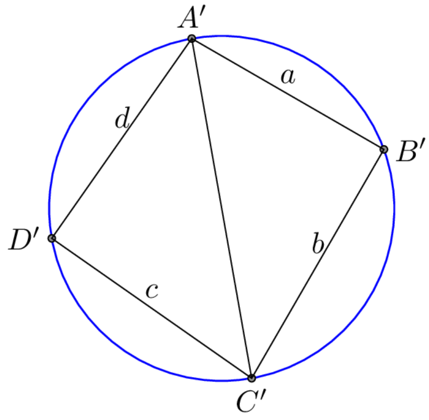
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD)!$$

Atrisinājums

Apzīmējam $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Tad jāpierāda nevienādība

$$a \cdot c + b \cdot d < AC \cdot (a + d).$$

Apskatām tādu četrstūri $A'B'C'D'$, kas ir ievilkts riņķa līnijā un kura malu garumi sakrīt ar $ABCD$ malu garumiem, t. i., $A'B' = a$, $B'C' = b$, $C'D' = c$, $D'A' = d$ (skat. 188. att.). Tāds četrstūris eksistē, jo pietiekami lielā riņķa līnijā var novilkt četras hordas, kas nekrustojas un kuru garumi sakrīt ar dotā četrstūra malu garumiem; pakāpeniski samazinot riņķa līnijas rādiusu, iegūsim riņķa līniju, kurā šīs četras hordas veido ievilktu četrstūri.



188. att.

Tad $\sphericalangle B' + \sphericalangle D' = 180° < \sphericalangle B + \sphericalangle D$. Tātad vai nu $\sphericalangle B' < \sphericalangle B$, vai $\sphericalangle D' < D$. Varam pieņemt, ka $\sphericalangle B' < \sphericalangle B$ (otru gadījumu apskata analoģiski). No kosinusu teorēmas izriet, ka

$$(A'C')^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle B'.$$

Analoģiski iegūst, ka $(AC)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle B$.

Tā kā $\sphericalangle B' < \sphericalangle B$ un kosinuss ir dilstoša funkcija intervālā $[0; \pi]$, tad $\cos\sphericalangle B' > \cos\sphericalangle B$ un

$$(A'C')^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle B' < a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle B = (AC)^2.$$

Secinām, ka $A'C' < AC$.

No Ptolemaja teorēmas četrstūrī $A'B'C'D'$ izriet, ka $a \cdot c + b \cdot d = A'C' \cdot B'D'$.

Trijstūrī $A'B'D'$ no trijstūra nevienādības izriet $B'D' < a + d$; tātad

$$a \cdot c + b \cdot d < A'C' \cdot (a + d).$$

Tā kā $A'C' < AC$, tad iegūstam nevienādību $a \cdot c + b \cdot d < AC \cdot (a + d)$, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī ar inversiju.

Skaitļu teorija

BW2.16. Noteikt, vai skaitlis $712! + 1$ ir pirmskaitlis!

Atrisinājums

Pierādīsim, ka $712! + 1$ dalās ar 719 (kas ir pirmskaitlis); tā kā $719 < 712! + 1$, tad no tā varēs secināt, ka $712! + 1$ ir salikts skaitlis.

Turpmāk šī uzdevuma risinājumā visas kongruences ir pēc moduļa 719.

Saskaņā ar Vilsona teorēmu, $718! \equiv -1$. Turklāt

$$713 \cdot 714 \cdot 715 \cdot 716 \cdot 717 \cdot 718 \equiv (-6) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \equiv 720 \equiv 1.$$

Tātad

$$-1 \equiv 718! \equiv 712! \cdot (713 \cdot 714 \cdot 715 \cdot 716 \cdot 717 \cdot 718) \equiv 712! \cdot 1 = 712!,$$

no kā izriet $712! \equiv -1$, t. i., $712! + 1$ dalās ar 719.

Piezīme. Skaitlis 719 ir mazākais skaitļa $712! + 1$ pirmreizinātājs, jo tas ir mazākais pirmskaitlis, kas ir lielāks nekā 712 (tā kā $712!$ dalās ar visiem mazākiem pirmskaitļiem, tad $712! + 1$ nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas ir mazāks nekā 712).

BW2.17. Vai eksistē tādi dažādi racionāli skaitļi x, y, z, kuriem izpildās vienādība

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=2014?$$

Atrisinājums

Apzīmējam $a=x-y$ un $b=y-z$. Tad a un b ir racionāli skaitļi un

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{b^2(a+b)^2+a^2(a+b)^2+a^2\,b^2}{a^2b^2(a+b)^2}=\frac{a^2b^2+b^4+a^4+2ab^3+2a^3b+2a^2\,b^2}{a^2b^2(a+b)^2}=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+ab}{ab(a+b)}\right)^2.$$

Tā kā skaitlis 2014 nav racionāla skaitļa kvadrāts, tad šādi skaitļi x, y un z neeksistē.

BW2.18. Dots pirmskaitlis p un naturāls skaitlis n. Atrast, cik dažādos veidos var izvēlēties tādus veselu nenegatīvu skaitļu četriniekus $(a_1; a_2; a_3; a_4)$, kam $a_i < p^n$ visiem $i = 1;\ 2;\ 3;\ 4$, turklāt skaitlis $a_1a_2 + a_3a_4 + 1$ dalās ar p^n.

Atrisinājums

Vispirms apskatām gadījumu, kad $a_1 \not\equiv\ 0\ (mod\ p)$. Izvēlēties šādu a_1 var $p^n - p^{n-1}$ veidos, jo tik daudz starp skaitļiem $0; 1; \dots; p^n - 1$ ir tādu, kas nedalās ar p. Skaitļus a_3 un a_4 izvēlamies patvaļīgi (katru no tiem tātad var izvēlēties p^n veidos). Tad a_2 ir viennozīmīgi noteikts no nosacījuma $a_1a_2 + a_3a_4 + 1 \equiv 0\ (mod\ p^n)$, t. i., to var izvēlēties tikai vienā veidā:

$$a_2 \equiv -a_1^{-1}(1+a_3a_4)\ \ (mod\ p^n),$$

kur a_1^{-1} ir skaitļa a_1 inversais elements pēc moduļa p^n; starp dotajiem skaitļiem var izvēlēties tieši vienu tādu a_2, kas apmierina šo kongruenci. Tātad šajā gadījumā iegūstam $(p^n - p^{n-1}) \cdot p^n \cdot p^n \cdot 1 = p^{3n-1}(p-1)$ četriniekus.

Apskatām gadījumu, kad $a_1 \equiv 0\ (mod\ p)$. Tad $a_3 \not\equiv 0\ (mod\ p)$, pretējā gadījumā skaitlis $a_1a_2 + a_3a_4$ dalās ar p, bet $a_1a_2 + a_3a_4 + 1$ nedalās ne ar p, ne ar p^n. Izvēlamies a_1 tā, lai a_1 dalās ar p (to var izdarīt p^{n-1} veidos), a_3 tā, lai a_3 nedalās ar p (to var izdarīt $p^n - p^{n-1}$ veidos), un a_2 patvaļīgi (to var izdarīt p^n veidos). Tad a_4 ir viennozīmīgi noteikts no nosacījuma $a_1a_2 + a_3a_4 + 1 \equiv 0\ (mod\ p^n)$, t. i., to var izvēlēties tikai vienā veidā:

$$a_4 \equiv -a_3^{-1}(1+a_1a_2)\ \ (mod\ p^n),$$

kur a_3^{-1} ir skaitļa a_3 apgrieztais elements pēc moduļa p^n; starp dotajiem skaitļiem var izvēlēties tieši vienu tādu a_4, kas apmierina šo kongruenci. Tātad šajā gadījumā iegūstam $p^{n-1} \cdot (p^n - p^{n-1}) \cdot p^n \cdot 1 = p^{3n-2}(p-1)$ četriniekus.

Līdz ar to kopā šādu četrinieku ir $p^{3n-1}(p-1) + p^{3n-2}(p-1) = p^{3n} - p^{3n-2}$.

BW2.19. Doti pozitīvi savstarpēji pirmskaitļi m un n. Atrast skaitļu $2^m - 2^n$ un $2^{m^2+mn+n^2} - 1$ lielākā kopīgā dalītāja visas iespējamās vērtības!

Atrisinājums

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $m \geq n$. Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. *Ja a, b, n ir naturāli skaitļi, tad LKD($n^a - 1;\ n^b - 1$) $= n^{LKD(a;\,b)} - 1$.*

Lemmas pierādījums. Apzīmējam $\text{LKD}(a; b) = d$, $n^d = N$, $\frac{a}{d} = A$ un $\frac{b}{d} = B$. Tad $\text{LKD}(A; B) = 1$ un $n^a - 1 = n^{dA} - 1 = N^A - 1$, $n^b - 1 = n^{dB} - 1 = N^B - 1$.

Identitātē

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1}) \tag{5}$$

ievietojam vērtības $x = N$ un $y = 1$, $m = A$, iegūstot

$$N^A - 1 = (N-1)(N^{A-1} + N^{A-2} + \cdots + N + 1).$$

Līdzīgi iegūstam, ka

$$N^B - 1 = (N-1)(N^{B-1} + N^{B-2} + \cdots + N + 1).$$

Tātad gan $n^a - 1$, gan $n^b - 1$ dalās ar $N - 1 = n^d - 1$; līdz ar to $\text{LKD}(n^a - 1;\ n^b - 1)$ dalās ar $n^d - 1$. Pierādīsim, ka arī $n^d - 1$ dalās ar $\text{LKD}(n^a - 1;\ n^b - 1)$, tad būs pamatots, ka $n^d - 1 = \text{LKD}(n^a - 1;\ n^b - 1)$.

Saskaņā ar LKD īpašībām, eksistē tādi naturāli skaitļi p un q, ka $Ap - Bq = 1$.

Ievērojam, ka $N^{Ap} - 1$ dalās ar $N^A - 1$ (izriet no identitātes (5), ievietojot $x = N^A$, $y = 1$ un $m = p$); analoģiski, $N^{Bq} - 1$ dalās ar $N^B - 1$. Tātad $\text{LKD}(N^{Ap} - 1;\ N^{Bq} - 1)$ dalās ar $\text{LKD}(N^A - 1;\ N^B - 1)$. Taču

$$\text{LKD}(N^{Ap} - 1;\ N^{Bq} - 1) = \text{LKD}(N^{Bq+1} - 1;\ N^{Bq} - 1) =$$
$$= \text{LKD}(N^{Bq+1} - 1 - N(N^{Bq} - 1);\ N^{Bq} - 1) = \text{LKD}(N - 1;\ N^{Bq} - 1) = N - 1,$$

t. i., $N - 1 = n^d - 1$ dalās ar $\text{LKD}(N^A - 1;\ N^B - 1) = \text{LKD}(n^a - 1;\ n^b - 1)$. Lemma pierādīta.

Ievērojam, ka $2^{m^2+mn+n^2} - 1$ ir nepāra skaitlis, tādēļ

$$\text{LKD}\left(2^m - 2^n;\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1\right) = \text{LKD}\left(2^n(2^{m-n} - 1);\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1\right) =$$
$$= \text{LKD}\left(2^{m-n} - 1;\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1\right).$$

No lemmas izriet, ka

$$\text{LKD}\left(2^{m-n} - 1;\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1\right) = 2^{\text{LKD}(m-n;\ m^2+mn+n^2)} - 1.$$

Apzīmējam $d = \text{LKD}(m - n;\ m^2 + mn + n^2)$. Tad $d \geq 1$ ir skaitļa $m - n$ naturāls dalītājs. Tā kā m un n ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $\text{LKD}(m; d) = 1$, t. i., arī m un d ir savstarpēji pirmskaitļi. Tā kā

$$m^2 + mn + n^2 = m^2 + m(m - (m - n) + \left(m - (m - n)\right)^2 \equiv 3m^2 \pmod d,$$

tad $3m^2$ dalās ar d. Taču m un d ir savstarpēji pirmskaitļi, līdz ar to 3 dalās ar d, t. i., $d = 1$ vai arī $d = 3$. No tā izriet, ka $\text{LKD}\left(2^m - 2^n;\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1\right) = 2^d - 1$ var pieņemt tikai vērtības 1 un 7.

Vēl jāpierāda, ka abas vērtības ir iegūstamas:

- ja $m = 2, n = 1$, tad
$$\text{LKD}(2^2 - 2^1;\ 2^{4+2+1} - 1) = \text{LKD}(2; 127) = 1;$$
- ja $m = 1, n = 1$, tad
$$\text{LKD}(2^1 - 2^1;\ 2^{1+1+1} - 1) = \text{LKD}(0; 7) = 7.$$

BW2.20. Apskatām tādu naturālu skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ka visiem $k \geq 2$ izpildās vienādība

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

kur i ir tāds nenegatīvs vesels skaitlis, ka $a_k + a_{k-1}$ dalās ar 2015^i, bet nedalās ar 2015^{i+1}. Pierādīt, ka gadījumā, ja šī virkne ir periodiska, tās perioda garums dalās ar 3.

Atrisinājums

Varam pieņemt, ka virkne satur kādu nepāra skaitli. Ja tas tā nav, t. i., virknē visi skaitļi ir pāra, tad varam izdalīt visus virknes elementus ar 2^j, kur 2^j ir lielākā divnieka pakāpe, ar kuru dalās visi virknes elementi. Tā iegūstam virkni, kas visiem $k \geq 2$ apmierina doto sakarību un satur nepāra skaitli.

Apskatām virkni pēc moduļa 2. Tā kā $2015 \equiv 1\ (mod\ 2)$, tad virknes locekļi visiem $k \geq 2$ apmierina sakarību

$$a_{k+1} \equiv a_k + a_{k-1}\ (mod\ 2),$$

turklāt vismaz vienam indeksam j izpildās $a_j \equiv 1\ (mod\ 2)$. Šķirojam divus iespējamos gadījumus:

- Ja a_{j+1} ir nepāra, t. i., $a_{j+1} \equiv 1\ (mod\ 2)$, tad, apskatot doto virkni pēc moduļa 2, sākot ar a_j, iegūstam virkni
$$\ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots,$$
t. i., dotā virkne pēc moduļa 2 ir periodiska ar perioda garumu 3. Līdz ar to, ja sākotnējā virkne ir periodiska, tās perioda garumam jādalās ar 3.

- Ja a_{j+1} ir pāra, t. i., $a_{j+1} \equiv 0 \ (mod\ 2)$, tad, apskatot doto virkni pēc moduļa 2, sākot ar a_j, iegūstam virkni
$$\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots,$$
t. i., dotā virkne pēc moduļa 2 ir periodiska ar perioda garumu 3. Līdz ar to, ja sākotnējā virkne ir periodiska, tās perioda garumam jādalās ar 3.

Piezīme. Nav zināms, vai eksistē periodiskas virknes, kas apmierina doto rekurences sakarību.

“BALTIC WAY 2014” REZULTĀTU APKOPOJUMS

Zemāk tabulā dota informācija par starptautisko komandu sacensību matemātikā “Baltic Way 2014” rezultātiem. Par katru uzdevumu varēja iegūt 0 – 5 punktus.

	Algebra					**Kombinatorika**					**Ģeometrija**					**Skaitļu teorija**					**Kopā**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	
Baltkrievija	5	5	5	5	5	4	5	1	5	0	5	5	5	0	0	1	4	2	2	0	**64**
Dānija	0	5	0	1	0	4	5	5	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**25**
Igaunija	1	5	0	0	1	5	4	3	5	0	0	5	1	0	0	0	5	0	5	0	**40**
Islande	5	1	5	1	0	5	4	0	3	0	5	5	5	0	0	5	1	0	5	0	**50**
Krievija	5	5	5	5	5	4	5	5	5	0	5	5	5	2	5	5	5	0	5	5	**86**
Latvija	0	5	0	0	5	5	5	5	5	0	0	5	5	0	0	1	1	0	5	0	**47**
Lietuva	5	5	5	5	5	5	3	5	0	0	5	5	5	5	0	5	5	0	5	0	**73**
Norvēģija	5	5	0	5	0	5	5	4	0	0	0	0	5	0	0	5	2	0	5	0	**46**
Polija	5	5	5	5	5	4	5	0	5	0	5	5	5	0	0	5	5	5	5	0	**74**
Somija	0	5	0	0	0	5	0	5	3	0	1	5	5	0	0	0	0	0	0	0	**29**
Vācija	5	5	5	4	5	0	5	4	5	0	5	5	5	1	5	5	5	1	5	0	**75**
Zviedrija	5	5	5	5	2	5	5	4	4	0	5	5	5	0	0	5	4	1	5	0	**70**

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti piecās grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika. Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās. Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: S1.12.5., N1.10.2., N1.10.4., V1.9.2., V1.12.2., P1.5., A1.10.1., A1.10.3., A1.11.2., BW1.19., N2.9.5., N2.10.1., N2.10.3., V2.9.3., A2.9.1., A2.10.1., A2.11.5., A2.12.1., BW2.2., BW2.6., BW2.7., BW2.10.

Nevienādības, nevienādību sistēmas: N1.10.1., N1.11.5., V1.9.1., V1.11.1., V1.12.5., P1.1., A1.12.1., BW1.1., BW1.4., BW1.16., N2.11.1., V2.9.5., V2.10.3., A2.12.3., BW2.3.

Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: V1.9.1., P1.1., V2.9.5., BW2.3.

Funkcionālvienādojumi, funkcionālnevienādības: A1.12.5., BW1.3., P2.4., BW2.4.

Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S1.10.1., S1.11.1., N1.9.1., N1.12.1., V1.9.5., BW1.5., N2.9.1., N2.10.1., N2.12.1., V2.10.1., V2.11.1., P2.1., BW2.17.

Pārveidojumi: S1.9.1., S1.12.1., N1.9.1., N1.11.5., V1.10.2., BW1.16., N2.11.3.

Polinomi: S1.12.4., N1.11.1., BW1.2., BW1.20.

Matemātiskā indukcija: N1.12.5., V1.12.2., A1.11.2., V2.10.2.

Trigonometrija: V1.12.3., V2.12.1., A2.11.5., A2.12.4., BW2.1., BW2.5.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S1.10.2., S1.11.3., N1.10.3., N1.11.2., V1.1.4., V1.12.3., P1.2., A1.9.3., A1.10.5., A1.11.3., A1.12.2., BW1.11., BW1.12., BW1.14., S2.11.2., S2.12.2., N2.10.5., N2.11.4., V2.10.4., V2.11.5., V2.12.2., P2.2., A2.9.4., A2.11.4., BW2.11., BW2.12., BW2.13., BW2.14.

Ar riņķa līniju saistītas līnijas: N1.11.2., V1.10.4., BW1.11., V2.10.4., V2.1.5., A2.12.4., BW2.11., BW2.14., BW2.15.

Sakarības trijstūros: S1.9.2., S1.12.2., N1.10.3., V1.9.3., V1.12.3., P1.2., BW1.13., S2.10.2., N2.11.4., V2.9.4., V2.11.4., BW2.15.

Ģeometriskas nevienādības: V1.11.5., BW1.15., V2.9.4., V2.10.3., A2.10.4.

Laukumi: N1.9.2., N1.9.5., N1.12.2., A1.9.1., N2.12.4., V2.11.2., A2.10.5., BW2.13.

Līdzība: S1.9.2., N1.9.5., V1.12.3., P1.2., A1.10.5., BW1.11., N2.9.3., V2.12.2.

Vienādi trijstūri: S1.9.2., S1.12.2., S2.9.2., S2.12.2., V2.12.2., P2.2., A2.10.4., A2.12.4.

Ģeometriskie pārveidojumi: S1.11.3., BW1.11., S2.10.2., V2.12.2., P2.2., A2.11.4.

SKAITĻU TEORIJA

Atlikumi, kongruences: V1.9.2., V1.11.2., P1.4., A1.12.3., BW1.17., N2.9.4., N2.10.4., N2.11.3., N2.12.5., V2.10.2., V2.12.3., BW2.18., BW2.20.

Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S1.9.3., S1.11.5., N1.11.3., N1.12.3., V1.11.2., A1.10.4., A1.12.3., S2.10.1., V2.9.1., BW2.16.

Dalāmības īpašības un pazīmes: S1.9.4., S1.12.3., N1.11.3., N1.12.3., V1.10.2., A1.11.4., S2.10.1., S2.12.1., N2.10.2., N2.12.2., V2.9.1., V2.11.4., V2.12.3., V2.12.5., A2.9.3., A2.11.1., A2.12.5., BW2.1., BW2.16., BW2.18., BW2.19.

Vienādojumi naturālos un veselos skaitļos: N1.9.3., N1.12.5., V1.10.1., P1.4., BW1.18., BW1.19.

Skaitļa pieraksts: S1.10.3., A1.9.2., S2.12.1., N2.12.5., A2.10.3.

KOMBINATORIKA

Dirihlē princips: S1.11.2., N1.10.2., V1.9.4., S2.11.1., N2.11.5.

Invariantu metode, krāsošana: S2.9.3., S2.10.3., S2.11.3., S2.12.3., N2.9.2., N2.10.2., N2.11.2., N2.12.2., V2.9.2., V2.10.5., V2.12.5., A2.9.2., A2.10.2., A2.11.2., A2.12.2., BW2.8.

Skaitīšana: S1.11.4., S1.12.5., N1.9.4., N1.12.4., V1.11.3., A1.9.5., A1.10.2., A1.11.1., S2.9.1., N2.12.3., A2.11.1., BW2.6., BW2.7., BW2.9.

Gadījumu pārlase: A1.9.4.

Matemātiskā indukcija: N1.11.4., V1.10.3., V1.12.4., BW1.7., BW1.8., BW1.10., P2.5.

Figūru sagriešana, salikšana: A1.11.5., A1.12.4., N2.9.3., V2.9.2.

Grafi: V1.12.4., BW1.9., S2.9.1., BW2.10.

Kopas, apakškopas: S1.10.4., N1.10.2., V1.10.5., BW2.7.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde: S1.9.5., S1.10.5., V1.10.3., P1.5., BW1.6., BW1.7., BW1.8., BW1.17., N2.9.3., V2.11.2., P2.3., A2.9.5., A2.10.5., A2.11.3., BW2.8.

Algoritma analīze: N2.11.5., V2.11.3., V2.12.4.

Loģiski spriedumi: N1.10.5., P1.3.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš "Uzdevumi algoritmikā un algoritmiskajā kombinatorikā ar atrisinājumiem" – Rīga, 2004.

A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997.

www.bw2013.lu.lv/problems-and-solutions/

http://mif.vu.lt/balticway2014/?page_id=21

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

Projekts LAIMA ir **La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts, kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem. Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir Benedikts Johannessons.

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.

48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.

51. M. Avotiņa, A. Ķerubiņa. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.

52. A. Locāns, I. Ošiņa. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.

53. M. Avotiņa, M. Kokainis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.** Rīga: LU, 2015.

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm