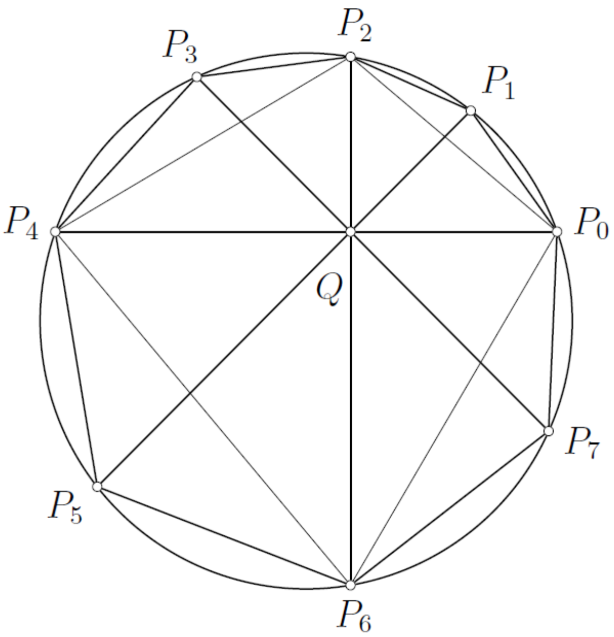
MARUTA AVOTIŅA, AGNESE ĶERUBIŅA

Matemātikas sacensības

9.–12. klasēm

2012./2013. mācību gadā



RĪGA 2014

M. Avotiņa, A. Ķerubiņa. Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2014. – 130 lpp.

Grāmatā apkopoti 2012./2013. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. – 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Grāmatas sākumā dots īss teorijas izklāsts, kas varētu būt nepieciešams uzdevumu risināšanā.

Izsakām pateicību 2012./2013. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotājiem: Andrim Ambainim, Aivaram Bērziņam, Andrejam Cibulim, Mārtiņam Kokainim, Dacei Kūmai, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Mārim Valdatam, Ingrīdai Veilandei, Jevgēnijam Vihrovam.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9934-517-71-6

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības iepriekšējā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā mūsdienu olimpiādes. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko daļu pasaules valstu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Tieši māku pierādīt kā galveno guvumu no Latvijas matemātikas olimpiādēm ir pieminējuši šobrīd pasaulslaveni latviešu zinātnieki. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.). Arī Tīmeklī atrodams bagātīgs mācību materiālu un uzdevumu klāsts. To varat sākt pārlūkot ar http://nms.lu.lv .

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs vidusskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm, un skolotājiem, lai veiksmīgi organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās. Šāda veida mācību līdzeklis kopš 2005./2006. mācību gada tiek izdots katru gadu. Lai gan dažādu gadu uzdevumu krājumu autori ir mainījušies, šajos uzdevumu krājumos iespēju robežās ir saglabāts profesora Agņa Andžāna iedibinātais formāts.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas šādas matemātikas olimpiādes, kurās 2012./2013. mācību gadā bija iespēja piedalīties Latvijas 9. – 12. klašu skolēniem:

- *Sagatavošanās olimpiāde matemātikā.* Notiek kopš 1987./1988. mācību gada, tās rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Šī olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu. Lai gan katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tikai no matemātikas skolotājiem ir atkarīgs, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada* (*agrāk – Rajona*) *matemātikas olimpiāde.* Notiek kopš XX gadsimta piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Novada olimpiāde notiek novada/novadu apvienības/pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts matemātikas olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Novada olimpiāde, notiek kopš XX gs. piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek divas dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām

tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās tik auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, kā citās valstīs. Atklāto matemātikas olimpiādi rīko LU A. Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.
- *Atlase sacensībām „Baltijas Ceļš”* tiek organizēta, lai atlasītu labākos skolēnus starptautiskajām komandu sacensībām, kas norisinās mācību gada sākumā, tāpēc tās notiek jau septembra vidū. Uz atlases sacensībām tiek aicināti skolēni, kuri iepriekšējā mācību gadā uzrādījuši labus rezultātus Valsts un Atklātajā matemātikas olimpiādē.
- *Matemātikas komandu sacensības „Baltijas Ceļš”* savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šīs sacensības pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis. Tagad „Baltijas Ceļā” piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande. Katra valsts šīm sacensībām izvirza piecu skolēnu komandu, kurai sacensību dienā 4,5 stundu laikā kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi.

Šajā uzdevumu krājumā apkopoti un izvērsti aprakstīti 2012./2013. mācību gada matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi, kā arī iekļautas sadaļa „Ieteikumi”. Sadaļā „Ieteikumi” skolēni var smelties idejas uzdevuma risināšanā, ja neizdodas uzdevumu atrisināt patstāvīgi. Skolotāji ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos. Sadaļā “Teorija” iekļauts minimālais teorijas apjoms, kas varētu būt nepieciešams olimpiāžu uzdevumu risināšanā.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Grāmatā visiem uzdevumiem dots izvērsts un pilnīgs atrisinājums, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Lielākajam skaitam uzdevumu ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi, pareizi atrisinājumi. Bieži vien pat atrisinājumu idejas var būt radikāli atšķirīgas. Tāpēc doto atrisinājumu nevajag uztvert kā vienīgo iespējamo un nevajag baidīties meklēt jaunus ceļus līdz pilnam risinājumam.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām apgūt šos paņēmienus, lai varētu izmantot tos turpmāk.

Ceram, ka šī grāmata attīstīs Jūsu radošumu un risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Autori

TEORIJA

BIEŽĀK SASTOPAMIE UZDEVUMU VEIDI

„Atrast vismazāko / vislielāko vērtību” – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām:

1) **atrast** šo vismazāko / vislielāko vērtību un **uzrādīt piemēru**;

2) **pierādīt**, ka mazāka / lielāka vērtība nevar būt.

Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2. daļu.

„Vai var ...?” – Uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir:

- **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt ...?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības.

ALGEBRA

Saīsinātās reizināšanas formulas:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$, no kā seko
  - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
  - $(a-b)^2 = (b-a)^2$;
  - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$.

Par reāla skaitļa a **moduli** jeb absolūto vērtību (apzīmē $|a|$) sauc lielāko no skaitļiem a un $-a$.

Moduļa īpašības:

- $|a| \geq 0$;
- $|a-b| = |b-a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $|a-b| \geq |a| - |b|$;

Par skaitļa x **veselo daļu** (apzīmē $[x]$) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x, t. i., veselo skaitli m tādu, ka $m \leq x < m+1$. Piemēram, $[3] = 3$, $[2{,}8] = 2$, $[0{,}2] = 0$, $[-1{,}5] = -2$.

Par skaitļa x **daļveida daļu** (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x - [x]$. Piemēram, $\{1{,}3\} = 0{,}3$.

Polinomi

Par mainīgā x n-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

kur n – vesels nenegatīvs skaitlis, a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 – patvaļīgi skaitļi ($a_n \neq 0$).

Bezū teorēma. Dalot polinomu $P(x)$ ar binomu $x-a$, atlikumā iegūst $P(a)$, t. i., skaitli, kas ir polinoma vērtība pie $x = a$.

Algebras pamatteorēma. Polinomam $P_n(x)$ ir ne vairāk kā n saknes.

Kvadrāttrinoms un kvadrātvienādojums

Polinomu, kuru var pierakstīt formā $ax^2 + bx + c$, kur a, b un c – reāli nenulles skaitļi, sauc par **kvadrāttrinomu**.

Par **kvadrātvienādojumu** sauc vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$, kur x ir mainīgais, bet a, b, c ir reāli skaitļi ($a \neq 0$).

Kvadrātvienādojuma **sakņu aprēķināšana**:

- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

- **Vjeta teorēma**: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$;

Kvadrātvienādojuma **sakņu skaits** ir atkarīgs no diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ vērtības:

- $D < 0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D = 0$ – vienādojumam ir viena sakne jeb divas vienādas saknes $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- $D > 0$ – vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Kvadrāttrinomu var **sadalīt reizinātājos** izmantojot formulu:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

Funkcijas

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **pāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = f(x)$. Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret y asi.

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **nepāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = -f(x)$. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, t. i., punktu $(0; 0)$.

Funkciju sauc par **augošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkciju sauc par **dilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$.

Ja funkcija kādā intervālā ir tikai dilstoša vai tikai augoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju.

Funkciju vispārīgās īpašības:

- ja funkcija f ir augoša, tad funkcija $(-f)$ ir dilstoša;
- divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;
- pāra funkciju summa (reizinājums) ir pāra funkcija;
- divu nepāra funkciju reizinājums (dalījums) ir pāra funkcija;
- pāra un nepāra funkcijas reizinājums (dalījums) ir nepāra funkcija.

Funkcijas $f(x)$ krustpunkti ar x asi ir vienādojuma $f(x) = 0$ saknes.

Funkciju $f(x)$ un $g(x)$ **grafiku krustpunktu *x* koordinātas** ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kas kā mainīgo satur nezināmo funkciju.

Risināšanas metodes:

- Dažādu vērtību ievietošana (piemēram, $x = 0$, $x = 1$, $x = y = 0$);
- Substitūciju metode (jāievēro sākotnējais definīcijas apgabals);
- Ekvivalentu pārveidojumu veikšana;
- Nenoteikto koeficientu metode.

Attēlojumu $f: X \to Y$ sauc par injektīvu attēlojumu (vai injekciju), ja jebkuru divu dažādu kopas *X* elementu attēli attēlojumā f ir dažādi, t. i.,

$$\forall x_1, x_2 \in X: \ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Attēlojumu $f: X \to Y$ sauc par sirjektīvu attēlojumu (vai sirjekciju), ja katrs kopas *Y* elements ir vismaz viena kopas *X* elementa attēls attēlojumā f, t. i.,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X: \ f(x) = y.$$

Attēlojumu $f: X \to Y$ sauc par bijektīvu attēlojumu (vai bijekciju), ja f vienlaicīgi ir injekcija un sirjekcija.

Elementārās funkcijas: Ja f ir nepārtraukta funkcija, kas visiem $x, y \in R$ apmierina vienādību:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Košī vienādība), tad $f(x) = Cx$, kur konstante $C = f(1)$;
- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = C^x$, kur C – konstante;
- $f(xy) = f(x) + f(y)$, tad $f(x) = C \ln x$, kur C – konstante;
- $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = x^C$, kur C – konstante;
- $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (Jensena vienādība), tad $f(x) = C_1 x + C_2$, kur C_1, C_2 – konstantes.

Klasiskās nevienādības

Izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs $a^2 \geq 0$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo ģeometrisko** $A \geq G$:

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ jeb $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ visiem $a_i > 0, \ i = 1, 2, ..., n$.

Secinājumi:

- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;
- $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko** $Q \geq A$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko** $A \geq H$:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \text{ visiem } a_i > 0, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Piezīme: $Q \geq A \geq G \geq H$.

Košī-Buņakovska nevienādība:

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2,$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi.

Progresijas

Virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par **aritmētisko progresiju**. Šo skaitli sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci** un apzīmē ar *d*: $a_{n+1} = a_n + d$.

Lai definētu aritmētisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un diferenci.

Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Virkni, kuras katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu nenulles skaitli, sauc par **ģeometrisko progresiju**. Šo skaitli sauc par ģeometriskās progresijas **kvocientu** *q*: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Lai definētu ģeometrisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un kvocientu.

Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

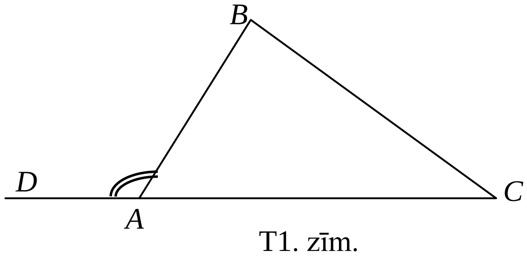
Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$.

Ja $|\, q \,| < 1$, tad ģeometrisko progresiju sauc par **bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju** un tās visu locekļu summu aprēķina pēc formulas $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

ĢEOMETRIJA

Trijstūri

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.
Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis (skat. T1. zīm.).



$$\angle BAD = \angle ABC + \angle BCA$$

T1. zīm.

Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.

Divus trijstūrus sauc par **vienādiem**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie pilnīgi sakrīt. Ja trijstūris *ABC* ir vienāds ar trijstūri $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Trijstūru vienādības pazīmes:

- „*mmm*” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām
- „$m\ell m$” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām;
- „$\ell m\ell$” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem.

Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi. Ja trijstūris *ABC* ir līdzīgs trijstūrim $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Līdzīgu trijstūru atbilstošo malu garumu attiecību sauc par **līdzības koeficientu**.

Trijstūru līdzības pazīmes:

- „*mmm*” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām ;
- „$m\ell m$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi;
- „$\ell\ell$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem .

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu *k*), bet laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k, \qquad \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2$$

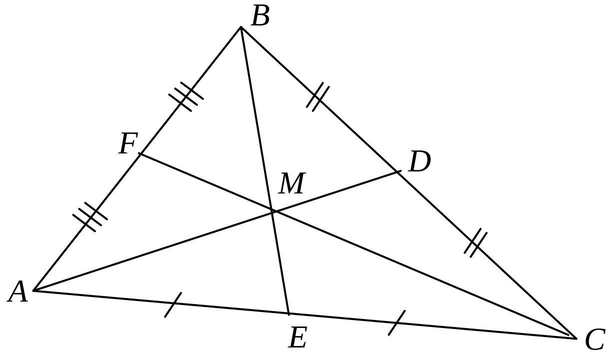
Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu *k*.

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par trijstūra **viduslīniju**.

Viduslīnijas īpašības:

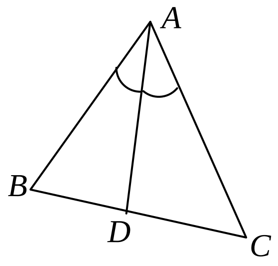
- Trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- Trijstūra viduslīnijas garums ir vienāda ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas;
- Trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

Trijstūra mediānu īpašība. Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, t. i., $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}$, kur M – mediānu krustpunkts (skat. T2. zīm.).



T2. zīm.

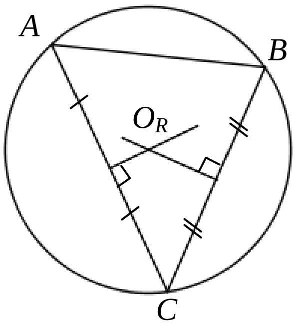
Trijstūra bisektrises īpašība. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, t. i., $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (skat. T3. zīm.).



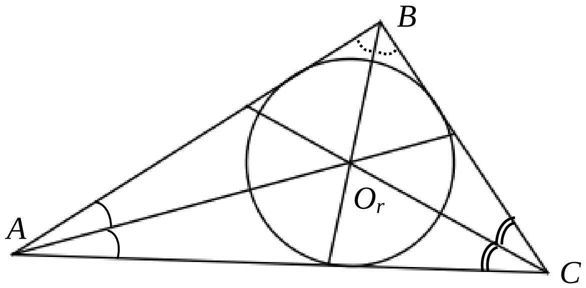
T3. zīm.

Par nogriežņa **vidusperpendikulu** sauc taisni, kas iet caur dotā nogriežņa viduspunktu un ir perpendikulāra dotajam nogrieznim.
Vidusperpendikula īpašība. Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem.
Jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula.

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir **trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs** (skat. T4. zīm.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir **trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs** (skat. T5. zīm.).



T4. zīm.



T5. zīm.

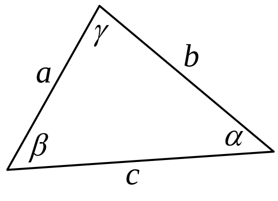
Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

- $S_\Delta = \frac{ah_a}{2}$;
- $S_\Delta = p \cdot r$;
- $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$;
- $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kur γ – leņķis starp malām *a* un *b;*
- $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hērona formula),

kur *a*, *b*, *c* – trijstūra malas, h_a – augstums, kas novilkts pret malu *a*, *p* – pusperimetrs, *r* – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, *R* – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Sinusu teorēma: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (skat. T6. zīm.).

Kosinusu teorēma: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (skat. T6. zīm.).



T6. zīm.

Trijstūra nevienādība

Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un katras trijstūra malas garums ir lielāks nekā abu pārējo divu malu garumu starpība, t. i., ja *a*, *b*, *c* – trijstūra malu garumi, kur $a \le b \le c$, tad $a + b > c$ un $c - b < a$.

Regulārs (vienādmalu) trijstūris

Par **regulāru (vienādmalu) trijstūri** sauc trijstūri, kuram visas malas ir vienādas. Regulāra trijstūra visi leņķi ir vienādi, t. i., $60°$ lieli

Vienādmalu trijstūrī katra mediāna ir arī bisektrise un augstums.

Regulāra trijstūra laukums: $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kur *a* ir trijstūra malas garums.

Regulāra trijstūra augstums: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnija rādiuss: $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

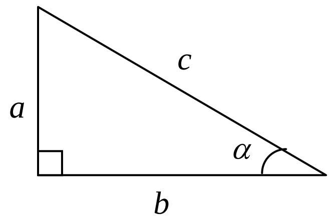
Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss: $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Taisnleņķa trijstūris

Pitagora teorēma. Taisnleņķa trijstūrī katešu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas garuma kvadrātu, t. i., $a^2 + b^2 = c^2$, kur a un b ir katešu garumi un c – hipotenūzas garums.

Trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī (skat. T7. zīm):

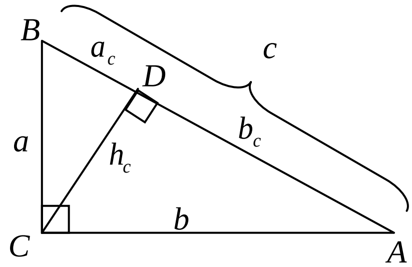
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$;
- $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.



T7. zīm.

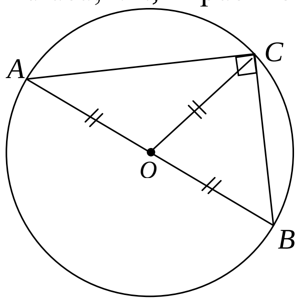
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, t. i., $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (skat. T8. zīm.). Ir spēkā šādas sakarības:

- $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
- $a^2 = a_c \cdot c$;
- $b^2 = b_c \cdot c$;
- $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$.



T8. zīm.

Ap taisnleņķa trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā, un tās rādiusa garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.
Taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta no taisnā leņķa virsotnes, ir vienāda ar trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu, t. i., ar pusi no hipotenūzas (skat. T9. zīm.).



T9. zīm.

Riņķis un riņķa līnija

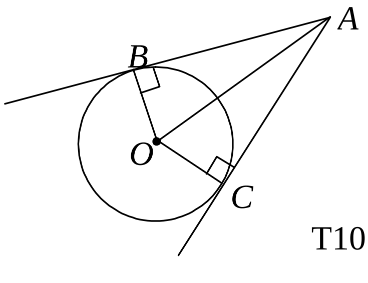
Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas **centru**, bet attiecīgo attālumu — par riņķa līnijas **rādiusu**.
Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.
Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
Par riņķa līnijas **loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.
Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.
Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.

Ar riņķi un riņķa līniju saistītās formulas:

- $D = 2R$, kur D – diametrs un R – riņķa līnijas rādiuss;
- riņķa laukums: $S = \pi R^2$;
- sektora laukums: $S_{sektora} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$, kur α - sektora centra leņķa lielums grādos;
- riņķa līnijas garums: $C = 2\pi R$;
- riņķa līnijas loka garums: $l_{loka} = \dfrac{\pi R \alpha}{180^\circ}$, kur α - lokam atbilstošā centra leņķa lielums grādos.

Caur jebkuru punktu *A*, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti *B* un *C* – šo pieskaru pieskaršanās punkti un *O* – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. T10. zīm.), tad

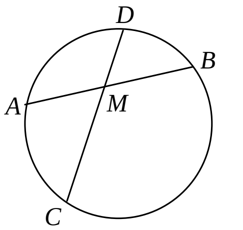
- $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\angle BAO = \angle CAO$;
- $OB \perp AB$.



T10. zīm.

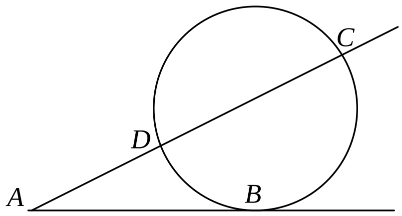
Metriskās sakarības riņķa līnijā

Hordu īpašība



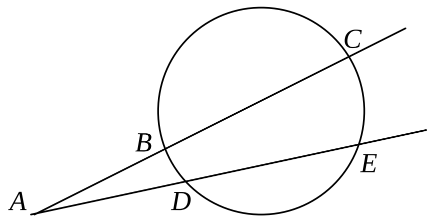
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Pieskares – sekantes īpašība



$AB^2 = AC \cdot AD$

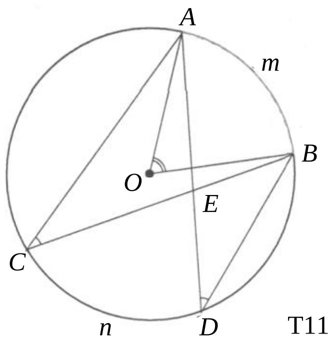
Sekanšu īpašība



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Leņķi riņķa līnijā

Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.
Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka, uz kura tas balstās, leņķisko lielumu, t. i., $\angle AOB = \cup AmB$ (skat. T11. zīm.).
Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.
Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma, t. i., $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$ (skat. T11. zīm.).
Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, piemēram, $\angle ACB = \angle ADB$ (skat. T11. zīm.).
Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir $90°$ un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.



T11. zīm.

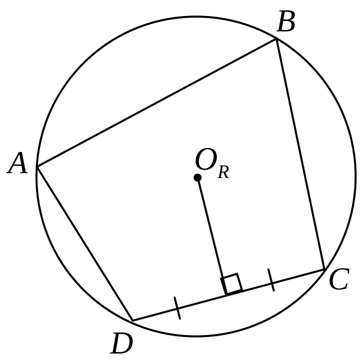
Par **hordas - pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.
Hordas - pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.

Ievilkti un apvilkti četrstūri

Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju.
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.

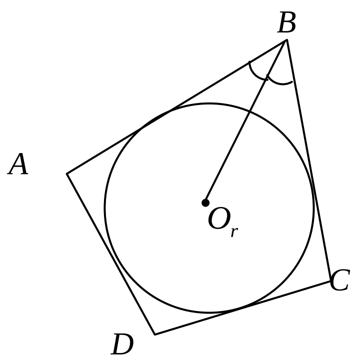
Ievilkts četrstūris



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

O_R – malu vidusperpendikulu krustpunkts

Apvilkts četrstūris



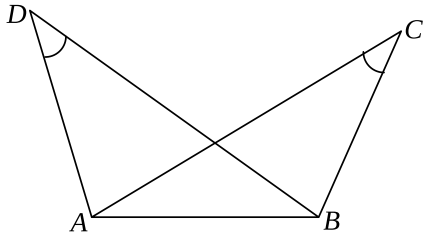
$$AB + CD = AD + BC$$

O_r – leņķu bisektrišu krustpunkts

Izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas.

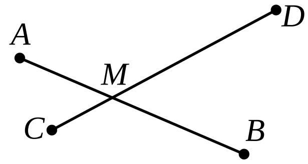
Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja:

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;
- izpildās vienādība $\angle ACB = \angle BDA$ (skat. T12. zīm.);



T12. zīm.

- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AB un CD krustpunkts (skat. T13. zīm.).



T13. zīm.

- ir spēkā vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (skat. 17. zīm.) (Ptolemaja teorēma).

SKAITĻU TEORIJA

Skaitļu iedalījums

- N – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- Z – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- Q – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in Z$ un $n \in N$.
- I – iracionālie skaitļi: bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi (piemēram, $\sqrt{2}$, e, π).
- R – reālie skaitļi: racionālie skaitļi Q un iracionālie skaitļi I.

Skaitļa pieraksts:

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis;
- $2n+1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3;
- $3n+1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

Dalāmība

Par vesela skaitļa b **dalītāju** sauc veselu skaitli a, ja eksistē tāds vesels skaitlis c, ka $ac = b$. Skaitli b sauc par skaitļa a **dalāmo** jeb **daudzkārtni**, bet a – par skaitļa b **dalītāju**.
Ja skaitlis b dalās ar skaitli a, tad to apzīmē ar $a \mid b$ vai $b \vdots a$.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2, ja tas beidzas ar pāra ciparu;
- skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3;
- skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4;
- skaitlis dalās ar 5, ja tas beidzas ar ciparu 0 vai 5;
- skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3;
- skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8;
- skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9;
- skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0;
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Naturālo skaitļu īpašības:

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No k pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar k.

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.
Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.
Pirmie pirmskaitļi ir šādi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.
Salikta skaitļa n mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis n ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).
Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$ dažādi dalītāji, šo dalītāju summa ir

$$(1+p_1+...+p_1^{k_1})(1+p_2+...+p_2^{k_2})...(1+p_m+...+p_m^{k_m}).$$

Ja p ir pirmskaitlis un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

Skaitļa $\boldsymbol{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}$ īpašības:

- Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz n, ir $n!$ dalītāji.
- Visi skaitļa $n!+1$ naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki nekā n.

Kongruence

Ja a un m, $m \neq 0$, ir veseli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst, a dalot ar m, ir tāds vesels skaitlis r, ka $a = q\cdot m + r$, kur q ir vesels skaitlis un $0 < |r| < |m|$. Šajā gadījumā iespējami divi dažādi atlikumi. Ja, a dalot ar m, r_1 ir pozitīvs atlikums un r_2 – negatīvs, tad $r_1 = r_2 + m$.
Ja a un m ir naturāli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst skaitli a dalot ar m, ir vesels skaitlis robežās no 0 līdz $m-1$.
Divi skaitļi a un b ir **kongruenti pēc moduļa *m*** (apzīmē ar pierakstu $a \equiv b \pmod{m}$), kur $m \neq 0$, tad un tikai tad, ja $a-b$ dalās ar m jeb skaitļi a un b dod vienādu atlikumu, ja tos dala ar m.

Kongruences īpašības:

- jebkuram m izpildās vienādība: $a \equiv a \pmod{m}$;
- $a \equiv b \pmod{m}$ tad un tikai tad, ja $a \equiv b \pmod{(-m)}$;
- ja $m = \pm 1$, tad jebkuriem diviem skaitļiem a un b izpildās vienādība $a \equiv b \pmod{m}$, t. i., visi veselie skaitļi ir kongruenti pēc moduļa 1;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $ka \equiv kb \pmod{m}$, kur k ir vesels skaitlis;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, tad $a + a_1 \equiv b + b_1 \pmod{m}$, $a - a_1 \equiv b - b_1 \pmod{m}$ un $aa_1 \equiv bb_1 \pmod{m}$.

KOMBINATORIKA

Saikļu lietojums:

- saiklis „un” nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām vai nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- saiklis „vai” nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības vai nosacījumi);
- saiklis „vai nu ... , vai” nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam.

Kombinatorikas **saskaitīšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas **vai nu** viena, **vai** otra, **vai** trešā utt. veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ veidos.

Kombinatorikas **reizināšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida **un** otrā veida, **un** trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ veidos.

Par **permutāciju** sauc visu doto elementu sakārtojumu rindā.
Ja n dažādi elementi jāsakārto rindā, tad to var izdarīt $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ dažādos veidos.

Par **variācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vai nu ar elementu sastāvu, vai to izkārtojumu izlasē.
Visu variāciju skaitu no n elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu A_n^k. Variāciju skaitu aprēķina pēc formulas:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Par **kombinācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc tādas izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vismaz ar vienu elementu.
Kombinācijās elementu izkārtojums neņem vērā, t. i., divas kombinācijas, kurās ir vienāds elementu sastāvs, tiek uzskatītas par vienādām.
Kombināciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu C_n^k.
Kombināciju skaitu aprēķina pēc formulām:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Secinājums. $A_n^k \geq C_n^k$.

Kombināciju skaita īpašības:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ja $0 < k < n$.

Paskāla trijstūris:

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$
$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$
$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad ... \quad ... \quad ... \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Ņūtona binoma formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n .$$

Vidējās vērtības metode

Uzdevumu risināšana balstās uz konkrēti formulētām teorēmām, piemēram,

- Starp jebkuriem *n* skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.
- Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.
- Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Viens no Vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā *n* truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.

Vispārinātais Dirihlē princips: ja vairāk nekā $m \cdot n$ truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz $m+1$ trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

Invariantu metode

Par **invariantiem lielumiem / īpašībām** sauc lielumus / īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt **nav** iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

- atrodam **invarianto īpašību**, t. i., īpašību, kura **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem un **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- parādam, ka šī īpašība **nepiemīt** lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā.

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml.
Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – **krāsošana** (bieži izmanto figūras iekrāsošanu kā šaha galdiņu), kur invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

Matemātiskās indukcijas metode

Par **indukciju** sauc spriešanas metodi, kurā no konkrētiem piemēriem iegūst vispārīgu slēdzienu.
Lietojot matemātiskās indukcijas principu uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

- pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*indukcijas bāze*);
- pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (*induktīvais pieņēmums*);
- pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).
- secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Pierādījuma metodi, kas balstās uz matemātiskās indukcijas principa, sauc par **matemātiskās indukcijas metodi**.

Grafu teorijas elementi

Grafs ir punktu (kurus sauc par virsotnēm) kopa kopā ar nogriežņiem (šķautnēm), kas tos savieno.
Grafus ir ērti izmantot, ja ir jāattēlo attiecības starp diviem objektiem.
Grafa šķautņu krustpunkts nav grafa virsotne.
Par grafa **virsotnes pakāpi** sauc šķautņu galu skaitu, kas atrodas šajā virsotnē.
Katra grafa virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu grafa šķautņu skaitu.
Secinājumi:

- Virsotņu pakāpju summa ir pāra skaitlis.
- Grafā ir pāra skaits virsotņu, kuru pakāpe ir nepāra skaitlis.

Eilera teorēma. Grafu var uzzīmēt ar vienu rokas vilcienu, nepārklājot līnijas un beidzot zīmēt tajā pašā vietā, kur sāka, tad un tikai tad, ja visām grafa virsotnēm ir pāra pakāpe.

UZDEVUMI

S. LATVIJAS 25. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

S.9. Devītā klase

S.9.1. Pieci veseli skaitļi *a, b, c, d* un *e* ir pēc kārtas sekojoši aritmētiskās progresijas locekļi. Zināms, ka *a* nav 0 un ka *b* un *d* ir kvadrātvienādojuma $ax^2+cx+e=0$ saknes. Noteikt skaitļu *a, b, c, d* un *e* vērtības!

S.9.2. Vienādsānu trijstūrī *ABC* ($AB=BC$) izvēlēts malas *AB* iekšējs punkts *D* un novilkts nogrieznis *CD* tā, ka $BD=DC=CA$. Aprēķināt $\angle ABC$.

S.9.3. Ar kādu lielāko skaitļa 2013 pakāpi dalās skaitlis $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2012$?

S.9.4. Kvadrātveida tabulā ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Pierādīt, ka tabulā var izvēlēties piecas rūtiņas tā, ka nekādas divas neatrodas ne vienā rindiņā, ne vienā kolonā, un tajās ierakstīto skaitļu summa ir pozitīva.

S.9.5. Iedomāsimies, ka uz Zemes ieradušies citplanētieši, un viņiem ir pastāstīts, ka uz Zemes laiku mēra gados, dienās un mēnešos. Pie tam ir zināms, ka
1) gada ilgums ir 365 dienas,
2) gads ir sadalīts 28, 30 vai 31 dienu garos mēnešos.
Vai, zinot tikai šo informāciju, citplanētieši var viennozīmīgi noteikt a) mēnešu skaitu gadā, b) katra veida mēnešu skaitu?

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^3+y^3-x^2y-xy^2+x^2-y^2-10=0$.

S.10.2. Taisnstūra *ABCD* diagonāle *BD* ir taisnstūra *BDEF* mala. Punkts *C* atrodas uz *EF*. Pierādīt, ka $S_{ABD}=S_{CDE}+S_{BCF}$!

S.10.3. Pierādīt, ka izteiksmes $19\cdot8^n+17$ vērtība nav pirmskaitlis nevienai veselai nenegatīvai *n* vērtībai!

S.10.4. Atrast visus naturālos skaitļus, kuros ir vairāk nekā četri cipari, kas beidzas ar 2013 un, ja šim skaitlim nodzēš pēdējos četrus ciparus, tad tas samazinās veselu skaitu reižu!

S.10.5. Tabulā ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis 1, 2 vai 3. Ja divās rūtiņās ar kopīgu malu vai stūri ir ierakstīts viens un tas pats skaitlis, tad teiksim, ka veidojas *pāris*. Noskaidrot, kāds ir minimālais *pāru* skaits šajā tabulā.

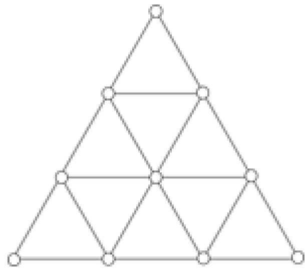
S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Pierādīt, ka nav tādas ģeometriskās progresijas, kas satur visus trīs skaitļus 1, $\sqrt{2}$ un $\sqrt[3]{3}$.

S.11.2. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles *AC* un *BD* vienlaikus ir attiecīgi leņķu *BAD* un *CDA* bisektrises. Vai *ABCD* noteikti ir kvadrāts?

S.11.3. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu *k*, ka $11k-2$ ir skaitļa 3 pakāpe.

S.11.4. Regulārā trijstūra režģa (skat. 1. zīm.) katra no desmit virsotnēm nokrāsota sarkanā vai zaļā krāsā. Pierādīt, ka ir iespējams atrast regulāru trijstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā krāsā! Trīsstūra malas var nebūt paralēlas režģa malām.



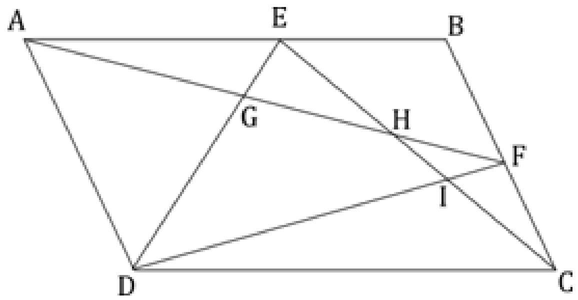
1. zīm.

S.11.5. Pierādīt, ka bezgalīgā rūtiņu lapā var novilkt riņķa līniju, kuras iekšpusē atrodas tieši 2012 rūtiņu virsotnes.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Kāda ir izteiksmes $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja a un b ir naturāli skaitļi?

S.12.2. Uz paralelograma $ABCD$ malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC – punkts F (skat. 2. zīm.). Nogriežņu DE un AF krustpunkts ir G, bet EC krustpunkti ar AF un DF ir attiecīgi punkti H un I. Pierādīt, ka $S_{DGHI}=S_{AGE}+S_{EBFH}+S_{CFI}$.



2. zīm.

S.12.3. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais loceklis ir vienāds ar trīs iepriekšējo skaitļu summu. Vai ar 5 dalās šīs virknes **a)** 111.; **b)** 2012. loceklis?

S.12.4. Lauka forma ir taisnstūris ar malu garumiem 4 km un 6 km. Tajā uzceltas piecas mājas. Pierādīt, ka, neatkarīgi no māju izvietojuma, varēs uzbūvēt ceļus, pa kuriem no jebkuras mājas var nokļūt uz jebkuru citu, un ceļu kopējais garums nepārsniedz 15 *km*.

S.12.5. Naturālu skaitli sauksim par *jokainu*, ja tā pieraksts sastāv tikai no cipariem 1, 3, 5, 7 un 9, pie tam jebkuru divu blakus ciparu starpība ir tieši 2. Piemēram, skaitļi 5797, 31353575 un 9 ir *jokaini*. Aprēķināt, cik ir *jokainu* **a)** 11-ciparu, **b)** 2012-ciparu skaitļu!

S. LATVIJAS 62. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

N.9. Devītā klase

N.9.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kura kvadrāta pēdējie 9 cipari ir 987654321 ?

N.9.2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *K*. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta *K* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *K* izvēles.

N.9.3. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs un laukums izsakās ar vienu un to pašu skaitli. Atrast visus šādus taisnstūrus.

N.9.4. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{2013} ir tādi naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_{2012} > \sqrt{a_{2013}}$ un $a_{2013} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ vērtību.

N.9.5. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu).
Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

N.10. Desmitā klase

N.10.1. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{10} ir dažādi naturāli skaitļi tādi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ un $a_{10} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ vērtību.

N.10.2. Trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas un ievilktās riņķa līnijas centri ir simetriski attiecībā pret vienu no trijstūra *ABC* malām. Aprēķināt trijstūra *ABC* leņķus.

N.10.3. Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurai katras skaldnes perimetrs ir 2013 un kurai nav vienāda garuma šķautņu?

N.10.4. Ansītis aprēķināja skaitļu 2^{2013} un 5^{2013} vērtības un iegūtos skaitļus uzrakstīja vienu aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

N.10.5. Doti 7 dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz 21. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļu pārus, kuru starpības ir vienādas. (Skaitļu pāriem var būt arī kopīgs skaitlis, starpību aprēķina no lielākā skaitļa atņemot mazāko.)

N.11. Vienpadsmitā klase

N.11.1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $(x-y)(x+y)=x$.

N.11.2. Caur paralelograma *ABCD* virsotnēm *B* un *D* ir novilkta riņķa līnija, kas krusto malas *AB*, *DA*, *BC* un *CD* attiecīgi to iekšējos punktos *P*, *Q*, *R* un *S*. Pierādīt, ka $PQ \parallel RS$.

N.11.3. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviru svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 10 gramus katra, pārējās divas sver 9 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast vismaz vienu monētu, kas sver 9 gramus?

N.11.4. Polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem četrām veselām *x* vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas *x* vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2013.

N.11.5. Plaknē doti $n \geq 3$ patvaļīgi izvietoti punkti. Zināms, ka nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka eksistē tāds *n*-stūris (iespējams, ieliekts), kura virsotnes atrodas šajos punktos. Daudzstūra malas nedrīkst krustoties.

N.12. Divpadsmitā klase

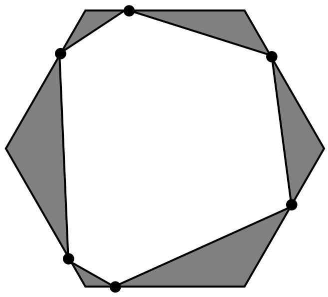
N.12.1. Zināms, ka *a* un *b* ir divi dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{1}{4(a+b)}.$$

N.12.2. Nogrieznis *BP* ir trijstūra *ABC* bisektrise, punkti *N* un *M* ir attiecīgi malu *AB* un *AC* iekšēji punkti tādi, ka $AN = PC$ un $AM = BC$. Taisnes *BP* un *MN* krustojas punktā *X*. Pierādīt, ka $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

N.12.3. Dots, ka $n > 1$ ir tāds naturāls skaitlis, kas, dalot ar 7, dod atlikumu 1. Pierādīt, ka skaitļa $n^2 + 3n + 3$ visi pirmreizinātāji ir mazāki nekā n^2.

N.12.4. Dots regulārs sešstūris ar malas garumu 1. Uz katras malas ir patvaļīgi izvēlēts viens punkts (skat. 3. zīm.). Pierādīt, ka vismaz viena iekrāsotā trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{\sqrt{3}}{16}$.



3. zīm.

N.12.5. Parlamentā ir 2013 deputāti; katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā *d* ($0 \leq d \leq 2012$) citiem deputātiem. Domstarpības ir abpusējas: ja A ir domstarpības ar B, tad arī B ir domstarpības ar A. Pierādīt, ka deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai nekādiem diviem vienas komisijas locekļiem nebūtu domstarpību savā starpā.

V. LATVIJAS 63. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

V.9. Devītā klase

V.9.1. Atrast tādas ciparu *a, b, c, d* vērtības, lai izpildītos vienādība

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2013.$$

(Pieraksts $\overline{xyzt}$ nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir *x* tūkstoši, *y* simti, *z* desmiti un *t* vieni.)

V.9.2. Doti trīs regulāri trijstūri OAB, OCD un OEF (virsotnes norādītas pulksteņrādītāja kustības virzienā), kuru malu garumi var atšķirties. Punkti *A*, *C*, *E* neatrodas uz vienas taisnes; punkti *B*, *D*, *F* arī neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka $\Delta ACE=\Delta BDF$.

V.9.3. Dota virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kur $a_1=a_2=1$ un visiem $n>2$ izpildās

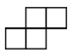
$$a_{n+1}=\left[\frac{2a_n+a_{n-1}}{3}\right]+4.$$

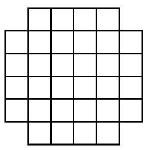
Aprēķināt a_{2013}.

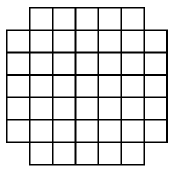
($[x]$ ir veselā daļa no x – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz *x*; piemēram, $[3]=3$, $[4{,}6]=4$, $[0{,}2]=0$ u.tml.)

V.9.4. Divas komandas savā starpā izspēlējušas vairākas (vairāk nekā vienu) spēles. Par zaudējumu komanda saņem *n* punktus (*n* – naturāls skaitlis), bet par uzvaru $n+3$ punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Pēc spēļu beigām izrādījās, ka vienai komandai ir par vienu uzvaru vairāk nekā otrai. Zināms, ka viena no komandām kopsummā ieguva 92 punktus. Cik punktus ieguva otra komanda?

V.9.5. Kādu lielāko skaitu 4. zīm. attēloto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta *n* × *n*, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n=6$ (skat. 5. zīm.), **b)** ja $n=7$ (skat. 6. zīm.). Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 1. zīm. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.


4. zīm.


5. zīm.


6. zīm.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

V.10.2. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles *AC* un *BD* ir perpendikulāras un krustojas punktā *E*. Malas *AB* viduspunkts ir *F*. Pierādīt, ka $EF\perp CD$.

V.10.3. Funkcija $f(x)=(x+10)x(x-1)(x-11)$ definēta visām reālām *x* vērtībām. Atrast mazāko iespējamo $f(x)$ vērtību.

V.10.4. Dota Fibonači skaitļu virkne $x_1=x_2=1$, $x_{i+2}=x_i+x_{i+1}$. Pierādīt, ka šajā virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav naturāla skaitļa kvadrāti.

V.10.5. Dota rūtiņu lapa ar izmēriem $n \times m$ (*n*, *m* – naturāli skaitļi) rūtiņas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli, pēc kārtas izdarot pa vienam gājienam. Ar vienu gājienu atļauts veikt taisnu griezienu, kas sākas kādā lapas malā un iet pa rūtiņu malām, pie tam griezuma garumam jābūt naturālam skaitlim. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena lapa tiek sagriezta divos atsevišķos gabalos. Kādām *n* un *m* vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs, un kad – otrais (spēli vienmēr sāk pirmais spēlētājs)?

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Pierādīt, ka nav tādas naturālas *n* vērtības, ka $n^2 + 4n + 16$ dalās ar 36.

V.11.2. Dots vienādsānu trijstūris *ABC*, kuram $AB = AC$ un $\angle BAC = 100°$. Leņķa *ABC* bisektrise krusto malu *AC* punktā *D*. Pierādīt, ka $AD + BD = BC$.

V.11.3. Vienādojuma $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$ saknes ir taisnstūra paralēlskaldņa malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu un tilpumu.

V.11.4. Diviem vienādiem kvadrātiem ar malas garumu 40 cm ir kopīgs centrs. Vai abu kvadrātu kopīgās daļas laukums noteikti ir lielāks nekā **a)** 1250 cm^2, **b)** 1300 cm^2?

V.11.5. Valstī Alfa ir *n* pilsētas, $n \geq 2$. Dažas no šīm pilsētām ir savienotas ar dažām citām ar ceļiem. Ir zināms, ka katrs ceļš savieno tieši divas dažādas pilsētas, katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viens ceļš, turklāt pa izbūvētajiem ceļiem no jebkuras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz jebkuru citu vienā vienīgā veidā.

a) Pierādīt, ka ir vismaz viena pilsēta, no kuras iziet tieši viens ceļš.

b) Pierādīt, ka pilsētas var sanumurēt ar skaitļiem 1, 2, …, n tā, lai jebkuru divu pilsētu, kuras ir savienotas ar ceļu, numuru reizinājums būtu pāra skaitlis.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Ap šaurleņķu trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija. Loka *AB* (kuram nepieder punkts *C*) viduspunkts ir *M*, bet loka *AC* (kuram nepieder punkts *B*) viduspunkts ir *N*. Nogriežņi *BN* un *CM* krustojas punktā *D*. Pierādīt, ka $AD \perp MN$.

V.12.2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} z \\ \sin y + \cos x = \dfrac{3}{2}\operatorname{ctg} z \end{cases}$.

V.12.3. Funkcija f apmierina šādas prasības:

a) f ir definēta visiem veseliem nenegatīviem skaitļiem un tās vērtības ir veseli skaitļi;

b) katram *n* (*n* – vesels nenegatīvs skaitlis) izpildās sakarība

$$f(n) \cdot (f(n+1) - 2) = 4n^2 - 1.$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu nav.

V.12.4. Ar d_i, $i = 1, 2, ..., k$, apzīmēsim visus naturālā skaitļa n naturālos dalītājus, pie tam $d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k$.

Dots, ka $d_3^2 d_4^2 \left(d_3^2 + d_4^2\right) = n^2$. Atrast visas iespējamās *n* vērtības.

V.12.5. Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne, kas satur tikai burtus *a*, *b* un *c*. Ar šo virkni atļauts veikt šādus gājienus:

a) patvaļīgi mainīt uzrakstīto burtu secību;
b) ja virknes galā ir uzrakstīts fragments *ab*, to drīkst nodzēst;
c) fragmentu *ba* aizstāt ar fragmentu *aabbcc*;
d) fragmentu *bbc* aizstāt ar *a*;
e) izsvītrot jebkurus trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus burtus.

Vai, atkārtojot vairākus šādus gājienus, iespējams iegūt virkni *aba*, ja sākotnēji ir uzrakstīta virkne **1)** *abba*; **2)** *aabbcabaab*?

A. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.9. Devītā klase

A.9.1. Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādīt, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

A.9.2. Kvadrāta ar izmēriem 4×4 rūtiņas katra rūtiņu virsotne nokrāsota vienā no divām krāsām. Pierādīt, ka noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.

A.9.3. Doti četri dažādi cipari, neviens no kuriem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 484. Atrast dotos četrus ciparus.

A.9.4. Dota skaitļu virkne $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurā $x_0 > 0$ un $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$ visiem $n \geq 0$.

Pierādīt, ka $x_{100} > 20$.

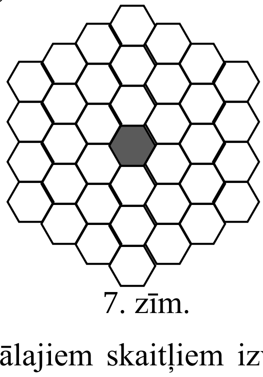
A.9.5. Dots izliekts četrstūris. Uzzīmēti četri riņķi, kuru diametri ir četrstūra malas. Pierādīt, ka šie riņķi pilnībā pārklāj doto četrstūri.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (t. i., $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ vai $x_2 \leq x_3 \leq x_1$).

A.10.2. Trijstūrī *ABC* nogrieznis *CD* ir bisektrise. Caur punktu *C* novilkta riņķa līnija, kas pieskaras malai *AB* punktā *D*. Tā krusto malas *AC* un *BC* attiecīgi punktos *P* un *Q*. Pierādīt, ka $AB \| PQ$.

A.10.3. Par *n-heksu* sauksim plaknes figūru, kas izveidota no *n* regulāriem sešstūriem tā, ka katram sešstūrim ir kopīga mala ar vismaz vienu citu sešstūri.
Kādam mazākajam *n* ($n \geq 2$) eksistē tāds *n-hekss*, ar kuriem nevar pārklāt 7. zīm. attēloto figūru (tā sastāv no regulāriem sešstūriem ar caurumu centrā)?



7. zīm.

A.10.4. No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru.

A.10.5. Vai pa riņķi var uzrakstīt 2013 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu attiecība būtu 2, 3, 12 vai 18 ?

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa *n*, ka skaitlis $n^2 - 3n - 1$ dalās ar 169.

A.11.2. Vai eksistē regulārs daudzstūris, kuram vienas diagonāles garums ir vienāds ar divu citu diagonāļu garumu summu?

A.11.3. Doti dažādi nepāra naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neviens no tiem nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks nekā 5. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

A.11.4. Kādā valstī ir 2013 pilsētas, no katras uz katru var aizlidot ar lidmašīnu. Dažus no šiem reisiem apkalpo aviokompānija A, pārējos – aviokompānija B (ir iespējams, ka no pilsētas X uz pilsētu Y lido aviokompānijas A lidmašīna, bet no Y uz X – aviokompānijas B lidmašīna).
Pierādīt, ka aviokompāniju atbildību par reisiem iespējams saplānot tā, ka ceļotājs, izlidojot no jebkuras pilsētas Z, pa ceļam apmeklējot vienu vai vairākas pilsētas un pēc tam atgriežoties pilsētā Z, **noteikti** būs lidojis ar abu aviokompāniju lidmašīnām, neatkarīgi no tā, kādu maršrutu viņš būs izvēlējies un kura ir sākotnējā pilsēta Z.

A.11.5. Uz galda virsmas, kurai ir taisnstūra forma, izvietoti vairāki vienādi kvadrātveida papīra gabaliņi, kuru malas ir paralēlas galda malām (kvadrātiņi var arī pārklāties). Pierādīt, ka galdā var iedurt dažas adatas tā, ka katrs papīra gabaliņš būs piesprausts pie galda tieši ar vienu adatu.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Atrisināt vienādojumu $\lg x \cdot \lg(4-x) = \frac{1}{4}$.

A.12.2. Trijstūrī *ABC* punkti *M*, *N* un *K* ir attiecīgi malu *AB*, *BC* un *CA* viduspunkti. Ir novilktas trīs riņķa līnijas: caur punktiem *K*, *A*, *M*; caur punktiem *M*, *B*, *N*; caur punktiem *N*, *C*, *K*. Pierādīt, ka visas novilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

A.12.3. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi x, y, z, ka izpildās vienādība $6^x + 13^y = 29^z$.

A.12.4. Kādas valodas alfabētā ir *i* patskaņi ($i \geq 2$) un *j* līdzskaņi ($j \geq 2$). Šajā valodā par vārdu sauc jebkuru galīgu burtu (patskaņu un līdzskaņu) virkni, kas satur vismaz vienu burtu un kurā nekādi divi patskaņi neparādās pēc kārtas un pēc kārtas uzrakstīti līdzskaņi ir ne vairāk kā divi (piemēram, ja „A" ir patskanis, bet „B" – līdzskanis, tad, piemēram, „ABBA" ir vārds, turpretī „BAAB" un „ABBBA" nav vārdi).
Ar $S(n)$ apzīmēsim visu to vārdu skaitu, kuri sastāv no *n* burtiem, $n \geq 1$.
Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem *n* ir spēkā vienādība

$$S(n+3) = i \cdot j \cdot S(n+1) + i \cdot j^2 \cdot S(n).$$

A.12.5. Dota kvadrātisku rūtiņu plakne, katras rūtiņas malas garums ir 1. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura virsotnes atrodas šīs plaknes rūtiņu virsotnēs un jebkuru divu tā malu garumi atšķiras ne vairāk kā par $\frac{1}{2013 \cdot \sqrt{P}}$, kur *P* ir šī trijstūra perimetrs.

VP. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

VP.1. Pierādīt, ka visiem reāliem pozitīviem skaitļiem *a*, *b* un *c* izpildās

$$\frac{2a}{a^3+b}+\frac{2b}{b^3+c}+\frac{2c}{c^3+a}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

VP.2. Plaknē dotas četras riņķa līnijas. Pirmā ārēji pieskaras otrajai punktā *A*, otrā ārēji pieskaras trešajai punktā *B*, trešā ārēji pieskaras ceturtajai punktā *C*, ceturtā ārēji pieskaras pirmajai punktā *D*. Pierādīt, ka ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju.

VP.3. Naturālu skaitli a sauksim par *izcilu*, ja eksistē tāds vesels $k\ge 1$ un naturāli skaitļi $a_1, a_2, ..., a_k$, ka $a_1+a_2+...+a_k=a$ un $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=1$.

Piemēram, *izcili* ir skaitļi 1, 4 $(=2+2)$, 9 $(=3+3+3)$, 10 $(=2+4+4)$, 11 $(=2+3+6)$.

Pierādīt, ka *izcili* ir arī skaitļi: **a)** 31, **b)** 2013, **c)** 2014.

VP.4. Pierādīt, ka neeksistē tāda funkcija $g: N\to N$, kas definēta naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības, ka $g(g(n))=n+2013$ visiem naturāliem *n*.

VP.5. Doti *n* punkti, novilkti daži no iespējamajiem nogriežņiem, kas tos savieno. Zināms, ka starp jebkuriem 4 punktiem novilkti ne vairāk kā 2 no iespējamajiem nogriežņiem. Atrast, kāds ir lielākais iespējamais nogriežņu skaits, kas var būt novilkti, un pierādīt, ka lielāku nogriežņu skaitu novilkt nevar.

AB. ATLASE KOMANDU SACENSĪBĀM "BALTIJAS CEĻŠ 2012"

AB. Algebra

AB.1. Reāliem nenegatīviem skaitļiem *a*, *b*, *c* izpildās nosacījums, ka $a+b+c=1$. Kāda ir izteiksmes

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2$$

lielākā iespējamā vērtība?

AB.2. Patvaļīgam reālam skaitlim a definēsim virkni $x_0, x_1, \ldots$ tādu, ka $x_0=a$ un $x_{i+1}=3x_i-x_i^3$ visiem $i\geq 0$. Atrast, cik ir tādu a vērtību, kurām $x_{2011}=x_0$.

AB.3. Atrast visas funkcijas $f:R\to R$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, kurām visiem *x*, *y* izpildās:

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^3-x^3.$$

AB.4. Dots 2011-ās pakāpes polinoms *P* ar reāliem koeficientiem. Pierādīt, ka eksistē aritmētiskā progresija $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$, kas sastāv no reāliem skaitļiem un kuras diference nav 0, tāda, ka

$$\sum_{k=1}^{2011} P(x_k)=0.$$

AB.A.5. Doti pozitīvi reāli skaitļi *x*, *y*, *z*. Pierādīt, ka

$$\frac{x^2}{(y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+z)^2}+\frac{z^2}{(x+y)^2}\geq\frac{3}{4}.$$

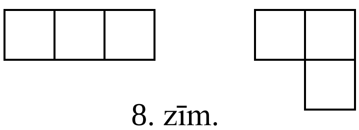
AB. Kombinatorika

AB.6. Matemātikas olimpiāde notiek astoņās klašu grupās. Rīkotājiem katrai klašu grupai jāsagatavo 5 dažādi uzdevumi. Vienu un to pašu uzdevumu var risināt vairākas klašu grupas, bet jebkurām divām klašu grupām var būt ne vairāk kā viens kopīgs uzdevums. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais uzdevumu skaits, ar kuru olimpiādes rīkotājiem pietiek visām klašu grupām?

AB.7. Kastē atrodas 100 bumbiņas, katra no tām ir nokrāsota sarkana, zaļa vai balta. Zināms, ka, ja neskatoties izņem no kastes divas bumbiņas, tad varbūtība, ka tās ir dažādās krāsās, ir 58%, bet varbūtība, ka viena no tām ir zaļa, bet otra - balta, 8%. Cik sarkano bumbiņu ir kastē?

AB.8. Klasē ir *n* skolēni, katram no viņiem šajā klasē ir vismaz *k* draugi. Katru dienu katrs no viņiem pastāsta visiem saviem draugiem jaunumus, ko viņš ir uzzinājis iepriekšējā dienā. Zināms, ka, ja kāds no skolēniem kaut ko uzzina, tad pēc kāda laika to jau zina visa klase. Pierādīt, ka dienu skaits, pēc kurām visa klase jaunumus jau ir uzzinājusi, nav lielāks kā $\frac{3n}{k}$.

AB.9. Kāds ir mazākais krāsu skaits, ar kurām pietiek, lai izkrāsotu 2012×2012 rūtiņu kvadrātu tā, lai jebkuras trīs rūtiņas, kas veido kādu trimino figūru (skat. 8. zīm., tās var būt arī pagrieztas) būtu nokrāsotas dažādās krāsās?



8. zīm.

AB.10. Kastē atrodas rotaļu zvēriņi, katram zvēriņam galva un aste nokrāsota vienā no 2011 krāsām (nav obligāti vienā un tai pašā). Zināms, ka iespējams izvēlēties 2011 zvēriņus tā, lai to galvas būtu nokrāsotas visās 2011 krāsās un astes arī būtu nokrāsotas visās 2011 krāsās, pie tam šādi izvēlēties iespējams vairāk nekā divos atšķirīgos veidos. Pierādīt, ka var izņemt no kastes dažus zvēriņus tā, lai no atlikušajiem zvēriņiem šādi izvēlēties varētu tieši divos atšķirīgos veidos.

AB. Ģeometrija

AB.11. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*, tā apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir *R*, bet ievilktās – *r*. Pierādīt, ka

$$\frac{Rr}{(a+b+c)^2} \leq \frac{1}{54}.$$

AB.12. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* punkts *D* atrodas uz malas *AC* (un nesakrīt ne ar *A*, ne *C*), zināms, ka $BD = BC$. Pierādīt, ka tieši divi no trijstūrim *ABD pievilkto* riņķa līniju centriem atrodas uz trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas. (Riņķa līniju sauc par *pievilktu* trijstūrim, ja tā pieskaras vienai tā malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem.)

AB.13. Par četrstūri *ABCD* zināms, ka $\angle ABD = 30°, \angle CDB = 20°$ un $\angle BCA = \angle ACD = 40°$. Aprēķināt $\angle DAC$.

AB.14. Dots kvadrāts ar malas garumu 1, tā iekšpusē atrodas divi riņķi, kas savstarpēji nepārklājas un neiziet ārpus kvadrāta. Kāda ir lielākā iespējamā riņķu laukumu summa?

AB.15. Trijstūra *ABC* iekšpusē izvēlēts patvaļīgs punkts *P*. Taisnes *AP*, *BP* un *CP* krusto attiecīgo trijstūra pretējo malu punktos A_1, B_1 un C_1. Punkti A_0 un C_0 ir attiecīgi malu *BC* un *AB* viduspunkti. Taisnes B_1C_1, B_1A_1 un B_1B krusto taisni A_0C_0 attiecīgi punktos C_2, A_2 un B_2. Pierādīt, ka B_2 ir nogriežņa A_2C_2 viduspunkts.

AB. Skaitļu teorija

AB.16. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu *n*, ka visi pirmskaitļi, ar ko dalās skaitlis n^2+1, ir mazāki nekā *n*.

AB.17. Atrast mazāko *k*, kam izpildās īpašība: starp jebkuriem *k* pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem ir vismaz viens tāds, kura visu dalītāju summa ir pāra skaitlis.

AB.18. Atrisināt naturālos skaitļus vienādojumu

$$a^{bc} + b^{ac} + c^{ab} = 3abc.$$

AB.19. Atrast visus naturālos skaitļus *d*, kam piemīt sekojoša īpašība: ja *n* dalās ar *d*, tad arī jebkurš skaitlis *m*, kas iegūts no *n*, pārliekot tā (decimālā pierakstā) ciparus citā secībā, dalās ar *d*.

AB.20. Doti naturāli skaitļi *a* un *b*, par kuriem zināms, ka jebkuram naturālam skaitlim *n* izpildās $d(na) \geq d(nb)$ (ar $d(k)$ apzīmē skaitļa *k* dalītāju skaitu). Pierādīt, ka *a* dalās ar *b*.

BW. STARPTAUTISKĀS MATEMĀTIKAS KOMANDU SACENSĪBAS „BALTIJAS CEĻŠ 2012”

BW. Algebra

BW.1. Veselos skaitļus no 1 līdz 360 sadala deviņās pēc kārtas sekojošu skaitļu apakškopās (apakškopas ir netukšas un katrs skaitlis atrodas tieši vienā no apakškopām). Apakškopās esošo skaitļu summas izvieto 3×3 kvadrāta rūtiņās. Vai iespējams, ka šādi izveidojas *maģiskais* kvadrāts?
Piezīme. Skaitļu kvadrātu sauc par *maģisku*, ja skaitļu summas pa rindiņām, stabiņiem un abās diagonālēs visas ir vienādas.

BW.2. Doti reāli skaitļi *a, b, c*. Pierādīt, ka

$$ab+bc+ca+\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}\le 1+\frac{1}{3}(a+b+c)^2 .$$

BW.3. a) Pierādīt, ka vienādojumam

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1)=x^3$$

katrā intervālā starp pēc kārtas sekojošiem veseliem pozitīviem skaitļiem ir tieši viens reāls atrisinājums.
b) Pierādīt, ka neviens no reālajiem pozitīvajiem šī vienādojuma atrisinājumiem nav racionāls skaitlis.
Piezīme. Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmēts lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x.

BW.4. Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem veselu skaitļu pāriem (a,b) starp vienādojuma

$$x^{2012}=ax+b$$

atrisinājumiem ir divi dažādi reāli skaitļi, kuru reizinājums ir 1.

BW.5. Atrast visas tādas funkcijas $f: R\to R$, kurām vienādība

$$f(x+y)=f(x-y)+f(f(1-xy))$$

izpildās visiem reāliem skaitļiem x un y.

BW. Kombinatorika

BW.6. Uz gala stāv 2012 lampas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Katrā gājienā spēlētājs pārslēdz vienas lampas slēdzi, taču nedrīkst izveidoties tāds ieslēgto lampu izvietojums, kāds jau kopš spēles sākuma uz galda ir bijis. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

BW.7. Rūtiņu kvadrātā 2012×2012 uz diagonāles, kas labo augšējo stūri savieno ar kreiso apakšējo stūri, ir iekrāsotas dažas rūtiņas. Neviena stūra rūtiņa nav iekrāsota. Katrā kvadrāta rūtiņā ieraksta veselu skaitli šādā veidā. Visās augšējās rindas un kreisās kolonnas rūtiņās ieraksta 1. Visās iekrāsotajās rūtiņās ieraksta 0. Katrā no pārējām rūtiņām ieraksta skaitli, kas vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti rūtiņās virs un pa kreisi no tās. Pierādīt, ka labajā apakšējā stūrī ierakstītais skaitlis nedalās ar 2011.

BW.8. Orientēts grafs nesatur orientētus ciklus. Katra orientēta ceļa šķautņu skaits nepārsniedz 99. Pierādīt, ka šī grafa šķautnes ir iespējams izkrāsot divās krāsās tā, ka šķautņu skaits katrā vienkrāsainā orientētā ceļā nepārsniedz 9.

BW.9. Katrā kvadrāta 5×5 rūtiņā ir ierakstīta 0. Patvaļīgā rūtiņā un tās kaimiņu rūtiņās ierakstītos skaitļus drīkst palielināt par 1. Vai šādu darbību rezultātā ir iespējams panākt, ka visās kvadrāta rūtiņās vienlaicīgi atrodas skaitļi 2012?
Piezīme. Par kaimiņu rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.

BW.10. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli. Pirms spēles A izvēlas 1000 nepāra pirmskaitļus (ne obligāti dažādus), tad B izvēlas pusi no tiem un uzraksta tos uz tāfeles. Katrā spēles gājienā kaut kādam veselam pozitīvam skaitlim n spēlētājs izvēlas kaut kādus uz tāfeles esošus pirmskaitļus p_1, p_2, …, p_n, nodzēš tos un vietā uzraksta skaitļa $p_1 p_2 ... p_n - 2$ pirmreizinātājus (ja skaitļa $p_1 p_2 ... p_n - 2$ sadalījumā pirmreizinātājos kāds pirmskaitlis ir sastopams k reizes, tad to šajā gājienā uzraksta k reizes). Pirmo gājienu izdara A. Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka vienam no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija, kā arī noteikt, kuram tā ir.
Piezīme: Tā kā skaitlim 1 nav pirmreizinātāju, tad viena skaitļa 3 nodzēšana ir atļauts gājiens.

BW. Ģeometrija

BW.11. Trijstūra ABC ($\angle A = 60°$) iekšpusē izvēlēts tāds punkts T, ka $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Punkts M ir BC viduspunkts. Pierādīt, ka $TA + TB + TC = 2AM$.

BW.12. Uz riņķa līnijas dotajā secībā izvietoti punkti $P_0, P_1, ..., P_8 = P_0$. Punkts Q atrodas daudzstūra $P_0 P_1 ... P_7$ iekšpusē, pie tam $\angle P_{i-1} Q P_i = 45°$, kur $i = 1, 2, ..., 8$. Pierādīt, ka summas $\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2$ vērtība ir minimāla tad un tikai tad, ja Q ir riņķa līnijas centrs.

BW.13. Trijstūris ABC ir šaurleņķu trijstūris, H ir tā augstumu krustpunkts. Ar H_A, H_B un H_C apzīmēts attiecīgi no virsotnēm A, B un C vilkto augstumu otrs krustpunkts ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka $\Delta H_A H_B H_C$ laukums nepārsniedz ΔABC laukumu.

BW.14. Dots trijstūris ABC, tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Punkts G ir nogriežņa DE viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle EFC = \angle GFD$.

BW.15. Četrstūrim $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas četrstūra iekšpusē, bet ne uz diagonāles AC. Četrstūra diagonāles krustojas punktā I. Trijstūrim AOI apvilktajai riņķa līnijai ar malu AD ir kopīgs punkts P, bet ar malu AB – kopīgs punkts Q; trijstūrim COI apvilktajai riņķa līnijai ar malu CB – kopīgs punkts R, bet ar malu CD – kopīgs punkts S. Pierādīt, ka $PQRS$ ir paralelograms.

BW. Skaitļu teorija

BW.16. Veseli pozitīvi skaitļi n, m un k apmierina vienādību $(n-1)n(n+1) = m^k$. Pierādīt, ka $k = 1$.

BW.17. Ar $d(n)$ apzīmēsim skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu. Atrast visus skaitļu trijniekus (n, k, p), kur n un k ir veseli pozitīvi skaitļi un p ir pirmskaitlis, kam izpildās $n^{d(n)} - 1 = p^k$.

BW.18. Atrast visus tādus veselu skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādību

$$a^2 + b^2 + c^2 = 20122012.$$

BW.19. Pierādīt, ka $n^n + (n+1)^{n+1}$ ir salikts skaitlis bezgalīgi daudzām naturālām skaitļa n vērtībām.

BW.20. Atrast visus vienādojuma $2x^6 + y^7 = 11$ atrisinājumus veselos skaitļos.

IETEIKUMI

I.S. LATVIJAS 25. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.S.9. Devītā klase

I.S.9.1. Izmantojot aritmētiskās progresijas definīciju, izsakiet doto skaitļu vērtības ar a un f, kur f ir aritmētiskās progresijas diference.

I.S.9.2. Apzīmējiet leņķus $\angle ABC = x$, $\angle BAC = y$ un izsakiet kāda trijstūra iekšējo leņķu summu ar x un y.

I.S.9.3. Sadaliet skaitli 2013 pirmreizinātājos. Izdomājiet, cik reizes šī skaitļa pirmreizinātāji ietilpst skaitlī 2012!.

I.S.9.4. Pierādiet no pretējā. Izmantojiet krāsošanas metodi un izkrāsojiet tabulu piecās krāsās.

I.S.9.5. Pierādiet, ka a) gadījumu var, bet b) nevar. Apzīmējiet ar a to mēnešu skaitu, kuros ir 28 dienas, ar b – to, kuros 30 dienas, un ar c – to, kuros 31 diena. Izdomājiet, kas notiek gadījumā, ja gadā ir 11 mēneši un 13 mēneši.

I.S.10. Desmitā klase

I.S.10.1. Pārnesiet skaitli 10 uz vienādojuma labo pusi un vienādojuma kreiso pusi sadaliet reizinātājos.

I.S.10.2. Novelciet $CG \perp BD$ un izmantojiet faktu, ka taisnstūra diagonāle sadala to divos vienādos trijstūros.

I.S.10.3. Apskatiet divus gadījumus: n – pāra un n – nepāra skaitlis un apskatiet izteiksmi pēc dažādiem moduļiem.

I.S.10.4. Izdomājiet, kādā formā var pierakstīt visus meklējamos skaitļus.

I.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod mazākais pāru skaits (piemērs) un jāpierāda, ka mazāks pāru skaits nevar būt.

I.S.11. Vienpadsmitā klase

I.S.11.1. Pierādiet uzdevumu no pretējā.

I.S.11.2. Atrodiet pretpiemēru.

I.S.11.3. Izmantojiet uzdevumā atlikumus pēc moduļa 11.

I.S.11.4. Atrodiet trijstūri, pēc kura būtu ērti izskatīt visus iespējamos gadījumus.

I.S.11.5. Uzzīmējiet mazu riņķa līniju un pavērojiet, kas notiks, ja to pakāpeniski palielinās. Izdomājiet, kur jāatrodas šīs riņķa līnijas centram, lai, pakāpeniski palielinot rādiusu, vienlaicīgi riņķa līnijā „neienāktu" vairāk kā viena rūtiņu virsotne.

I.S.12. Divpadsmitā klase

I.S.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod izteiksmes mazākā vērtība (piemērs) un jāpierāda, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

I.S.12.2. Atcerieties sakarību, ka trijstūriem ar vienādiem pamatiem un vienādiem augstumiem pret šiem pamatiem ir vienādi laukumi.

I.S.12.3. Izmantojiet faktu, ka naturālu skaitļu virknes atlikumi periodiski atkārtojas.

I.S.12.4. Apskatiet nogriezni, kas savieno taisnstūra to malu, kuru garums ir 4 km, viduspunktus.

I.S.12.5. Apzīmējiet ar a k-ciparu *jokaino* skaitļu skaitu, kas beidzas ar 1 vai 9, ar b k-ciparu skaitļu skaitu, kas beidzas ar 3 vai 7, un ar c k-ciparu skaitļu skaitu, kas beidzas ar 5. Kā mainās a, b un c, ja mēs gribam aprakstīt $(k+1)$-ciparu *jokaino* skaitli?

I.N. LATVIJAS 63. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.N.9. Devītā klase

I.N.9.1. Atrodiet skaitli, kuram piemīt uzdevumā prasīta īpašība.

I.N.9.2. Aprēķiniet trijstūra *ABC* laukumu divos dažādos veidos.

I.N.9.3. Apzīmējiet taisnstūra malas ar a un b. Pārveidojiet izteiksmi $ab = 2a + 2b$ tā, lai vienā vienādības pusē būtu divu izteiksmju reizinājums, bet otrā – naturāls skaitlis.

I.N.9.4. Pamatojiet, ka mazākā a_i, $i = 1, 2, ..., 2013$, vērtība ir 2. Ievērojiet, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas:

1) atrast izteiksmes mazāko vērtību – uzrādīt piemēru, ka izteiksme var pieņemt šo vērtību;
2) pamatot, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

I.N.9.5. Izdomājiet, cik dažādus „atrisināto/neatrisināto uzdevumu” komplektus var izveidot.

I.N.10. Desmitā klase

I.N.10.1. Pamatojiet, ka mazākā a_i, $i = 1, 2, ..., 10$, vērtība ir 2. Ievērojiet, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas:

1) atrast izteiksmes mazāko vērtību – uzrādīt piemēru, ka izteiksme var pieņemt šo vērtību;
2) pamatot, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

I.N.10.2. Pamatojiet, ka trijstūris *ABC* ir platleņķa.

I.N.10.3. Pieņemiet pretējo un izmantojot, ka skaldņu perimetri ir vienādi, iegūstiet sakarības starp piramīdas šķautnēm.

I.N.10.4. Pieņemiet, ka skaitļa 2^{2013} ciparu skaits ir n, tad $10^{n-1} < 2^{2013} < 10^n$.

I.N.10.5. Aprēķiniet, cik dažādus skaitļu pārus var izveidot no dotajiem 7 skaitļiem un cik dažādas starpības var iegūt.

I.N.11. Vienpadsmitā klase

I.N.11.1. Pārveidojiet vienādojumu tā, lai vienā vienādojuma pusē būtu tikai saskaitāmie, kas satur x, bet otrā – y.

I.N.11.2. Novelciet diagonāli *BD* un izmantojiet riņķa līnijā ievilktu četrstūru īpašību.

I.N.11.3. Novietojiet katrā svaru kausā trīs monētas un šķirojiet divus gadījumus atkarībā no svaru kausa stāvokļa.

I.N.11.4. Atcerieties: ja polinomam $P(x)$ ir sakne a, tad tas satur reizinātāju $x - a$.

I.N.11.5. Aplūkojiet visas iespējamās slēgtās lauztās līnijas, kas katra sastāv no n posmiem un visi tās n lauzuma punkti ir dotajos punktos, un pierādiet, ka no tām lauztā līnija ar vismazāko perimetru ir meklētais n-stūris.

I.N.12. Divpadsmitā klase

I.N.12.1. Veiciet ekvivalentus pārveidojumus. Pēc tam izmantojiet faktu: ja a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi, tad $(a-b)^2 \geq 1$ un $\frac{1}{4(a+b)^2} > 0$.

I.N.12.2. Izmantojiet bisektrises īpašību un trijstūru līdzību.

I.N.12.3. Ievērojiet, ka $n^2 + 3n + 3 \equiv 1^2 + 3 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$.

I.N.12.4. Apzīmējiet meklētā trijstūra sānu malas (tās malas, kas atrodas uz sešstūra malām) ar a un b un pamatojiet, ka $a + b \leq 1$ un $ab \leq \frac{1}{4}$. Izmantojiet trijstūra laukuma formulu $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$.

I.N.12.5. Ar matemātisko indukciju pierādiet apgalvojumu: ja parlamentā ir n deputāti un katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d citiem deputātiem, kur $0 \leq d \leq n$, tad deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai vienas komisijas nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā.

I.V. LATVIJAS 63. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.V.9. Devītā klase

I.V.9.1. Izskatiet visus iespējamos gadījumus, sākot ar tūkstošus veidojošo ciparu.

I.V.9.2. Pierādiet un izmantojiet citu trijstūru vienādību.

I.V.9.3. Izmantojiet matemātisko indukciju.

I.V.9.4. Izsakiet katras komandas iegūto punktu skaitu ar n un a, kur a ir komandas-zaudētājas uzvarēto spēļu skaits, un noskaidrojiet kura no abām komandām varēja iegūt 92 punktus.

I.V.9.5. Katra gadījuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod lielākais skaits figūru, ko var izgriezt (piemērs), un jāpierāda, ka nevar izgriezt vairāk figūru.

I.V.10. Desmitā klase

I.V.10.1. Pārveidojiet vienādojumu tā, lai tajā nebūtu daļskaitļu un katra vienādojuma puse būtu izteikta kā reizinājums. Kādām sakarībām ir jāizpildās iegūtajam vienādojumam, ja a un b ir naturāli skaitļi?

I.V.10.2. Pierādiet, ka $AF = FE$.

I.V.10.3. Pārveidojiet doto funkciju tā, lai tā sastāvētu no kvadrāttrinoma kvadrāta un naturāla skaitļa summas. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod funkcijas mazākā vērtība (piemērs) un jāpierāda, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

I.V.10.4. Izdaliet Fibonači virknes locekļus ar kādu skaitli un izpētiet atlikumu virkni.

I.V.10.5. Šķirojiet divus gadījumus: 1) m un n abi ir nepāra skaitļi; 2) vismaz viens no m vai n ir pāra skaitlis.

I.V.11. Vienpadsmitā klase

I.V.11.1. Pierādiet uzdevumu no pretējā.

I.V.11.2. Atlieciet punktu F, kas ir simetrisks punktam A attiecībā pret taisni BD.

I.V.11.3. Apzīmējiet taisnstūra paralēlskaldņa šķautņu garumus ar a, b, c. Atcerieties: ja a ir polinoma sakne, tad polinoms satur reizinātāju $x - a$.

I.V.11.4. Pierādiet, ka abos gadījumos kvadrātu kopīgās daļas laukums ir lielāks nekā dotais skaitlis. Ievērojiet, ka abos kvadrātos var ievilkt riņķi.

I.V.11.5. Abos uzdevuma apakšpunktos izmantojiet matemātisko indukciju.

I.V.12. Divpadsmitā klase

I.V.12.1. Izmantojiet faktu, ka ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi. Pierādiet, ka ΔAKL ir vienādsānu trijstūris.

I.V.12.2. Sareiziniet abus vienādojumus un izmantojiet trigonometrijas formulas, lai pārveidotu iegūtās izteiksmes.

I.V.12.3. Pierādiet, ka $f(n) \neq 0$. Izdomājiet, kāda var būt izteiksmes $f(0)$ vērtība.

I.V.12.4. Pārveidojiet doto vienādojumu un apskatiet to pēc dažādiem moduļiem.

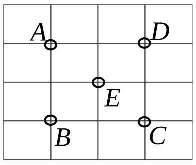
I.V.12.5. Aizstājiet burtus ar cipariem un aplūkojiet, kā mainās uz tāfeles uzrakstītā skaitļa vērtība, ja tām pielieto dotās darbības.

I.A. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.A.9. Devītā klase

I.A.9.1. Ievērojiet, ka, sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata.

I.A.9.2. Apskatiet rūtiņu virsotnes *A, B, C, D* un *E* (skat. I1. zīm.).



I1. zīm.

I.A.9.3. Aprēķiniet četru doto ciparu summu.

I.A.9.4. Aplūkojiet virkni $y_n = x_n^2$.

I.A.9.5. Dotajā četrstūrī *ABCD* novelciet diagonāli *AC* un perpendikulus *BE* un *DF* pret šo diagonāli.

I.A.10. Desmitā klase

I.A.10.1. Aplūkojiet kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2 + px + q$ vērtības punktos x_1 un x_2.

I.A.10.2. Izmantojiet riņķa līnijā ievilkto leņķu īpašības.

I.A.10.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod mazākais *n* (piemērs) un jāpierāda, ka mazāki *n* neder.

I.A.10.4. Izdomājiet, kā pirmos 100 naturālos skaitļus sadalīt 50 grupās tā, lai katrā grupā, izvēloties divus skaitļus, tiem izpildītos uzdevumā prasītā īpašība.

I.A.10.5. Pamatojiet, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt. Ievērojiet: ja kāds no 2013 uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar kāda pirmskaitļa $p \geq 5$ pakāpi p^k ($k \geq 1$), tad visi uzrakstītie skaitļi dalās ar p^k. Tāpēc, visus uzrakstītos skaitļus izdalot ar p^k, uzdevumā aprakstītā īpašība saglabājas.

I.A.11. Vienpadsmitā klase

I.A.11.1. Pieņemiet pretējo, ka $n^2 - 3n - 1$ dalās ar 169. Pārveidojiet izteiksmi $n^2 - 3n - 1$ formā $P(n) + 39$, kur $P(n)$ ir divu binomu reizinājums.

I.A.11.2. Uzzīmējiet prasīto daudzstūri un pamatojiet, ka izpildās uzdevumā prasītais.

I.A.11.3. Ievērojiet, ka visi skaitļi a_i uzrakstāmi formā $a_i = 3^b \cdot 5^c$, tāpēc apskatāmās summas katrs saskaitāmais izsakāms formā $\frac{1}{a_i} = \frac{1}{3^b \cdot 5^c}$.

I.A.11.4. Izdomājiet algoritmu, kā saplānot maršrutus, lai izpildītos uzdevumā prasītais.

I.A.11.5. Izdomājiet, kā izmantot kvadrātisku rūtiņu režģi, kura rūtiņas malas garums vienāds ar kvadrātveida papīra gabalu malas garumu.

I.A.12. Divpadsmitā klase

I.A.12.1. Izmantojiet logaritmiskās funkcijas īpašības.

I.A.12.2. Pierādiet, ka visas trīs novilktās riņķa līnijas krustojas trijstūra *ABC* vidusperpendikulu krustpunktā.

I.A.12.3. Apskatiet doto vienādojumu pēc moduļa 7.

I.A.12.4. Ievērojiet:

- ja vārds sākas ar patskani, tad nākamais burts var būt tikai līdzskanis (jo divi patskaņi nevar būt blakus);
- ja vārds sākas ar līdzskani, tad nākamais burts var būt vai nu patskanis, vai arī vēl viens līdzskanis, bet tad trešais burts noteikti ir patskanis (jo blakus var būt ne vairāk kā divi līdzskaņi).

I.A.12.5. Izmantojiet sakarību: ja $x \in (0;1)$, tad arī $x^2 \in (0;1)$.

I.VP. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

I.VP.1. Pierādiet un izmantojiet nevienādību $\frac{2a}{a^3+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$.

I.VP.2. Atcerieties: ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.VP.3. Pamatojiet un izmantojiet sakarības: ja skaitlis a ir *izcils* un izsakāms kā skaitļu $a_1, a_2, ..., a_k$ summa, tad *izcili* ir arī skaitļi: $2a+2$, $2a+8$ un $2a+29$.

I.VP.4. Pamatojiet, ka funkcija g ir injektīva, t.i., ja $g(a) = g(b)$, tad $a = b$.

I.VP.5. Ievērojiet, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas:

1) jāatrod lielākais skaits nogriežņu, ko var novilkt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem un jāparāda piemērs, ka to var izdarīt;
2) jāpierāda, ka vairāk nogriežņus novilkt nevar.

I.BW. ATLASE KOMANDU SACENSĪBĀM "BALTIJAS CEĻŠ 2012"

I.BW. Algebra

I.BW.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod izteiksmes lielākā vērtība (piemērs) un jāpierāda, ka mazāku vērtību izteiksme nevar pieņemt.

I.BW.2. Apzīmējiet $x_0 = 2\sin\alpha$, kur $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, un ar matemātisko indukciju pierādiet, ka $x_n = 2\sin(3^n\alpha)$.

I.BW.3. Pierādiet, ka dotā funkcionālvienādojuma atrisinājums ir $f(x) = 0$ un $f(x) = x^3 + c,\ \ c \in R$.

I.BW.4. Ievērojiet: ja polinomam ir nepāra pakāpe, tad ir tāda vērtība (polinoma nulle jeb sakne), kurā polinoms maina zīmi.

I.BW.5. Izmantojiet Čebiševa nevienādību un sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

I.BW. Kombinatorika

I.BW.6. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod mazākais uzdevumu skaits (piemērs) un jāpierāda, ka ar mazāku uzdevumu skaitu dotie nosacījumi nevar izpildīties.

I.BW.7. Aprēķiniet varbūtību izņemt sarkanas krāsas un citas krāsas (zaļu vai baltu) bumbiņu. Izmantojot klasisko varbūtības aprēķināšanas formulu, iegūstiet kvadrātvienādojumu.

I.BW.8. Ar F_i, $i = 0, 1, 2, ..., t$, apzīmējiet skolēna A_i draugu kopu. Pierādiet, ka $\left[\frac{t}{3}\right] + 1$ kopas $F_0, F_3, F_6, ...$ ir pa pāriem nešķeļošās (t. i., tām nav kopīgu elementu jeb $A_0, A_3, A_6, ...$ nav kopīgu draugu).

I.BW.9. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod mazākais krāsu skaits (piemērs)un jāpierāda, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt, ja krāsu skaits ir mazāks.

I.BW.10. Izmantojiet uzdevuma interpretāciju ar grafa virsotnēm un šķautnēm.

I.BW. Ģeometrija

I.BW.11. Izmantojiet trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas, ja zināms ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiuss. Nevienādības pierādīšanai izmantojiet sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

I.BW.12. Izmantojiet, ka trijstūrim pievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu (trijstūra viena iekšējā leņķa un divu ārējo leņķu) krustpunktā.

I.BW.13. Apzīmējiet diagonāļu *AC* un *BD* krustpunktu ar *E*. Novelciet leņķa *DEC* bisektrisi *EF*, kur *F* ir bisektrises krustpunkts ar malu *DC*.

I.BW.14. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod lielākā iespējamā riņķu laukumu summa (piemērs) un jāpierāda, ka lielāku laukumu iegūt nevar.

I.BW.15. Izmantojiet Čevas teorēmu un līdzīgus trijstūrus.

I.BW. Skaitļu teorija

I.BW.16. Parādiet, ka uzdevumā prasītais ir spēkā visiem *n* formā $n = 2a^2$, kur $a > 1$ un $a \equiv 1 \pmod 5$.

I.BW.17. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod mazākā *k* vērtība (piemērs) un jāpierada, ka lielākām *k* vērtībām uzdevuma prasītais neizpildās.

I.BW.18. Pierādiet, ka gadījumā, kad $a \geq 2,\ b \geq 2,\ c \geq 2$, dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

I.BW.19. Pierādiet, ka *d* var pieņemt tikai vērtības 1, 3 vai 9.

I.BW.20. Izmantojiet skaitļu *a* un *b* sadalījumu pirmreizinātājos:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m} \quad \text{un} \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m}.$$

I.BW. STARPTAUTISKĀS MATEMĀTIKAS KOMANDU SACENSĪBAS "BALTIJAS CEĻŠ 2012"

I.BW. Algebra

I.BW.1. Sadaliet skaitļus 9 grupās tā, lai tajās būtu vienāds skaits skaitļu.

I.BW.2. Pieņemiet, ka $a \le b \le c$ un nosakiet izteiksmes $\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}$ vērtību. Izmantojiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

I.BW.3. a) Apzīmējiet $k = \lfloor x \rfloor$ un $y = x - k$.

b) Pierādiet no pretējā.

I.BW.4. Pamatojiet, ka jebkuram veselam skaitlim $m > 2$ kvadrāttrinomam $x^2 - mx + 1$ ir divas dažādas saknes, kuru reizinājums ir 1.

I.BW.5. Ievietojiet dotajā vienādojumā $y = 0$ un $x = 0$.

I.BW. Kombinatorika

I.BW.6. Atrodiet tādu darbību, kuru vienmēr varēs veikt pirmais spēlētājs, bet otrajam tas nebūs iespējams.

I.BW.7. Ievērojiet, ka uzdevumā var izmantot Paskāla trijstūri un sakarības tajā.

I.BW.8. Piekārtojiet katrai grafa virsotnei skaitli no 0 līdz 99, kur šis skaitlis norāda garākā ceļa garumu, kas beidzas konkrētajā virsotnē.

I.BW.9. Atrodiet tādu summu $S = \sum_{1 \le i,j \le 5} c_{(i,j)} \cdot a_{(i,j)}$ ($a_{(i,j)}$ ir skaitlis, kas ierakstīts rūtiņā, kura atrodas i kolonnā un j rindā, un $c_{(i,j)}$ ir koeficients, kas piekārtots katrai kvadrāta rūtiņai), kura augs par konstantu skaitli katrreiz, kad izvēlas kādu rūtiņu un pieskaita vieniniekus.

I.BW.10. Nepāra pirmskaitļus var sadalīt 2 grupās – pirmskaitļi, kas kongruenti ar 1 pēc moduļa 4, un pirmskaitļi, kas kongruenti ar 3 pēc moduļa 4. Kādi pirmskaitļi ir jāizvēlas *A*, lai tas vienmēr uzvarētu?

I.BW. Ģeometrija

I.BW.11. Pagrieziet trijstūri ABC ap punktu A par $60°$.

I.BW.12. Izmantojiet kosinusu teorēmu un sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

I.BW.13. Izmantojiet augstumu krustpunkta (ortocentra) īpašību: punkti H un H_C ir simetriski attiecībā pret malu AB (t. i., taisne AB dala nogriezni HH_C uz pusēm un $AB \perp HH_C$). Ievērojiet, ka $S_{AH_CBH_ACH_B} = 2S_{ABC}$.

I.BW.14. Konstruējiet riņķa līniju caur punktiem F, E, C un ar H apzīmējiet otru punktu, kurā taisne CG krusto šo riņķa līniju.

I.BW.15. Atrodiet vēl divus četrstūrus, ap kuriem var apvilkt riņķa līniju. Pierādiet, ka šīs riņķa līnijas ir vienādas.

I.BW. Skaitļu teorija

I.BW.16. Pieņemiet, ka $(n-1)n(n+1)$ ir vesela skaitļa k-tā ($k \geq 1$) pakāpe. Apskatiet skaitļu n un $(n-1)(n+1)$ lielāko kopīgo dalītāju.

I.BW.17. Pierādiet, ka skaitlis $n^{d(n)}$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

I.BW.18. Apskatiet doto vienādojumu pēc dažādiem moduļiem.

I.BW.19. Izdomājiet, kādām īpašībām jāizpildās skaitlim n, lai, to ieliekot dotajā izteiksmē, izteiksme vienmēr dalītos ar 3.

I.BW.20. Pierādiet, ka vienādojumam nav atrisinājuma, atrodot tādu skaitli, pēc kura moduļa var iegūt pretrunu.

ATRISINĀJUMI

A.S. LATVIJAS 25. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.S.9. Devītā klase

A.S.9.1. *Pieci veseli skaitļi a, b, c, d un e ir pēc kārtas sekojoši aritmētiskās progresijas locekļi. Zināms, ka a nav 0 un ka b un d ir kvadrātvienādojuma* $ax^2+cx+e=0$ *saknes. Noteikt skaitļu a, b, c, d un e vērtības!*

No aritmētiskās progresijas definīcijas izteiksim *b*, *c*, *d* un *e*, izmantojot *a* un aritmētiskās progresijas diferenci f: $b=a+f$, $c=a+2f$, $d=a+3f$ un $e=a+4f$. Tātad dotais kvadrātvienādojums ir $ax^2+(a+2f)x+a+4f=0$ un pēc dotā tā saknes ir $x_1=a+f$ un $x_2=a+3f$.

Vienādojuma sakne ir tāda *x* vērtība, kuru ievietojot vienādojumā *x* vietā, iegūst identitāti. Tātad

$$a(a+f)^2+(a+2f)(a+f)+a+4f=0; \qquad (*)$$

$$a(a+3f)^2+(a+2f)(a+3f)+a+4f=0.$$

No otrās vienādības atņemot pirmo, iegūstam

$$a((a+3f)^2-(a+f)^2)+(a+2f)(a+3f-a-f)=0;$$

$$a(2a+4f)\cdot 2f+(a+2f)\cdot 2f=0;$$

$$2f(a+2f)(2a+1)=0.$$

Lai reizinājuma vērtība būtu 0, kādam no reizinātājiem jābūt 0.

Iespējami trīs gadījumi:

1) $f=0$. Tad no (*) iegūst, ka $a(a^2+a+1)=0$. Tā kā izteiksmes a^2+a+1 vērtība vienmēr ir pozitīva, tad $a=0$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka *a* nav 0. Tātad vērtība $f=0$ neder.

2) $2a+1=0$ jeb $a=-\frac{1}{2}$, kas ir pretrunā ar doto, ka *a* ir vesels skaitlis.

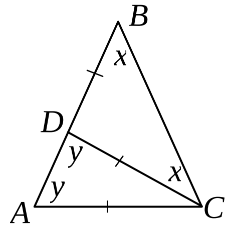
3) $a+2f=0$ jeb $a=-2f$. Ievietojot šo vērtību vienādībā (*), iegūstam $(-2f)f^2+2f=0$ jeb $2f(1-f^2)=0$. Skaitļa f vērtība nevar būt 0 (skat. 1) gadījumu), tāpēc ir divi atrisinājumi: $f_1=1$ un $f_2=-1$.

Atrodam katrai f vērtībai atbilstošās doto piecu skaitļu vērtības:

- ja $f=1$, tad $a=-2, b=-1, c=0, d=1$ un $e=2$,
- ja $f=-1$, tad $a=2, b=1, c=0, d=-1$ un $e=-2$.

A.S.9.2. *Vienādsānu trijstūrī ABC* ($AB = BC$) *izvēlēts malas AB iekšējs punkts D un novilkts nogrieznis CD tā, ka* $BD = DC = CA$*. Aprēķināt* $\angle ABC$.

Apzīmēsim $\angle ABC = x$ un $\angle BAC = y$ (skat. A1. zīm.).



A1. zīm.

Tā kā ΔABC, ΔACD un ΔBCD ir vienādsānu, tad attiecīgi $\angle BCA = \angle BAC = y$, $\angle CDA = \angle BAC = y$ un $\angle BCD = \angle ABC = x$. Leņķis CDA ir ΔBDC ārējais leņķis, tātad $\angle CDA = \angle BCD + \angle DBC$ jeb $y = x + x = 2x$. Trijstūra ABC iekšējo leņķu summa ir $180°$, tātad

$$180° = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC;$$

$$180° = y + y + x;$$

$$180° = 2x + 2x + x \quad \Rightarrow \quad 180° = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 36°.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\angle ABC = x = 36°$.

A.S.9.3. *Ar kādu lielāko skaitļa* 2013 *pakāpi dalās skaitlis* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2012$*?*

Sadalīsim skaitli 2013 pirmreizinātājos: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Lai noteiktu, ar kādu lielāko 2013 pakāpi dalās skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2012 = 2012!$, pietiek noteikt, ar kādu lielāko skaitļa 61 pakāpi dalās 2012! (jo šajā reizinājumā gan skaitļa 3, gan skaitļa 11 pakāpes nebūs mazākas kā skaitļa 61 pakāpe). No pirmajiem 2012 naturālajiem skaitļiem, kas ietilpst reizinājumā 2012!, ar 61 dalās 32 skaitļi: 61, 122, ..., 1952. Neviens no šiem skaitļiem nedalās ar $61^2 = 3721$ vai augstāku skaitļa 61 pakāpi. Tātad skaitļa 2013 lielākā pakāpe, ar kuru dalās 2012!, ir 32.

A.S.9.4. *Kvadrātveida tabulā ar izmēriem* 5×5 *rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Pierādīt, ka tabulā var izvēlēties piecas rūtiņas tā, ka nekādas divas neatrodas ne vienā rindiņā, ne vienā kolonā, un tajās ierakstīto skaitļu summa ir pozitīva.*

Nokrāsosim visas tabulas rūtiņas piecās krāsās tā, lai katrā krāsā būtu nokrāsotas tieši 5 rūtiņas un nekādas divas vienā krāsā nokrāsotās rūtiņas neatrastos ne vienā rindiņā, ne vienā kolonnā (skat., piemēram, A2. zīm.; katra krāsa ir apzīmēta ar citu burtu).

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

A2. zīm.

Ar a apzīmēsim visu piecu A krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar b – B krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar c – C krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar d – D krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu un ar e – E krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu. Pieņemsim, ka $a \le 0$, $b \le 0$, $c \le 0$, $d \le 0$ un $e \le 0$, tad $a + b + c + d + e \le 0$.

Bet pēc dotā $a+b+c+d+e>0$, jo tā ir visu tabulā ierakstīto skaitļu summa. Tātad pieņēmums ir aplams un vismaz viens no skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d* vai *e* ir pozitīvs. Atbilstošās krāsas rūtiņas būs meklētās piecas rūtiņas.

A.S.9.5. *Iedomāsimies, ka uz Zemes ieradušies citplanētieši, un viņiem ir pastāstīts, ka uz Zemes laiku mēra gados, dienās un mēnešos. Pie tam ir zināms, ka*
1) *gada ilgums ir* 365 *dienas,*
2) *gads ir sadalīts* 28, 30 *vai* 31 *dienu garos mēnešos.*
Vai, zinot tikai šo informāciju, citplanētieši var viennozīmīgi noteikt **a)** *mēnešu skaitu gadā,* **b)** *katra veida mēnešu skaitu?*

a) Ja pieņemam, ka visos mēnešos ir lielākais iespējamais dienu skaits, tas ir, 31 diena, tad 11 šādos mēnešos kopējais dienu skaits būtu $11\cdot 31=341<365$. Tātad mēnešu skaits ir lielāks nekā 11.
Ar *a* apzīmējam to mēnešu skaitu, kuros ir 28 dienas, ar *b* – to, kuros ir 30 dienas, un ar *c* – to, kuros ir 31 diena. Aprēķinām, cik dienu ir 13 mēnešos: $28a+30b+31c=28(a+b+c)+2b+3c$. Tā kā $a+b+c=13$, tad iegūstam :

$$28(a+b+c)+2b+3c=28\cdot 13+2b+3c\geq 364+2+3=369>365.$$

Tātad gadā ir tieši 12 mēneši.
b) Izmantosim a) gadījumā ieviestos apzīmējumus. Šajā gadījumā iegūstam

$$28a+30b+31c=31(a+b+c)-3a-b=365 \text{ jeb } 3a+b=31\cdot 13-365=7.$$

Iespējami divi atrisinājumi: $a=1,\ b=4,\ c=7$ un $a=2,\ b=1,\ c=9$. Tātad viennozīmīgi katra veida mēnešu skaitu noteikt nav iespējams.

A.S.10. Desmitā klase

A.S.10.1. *Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu*

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2+x^2-y^2-10=0.$$

Ekvivalenti pārveidojam doto vienādojumu.

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2+x^2-y^2=10$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)+(x-y)(x+y)=10$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2-xy+x-y)=10$$
$$(x+y)(x^2-2xy+y^2+x-y)=10$$
$$(x+y)((x-y)^2+(x-y))=10$$
$$(x+y)(x-y)(x-y+1)=10$$

Tā kā *x* un *y* ir veseli skaitļi, tad katrs reizinātājs ir vesels skaitlis. Skaitli 10 kā trīs veselu skaitļu reizinājumu (līdz precizitātei ar reizinātāju secību) var izteikt septiņos veidos:

$$\begin{aligned}10&=1\cdot 2\cdot 5=(-1)\cdot(-2)\cdot 5=(-1)\cdot 2\cdot(-5)=1\cdot(-2)\cdot(-5)=\\&=1\cdot 1\cdot 10=(-1)\cdot(-1)\cdot 10=1\cdot(-1)\cdot(-10)\end{aligned}$$

Ievērosim, ka $(x-y+1)-(x-y)=1$, tātad der tikai tie sadalījumi, kuros ir divi reizinātāji, kas atšķiras par 1, tādi ir tikai pirmie divi gadījumi. Apskatīsim katru gadījumu:

$$1)\ \begin{cases}x-y=1\\x-y+1=2\\x+y=5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad 2x=6\quad\Rightarrow\quad x=3,\ y=2.$$

2) $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-y+1=-1 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x=3 \quad \Rightarrow \quad x=1{,}5$. Tā kā x nav vesels skaitlis, tad šis gadījums neder.

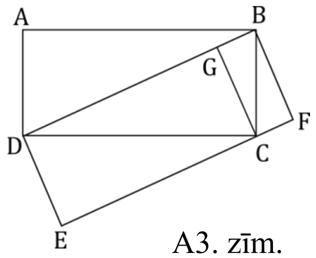
Tātad dotajam vienādojumam ir tikai viens atrisinājums veselos skaitļos $x=3$ un $y=2$.

Piezīme. Pārveidojumus varēja veikt arī ar grupēšanas paņēmienu.

A.S.10.2. *Taisnstūra ABCD diagonāle BD ir taisnstūra BDEF mala. Punkts C atrodas uz EF. Pierādīt, ka* $S_{ABD}=S_{CDE}+S_{BCF}$ *!*

Novelkam *CG*⊥*BD* (skat. A3. zīm.). Tad esam ieguvuši taisnstūrus *BFCG* un *CEDG*. Taisnstūra diagonāle sadala to divos vienādos trijstūros.

Tātad $S_{ABD}=S_{BCD}=S_{DCG}+S_{BCG}=S_{CDE}+S_{BCF}$, kas arī bija jāpierāda.



A3. zīm.

A.S.10.3. *Pierādīt, ka izteiksmes* $19\cdot 8^n+17$ *vērtība nav pirmskaitlis nevienai veselai nenegatīvai n vērtībai!*

Ievērojam, ka visām veselām nenegatīvām *n* vērtībām

$$19\cdot 8^n+17\geq 19\cdot 1+17=19+17=36.$$

Aplūkojam izteiksmes vērtību pēc moduļa 9:

$$19\cdot 8^n+17\equiv 1\cdot(9-1)^n-1\equiv(9-1)^n-1\ (\mathrm{mod}\ 9).$$

Ja $n=2k$, tad dotās izteiksmes vērtība dalās ar 9.

Aplūkojam izteiksmes vērtību, ja $n=2k+1$. Tad doto izteiksmi var pārveidot formā:

$$19\cdot 8^{2k+1}=19\cdot 8\cdot 8^{2k}=19\cdot 8\cdot 64^k+17=152\cdot 64^k+17.$$

Apskatām izteiksmes $152\cdot 64^k+17$ vērtību pēc moduļa 13 un pēc moduļa 5:

- $152\cdot 64^k+17\equiv 9\cdot(65-1)^k+4\ (\mathrm{mod}\ 13)$. Ja k ir pāra skaitlis, tad izteiksme dalās ar 13.
- $152\cdot 64^k+17\equiv 2\cdot(65-1)^k+2\ (\mathrm{mod}\ 5)$. Ja k ir nepāra skaitlis, tad izteiksme dalās ar 5.

Tātad nevienai veselai nenegatīvai *n* vērtībai izteiksmes vērtība nav pirmskaitlis.

A.S.10.4. *Atrast visus naturālos skaitļus, kuros ir vairāk nekā četri cipari, kas beidzas ar* 2013 *un, ja šim skaitlim nodzēš pēdējos četrus ciparus, tad tas samazinās veselu skaitu reižu!*

Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $a\cdot 10^4+2013$ (a – naturāls skaitlis), tad pēc nodzēšanas paliek skaitlis a. $\dfrac{a\cdot 10^4+2013}{a}=10^4+\dfrac{2013}{a}$. Tātad skaitlim a jābūt skaitļa 2013 dalītājam. Ievērojam, ka $2013=3\cdot 11\cdot 61$. Tāpēc skaitļa 2013 dalītāji ir 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013 un meklētie skaitļi ir 12013, 32013, 112013, 332013, 612013, 1832013, 6712013 un 20132013.

A.S.10.5. *Tabulā ar izmēriem* 4×4 *rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis* 1, 2 *vai* 3. *Ja divās rūtiņās ar kopīgu malu vai stūri ir ierakstīts viens un tas pats skaitlis, tad teiksim, ka veidojas pāris. Noskaidrot, kāds ir minimālais pāru skaits šajā tabulā.*

Katrā tabulas 2×2 rūtiņu kvadrātā būs vismaz 2 vienādi skaitļi (seko no Dirihlē principa), tāpēc būs vismaz 1 pāris. Katros divos 2×2 rūtiņu kvadrātos, kuriem nav vairāk kā 1 kopīga rūtiņa, būs vismaz 2 pāri. Tāpēc visā 4×4 rūtiņu tabulā būs vismaz 5 pāri (pa vienam katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā, kas satur kādu stūra rūtiņu, un viens pāris 2×2 rūtiņu “centrālajā” kvadrātā). Tabulā var būt tieši 5 pāri, kā redzams A4. zīm. Tātad mazākais iespējamai pāru skaits ir 5.

1	2	1	2
1	3	1	3
2	2	1	2
1	3	1	3

A4. zīm.

A.S.11. Vienpadsmitā klase

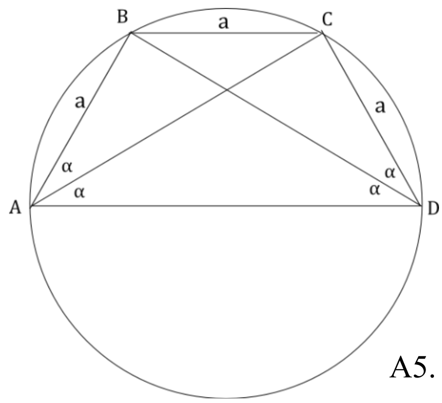
A.S.11.1. *Pierādīt, ka nav tādas ģeometriskās progresijas, kas satur visus trīs skaitļus* 1, $\sqrt{2}$ *un* $\sqrt[3]{3}$.

Pieņemsim, ka ir tāda ģeometriskā progresija, kuras locekļi ir visi trīs dotie skaitļi. Tā kā $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$, tad varam uzskatīt, ka $b_1=1$. Tad no ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulas $b_{n+1}=b_1q^n$ seko, ka $\sqrt{2}=q^a$ un $\sqrt[3]{3}=q^b$, kur q ir kvocients un a, b – naturāli skaitļi. No pirmās vienādības izriet, ka $q=2^{\frac{1}{2a}}$. Ievietojot šo sakarību vienādībā $\sqrt[3]{3}=q^b$, iegūstam $\sqrt[3]{3}=2^{\frac{b}{2a}}$. Izteiksim mainīgo *b*: $\frac{b}{2a}=\log_2\sqrt[3]{3}$ jeb $b=\frac{2}{3}a\log_2 3$. Tā kā *a* ir naturāls skaitlis, bet $\log_2 3$ nav racionāls skaitlis, tad *b* nav naturāls skaitlis. Iegūta pretruna.

Tātad nav tādas ģeometriskās progresijas, kas satur skaitļus 1, $\sqrt{2}$ un $\sqrt[3]{3}$.

A.S.11.2. *Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles AC un BD vienlaikus ir attiecīgi leņķu BAD un CDA bisektrises. Vai ABCD noteikti ir kvadrāts?*

Nē, ne obligāti. Uzdevumā aprakstīt īpašība ir spēkā arī vienādsānu trapecēm, kuru īsākais pamats ir vienāds ar sānu malu garumu (skat. A5. zīm.).



A5. zīm.

A.S.11.3. *Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu k, ka* $11k-2$ *ir skaitļa* 3 *pakāpe.*

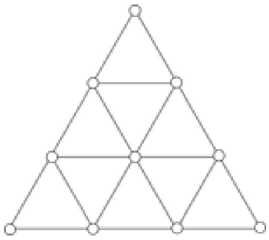
Aplūkojam trijnieka pakāpju atlikumus pēc moduļa 11:

$$3^1 \equiv 3\,(\text{mod}\,11),\ 3^2 \equiv 9\,(\text{mod}\,11),\ 3^3 \equiv 5\,(\text{mod}\,11),\ 3^4 \equiv 4\,(\text{mod}\,11),$$

$$3^5 \equiv 1\,(\text{mod}\,11),\ 3^6 = 3\cdot 3^5 \equiv 3\cdot 1 \equiv 3\,(\text{mod}\,11),\ \ldots$$

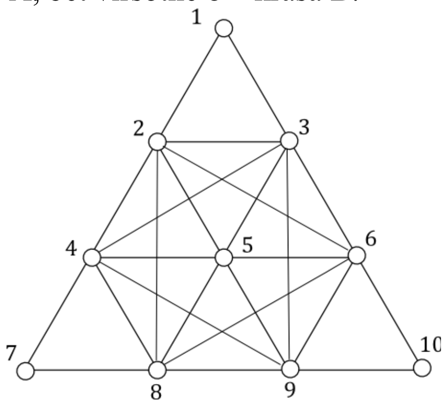
Tālāk pakāpju vērtības pēc moduļa 11 cikliski atkārtosies un katram naturālam *m* izpildās sakarība $3^{5m-3} \equiv 9\,(\text{mod}\,11)$. No kā seko, ka $3^{5m-3}+2$ dalās ar 11 un šis dalījums ir atbilstošā *k* vērtība. Tā kā *m* vērtība var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad arī atbilstošo *k* vērtību ir bezgalīgi daudz.

A.S.11.4. *Regulārā trijstūra režģa* (*skat.* 1. *zīm.*) *katra no desmit virsotnēm nokrāsota sarkanā vai zaļā krāsā. Pierādīt, ka ir iespējams atrast regulāru trijstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā krāsā! Trīsstūra malas var nebūt paralēlas režģa malām.*



1. zīm.

Tā kā virsotnes 2, 6 un 8 atrodas viena regulāra trijstūra virsotnēs, tad divām no tām jābūt vienā, bet vienai – otrā krāsā (skat. A6. zīm.). Simetrijas dēļ var pieņemt, ka virsotnes 2 un 6 ir krāsā A, bet virsotne 8 – krāsā B.



A6. zīm.

Aplūkosim, kādā krāsā var būt virsotne 3.

1) Virsotne 3 ir krāsā A. Lai virsotnes 2, 3 un 5 nebūtu vienā krāsā, tad 5 jābūt krāsā B. Lai virsotnes 5, 8 un 9 nebūtu vienā krāsā, virsotnei 9 jābūt krāsā A. Lai 5, 8 un 4 nebūtu vienā krāsā, virsotnei 4 jābūt krāsā A. Bet tad virsotnes 3, 4 un 9 veido regulāru trijstūri, kur visas virsotnes ir krāsā A.
2) Virsotne 3 ir krāsā B. Vismaz vienai no virsotnēm 4 un 9 ir jābūt krāsā A (citādi veidosies vienkrāsains trijstūris ar virsotnēm 3, 4, 9). Simetrijas dēļ varam pieņemt, ka virsotne 4 ir nokrāsota krāsā A. Lai neveidotos vienkrāsains trijstūris ar virsotnēm 2, 4, 5, tad virsotnei 5 jābūt krāsā B. Lai neveidotos vienkrāsains trijstūris 8, 9, 5, tad 9 ir jābūt krāsā A. Atkarībā no virsotnes 10 krāsas veidojas vienkrāsains regulārs trijstūris 10, 6, 9 (ja 10 ir krāsā A) vai 10, 3, 8 (ja 10 ir krāsā B).

A.S.11.5. *Pierādīt, ka bezgalīgā rūtiņu lapā var novilkt riņķa līniju, kuras iekšpusē atrodas tieši* 2012 *rūtiņu virsotnes.*

Rūtiņu lapā ieviesīsim koordinātu sistēmu tā, ka punkts (0; 0) atrodas kādas rūtiņas virsotnē, koordinātu asis ir paralēlas rūtiņu malām un rūtiņas malas garums ir 1 vienība. Tādā gadījumā visām rūtiņu virsotnēm abas koordinātas ir veseli skaitļi. Apskatīsim riņķa līniju, kuras centrs ir punktā $A(\sqrt{2};\sqrt{3})$ un rādiuss ir 0,01; šīs riņķa līnijas iekšpusē neatrodas neviena rūtiņu virsotne. Pakāpeniski „izpletīsim" šo riņķa līniju, nemainot tās centru, bet tikai nepārtraukti pielielinot rādiusu. Pamatosim, ka šādā procesā riņķa līnijas iekšpusē vienā laika momentā var „ienākt" ne vairāk kā viena rūtiņas virsotne.

Vienlaicīgi riņķa līnijas iekšpusē varētu ienākt divas vai vairāk virsotnes tikai tad, ja būtu divas vai vairāk virsotnes, attālumi līdz kurām no punkta *A* būtu vienādi. Pieņemsim pretējo, ka ir tādas divas dažādas rūtiņu virsotnes *M*(*a*; *b*) un *N*(*c*; *d*) (*a*, *b*, *c*, *d* – veseli skaitļi, pie tam $a \neq c$ vai $b \neq d$), ka $MA = NA$.

Tā kā $MA^2 = (a-\sqrt{2})^2 + (b-\sqrt{3})^2$ un $NA^2 = (c-\sqrt{2})^2 + (d-\sqrt{3})^2$, tad

$$(a-\sqrt{2})^2 + (b-\sqrt{3})^2 = (c-\sqrt{2})^2 + (d-\sqrt{3})^2;$$

$$a^2 - 2a\sqrt{2} + 2 + b^2 - 2b\sqrt{3} + 3 = c^2 - 2c\sqrt{2} + 2 + d^2 - 2d\sqrt{3} + 3;$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\sqrt{2}(a-c) + 2\sqrt{3}(b-d).$$

Pēdējās vienādības kreisās puses izteiksme ir vesels skaitlis, bet labās puses izteiksme ir vesels skaitlis tikai tad, ja vienlaicīgi $a = c$ un $b = d$, t. i., punkti *M* un *N* sakrīt – pretruna.

Tātad augstāk aprakstītā procesa rezultātā iestāsies tāds brīdis, kad riņķa līnijas iekšpusē atradīsies tieši 2012 punkti.

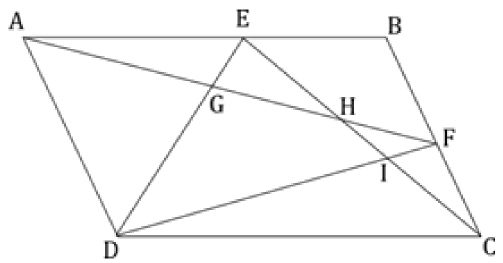
A.S.12. Divpadsmitā klase

A.S.12.1. *Kāda ir izteiksmes* $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1}$ *mazākā iespējamā vērtība, ja a un b ir naturāli skaitļi?*

Izteiksmes minimālā vērtība ir 1, ko iegūst ņemot $a = b = 1$. Vēl jāpierāda, ka izteiksmes vērtība nevar būt mazāka. Simetrijas dēļ var pieņemt, ka $b \geq a \geq 1$. Tad

$$\frac{b}{a+1} \geq \frac{b}{b+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{b+1} \geq \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{1+b}{b+1} = 1.$$

A.S.12.2. *Uz paralelograma ABCD malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC – punkts F* (*skat.* 2. *zīm.*). *Nogriežņu DE un AF krustpunkts ir G, bet EC krustpunkti ar AF un DF ir attiecīgi punkti H un I. Pierādīt, ka* $S_{DGHI} = S_{AGE} + S_{EBFH} + S_{CFI}$.



2. zīm.

Ievērojam (skat. 2. zīm.), ka

$$S_{AFD} = S_{DEC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{AED} + S_{EBC};$$

$$S_{AFD} = S_{AGD} + S_{DGHI} + S_{FHI};$$

$$S_{AFD} = S_{AED} + S_{EBC} = S_{AGD} + S_{AGE} + S_{EBFH} + S_{FHI} + S_{CFI}.$$

No pēdējām divām vienādībām seko, ka

$$S_{AGD} + S_{DGHI} + S_{FHI} = S_{AGD} + S_{AGE} + S_{EBFH} + S_{FHI} + S_{CFI}.$$

Vienkāršojot, iegūstam $S_{DGHI} = S_{AGE} + S_{EBFH} + S_{CFI}$, kas arī bija jāpierāda.

A.S.12.3. *Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar* 1*, bet katrs nākamais loceklis ir vienāds ar trīs iepriekšējo skaitļu summu. Vai ar* 5 *dalās šīs virknes* ***a)*** 111.*;* ***b)*** 2012. *loceklis?*

Aplūkosim, kāds ir virknes katra elementa atlikums, dalot to ar 5:

1, 1, 1, 3, 0, 4, 2, 1, 2, 0, 3, 0, 3, 1, 4, 3, 3, 0, 1, 4, 0, 0, 4, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1,...

Tātad atlikumu virkne ir periodiska ar periodu 31. Tas nozīmē, ka dotās virknes 111. locekļa atlikums sakrīt ar virknes 18. locekļa atlikumu, tas ir 0, bet virknes 2012. locekļa atlikums sakrīt ar 28. locekļa atlikumu, tas ir 2. Tātad dotās virknes 111. loceklis dalās ar 5, bet 2012. loceklis – nedalās.

A.S.12.4. *Lauka forma ir taisnstūris ar malu garumiem* 4 *km un* 6 *km. Tajā uzceltas piecas mājas. Pierādīt, ka, neatkarīgi no māju izvietojuma, varēs uzbūvēt ceļus, pa kuriem no jebkuras mājas var nokļūt uz jebkuru citu, un ceļu kopējais garums nepārsniedz* 15 *km.*

Apskatām nogriezni, kas savieno taisnstūra to malu, kuru garums ir 4 km, viduspunktus. Gadījumā, ja kādas mājas attālums līdz šim nogrieznim nepārsniedz 1 km, tad, uzbūvējot ceļu pa šo nogriezni, un no katras mājas īsāko ceļu līdz šim nogrieznim, kopējais uzbūvēto ceļu garums nepārsniegs $6+1+4\cdot 2=15$ km. Ja attālums no katras mājas līdz novilktajam nogrieznim pārsniedz 1 km, tad nogriezni pārbīdīsim par 1 km uz to pusi, kur ir vairāk māju (nogriežņa vienā pusē būs vismaz 3 mājas). Uzbūvējot no katras mājas īsāko nogriezni līdz šim nogrieznim, kopējais garums nepārsniegs $6+3\cdot 1+2\cdot 3=15$ km.

A.S.12.5. *Naturālu skaitli sauksim par jokainu, ja tā pieraksts sastāv tikai no cipariem* 1, 3, 5, 7 *un* 9*, pie tam jebkuru divu blakus ciparu starpība ir tieši* 2*. Piemēram, skaitļi* 5797, 31353575 *un* 9 *ir jokaini. Aprēķināt, cik ir jokainu* ***a)*** 11*-ciparu,* ***b)*** 2012*-ciparu skaitļu!*

Zināms, ka ir pieci *jokaini* viencipara skaitļi: 1, 3, 5, 7 un 9. Varam uzskatīt, ka ir pa vienam viencipara skaitlim, kas beidzas ar katru no nepāra cipariem.

Ievērojam, ka

- *jokainais n*-ciparu skaitlis var beigties ar 1 tikai tad, ja $n-1$ ciparu skaitlis beidzas ar 3 (pie tam $n-1$ ciparu skaitlim arī jābūt *jokainam*);
- *jokainais n*-ciparu skaitlis var beigties ar 3 tikai tad, ja $n-1$ ciparu skaitlis beidzas ar 1 vai 5;
- *jokainais n*-ciparu skaitlis var beigties ar 5 tikai tad, ja $n-1$ ciparu skaitlis beidzas ar 3 vai 7;
- *jokainais n*-ciparu skaitlis var beigties ar 7 tikai tad, ja $n-1$ ciparu skaitlis beidzas ar 5 vai 9;
- *jokainais n*-ciparu skaitlis var beigties ar 9 tikai tad, ja $n-1$ ciparu skaitlis beidzas ar 7.

Pieņemsim, ka a ir k-ciparu jokaino skaitļu skaits, kas beidzas ar 1 vai 9, b ir k-ciparu skaitļu skaits, kas beidzas ar 3 vai 7 un c ir k-ciparu skaitļu skaits, kas beidzas ar 5.

Pierakstīsim to šādi:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

i-tajā rindā rakstīts to skaitļu skaits, kas beidzas ar $2i-1$.
Aplūkojam, cik ir $k+1$, $k+2$ un $k+3$ ciparu *jokaino* skaitļu, kas beidzas attiecīgi ar cipariem 1, 3, 5, 7, 9:

$$\underset{k\text{-ciparu sk.}}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(k+1)\text{-ciparu sk.}}{\begin{pmatrix} b \\ a+c \\ 2b \\ a+c \\ b \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(k+2)\text{-ciparu sk.}}{\begin{pmatrix} a+c \\ 3b \\ 2a+2c \\ 3b \\ a+c \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(k+3)\text{-ciparu sk.}}{\begin{pmatrix} 3b \\ 3(a+c) \\ 6b \\ 3(a+c) \\ 3b \end{pmatrix}}$$

Ievērojam, ka īpašības „skaitļu, kas beidzas ar 1 vai ar 9, skaits ir vienāds” un „skaitļu, kas beidzas ar 3 vai ar 7, skaits ir vienāds” saglabājas arī pieaugot skaitļa ciparu skaitam. Ievērojam arī, ka skaitļu skaits, kas beidzas ar noteiktu ciparu, ($k+3$)-ciparu skaitļu gadījumā ir tieši trīs reizes lielāks nekā $k+1$ ciparu skaitļu gadījumā. Tāpat ($k+5$)-ciparu *jokaino* skaitļu būs trīs reizes vairāk nekā ($k+3$)-ciparu *jokaino* skaitļu, utt.
Tātad $(k+2m+1)$-ciparu *jokaino* skaitļu $(m \geq 0)$ skaits ar noteiktu pēdējo ciparu būs $3^m \begin{pmatrix} b \\ a+c \\ 2b \\ a+c \\ b \end{pmatrix}$ un kopējais jokaino skaitļu skaits ir $2(a+2b+c)\cdot 3^m$, (1)

bet $(k+2m+2)$-ciparu *jokaino* skaitļu $(m \geq 0)$ skaits ar noteiktu pēdējo ciparu būs $3^m \begin{pmatrix} a+c \\ 3b \\ 2a+2c \\ 3b \\ a+c \end{pmatrix}$ un kopējais *jokaino* skaitļu skaits ir $2(2a+3b+2c)\cdot 3^m$. (2)

Ja $k=1$, tad *jokaino* viencipara skaitļu skaits ir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jeb $a=b=c=1$ un ir spēkā visi iepriekšējie spriedumi.
Ja $n=11$ un $k=1$, tad $m=4$, un pēc formulas (2) iegūstam, ka kopējais *jokaino* 11-ciparu skaitļu skaits ir $2(1+2+1)\cdot 3^4 = 14\cdot 81 = 1134$.
Ja $n=2012$ un $k=1$, tad $m=1005$ un pēc formulas (1) iegūstam, ka kopējais *jokaino* 2012-ciparu skaitļu skaits ir $2(1+2+1)\cdot 3^{1005} = 8\cdot 3^{1005}$.

A.N. LATVIJAS 63. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.N.9. Devītā klase

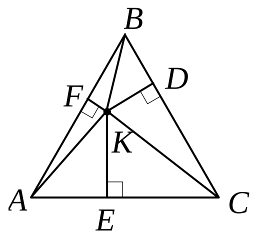
A.N.9.1. *Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kura kvadrāta pēdējie* 9 *cipari ir* 987654321 *?*

Jā, šāds skaitlis eksistē, piemēram, 111111111.

$$\begin{array}{r}
111111111\\
\cdot\ 111111111\\
\hline
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
\hline
12345678987654321
\end{array}$$

A.N.9.2. *Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts K. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta K līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta K izvēles.*

Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra ABC malas garumu ar a un augstumu ar h (skat. A7. zīm.).



A7. zīm.

Aprēķinām ΔABC laukumu divos veidos:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot KD + \frac{1}{2}a \cdot KE + \frac{1}{2}a \cdot KF = \frac{1}{2}a \cdot (KD + KE + KF)$.
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$.

Tā kā abas iegūtās izteiksmes izsaka ΔABC laukumu, tad $\frac{1}{2}a(KD + KE + KF) = \frac{1}{2}ah$ jeb $KD + KE + KF = h$ neatkarīgi no punkta K izvēles.

A.N.9.3. *Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs un laukums izsakās ar vienu un to pašu skaitli. Atrast visus šādus taisnstūrus.*

Ja a un b (pieņemsim, ka $a \geq b$) ir taisnstūra malu garumi, tad no uzdevuma nosacījumiem seko, ka $ab = 2a + 2b$. Pārveidojot vienādību, iegūstam $ab - 2a - 2b + 4 = 4$ jeb $(a-2)(b-2) = 4$. Skaitli 4 ir kā divu naturālu skaitļu reizinājumu var izteikt divos veidos $2 \cdot 2$ un $1 \cdot 4$. Iegūtajam vienādojumam naturālos skaitļos ir divi atrisinājumi:

- $a-2 = b-2 = 2$ jeb $a = b = 4$;
- $a-2 = 4$ un $b-2 = 1$ jeb $a = 6$ un $b = 3$.

Esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst taisnstūri 4×4 un 6×3.

A.N.9.4. *Zināms, ka* $a_1, a_2, ..., a_{2013}$ *ir tādi naturāli skaitļi, ka* $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_{2012} > \sqrt{a_{2013}}$ *un* $a_{2013} > \sqrt{a_1}$. *Aprēķināt mazāko iespējamo summas* $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ *vērtību.*

Tā kā visi a_i, $i = 1, 2, ..., 2013$, ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļa a_i, $i = 1, 2, ..., 2013$, vērtība ir 2. Vērtības $a_1 = a_2 = ... = a_{2013} = 2$ apmierina dotās nevienādības, jo $2 > \sqrt{2} \approx 1{,}4$. Līdz ar to summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ mazākā iespējamā vērtība ir $2 + 2 + ... + 2 = 2 \cdot 2013 = 4026$.

A.N.9.5. *Profesora Cipariņa olimpiādē bija* 3 *uzdevumi. Tajā piedalījās* 100 *skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz* 13 *skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus* (*vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu*).
Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus (skat. A8. zīm., kur ar "+" atzīmēti atrisinātie uzdevumi, ar "-" – neatrisinātie) atrisināto uzdevumu „komplektus" (t.sk., neviens atrisināts uzdevums). Ja katru „komplektu" būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Pēc Dirihlē principa seko, ka ir vismaz 13 skolēni, kas izrēķinājuši vienus un tos pašus uzdevumus, kas arī bija jāpierāda.

uzd. nr.							
1.	+	+	+	+	-	-	-
2.	+	+	-	-	+	+	-
3.	+	-	+	-	+	-	+

A8. zīm.

A.N.10. Desmitā klase

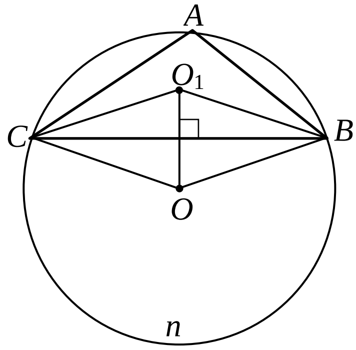
A.N.10.1. *Zināms, ka* $a_1, a_2, ..., a_{10}$ *ir dažādi naturāli skaitļi tādi, ka* $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ *un* $a_{10} > \sqrt{a_1}$. *Aprēķināt mazāko iespējamo summas* $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ *vērtību.*

Tā kā visi a_i $(i = 1, 2, ..., 10)$ ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 2. Ievērojam, ka $n > \sqrt{n+1}$, kur $n \geq 2$ – naturāls skaitlis, tad vērtības $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 8$, $a_8 = 9$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 11$ apmierina dotās nevienādības. Tā kā tie ir mazākie dažādie naturālie skaitļi, kas apmierina dotās nevienādības, tad summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ mazākā iespējamā vērtība ir

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 65.$$

A.N.10.2. *Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un ievilktās riņķa līnijas centri ir simetriski attiecībā pret vienu no trijstūra ABC malām. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus.*

Tā kā ΔABC apvilktās un ievilktās riņķa līniju centri ir simetriski pret vienu no trijstūra malām (apzīmēsim to ar *BC*; skat. A9. zīm.), tad viens no tiem atrodas ΔABC iekšpusē, bet otrs – ārpusē. Tā kā ievilktās riņķa līnijas centrs O_1 vienmēr atrodas trijstūra iekšpusē, tad apvilktās riņķa līnijas centrs *O* atrodas ΔABC ārpusē. Ja trijstūra apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra ārpusē, tad trijstūris ir platleņķa. Tātad ΔABC ir platleņķa.



A9. zīm.

Trijstūris *BOC* ir vienādsānu, jo $OC = OB$ kā apvilktās riņķa līnijas rādiusi. Apzīmēsim $\angle OCB = \angle OBC = x$. Tad $\angle BOC = 180° - 2x = \cup BAC$.

Tā kā O_1 ir simetrisks *O* attiecībā pret taisni *BC*, tad $\angle O_1BC = \angle OBC = x$ un $\angle O_1CB = \angle OCB = x$.

Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā, tāpēc $\angle CBO_1 = \angle O_1BA = x$ un $\angle BCO_1 = \angle O_1CA = x$.

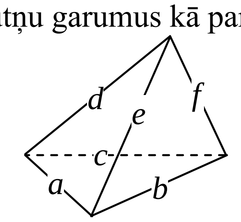
Apskatām ΔABC leņķus:

- $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BnC = \frac{1}{2}(360° - (180° - 2x)) = 90° + x$,
- $\angle ACB = \angle CBA = 2x$.

Tad $90° + x + 2x + 2x = 180°$ jeb $5x = 90°$ un $x = 18°$. Tātad $\angle ACB = \angle CBA = 36°$, $\angle BAC = 108°$.

A.N.10.3. *Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurai katras skaldnes perimetrs ir* 2013 *un kurai nav vienāda garuma šķautņu?*

Apzīmēsim piramīdas šķautņu garumus kā parādīts A10. zīm.



A10. zīm.

Pieņemsim, ka *a, b, c, d, e, f* ir dažādi skaitļi. Tā kā visu skaldņu perimetriem jābūt vienādiem ($a + d + e = a + c + b = e + b + f = c + d + f$), tad

$$\begin{cases} a + b = d + f \\ a + c = e + f \\ b + c = d + e \end{cases}.$$

Saskaitot pirmos divus vienādojumus un atņemot trešo vienādojumu, iegūstam $2a = 2f$ jeb $a = f$ – pretruna. Tātad neeksistē tāda trijstūra piramīda, kurai katras skaldnes perimetrs ir 2013 un kurai nav vienāda garuma šķautņu.

A.N.10.4. *Ansītis aprēķināja skaitļu* 2^{2013} *un* 5^{2013} *vērtības un iegūtos skaitļus uzrakstīja vienu aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?*

Ar n apzīmēsim skaitļa 2^{2013} ciparu skaitu, bet ar m – skaitļa 5^{2013} ciparu skaitu. Tad $10^{n-1} < 2^{2013} < 10^n$ un $10^{m-1} < 5^{2013} < 10^m$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam $10^{n+m-1} < 10^{2013} < 10^{n+m}$. Tātad $n+m-2 < 2013 < n+m$ un vienīgā iespējamā $n+m$ vērtība (t. i., uzrakstīto ciparu skaits) ir 2014.

A.N.10.5. *Doti* 7 *dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz* 21. *Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļu pārus, kuru starpības ir vienādas.* (*Skaitļu pāriem var būt arī kopīgs skaitlis, starpību aprēķina no lielākā skaitļa atņemot mazāko.*)

No septiņiem dažādiem skaitļiem var izveidot $(6 \cdot 7):2 = 21$ dažādus pārus. Dotie skaitļi ir dažādi, pie tam nav mazāki kā 1 un nav lielāki kā 21, tāpēc divu šādu skaitļu starpības vērtība ir vismaz 1 un nepārsniedz $21-1=20$. Tā kā starpības var pieņemt tikai 20 dažādas vērtības, bet pavisam var izveidot 21 dažādu skaitļu pāri, tad vismaz divu pāru skaitļu starpības būs vienādas, kas arī bija jāpierāda.

A.N.11. Vienpadsmitā klase

A.N.11.1. *Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu* $(x-y)(x+y) = x$.

Pārveidosim vienādojumu formā $x(x-1) = y^2$.

Ja $x=0$ vai $x=1$, tad $y=0$ un atrisinājums eksistē.

Pieņemsim, ka $x>1$. Tad ir spēkā stingrā nevienādība $(x-1)^2 < x(x-1) < x^2$.

Tā kā $x(x-1)$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdzīgi, ja $x<0$, tad ir spēkā stingrā nevienādība

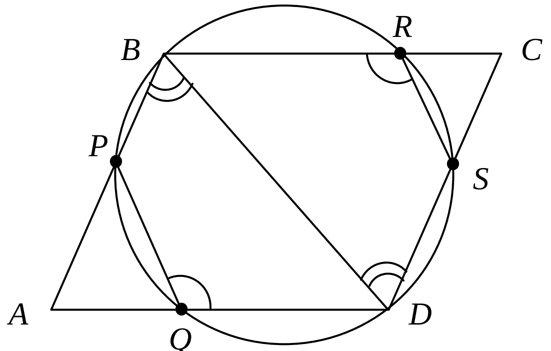
$$x^2 < x(x-1) < (x-1)^2.$$

Tātad arī šajā gadījumā $x(x-1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdz ar to dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi $(0;0)$ un $(1;0)$.

A.N.11.2. *Caur paralelograma ABCD virsotnēm B un D ir novilkta riņķa līnija, kas krusto malas AB, DA, BC un CD attiecīgi to iekšējos punktos P, Q, R un S. Pierādīt, ka* $PQ \parallel RS$.

Novelkam diagonāli *BD* un apzīmējam $\angle PQD = \alpha$ (skat. A11. zīm.).



A11. zīm.

Tā kā četrstūris *PQDB* ir ievilkts riņķa līnijā, tad $\angle PBD = 180° - \angle PQD = 180° - \alpha$.

No tā, ka *ABCD* ir paralelograms un $AB \parallel CD$ seko, ka $\angle SDB = \angle PBD = 180° - \alpha$.

Četrstūris *SRBD* arī ir ievilkts riņķa līnijā, tāpēc

$$\angle SRB = 180° - \angle SDB = 180° - (180° - \alpha) = \alpha .$$

Ievērojam, ka taisnes *PQ* un *RS* veido vienādus leņķus α ar paralēlām taisnēm *AD* un *BC*, tāpēc tās arī ir paralēlas, kas arī bija jāpierāda.

A.N.11.3. *Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviru svari bez atsvariem. Četras no monētām sver* 10 *gramus katra, pārējās divas sver* 9 *gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast vismaz vienu monētu, kas sver* 9 *gramus?*

Var rīkoties, piemēram, šādi. Pirmajā svēršanā katrā svaru kausā novieto trīs monētas.

Turpmākā rīcība ir atkarīga no pirmās svēršanas rezultāta:

- Ja svari ir līdzsvarā, tad katra 9 g smagā monēta ir savā kausā.
    - Otrā svēršana. Izvēlas divas monētas no viena kausa un katru novieto uz sava svaru kausa. Ja to masas ir vienādas, tad nesvērtā monēta no šī kausa sver 9 g; ja nē, tad vieglākā no tām sver 9 g.
- Ja pirmajā svēršanā viens svaru kauss (apzīmēsim to ar *A*) bija vieglāks, tad abas 9 g monētas ir šajā svaru kausā.
    - Otrā svēršana. Izvēlas divas monētas no kausa *A* un katru no vieto uz sava svaru kausa. Ja svari ir līdzsvarā, tad atrastas abas 9 g monētas, pretējā gadījumā vieglākā no tām sver 9 gramus.

A.N.11.4. *Polinoms* $P(x)$ *ar veseliem koeficientiem četrām veselām x vērtībām pieņem vērtību* 2000. *Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību* 2013.

Polinoma vērtības, pie kurām polinoma $P(x)$ pieņem vērtību 2000, apzīmēsim ar *a*, *b*, *c*, *d*. Apzīmēsim $F(x) = P(x) - 2000$. Tādā gadījumā *a*, *b*, *c*, *d* ir polinoma $F(x)$ saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)R(x)$.

Ja $P(n) = 2013$, tad

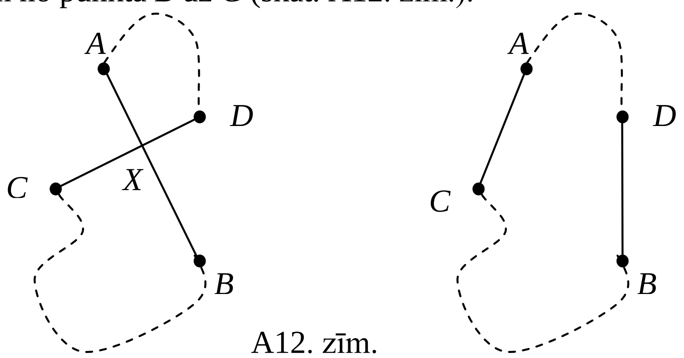
$$F(n) = P(n) - 2000 = 2013 - 2000 = 13 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)R(n).$$

Taču skaitli 13 nevar izteikt kā vismaz 4 dažādu veselu skaitļu reizinājumu.

Tātad nav tādas veselas *x* vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2013.

A.N.11.5. *Plaknē doti* $n \geq 3$ *patvaļīgi izvietoti punkti. Zināms, ka nekādi* 3 *no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka eksistē tāds n-stūris* (*iespējams, ieliekts*), *kura virsotnes atrodas šajos punktos. Daudzstūra malas nedrīkst krustoties.*

Aplūkosim visas iespējamās slēgtās lauztās līnijas, kas katra sastāv no n posmiem un visi tās n lauzuma punkti ir dotajos punktos. Pierādīsim, ka no tām lauztā līnija ar vismazāko perimetru ir meklētais n-stūris. Pieņemsim pretējo, ka šādai lauztai līnijai kādi divi posmi AB un CD krustojas punktā X, pie tam lauztā līnija turpinās no punkta A uz D un no punkta B uz C (skat. A12. zīm.).



A12. zīm.

Izdzēšam nogriežņus AB un CD, un uzzīmējam nogriežņus AC un BD. Pierādīsim, ka lauztās līnijas perimetrs samazinājās.
No trijstūra nevienādības seko, ka $AC < AX + XC$ un $BD < BX + XD$. Tāpēc $AC + BD < (AX + XC) + (BX + XD) = (AX + BX) + (XC + XD) = AB + CD$ un jaunās lauztās līnijas perimetrs ir mazāks nekā iepriekšējās, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

A.N.12. Divpadsmitā klase

A.N.12.1. *Zināms, ka a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka*

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{1}{4(a+b)}.$$

Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{1}{4(a+b)}$; – reizinām ar 2

$a + b - \frac{1}{2(a+b)} > 2\sqrt{ab}$; – kāpinām abas nevienādības puses kvadrātā (tā kā $a+b$ ir naturāls skaitlis, tad $a + b > \frac{1}{2(a+b)}$ un $a + b - \frac{1}{2(a+b)} > 0$);

$(a+b)^2 - 1 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 4ab$;

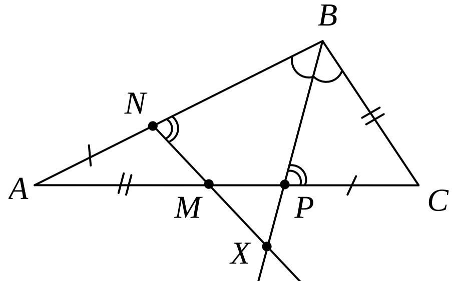
$(a+b)^2 - 4ab + \frac{1}{4(a+b)^2} > 1$;

$(a-b)^2 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 1$.

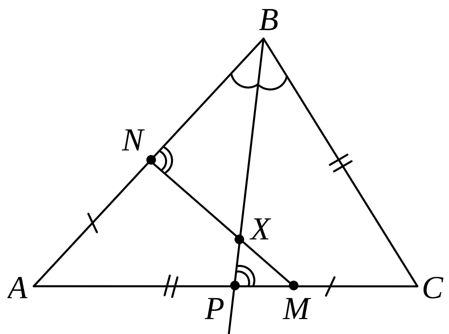
Tā kā a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi, tad $(a-b)^2 \geq 1$ un $\frac{1}{4(a+b)^2} > 0$, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā doto nevienādību ekvivalenti pārveidojām un ieguvām patiesu nevienādību, tad visas iepriekšējās (arī dotā) nevienādības ir patiesas, kas arī bija jāpierāda.

A.N.12.2. *Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC iekšēji punkti tādi, ka* $AN = PC$ *un* $AM = BC$*. Taisnes BP un MN krustojas punktā X. Pierādīt, ka* $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

No bisektrises īpašības iegūstam $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$. Tā kā $AM = BC$ un $AN = PC$, tad ir spēkā $\frac{AB}{AP} = \frac{AM}{AN}$. Tāpēc $\Delta ABP \sim \Delta AMN$. No tā seko, ka $\angle ANM = \angle APB$. Savukārt $\angle BNX = 180° - \angle ANM$ un $\angle BPC = 180° - \angle APB$, tāpēc $\angle BNX = \angle BPC$. Tā kā BP ir ΔABC bisektrise, tad $\angle NBX = \angle PBC$. Tātad $\Delta NBX \sim \Delta PBC$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$").



A13. zīm.



A14. zīm.

Piezīme. Punkts *M* var atrasties dažādās pusēs no *P*, kā arī sakrist ar to. Tomēr tas neietekmē uzdevuma risinājumu (piemēram, skat. A13. un A14. zīm.).

A.N.12.3. *Dots, ka* $n > 1$ *ir tāds naturāls skaitlis, kas, dalot ar* 7*, dod atlikumu* 1*. Pierādīt, ka skaitļa* $n^2 + 3n + 3$ *visi pirmreizinātāji ir mazāki nekā* n^2.

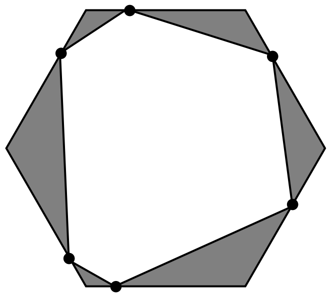
Ievērosim, ka $n^2 + 3n + 3 \equiv 1^2 + 3 + 3 \equiv 0 \pmod 7$. Tātad skaitlis $n^2 + 3n + 3$ dalās ar 7 un tā pirmreizinātāji var būt tikai skaitlis 7 un pirmskaitļi, kas nepārsniedz $\frac{n^2 + 3n + 3}{7}$. Pamatosim, ka $7 < n^2$ un $\frac{n^2 + 3n + 3}{7} < n^2$.

Tā kā $n \equiv 1 \pmod 7$ un $n > 1$, tad $8n \geq 8$. Taču tad $n^2 \geq 8^2 > 7$.

Nevienādība $\frac{n^2 + 3n + 3}{7} < n^2$ ir ekvivalenta nevienādībai $n^2 + 3n + 3 < 7n^2$ jeb $2n^2 - n - 1 > 0$.

Ievērojam, ka funkcija $f(x) = 2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$ pieņem tikai pozitīvas vērtības intervālā $(1; +\infty)$, tātad $2n^2 - n - 1 > 0$ visiem naturāliem skaitļiem $n > 1$.

A.N.12.4. *Dots regulārs sešstūris ar malas garumu* 1. *Uz katras malas ir patvaļīgi izvēlēts viens punkts* (*skat.* 3. *zīm.*). *Pierādīt, ka vismaz viena iekrāsotā trijstūra laukums nepārsniedz* $\frac{\sqrt{3}}{16}$.



3. zīm.

Sauksim par doto sešu trijstūru sānu malām tās malas, kas atrodas uz sešstūra malām. Aplūkosim šo trijstūru abu sānu malu garumu summas. Tā kā dotā sešstūra perimetrs ir vienāds ar 6, no Dirihlē principa seko, ka vismaz viena šāda summa nav lielāka kā 1 (jo visas trijstūru sānu malas pilnībā nosedz visas sešstūra malas). Apzīmēsim šo trijstūri ar Δ un tā sānu malas ar *a* un *b*, tad $a+b \le 1$. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko:

$$2\sqrt{ab} \le a+b \le 1;$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{1}{2};$$

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$ab \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Trijstūra Δ laukumu var aprēķināt pēc formulas $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, kur α ir leņķis starp malām *a* un *b*. Tā kā dots regulārs sešstūris, tad $\alpha = 120°$. Tāpēc trijstūra laukums ir vienāds ar

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin 120° = \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab. \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka trijstūra Δ laukums nav lielāks kā $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$, kas arī bija jāpierāda.

A.N.12.5. *Parlamentā ir* 2013 *deputāti; katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d* ($0 \le d \le 2012$) *citiem deputātiem. Domstarpības ir abpusējas: ja A ir domstarpības ar B, tad arī B ir domstarpības ar A. Pierādīt, ka deputātus var sadalīt* $d+1$ *komisijā tā, lai nekādiem diviem vienas komisijas locekļiem nebūtu domstarpību savā starpā.*

Pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu: ja parlamentā ir *n* deputāti un katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā *d* citiem deputātiem, kur $0 \le d \le n$, tad deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai vienas komisijas nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā. Tādā gadījumā uzdevumā prasītais sekos no pierādītā apgalvojuma, ja $n = 2013$. Pierādāmo apgalvojumu pamatosim ar matemātisko indukciju pēc *n*.

Indukcijas bāze. Ja $n = d+1$, tad katrā no $d+1$ komisijām iekļaujam tieši vienu deputātu. Tad starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā, jo deputātam nevar būt domstarpības pašam ar sevi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka gadījumā, ja parlamentā ir *n* deputāti, tad viņus var sadalīt vajadzīgajā veidā.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka parlamentā ir $n+1$ deputāts; parādīsim, ka arī tad viņus var sadalīt $d+1$ komisijā vajadzīgajā veidā.

Izvēlamies patvaļīgu deputātu A. Atlikušos *n* deputātus sadala $d+1$ komisijā tā, lai starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā (ko var izdarīt, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu). Deputātam A ir domstarpības ar ne vairāk kā *d* citiem deputātiem, taču izveidota $d+1$ komisija. Tas nozīmē, ka ir vismaz viena tāda komisija, ka A nav domstarpību ne ar vienu šīs komisijas deputātu. Tad A varam iekļaut šajā komisijā, līdz ar ko arī $n+1$ deputāts ir sadalīts $d+1$ komisijā vajadzīgajā veidā. Induktīvā pāreja ir izdarīta, tātad apgalvojums ir pierādīts.

A.V. LATVIJAS 63. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.V.9. Devītā klase

A.V.9.1. *Atrast tādas ciparu a, b, c, d vērtības, lai izpildītos vienādība*

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013.$$

(*Pieraksts* $\overline{xyzt}$ *nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir x tūkstoši, y simti, z desmiti un t vieni.*)

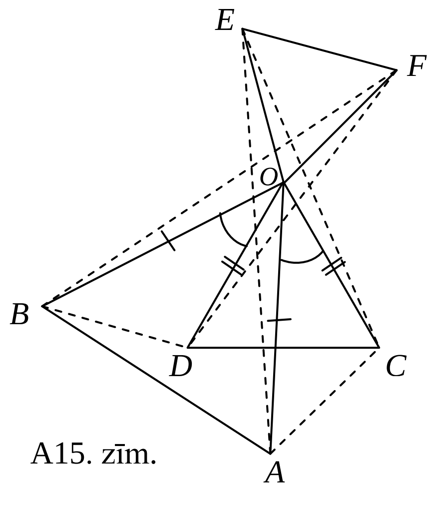
Ja $a = 2$, tad $\overline{2bcd} + \overline{2bc} + \overline{2b} + 2 > 2200 > 2013$. Tātad $a = 1$. Lai summas simtu cipars būtu 0, tad $b = 9$ vai $b = 8$, jo lielākais pārnesums no desmitu pozīcijas ir 1. Vērtība $b = 9$ neder, jo tad summā veidotos pārnesums no desmitu pozīcijas un simtu pozīcijā būtu cipars, kas lielāks ir nekā 0. Tātad $b = 8$.
Ievietojam iegūtās *a* un *b* vērtības dotajā vienādībā:

$$\overline{18cd} + \overline{18c} + 18 + 1 = 2013;$$
$$1800 + 10c + d + 180 + c + 18 + 1 = 2013;$$
$$1999 + 11c + d = 2013;$$
$$11c + d = 14.$$

Tātad $c = 1$, $d = 3$ un $\overline{abcd} = 1813$.

A.V.9.2. *Doti trīs regulāri trijstūri* OAB, OCD *un* OEF (*virsotnes norādītas pulksteņrādītāja kustības virzienā*), *kuru malu garumi var atšķirties. Punkti A, C, E neatrodas uz vienas taisnes; punkti B, D, F arī neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka* $\Delta ACE = \Delta BDF$.

Ievērojam, ka $\angle BOC = \angle BOD + \angle DOC = \angle BOD + 60° = 60° + \angle AOC$ (skat. A15. zīm.). Tāpēc $\angle BOD = \angle AOC$. Līdz ar to $\Delta BOD = \Delta AOC$ (pēc pazīmes "$m\ell m$"), jo $BO = AO$, $\angle BOD = \angle AOC$ un $DO = CO$. Tad $BD = AC$, jo vienādos trijstūros pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas. Līdzīgi no $\Delta DOF = \Delta COE$ un $\Delta BOF = \Delta AOE$ secinām, ka arī $DF = CE$ un $FB = EA$, tāpēc $\Delta ACE = \Delta BDF$ (pēc pazīmes "mmm").



A15. zīm.

A.V.9.3. *Dota virkne* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *kur* $a_1 = a_2 = 1$ *un visiem* $n > 2$ *izpildās*

$$a_{n+1} = \left[\frac{2a_n + a_{n-1}}{3}\right] + 4.$$

Aprēķināt a_{2013}.
($[x]$ *ir veselā daļa no x – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x; piemēram,* $[3] = 3$, $[4{,}6] = 4$, $[0{,}2] = 0$ *u.tml.*)

Aplūkojam virknes pirmos locekļus:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \left[\frac{2\cdot 1+1}{3}\right] + 4 = 5,\ a_4 = \left[\frac{2\cdot 5+1}{3}\right] + 4 = 7,$$

$$a_5 = \left[\frac{2\cdot 7+5}{3}\right] + 4 = 10,\ a_6 = \left[\frac{2\cdot 10+7}{3}\right] + 4 = 13,\ a_7 = \left[\frac{2\cdot 13+10}{3}\right] + 4 = 16.$$

Ievērojam, ka visiem $i \geq 4$ izpildās vienādība $a_i = 3i - 5$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Indukcijas bāze. Ja $i = 4$, tad $a_4 = 3\cdot 4 - 5 = 7$, un ja $i = 5$, tad $a_5 = 3\cdot 5 - 5 = 10$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem $k < n$ ir spēkā $a_k = 3k - 5$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka arī $a_n = 3n - 5$.

$$a_n = \left[\frac{2\cdot a_{n-1} + a_{n-2}}{3}\right] + 4 = \left[\frac{2\cdot(3(n-1)-5) + 3(n-2) - 5}{3}\right] + 4 =$$

$$= \left[\frac{2\cdot(3n-8) + 3n - 11}{3}\right] + 4 = \left[\frac{9n-27}{3}\right] + 4 = 3n - 9 + 4 = 3n - 5.$$

No matemātiskās indukcijas metodes seko, ka apgalvojums pierādīts visiem $n \geq 4$.
Tātad $a_{2013} = 3\cdot 2013 - 5 = 6034$.

A.V.9.4. *Divas komandas savā starpā izspēlējušas vairākas* (*vairāk nekā vienu*) *spēles. Par zaudējumu komanda saņem n punktus* (*n – naturāls skaitlis*), *bet par uzvaru* $n+3$ *punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Pēc spēļu beigām izrādījās, ka vienai komandai ir par vienu uzvaru vairāk nekā otrai. Zināms, ka viena no komandām kopsummā ieguva* 92 *punktus. Cik punktus ieguva otra komanda?*

Ja pieņemam, ka komanda-zaudētāja izcīnījusi a uzvaras, tad komanda-uzvarētāja izcīnījusi $a+1$ uzvaru. Kopējais punktu skaits:

- komandai-zaudētājai ir $a(n+3) + (a+1)n = 2an + 3a + n$;
- komandai-uzvarētājai $(a+1)(n+3) + an = 2an + 3a + n + 3$.

Pierādīsim, ka komanda-uzvarētāja nevarēja izcīnīt 92 punktus. Ja tā tomēr būtu bijis, tad $2an + 3a + n + 3 = 92$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis a, ka $n = \dfrac{89-3a}{2a+1}$ ir naturāls skaitlis. Tā kā $a \geq 1$ un $n \geq 1$, tad

$$89 - 3a \geq 2a + 1 \quad \Rightarrow \quad 5a \leq 88 \quad \Rightarrow \quad a \leq 17\frac{3}{5}.$$

Līdz ar to pieļaujamās a vērības ir $1 \le a \le 17$. Aplūkosim skaitītāja un saucēja vērtību katrai no šīm vērtībām:

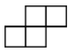
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
89-3a	86	83	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38
2a+1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

Kā redzams, nevienai no pieļaujamajām a vērtībām daļas vērtība nav naturāls skaitlis. Tātad komanda-uzvarētāja nevar būt ieguvusi 92 punktus.

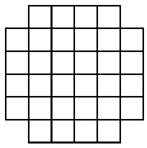
Pārbaudīsim, vai komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus. Tad $2an + 3a + n = 92$ un $n = \dfrac{92 - 3a}{2a + 1}$. Ja $a = 5$, tad $n = 7$, vai ja $a = 8$, tad $n = 4$, tātad komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus.

Tā kā komanda-uzvarētāja ieguva par 3 punktiem nekā komanda-zaudētāja, tad otra komanda (uzvarētāja) ieguva 95 punktus.

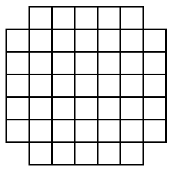
A.V.9.5. *Kādu lielāko skaitu 4. zīm. attēloto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta* $n \times n$*, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas:* ***a)*** *ja* $n = 6$ *(skat. 5. zīm.),* ***b)*** *ja* $n = 7$ *(skat. 6. zīm.). Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 1. zīm. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.*



4. zīm.

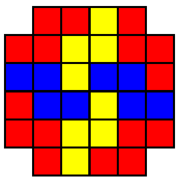


5. zīm.

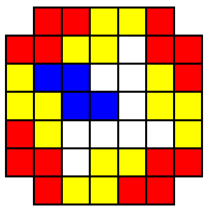


6. zīm.

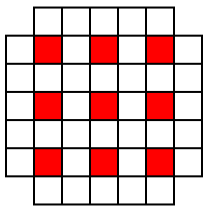
a) Lielākais figūru skaits figūru skaits, ko var izgriezt, ir 8 (skat., piemēram, A16. zīm.).
b) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9 (skat., piemēram, A17. zīm.).



A16. zīm.



A17. zīm.



A18. zīm.

Pierādīsim, ka nav iespējams izgriezt 10 figūriņas. Izkrāsosim pārklājamo figūru kā parādīts A18. zīm. Tad, lai arī kā tiktu ievietota figūriņa, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tātad, ja varētu izgriezt 10 figūriņas, tās pārklātu 10 iekrāsotās rūtiņas, bet ir tikai 9 – pretruna.

A.V.10. Desmitā klase

A.V.10.1. *Pierādīt, ka vienādojumam* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$ *nav atrisinājuma naturālos skaitļos.*

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{ab-2(a+b)}{2ab};$$

$$(a^2+b^2)(ab-2(a+b))=2ab.$$

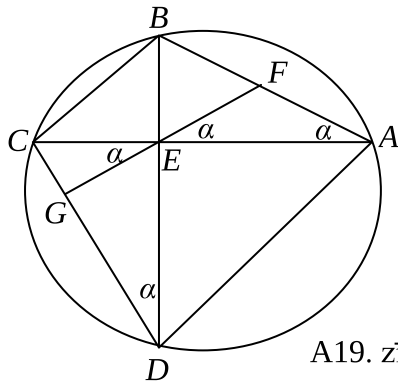
Lai vienādojumam būtu atrisinājums naturālos skaitļos, nepieciešams, lai $ab-2(a+b)\geq 1$. Tādā gadījumā jāizpildās nevienādībai $a^2+b^2\leq 2ab$ jeb $(a-b)^2\leq 0$. Tas iespējams tikai tad, ja $a=b$. Līdz ar to iegūstam vienādojumu $\frac{2}{a}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{2}$. Tā kā $\frac{2}{a}<\frac{1}{2}$, tad $a\geq 5$. Bet tādā gadījumā ir spēkā novērtējums:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{2a^2}\leq\frac{2}{5}+\frac{1}{50}=\frac{21}{50}<\frac{1}{2}.$$

Tātad esam ieguvuši, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

A.V.10.2. *Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles AC un BD ir perpendikulāras un krustojas punktā E. Malas AB viduspunkts ir F. Pierādīt, ka* $EF\perp CD$.

Apzīmējam $\angle BAE=\angle BDC=\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka *BC* (skat. A19. zīm.). Taisnleņķa trijstūra *ABE* hipotenūzas viduspunkts vienlaikus ir šim trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs. Tāpēc ΔAFE ir vienādsānu un $\angle AEF=\alpha$. Tā kā krustleņķi ir vienādi, tad $\angle CEG=\angle AEF=\alpha$. No taisnleņķa trijstūra *DEC* seko, ka $\angle DCE=90°-\alpha$. Savukārt trijstūrī *CGE* $\angle CGE=180°-\angle GCE-\alpha=180°-(90°-\alpha)-\alpha=90°$ jeb $EF\perp CD$, kas arī bija jāpierāda.



A19. zīm.

A.V.10.3. *Funkcija* $f(x)=(x+10)x(x-1)(x-11)$ *definēta visām reālām x vērtībām. Atrast mazāko iespējamo* $f(x)$ *vērtību.*

Pārveidojam funkcijas f izteiksmi:

$$f(x)=(x^2-x)(x^2-x-110)=((x^2-x-55)+55)((x^2-x-55)-55)=$$
$$=(x^2-x-55)^2-3025.$$

Visām x vērtībām $(x^2 - x - 55)^2 \geq 0$, tātad $f(x) \geq -3025$.

Kvadrātvienādojuma $x^2 - x - 55 = 0$ diskriminants $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-55) = 221 > 0$, tāpēc eksistē tāda reāla x vērtība, ka $(x^2 - x - 55)^2 = x^2 - x - 55 = 0$, tātad mazākā iespējamā $f(x)$ vērtība ir (-3025).

A.V.10.4. *Dota Fibonači skaitļu virkne* $x_1 = x_2 = 1$, $x_{i+2} = x_i + x_{i+1}$. *Pierādīt, ka šajā virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav naturāla skaitļa kvadrāti.*

Apskatām, kādi atlikumi rodas, ja Fibonači virknes locekļus atlikumus dala ar 3. Iegūstam atlikumu virkni:

$$\underline{1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0}, 1, 1, 2, \ldots$$

Atlikumu virkne ir periodiska (periods ir pasvītrots). Tātad virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas dod atlikumu 2, dalot tos ar 3.
Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 3, var dot atlikumu tikai 0 vai 1:

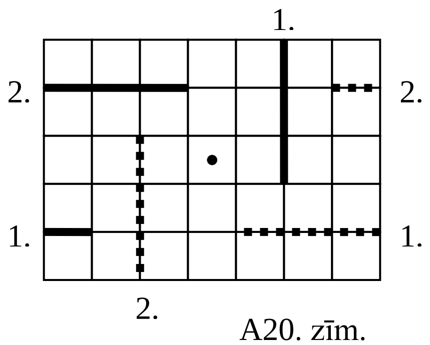
- ja $n = 3k$, tad $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2 + 0$;
- ja $n = 3k + 1$, tad $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$;
- ja $n = 3k + 2$, tad $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1$.

Tātad Fibonači virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu (tie, kas dod atlikumu 2, dalot tos ar 3), kas nav naturālu skaitļu kvadrāti.

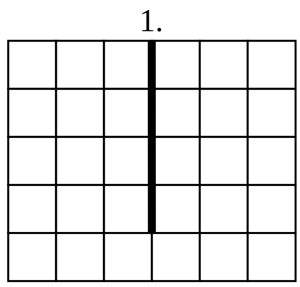
A.V.10.5. *Dota rūtiņu lapa ar izmēriem* $n \times m$ (*n, m – naturāli skaitļi*) *rūtiņas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli, pēc kārtas izdarot pa vienam gājienam. Ar vienu gājienu atļauts veikt taisnu griezienu, kas sākas kādā lapas malā un iet pa rūtiņu malām, pie tam griezuma garumam jābūt naturālam skaitlim. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena lapa tiek sagriezta divos atsevišķos gabalos. Kādām n un m vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs, un kad – otrais* (*spēli vienmēr sāk pirmais spēlētājs*)*?*

Šķirosim divus gadījumus:

1. Skaitļi n un m abi ir nepāra. Šajā gadījumā 2. spēlētājs vienmēr var veikt griezumu, kas ir simetrisks 1. spēlētāja pēdējam griezumam attiecībā pret lapas centru (skat., piem., A20. zīm.). Tāpēc šajā gadījumā uzvar 2. spēlētājs.



A20. zīm.



A21. zīm.

2. Vismaz viens no skaitļiem n vai m ir pāra. Tad 1. spēlētājs pirmajā gājienā veic visgarāko iespējamo griezumu pa vidu malā ar pāra garumu (skat. A21. zīm.). Tālāk 1. spēlētājs var pielietot **1.** gadījuma otrā spēlētāja simetrisko stratēģiju attiecībā pret pirmajā gājienā izdarīto griezumu. Tāpēc šajā gadījumā uzvar 1. spēlētājs.

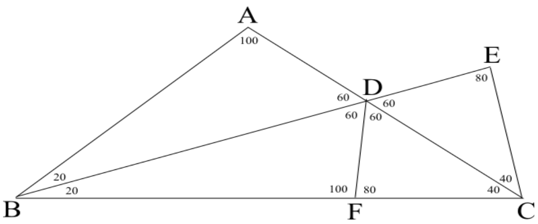
A.V.11. Vienpadsmitā klase

A.V.11.1. *Pierādīt, ka nav tādas naturālas n vērtības, ka* $n^2+4n+16$ *dalās ar* 36.

Pieņemsim pretējo, ka šāda n vērtība eksistē. Tad $n^2+4n+16=36k$ jeb $(n+2)^2+12=36k$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 12 un 12 dalās ar 12, tad arī $(n+2)^2$ jādalās ar 12. Lai $(n+2)^2$ dalītos ar 12, skaitlim $(n+2)$ ir jādalās ar 6. Savukārt, ja $(n+2)$ dalās ar 6, tad $(n+2)^2$ dalās ar 36. Tātad iegūstam sakarību $36m+12=36k$, kur k un m ir naturāli skaitļi. Taču tādas k un m vērtības neeksistē, tātad nav tādu n vērtību, ka $n^2+4n+16$ dalās ar 36.

A.V.11.2. *Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram* $AB=AC$ *un* $\angle BAC=100°$. *Leņķa ABC bisektrise krusto malu AC punktā D. Pierādīt, ka* $AD+BD=BC$.

Tā kā ΔABC ir vienādsānu trijstūris, tad $\angle ACB=\angle ABC=\dfrac{180°-\angle BAC}{2}=40°$ (skat. A22. zīm.). Nogrieznis BD ir bisektrise, tāpēc $\angle ABD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=20°$ un $\angle ADB=180°-\angle ABD-\angle BAD=180°-20°-100°=60°$.



A22. zīm.

Atliekam punktu *F*, kas ir simetrisks punktam *A* attiecībā pret taisni *BD*. Tad trijstūri *ABD* un *FBD* ir vienādi (simetriski attiecībā pret taisni *BD*), tāpēc to atbilstošie elementi ir vienādi:

$$AD=DF,\ \angle BDA=\angle BDF=60°,\ \angle BAD=\angle BFD=100°.$$

No ΔFDC seko, ka

- $\angle FDC=180°-\angle ADB-\angle BDF=60°$;
- $\angle DFC=180°-\angle BFD=80°$.

Konstruēsim trijstūrim *DFC* simetrisku trijstūri *DEC* attiecībā pret taisni *DC*. Šo trijstūri atbilstošie elementi ir vienādi: $\angle CDE=\angle CDF=60°$, $\angle DEC=\angle DFC=80°$, $\angle ECD=\angle FCD=40°$, $DE=DF$.

Tā kā $\angle BDE=\angle BDF+\angle FDC+\angle CDE=180°$, tad punkti *B*, *D* un *E* atrodas uz vienas taisnes. Tā kā $\angle BEC=\angle BCE=80°$, tad trijstūris *BEC* ir vienādsānu un $BE=BC$. Tad iegūstam

$$BC=BE=BD+DE=BD+DF=BD+AD,$$

kas arī bija jāpierāda.

A.V.11.3. *Vienādojuma* $x^3-44x^2+623x-2860=0$ *saknes ir taisnstūra paralēlskaldņa malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu un tilpumu.*

Apzīmēsim taisnstūra paralēlskaldņa šķautņu garumus ar *a*, *b*, un *c* (tās ir arī dotā vienādojuma saknes). Tad doto vienādojumu var pārrakstīt formā $(x-a)(x-b)(x-c)=0$. Atverot iekavas, iegūstam

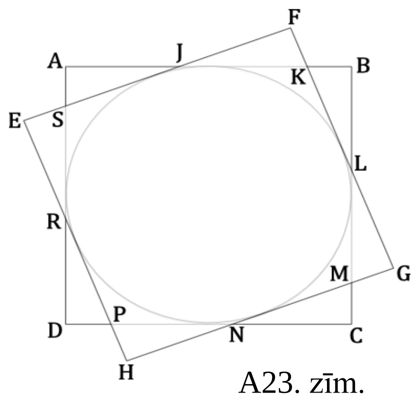
$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)-abc.$$

Ievērojam, ka dotajā vienādojumā koeficients pie *x* ir vienāds ar pusi no taisnstūra paralēlskaldņa pilnas virsmas laukuma, tātad pilnas virsmas laukums ir

$2\cdot 623=1246$ cm^2. Savukārt taisnstūra paralēlskaldņa tilpums ir vienāds ar abc, kas ir vienādojuma brīvais loceklis ar pretējo zīmi, tātad paralēlskaldņa tilpums ir 2860 cm^2.

A.V.11.4. *Diviem vienādiem kvadrātiem ar malas garumu* 40 *cm ir kopīgs centrs. Vai abu kvadrātu kopīgās daļas laukums noteikti ir lielāks nekā* ***a)*** $1250cm^2$, ***b)*** $1300cm^2$*?*

a) Tā kā abiem kvadrātiem centri sakrīt, tiem abiem ir kopīgs tajos ievilktais riņķis, kura rādiusa garums ir 20 cm (skat. A23. zīm.). Ievilktā riņķa laukums ir $400\pi\ \text{cm}^2 > 400\cdot 3{,}14\,\text{cm}^2 = 1256\,\text{cm}^2 > 1250\,\text{cm}^2$. Tātad kvadrātu kopīgās daļas laukums noteikti ir lielāks nekā 1250 cm^2.



A23. zīm.

b) Ja kvadrāti nesakrīt, tad ārpus kopīgās daļas veidojas astoņi vienādi taisnleņķa trijstūri *AJS*, *JFK*, *BKL*, *LMG*, *CMN*, *PHN*, *DPR* un *ERS*. Kvadrātu kopīgā daļa būs mazākā iespējamā, ja šo trijstūru laukums būs lielākais iespējamais. Apzīmējot $AJ = JF = x$ un $FK = KB = y$, iegūstam, ka

$$AB = AJ + JK + KB;$$

$$40 = x + \sqrt{x^2 + y^2} + y;$$

$$40 - (x + y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$1600 - 80(x + y) + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2;$$

$$y = 40\cdot\frac{20 - x}{40 - x}.$$

Tātad nepieciešams atrast tādu x vērtību, lai $xy = 40x\cdot\frac{20 - x}{40 - x}$ vērtība būtu maksimāla. Ne *x*, ne *y* vērtība nevar pārsniegt pusi no kvadrāta malas garuma, t. i., $20\,\text{cm}$. Pārveidojam izteiksmi xy:

$$40x\frac{20 - x}{40 - x} = 40\left(\frac{x^2 - 20x}{x - 40}\right) = 40\left(\frac{(x - 40)(x + 20) + 800}{x - 40}\right) =$$

$$= 40\left(x + 20 + \frac{800}{x - 40}\right) = 40\left(60 + x - 40 + \frac{800}{x - 40}\right) =$$

$$= 2400 + 40\left(x - 40 + \frac{800}{x - 40}\right) = 2400 - 40\left(40 - x + \frac{800}{40 - x}\right).$$

Apzīmējot $40 - x = p$ ($p > 0$), no sakarībām starp aritmētisko un ģeometrisko vidējo iegūst $p + \frac{a}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{a}{p}} = 2\sqrt{a}$.

Izmantojot šo sakarību, iegūstam, ka maksimālā xy vērtība ir tad, ja $40 - x + \frac{800}{40 - x} = 2\sqrt{800}$. Tātad mazākais iespējamais kvadrātu kopīgās daļas laukums ir

$$1600 - 2xy = 1600 - 2(2400 - 40 \cdot 2\sqrt{800}) = 1600 - 2(2400 - 80 \cdot 20\sqrt{2}) =$$
$$= 3200\sqrt{2} - 3200 = 3200(\sqrt{2} - 1) > 3200 \cdot (1{,}41 - 1) = 3200 \cdot 0{,}41 = 1312\,\text{cm}^2.$$

Tātad kvadrātu kopīgās daļas laukums noteikti ir lielāks nekā 1300 cm^2.

A.V.11.5. *Valstī Alfa ir n pilsētas,* $n \geq 2$. *Dažas no šīm pilsētām ir savienotas ar dažām citām ar ceļiem. Ir zināms, ka katrs ceļš savieno tieši divas dažādas pilsētas, katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viens ceļš, turklāt pa izbūvētajiem ceļiem no jebkuras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz jebkuru citu vienā vienīgā veidā.*
a) *Pierādīt, ka ir vismaz viena pilsēta, no kuras iziet tieši viens ceļš.*
b) *Pierādīt, ka pilsētas var sanumurēt ar skaitļiem* 1, 2, ..., *n tā, lai jebkuru divu pilsētu, kuras ir savienotas ar ceļu, numuru reizinājums būtu pāra skaitlis.*

a) Ar matemātisko indukciju pamatosim, ka ir vismaz divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš.
Ja $n = 2$, tad apgalvojums ir patiess (starp divām pilsētām var būt uzbūvēts tikai viens ceļš, kas savieno šīs pilsētas).
Pieņemsim, ka vajadzīgais ir pamatots pie $n < k$ pilsētām un pamatosim to arī k pilsētu gadījumā, $k \geq 3$. Patvaļīgi izvēlēsimies vienu ceļu, pieņemsim, ka tas savieno pilsētas *A* un *B*. „Nodzēsīsim” (pieņemsim, ka tas vairs nav izbraucams) ceļu *AB*, un visas pilsētas sadalīsim divās grupās – grupā V_1 (pilsētas, uz kurām iespējams nokļūt no pilsētas *A*, ieskaitot pašu *A*), un grupā V_2 (pilsētas, uz kurām iespējams nokļūt no *B*, ieskaitot pašu *B*). Ievērosim, ka katra pilsēta ietilpst tieši vienā no grupām: ja būtu tāda pilsēta *C*, kurā iespējams nokļūt gan no *A*, gan *B*, tad sākotnēji valstī Alfa no pilsētas *A* uz *B* varētu nokļūt vairāk nekā vienā veidā (uz *B* no *A* varētu nokļūt gan pa ceļu *AB*, gan pa ceļiem, kas savieno *A* ar *C* un *C* ar *B*) – pretruna. Vismaz vienā no grupām (pieņemsim, ka tā ir V_1) ir vismaz divas pilsētas; tas nozīmē, ka, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, tajā ir vismaz divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš. Ja neviena no šīm pilsētām nav *A*, tad vajadzīgais ir pamatots (arī sākotnēji no katras šīm pilsētām iziet tikai viens ceļš). Apskatām gadījumu, kad viena no šīm pilsētām ir *A* (otru pilsētu apzīmēsim ar *X*). Ir divas iespējas:

- Grupā V_2 ietilpst tikai pilsēta *B*. Tad sākotnēji no pilsētām *X* un *B* no katras izgāja tieši viens ceļš.
- Grupā V_2 ietilpst vismaz divas pilsētas. Tad saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, grupā V_2 var atrast divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš. Viena no šīm pilsētām, apzīmēsim to ar *Y*, nav *B*. Tad sākotnēji no pilsētām *X* un *Y* no katras izgāja tieši viens ceļš.

Līdz ar to ir pamatota induktīvā pāreja un apgalvojums ir pierādīts.
b) Ar matemātisko indukciju parādīsim, ka katrai no pilsētām var piešķirt vērtību 1 vai (−1) tā, lai jebkuru divu pilsētu, kuras ir savienotas ar ceļu, vērtības būtu pretējas. Ja $n = 2$, tad apgalvojums ir patiess. Pieņemsim, ka vajadzīgais ir pierādīts, ja $n = k$ un pamatosim, ka tas ir patiess arī, ja $n = k + 1$. Izvēlamies jebkuru pilsētu *A*, no kuras iziet tieši viens ceļš (pieņemsim, ka šis ceļš iet uz pilsētu *B*). Aplūkosim

visu pilsētu (neskaitot *A*) un visu ceļu (neskaitot ceļu *AB*) veidoto sistēmu. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, šīm *k* pilsētām var piešķirt vērtības 1 un (-1) vajadzīgajā veidā. Tad pilsētai *A* piešķir vērtību $(-v)$, kur *v* ir pilsētas *B* vērtība. Induktīvā pāreja izdarīta.

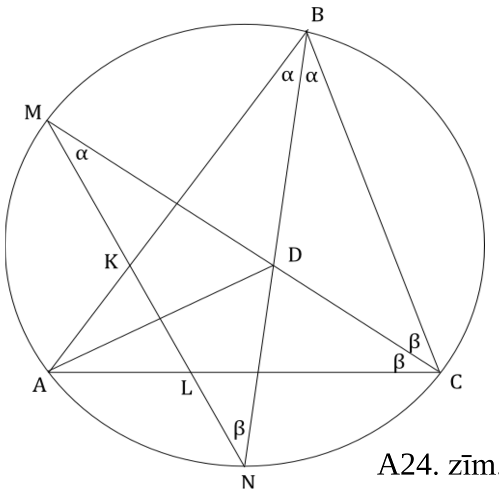
Ja pilsētām ir piešķirtas vērtības aprakstītajā veidā, tad apzīmēsim ar *m* to pilsētu skaitu, kurām vērtība ir 1, bet ar *l* – to pilsētu skaitu, kurām vērtība ir (-1). Ja $m < l$, tad visām pilsētām, kurām vērtība ir 1, piekārto pāra numurus; ja $l \leq m$, tad pāra numurus piekārto pilsētām, kuru vērtība ir (-1). Pārējām pilsētām atlikušos numurus piekārto patvaļīgi.

Tā kā katrām divām ar ceļu savienotām pilsētām ir pretējas vērtības, tad no jebkurām divām ar ceļu savienotām pilsētām vismaz vienai ir piekārtots pāra numurs. Tātad šo pilsētu numuru reizinājums ir pāra skaitlis., kas arī bija jāpierāda.

A.V.12. Divpadsmitā klase

A.V.12.1. *Ap šaurleņķu trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija. Loka AB* (*kuram nepieder punkts C*) *viduspunkts ir M, bet loka AC* (*kuram nepieder punkts B*) *viduspunkts ir N. Nogriežņi BN un CM krustojas punktā D. Pierādīt, ka* $AD \perp MN$.

Apzīmējam NM krustpunktus ar malām *AB* un *AC* attiecīgi ar *K* un *L* (skat. A24. zīm.).



A24. zīm.

Tā kā *N* un *M* ir attiecīgo loku viduspunkti, tad ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi:

- $\angle ABN = \angle CBN = \angle CMN = \alpha$ (balstās uz lokiem *AN* un *CN*);
- $\angle ACM = \angle BCM = \angle BNM = \beta$ (balstās uz lokiem *AM* un *MB*).

Trijstūra *BKN* virsotnes *K* ārējais leņķis ir $\angle AKL = \angle KBN + \angle KNB = \alpha + \beta$, bet trijstūra *CLM* virsotnes *L* ārējais leņķis ir $\angle ALK = \angle CML + \angle LCM = \alpha + \beta$. Tātad trijstūrī *AKL* divi leņķi ir vienādi, tāpēc trijstūris *AKL* ir vienādsānu. Nogrieznis *AD* ir trijstūru *ABC* un *AKL* leņķa *BAC* bisektrise (*D* ir bisektrišu *CM* un *BN* krustpunkts). Vienādsānu trijstūra bisektrise, kas vilkta pret pamatu, vienlaikus ir arī trijstūra augstums. Tātad $AD \perp KL$ jeb $AD \perp MN$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.12.2. *Atrisināt vienādojumu sistēmu* $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} z \\ \sin y + \cos x = \dfrac{3}{2}\operatorname{ctg} z \end{cases}$.

Sareizinot abus vienādojumus un izmantojot identitāti $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, iegūstam

$$\sin x \sin y + \sin x \cos x + \cos y \sin y + \cos y \cos x = \frac{9}{4}.$$

Pārveidojot iegūtā vienādojuma kreiso pusi, iegūstam

$$\cos(x-y) + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2y = \frac{9}{4}.$$

Tā kā $\sin\alpha \in [-1;1]$ un $\cos\alpha \in [-1;1]$, tad pēdējā vienādojuma kreisā puse nepārsniedz $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, tāpēc šim vienādojumam un līdz ar to arī sākotnējai vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma.

A.V.12.3. *Funkcija f apmierina šādas prasības:*

a) *f ir definēta visiem veseliem nenegatīviem skaitļiem un tās vērtības ir veseli skaitļi;*

b) *katram n (n – vesels nenegatīvs skaitlis) izpildās sakarība*

$$f(n)\cdot(f(n+1)-2) = 4n^2 - 1.$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu nav.

Ievērojam, ka nevienam veselam $n \geq 0$ nevar būt, ka $f(n) = 0$ – pretējā gadījumā no dotās vienādības $0 = f(n)\cdot(f(n+1)-2) = 4n^2 - 1$ sekotu, ka $4n^2 = 1$, taču veseliem n šāda vienādība nevar izpildīties.

Doto sakarību, dalot ar $f(n) \neq 0$, pārveidojam formā

$$f(n+1) = 2 + \frac{4n^2 - 1}{f(n)} \qquad (1)$$

Ievietojot $n = 0$, iegūstam vienādību $f(1) = 2 - \dfrac{1}{f(0)}$. Tā kā gan $f(0)$, gan $f(1)$ ir veseli skaitļi, tad $f(0)$ var būt vai nu 1, vai (-1), citu iespēju nav.

Apskatīsim abus gadījumus.

1. Ja $f(0) = -1$, tad iegūstam $f(1) = 2 - \dfrac{1}{-1} = 3$. Izmantojot (1), varam pakāpeniski aprēķināt

$$f(2) = 2 + \frac{4\cdot 1 - 1}{3} = 2 + 1 = 3; \qquad f(3) = 2 + \frac{4\cdot 4 - 1}{3} = 2 + 5 = 7;$$

$$f(4) = 2 + \frac{4\cdot 9 - 1}{7} = 2 + 5 = 7; \qquad f(5) = 2 + \frac{4\cdot 16 - 1}{7} = 2 + 9 = 11;$$

$$f(6) = 2 + \frac{4\cdot 25 - 1}{11} = 2 + 9 = 11; \qquad f(7) = 2 + \frac{4\cdot 36 - 1}{11} = 2 + 13 = 15$$

Rodas hipotēze, ka šajā gadījumā

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & n = 2m \\ 2n + 1, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad f(n) = 2n + (-1)^{n+1}.$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka visiem naturāliem n ir spēkā sakarība $f(n) = 2n + (-1)^{n+1}$.

Indukcijas bāze. $f(0)=-1$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $f(k)=2k+(-1)^{k+1}$.

Induktīvā pāreja. Izmantojot vienādību (1), izsakām $f(k+1)$:

$$f(k+1)=2+\frac{4k^2-1}{f(k)}=2+\frac{(2k+(-1)^{k+1})(2k-(-1)^{k+1})}{2k+(-1)^{k+1}}=$$

$$=2+2k-(-1)^{k+1}=2(k+1)+(-1)^{(k+1)+1}.$$

Induktīvā pāreja izdarīta.

2. Ja $f(0)=1$, tad iegūstam $f(1)=2-\frac{1}{1}=1$. Izmantojot (1), varam pakāpeniski aprēķināt

$$f(2)=2+\frac{4\cdot 1-1}{1}=2+3=5; \qquad f(3)=2+\frac{4\cdot 4-1}{5}=2+3=5;$$

$$f(4)=2+\frac{4\cdot 9-1}{5}=2+7=9; \qquad f(5)=2+\frac{4\cdot 16-1}{9}=2+7=9;$$

$$f(6)=2+\frac{4\cdot 25-1}{9}=2+11=13; \quad f(7)=2+\frac{4\cdot 36-1}{13}=2+11=13$$

Rodas hipotēze, ka šajā gadījumā

$$f(n)=\begin{cases}2n+1, & n=2m\\ 2n-1, & n=2m+1\end{cases} \quad \text{jeb} \quad f(n)=2n+(-1)^n.$$

Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā, ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka visiem naturāliem n izpildās sakarība $f(n)=2n+(-1)^n$.

Indukcijas bāze. $f(0)=1$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $f(k)=2k+(-1)^k$.

Induktīvā pāreja. Izmantojot vienādību (1), izsakām $f(k+1)$:

$$f(k+1)=2+\frac{4k^2-1}{f(k)}=2+\frac{(2k+(-1)^k)(2k-(-1)^k)}{2k+(-1)^k}=$$

$$=2+2k-(-1)^k=2(k+1)+(-1)^{k+1}.$$

Induktīvā pāreja izdarīta.

Tātad vienīgās funkcijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $f(n)=2n+(-1)^{n+1}$ un $f(n)=2n+(-1)^n$.

A.V.12.4. *Ar d_i, $i=1,2,\ldots,k$, apzīmēsim visus naturālā skaitļa n naturālos dalītājus, pie tam $d_1<d_2<d_3<\ldots<d_k$. Zināms, ka $d_3^2d_4^2\left(d_3^2+d_4^2\right)=n^2$. Atrast visas iespējamās n vērtības.*

Pārveidojam doto vienādību formā $d_3^2+d_4^2=\left(\frac{n}{d_3d_4}\right)^2$. Tā kā $d_3^2+d_4^2$ ir naturāls skaitlis, tad arī $\frac{n}{d_3d_4}$ ir naturāls skaitlis un $d_3\cdot d_4$ arī ir skaitļa n dalītājs. Aplūkojot vienādojumu $x^2+y^2=z^2$ pēc moduļa 3, iegūstam, ka viens no skaitļiem *x, y, z* dalās ar 3 (naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 3 var būt kongruents tikai ar 0 vai 1). Aplūkojot vienādojumu $x^2+y^2=z^2$ pēc moduļa 8, iegūstam, ka viens no skaitļiem *x, y, z* dalās ar 4 (naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 var būt kongruents tikai ar 0, 1 vai 4).

Tātad skaitļa *n* mazākie dalītāji ir 1, 2, 3 un 4, t. i., $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=3$, $d_4=4$.

Līdz ar to varam aprēķināt n vērtību:

$$n = \sqrt{{d_3}^2{d_4}^2(d_3^2 + d_4^2)} = 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\,.$$

A.V.12.5. *Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne, kas satur tikai burtus a, b un c. Ar šo virkni atļauts veikt šādus gājienus:*

a) patvaļīgi mainīt uzrakstīto burtu secību;
b) ja virknes galā ir uzrakstīts fragments ab, to drīkst nodzēst;
c) fragmentu ba aizstāt ar fragmentu aabbcc;
d) fragmentu bbc aizstāt ar a;
e) izsvītrot jebkurus trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus burtus.

Vai, atkārtojot vairākus šādus gājienus, iespējams iegūt virkni aba, ja sākotnēji ir uzrakstīta virkne ***1)*** *abba;* ***2)*** *aabbcabaab?*

a) Aizstājam burtu *a* ar ciparu 1, burtu *b* – ar ciparu 2, burtu *c* – ar ciparu 3. Tātad sākotnēji uz tāfeles uzrakstītā virkne atbilst skaitlim 1221 un jāiegūst skaitli 121. Atļautās darbības atbilst šādām darbībām ar skaitļiem:

a) uz tāfeles uzrakstītajā skaitlī var patvaļīgi mainīt ciparu secību;
b) ja skaitļa pēdējie divi cipari ir 12, tad tos var nodzēst;
c) ciparus 21 var aizstāt ar 112233;
d) ciparus 223 var aizstāt ar 1;
e) drīkst izsvītrot trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus ciparus.

Ievērojam, ka uz tāfeles uzrakstītā skaitļa ciparu summa, veicot šos gājienus,

a) nemainās;
b) samazinās par 3;
c) palielinās par 9;
d) samazinās par 6;
e) samazinās par 3 (ja nodzēsti trīs vieninieki), 6 (ja nodzēsti trīs divnieki) vai 9 (ja nodzēsti trīs trijnieki).

Sākotnēji uz tāfeles ir uzrakstīts skaitlis 1221, kurš dalās ar 3 un kura ciparu summa dalās ar 3. Veicot aprakstītos gājienus, iegūtā skaitļa ciparu summa vienmēr dalīsies ar trīs, kas nozīmē, ka gājienu rezultātā var iegūt tikai skaitļus, kuri dalās ar 3. Taču skaitlis 121 nedalās ar 3, tātad ar aprakstītajiem gājieniem to nevar iegūt no skaitļa 1221. Tātad arī virkni *aba* nevar iegūt no virknes *abba* ar aprakstīto gājienu palīdzību.

b) Jā, var, piemēram:

$$aabbcabaab \xrightarrow{a)} aaaaabbbbc \xrightarrow{e)} aabbbbc \xrightarrow{d)} aabba \xrightarrow{a)} abaab \xrightarrow{b)} aba.$$

A.A. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

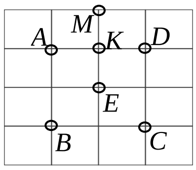
A.A.9. Devītā klase

A.A.9.1. *Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir* 3 *un* 13*. Pierādīt, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.*
(*Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.*)

Ja trapeces augstums ir h, tad tās laukums ir $S=\frac{(3+13)}{2}\cdot h=8h$. Tātad vienlielo trijstūru laukumi ir $S_{\Delta}=\frac{8h}{5}=1{,}6h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Šī trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot h=1{,}5h<1{,}6h$. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros, jo ir viens trijstūris, kura laukums ir mazāks nekā $1{,}6h$.

A.A.9.2. *Kvadrāta ar izmēriem* 4×4 *rūtiņas katra rūtiņu virsotne nokrāsota vienā no divām krāsām. Pierādīt, ka noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.*

Vispirms aplūkosim virsotnes *A*, *B*, *C*, *D* un *E* (skat. A25. zīm.). Vismaz trīs no tām ir nokrāsotas vienā krāsā. Ja vienā krāsā nokrāsotas trīs no virsotnēm *A*, *B*, *C* un *D*, tās veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Ja vienā krāsā nokrāsotas virsotnes (*E*, *A*, *B*) vai (*E*, *B*, *C*), vai (*E*, *C*, *D*), vai (*E*, *A*, *D*), arī veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris ar vienādas krāsas virsotnēm.



A25. zīm.

Gadījumā, ja virsotnes *A*, *E* un *C* nokrāsotas vienā krāsā, bet virsotnes *B* un *D* – otrā krāsā, aplūkosim vēl virsotnes *K* un *M*. Ja vismaz viena no tām ir nokrāsota tāpat kā *A* un *E*, tad tā kopā ar *A* un *E* veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Savukārt, ja *M* un *K* abas nokrāsotas tāpat kā virsotne *D*, veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris *MKD*. Tātad noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.

A.A.9.3. *Doti četri dažādi cipari, neviens no kuriem nav* 0*. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir* 484*. Atrast dotos četrus ciparus.*

Dotos ciparus apzīmēsim ar *a*, *b*, *c*, *d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

$$4\cdot 10\cdot(a+b+c+d)+4\cdot(a+b+c+d)=44(a+b+c+d)=484.$$

Tātad $a+b+c+d=484:44=11$. Vienīgā iespēja, ka četru dažādu nenulles ciparu summa ir 11, ir tad, ja šie cipari ir 1, 2, 3 un 5, kas arī ir četri meklētie skaitļi.

A.A.9.4. *Dota skaitļu virkne* $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, *kurā* $x_0 > 0$ *un* $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$ *visiem* $n \geq 0$. *Pierādīt, ka* $x_{100} > 20$.

Tā kā $x_0 > 0$ un $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$ katram $n \geq 0$, tad $x_n > 0$ visiem $n \geq 0$.

Aplūkosim skaitļu virkni $y_n = x_n^2$ katram $n \geq 0$.

Tad $y_{n+1} = x_{n+1}^2 = \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n{}^2} > x_n^2 + 4 = y_n + 4$.

Tātad

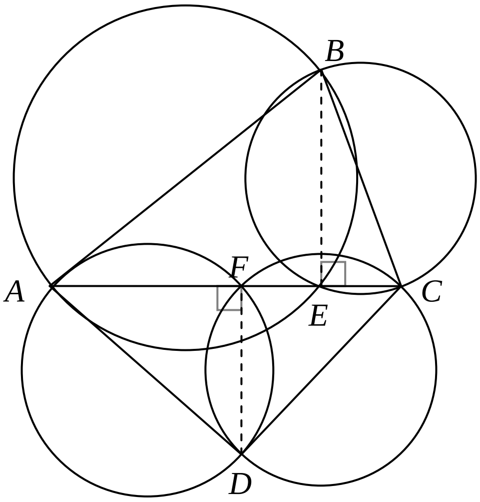
$$y_{100} > y_{99} + 4 > y_{98} + 4 + 4 > \ldots > y_0 + 4 \cdot 100 = y_0 + 400 \text{ jeb}$$

$$x_{100}^2 > x_0^2 + 400 > 0 + 400 = 400.$$

Tā kā $x_{100} > 0$ un $x_{100}^2 > 400$, tad $x_{100} > 20$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.9.5. *Dots izliekts četrstūris. Uzzīmēti četri riņķi, kuru diametri ir četrstūra malas. Pierādīt, ka šie riņķi pilnībā pārklāj doto četrstūri.*

Apzīmēsim doto četrstūri ar *ABCD*. Novelkam perpendikulus *BE* un *DF* pret diagonāli *AC*. Riņķis ar diametru *AB* pilnībā satur sevī ΔABE, jo $\angle AEB$ ir taisns leņķis. Līdzīgi arī ΔBEC pilnībā atrodas riņķī ar diametru *BC* (skat. A26. zīm.). Trijstūri ΔABE un ΔBEC kopā veido trijstūri ΔABC, tāpēc tas arī tiek pārklāts ar diviem dotajiem riņķiem. Līdzīgi pamato, ka arī ΔADC tiek pārklāts ar dotajiem riņķiem, līdz ar to arī viss četrstūris *ABCD* tiek pārklāts ar diviem citiem no dotajiem četriem riņķiem.



A26. zīm.

A.A.10. Desmitā klase

A.A.10.1. *Dots, ka* x_1 *ir vienādojuma* $x^2+px+q=0$ *sakne, bet* x_2 *ir vienādojuma* $-x^2+px+q=0$ *sakne. Pierādīt, ka vienādojumam* $\frac{1}{3}x^2+px+q=0$ *noteikti ir sakne* x_3*, kas atrodas starp* x_1 *un* x_2 *(t. i.,* $x_1 \le x_3 \le x_2$ *vai* $x_2 \le x_3 \le x_1$*).*

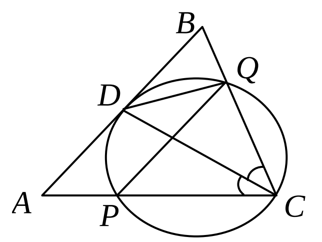
Aplūkosim kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2+px+q$ vērtības punktos x_1 un x_2:

$$\frac{1}{3}x_1^2+px_1+q=x_1^2+px_1+q-\frac{2}{3}x_1^2=0-\frac{2}{3}x_1^2=-\frac{2}{3}x_1^2\le 0;$$
$$\frac{1}{3}x_2^2+px_2+q=-x_2^2+px_2+q+\frac{4}{3}x_2^2=0+\frac{4}{3}x_2^2=\frac{4}{3}x_2^2\ge 0.$$

Tā kā vienā no šiem punktiem polinoma vērtība ir negatīva vai vienāda ar 0, bet otrā – nenegatīva, pie tam kvadrātfunkcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir arī tāds punkts x_3, kurā funkcija $\frac{1}{3}x^2+px+q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts x_3 ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2+px+q=0$ sakne, kas atrodas starp punktiem x_1 un x_2.

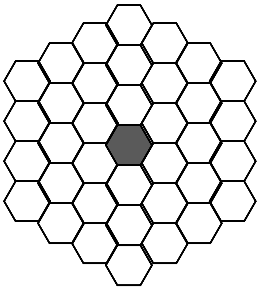
A.A.10.2. *Trijstūrī ABC nogrieznis CD ir bisektrise. Caur punktu C novilkta riņķa līnija, kas pieskaras malai AB punktā D. Tā krusto malas AC un BC attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka* $AB \| PQ$*.*

Tā kā *AB* ir riņķa līnijas pieskare, tad $\angle BDQ=\angle DCQ$ kā hordas-pieskares leņķis un ievilktais leņķis, kas balstās uz vienu loku (skat. A27. zīm.). Savukārt $\angle DQP=\angle DCP$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loku *DP*. Tā kā *CD* ir bisektrise, tad $\angle DCQ=\angle DCP$, tāpēc $\angle BDQ=\angle DQP$ – tie šķērsleņķi pie taisnēm *AB* un *PQ*, kuras krusto taisne *DQ*, tātad *AB*||*PQ*, kas arī bija jāpierāda.



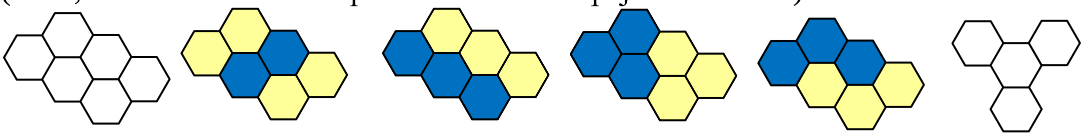
A27. zīm.

A.A.10.3. *Par n-heksu sauksim plaknes figūru, kas izveidota no n regulāriem sešstūriem tā, ka katram sešstūrim ir kopīga mala ar vismaz vienu citu sešstūri.*
Kādam mazākajam n ($n \geq 2$) *eksistē tāds n-hekss, ar kuriem nevar pārklāt* 7. *zīm. attēloto figūru* (*tā sastāv no regulāriem sešstūriem ar caurumu centrā*)*?*



7. zīm.

Ievērojam, ka doto figūru var sadalīt sešās A28. zīm. redzamajās figūrās. Savukārt šīs sešas figūras var sadalīt *n-heksos*, ja $n=2$ (skat., piem., A29. zīm.) un $n=3$ (A30., A31. un A32. zīm. apskatīti visi trīs iespējamie 3-*heksi*).



A28. zīm. A29. zīm. A30. zīm. A31. zīm. A32. zīm. A33. zīm.

Doto figūru nevar sadalīt A33. zīm. redzamajos 4-*heksos*, jo ar tiem nevar pārklāt jau dotās figūras „malas" divus pirmos sešstūrus. Tātad mazākais *n*, kuram eksistē tāds *n-hekss*, ar kuriem nevar pārklāt doto figūru, ir 4.

A.A.10.4. *No pirmajiem* 100 *naturālajiem skaitļiem izvēlēts* 51 *skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru.*

Visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 sadalīsim 50 grupās: katru nepāra skaitli ievietosim citā grupā (pavisam ir 50 nepāra skaitļi). Ievērojam, katru pāra skaitli *p* var izteikt kā nepāra skaitļa *n* un divnieka pakāpes reizinājumu, t. i., $p = n \cdot 2^k$, $k > 0$. Pāra skaitli *p* ievietosim vienā grupā ar tam atbilstošo nepāra skaitli *n*.
Piemēram, pirmās grupas ir

{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64}, {3; 6; 12; 24; 48; 96}; {5; 10; 20; 40; 80} utt.

Izvēloties jebkurus divus skaitļus no vienas grupas, lielākais skaitlis dalās ar mazāko (dalījums ir divnieka pakāpe).
Tā kā tika izvēlēts 51 skaitlis, bet visi skaitļi ir sadalīti 50 grupās, tad vismaz divi skaitļi būs no vienas grupas; tie arī ir meklētie divi skaitļi.

A.A.10.5. *Vai pa riņķi var uzrakstīt* 2013 *naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu attiecība būtu* 2, 3, 12 *vai* 18 *?*

Ievērojam, ka $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $12 = 2^2 \cdot 3^1$, $18 = 2^1 \cdot 3^2$.
Ja kāds no 2013 uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar kāda pirmskaitļa $p \geq 5$ pakāpi p^k ($k \geq 1$), tad visi uzrakstītie skaitļi dalās ar p^k. Tāpēc, visus uzrakstītos skaitļus izdalot ar p^k, uzdevumā aprakstītā īpašība saglabājas.

Pēc šādas vienkāršošanas visi pa riņķi uzrakstītie skaitļi izsakāmi formā $2^a \cdot 3^b$. Var ievērot, ka jebkuriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem summa $a+b$ vienam ir pāra skaitlis, bet otram – nepāra, jo blakus esošo skaitļu summu $a+b$ starpībai jābūt nepāra skaitlim, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Tā kā pa apli jāuzraksta 2013 – nepāra skaits skaitļu, tad prasīto nevar izdarīt.

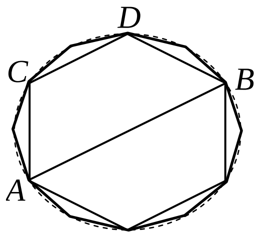
A.A.11. Vienpadsmitā klase

A.A.11.1. *Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa n, ka skaitlis* n^2-3n-1 *dalās ar* 169.

Pieņemsim pretējo, ka n^2-3n-1 dalās ar 169. Tad $n^2-3n-1=(n-8)(n+5)+39$ dalās ar 13. Tā kā saskaitāmais 39 dalās ar 13, tad arī otram saskaitāmajam $(n-8)(n+5)$ jādalās ar 13. Skaitlis $n-8$ ir par 13 mazāks nekā $n+5$, tātad tie abi vienlaicīgi dalās ar 13; no kā seko, ka $(n-8)(n+5)$ dalās ar 169. Bet tādā gadījumā $(n-8)(n+5)+39$ nedalās ar 169. Esam ieguvuši pretrunu. Tātad nav tāda naturāla skaitļa *n*, ka skaitlis n^2-3n-1 dalās ar 169.

A.A.11.2. *Vai eksistē regulārs daudzstūris, kuram vienas diagonāles garums ir vienāds ar divu citu diagonāļu garumu summu?*

Regulāram sešstūrim diagonāles *AB* garums ir vienāds ar divu malu garumu summu, piemēram, $AB=AC+CD$ (skat. A34. zīm.)
Apskatīsim regulāram sešstūrim apvilkto riņķa līniju, un katram tās lokam, ko atšķeļ sešstūra mala, atliksim viduspunktu. Savienojot šos viduspunktus un sešstūra virsotnes, iegūsim regulāru 12-stūri. Sākotnējā sešstūra malas un diagonāles ir iegūtā 12-stūra diagonāles, tātad regulāram 12-stūrim ir diagonāle, kuras garums ir vienāds ar divu citu diagonāļu garumu summu. Līdz ar to esam pamatojuši, ka uzdevuma prasības apmierina regulārs 12-stūris.



A34. zīm.

A.A.11.3. *Doti dažādi nepāra naturāli skaitļi* $a_1,a_2,\dots,a_n$. *Neviens no tiem nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks nekā* 5. *Pierādīt, ka*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}<2.$$

Visi skaitļi a_i uzrakstāmi formā $a_i=3^b\cdot 5^c$, tāpēc apskatāmās summas katrs saskaitāmais izsakāms formā $\frac{1}{a_i}=\frac{1}{3^b\cdot 5^c}$. Apzīmēsim ar *k* maksimālo no visiem kāpinātājiem *b* un *c* pa visiem *i*.

Pierādīsim, ka $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}\le\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^k}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^k}\right)$.

Labajā pusē, atverot iekavas, iegūsim visus iespējamos reizinājumus $\frac{1}{3^b\cdot 5^c}$, visām *b* un *c* vērtībām no 0 līdz *k*. Kreisajā pusē visi skaitļi arī ir izsakāmi šādā formā, un tie visi ir dažādi. Tātad labā puse satur visus tos pašus un varbūt vairāk saskaitāmos (tie visi ir pozitīvi) nekā kreisā puse, tāpēc labās puses vērtība ir lielāka vai vienāda ar kreisās puses vērtību.

Labajā pusē ir divu ģeometrisko progresiju summu reizinājums. Izmantojot ģeometriskās progresijas pirmo k locekļu summu, iegūstam

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2};$$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{5}}<\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}.$$

Tātad $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.11.4. *Kādā valstī ir* 2013 *pilsētas, no katras uz katru var aizlidot ar lidmašīnu. Dažus no šiem reisiem apkalpo aviokompānija A, pārējos – aviokompānija B* (*ir iespējams, ka no pilsētas X uz pilsētu Y lido aviokompānijas A lidmašīna, bet no Y uz X – aviokompānijas B lidmašīna*).
Pierādīt, ka aviokompāniju atbildību par reisiem iespējams saplānot tā, ka ceļotājs, izlidojot no jebkuras pilsētas Z, pa ceļam apmeklējot vienu vai vairākas pilsētas un pēc tam atgriežoties pilsētā Z, ***noteikti*** *būs lidojis ar abu aviokompāniju lidmašīnām, neatkarīgi no tā, kādu maršrutu viņš būs izvēlējies un kura ir sākotnējā pilsēta Z.*

Maršrutus plānosim šādā veidā. Vispirms izvēlamies divas pilsētas K un L, un reisu no K uz L dodam apkalpot aviokompānijai A, bet reisu no L uz K – kompānijai B. Pēc tam izvēlamies trešo pilsētu M, un saplānojam reisus, kas savieno M ar K un L: visus no M izejošos reisus (MK un ML) uzticam apkalpot kompānijai A, bet visus M ienākošos reisus (KM un LM) uzticam kompānijai B.
Tādā veidā turpinām: jau saplānoto reisu shēmai pievienojot jaunu pilsētu W, **visus** no W izejošos reisus uzticam apkalpot vienai aviokompānijai, bet **visus** pilsētā W ieejošos reisus – otrajai aviokompānijai.
Šādā veidā saplānojot visus reisus, noteikti neveidosies neviens ciklisks maršruts, ko nodrošina viena un tā pati kompānija. Lai veidotos ciklisks maršruts, nepieciešams, lai maršrutā ietilpstošajām pilsētām būtu vismaz viens ieejošais un vismaz viens izejošs reiss, ko nodrošina viena un tā pati kompānija, taču aprakstītā plānošanas shēma šādu iespēju izslēdz.

A.A.11.5. *Uz galda virsmas, kurai ir taisnstūra forma, izvietoti vairāki vienādi kvadrātveida papīra gabaliņi, kuru malas ir paralēlas galda malām* (*kvadrātiņi var arī pārklāties*)*. Pierādīt, ka galdā var iedurt dažas adatas tā, ka katrs papīra gabaliņš būs piesprausts pie galda tieši ar vienu adatu.*

Galda virsmu „pārklāsim" ar kvadrātisku rūtiņu režģi, kur rūtiņas malas garums vienāds ar kvadrātveida papīra gabalu malas garumu un režģa līnijas ir paralēlas galda malām.

Adatas iespraudīsim izveidotā režģa punktos (rūtiņu virsotnēs). Tā kā režģa rūtiņas malas garums vienāds ar papīra gabalu malas garumu un režģa līnijas paralēlas papīra gabalu malām, tad katrs kvadrāts tiks piesprausts ar ne vairāk kā vienu adatu. Ja kāds papīra gabals netiek piesprausts ne ar vienu adatu (adatas atrodas uz šīs kvadrāta malām), izvēlēto režģi nedaudz paralēli pārbīda, līdz katrs kvadrāts ir piesprausts pie galda. Tā kā attālums starp papīra gabalu malām ir galīgs lielums, tad šādu pārbīdi vienmēr varēs izdarīt.

A.A.12. Divpadsmitā klase

A.A.12.1. *Atrisināt vienādojumu* $\lg x \cdot \lg(4-x) = \frac{1}{4}$.

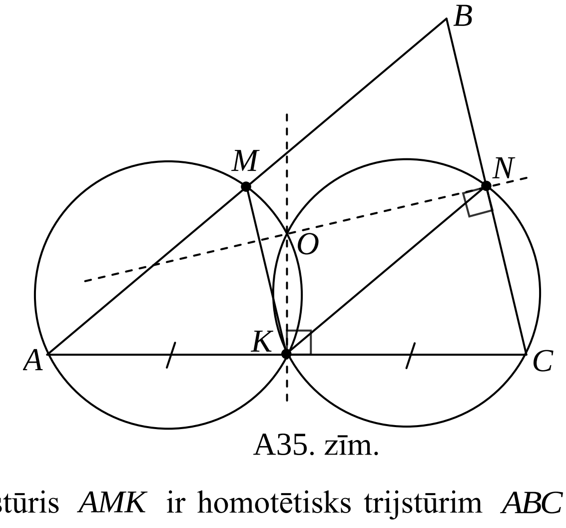
Izmantosim šādas logaritma īpašības:

- $\lg a$ vērtība nav definēta, ja $a \le 0$;
- $\lg a < 0$, ja $0 < a < 1$.

Ja $x < 1$ vai $x > 3$, tad izteiksmes $\lg x \cdot \lg(4-x)$ vērtība ir vai nu negatīva, vai vispār neeksistē; ja $1 \le x \le 3$, tad arī $1 \le 4-x \le 3$. Izmantojot, ka $y = \lg x$ ir augoša funkcija, iegūstam, ka $\lg x \cdot \lg(4-x) \le \lg 3 \cdot \lg 3$. Tā kā $3 < \sqrt{10}$, tad $\lg 3 < \lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ un $\lg x \cdot \lg(4-x) < \frac{1}{4}$. Tātad dotajam vienādojumam atrisinājuma nav.

A.A.12.2. *Trijstūrī ABC punkti M, N un K ir attiecīgi malu AB, BC un CA viduspunkti. Ir novilktas trīs riņķa līnijas: caur punktiem K, A, M; caur punktiem M, B, N; caur punktiem N, C, K. Pierādīt, ka visas novilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.*

1. risinājums. Aplūkojam divas no dotajām riņķa līnijām (skat. A35. zīm.). Ievērojam, ka ΔAMK un ΔKNC ir līdzīgi ΔABC ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$, jo *MK* un *KN* ir trijstūra *ABC* viduslīnijas. Līdz ar to ap ΔAMK un ap ΔKNC apvilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi. Tāpēc tās abas krustojas punktos uz to simetrijas ass, kas ir *AC* vidusperpendikuls. Apzīmējam šo riņķa līniju otru krustpunktu ar *O*. Punkti *O, N, C, K* atrodas uz vienas riņķa līnijas jeb četrstūris *ONCK* ir ievilkts riņķa līnijā, tāpēc $\angle OKC + \angle ONC = 180°$. Tā kā $\angle OKC = 90°$ (jo *OK* ir *AC* vidusperpendikuls jeb simetrijas ass), tad arī $\angle ONC = 90°$. Tātad *ON* ir malas *BC* vidusperpendikuls. Tāpēc abas apskatītās riņķa līnijas krustojas ΔABC vidusperpendikulu krustpunktā, kas ir ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Līdzīgi pierāda, ka arī trešā riņķa līnija iet caur punktu *O*.



A35. zīm.

2. risinājums. Trijstūris *AMK* ir homotētisks trijstūrim *ABC* ar koeficientu $\frac{1}{2}$ un homotētijas centru punktā *A*. Tāpēc ΔAMK apvilktā riņķa līnija pieskaras ΔABC apvilktajai riņķa līnijai punktā *A*. No homotētijas seko arī, ka ΔAMK apvilktās riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu, tāpēc mazākā riņķa līnija iet caur lielākās riņķa līnijas centru. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējās divas riņķa līnijas iet caur ΔABC apvilktās riņķa līnijas centru. Tāpēc visas trīs dotās riņķa līnijas krustojas vienā punktā *O* – ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrā.

A.A.12.3. *Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi* x, y, z, *ka izpildās vienādība* $6^x + 13^y = 29^z$.

Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 7. Ievērojam, ka $6 \equiv -1 \pmod 7$, $13 \equiv -1 \pmod 7$, $29 \equiv 1 \pmod 7$, tāpēc $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1^z \pmod 7$ jeb $\pm 1 + (\pm 1) = 1$. Pēdējā vienādība nav iespējama, tātad nav tādu naturālu skaitļu x, y, z, ar kuriem dotā vienādība būtu patiesa.

A.A.12.4. *Kādas valodas alfabētā ir i patskaņi* ($i \geq 2$) *un j līdzskaņi* ($j \geq 2$). *Šajā valodā par vārdu sauc jebkuru galīgu burtu (patskaņu un līdzskaņu) virkni, kas satur vismaz vienu burtu un kurā nekādi divi patskaņi neparādās pēc kārtas un pēc kārtas uzrakstīti līdzskaņi ir ne vairāk kā divi (piemēram, ja „A" ir patskanis, bet „B" – līdzskanis, tad, piemēram, „ABBA" ir vārds, turpretī „BAAB" un „ABBBA" nav vārdi).*
Ar $S(n)$ *apzīmēsim visu to vārdu skaitu, kuri sastāv no n burtiem,* $n \geq 1$.
Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā vienādība

$$S(n+3) = i \cdot j \cdot S(n+1) + i \cdot j^2 \cdot S(n).$$

Ar $a(n)$ apzīmējam *n* burtus garo vārdu, kas sākas ar patskani, skaitu, bet ar $b(n)$ – *n* burtus garo vārdu, kas sākas ar līdzskani, skaitu. Tad $S(n) = a(n) + b(n)$.
Ja vārds sākas ar patskani, tad nākamais burts var būt tikai līdzskanis (jo divi patskaņi nevar būt blakus), tāpēc $a(n) = i \cdot b(n-1)$.
Ja vārds sākas ar līdzskani, tad nākamais burts var būt vai nu patskanis, vai arī vēl viens līdzskanis, bet tad trešais burts noteikti ir patskanis (jo blakus var būt ne vairāk kā divi līdzskaņi), tāpēc $b(n) = j \cdot a(n-1) + j^2 \cdot a(n-2)$.
Izmantojot iegūtās sakarības, izsakām $S(n)$:

$$S(n) = a(n) + b(n) = i \cdot b(n-1) + j \cdot a(n-1) + j^2 \cdot a(n-2) =$$
$$= i \cdot (j \cdot a(n-2) + j^2 \cdot a(n-3)) + j \cdot (i \cdot b(n-2)) + j^2 \cdot (i \cdot b(n-3)) =$$
$$= i \cdot j \cdot (a(n-2) + b(n-2)) + i \cdot j^2 \cdot (a(n-3) + b(n-3)) = i \cdot j \cdot S(n-2) + i \cdot j^2 \cdot S(n-3)$$

Pārkārtojot indeksus (t. i., *n* aizvietojam ar $n+3$), iegūstam

$$S(n+3) = i \cdot j \cdot S(n+1) + i \cdot j^2 \cdot S(n).$$

A.A.12.5. *Dota kvadrātisku rūtiņu plakne, katras rūtiņas malas garums ir* 1. *Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura virsotnes atrodas šīs plaknes rūtiņu virsotnēs un jebkuru divu tā malu garumi atšķiras ne vairāk kā par* $\frac{1}{2013 \cdot \sqrt{P}}$, *kur P ir šī trijstūra perimetrs.*

Izmantosim faktu: ja $x \in (0;1)$, tad arī $x^2 \in (0;1)$. Tad $2-\sqrt{3} \in (0;1)$, $(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3} \in (0;1)$, $(7-4\sqrt{3})^2 = 97-56\sqrt{3} \in (0;1)$ utt. Šādi iegūstam skaitļus:

$$h_1 - a_1\sqrt{3},\ h_2 - a_2\sqrt{3},\ ...,\ h_n - a_n\sqrt{3},\ ...,$$

kur a_n un h_n ir naturāli skaitļi, pie tam

$$(h_n - a_n\sqrt{3})^2 = h_n^2 + 3a_n^2 - 2h_n a_n\sqrt{3} = h_{n+1} - a_{n+1}\sqrt{3};$$
$$h_{n+1} = h_n^2 + 3a_n^2 \text{ un } a_{n+1} = 2h_n a_n.$$

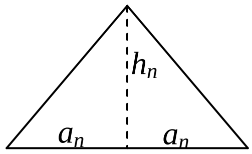
Ja kādam n izpildīsies vienādība $h_n^2 - 3a_n^2 = 1$, tad arī $n+1$ būs spēkā tāda pati vienādība:

$$h_{n+1}^2 - 3a_{n+1}^2 = (h_n^2 + 3a_n^2)^2 - 3\cdot(2h_n a_n)^2 = (h_n^2 + 3a_n^2)^2 - 12h_n^2 a_n^2 = (h_n^2 - 3a_n^2)^2 = 1.$$

Tā kā $h_1^2 - 3a_1^2 = 2^2 - 3\cdot 1^2 = 1$, tad visiem n ir spēkā $h_n^2 - 3a_n^2 = 1$.

Vēl ievērojam, ka izpildās $h_{n+1} = h_n^2 + 3a_n^2 > h_n$, jo sākumā pieņēmām, ka $h_n \geq 2$. Līdz ar to $h_{n+1} > h_n > \ldots > h_1$. No tā seko, ka $a_{n+1} = 2h_n a_n > 2h_1 a_n = 4a_n$, kuru izmantojot iegūstam novērtējumu:

$$a_{n+1} \geq 4a_n \geq 4\cdot 4a_{n-1} \geq \ldots \geq 4^{n-1}. \qquad (1)$$



A36. zīm.

Izvēlamies n tik lielu, ka $a_n > 2013^2$ (šāda skaitļa n eksistence seko no nevienādībām (1)) un apskatām A36. zīm. redzamo vienādsānu trijstūri. Šādu trijstūri varēs atrast rūtiņu plaknē, jo a_n un h_n ir naturāli skaitļi, kam piemīt iepriekš aprakstītās īpašības.

Trijstūra perimetram P ir spēkā nevienādības $P > 4a_n > 4\cdot 2013^2$ (jo P kā saskaitāmos satur divas katetes a_n un divas hipotenūzas, kas ir garākas nekā katetes a_n) un $\sqrt{P} > 2\cdot 2013$. Lielākā atšķirība starp tā malām nav lielāka kā

$$\left|\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} - 2a_n\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} - 2a_n\right)\left(\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} + 2a_n\right)}{\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} + 2a_n}\right| = \left|\frac{h_n{}^2 - 3a_n{}^2}{\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} + 2a_n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} + 2a_n} < \frac{1}{\sqrt{a_n{}^2 + h_n{}^2} + a_n} = \frac{2}{P} = \frac{1}{0{,}5\sqrt{P}}\cdot\frac{1}{\sqrt{P}} < \frac{1}{2013\cdot\sqrt{P}},$$

kas arī bija jāpierāda.

VP. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

A.VP.1. *Pierādīt, ka visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās*

$$\frac{2a}{a^3+b}+\frac{2b}{b^3+c}+\frac{2c}{c^3+a}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Pierādīsim, ka $\frac{2a}{a^3+b}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$. Ievērosim, ka no sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka $\frac{a^3+b}{2}\ge\sqrt{a^3b}$.

Tad $\frac{2}{a^3+b}\le\frac{1}{a\sqrt{ab}}$ un, reizinot šo nevienādību ar $a>0$, iegūstam $\frac{2a}{a^3+b}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

Savukārt no sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko nevienādības skaitļiem $\frac{1}{a}$ un $\frac{1}{b}$, seko $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\ge\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ jeb $\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\frac{2a}{a^3+b}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$.

Līdzīgi $\frac{2b}{b^3+c}\le\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$ un $\frac{2c}{c^3+a}\le\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}$.

Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam

$$\frac{2a}{a^3+b}+\frac{2b}{b^3+c}+\frac{2c}{c^3+a}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b},$$

kas arī bija jāpierāda.

A.VP.2. *Plaknē dotas četras riņķa līnijas. Pirmā ārēji pieskaras otrajai punktā A, otrā ārēji pieskaras trešajai punktā B, trešā ārēji pieskaras ceturtajai punktā C, ceturtā ārēji pieskaras pirmajai punktā D. Pierādīt, ka ap četrstūri ABCD var apvilkt riņķa līniju.*

Apzīmēsim doto riņķa līniju centrus ar *P*, *Q*, *R*, *S* un četrstūra *PQRS* iekšējos leņķus $\angle APB=\alpha$, $\angle BQC=\beta$, $\angle CRD=\gamma$ un $\angle DSA=\delta$. No dotā $PA=PB$, $QB=QC$, $RC=RD$ un $SD=SA$ kā riņķa līniju rādiusi. No kā seko, ka trijstūri *APB*, *BQC*, *CRD* un *DSA* ir vienādsānu un to pamata pieleņķi ir vienādi.

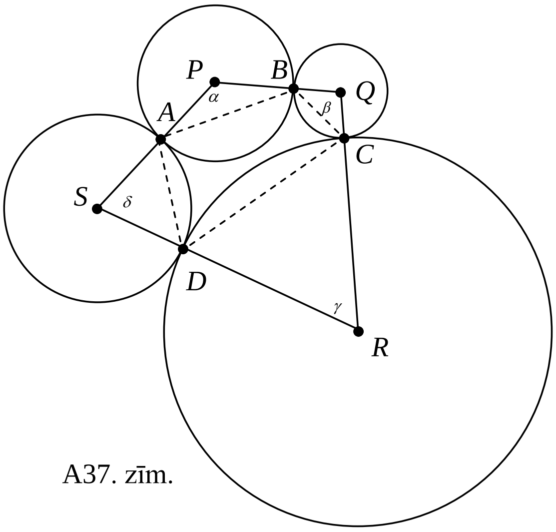
Šķirojam divus gadījumus.

1. Četrstūris *PQRS* ir izliekts (skat. A37. zīm.).

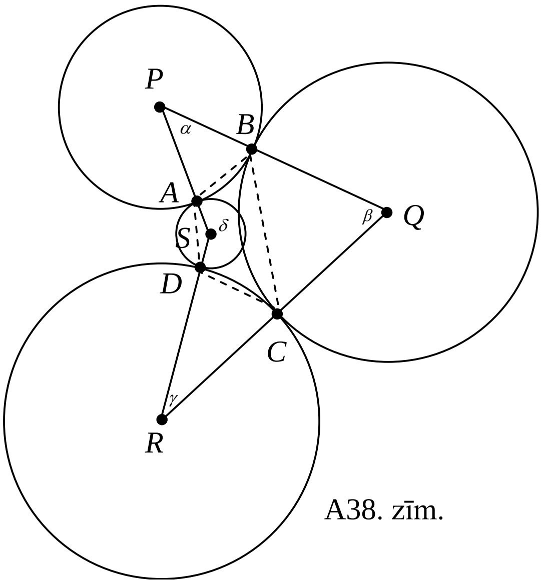
Izsakām četrstūra *ABCD* leņķus *ABC* un *CDA*:

- $\angle ABC=180^\circ-\angle ABP-\angle CBQ=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle APB}{2}-\frac{180^\circ-\angle BQC}{2}=$
  $=180^\circ-\frac{180^\circ-\alpha}{2}-\frac{180^\circ-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$;
- $\angle CDA=180^\circ-\angle ADS-\angle CDR=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle ASD}{2}-\frac{180^\circ-\angle DCR}{2}=$
  $=180^\circ-\frac{180^\circ-\gamma}{2}-\frac{180^\circ-\delta}{2}=\frac{\gamma+\delta}{2}$.

Tad $\angle ABC+\angle CDA=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$ un ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju, jo tā pretējo leņķu summa ir 180°.



A37. zīm.



A38. zīm.

2. Četrstūris *PQRS* ir ieliekts, piemēram, $\delta > 180°$ (skat. A38. zīm.).

Tad $\angle ABC = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ un $\angle CDA = \angle CDS + \angle SDA = 180° - \angle RDC + \dfrac{180° - \angle DSA}{2} =$

$= 180° - \dfrac{180° - \angle DRC}{2} + \dfrac{180° - (360° - \delta)}{2} = 180° - \dfrac{180° - \gamma}{2} + \dfrac{\delta - 180°}{2} = \dfrac{\gamma + \delta}{2}$.

Līdz ar to $\angle ABC + \angle CDA = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°$ un ap *ABCD* var apvilkt riņķa līniju.

A.VP.3. *Naturālu skaitli a sauksim par izcilu, ja eksistē tāds vesels* $k \geq 1$ *un naturāli skaitļi* $a_1, a_2, ..., a_k$*, ka* $a_1 + a_2 + ... + a_k = a$ *un* $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_k} = 1$.

Piemēram, izcili ir skaitļi 1, 4 $(= 2+2)$, 9 $(= 3+3+3)$, 10 $(= 2+4+4)$, 11 $(= 2+3+6)$.

Pierādīt, ka izcili ir arī skaitļi: ***a)*** 31, ***b)*** 2013, ***c)*** 2014.

Ievērosim: ja skaitlis *a* ir *izcils* un izsakāms kā skaitļu $a_1, a_2, ..., a_k$ summa, tad *izcili* ir arī šādi skaitļi:

1) $2a+2$, jo $\dfrac{1}{2a_1} + \dfrac{1}{2a_2} + ... + \dfrac{1}{2a_k} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} + ... + \dfrac{1}{a_k}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot 1 + \dfrac{1}{2} = 1$ un

$2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_k + 2 = 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) + 2 = 2a + 2$.

2) $2a+8$, jo $\dfrac{1}{2a_1} + \dfrac{1}{2a_2} + ... + \dfrac{1}{2a_k} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ un

$2a_1 + ... + 2a_k + 4 + 4 = 2(a_1 + ... + a_k) + 8 = 2a + 8$.

3) $2a+29$, jo $\dfrac{1}{2a_1} + \dfrac{1}{2a_2} + ... + \dfrac{1}{2a_k} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{10}{20} = 1$ un

$2a_1 + ... + 2a_k + 4 + 5 + 20 = 2(a_1 + ... + a_k) + 4 + 5 + 20 = 2a + 29$.

a) Tā kā 1 ir *izcils* skaitlis, tad no 3) seko, ka arī $31 = 2\cdot 1 + 4 + 5 + 20$ ir *izcils* skaitlis.

b) Izteiksim skaitli 2013, izmantojot formulas 1) un 3).

Skaitlis $11 = 2+3+6$ ir *izcils* skaitlis. Tad pakāpeniski iegūstam, ka *izcili* skaitļi ir arī $24 = 2\cdot 11+2$, $50 = 2\cdot 24+2$, $102 = 2\cdot 50+2$, $233 = 2\cdot 102+29$, $2495 = 2\cdot 233+29$, $992 = 2\cdot 495+2$ un $2013 = 2\cdot 992+29$.

c) Izteiksim skaitli 2014, izmantojot formulas 1) – 3).

Skaitlis $10 = 2+4+4$ ir *izcils* skaitlis. Tad pakāpeniski iegūstam, ka *izcili* skaitļi ir arī $49 = 2\cdot 10+29$, $100 = 2\cdot 49+2$, $229 = 2\cdot 100+29$, $487 = 2\cdot 229+29$, $1003 = 2\cdot 487+29$ un $2014 = 2\cdot 1003+8$.

A.VP.4. *Pierādīt, ka neeksistē tāda funkcija* $g: N \to N$, *kas definēta naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības, ka* $g(g(n)) = n+2013$ *visiem naturāliem n.*

Pirmkārt, ievērojam, ka $g(g(g(n))) = g(n)+2013 = g(n+2013)$.

Otrkārt, funkcija g ir injektīva (t. i., ja $g(a) = g(b)$, tad $a = b$), jo no $g(a) = g(b)$ seko, ka $g(g(a)) = g(g(b))$ un pēc dotās sakarības iegūstam, ka $a+2013 = b+2013$.

Treškārt, vēl ievērosim: ja $x \le 2013$, tad $g(x) \le 4026$. Ja $g(x) > 4026$, tad $g(x) = y+2013$ un $y > 2013$. Tātad pēc dotās sakarības iegūstam $g(x) = g(g(y))$ un injektivitātes dēļ $x = g(y)$. Tā kā $y > 2013$, tad $y = z+2013$ un $x = g(z+2013) = g(z)+2013 > 2013$ – pretruna.

Apzīmējam $\mathrm{A} = \{x : x \le 2013 \text{ un } g(x) > 2013\}$ un $\mathrm{B} = \{x : x \le 2013 \text{ un } g(x) \le 2013\}$.

Katram $x \in \mathrm{B}$ $y = g(x) \in \mathrm{A}$ (jo $y = g(x) \le 2013$, bet $g(y) = g(g(x)) = x+2013 > 2013$).

Katram $y \in \mathrm{A}$ ir tāds $x \in \mathrm{B}$, ka $g(x) = y$. Tā kā $2013 < g(y) \le 4026$, tad $g(y) = x+2013 = g(g(x))$ kādam $0 < x \le 2013$. Tātad $y = g(x)$ un līdz ar to $x \in \mathrm{B}$.

Tas nozīmē, ka funkcija g bijektīvi attēlo kopu A par kopu B, tātad $|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$. Bet kopas A un B ir nešķeļošas un to apvienojums ir visi skaitļi no 1 līdz 2013 (nepāra skaits skaitļu) – pretruna ar to, ka abām kopām ir vienāds elementu skaits. Līdz ar to esam pierādījuši, ka neeksistē tāda funkcija $g: N \to N$, kas definēta naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības, ka $g(g(n)) = n+2013$ visiem naturāliem *n*.

A.VP.5. *Doti n punkti, novilkti daži no iespējamajiem nogriežņiem, kas tos savieno. Zināms, ka starp jebkuriem* 4 *punktiem novilkti ne vairāk kā* 2 *no iespējamajiem nogriežņiem. Atrast, kāds ir lielākais iespējamais nogriežņu skaits, kas var būt novilkti, un pierādīt, ka lielāku nogriežņu skaitu novilkt nevar.*

Pierādīsim:

- ja $n = 3k$ vai $n = 3k+1$, tad var novilkt augstākais $2k$ nogriežņus;
- ja $n = 3k+2$, tad var novilkt augstākais $2k+1$ nogriežņus.

Konstrukcija. Sadalām punktus grupās pa 3. Pāri var palikt 1 vai 2 punkti, kas neietilpst nevienā grupā. Ja *A*, *B* un *C* ir vienas grupas punkti, novelkam nogriežņus *AB* un *BC*. Ja pēc sadalīšanas grupās pāri palika 2 punkti, tad novelkam nogriezni starp tiem.

Četri punkti var tikt izvēlēti šādos veidos:

- 3 punkti no vienas grupas, viens no citas – būs 2 nogriežņi starp 3 punktiem no vienas grupas;
- 2 punkti no vienas grupas, 2 punkti no citas – augstākais var būt pa vienam nogrieznim starp katriem 2 vienas grupas punktiem;
- 2 punkti no vienas grupas, pa 1 no divām citām – augstākais var būt viens nogrieznis starp pirmajiem diviem punktiem;

- pa 1 punktam no 4 grupām – nav novilkts neviens nogrieznis.

Visos gadījumos nebūs vairāk kā 2 nogriežņi.

Vel jāpierāda, ka lielāku skaitu nogriežņu nevar novilkt. Ja ir punkts *A*, kas savienots ar 3 citiem punktiem (*B*, *C*, *D*), tad starp punktiem *A*, *B*, *C*, *D* būs 3 nogriežņi. Šāda situācija nevar būt.

Ja ir punkti *A*, *B*, *C*, *D* ar nogriežņiem *AB*, *BC*, *CD*, tad arī ir 3 nogriežņi. Tātad, ja skatās punktu kopas, kur no katra punkta uz katru iespējams aiziet pa novilktajiem nogriežņiem, iespējamas šādas konfigurācijas:

- punkti *A*, *B* un *C* ar nogriežņiem *AB* un *BC*;
- punkti *A* un *B* ar nogriezni *AB*;
- punkts *A* bez neviena nogriežņa.

Katrā konfigurācijā nogriežņu ir par vienu mazāk nekā punktu, tāpēc nogriežņu kopskaits būs $n-m$, kur *m* – konfigurāciju skaits. Tā kā katrā konfigurācijā ir ne vairāk kā 3 punkti, tad konfigurāciju skaits ir ne mazāks kā $\frac{n}{3}$ un nogriežņu skaits – ne lielāks kā $\frac{2n}{3}$. Ņemot lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz $\frac{2n}{3}$, iegūstam $2k$, ja $n=3k$ vai $n=3k+1$, un $2k+1$, ja $n=3k+2$.

A.AB. ATLASE KOMANDU SACENSĪBĀM "BALTIJAS CEĻŠ 2012"

A.AB. Algebra

A.AB.1. *Reāliem nenegatīviem skaitļiem a, b, c izpildās nosacījums, ka* $a+b+c=1$. *Kāda ir izteiksmes*

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2$$

lielākā iespējamā vērtība?

Pārveidojam doto izteiksmi:

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=$
$=ab(1-c)+bc(1-a)+ac(1-b)=ab+bc+ac-3abc=ab(1-3c)+c(b+a)=$
$=ab(1-3c)+c(1-c)$.

Pieņemsim, ka $a\geq b\geq c$. Tad $c\leq\dfrac{1}{3}$ un $(1-3c)\geq 0$.

Ja c ir fiksēts, tad $a+b$ arī ir fiksēts lielums. Izteiksmes $a+b=1-c$ vērtība ir vislielākā, kad reizinājuma ab vērtība ir vislielākā, gadījumā, ja abi reizinātāji ir vienādi, t.i., $a=b=\dfrac{1-c}{2}$.

Novērtējot izteiksmi $ab(1-3c)+c(1-c)$, iegūstam

$ab(1-3c)+c(1-c)=\left(\dfrac{1-c}{2}\right)^2(1-3c)+c(1-c)=\dfrac{1-c}{4}\big((1-c)(1-3c)+4c\big)=$
$=\dfrac{1-c}{4}(1-3c-c+3c^2+4c)=\dfrac{1-c}{4}(1+3c^2)=$
$=\dfrac{1}{4}(1+3c^2-c-3c^3)=\dfrac{1}{4}(1-c(3c^2-3c+1))$.

Visām c vērtībām izteiksmes $3c^2-3c+1$ vērtības ir pozitīvas, jo kvadrātfunkcijas $f(c)=3c^2-3c+1$ zari vērsti uz augšu un tā nekrusto x asi ($D=9-12=-3<0$).

Līdz ar to iegūstam, ka

$$ab(1-3c)+c(1-c)=\frac{1}{4}(1-c(3c^2-3c+1))\leq\frac{1}{4}.$$

Ekvivalentu pārveidojumu un novērtējumu rezultātā esam ieguvuši, ka

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\leq\frac{1}{4}.$$

Secinām, ka dotās izteiksmes vērtība nav lielāka kā $\dfrac{1}{4}$. Lai apgalvotu, ka izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $\dfrac{1}{4}$, ir jāparāda, ka izteiksme var sasniegt šo vērtību. Vērtību $\dfrac{1}{4}$ var iegūt, ja $c=0$ un $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Tātad dotās izteiksmes $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2$ lielākā vērtība ir $\dfrac{1}{4}$.

A.AB.2. *Patvaļīgam reālam skaitlim a definēsim virkni* $x_0, x_1, \ldots$ *tādu, ka* $x_0 = a$ *un* $x_{i+1} = 3x_i - x_i^3$ *visiem* $i \geq 0$. *Atrast, cik ir tādu a vērtību, kurām* $x_{2011} = x_0$.

Ja $|x_i| > 2$, tad $|x_{i+1}| = |x_i| \cdot |3 - x_i^2| > |x_i|$ no kā seko, ka virkne $\{|x_i|\}$ ir stingri augoša, tāpēc šī virkne nevar būt periodiska.
Līdz ar to pietiek apskatīt gadījumu, kad $|a| \leq 2$.

Apzīmējam $x_0 = 2\sin\alpha$, kur $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $x_n = 2\sin(3^n\alpha)$.

Indukcijas bāze. $x_0 = 2\sin\alpha$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $x_k = 2\sin(3^k\alpha)$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka $x_{k+1} = 2\sin(3^{k+1}\alpha)$.

Izmantojot doto sakarību un trigonometrijas formulas, iegūstam

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 3x_k - x_k^3 = 6\sin 3^k\alpha - 8\sin^3 3^k\alpha = 2\sin 3^k\alpha(3 - 4\sin^2 3^k\alpha) = \\
&= 2\sin 3^k\alpha(3(\sin^2 3^k\alpha + \cos^2 3^k\alpha) - 4\sin^2 3^k\alpha) = \\
&= 2\sin 3^k\alpha(3\cos^2 3^k\alpha - \sin^2 3^k\alpha) = \\
&= 2\sin 3^k\alpha(2\cos^2 3^k\alpha + \cos^2 3^k\alpha - \sin^2 3^k\alpha) = \\
&= 4\sin 3^k\alpha\cos^2 3^k\alpha + 2\sin 3^k\alpha \cdot \cos^2(2\cdot 3^k\alpha) = \\
&= 2\sin(2\cdot 3^k\alpha)\cos 3^k\alpha + 2\sin 3^k\alpha\cos(2\cdot 3^k\alpha) = 2\sin(2\cdot 3^k\alpha + 3^k\alpha) = \\
&= 2\sin 3\cdot 3^k\alpha = 2\sin 3^{k+1}\alpha\,.
\end{aligned}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka vienādojumu $x_0 = x_{2011}$ var pārrakstīt formā $\sin\alpha = \sin(3^{2011}\alpha)$.

Izmantojot divu sinusu vienādību, iegūstam, ka vienādojuma atrisinājumi ir

$$3^{2011}\alpha = \alpha + 2\pi n,\quad n \in Z \quad \text{un} \quad 3^{2011}\alpha = \pi - \alpha + 2\pi m,\quad m \in Z.$$

Izsakot leņķi α, iegūstam

$$\alpha = \frac{2\pi n}{3^{2011} - 1},\quad n \in Z \quad \text{un} \quad \alpha = \frac{\pi + 2\pi m}{3^{2011} + 1},\quad m \in Z.$$

Parādīsim, ka šie atrisinājumi nesakrīt.

Ja $\frac{2\pi n}{3^{2011} - 1} = \frac{\pi + 2\pi m}{3^{2011} + 1}$, tad jāizpildās vienādībai $2n(3^{2011} + 1) = (1 + 2m)(3^{2011} - 1)$, kas nav iespējams, jo vienādības kreisās puses izteiksme dalās ar 4, bet labās puses izteiksme nedalās ar 4, jo $3^{2011} - 1 \equiv (-1)^{2011} - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4$.

Lai aprēķinātu skaitļu *n* un *m* skaitu, ar kuriem atbilstošās α vērtības būs intervālā $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, jāatrisina nevienādības:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi n}{3^{2011} - 1} \leq \frac{\pi}{2},\quad n \in Z \qquad \text{un} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi + 2\pi m}{3^{2011} + 1} \leq \frac{\pi}{2},\quad m \in Z.$$

Pārveidojot iegūstam

$$-\frac{3^{2011} - 1}{4} \leq n \leq \frac{3^{2011} - 1}{4},\quad n \in Z \quad \text{un} \quad -\frac{3^{2011} + 1}{4} \leq m \leq \frac{3^{2011} - 1}{4},\quad m \in Z.$$

Pirmajai nevienādībai ir $2\cdot\left\lfloor\frac{3^{2011}-1}{4}\right\rfloor+1=2\cdot\frac{3^{2011}-3}{4}+1$ atrisinājumi, bet otrajai nevienādībai ir $\left\lfloor\frac{3^{2011}+3}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3^{2011}-1}{4}\right\rfloor+1=\frac{3^{2011}+1}{4}+\frac{3^{2011}-3}{4}+1$.

Kopējais atrisinājumu jeb *n* un *m* vērtību skaits ir

$$2\frac{3^{2011}-3}{4}+1+\frac{3^{2011}+1}{4}+\frac{3^{2011}-3}{4}+1=3^{2011}.$$

A.AB.3. *Atrast visas funkcijas* $f: R\to R$, *kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, kurām visiem x, y izpildās:*

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^3-x^3.$$

Ievērojam, ka $f(x)=0$ ir dotās funkcijas atrisinājums, jo, ievietojot dotajā vienādojumā $f(x)=f(y)=0$, iegūstam identitāti:

$$f(0+0)-f(0)=(0+f(0))^3-0;$$
$$0=0.$$

Pieņemsim, ka reāls skaitlis $a\neq 0$ pieder funkcijas f vērtību apgabalam.

Pieņemsim, ka $a>0$.

Ievietojot $x=-f(y)$ dotajā vienādojumā, iegūstam

$$f(-f(y)+f(y))-f(-f(y)=(-f(y)+f(y))^3-(-f(y))^3;$$
$$f(0)-f(-f(y))=0-(-f(y))^3;$$
$$f(-f(y))=(-f(y))^3+c,\text{ kur } f(0)=c;$$

$$f(-f(y))-(-f(y))^3=c. \qquad (1)$$

Ar $g(x)$ apzīmējam tādu funkciju, kuru varam iegūt no uzdevumā dotās vienādības, $f(y)$ vietā ievietojot skaitli *a*:

$$g(x)=f(x+a)-f(x)=(x+a)^3-x^3=$$
$$=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3-x^3=$$
$$=3a(x^2+ax)+a^3=$$
$$=3a\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{3}{4}a^3+a^3=3a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^3}{4}.$$

Ievērojam, ka $g(x)$ var pieņemt katru vērtību *z*, kas lielāka nekā $\frac{a^3}{4}$.

Katrai šādai vērtībai $z=g(x)$, izmantojot uzdevumā doto vienādību

$$f(x+f(y))=f(x)+(x+f(y))^3-x^3$$

un sakarību (1), iegūstam

$$f(z)=f(g(x))=f(-f(x)+f(x+a))=$$
$$=f(-f(x))+(-f(x)+f(x+a))^3-(-f(x))^3=$$
$$=f(-f(x))-(-f(x))^3+(f(x+a)-f(x))^3=$$
$$=c+(g(x))^3=c+z^3. \qquad (2)$$

Tātad funkcija f pieņem katru vērtību, kas nav mazāka kā $\left(\frac{a^3}{4}\right)+c$, līdz ar to funkcija f ir neierobežota no augšas.

Katram x var izvēlēties tādu y, ka $x+f(y)\geq\frac{a^3}{4}$, tātad šādai summai var pielietot iegūto sakarību (2). No uzdevumā dotās vienādības un (2) iegūstam

$f(x)=f(x+f(y))-(x+f(y))^3+x^3=c+(x+f(y))^3-(x+f(y))^3+x^3=x^3+c$.

Šī funkcija apmierina doto vienādojumu:

$$(x+f(y))^3+c-(x^3+c)=(x+x^3+c)^3-x^3;$$
$$(x+x^3+c)^3=(x+x^3+c)^3-x^3;$$
$$0=0.$$

Apskatīsim funkcijas f, kurām vērtību apgabals $a<0$. Tāpēc varam ņemt $f(x)=-h(-x)$.

Ja funkcija f apmierina doto vienādību, tad arī funkcija h to apmierina:

$-h(-x+h(-y))+h(-x)=(x-h(-y))^3-x^3 \qquad \big|\cdot(-1)$

$h(-x+h(-y))-h(-x)=(-x+h(-y))^3-(-x)^3$.

Funkcija h pieņem vērtību $-a>0$, tātad h ir uzdota ar formulu $h(x)=x^3+c$, $c\in R$.

Tad iegūst $f(x)=-h(-x)=-((-x)^3+c)=x^3-c$.

Šī funkcija sakrīt ar iepriekšējā gadījumā iegūto funkciju f, jo $c\in R$.

Līdz ar to dotā funkcionālvienādojuma atrisinājumi ir $f(x)=0$ un $f(x)=x^3+c,\ \ c\in R$.

A.AB.4. *Dots* 2011*-ās pakāpes polinoms P ar reāliem koeficientiem. Pierādīt, ka eksistē aritmētiskā progresija $x_1, x_2, ..., x_{2011}$, kas sastāv no reāliem skaitļiem un kuras diference nav* 0*, tāda, ka*

$$\sum_{k=1}^{2011}P(x_k)=0.$$

Ja polinomam $P(x)$ ir nepāra pakāpe, tad ir tāda vērtība a (polinoma nulle jeb sakne), kurā polinoms $P(x)$ maina zīmi.

Polinomam ir galīgs sakņu skaits, tāpēc eksistē tāda vērtība $b>0$, ka polinoma $P(x)$ ir pretēja zīme intervālos $[a-b,a)$ un $(a,a+b]$. Katrā šajā intervālā polinoma P zīme ir nemainīga.

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $P(a+b)>0$.

Apzīmējam $d=\frac{1}{2010}b$ un apskatām polinomu $Q(x)=\sum_{k=0}^{2010}P(x+kd)$. Polinoms Q ir nepārtraukts. Noskaidrojam polinoma Q zīmi punktā $a-b$ un a:

- $Q(a-b)=\sum_{k=0}^{2010}P(a-b+kd)=P(a-b)+P(a-b+d)+...+P(a-b+2010d)=$

  $=P(a-b)+P(a-b+\frac{b}{2010})+...+P(a-b+\frac{2010b}{2010})<0$,

  jo vērtības $a-b, a-b+\frac{b}{2010}, ..., a-b+\frac{2009b}{2010}$ atrodas intervālā $[a-b,a)$ un līdz ar to polinoma $P(x)$ vērtība šajos punktos ir negatīva un $P(a)=0$.

- $Q(a)=\sum_{k=0}^{2010}P(a+kd)=P(a)+P(a+d)+...+P(a+2010d)=$

  $=P(a)+P(a+\frac{b}{2010})+...+P(a+\frac{2010b}{2010})>0$, jo $P(a)=0$ un pārējie saskaitāmie ir pozitīvi, jo vērtības $a+\frac{b}{2010},\ldots,a+b$ atrodas intervālā $(a,a+b]$.

Līdz ar to starp $a-b$ un a ir tāda c vērtība, ka $Q(c)=0$. Tātad esam parādījuši, ka aritmētiskā progresija $c, c+d, \ldots, c+2010d$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

A.AB.5. *Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z. Pierādīt, ka*

$$\frac{x^2}{(y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+z)^2}+\frac{z^2}{(x+y)^2}\geq\frac{3}{4}.$$

Pieņemsim, ka $a\geq b\geq c$. Tad $\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{a+c}\geq\frac{c}{a+b}$.

Izmantosim Čebiševa nevienādību: Ja $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$ un $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$, tad

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

Izvēlamies $a_1=b_1=\frac{a}{b+c}$, $a_2=b_2=\frac{b}{a+c}$ un $a_3=b_3=\frac{c}{a+b}$. Tad pēc Čebiševa nevienādības, iegūstam

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2;$$

$$\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Pierādīsim, ka $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}-3\geq\frac{3}{2};$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+a+c}{a+c}+\frac{c+a+b}{a+b}\geq\frac{3}{2}+3;$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9;$$

$$((b+c)+(a+c)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9;$$

$$\frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}}.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa kā nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Līdz ar to iegūstam, ka

$$\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4},$$

kas arī bija jāpierāda.

A.AB. Kombinatorika

A.AB.6. *Matemātikas olimpiāde notiek astoņas klašu grupās. Rīkotājiem katrai klašu grupai jāsagatavo* 5 *dažādi uzdevumi. Vienu un to pašu uzdevumu var risināt vairākas klašu grupas, bet jebkurām divām klašu grupām var būt ne vairāk kā viens kopīgs uzdevums. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais uzdevumu skaits, ar kuru olimpiādes rīkotājiem pietiek visām klašu grupām?*

Mazākais pietiekamais uzdevumu skaits ir 18. Tabulā parādīts, kā šos 18 uzdevumus sadalīt pa klašu grupām:

1. klase	1	2	3	4	5
2. klase	1	6	7	8	9
3. klase	2	6	10	11	12
4. klase	3	7	10	13	14
5. klase	4	8	11	13	15
6. klase	5	9	12	14	15
7. klase	1	10	15	16	17
8. klase	2	8	14	16	18

Atliek pierādīt, ka, sagatavojot mazāk nekā 18 uzdevumus, nevar izpildīt uzdevumā prasīto.

Ar a_i apzīmēsim uzdevumu skaitu, kas ir kopīgi i klasēm. Tā kā visām klasēm kopā ir 40 uzdevumi, tad

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 = 40. \qquad (1)$$

Jāpierāda, ka

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 18. \qquad (2)$$

Ja apskatām visu 40 uzdevumu pārus, tad ne vairāk kā $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ no šiem pāriem var būt vienādi. Katrs uzdevums, kas ir kopīgs i klasēm, nosaka C_i^2 šādus uzdevumu pārus, tāpēc

$$C_2^2 a_2 + C_3^2 a_3 + C_4^2 a_4 + C_5^2 a_5 + C_6^2 a_6 + C_7^2 a_7 + C_8^2 a_8 \leq 28;$$

$$a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 + 15a_6 + 21a_7 + 28a_8 \leq 28. \qquad (3)$$

No (1) un (2) seko, ka pietiek pierādīt nevienādību:

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 + 6a_7 + 7a_8 \leq 22. \qquad (4)$$

No (1) var iegūt novērtējumu:

$$2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 \leq 40. \qquad (5)$$

Saskaitot (3) un (5), iegūstam

$$3a_2 + 6a_3 + 10a_4 + 15a_5 + 21a_6 + 28a_7 + 36a_8 \leq 68 \quad |:3$$

$$a_2 + 2a_3 + \frac{10}{3}a_4 + 5a_5 + 7a_6 + \frac{28}{3}a_7 + 12a_8 \leq 22\frac{2}{3}. \qquad (6)$$

Ievērojam, ka nevienādības (4) kreisās puses saskaitāmo koeficienti ir mazāki vai vienādi ar nevienādības (6) kreisās puses atbilstošo saskaitāmo koeficientiem. Tā kā a_i ir veseli skaitļi, tad secinām, ka nevienādība (4) ir patiesa. Tātad patiesa ir arī nevienādība (2). Līdz ar to esam pierādījuši, ka, sagatavojot mazāk nekā 18 uzdevumus, nevar izpildīt uzdevumā prasīto.

A.AB.7. *Kastē atrodas* 100 *bumbiņas, katra no tām ir nokrāsota sarkana, zaļa vai balta. Zināms, ka, ja neskatoties izņem no kastes divas bumbiņas, tad varbūtība, ka tās ir dažādās krāsās, ir* 58 *%, bet varbūtība, ka viena no tām ir zaļa, bet otra – balta,* 8 *%. Cik sarkano bumbiņu ir kastē?*

Ar *s*, *z* un *b* apzīmēsim attiecīgi sarkano, zaļo un balto bumbiņu skaitu. Zināms, ka $s+z+b=100$. Ja neskatoties no kastes izņem 2 bumbiņas, tad varbūtība izņemt divu dažādu krāsu bumbiņas ir 58% un varbūtība izņemt baltu un zaļu bumbiņu ir 8%. Tātad varbūtība izņemt sarkanas krāsas un citas krāsas (zaļu vai baltu) bumbiņu ir $58\%-8\%=50\%$.

Līdz ar to $\dfrac{s(100-s)+(100-s)s}{100\cdot 99}=\dfrac{1}{2}$ un pārveidojot iegūstam kvadrātvienādojumu:

$$s(100-s)=25\cdot 99$$

$$s^2-100s+99\cdot 25=0,$$

kura saknes ir $s=45$ vai $s=55$.

Apskatām abus gadījumus:

- Pieņemsim, ka $s=45$. Tad $b+z=55$.
  Tā kā varbūtība izņemt baltu un zaļu bumbiņu ir 8%, tad $\dfrac{z(55-z)+(55-z)z}{100\cdot 99}=\dfrac{8}{100}$ un iegūstam kvadrātvienādojumu $z(55-z)=4\cdot 99$ jeb $z^2-55z+396=0$, kuram nav veselu sakņu, jo $D=55^2-4\cdot 396=1441$. Sarkano bumbiņu skaits nevar būt 45.
- Līdzīgi apskatām gadījumu, kad $s=55$. Tad $b+z=45$.
  Tā kā varbūtība izņemt baltu un zaļu bumbiņu ir 8%, tad $\dfrac{z(45-z)+(45-z)z}{100\cdot 99}=\dfrac{8}{100}$ un iegūstam kvadrātvienādojumu $z^2-45z+4\cdot 99=0$, kura saknes ir $z=33$ vai $z=12$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka kastē ir 55 sarkanas bumbiņas (zaļo un balto bumbiņu skaits ir 12 un 33 vai 33 un 12).

A.AB.8. *Klasē ir n skolēni, katram no viņiem šajā klasē ir vismaz k draugi. Katru dienu katrs no viņiem pastāsta visiem saviem draugiem jaunumus, ko viņš ir uzzinājis iepriekšējā dienā. Zināms, ka, ja kāds no skolēniem kaut ko uzzina, tad pēc kāda laika to jau zina visa klase. Pierādīt, ka dienu skaits, pēc kurām visa klase jaunumus jau ir uzzinājusi, nav lielāks kā* $\dfrac{3n}{k}$.

Par „ceļu" starp skolēnu *A* un *B* uzskatīsim virkni $A=A_0, A_1, A_2, \ldots A_d=B$, kur A_i un A_{i+1}, $i=0,1,2,\ldots d-1$, ir draugi.

Mazāko skaitli *d* sauksim par *attālumu* no *A* līdz *B*. *Attālums* ir dienu skaits, pēc kura jaunumus no skolēna *A* uzzina skolēns *B*.

No dotā seko, ka starp katriem diviem skolēniem eksistē „ceļš". Jāpierāda, ka *attālums* starp jebkuriem diviem skolēniem ir ne lielāks kā $\dfrac{3n}{k}$.

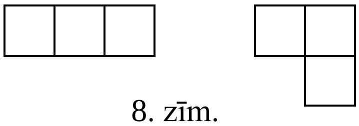
Apskatām divus skolēnus *A* un *B* un pieņemsim, ka $A=A_0, A_1, \ldots, A_t=B$ ir īsākais „ceļš" starp tiem.

Visiem $0\le i<j\le t$ ceļā no *A* līdz *B* *attālums* starp A_i un A_j ir $j-i$. No tā seko, ka *attālums* starp skolēnu, kas draudzējas ar A_i, un skolēnu, kas draudzējas ar A_j, ir vismaz $j-i-2$.

Ar F_i, $i = 0, 1, 2, ..., t$, apzīmējam visu A_i draugu kopu. No iepriekšējā secinājuma seko, ka $\left[\frac{t}{3}\right]+1$ kopas $F_0, F_3, F_6, ...$ ir pa pāriem nešķeļošās (tām nav kopīgu elementu jeb skolēniem $A_0, A_3, A_6, ...$ nav kopīgu draugu; ja tā nebūtu, tad "ceļš" no A līdz B nebūtu īsākais). Tā kā katram skolēnam ir vismaz k draugi, tad katrā no kopām $F_0, F_3, F_6, ...$ ir vismaz k skolēni, no kā seko, ka $\left(\left[\frac{t}{3}\right]+1\right)k \le n$ un $\frac{t}{3} \cdot k \le n$.

Tātad $t \le \frac{3n}{k}$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.9. *Kāds ir mazākais krāsu skaits, ar kurām pietiek, lai izkrāsotu* 2012×2012 *rūtiņu kvadrātu tā, lai jebkuras trīs rūtiņas, kas veido kādu trimino figūru* (*skat.* 8. *zīm., tās var būt arī pagrieztas*) *būtu nokrāsotas dažādās krāsās?*



8. zīm.

Parādīsim, ka uzdevumā prasīto var izpildīt, ja ir 5 krāsas. Kvadrāts 5×5 rūtiņas jānokrāso kā parādīts A39. zīm. un šāda krāsošana jāatkārto, lai aizkrāsotu visu doto rūtiņu kvadrātu 2012×2012.

3	4	5	1	2	3	4
5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	1
2	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	3
4	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	5
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	2
3	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	4
5	1	2	3	4	5	1

A39. zīm.

1	**3**	*a*
2	**4**	*b*
	c	

A40. zīm.

Atliek pierādīt, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt, ja krāsu skaits ir 4 vai mazāk. Katrā kvadrātā 2×2 visām rūtiņām ir jābūt nokrāsotām dažādās krāsās (skat. A40. zīm.). Rūtiņu a var nokrāsot tikai krāsā „2”, rūtiņu b var nokrāsot tikai krāsā „1”. Rūtiņu c nevar krāsot nevienā no krāsām „1”, „2”, „3” vai „4”, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Tātad ar 4 vai mazāk krāsām prasīto nevar izpildīt.

A.AB.10. *Kastē atrodas rotaļu zvēriņi, katram zvēriņam galva un aste nokrāsota vienā no* 2011 *krāsām* (*nav obligāti vienā un tai pašā*). *Zināms, ka iespējams izvēlēties* 2011 *zvēriņus tā, lai to galvas būtu nokrāsotas visās* 2011 *krāsās un astes arī būtu nokrāsotas visās* 2011 *krāsās, pie tam šādi izvēlēties iespējams vairāk nekā divos atšķirīgos veidos. Pierādīt, ka var izņemt no kastes dažus zvēriņus tā, lai no atlikušajiem zvēriņiem šādi izvēlēties varētu tieši divos atšķirīgos veidos.*

Sanumurēsim krāsas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2011. Konstruēsim grafu ar virsotnēm $A_1, A_2, ..., A_{2011}, B_1, B_2, ..., B_{2011}$. Ja zvēriņa galva ir nokrāsota krāsā i un aste – krāsā j, tad grafā virsotnes A_i un B_j savienojam ar šķautni. Šādā veidā katram zvēriņam ir piekārtota grafa šķautne.

Tieši 2011 zvēriņu kopu sauksim par „*pareizu*" kolekciju, ja visas zvēriņu galvas ir nokrāsotas dažādās krāsās un arī visas astes ir nokrāsotas dažādās krāsās. *Pareizai* kolekcijai atbilst tāda grafa šķautņu apakškopa, kura ir tieši 2011 šķautnes un nekādas divas šķautnes neiziet no vienas virsotnes. Šādu šķautņu apakškopu sauksim par *pareizu*. Tātad mums jāizdzēš (jāizņem no kastes daži zvēriņi) dažas šķautnes tā, lai grafa paliek tieši divas *pareizas* šķautņu apakškopas.
No dotā seko, ka grafā ir divas *pareizas* šķautņu apakškopas. Izdzēšam visas šķautnes, kas nepieder nevienai no šīm divām *pareizajām* apakškopām. Katrā *pareizā* apakškopā katrai grafa virsotnei ir tieši viena apakškopas šķautne, kas iziet no šīs virsotnes.
Tad atlikušā grafa katrai virsotnei ir vai nu no tās izejoša šķautne, kas pieder abām *pareizajām* apakškopām, vai arī ir divas šķautnes, kas iziet no šīs virsotnes un katra no šīm šķautnēm pieder savai *pareizajai* kopai. Ja no virsotnes V iziet tieši viena šķautne, tad no šīs šķautnes otras virsotnes neiziet neviena cita šķautne. Tātad grafs sastāv no cikliem un izolētām šķautnēm, kam nav kopīgu virsotņu ar citām šķautnēm. Ievērojam, katram šādam ciklam tā garums ir pāra skaitlis, jo šķautnēm no vienas un no otras *pareizās* apakškopas ir pamīšus jāmainās.
Katra *pareiza* apakškopa ir šādā formā: tā satur visas izolētās šķautnes un pusi no cikla šķautnēm, kurām nav kopīgu virsotņu. Ir tieši divi veidi, kā var izvēlēties cikla šķautnes *pareizai* apakškopai. Grafā ir vismaz viens cikls, jo pretējā gadījumā nebūtu divu dažādu *pareizu* apakškopu. Ja ir vairāk nekā viens cikls, tad no katra cikla, izņemot vienu ciklu, izdzēšam pusi no šķautnēm tā, lai atlikušajām šķautnēm nav kopīgu virsotņu (paliek izolētas šķautnes). Tad atlikušajā grafā ir palicis tieši viens cikls un *pareizu* apakškopu var izvēlēties tieši divos dažādos veidos, kas arī bija jāpierāda.

A.AB. Ģeometrija

A.AB.11. *Trijstūra malu garumi ir a, b un c, tā apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir R, bet ievilktās – r. Pierādīt, ka*

$$\frac{Rr}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{54}.$$

Izmantosim trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

- $S_\Delta = pr = \frac{a+b+c}{2}r$, kur r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss;
- $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$, kur R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Pārveidojam šīs formulas formā $2S_\Delta = (a+b+c)\cdot r$ un $4S_\Delta = \frac{abc}{R}$. Sareizinot iegūtās formulas un pārveidojot, iegūstam:

$$\frac{abc}{2} = (a+b+c)\cdot rR = \frac{rR}{a+b+c}\cdot(a+b+c)^3.$$

Izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam izteiksmes $(a+b+c)^3$ novērtējumu:

$$(a+b+c)^3 \ge (3\sqrt[3]{abc})^3 = 27abc.$$

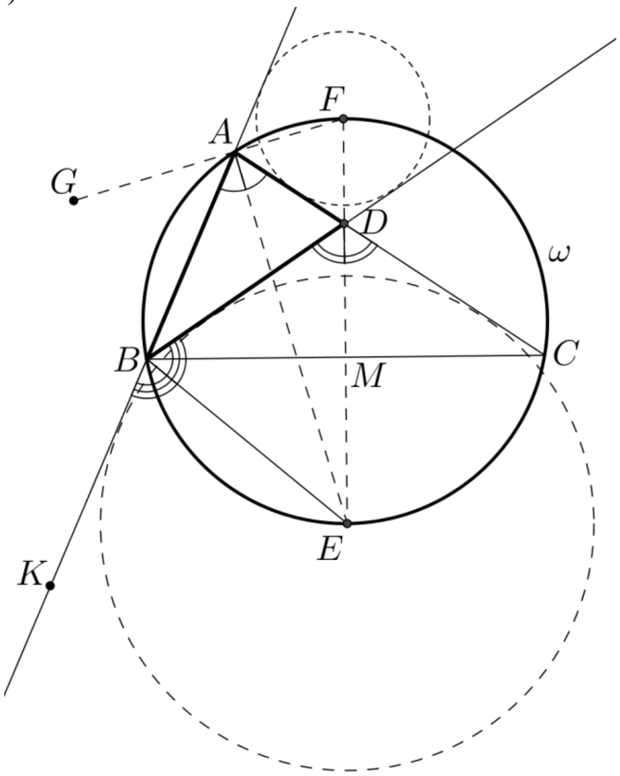
Līdz ar to iegūstam

$$\frac{abc}{2} = \frac{rR}{a+b+c}\cdot(a+b+c)^3 \ge \frac{rR}{a+b+c}\cdot 27abc \text{ jeb } \frac{1}{54} =\ge \frac{rR}{a+b+c},$$

kas arī bija jāpierāda.

A.AB.12. *Šaurleņķu trijstūrī ABC punkts D atrodas uz malas AC (un nesakrīt ne ar A, ne C), zināms, ka* $BD = DC$. *Pierādīt, ka tieši divi no trijstūrim ABD pievilkto riņķa līniju centriem atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas.* (*Riņķa līniju sauc par pievilktu trijstūrim, ja tā pieskaras vienai tā malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem.*)

Ar *E, F* un *G* apzīmējam pievilkto riņķa līniju centrus, kas attiecīgi pieskaras ΔABC malām *BD, AD* un *AB*. Trijstūrim *ABC* apvilkto riņķa līniju apzīmējam ar ω (skat. A41. zīm.).



A41. zīm.

Pierādīsim, ka punkti *F* un *G* abi vienlaicīgi nevar atrasties uz ω.
Trijstūrim pievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu (trijstūra viena iekšējā leņķa un divu ārējo leņķu) krustpunktā. Stari *AF* un *AG* ir $\angle BAD$ divu blakusleņķu bisektrises, tāpēc *A* atrodas uz nogriežņa *FG*. Tāpēc tikai viens no stariem *AF* vai *AG* var krustot ω no *A* atšķirīgā punktā. Līdz ar to uz ω var atrasties tikai viens no punktiem *F* vai *G*.
Pierādīsim, ka punkts *F* atrodas uz ω. Tas izpildās, ja $\angle AFB = \angle DCB$.
Ievērojam, ka

$$\angle BAF = \angle BAD + \frac{1}{2}\angle DAL = \angle BAD + \frac{1}{2}(180° - \angle BAD) = \frac{1}{2}(180° + \angle BAD).$$

No ΔBAF iegūstam

$$\begin{aligned}\angle AFB &= 180° - \angle FBA - \angle BAF = \\ &= 180° - \frac{1}{2}\angle DBA - \frac{1}{2}(180° + \angle BAD) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}\angle DBA - 90° - \frac{1}{2}\angle BAD) = \\ &= \frac{1}{2}(180° - \angle DBA - \angle BAD) = \frac{1}{2}\angle ADB = \\ &= \frac{1}{2}(180° - \angle BDC) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \angle DCB = \angle DCB.\end{aligned}$$

Tātad punkts *F* atrodas uz ω.

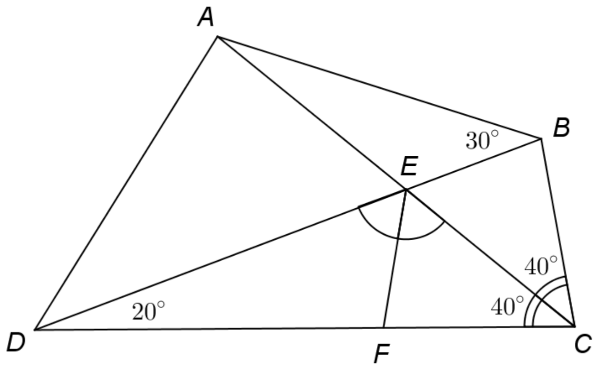
Pierādīsim, ka punkts E atrodas uz ω. Tas izpildās, ja $\angle EAC = \angle EBC$. Ievērojam

$$\angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - \angle ADB - \angle DBA) =$$
$$= \frac{1}{2}(180° - (180° - \angle BDC) - (180° - \angle DBK)) =$$
$$= \frac{1}{2}(180° - (180° - 2\angle EBD)) - (180° - 2\angle EBD)) =$$
$$= \angle BDE + \angle EBD - 90° = 180° - \angle DEB - 90° = 90° - \angle DEB.$$

Tā kā ΔBDC ir vienādsānu $(BD = DC)$, tad DE ir gan bisektrise, gan augstums $(BC \perp DE$ un $\angle BME = 90°)$ un $\angle EBC = 180° - \angle DEB - \angle BME = 90° - \angle DEB$.
Tātad $\angle EAC = \angle EBC$ un punkts E atrodas uz ω.
Līdz ar to esam pierādījuši, ka tieši divi no ΔABD pievilkto riņķa līniju centriem (E un F) atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas ω.

A.AB.13. *Par četrstūri $ABCD$ zināms, ka $\angle ABD = 30°, \angle CDB = 20°$ un $\angle BCA = \angle ACD = 40°$. Aprēķināt $\angle DAC$.*

Apzīmējam diagonāļu AC un BD krustpunktu ar E un leņķa DEC bisektrises krustpunktu ar malu DC – ar F (skat. A42. zīm.).



A42. zīm.

No ΔDEC iegūstam:

- $\angle DEF = \angle FEC = \frac{1}{2}(180° - (\angle EDC + \angle ECD)) = \frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$;
- $\angle BEC = 180° - \angle DEC = 180° - 120° = 60°$ (blakusleņķu īpašība).

No ΔAEB iegūstam:

$$\angle BAE = 180° - (\angle ABE + \angle AEB) = 180° - (\angle ABE + \angle DEC) =$$
$$= 180° - (30° + 120°) = 30°.$$

Tātad ΔAEB ir vienādsānu un $AE = EB$.
Tad $\Delta FEC = \Delta BEC$ (pēc pazīmes "$\ell m \ell$"), jo

- $\angle FEC = \angle BEC = 60°$;
- EC – kopīga mala;
- $\angle FCE = \angle BCE$ pēc dotā.

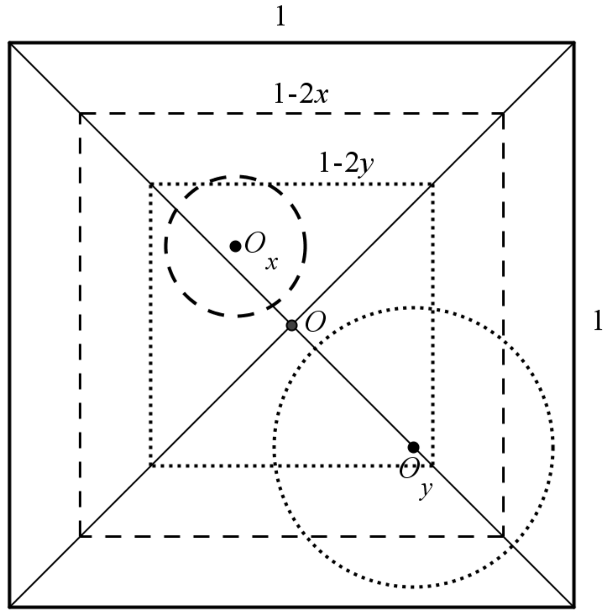
Tātad $EF = BE = AE$.
$\Delta DEF = \Delta DEA$ (pēc pazīmes "$\ell m \ell$"), jo

- $EF = AE$;
- $\angle DEF = \angle DEA = 60°$, jo $\angle DEA = \angle BEC$ (kā krustleņķi);
- ED – kopīga mala.

Līdz ar to $\angle DAE = \angle DFE = 180° - (\angle EDF + \angle DEF) = 180° - (20° + 60°) = 100°$.
Tātad $\angle DAC = 100°$.

A.AB.14. *Dots kvadrāts ar malas garumu* 1*, tā iekšpusē atrodas divi riņķi, kas savstarpēji nepārklājas un neiziet ārpus kvadrāta. Kāda ir lielākā iespējamā riņķu laukumu summa?*

Ar *O* apzīmējam kvadrāta centru, abu riņķu rādiusus apzīmējam attiecīgi ar *x* un *y*, to centrus attiecīgi ar O_x un O_y, attālumu starp riņķu centriem apzīmējam ar *d*. Riņķa centrs O_x atrodas kvadrātā, kura centrs ir punktā *O* un malas garums ir $1-2x$, un O_y atrodas kvadrātā, kura centrs ir punktā *O* un malas garums ir $1-2y$ (skat. A43. zīm.).



A43. zīm.

Mazākais attālums starp O_x un O_y ir $x+y$, jo riņķi nevar pārklāties. Lielākais attālums starp O_x un O_y ir $\sqrt{2}(1-x-y)$, kas ir kvadrāta ar malas garumu $1-x-y$ diagonāles garums. Līdz ar to iegūstam novērtējumu:

$$x+y \le d \le \sqrt{2}(1-x-y).$$

Tātad $x+y \le \sqrt{2}(1-x-y)$.

Novērtēsim izteiksmes $x+y$ vērtību:

$$x+y \le \sqrt{2}-\sqrt{2}(x+y);$$

$$x+y+\sqrt{2}(x+y) \le \sqrt{2};$$

$$(1+\sqrt{2})(x+y) \le \sqrt{2};$$

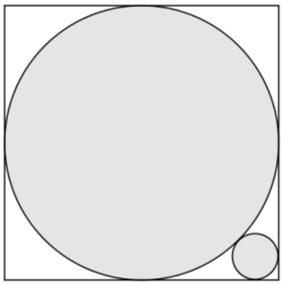
$$x+y \le \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 2-\sqrt{2}.$$

Riņķi nedrīkst atrasties ārpus dotā kvadrāta, tāpēc $0 \le x \le \frac{1}{2}$ un $0 \le y \le \frac{1}{2}$.

Interpretējot šos ierobežojumus ģeometriski, iegūstam, ka lielākā iespējamā riņķu laukumu summa ir gadījumā, kad $x=\frac{1}{2}$ un $y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ (vai otrādi):

$$S_x+S_y=\pi x^2+\pi y^2=\pi(x^2+y^2) \le \pi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^2\right)=\pi\left(\frac{9}{2}-3\sqrt{2}\right).$$

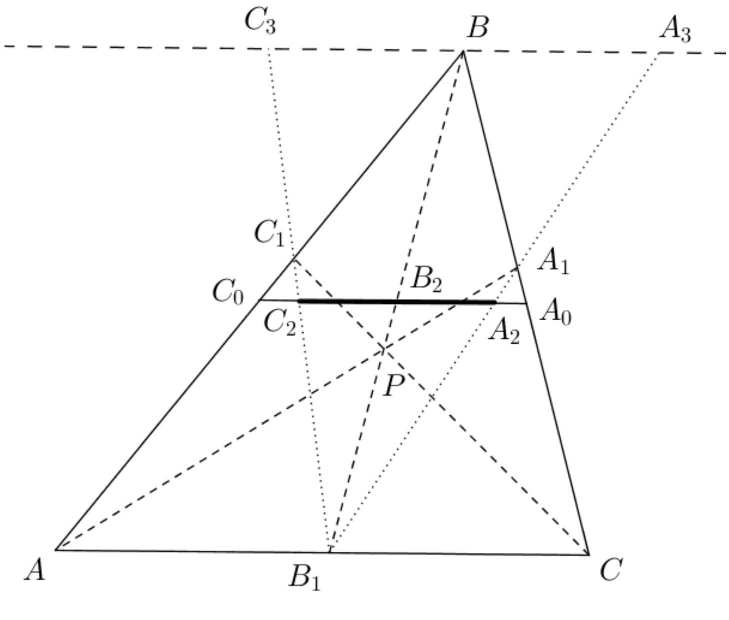
Maksimālo laukumu summu iegūst, ja lielākais riņķis ir ievilkts dotajā kvadrātā un mazākais riņķis ir iezīmēts vienā no četrām nenoklātajām daļām (skat. A44. zīm.).



A44. zīm.

A.AB.15. *Trijstūra ABC iekšpusē izvēlēts patvaļīgs punkts P. Taisnes AP, BP un CP krusto attiecīgo trijstūra pretējo malu punktos* A_1, B_1 *un* C_1. *Punkti* A_0 *un* C_0 *ir attiecīgi malu BC un AB viduspunkti. Taisnes* B_1C_1, B_1A_1 *un* B_1B *krusto taisni* A_0C_0 *attiecīgi punktos* C_2, A_2 *un* B_2. *Pierādīt, ka* B_2 *ir nogriežņa* A_2C_2 *viduspunkts.*

Caur virsotni *B* novelkam taisni paralēlu *AC*, šīs taisnes krustpunktus ar B_1C_1 un B_1A_1 apzīmējam attiecīgi ar C_3 un A_3 (skat. A45. zīm.).



A45. zīm.

$\Delta C_3C_1B \sim \Delta B_1C_1A$ (pēc pazīmes "$\ell\ell$"), jo $\angle C_3C_1B = \angle B_1C_1A$ kā krustleņķi un $\angle C_1C_3B = \angle C_1B_1A$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm C_3B un AB_1, kuras krusto taisne C_3B_1.

Tā kā līdzīgu trijstūru malas ir proporcionālas, tad $\dfrac{C_3B}{AB_1} = \dfrac{BC_1}{AC_1}$.

Līdzīgi no $\Delta BA_1A_3 \sim \Delta CA_1B_1$ (pēc pazīmes "$\ell\ell$") iegūstam, ka $\dfrac{CB_1}{BA_3} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$.

Sareizinām iegūtās vienādības: $\dfrac{C_3B}{AB_1} \cdot \dfrac{CB_1}{BA_3} = \dfrac{BC_1}{AC_1} \cdot \dfrac{CA_1}{BA_1}$. (*)

No Čevas teorēmas seko, ka $\dfrac{BC_1}{AC_1} \cdot \dfrac{AB_1}{CB_1} \cdot \dfrac{CA_1}{BA_1} = 1$ (**)

No (*) un (**) iegūstam, ka $\frac{BC_3}{BA_3} = 1$.

Tā kā A_0 un C_0 ir trijstūra malu viduspunkti, tad A_0C_0 ir trijstūra viduslīnija un $A_0C_0 \parallel AC \parallel A_2C_2 \parallel A_3C_3$.

Līdz ar to $\Delta C_3B_1B \sim \Delta C_2B_1B_2$ un $\Delta A_3B_1B \sim \Delta A_2B_1B_2$ un to malas ir proporcionālas: $\frac{C_3B_1}{C_2B_2} = \frac{BB_1}{B_1B_2}$ un $\frac{BA_3}{B_2A_2} = \frac{BB_1}{B_1B_2}$. Tādēļ $\frac{C_3B}{C_2B_2} = \frac{BA_3}{B_2A_2}$ jeb $\frac{C_3B}{BA_3} = \frac{C_2B_2}{A_2B_2} = 1$.

Iegūstam, ka $C_2B_2 = B_2A_2$ jeb B_2 ir nogriežņa A_2C_2 viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.AB. Skaitļu teorija

A.AB.16. *Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, ka visi pirmskaitļi, ar ko dalās skaitlis n^2+1, ir mazāki nekā n.*

Parādīsim, ka uzdevumā prasītais ir spēkā visiem n formā $n = 2a^2$, kur $a > 1$ un $a \equiv 1 \pmod 5$.

Ja $n = 2a^2$, tad

$$n^2+1 = 4a^4+1 = 4a^4+4a^2+1-4a^2 = (2a^2+1)^2-4a^2 =$$
$$= (2a^2+1-2a)(2a^2+1+2a).$$

Tā kā $2a^2-2a+1 < 2a^2$, tad vēl jāparāda, ka visi reizinātāja $2a^2+2a+1$ dalītāji ir mazāki nekā $2a^2$.

Ja $a \equiv 1 \pmod 5$, tad $2a^2+2a+1 \equiv 2\cdot1+2\cdot1+1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$ un iegūstam $2a^2+2a+1 = 5\cdot\frac{2a^2+2a+1}{5}$.

Ievērojam, ka reizinātājs 5 ir mazāks nekā $2a^2$, jo mazākā a vērtība ir 6.

Parādīsim, ka arī otrs reizinātājs ir mazāks nekā $2a^2$, t. i.,

$$\frac{2a^2+2a+1}{5} < 2a^2;$$
$$8a^2-2a > 1;$$
$$2a(4a-1) > 1.$$

Tā kā $a > 1$, tad pēdējā nevienādība ir patiesa, jo visi kreisās puses reizinātāji ir pozitīvi un lielāki nekā 1.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka visiem skaitļiem $n = 2a^2$, kur $a > 1$ un $a \equiv 1 \pmod 5$, izpildās uzdevumā prasītais, jo skaitļa n^2+1 visi pirmreizinātāji ir mazāki nekā n.

A.AB.17. *Atrast mazāko k, kam izpildās īpašība: starp jebkuriem k pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem ir vismaz viens tāds, kura visu dalītāju summa ir pāra skaitlis.*

Ja $k = 2$, tad, piemēram, skaitļiem 8 un 9 dalītāju summas ir nepāra skaitļi. Tātad $k = 2$ neder.

Pierādīsim, ka $k = 3$.

Pieņemsim, ka n dalītāju summa $\delta(n)$ ir nepāra skaitlis.

Apskatām skaitli $n = 2^r \cdot m$, kur $r \geq 0$ un m ir pozitīvs nepāra skaitlis.

Skaitļiem m un n ir vieni un tie paši nepāra dalītāji, tāpēc $\delta(m)$ un $\delta(n)$ ir vienāda paritāte (t.i., abi skaitļi ir vai nu pāra, vai nepāra).

Skaitļa $\delta(m)$ paritāte ir tāda pati kā skaitlim, kas ir *m* dalītāju skaits, jo visi *m* dalītāji ir nepāra skaitļi.

Ievērojam, ka skaitļa *m* dalītājus var apvienot pāros $(d;\frac{m}{d})$, kur $d \le \sqrt{m}$. Izņēmums ir dalītājs $\sqrt{m}$, kuram nevar piekārtot citu dalītāju.

Secinām, ka skaitļa *m* dalītāju skaits ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja *m* ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

Līdz ar to $\delta(n)$ ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja *n* ir naturāla skaitļa kvadrāts vai naturāla skaitļa kvadrāta reizinājums ar 2.

Tāpēc, ja trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem dalītāju summas ir nepāra skaitļi, tad vismaz divi no šiem skaitļiem ir ne vairāk kā 2. Katrs no tiem ir vai nu naturāla skaitļa kvadrāts, vai arī naturāla skaitļa kvadrāta reizinājums ar 2.

Tātad vismaz divi no šiem skaitļiem ir naturālu skaitļu kvadrāts vai vismaz divi - ir naturālu skaitļu reizinājums ar 2.

Abos gadījumos iegūstam, ka divu dažādu naturālu skaitļu kvadrātu starpība ir ne mazāka kā 2, kas nav iespējams.

Līdz ar to kādam no trīs pēc kārtas ņemtiem skaitļiem dalītāju summa būs pāra skaitlis. tātad mazākā *k* vērtība ir 3.

A.AB.18. *Atrisināt naturālos skaitļus vienādojumu*

$$a^{bc}+b^{ac}+c^{ab}=3abc.$$

Apskatām gadījumu, kad $a \ge 2$, $b \ge 2$, $c \ge 2$.

Pieņemsim, ka *c* ir lielākais no skaitļiem *a, b, c*.

Tad iegūstam novērtējumu:

$$a^{bc}+b^{ca}+c^{ab} \ge a^{2\cdot 2}+b^{2\cdot 2}+c^{2\cdot 2}=a^4+b^4+c^4>b^4+c^4\ge 2b^2c^2=$$
$$=2b\cdot c\cdot bc \ge 2\cdot 2\cdot a\cdot bc>3abc.$$

Nevienādība (*) izriet no patiesas nevienādības $(b^2-c^2)^2\ge 0$ jeb $b^4-2b^2c^2+c^4\ge 0$.

Šajā gadījumā esam ieguvuši, ka $a^{bc}+b^{ca}+c^{ab}>3abc$.

Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma. Atliek apskatīt gadījumus, kad viens vai vairāki no skaitļiem *a, b* vai *c* ir vienādi ar 1:

1. Pieņemsim, ka $a=1$.

Tad doto vienādojumu var pārrakstīt kā $1+b^c+c^b=3bc$.

Ja $b\ge 3$, $c\ge 3$ un $c\ge b$, tad iegūstam

$$1+b^c+c^b\ge 1+b^3+c^3>c^3=c\cdot c\cdot c\ge 3\cdot b\cdot c.$$

no kā seko, ka vienādojumam nav atrisinājuma.

Ja $b=2$ un $c\ge 2$, tad iegūstam vienādojumu $1+2^c+c^2=6c$,

kuru var apskatīt kā kvadrātvienādojumu attiecībā pret *c*:

$$c^2-6c+1+2^c=0.$$

Aprēķinām iegūtā vienādojuma saknes:

$$c=3\pm\sqrt{9-(1+2^c)}=3\pm\sqrt{8-2^c}. \qquad (*)$$

Lai *c* būtu naturāls skaitlis, tad $8-2^c$ jābūt naturāla skaitļa kvadrātam. Iespējami divi gadījumi:

- $8-2^c=4$ jeb $c=2$ (neder, jo no (*) seko, ka $c=1$);
- $8-2^c=0$ jeb $c=3$.

Ja $c=3$, tad iegūstam, ka (1; 2; 3) ir dotā vienādojuma atrisinājums.

Simetrijas dēļ iegūstam, ka dotajam vienādojumam atrisinājumi ir arī

(1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

2. Pieņemsim, ka $a=1$ un $b=1$.

Tad iegūstam vienādojumu: $1+1+c=3c$, kuru atrisinot iegūstam, ka $2c=2$ jeb $c=1$.

Tātad dotā vienādojuma atrisinājumi naturālos skaitļos ir

(1; 1; 1), (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

A.AB.19. *Atrast visus naturālos skaitļus d, kam piemīt sekojoša īpašība: ja n dalās ar d, tad arī jebkurš skaitlis m, kas iegūts no n, pārliekot tā (decimālā pierakstā) ciparus citā secībā, dalās ar d.*

Pieņemsim, ka *d* ir *k*-ciparu skaitlis ar īpašību: ja naturāls skaitlis *n* dalās ar *d*, tad ar *d* dalās arī jebkurš naturāls skaitlis *m*, kura cipari ir tādi paši kā skaitlim *n*.

Tādā gadījumā eksistē ($k+2$)-ciparu skaitlis, kas sākas ar „10”, t. i., $\overline{10a_1a_2...a_k}$, kurš dalās ar *d*. Ja tā nebūtu, tad *d* daudzkārtnim, kas mazāks nekā 10^{k+1} kā nākamais sekotu daudzkārtnis, kas lielāks vai vienāds ar $11\cdot10^k$. Bet tas nozīmētu, ka $d>10^k$, kas ir pretrunā ar to, ka *d* ir *k*-ciparu skaitlis, tātad $d<10^k$.

Ja $\overline{10a_1a_2...a_k}$ dalās ar *d*, tad, pēc uzdevuma nosacījumiem, ar *d* dalās arī skaitļi $\overline{a_1a_2...a_k10}$ un $\overline{a_1a_2...a_k01}$. Tā kā šie abi skaitļi dalās ar *d*, tad arī to starpībai $\overline{a_1a_2...a_k10}-\overline{a_1a_2...a_k01}=9$ jādalās ar *d*. Tātad *d* vērtības var būt tikai 1, 3 vai 9.

Tā kā ar 1 dalās jebkurš skaitlis, tad vērtība $d=1$ atbilst uzdevuma nosacījumiem. Izmantojot dalāmības pazīmes ar 3 un 9, iegūstam, ka der arī vērtības $d=3$ un $d=9$.

A.AB.20. *Doti naturāli skaitļi a un b, par kuriem zināms, ka jebkuram naturālam skaitlim n izpildās* $d(na)\ge d(nb)$ (*ar* $d(k)$ *apzīmē skaitļa k dalītāju skaitu*). *Pierādīt, ka a dalās ar b.*

Uzrakstām skaitļus *a* un *b* sadalījumu pirmreizinātājos:

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot p_m^{\alpha_m} \quad \text{un} \quad b=p_1^{\beta_1}\cdot...\cdot p_m^{\beta_m}.$$

(dažām vērtībām *k* kāpinātāji α_k un b_k var būt 0).

Parādīsim, ka katram *k* izpildās nevienādība $\alpha_k\ge\beta_k$. Pieņemsim, ka šī nevienādība neizpildās kādai *k* vērtībai, piemēram, $\alpha_1<\beta_1$.

Ja $n=(p_2...p_n)^s=p_2^s\cdot...\cdot p_m^s$, tad

$$na=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2+s}\cdot...\cdot p_m^{\alpha_m+s} \text{ un } nb=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2+5}\cdot...\cdot p_m^{\beta_m+s}.$$

Izmantojot faktu, ka skaitļa $a_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot...\cdot p_m^{a_m}$, kur $p_1,p_2,...p_n$ ir pirmskaitļi, dalītāju skaits ir $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_m$, iegūstam

$$\frac{d(na)}{d(nb)}=\frac{\alpha_1(s+\alpha_2)...(s+\alpha_n)}{\beta_1(s+\beta_2)...(s+\beta_m)}.$$

Pietiekami lielām *s* vērtībām iegūstam novērtējumu $\dfrac{d(na)}{d(nb)}=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}<1$.

Tad $d(na)<d(nb)$, kas ir pretrunā ar doto, ka visiem *n* izpildās $d(na)\ge d(nb)$.

Tātad visām *k* vērtībām $\alpha_k\ge\beta_k$ un esam pierādījuši, ka *a* dalās ar *b*.

A.BW. Starptautiskās matemātikas komandu sacensības "Baltijas ceļš 2012"

A.BW. Algebra

A.BW.1. *Veselos skaitļus no* 1 *līdz* 360 *sadala deviņās pēc kārtas sekojošu skaitļu apakškopās* (*apakškopas ir netukšas un katrs skaitlis atrodas tieši vienā no apakškopām*). *Apakškopās esošo skaitļu summas izvieto* 3×3 *kvadrāta rūtiņās. Vai iespējams, ka šādi izveidojas maģiskais kvadrāts?*
Piezīme. Skaitļu kvadrātu sauc par maģisku, ja skaitļu summas pa rindiņām, stabiņiem un abās diagonālēs visas ir vienādas.

Sadalām visus skaitļus 9 grupās, kur katrā grupā ir skaitļi $40k+1, 40k+2, \ldots, 40k+40$, $k=0,1,2,...,8$. Ievērojam, ka katras grupas skaitļu summu var aprēķināt pēc aritmētiskās progresijas locekļu summas formulas:

$$(40k+1+40k+40)\cdot 20 = 1600k+820,\ k=0,1,2,...,8.$$

Vēl jāparāda, kā no progresiju summām 820, 2420, …, 13620 uzkonstruēt maģisko kvadrātu. Vispirms saliekam maģisko kvadrātu, kurš sastāv no skaitļiem $0,1,2,...,8$ (skat. A46. zīm.). Pareizinām visus A46. zīm. dotā kvadrāta skaitļus ar 1600 un pieskaitām 820. Līdz ar to ir iegūts uzdevumā meklētais maģiskais kvadrāts (skat. A47. zīm.).

5	0	7
6	4	2
1	8	3

A46. zīm.

8820	820	12020
10420	7220	4020
2420	13620	5620

A47. zīm.

A.BW.2. *Doti reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka*

$$ab+bc+ca+\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\} \le 1+\frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Simetrijas dēļ varam pieņemt, ka $a\le b\le c$, tad $\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}=c-a$. Līdz ar to sākotnējo nevienādību var pārrakstīt formā:

$$ab+bc+ca+c-a \le 1+\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

ko var ekvivalenti pārveidot:

$$c-a \le 1+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac);$$

$$c-a \le 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ab+b^2);$$

$$c-a \le 1+\frac{1}{6}((a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2). \qquad (1)$$

Tātad pietiek pierādīt nevienādību (1).

Pēc nevienādības starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \ge \dfrac{x+y}{2}$ spēkā ir nevienādība $\sqrt{\dfrac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}} \ge \dfrac{(c-b)+(b-a)}{2} = \dfrac{c-a}{2}$.

Kāpinot iegūtās nevienādības abas puses izteiksmes (nenegatīvas) kvadrātā, iegūstam patiesu nevienādību:

$$\frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2} \geq \frac{(c-a)^2}{4};$$

$$(c-b)^2+(b-a)^2 \geq \frac{1}{2}(c-a)^2;$$

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2 \geq \frac{3}{2}(c-a)^2.$$

Izmantojot iegūtu nevienādību, iegūstam nevienādības (1) labās puses izteiksmes novērtējumu:

$$1+\frac{1}{6}((a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2) \geq 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}(c-a)^2 = 1+\frac{1}{4}(c-a)^2. \quad (2)$$

Pierādīsim, ka

$$1+\frac{1}{4}(c-a)^2 \geq c-a. \quad (3)$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(c-a)+1 \geq 0;$$

$$\left(\frac{1}{2}(c-a)-1\right)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, tāpēc patiesa ir arī nevienādība (3). Līdz ar to no (2) un (3) seko, ka patiesa ir arī nevienādība (1). Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad patiesa ir arī dotā nevienādība.

A.BW.3. ***a)*** *Pierādīt, ka vienādojumam*

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3$$

katrā intervālā starp pēc kārtas sekojošiem veseliem pozitīviem skaitļiem ir tieši viens reāls atrisinājums.

b) *Pierādīt, ka neviens no reālajiem pozitīvajiem šī vienādojuma atrisinājumiem nav racionāls skaitlis.*

Piezīme. Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmēts lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x.

a) Apzīmējam $k=\lfloor x \rfloor$ un $y=x-k$. Ievērojam, ka $y\in[0;1)$ katrai x vērtībai un tai atbilstošajai k vērtībai. Sākotnējo vienādojumu var pārveidot:

$$k((k+y)^2+1)=(k+y)^3;$$

$$(k+y)^3-k(k+y)^2=k;$$

$$(k+y-k)(k+y)^2=k;$$

$$y(k+y)^2=k.$$

Apskatām funkciju $f(y)=y(k+y)^2$ patvaļīgam k. Intervālā $[0;1]$ šī funkcija ir augoša un nepārtraukta, neatkarīgi no k vērtības. Tā kā $f(0)=0<k$ un $f(1)=(k+1)^2>k$, eksistē tikai viena vērtība $y_0\in(0;1)$ tāda, ka $f(y_0)=k$ (t. i., y_0 ir aplūkotā vienādojuma atrisinājums). Katrs k atbilst tikai vienam intervālam starp pēc kārtas sekojošiem veseliem pozitīviem skaitļiem, līdz ar to katrā šādā intervālā dotajam vienādojumam būs tieši viens reāls atrisinājums.

b) Ievērojam, ka uzdevumā dotajam vienādojumam nav neviena pozitīva vesela atrisinājuma (pretējā gadījumā iegūstam $\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x(x^2+1) = x^3 + x \neq x^3$, ja $x > 0$).

Pieņemsim pretējo: $x = k + y$ ir racionāls, tāpēc to varam pierakstīt formā $x = \frac{n}{d}$, kur d un n ir pozitīvi veseli skaitļi, kuriem nav kopīgu dalītāju. Tad doto vienādojumu var pārrakstīt formā

$$k \cdot \left(\left(\frac{n}{d} \right)^2 + 1 \right) = \left(\frac{n}{d} \right)^3;$$

$$\frac{k(n^2+d^2)}{d^2} = \frac{n^3}{d^3};$$

$$dk(n^2+d^2) = n^3. \qquad (*)$$

Tā kā x nav vesels skaitlis, tad vismaz viens d dalītājs ir pirmskaitlis. No vienādojuma (*) seko, ka šis pirmskaitlis ir arī n^3 (līdz ar to arī n) dalītājs, kas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka d un n ir pozitīvi veseli skaitļi, kuriem nav kopīgu dalītāju. Tātad x nav racionāls skaitlis.

Piezīme. a) gadījumā varēja apskatīt funkciju $g(y) = y(k+y)^2 - k$ un, izmantojot šīs funkcijas atvasinājumu intervālā $(0;1)$, pierādīt, ka g ir augoša funkcija intervālā $[0;1]$.

A.BW.4. *Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem veselu skaitļu pāriem* (a, b) *starp vienādojuma*

$$x^{2012} = ax + b$$

atrisinājumiem ir divi dažādi reāli skaitļi, kuru reizinājums ir 1.

Ievērojam, ka jebkuram veselam skaitlim $m > 2$ kvadrāttrinomam $x^2 - mx + 1$ ir divas dažādas saknes (diskriminants $D = m^2 - 4$), kuru reizinājums ir 1 (seko no Vjeta teorēmas).

Ievērojam arī, ka jebkuram veselam skaitlim $m > 2$ eksistē tāds veselu skaitļu pāris (a_m, b_m), ka polinoms $x^{2012} - a_m x - b_m$ dalās ar polinomu $x^2 - mx + 1$. Dalot x^{2012} ar $x^2 - mx + 1$, iegūst atlikumu $R_m(x)$, kas ir pirmās kārtas polinoms ar veseliem koeficientiem, t. i., $R_m(x) = a_m x + b_m$, kur a_m un b_m – kaut kādi veseli skaitļi, kas atbilst tam, kas vajadzīgs.

Tātad fiksētam $m > 2$ polinoma $x^2 - mx + 1$ katra sakne ir arī polinoma $x^{2012} - a_m x - b_m$ sakne. Līdz ar to vienādojuma $x^{2012} = a_m x + b_m$ atrisinājumu kopa satur divas polinoma $x^2 - mx + 1$ saknes, kuru reizinājums ir 1. Tas nozīmē, ka pārim $(a, b) = (a_m, b_m)$ piemīt nepieciešamā īpašība.

Vēl jāpierāda, ka, m vietā liekot visus veselos skaitļus, kas lielāki nekā 2, mēs iegūsim bezgalīgi daudz dažādus pārus (a_m, b_m). Ja $m_1 \neq m_2$, tad polinomu $x^2 - m_1 x + 1$ un $x^2 - m_2 x + 1$ saknes ir atšķirīgas (kopīgajai saknei būtu jābūt šo divu polinomu starpības $(m_2 - m_1)x$ saknei, kas ir 0, taču 0 nav sakne nevienam no šiem diviem polinomiem). Tā kā polinomam $x^{2012} - ax - b$ ir ne vairāk kā 2012 dažādas saknes, tad tas dalās ar $x^2 - mx + 1$ ne vairāk kā 1006 dažādām m vērtībām. Tātad vienu un to pašu pāri (a_m, b_m) var iegūt no galīga skaita (maksimums 1006 dažādām) m vērtībām. Līdz ar to uzdevumā prasītais izpildās bezgalīgi daudziem pāriem (a,b).

A.BW.5. *Atrast visas tādas funkcijas $f : R \to R$, kurām vienādība*

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

izpildās visiem reāliem skaitļiem x un y.

Ievietojot $y=0$, iegūstam $f(x) = f(x) + f(f(1))$, tātad $f(f(1)) = 0$. Izmantojot iegūtu vērtību un ievietojot dotajā vienādojumā $x=0$, iegūstam $f(y) = f(-y)$ visiem y, tātad f ir pāra funkcija.

Ievietojot dotajā vienādojumā $x=1$, iegūst $f(1+y) = f(1-y) + f(f(1-y))$. Tā kā f ir pāra funkcija, tad patiesa ir arī vienādība $f(-1-y) = f(1-y) + f(f(1-y))$. Tātad $f(f(1-y)) = f(-1-y) - f(1-y)$ jeb $f(f(1-y)) = f(1-y-2) - f(1-y)$. Tā kā $1-y$ nosedz visas reālo skaitļu vērtības, varam secināt, ka

$$f(f(z)) = f(z-2) - f(z) \qquad (1)$$

visiem reāliem skaitļiem z.

Ievietojot vienādojumā (1) z vietā $(-z)$ un izmantojot to, ka f ir pāra funkcija, iegūst vienādojumu:

$$f(f(-z)) = f(-z-2) - f(-z);$$

$$f(f(z)) = f(z+2) - f(z). \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka

$$f(z+2) = f(z-2) \qquad (3)$$

visiem reāliem skaitļiem z.

Ievietojot dotajā vienādojumā $y=2$ un lietojot sakarību (3), iegūstam $f(f(1-2x)) = 0$ visiem reāliem x. Tā kā $1-2x$ nosedz visas reālās vērtības, varam secināt, ka

$$f(f(z)) = 0$$

visiem reāliem skaitļiem z. Izmantojot iegūto f vērtību, doto vienādojumu pārrakstām formā:

$$f(x+y) = f(x-y). \qquad (4)$$

Ievietojot vienādībā (4) $x=y$, iegūstam $f(2x) = f(0)$, tātad f ir konstante, jo $2x$ nosedz visas reālās vērtības. Tā kā ir spēkā $f(f(z)) = 0$, tad 0 ir jābūt vienai no funkcijas f vērtībām. Līdz ar to $f(x) \equiv 0$ ir vienīgā funkcija, kas apmierina doto vienādojumu.

A.BW. Kombinatorika

A.BW.6. *Uz gala stāv* 2012 *lampas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli - katrā gājienā spēlētājs pārslēdz vienas lampas slēdzi, taču nedrīkst izveidoties tāds ieslēgto lampu izvietojums, kāds jau kopš spēles sākuma uz galda ir bijis. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?*

Pirmais spēlētājs izvēlas vienu lampu un spēles laikā pārslēdz tikai to. Otrais spēlētājs šo lampu nekad nevarēs pārslēgt (jo tad veidotos lampu izvietojums, kāds jau ir bijis), tāpēc viņam vienmēr būs jāizvēlas kāda cita lampa, lai iegūtu citu ieslēgto lampu izvietojumu. Rezultātā pirmajam spēlētājam vienmēr būs gājiens, bet otrais spēlētājs pēc kāda laika paliks bez gājiena, jo lampu skaits ir galīgs. Tātad pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.

A.BW.7. *Rūtiņu kvadrātā* 2012×2012 *uz diagonāles, kas labo augšējo stūri savieno ar kreiso apakšējo stūri, ir iekrāsotas dažas rūtiņas. Neviena stūra rūtiņa nav iekrāsota. Katrā kvadrāta rūtiņā ieraksta veselu skaitli šādā veidā. Visās augšējās rindas un kreisās kolonnas rūtiņās ieraksta* 1. *Visās iekrāsotajās rūtiņās ieraksta* 0. *Katrā no pārējām rūtiņām ieraksta skaitli, kas vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti rūtiņās virs un pa kreisi no tās. Pierādīt, ka labajā apakšējā stūrī ierakstītais skaitlis nedalās ar* 2011.

Rūtiņu kvadrātu pagriežam par $45°$ tā, lai augšējais kreisais stūris ir augšpusē. Šādi var pamanīt, ka skaitļi, kas ierakstīti rūtiņu kvadrātā, veido Paskāla trijstūri.
Ja nebūtu iekrāsoto rūtiņu, tad apakšējā rūtiņā (kas agrāk bija labais apakšējais stūris) būtu ierakstīts skaitlis $C_{4022}^{2011}=\dfrac{4022!}{2011!\cdot2011!}$, kas ar 2011 nedalās, jo 2011 ir pirmskaitlis. Skaitļi, kas atrodas rūtiņās uz diagonāles (kas labo augšējo stūri savienoja ar kreiso apakšējo stūri un kas tagad ir horizontāla), būtu izsakāmi formā $C_{2011}^{k}=\dfrac{2011!}{(2011-k)!\cdot k!}$, tātad visi uz diagonāles izvietotie skaitļi, izņemot abās kvadrāta stūra rūtiņās rakstītos skaitļus, dalītos ar 2011.
Ja visus skaitļus uz šīs diagonāles aizstāj ar atlikumiem pēc moduļa 2011, tad visās rūtiņās, neatkarīgi no tā, vai rūtiņa ir izkrāsota vai nē, būtu “0”, izņemot stūra rūtiņas, kurās saglabājas vērtība “1”. Pēc šīs aizvietošanas, visi skaitļi, kas ir zem šīs diagonāles, tiek aizstāti ar atlikumiem pēc moduļa 2011. Iegūstam, ka visi skaitļi zem diagonāles tagad ir aizstāti ar “0”, izņemot gar malām tagad ir “1” un apakšējā stūra rūtiņā ir “2”. Tātad atlikums skaitlim, kas ierakstīts apakšējā rūtiņā, pēc moduļa 2011, ir 2. Līdz ar to šajā rūtiņā ierakstītais skaitlis nedalās ar 2011, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.8. *Orientēts grafs nesatur orientētus ciklus. Katra orientēta ceļa šķautņu skaits nepārsniedz* 99. *Pierādīt, ka šī grafa šķautnes ir iespējams izkrāsot divās krāsās tā, ka šķautņu skaits katrā vienkrāsainā orientētā ceļā nepārsniedz* 9.

Katrai grafa virsotnei piekārtosim skaitli no 0 līdz 99, kur šis skaitlis norāda garākā ceļa garumu, kas beidzas konkrētajā virsotnē. Tādējādi katra šķautne ir orientēta no virsotnes ar mazāku skaitli uz virsotni ar lielāku skaitli. Nokrāsosim šķautni sarkanu, ja virsotnei ar lielāko skaitli desmitu cipars ir lielāks nekā virsotnei ar mazāko skaitli.; citādi nokrāsosim šķautni zilu. Tā kā desmitu skaits ir tāds pats visās virsotnēs uz jebkura zilā ceļa, šāda ceļa garums nepārsniegs 9. Līdzīgi ir sarkanajiem ceļiem - desmitu skaits ir atšķirīgs virsotnēs uz jebkura sarkanā ceļa, arī šeit ceļa garums nevar pārsniegt 9, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.9. *Katrā kvadrāta* 5×5 *rūtiņā ir ierakstīta* 0. *Patvaļīgā rūtiņā un tās kaimiņu rūtiņās ierakstītos skaitļus drīkst palielināt par* 1. *Vai šādu darbību rezultātā ir iespējams panākt, ka visās kvadrāta rūtiņās vienlaicīgi atrodas skaitļi* 2012*?*
Piezīme. Par kaimiņu rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.

Pierādīsim, ka uzdevumā prasītais nav iespējams. Ar $a_{(i,j)}$ apzīmēsim skaitli, kas ierakstīts rūtiņā, kura atrodas i kolonnā un j rindā. Katrai rūtiņai piekārtojam koeficientu $c_{(i,j)}$ tā, lai

$$S=\sum_{1\le i,j\le5}c_{(i,j)}\cdot a_{(i,j)}$$

pieaugtu par vienu un to pašu skaitli katru reizi, kad tiek izvēlēta kāda rūtiņa un pieskaitīti vieninieki. Ja koeficientus $c_{(i,j)}$ izvēlas tā, kā parādīts A48. zīm., tad summa S pieaug par 22 katru reizi, kad izvēlas kādu rūtiņu. Līdz ar to S vienmēr dalīsies ar 22. Visu koeficientu $c_{(i,j)}$ summa ir 138. Ja katrā rūtiņā būtu skaitlis 2012, tad

$$S = 138 \cdot 2012 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 503.$$

Šādu summu iegūt nevar, jo tā nedalās ar 22. Tātad visās rūtiņās nevar būt ierakstīts skaitlis 2012.

8	7	5	7	8
7	2	3	2	7
5	3	10	3	5
7	2	3	2	7
8	7	5	7	8

A48. zīm.

A.BW.10. *Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli. Pirms spēles A izvēlas* 1000 *nepāra pirmskaitļus* (*ne obligāti dažādus*)*, tad B izvēlas pusi no tiem un uzraksta tos uz tāfeles. Katrā spēles gājienā kaut kādam veselam pozitīvam skaitlim n spēlētājs izvēlas kaut kādus uz tāfeles esošus pirmskaitļus* $p_1, p_2, ..., p_n$*, nodzēš tos un vietā uzraksta skaitļa* $p_1 p_2 ... p_n - 2$ *pirmreizinātājus* (*ja skaitļa* $p_1 p_2 ... p_n - 2$ *sadalījumā pirmreizinātājos kāds pirmskaitlis ir sastopams k reizes, tad to šajā gājienā uzraksta k reizes*)*. Pirmo gājienu izdara A. Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka vienam no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija, kā arī noteikt, kuram tā ir.*
Piezīme. Tā kā skaitlim 1 *nav pirmreizinātāju, tad viena skaitļa* 3 *nodzēšana ir atļauts gājiens.*

Pierādīsim, ka uzvarošā stratēģija ir spēlētājam *A*.
Spēlētājam *A* jāizvēlas tādi 1000 pirmskaitļi, kas kongruenti ar 1 pēc moduļa 4. Tātad, kad spēle sāksies, uz tāfeles būs uzrakstīti 500 pirmskaitļi, kas kongruenti ar 1 pēc moduļa 4.
Ar *P* apzīmēsim paritāti uz tāfeles esošo pirmskaitļu skaitam, kas kongruenti ar 3 pēc moduļa 4. Spēles sākumā $P = 0$, tātad *P* ir pāra.
Ievērojam, ka skaitļa pirmreizinātāju, kas kongruenti ar 3 pēc moduļa 4, skaits ir

- pāra, ja skaitlis ir kongruents ar 1 pēc moduļa 4 ($p_1, p_2, ..., p_{2k}$ ir kongruenti ar 3 pēc moduļa 4, tad $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2k} \equiv 3^{2k} \equiv 9^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 4$);
- nepāra, ja skaitlis ir kongruents ar 3 pēc moduļa 4 ($p_1, ..., p_{2k+1}$ ir kongruenti ar 3 pēc moduļa 4, tad $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2k+1} \equiv 3^{2k+1} \equiv 9^k \cdot 3 \equiv 1^k \cdot 3 \equiv 3 \pmod 4$).

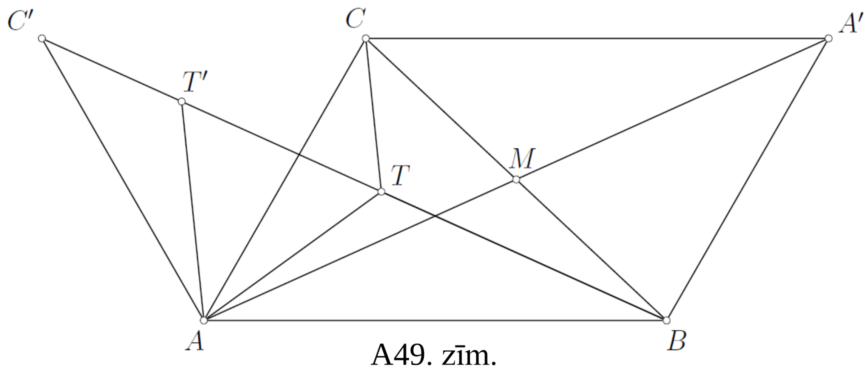
Pēc katra gājiena *P* paritāte mainās, jo to pirmskaitļu, kas kongruenti ar 3 pēc moduļa 4, skaits starp $p_1, p_2, ..., p_n$ un skaitļa $p_1 p_2 ... p_n - 2$ sadalījumā pirmreizinātājos ir ar atšķirīgu paritāti. Tātad *P* ir nepāra pēc katra spēlētāja *A* gājiena un pāra pēc katra spēlētāja *B* gājiena, līdz ar to *A* nevar zaudēt. Tā kā visu skaitļu, kas atrodas uz tāfeles, reizinājums ar katru gājienu samazinās, spēle kādreiz beigsies, un *A* uzvarēs.

A.BW. Ģeometrija

A.BW.11. *Trijstūra ABC* ($\angle A = 60°$) *iekšpusē izvēlēts tāds punkts T, ka* $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. *Punkts M ir BC viduspunkts. Pierādīt, ka* $TA + TB + TC = 2AM$.

Trijstūri ABC pagriežam ap punktu i par $60°$ (skat. A49. zīm.) – punkti T un C attiecīgi attēlojas par punktiem T' un C'. No tā seko, ka trijstūris ATT' ir vienādmalu (jo $\angle TAT' = 60°$ un $AT = AT'$) un ka $\angle AT'C' = 120°$ un $C'T' = CT$. Tātad punkti B, T, T', C' atrodas uz vienas taisnes ($\angle C'T'T = \angle T'TB = 180°$) un $C'T' + T'T + TB = TC + TA + TB = BC'$.

Atliekam tādu punktu A' tā, lai $ABA'C$ būtu paralelograms. Pēc paralelograma īpašības punkts M ir diagonāļu krustpunkts, tātad $2AM = AA'$. Atliek pierādīt, ka $\Delta BAC' = \Delta ABA'$. Šie trijstūri ir vienādi (pēc pazīmes "$m\ell m$"), jo BA ir kopīga mala, $\angle BAC' = 120° = \angle A'BA$ un $AC' = BA'$. Tātad $BC' = BC = TA + TB + TC$, kas arī bija jāpierāda.



A49. zīm.

A.BW.12. *Uz riņķa līnijas dotajā secībā izvietoti punkti* $P_0, P_1, ..., P_8 = P_0$. *Punkts Q atrodas daudzstūra* $P_0P_1...P_7$ *iekšpusē, pie tam* $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$, *kur* $i = 1, ..., 8$. *Pierādīt, ka summas*

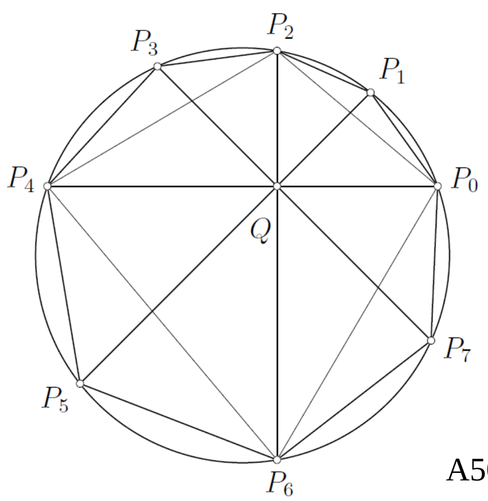
$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2$$

vērtība ir minimāla tad un tikai tad, ja Q ir riņķa līnijas centrs.

Izmantojot kosinusu teorēmu ΔP_iQP_{i-1} (skat. A50. zīm.), iegūstam vienādības:

$$P_iP_{i-1}^2 = QP_{i-1}^2 + QP_i^2 - 2 \cdot QP_{i-1} \cdot QP_i \cdot \cos\angle P_iQP_{i-1};$$

$$P_iP_{i-1}^2 = QP_{i-1}^2 + QP_i^2 - \sqrt{2} \cdot QP_{i-1} \cdot QP_i.$$



A50. zīm.

Izmantojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2 = \sum_{i=1}^{8}(2\cdot QP_i{}^2 - \sqrt{2}\cdot QP_{i-1}\cdot QP_i) = 2\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{8}\sqrt{QP_{i-1}^2\cdot QP_i^2} \geq$$

$$\geq 2\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{8}\frac{QP_{i-1}^2 + QP_i^2}{2} = 2\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 = (2-\sqrt{2})\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 .$$

Vienādība izpildās tad un tikai tad, ja visi attālumi QP_i ir vienāda garuma, t. i., Q ir riņķa līnijas centrs. Vēl jāpierāda, ka summas $\sum_{i=1}^{8} QP_i^2$ vērtība nav atkarīga no Q.

Ievērojam, ka četrstūri $P_0P_2P_4P_6$ un $P_1P_3P_5P_7$ ir ievilkti četrstūri ar perpendikulārām diagonālēm. Riņķa līnijas diametru apzīmējam ar d. Izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam:

- ΔP_0QP_2: $QP_0^2 + QP_2^2 = P_0P_2^2$;
- ΔP_4QP_6: $QP_4^2 + QP_6^2 = P_4P_6^2$;
- ΔP_0QP_6: $QP_0^2 + QP_6^2 = P_0P_6^2$;
- ΔP_2QP_4: $QP_2^2 + QP_4^2 = P_2P_4^2$;

Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam

$$2QP_0^2 + 2QP_2^2 + 2QP_4^2 + 2QP_6^2 = (P_0P_2^2 + P_0P_6^2) + (P_2P_4^2 + P_4P_6^2);$$

$$2QP_0^2 + 2QP_2^2 + 2QP_4^2 + 2QP_6^2 = P_2P_6^2 + P_2P_6^2;$$

$$2QP_0^2 + 2QP_2^2 + 2QP_4^2 + 2QP_6^2 = 2d^2;$$

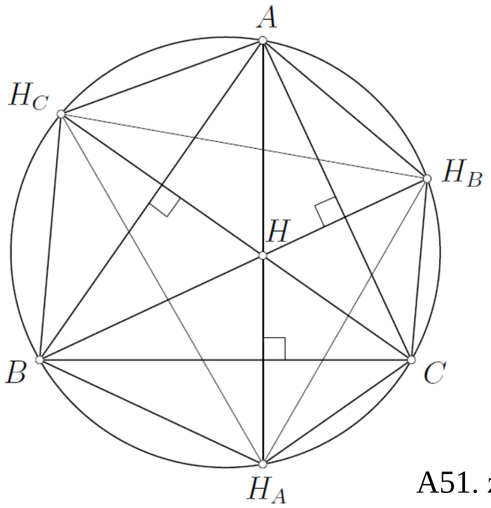
$$QP_0^2 + QP_2^2 + QP_4^2 + QP_6^2 = d^2.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $QP_1^2 + QP_3^2 + QP_5^2 + QP_7^2 = d^2$.

Tātad esam ieguvuši, ka $\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 = 2d^2$. Līdz ar to ir pierādīts, ka izteiksme $\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2$ savu minimālo vērtību sasniedz tad un tikai tad, ja Q ir riņķa līnijas centrs.

A.BW.13. *Trijstūris ABC ir šaurleņķu trijstūris, H ir tā augstumu krustpunkts. Ar* H_A, H_B *un* H_C *apzīmēts attiecīgi no virsotnēm A, B un C vilkto augstumu otrs krustpunkts ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka* $\Delta H_A H_B H_C$ *laukums nepārsniedz* ΔABC *laukumu.*

Izmantosim trijstūra augstumu krustpunkta (ortocentra) *H* īpašību: punkti *H* un H_C ir simetriski attiecībā pret malu *AB* (t. i., taisne *AB* dala nogriezni HH_C uz pusēm un $AB \perp HH_C$), tāpat arī *H* un H_B ir simetriski pret *AC*, *H* un H_A ir simetriski pret *BC* (skat. A51. zīm.).



A51. zīm.

Tā kā *ABC* ir šaurleņķu trijstūris, tad *H* atrodas ΔABC iekšpusē un iegūstam $S_{AH_CBH_ACH_B} = 2S_{ABC}$. Tātad jāpierāda $2S_{H_CH_AH_B} \le S_{AH_CBH_ACH_B} = 2S_{ABC}$, kas ir ekvivalents

$$S_{H_CH_AH_B} \le S_{ABC} = S_{H_ACH_B} + S_{H_BAH_C} + S_{H_CBH_A}.$$

Ievērojam, ka trijstūri, kas izmantoti nevienādības labajā pusē ir vienādsānu (ΔH_ACH un ΔH_BCH ir vienādsānu, jo to augstumi vienlaicīgi ir arī mediānas, tāpēc $H_AC = HC = H_BC$ un ΔH_BCH_A ir vienādsānu; pārējo pierāda analoģiski). Ja $\angle H_AH_BH_C \ge 90°$, tad $S_{H_AH_BH_C} \le S_{H_ABH_C}$, kas nav iespējams, jo simetrijas pret H_AH_C dēļ $\Delta H_ABH_C = \Delta H_AHH_C$. Tāpēc $\angle H_AH_BH_C < 90°$ (līdzīgi var pamatot, ka $\angle H_CH_AH_B < 90°$ un $\angle H_AH_CH_B < 90°$) un $\Delta H_AH_BH_C$ ir šaurleņķu.

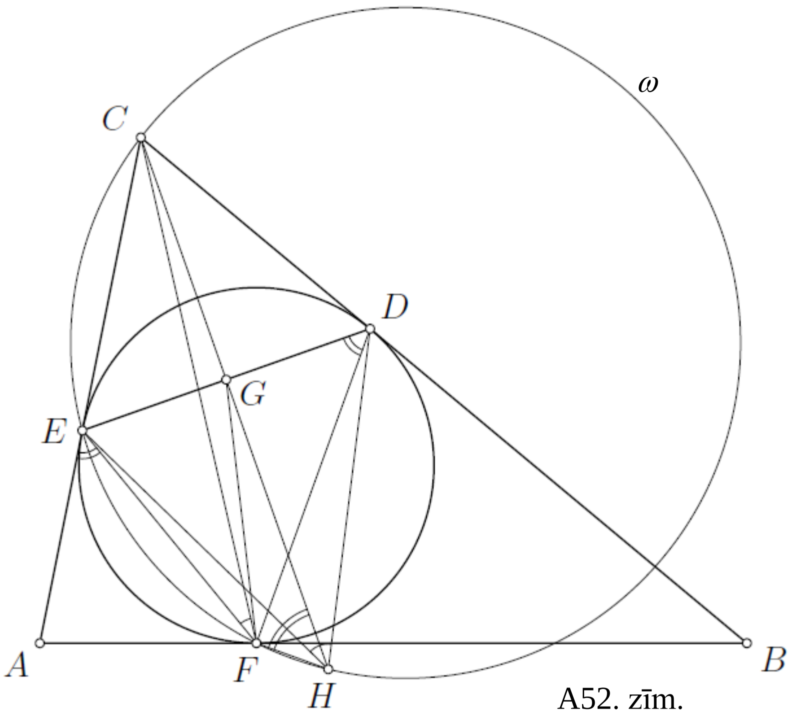
Ar *M* apzīmējam $\Delta H_AH_BH_C$ ortocentru. Ar M_A, M_B un M_C apzīmējam punktus, kas attiecīgi ir simetriski punktam *M* attiecībā pret malām H_BH_C, H_CH_A un H_AH_B. Visi šie punkti atrodas uz vienas riņķa līnijas un trijstūri H_BCH_A, H_BCH_C, H_CCH_A ir vienādsānu, tāpēc iegūstam $S_{H_BM_AH_C} \le S_{H_BAH_C}$, $S_{H_CM_BH_A} \le S_{H_CBH_A}$ un $S_{H_AM_CH_B} \le S_{H_ACH_B}$. Tā kā

$$S_{H_CH_AH_B} = S_{H_BM_AH_C} + S_{H_CM_BH_A} + S_{H_AM_CH_B},$$

tad iegūstam $S_{H_CH_AH_B} \le S_{H_ACH_B} + S_{H_BAH_C} + S_{H_CBH_A}$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.14. *Dots trijstūris ABC, tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Punkts G ir nogriežņa DE viduspunkts. Pierādīt, ka* $\angle EFC = \angle GFD$.

Ap ΔCEF apvelkam riņķa līniju *ω*. Ar *H* apzīmējam otru punktu, kurā taisne *CG* krusto riņķa līniju *ω* (skatīt A52. zīm.). Pieņemsim, ka $AC < BC$ (pārējie gadījumi pierādāmi analoģiski). Tas nozīmē, ka punkti *G, H, B* atrodas vienā pusplaknē, ko nosaka *CF*, un virsotne *A* – otrā pusplaknē.



A52. zīm.

Tā kā punkti *E, F, H, C* atrodas uz riņķa līnijas *ω*, tad $\angle EFC = \angle EHC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *EC*. Ievērojam arī, ka punkti *D* un *E* ir simetriski attiecībā pret taisni *CH* (t. i., $EG = GD$ un $CH \perp ED$), tāpēc $\angle EHC = \angle CHD$. Tātad

$$\angle EFC = \angle EHC = \angle CHD. \qquad (*)$$

Tā kā *AC* ir ΔABC ievilktās riņķa līnijas pieskare punktā *E*, tad, izmantojot faktu, ka ievilktais leņķis ir vienāds ar hordas-pieskares leņķi, ja tie abi balstās uz vienu un to pašu loku, iegūstam $\angle GDF = \angle EDF = \frac{1}{2}\overset{\smile}{EF} = \angle AEF = 180^\circ - \angle CEF$.

Ievērojam, ka četrstūris *CEFH* ir ievilkts riņķa līnijā *ω*, tāpēc tā pretējo leņķu summa ir 180° jeb $\angle CEF = 180^\circ - \angle CHF = 180^\circ - \angle GHF$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\angle GDF = 180^\circ - \angle CEF = 180^\circ - (180^\circ - \angle GHF) = \angle GHF$, tātad ap punktiem *G, F, H* un *D* var apvilkt riņķa līniju. No tā seko, ka $\angle CHD = \angle GHD = \angle GFD$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loka *GD*.

No iegūtās vienādības un vienādības (*), iegūstam $\angle EFC = \angle GFD$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.15. *Četrstūrim ABCD apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas četrstūra iekšpusē, bet ne uz diagonāles AC. Četrstūra diagonāles krustojas punktā I. Trijstūrim AOI apvilktajai riņķa līnijai ar malu AD ir kopīgs punkts P, bet ar malu AB – kopīgs punkts Q; trijstūrim COI apvilktajai riņķa līnijai ar malu CB – kopīgs punkts R, bet ar malu CD – kopīgs punkts S. Pierādīt, ka PQRS ir paralelograms.*

Pieņemsim, ka $\angle ABC$ ir plats (gadījums, kad $\angle ABC$ ir šaurs, pierādāms analoģiski, tikai jāsamaina A53. zīm. punkti *B* un *D* vietām). Tā kā punkti *A, I, O* un *P* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad iegūstam $\angle QAI = \angle QOI$ kā ievilktie leņķi. Analoģiski iegūstam $\angle RCI = \angle ROI$. Tātad

$$\angle QOR = \angle QOI + \angle ROI = \angle QAI + \angle RCI = \angle BAC + \angle BCA =$$
$$= 180° - \angle ABC = 180° - \angle QBR .$$

No tā seko, ka $\angle QOR + \angle QBR = 180°$ un ap punktiem *Q, O, R* un *B* var apvilkt riņķa līniju.

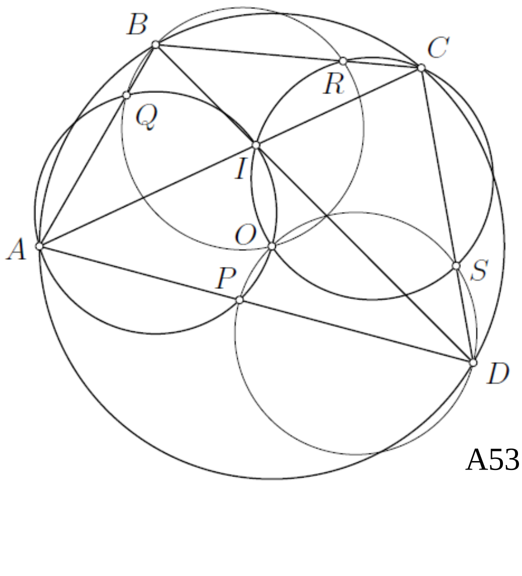
Tā kā $\angle PAI = 180° - \angle POI$ un $\angle SCI = 180° - \angle SOI$, tad

$$\angle POS = 360° - \angle POI - \angle SOI = 180° - \angle POI + 180° - \angle SOI =$$
$$= \angle PAI + \angle SCI = \angle DAC + \angle DCA = 180° - \angle ADC = 180° - \angle PDS .$$

Tātad $\angle POS + \angle PDS = 180°$ un ap punktiem *P, O, S* un *D* var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā punkts *O* ir četrstūra *ABCD* apvilktās riņķa līnijas centrs, tad iegūstam $AO = OB$, no kā izriet $\angle BAO = \angle OBA$. Šie leņķi ir attiecīgi ap ΔAPQ un ΔBQR apvilkto riņķa līniju ievilktie leņķi un abi balstās uz loku *QO*, kas nozīmē, ka šo abu riņķa līniju rādiusi ir vienādi. Analoģiski pierāda, ka ap ΔBQR, ΔCRS un ΔDSP apvilkto riņķa līniju rādiusi arī ir vienādi.

Tā kā $\angle QAP = \angle BAD = 180° - \angle BCD = 180° - \angle RCS$ un rādiusi ap četrstūriem *AQOP* un *ORCS* apvilktajām riņķa līnijām ir vienādi, tad hordām *QP* un *RS* ir vienādi garumi, jo uz tām balstās vienādiem ievilktiem leņķiem vienādās riņķa līnijās. Analoģiski pierāda, ka hordām *QR* un *PS* ir vienādi garumi. Līdz ar to četrstūris *PQRS* ir paralelograms.



A53. zīm.

A.BW. Skaitļu teorija

A.BW.16. Veseli *pozitīvi skaitļi n, m un k apmierina vienādību* $(n-1)n(n+1)=m^k$. *Pierādīt, ka* $k=1$.

Pieņemsim, ka $(n-1)n(n+1)$ ir vesela skaitļa k-tā ($k \geq 1$) pakāpe. Tā kā $LKD(n, n-1)=1$ un $LKD(n, n+1)=1$, tad $LKD(n, (n-1)(n+1))=1$. Tas nozīmē, ka arī skaitļiem n un $(n-1)(n+1)=n^2-1$ arī jābūt veselu skaitļu k-tajām pakāpēm. Tātad $n=m_1^k$ un $n^2-1=m_2^k$, no kā seko, ka $m_2^k=(m_1^k)^k-1$ jeb $(m_1^k)^k-m_2^k=1$. Divu pozitīvu k-tās kārtas skaitļu starpība nevar būt 1, ja $k>1$. Tātad $k=1$.

A.BW.17. *Ar* $d(n)$ *apzīmēsim skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu. Atrast visus skaitļu trijniekus* (n,k,p), *kur n un k ir veseli pozitīvi skaitļi un p ir pirmskaitlis, kam izpildās*

$$n^{d(n)}-1=p^k.$$

Ievērojam, ka skaitlis $n^{d(n)}$ vienmēr ir naturāla skaitļa kvadrāts:

- ja $d(n)$ ir pāra skaitlis, tad $n^{d(n)}=n^{2k}=(n^k)^2$;
- ja $d(n)$ ir nepāra, tad n noteikti ir kvadrāts, kas nozīmē, ka $n^{d(n)}$ arī ir kvadrāts.

Apzīmējam $n^{d(n)}=m^2$, $m>0$. Tad no dotās vienādības iegūstam

$$m^2-1=p^k;$$

$$(m+1)(m-1)=p^k.$$

Ja $m=1$, tad vienādojumam $0=p^k$ (līdz ar to arī dotajam vienādojumam) nav atrisinājuma.
Ja $m=2$, tad iegūstam $(n,k,p)=(2,1,3)$.
Ja $m>2$, tad iegūstam $m-1>1$ un $m+1>1$. Tā kā gan $m-1$, gan $m+1$ ir skaitļa p^k dalītāji, abi dalās ar skaitli p. Vienīgā iespēja ir $m-1=2$, $m+1=4$ un $p=2$, jo skaitļu $m-1$ un $m+1$ vienīgais kopīgais reizinātājs ir 2. Tātad $m=3$, $n^{d(n)}=m^2=9$, un otrs atrisinājums ir $(n,k,p)=(3,3,2)$.
Tātad meklētie skaitļu trijnieki ir $(n,k,p)=(2,1,3)$ un $(n,k,p)=(3,3,2)$.

A.BW.18. *Atrast visus tādus veselu skaitļu trijniekus* (a,b,c), *kas apmierina vienādojumu:*

$$a^2+b^2+c^2=20122012.$$

Vispirms apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 4. Tā kā skaitļu kvadrāti pēc moduļa 4 var būt kongruenti tikai ar 0 (ja skaitlis ir pāra) vai 1 (ja skaitlis ir nepāra), un 20122012 dalās ar 4, tad varam secināt, ka skaitļi a, b un c ir pāra skaitļi. Ievietojot dotajā vienādojumā $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$, iegūstam vienādojumu:

$$4a_1^2+4b_1^2+4c_1^2=20122012;$$

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=5030503.$$

Iegūto vienādojumu apskatām pēc moduļa 8. Vienādojuma labā puse ir kongruenta ar 7 pēc moduļa 8, bet kreisajā pusē esošie kvadrāti pēc moduļa 8 var būt kongruenti tikai ar 0, 1 un 4. Tātad vienādojuma kreisā puse nekad nebūs kongruenta ar 7.
Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

A.BW.19. *Pierādīt, ka* $n^n+(n+1)^{n+1}$ *ir salikts skaitlis bezgalīgi daudzām naturālām skaitļa n vērtībām.*

Pierādīsim, ka jebkuram naturālam skaitlim *n*, kam izpildās $n\equiv 4 \pmod 6$, izteiksme $n^n+(n+1)^{n+1}$ dalās ar 3 un tātad ir salikts skaitlis.

Apskatām tādus *n*, kam izpildās $n\equiv 4 \pmod 6$. Šādiem *n* izpildās arī $n\equiv 1 \pmod 3$ un *n* ir pāra skaitlis. No tā izriet, ka doto izteiksmi pēc moduļa 3 varam pārveidot

$$n^n+(n+1)^{n+1}\equiv 1^n+2^{n+1}=1+2^{n+1} \pmod 3.$$

Ievērojam, ka pakāpe $n+1$ ir nepāra, tātad $2^{n+1}\equiv 2 \pmod 3$ un dotā izteiksme pēc moduļa 3 kļūst par

$$n^n+(n+1)^{n+1}\equiv 1+2\equiv 0 \pmod 3,$$

kas arī bija jāpierāda.

A.BW.20. *Atrast visus vienādojuma* $2x^6+y^7=11$ *atrisinājumus veselos skaitļos.*

Pierādīsim, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

Sestās pakāpes skaitļi pēc moduļa 43 ir kongruenti tikai ar 0, 1, 4, 11, 16, 21, 35 vai 41, bet septītās pakāpes skaitļi - ar 0, 1, 6, 7, 36, 37 vai 42. Tos ieliekot vienādojuma $2x^6=11-y^7$ katras puses izteiksmē, iegūstam

$$2x^6 \pmod{43}\in\{0,2,8,22,27,32,39,42\},$$

$$11-y^7 \pmod{43}\in\{4,5,10,11,12,17,18\}.$$

Tā kā šīm kopām nav kopīgu elementu, tad nevar pastāvēt vienādība $2x^6=11-y^7$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: S.9.1, S.11.1., S.12.3., V.9.3., V.10.3., V.10.4., V.12.3., A.9.4., A.11.3., A.12.4., VP.3., AB.2., AB.4., BW.1.

Nevienādības, nevienādību sistēmas: S.9.5., S.12.1., N.9.4., N.10.1., N.11.1., N.12.1., N.12.4., A.11.3., VP.1., AB.1., AB.5., BW.2.

Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: N.12.4., V.10.1., V.11.4., VP.1., AB.11., BW.12.

Funkcionālvienādojumi, funkcionālnevienādības: VP.4., AB.3., BW.5.

Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.9.5., S.10.1., N.10.3., V.11.3., V.12.2., A.10.1., A.12.1., AB.7., BW.3., BW.4.

Pārveidojumi: S.9.1., S.10.1.

Polinomi: N.11.4., AB.4., BW.4.

Matemātiskā indukcija: V.9.3., V.12.3., AB.2.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.11.2., N.10.2., N.11.2., V.10.2., V.12.1., A.10.2., A.12.2., VP.2., AB.12., BW.14., BW.15.

Ar riņķa līniju saistītas līnijas: S.11.2., A.11.2., BW.15.

Sakarības trijstūros: S.9.2., N.10.2., N.11.5., V.9.2., V.10.2., V.11.2., V.12.1., A.10.2., A.12.2., A.12.5., AB.12., AB.13., AB.15., BW.11., BW.12., BW.13.

Laukumi: S.10.2., S.12.2., N.9.2., N.12.4., V.11.3., V.11.4., A.9.1., A.9.5., AB.11., AB.14., BW.13.

Līdzība: N.12.2., A.12.2., AB.15.

SKAITĻU TEORIJA

Atlikumi, kongruences: S.10.3., S.11.3., S.12.3., N.12.3., V.10.4., V.12.4., A.12.3., AB.16., BW.7., BW.10., BW.18., BW.19., BW.20.

Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.9.3., A.10.5., A.11.3., AB.17., AB.20., BW.10.

Dalāmības īpašības un pazīmes: S.10.4., V.11.1., V.12.4., A.11.1., AB.19., BW.17.

Vienādojumi veselos skaitļos: S.10.1., N.9.3., N.11.1., V.10.1., A.12.3., AB.18., BW.16., BW.18., BW.20.

Skaitļa pieraksts: S.10.4., N.9.1., N.10.4., V.9.1., A.9.3., AB.19.

KOMBINATORIKA

Dirihlē princips: S.10.5., N.9.5., N.10.5., A.10.4.,

Invariantu metode, krāsošana: S.9.4., V.12.5., AB.9., BW.9.

Skaitīšana: S.10.5., S.12.5., N.10.4., V.9.4., AB.6., BW.7.

Gadījumu pārlase: S.11.4., V.9.4., A.9.2., VP.5.

Matemātiskā indukcija: N.12.5., V.11.5.

Figūru sagriešana: V.9.5., A.10.3., AB.9.

Grafi: A.11.4., AB.8., AB.10., BW.8.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde: S.11.5., S.12.4., N.11.3., V.10.5., A.10.4., A.11.4., A.11.5., A.12.5., VP.3., VP.5., BW.6., BW.10.

Algoritma analīze: A.10.5.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība,* 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība,* 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.

48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.

51. M. Avotiņa, A.Ķerubiņa. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.

Piezīmēm

Piezīmēm

Piezīmēm