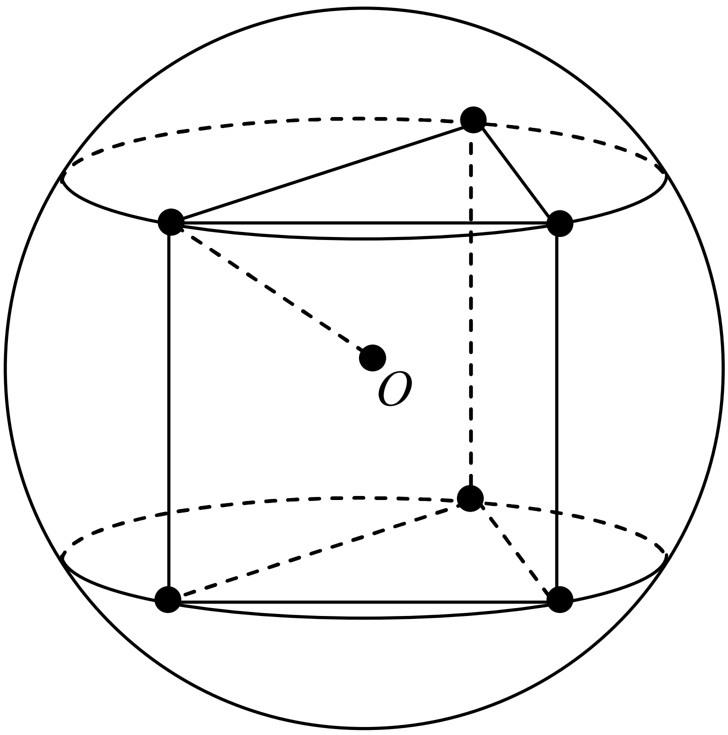
MARUTA AVOTIŅA, MĀRTIŅŠ OPMANIS

Matemātikas sacensības 9.–12. klasēm 2011./2012. mācību gadā



RĪGA 2013

M. Avotiņa, M. Opmanis. Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2013. – 151 lpp.

Grāmatā apkopoti 2011./2012. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. – 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Grāmatas sākumā dots īss teorijas izklāsts, kas varētu būt nepieciešams uzdevumu risināšanā.

Izsakām pateicību 2011./2012. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotājiem: A. Ambainim, A. Bērziņam, M. Kokainim, D. Kūmai, R. Opmanim, R. Ozolam, M. Valdatam, I. Veilandei, J. Vihrovam.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-708-6

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības iepriekšējā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā mūsdienu olimpiādes. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko daļu pasaules valstu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Tieši māku pierādīt kā galveno guvumu no Latvijas matemātikas olimpiādēm ir pieminējuši šobrīd pasaulslaveni latviešu zinātnieki. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.). Arī Tīmeklī atrodams bagātīgs mācību materiālu un uzdevumu klāsts. To varat sākt pārlūkot ar http://nms.lu.lv .

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs vidusskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm, un skolotājiem, lai veiksmīgi organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās. Šāda veida mācību līdzeklis kopš 2005./2006. mācību gada tiek izdots katru gadu. Lai gan dažādu gadu uzdevumu krājumu autori ir mainījušies, šajos uzdevumu krājumos iespēju robežās ir saglabāts profesora Agņa Andžāna iedibinātais formāts.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas šādas matemātikas olimpiādes, kurās 2011./2012. mācību gadā bija iespēja piedalīties Latvijas 9. – 12. klašu skolēniem:

- *Sagatavošanās matemātikas olimpiāde.* Notiek kopš 1987./1988. mācību gada, tās rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Šī olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu. Lai gan katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tikai no matemātikas skolotājiem ir atkarīgs, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada* (*agrāk – Rajona*) *matemātikas olimpiāde.* Notiek kopš XX gadsimta piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Novada olimpiāde notiek novada/novadu apvienības/pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.

- *Valsts matemātikas olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Novada olimpiāde, notiek kopš XX gs. piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek divas dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.
- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās tik auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, kā arī citās valstīs. Atklāto matemātikas olimpiādi rīko LU A. Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.
- *Starptautiskā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai t.s. Austrumu bloka valstis. Pēdējos gados tajā piedalās ap 100 valstīm no visas pasaules. Katra dalībvalsts piedalās ar ne vairāk kā sešu skolēnu komandu. Olimpiādē katra skolēna veikums tiek vērtēts atsevišķi. Katru gadu neoficiāli tiek vērtēts arī komandas sniegums. Sīkāku informāciju var atrast Tīmeklī: http://www.imo-official.org/ .
- *Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš”* tiek organizētas, lai atlasītu labākos skolēnus starptautiskajai komandu olimpiādei, kas norisinās mācību gada sākumā, tāpēc tās notiek jau septembra vidū. Uz atlases sacensībām tiek aicināti skolēni, kuri iepriekšējā mācību gadā uzrādījuši labus rezultātus Valsts un Atklātajā matemātikas olimpiādē.
- *Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš”* savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šī olimpiāde pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis. Tagad „Baltijas Ceļā” piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande. Katra valsts šīm sacensībām izvirza piecu skolēnu komandu, kurai olimpiādē 4,5 stundu laikā kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi.

Šajā uzdevumu krājumā apkopoti un izvērsti aprakstīti 2011./2012. mācību gada matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi, kā arī iekļautas sadaļas – „Ieteikumi” un „Teorija”. Sadaļā „Ieteikumi” skolēni var smelties idejas uzdevuma risināšanā, ja neizdodas uzdevumu atrisināt patstāvīgi. Skolotāji ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos. Sadaļā „Teorija” iekļauts minimālais teorijas apjoms, kas varētu būt nepieciešams olimpiāžu uzdevumu risināšanā. Skolēni šo sadaļu var izmantot gan meklējot palīdzību uzdevumu risināšanā, gan gatavojoties matemātikas olimpiādēm, gan patstāvīgi apgūstot jaunas zināšanas. Skolotāji šo sadaļu var izmantot darbam matemātikas pulciņos.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Grāmatā visiem uzdevumiem dots izvērsts un pilnīgs atrisinājums, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Lielākajam skaitam uzdevumu ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi, pareizi atrisinājumi. Bieži vien pat atrisinājumu idejas var būt radikāli atšķirīgas. Tāpēc doto atrisinājumu nevajag uztvert kā vienīgo iespējamo, bet nebaidīties meklēt jaunus ceļus līdz pilnam risinājumam.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatas piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām apgūt šos paņēmienus, lai varētu izmantot tos turpmāk.

Ceram, ka šī grāmata attīstīs Jūsu radošumu un risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Maruta Avotiņa (marutaavotina@inbox.lv)
Mārtiņš Opmanis (askola@latnet.lv)

TEORIJA

BIEŽĀK SASTOPAMIE UZDEVUMU VEIDI

„Atrast vismazāko / vislielāko vērtību” – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām:

1) **atrast** šo vismazāko / vislielāko vērtību un **uzrādīt piemēru**;
2) **pierādīt**, ka mazāka / lielāka vērtība nevar būt.

Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2. daļu.

„Vai var ...?” – Uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir:

- **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt ...?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības.

ALGEBRA

Saīsinātās reizināšanas formulas:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$, no kā seko
  - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
  - $(a-b)^2 = (b-a)^2$;
  - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$.

Par reāla skaitļa a **moduli** jeb absolūto vērtību (apzīmē $|a|$) sauc lielāko no skaitļiem a un $-a$. Tātad $|a| = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geq 0, \\ -a, & \text{ja } a < 0. \end{cases}$

Moduļa īpašības:

- $|a| \geq 0$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$;
- $|-a| = |a|$;
- $|a-b| = |b-a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $|a-b| \geq |a| - |b|$;

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, ja $b \neq 0$.

Par skaitļa x **veselo daļu** (apzīmē $[x]$) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x, t. i., veselo skaitli m tādu, ka $m \leq x < m+1$. Piemēram, $[3]=3$, $[2{,}8]=2$, $[0{,}2]=0$, $[-1{,}5]=-2$.

Par skaitļa x **daļveida daļu** (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x-[x]$. Piemēram, $\{1{,}3\}=0{,}3$.

Polinomi

Par mainīgā x n-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kur n – vesels nenegatīvs skaitlis, a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 – patvaļīgi skaitļi ($a_n \neq 0$).

Nultās pakāpes polinoms ir konstante, kas nav vienāda ar nulli.

Nulles polinoms ir konstante, kas vienāda ar nulli.

Saka, ka polinoms $P(x)$ dalās bez atlikuma ar polinomu $S(x)$, ja eksistē tāds polinoms $Q(x)$, ka $Q(x)\cdot S(x) = P(x)$.

Bezū teorēma. Dalot polinomu $P(x)$ ar binomu $x-a$, atlikumā iegūst $P(a)$, t. i., skaitli, kas ir polinoma vērtība pie $x=a$.

Secinājums. Lai mainīgā x n-tās pakāpes polinoms $P(x)$ dalītos bez atlikuma ar $x-a$, nepieciešami un pietiekami, lai skaitlis a būtu šī polinoma sakne, t. i., lai būtu spēkā vienādība $P(a)=0$.

Algebras pamatteorēma. Polinomam $P_n(x)$ ir ne vairāk kā n saknes.

Lai polinomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ sadalītu reizinātājos, bieži izmanto šādas teorēmas:

- Katru polinomu P_n var sadalīt reizinātājos tā, lai katrs reizinātājs būtu pirmās vai otrās pakāpes polinoms.
- Ja $x=a$ ir polinoma P_n sakne, tad P_n dalās bez atlikuma ar binomu $x-a$ jeb polinoms P_n satur reizinātāju $x-a$.
- Ja polinomam P_n ir vesela sakne $x=a$, tad a ir brīvā locekļa a_0 dalītājs.
- Lai racionāls skaitlis (nesaīsināma daļa $\frac{p}{q}$) būtu polinoma sakne (polinoma koeficienti ir veseli skaitļi), nepieciešams, lai p būtu brīvā locekļa a_0 dalītājs, bet q būtu a_n dalītājs (t. i., a_0 dalītos bez atlikuma ar p, bet a_n – ar q).

Teorēma. Starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kur $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ir veseli skaitļi.

Pierādījums. Apskatām starpību

$P(x)-P(y) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 - (a_n y^n + \ldots + a_1 y + a_0) = a_n(x^n - y^n) + \ldots + a_1(x-y)$.

Izmantojot formulu $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, kur n – naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i - y^i), i = 1, 2, \ldots, n$ dalās ar ($x-y$). Tātad arī starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kas arī bija jāpierāda.

Kvadrāttrinoms un kvadrātvienādojums

Polinomu, kuru var pierakstīt formā $ax^2 + bx + c$, kur *a*, *b* un *c* – reāli nenulles skaitļi, sauc par **kvadrāttrinomu**.
Par **kvadrātvienādojumu** sauc vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$, kur *x* ir mainīgais, bet *a*, *b*, *c* ir reāli skaitļi ($a \neq 0$).
Skaitļus *a*, *b*, *c* sauc par kvadrātvienādojuma **koeficientiem**; ax^2 sauc par kvadrātisko locekli, bx – lineāro locekli, *c* – brīvo locekli.

Kvadrātvienādojuma **sakņu aprēķināšana**:

- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kur diskriminants $D = b^2 - 4ac$;
- **Vjeta teorēma**: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$;

Kvadrātvienādojuma **sakņu skaits** ir atkarīgs no diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ vērtības:

- $D < 0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D = 0$ – vienādojumam ir viena sakne jeb divas vienādas saknes $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- $D > 0$ – vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Kvadrāttrinomu var **sadalīt reizinātājos** izmantojot formulu $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.
Par **reducēto** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram $a = 1$.
Par **nepilno** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram kāds no koeficientiem (izņemot *a*) ir vienāds ar nulli.
Ir trīs veidu nepilnie kvadrātvienādojumi:

- ja $b = 0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2 + c = 0$ jeb $x^2 = -\dfrac{c}{a}$:
  - ja $-\dfrac{c}{a} \geq 0$, tad $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$;
  - ja $-\dfrac{c}{a} < 0$, tad vienādojumam nav reālu sakņu;
- ja $c = 0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2 + bx = 0$ jeb $x(ax + b) = 0$, kura saknes ir $x = 0$ un $x = -\dfrac{b}{a}$;
- ja $b = 0$ un $c = 0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2 = 0$ jeb $x^2 = 0$, kura sakne ir $x = 0$.

Funkcijas

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **pāra funkciju**, ja katram *x* no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = f(x)$. Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret *y* asi.

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **nepāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = -f(x)$. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, t. i., punktu $(0; 0)$.

Funkciju sauc par **augošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$ jeb funkciju sauc par augošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, palielinās funkcijas vērtības.

Funkciju sauc par **nedilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \le f(x_2)$.

Funkciju sauc par **dilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$ jeb funkciju sauc par dilstošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, samazinās funkcijas vērtības.

Funkciju sauc par **neaugošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Ja funkcija kādā intervālā ir tikai dilstoša vai tikai augoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju.

Ja $f(x) = y$ un $g(u) = z$, tad funkciju $z = g(f(x))$, kur funkcijas g arguments ir cita funkcija f, sauc par **saliktu** funkciju jeb funkciju kompozīciju.

Funkciju vispārīgās īpašības:

- ja funkcija f ir augoša, tad funkcija $(-f)$ ir dilstoša;
- divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;
- divu augošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- divu dilstošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- augošas un dilstošas funkcijas kompozīcija ir dilstoša funkcija;
- pāra funkciju summa (reizinājums) ir pāra funkcija;
- divu nepāra funkciju reizinājums (dalījums) ir pāra funkcija;
- pāra un nepāra funkcijas reizinājums (dalījums) ir nepāra funkcija.

Funkcijas $f(x)$ krustpunkti ar x asi ir vienādojuma $f(x) = 0$ saknes.

Funkciju $f(x)$ un $g(x)$ **grafiku krustpunktu *x* koordinātas** ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

Lineārā funkcija: $f(x) = kx + b$.

- Lineārās funkcijas grafiks ir taisne.
- Punkts $(0; b)$ ir lineārās funkcijas krustpunkts ar y asi.
- Koeficientu k sauc par taisnes virziena koeficientu.
- Ja $k > 0$, tad taisne ir augoša; ja $k < 0$, tad taisne ir dilstoša.
- Lineārās funkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Ja $b = 0$, tad lineāro funkciju sauc par tiešās proporcionalitātes funkciju.

Apgrieztās proporcionalitātes funkcija: $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas grafiks ir hiperbola.
- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas grafiks nekrusto ne x asi, ne y asi.
- Ja $k > 0$, tad funkcijas grafiks atrodas 1. un 3. kvadrantā; ja $k < 0$, tad funkcijas grafiks atrodas 2. un 4. kvadrantā.
- Ja $k > 0$, tad funkcija ir dilstoša; ja $k < 0$, tad funkcija ir augoša.

- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas inversā funkcija ir apgrieztās proporcionalitātes funkcija.

Kvadrātfunkcija: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Ja $a > 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz augšu. Funkcijai ir vismazākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes x koordināta.
- Ja $a < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz leju. Funkcijai ir vislielākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes x koordināta.
- Ja $D = b^2 - 4ac < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks nekrusto x asi.
- Punkts $(0; c)$ ir kvadrātfunkcijas grafika krustpunkts ar y asi.

Eksponentfunkcija: $y = a^x$.

- Ja $a > 1$, tad eksponentfunkcijas grafiks ir augoša funkcija; ja $0 < a < 1$, tad – dilstoša funkcija.
- Eksponentfunkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(0; +\infty)$.
- Eksponentfunkcijas inversā funkcija ir logaritmiskā funkcija.

Logaritmiskā funkcija: $f(x) = \log_a x$.

- Ja $a > 1$, tad logaritmiskās funkcijas grafiks ir augoša funkcija; ja $0 < a < 1$, tad – dilstoša funkcija.
- Logaritmiskās funkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(0; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Logaritmiskās funkcijas inversā funkcija ir eksponentfunkcija.

Trigonometriskās funkcijas: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg} x$, $f(x) = \mathrm{ctg} x$.

- Sinusa un kosinusa funkciju vērtību apgabals ir intervāls $[-1; 1]$, t. i., šīs funkcijas ir ierobežotas.
- Sinusa un kosinusa funkciju definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Funkcija $f(x) = \mathrm{tg} x$ nav definēta, ja $x = \pi n$, $n \in Z$; funkcija $f(x) = \mathrm{ctg} x$ nav definēta, ja $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
- Kosinusa funkcija ir pāra funkcija, t. i., $\cos(-x) = \cos x$.
- Sinusa, tangensa un kotangensa funkcijas ir nepāra funkcijas, t. i., $\sin(-x) = -\sin x$, $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg} x$ un $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg} x$.
- Sinusa un kosinusa funkcijas ir periodiskas funkcijas ar perioda garumu $T = 2\pi$.
- Tangensa un kotangensa funkcijas ir periodiskas funkcijas ar perioda garumu $T = \pi$.

Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kas kā mainīgo satur nezināmo funkciju.
Risināšanas metodes:

- dažādu vērtību ievietošana (piemēram, $x=0$, $x=1$, $x=y=0$);
- substitūciju metode (jāievēro sākotnējais definīcijas apgabals);
- ekvivalentu pārveidojumu veikšana;
- nenoteikto koeficientu metode.

Elementārās funkcijas: Ja f ir nepārtraukta funkcija, kas visiem $x, y \in R$ apmierina vienādību:

- $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (Košī vienādība), tad $f(x)=Cx$, kur konstante $C=f(1)$;
- $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, tad $f(x)=C^x$, kur C – konstante;
- $f(xy)=f(x)+f(y)$, tad $f(x)=C\ln x$, kur C – konstante;
- $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, tad $f(x)=x^C$, kur C – konstante;
- $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ (Jensena vienādība), tad $f(x)=C_1x+C_2$, kur C_1, C_2 – konstantes.

Klasiskās nevienādības

Izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs $a^2 \geq 0$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo ģeometrisko** $A \geq G$:

$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}$ jeb $a_1+a_2+...+a_n \geq n\cdot\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}$ visiem $a_i>0,\ i=1,2,...,n$.

Secinājumi:

- $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$;
- $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko** $Q \geq A$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko** $A \geq H$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \text{ visiem } a_i>0,\ i=1,2,...,n.$$

Piezīme. $Q \geq A \geq G \geq H$.

Košī-Buņakovska nevienādība:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2,$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi.

Progresijas un rekurences sakarības

Virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par **aritmētisko progresiju**. Šo skaitli sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci** un apzīmē ar *d*: $a_{n+1} = a_n + d$.
Lai definētu aritmētisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un diferenci.
Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $a_n = a_1 + d(n-1)$.
Aritmētiskās progresijas pirmo *n* locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Virkni, kuras katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu nenulles skaitli, sauc par **ģeometrisko progresiju**. Šo skaitli sauc par ģeometriskās progresijas **kvocientu** *q*: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.
Lai definētu ģeometrisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un kvocientu.
Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
Ģeometriskās progresijas pirmo *n* locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$.
Ja $|q| < 1$, tad ģeometrisko progresiju sauc par **bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju** un tās visu locekļu summu aprēķina pēc formulas $S = \frac{b_1}{1-q}$.
Par **rekurentu virkni** sauc skaitļu virkni u_0, u_1, …, u_n, …, kuras katrs loceklis ir vienādā veidā, t. i., neatkarīgi no locekļa numura *n*, izsakāms ar noteikta skaita (piemēram, *k*) iepriekšējiem locekļiem:

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-k}), \text{ kur } n = k, k+1, ...$$

Par **rekurences sakarību** sauc vienādojumu, kas rekursīvi definē skaitļu virkni.
Ja funkcija f ir lineāra (t. i., nesatur reizinājumus, dalījumus un pakāpes, kas augstākas par pirmo), tad iegūstam vienādību

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}, \text{ kur } a_k \neq 0, \qquad (*)$$

ko sauc par ***k*-tās kārtas lineāru rekurentu jeb diferenču vienādojumu**.
Piezīme. Aritmētiskā un ģeometriskā progresija arī ir rekurentas virknes.

Lineāro diferenču vienādojumu atrisināšana

Diferenču vienādojumu (*) var apmierināt daudzas virknes. Lai *k*-tās kārtas lineārā diferenču vienādojuma (*) atrisinājums būtu viennozīmīgi noteikta virkne, jāuzdod šīs virknes pirmo *k* locekļu u_0, u_1, …, u_{k-1} vērtības. Tie ir sākumnosacījumi, kas ļauj viennozīmīgi aprēķināt turpmākos locekļus, sākot no u_k.
Diferenču vienādojumu galvenā risināšanas metode.
Vispirms sastāda vienādojumam (*) atbilstošo **raksturīgo jeb harakteristisko vienādojumu** $r(t) = 0$ ar mainīgo *t*, kur $r(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - ... - a_{k-1} t - a_k$ ir *k*-tās pakāpes polinoms.
Ja polinoma $r(t)$ visas saknes r_1, r_2, …, r_k ir reālas un dažādas, vienādojuma (*) vispārīgais atrisinājums ir lineāra kombinācija no *k* ģeometriskām progresijām:
$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + ... + C_k r_k^n$.

Konstantes C_1, C_2, …, C_k atrod no sākumnosacījumiem, izmantojot zināmās vērtības u_0, u_1, …, u_{k-1}, t. i., atrisinot k lineāru vienādojumu sistēmu

$$u(i) = u_i \text{ jeb } C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + ... + C_k r_k^i = u_i, \ i = 0, 1, ..., k-1.$$

Ja dots otrās kārtas lineārs diferenču vienādojums $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$, tad tā raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums formā $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$.
Ja kvadrātvienādojuma saknes r_1 un r_2 ir

- reālas un dažādas, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir $u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$;
- vienādas $r_1 = r_2 = r$, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir $u_n = C_1 r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$ jeb $u_n = (C_1 + nC_2) r^n$.

Vienkāršākais otrās kārtas lineārais diferenču vienādojums $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ar sākuma nosacījumiem $u_0 = 0$ un $u_1 = 1$ definē virkni, kuras locekļus sauc par **Fibonači skaitļiem** (apzīmē F_n). Ja uzdoti sākuma nosacījumi $u_0 = 2$ un $u_1 = 1$, tad veidojas skaitļu virkne, kuras locekļus sauc par **Lukasa skaitļiem** (apzīmē l_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
l_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

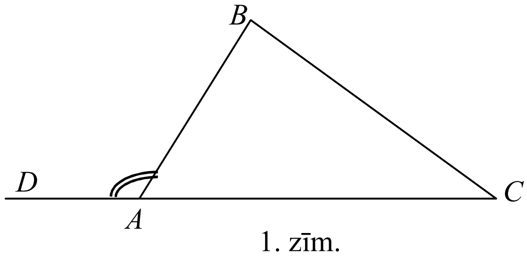
Fibonači skaitļu īpašības:

- $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, kur $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ un $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$;
- $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$;
- $F_{2n} = (F_{n-1} + F_{n+1}) F_n = (2F_{n-1} + F_n) F_n$;
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

ĢEOMETRIJA

Trijstūri

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.
Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis (skat. 1. zīm.).



$$\angle BAD = \angle ABC + \angle BCA$$

1. zīm.

Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.

Divus trijstūrus sauc par **vienādiem**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie pilnīgi sakrīt. Ja trijstūris ABC ir vienāds ar trijstūri $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
Trijstūru vienādības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām;
- „$m\ell m$" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām;
- „$\ell m\ell$" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem.

Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi. Ja trijstūris ABC ir līdzīgs trijstūrim $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Līdzīgu trijstūru atbilstošo malu garumu attiecību sauc par **līdzības koeficientu**.
Trijstūru līdzības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām;
- „$m\ell m$" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi;
- „$\ell\ell$" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem.

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu k), bet laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k, \qquad \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2$$

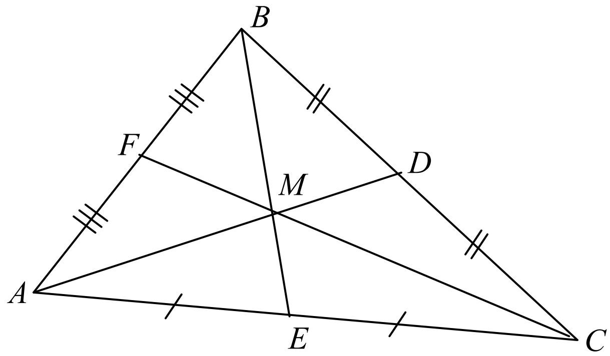
Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu k.

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par trijstūra **viduslīniju**.
Viduslīnijas īpašības:

- trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- trijstūra viduslīnijas garums ir vienāda ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas;
- trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

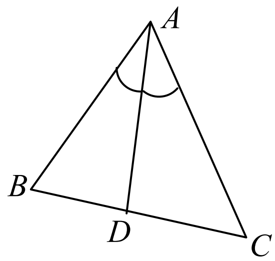
Par **trijstūra augstumu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējo malu (vai pretējās malas pagarinājumu) un ar to veido taisnu leņķi. Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

Par **trijstūra mediānu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējās malas viduspunktu.
Trijstūra mediānu īpašība. Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, t. i., $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}$, kur M – mediānu krustpunkts (skat. 2. zīm.).



2. zīm.

Par **bisektrisi** sauc taisni, kas sadala leņķi divās vienādās daļās.
Par **trijstūra bisektrisi** sauc trijstūra leņķa bisektrises nogriezni, kas atrodas trijstūra iekšpusē. Trijstūra bisektrises krustojas vienā punktā.
Trijstūra bisektrises īpašība. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, t. i., $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (skat. 3. zīm.).

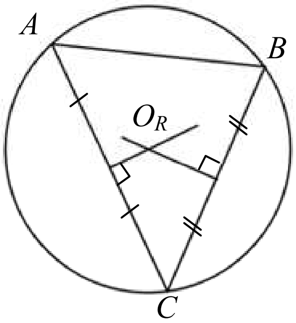


3. zīm.

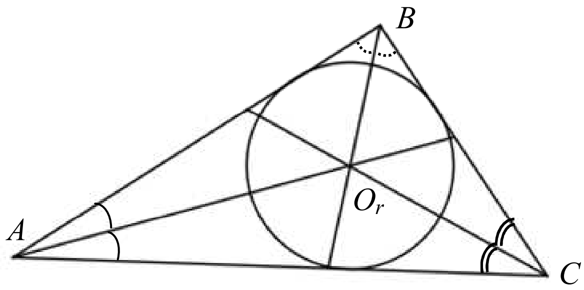
Par nogriežņa **vidusperpendikulu** sauc taisni, kas iet caur dotā nogriežņa viduspunktu un ir perpendikulāra dotajam nogrieznim.
Vidusperpendikula īpašība. Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem.

Jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula.

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir **trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 4. zīm.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir **trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 5. zīm.).



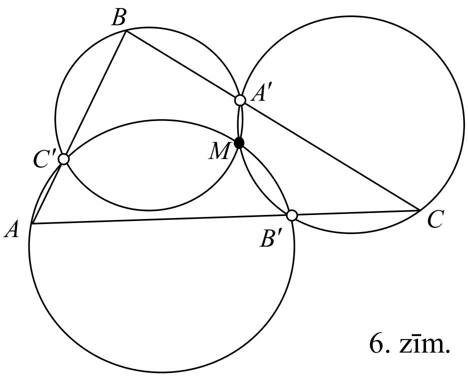
4. zīm.



5. zīm.

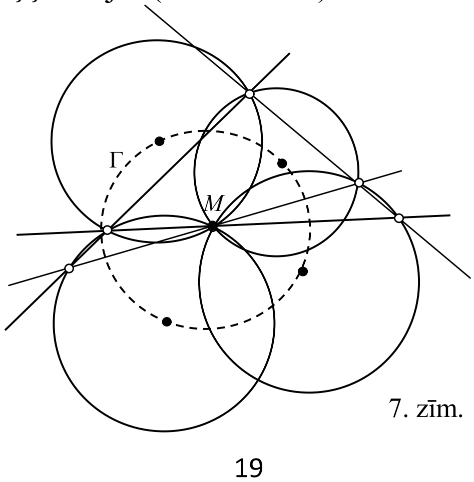
Simsona teorēma. Ja no trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas punkta novelk perpendikulus pret taisnēm *AB*, *BC*, *CA*, tad perpendikulu pamati atrodas uz vienas taisnes. Šo taisni sauc par Simsona taisni.

Mikela teorēma. Ja uz katras no trijstūra *ABC* malām vai to pagarinājumiem ir atlikts punkts, tad trīs riņķi, kur katrs no tiem iet caur citu trijstūra *ABC* virsotni un abiem punktiem, kas atlikti uz attiecīgās virsotnes piemalām, krustojas vienā punktā *M* (skat. 6. zīm.). Punktu *M* sauc par Mikela punktu un trīs riņķus sauc par Mikela riņķiem.



6. zīm.

Mikela teorēmas vispārinājums četrām taisnēm. Ja dotas četras taisnes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4, kur katra krustojas ar katru, un četri riņķi, kur katrs no tiem iet caur citiem trim taišņu ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4 krustpunktiem, tad tās krustojas punktā *M*. Punktu *M* sauc par Mikela ceturto punktu un četrus riņķus sauc par Mikela riņķiem. Šo četru Mikela riņķu centri atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. 7. zīm.).



7. zīm.

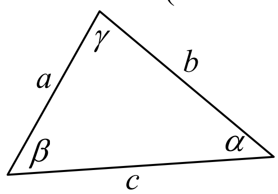
Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

- $S_\Delta = \frac{ah_a}{2}$;
- $S_\Delta = p \cdot r$;
- $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$;
- $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kur γ – leņķis starp malām *a* un *b*;
- $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hērona formula),

kur *a*, *b*, *c* – trijstūra malas, h_a – augstums, kas novilkts pret malu *a, p* – pusperimetrs, *r* – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, *R* – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Sinusu teorēma: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (skat. 8. zīm.).

Kosinusu teorēma: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (skat. 8. zīm.).



8. zīm.

Nevienādības trijstūros

Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un katras trijstūra malas garums ir lielāks nekā abu pārējo divu malu garumu starpība, t. i., ja *a*, *b*, *c* – trijstūra malu garumi, kur $a \le b \le c$, tad $a + b > c$ un $c - b < a$.

Trijstūra mediāna ir mazāka nekā malu, starp kurām tā atrodas, pussumma, t. i., $m_a < \frac{b+c}{2}$, kur m_a – mediāna, kas novilkta pret malu *a*.

Par **vienādsānu trijstūri** sauc trijstūri, kura divas malas ir vienādas. Vienādās trijstūra malas sauc par sānu malām, bet trešo malu – par pamatu.

Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.

Augstums, kas novilkts pret trijstūra pamatu, ir arī šī trijstūra mediāna un bisektrise.

Ja nogrieznis ir trijstūra augstums un bisektrise, tad tas ir arī trijstūra mediāna un šis trijstūris ir vienādsānu.

Regulārs (vienādmalu) trijstūris

Par **regulāru (vienādmalu) trijstūri** sauc trijstūri, kuram visas malas ir vienādas. Regulāra trijstūra visi leņķi ir vienādi, t. i., $60°$ lieli.

Vienādmalu trijstūrī katra mediāna ir arī bisektrise un augstums.

Regulāra trijstūra laukums: $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kur *a* ir trijstūra malas garums.

Regulāra trijstūra augstums: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

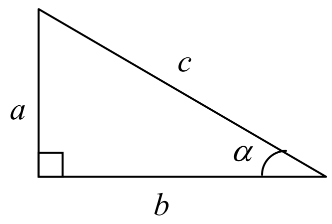
Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnija rādiuss: $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss: $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Taisnleņķa trijstūris

Pitagora teorēma. Taisnleņķa trijstūrī katešu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas garuma kvadrātu, t. i., $a^2 + b^2 = c^2$, kur a un b ir katešu garumi un c – hipotenūzas garums.
Trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī (skat. 9. zīm):

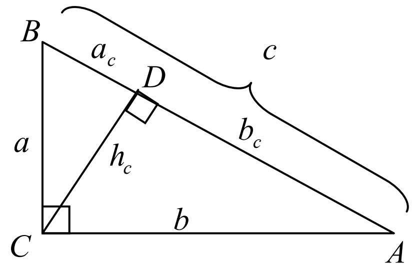
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$;
- $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.



9. zīm.

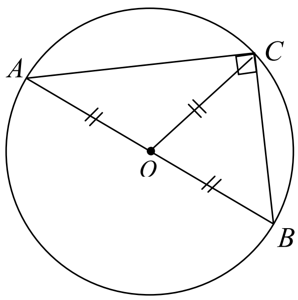
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, t. i., $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (skat. 10. zīm.). Ir spēkā šādas sakarības:

- $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
- $a^2 = a_c \cdot c$;
- $b^2 = b_c \cdot c$;
- $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$.



10. zīm.

Ap taisnleņķa trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā, un tās rādiusa garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.
Taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta no taisnā leņķa virsotnes, ir vienāda ar trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu, t. i., ar pusi no hipotenūzas (skat. 11. zīm.).



11. zīm.

Riņķis un riņķa līnija

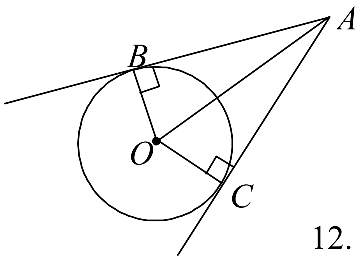
Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas **centru**, bet attiecīgo attālumu — par riņķa līnijas **rādiusu**.
Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.
Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
Par riņķa līnijas **loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.
Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.
Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.

Ar riņķi un riņķa līniju saistītās formulas:

- $D = 2R$, kur D – diametrs un R – riņķa līnijas rādiuss;
- riņķa laukums: $S = \pi R^2$;
- sektora laukums: $S_{sektora} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}$, kur α – sektora centra leņķa lielums grādos;
- riņķa līnijas garums: $C = 2\pi R$;
- riņķa līnijas loka garums: $l_{loka} = \dfrac{\pi R \alpha}{180°}$, kur α – lokam atbilstošā centra leņķa lielums grādos.

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti B un C – šo pieskaru pieskaršanās punkti un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 12. zīm.), tad

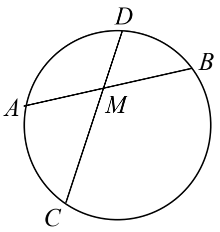
- $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\angle BAO = \angle CAO$;
- $OB \perp AB$.



12. zīm.

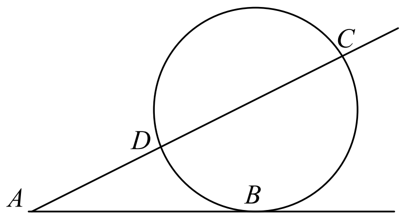
Metriskās sakarības riņķa līnijā

Hordu īpašība



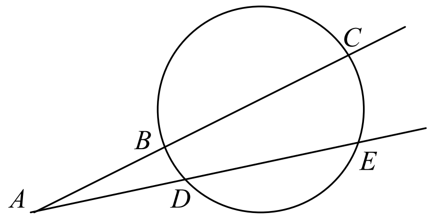
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Pieskares – sekantes īpašība



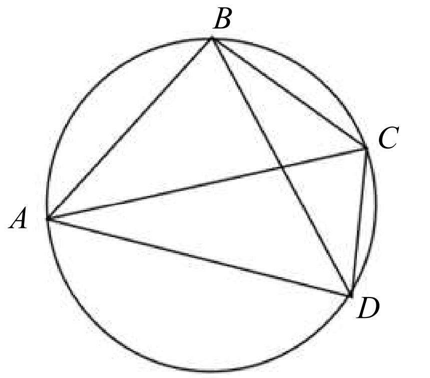
$AB^2 = AC \cdot AD$

Sekanšu īpašība



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

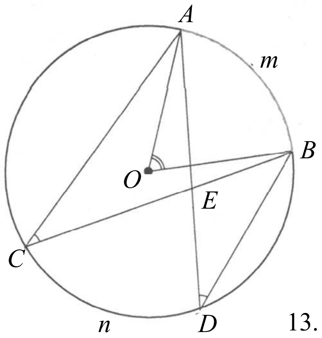
Ptolemaja teorēma. Ja četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā, tad $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



Spēkā ir arī Ptolemaja teorēmas apgrieztā teorēma.

Leņķi riņķa līnijā

Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.
Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka, uz kura tas balstās, leņķisko lielumu, t. i., $\angle AOB = \cup AmB$ (skat. 13. zīm.).
Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.
Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma, t. i., $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$ (skat. 13. zīm.).
Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, piemēram, $\angle ACB = \angle ADB$ (skat. 13. zīm.).
Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir $90°$ un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.

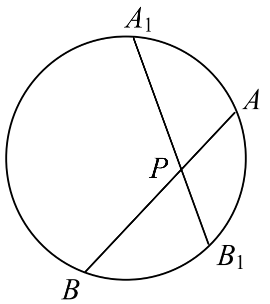


13. zīm.

Par **hordas - pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.
Hordas - pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.
Par riņķa līnijas **ārējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas ārpus riņķa un tā malas krusto riņķa līniju vai arī viena vai abas malas pieskaras riņķa līnijai.
Ārējā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no to divu loku leņķisko lielumu starpības, kuri atrodas starp leņķa malām.
Par riņķa līnijas **iekšējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa iekšpusē, bet malas krusto riņķa līniju.
Iekšējā leņķa lielums jeb leņķa lielums starp divām hordām ir vienāds ar to divu loku, no kuriem viens ir starp leņķa malām, bet otrs ir starp leņķa malu pagarinājumiem, leņķisko lielumu pussummu, t. i., $\angle CED = \dfrac{\cup CnD + \cup AmB}{2}$ (skat. 13. zīm.).

Radikālā ass un punkta pakāpe attiecībā pret riņķa līniju

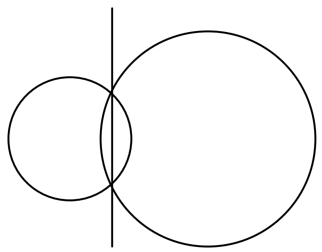
Ja dota riņķa līnija, patvaļīgi izvēlēts punkts P un taisne, kas iet caur šo punktu P un krusto riņķa līniju punktos A un B (skat. 14. zīm.), tad nogriežņu garumu reizinājums $PA \cdot PB$ nav atkarīgs no taisnes AB izvēles. Šo reizinājumu $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1$ sauc par **punkta *P* pakāpi attiecībā pret riņķa līniju**.



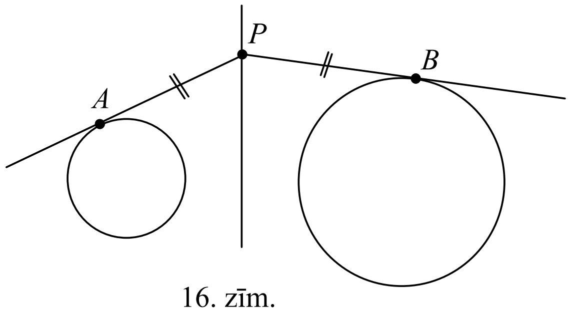
14. zīm.

Ja punkts P atrodas ārpus riņķa līnijas, tad tā pakāpe attiecībā pret šo riņķa līniju ir vienāda ar no šī punkta vilktās pieskares nogriežņa garuma kvadrātu.
Par divu riņķa līniju **radikālo asi** sauc to punktu kopu, kuru pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas.
Radikālā ass eksistē tad un tikai tad, ja riņķa līnijas nav koncentriskas.
Radikālā ass ir perpendikulāra taisnei, kas iet caur abu riņķa līniju centriem
Punktam, kas atrodas uz divu riņķa līniju kopējās hordas, pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas. Tātad divām krustiskām riņķa līnijām radikālā ass ir taisne, kas iet caur šo riņķa līniju kopējiem punktiem (skat. 15. zīm.).

Ja riņķa līnijām nav kopīgu punktu, tad radikālā ass ir taisne, kas sastāv no visiem tiem punktiem, no kuriem vilkto pieskaru nogriežņi pret šīm riņķa līnijām ir vienādi (skat. 16. zīm.).



15. zīm.



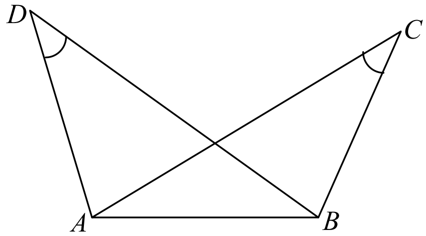
16. zīm.

Ievilkti un apvilkti četrstūri

Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

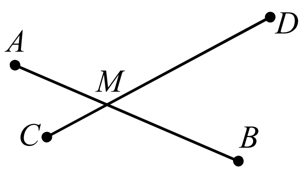
Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja:

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;
- izpildās vienādība $\angle ACB = \angle BDA$ (skat. 17. zīm.);



17. zīm.

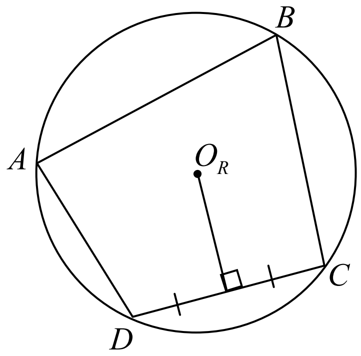
- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AB un CD krustpunkts (skat. 18. zīm.).



18. zīm.

Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju.
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.
Izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas.

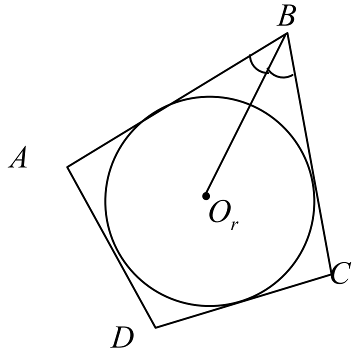
Ievilkts četrstūris



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

O_R – malu vidusperpendikulu krustpunkts

Apvilkts četrstūris



$AB + CD = AD + BC$

O_r – leņķu bisektrišu krustpunkts

Vektori

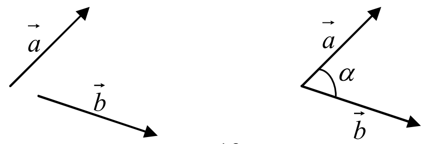
Par **vektoru** sauc orientētu nogriezni.
Par nulles vektoru sauc vektoru, kuram sakrīt sākuma punkts un beigu punkts, t. i., jebkurš punkts ir nulles vektors.

Par nenulles vektora $\vec{a}$ **garumu** jeb **moduli** sauc nogriežņa a garumu un apzīmē ar $\left|\vec{a}\right|$.

Ja dots vektors $\vec{a} = (a_x, a_y)$, tad $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Par nenulles vektora **virzienu** sauc tās taisnes virzienu, uz kuras šis vektors atrodas.
Par nenulles vektora **vērsumu** sauc stara, uz kura atrodas vektors un kura sākumpunkts sakrīt ar vektora sākumpunktu, vērsumu.

Par **kolineāriem** vektoriem sauc vektorus, kas ir savstarpēji paralēli.
Par **vienādiem** vektoriem sauc kolineārus vektorus, kuriem ir vienādi garumi un vienādi vērsumi.
Par **pretējiem** vektoriem sauc divus kolineārus vektorus, kuru garumi vienādi, bet vērsumi pretēji.
Dotajam vektoram pretējo vektoru apzīmē, mainot dotā vektora zīmi vai mainot vietām burtus (piemēram, $\vec{a}$ pretējais vektors ir $-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ pretējais vektors ir $-\overrightarrow{AB}$ jeb $\overrightarrow{BA}$).
Par **leņķi starp diviem nenulles vektoriem** sauc leņķi starp šo vektoru virzieniem (skat. 19. zīm.).



19. zīm.

Par **perpendikulāriem** jeb **ortogonāliem** vektoriem (raksta $\vec{a} \perp \vec{b}$) sauc divus vektorus, starp kuriem leņķis ir $90°$.
Par divu vektoru **skalāro reizinājumu** sauc šo vektoru garumu reizinājumu ar kosinusu no leņķa starp vektoriem:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$, kur α – leņķis starp vektoriem.

Ja doti vektori $\vec{a} = (a_x, a_y)$ un $\vec{b} = (b_x, b_y)$, tad šo vektoru skalāro reizinājumu var aprēķināt pēc formulas: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

No skalārā reizinājuma definīcijas var izteikt vektoru veidotā leņķa kosinusu: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Vektora reizinājums ar skaitli ir vektors, bet divu vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis.

No skalārā reizinājuma definīcijas izriet, ka divu vienādi vērstu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar to garumu reizinājumu: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Divu vienādu un vienādi vērstu vektoru skalāro reizinājumu sauc par skalāro kvadrātu un tas ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir nulle tad un tikai tad, ja šie vektori ir savstarpēji perpendikulāri:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

SKAITĻU TEORIJA

Skaitļu iedalījums

- N – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- Z – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- Q – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in Z$ un $n \in N$.
- I – iracionālie skaitļi: bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi (piemēram, $\sqrt{2}$, e, π).
- R – reālie skaitļi: racionālie skaitļi Q un iracionālie skaitļi I.

Skaitļa pieraksts:

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis;
- $2n+1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3;
- $3n+1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

Dalāmība

Par vesela skaitļa b **dalītāju** sauc veselu skaitli a, ja eksistē tāds vesels skaitlis c, ka $ac = b$. Skaitli b sauc par skaitļa a **dalāmo** jeb **daudzkārtni**, bet a – par skaitļa b **dalītāju**.

Ja skaitlis b dalās ar skaitli a, tad to apzīmē ar $a \mid b$ vai $b \vdots a$.

Dalāmības īpašības (a, b, c, d un n ir veseli skaitļi):

- $0 \vdots a$, $a \vdots \pm 1$, $a \vdots a$;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots c$, tad $a \vdots c$;
- ja $a \vdots c$, tad $ab \vdots c$;
- ja $a \vdots c$ un $b \vdots c$, tad $ax + by \mid c$ jebkuriem veseliem skaitļiem x un y;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots a$, tad $a = \pm b$;
- ja $a \vdots b$ un $c \vdots d$, tad $ac \vdots bd$;
- ja $ac \vdots bc$, tad $a \vdots b$;
- ja $a \vdots b$ un $a, b > 0$, tad $b \le a$;
- ja $a \cdot b = c$, tad $c \vdots a$ vai $c \vdots b$;
- ja divi skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar c, tad šo skaitļu starpība $a - b$ dalās ar c;
- skaitlis dalās ar $n = a \cdot b$ (a un b – savstarpēji pirmskaitļi), ja tas dalās gan ar a, gan ar b.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2, ja tas beidzas ar pāra ciparu;
- skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3;
- skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4;
- skaitlis dalās ar 5, ja tas beidzas ar ciparu 0 vai 5;

- skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3;
- skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8;
- skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9;
- skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0;
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Naturālo skaitļu īpašības:

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No *k* pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar *k*.

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.
Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.
Pirmie pirmskaitļi ir šādi:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...
Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.
Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).
Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, kur $p_i, i = 1, 2, ..., m$ ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_m + 1)$ dažādi dalītāji, šo dalītāju summa ir $(1 + p_1 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + ... + p_2^{k_2})...(1 + p_m + ... + p_m^{k_m})$.
Ja p ir pirmskaitlis un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

Fermā mazā teorēma. Ja p ir pirmskaitlis un a nedalās ar p, tad $a^{p-1} - 1$ dalās ar p.
Fermā lielā teorēma. Vienādojumam $x^n + y^n = z^n$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos, ja $n > 2$.
Salikta skaitļa n mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Naturāls skaitlis $n > 1$ nav pirmskaitlis tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitļa n dalītājs $m > 1$, kurš nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis n ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Skaitļa $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ īpašības:

- Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz n, ir $n!$ dalītāji.
- Visi skaitļa $n!+1$ naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki nekā n.
- Visi skaitļi intervālā $[n!+2; n!+n]$ ir salikti skaitļi.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **lielāko kopīgo dalītāju** sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru katrs no dotajiem skaitļiem dalās bez atlikuma. Divu skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju apzīmē ar $LKD(a, b)$.
Skaitļus a un b sauc par **savstarpējiem pirmskaitļiem**, ja $LKD(a, b) = 1$.
Operācijai LKD piemīt šādas īpašības (a, b, c un m ir naturāli skaitļi):

- $LKD(a, a) = a$.
- $LKD(a, 1) = 1$ (jebkurš naturāls skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli 1).
- $LKD(a, b) = LKD(b, a)$.
- $LKD(a, a+1) = 1$ (secīgi naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi).

- $LKD\,(ma, mb) = m \cdot LKD\,(a, b)$.
- $LKD\,(a, b) = LKD\,(a, ac + b)$
- Ja a un b dalās ar m, tad $LKD\,(a, b)$ arī dalās ar m.
- $LKD\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{LKD\,(a, b)}{m}$.
- $LKD\,(a^m, b^m) = \left(LKD\,(a, b)\right)^m$.
- $LKD\,(a^x, a^y) = a^{\min(x,\, y)}$.

Lielāko kopīgo dalītāju var atrast ar **Eiklīda algoritmu**, kas balstīts uz dalīšanu ar atlikumu: vispirms nepilni izdala lielāko skaitli ar mazāko un tad katrā nākamajā solī iepriekšējās darbības dalītāju dala ar iegūto atlikumu. Lielākais kopīgais dalītājs ir pēdējais iegūtais nenulles atlikums.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **mazāko kopīgo dalāmo** sauc mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no dotajiem skaitļiem bez atlikuma. Divu skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo apzīmē ar $MKD\,(a, b)$.
Operācijai *MKD* piemīt šādas īpašības (a, b, c un m ir naturāli skaitļi):

- $MKD\,(a, a) = a$.
- $MKD\,(a, b) = MKD\,(b, a)$.
- $MKD\,(ma, mb) = m \cdot MKD\,(a, b)$.
- Ja a vai b dalās ar m, tad $MKD\,(a, b)$ arī dalās ar m.
- Ja gan a, gan b dalās ar m, tad $MKD\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{MKD\,(a, b)}{m}$.
- $MKD\,(a^m, b^m) = \left(MKD\,(a, b)\right)^m$.
- $MKD\,(a^x, a^y) = a^{\max(x,\, y)}$.
- $MKD\,(a, b) = \frac{ab}{LKD\,(a, b)}$ jeb $MKD\,(a, b) \cdot LKD\,(a, b) = ab$.

Kongruence

Ja a un m, $m \neq 0$, ir veseli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst, a dalot ar m, ir tāds vesels skaitlis r, ka $a = q \cdot m + r$, kur q ir vesels skaitlis un $0 < |r| < |m|$. Šajā gadījumā iespējami divi dažādi atlikumi. Ja, a dalot ar m, r_1 ir pozitīvs atlikums un r_2 – negatīvs, tad $r_1 = r_2 + m$.
Ja a un m ir naturāli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst skaitli a dalot ar m, ir vesels skaitlis robežās no 0 līdz $m - 1$.
Divi skaitļi a un b ir **kongruenti pēc moduļa *m*** (apzīmē ar pierakstu $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m)$), kur $m \neq 0$, tad un tikai tad, ja $a - b$ dalās ar m jeb skaitļi a un b dod vienādu atlikumu, ja tos dala ar m.
Kongruences īpašības:

- jebkuram m izpildās vienādība: $a \equiv a \ (\mathrm{mod}\ m)$;
- $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m)$ tad un tikai tad, ja $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ (-m))$;
- ja $m = \pm 1$, tad jebkuriem diviem skaitļiem a un b izpildās vienādība $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m)$, t. i., visi veselie skaitļi ir kongruenti pēc moduļa 1;
- ja $m \,\vdots\, m_1$ un $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m)$, tad $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m_1)$;

- ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $ka \equiv kb \pmod{m}$, kur k ir vesels skaitlis;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, tad $a + a_1 \equiv b + b_1 \pmod{m}$, $a - a_1 \equiv b - b_1 \pmod{m}$ un $aa_1 \equiv bb_1 \pmod{m}$.

Secinājums. Ja $f(a_1, a_2, ..., a_k)$ ir patvaļīga vesela izteiksme un $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, ... , $a_k \equiv b_k \pmod{n}$, tad

$$f(a_1, a_2, ..., a_k) \equiv f(b_1, b_2, ..., b_k) \pmod{n}.$$

Tas nozīmē, ka, veicot aprēķinus pēc moduļa *n*, jebkuru skaitli izteiksmē var aizvietot ar jebkuru citu tam kongruentu skaitli. Parasti skaitli *a* aizvieto ar skaitļa *a* atlikumu pēc moduļa *n*, bet atsevišķos gadījumos var ņemt citu tam kongruentu skaitli.

Teorēma. Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa m ir periodiska.

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus a^n pēc moduļa *m*. Tiklīdz virknē $a^n \pmod{m}$ parādās vienādi skaitļi, mēs esam atraduši periodu. Perioda garums nepārsniedz *m*.

KOMBINATORIKA

Saikļu lietojums:

- saiklis „un” nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām vai nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- saiklis „vai” nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības vai nosacījumi);
- saiklis „vai nu ... , vai” nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam.

Kombinatorikas **saskaitīšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas **vai nu** viena, **vai** otra, **vai** trešā utt. veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ veidos.
Kombinatorikas **reizināšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida **un** otrā veida, **un** trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ veidos.

Par **permutāciju** sauc visu doto elementu sakārtojumu rindā.
Ja n dažādi elementi jāsakārto rindā, tad to var izdarīt $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ dažādos veidos.

Par **variācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vai nu ar elementu sastāvu, vai to izkārtojumu izlasē.
Visu variāciju skaitu no n elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu A_n^k. Variāciju skaitu aprēķina pēc formulas:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Par **kombinācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc tādas izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vismaz ar vienu elementu.
Kombinācijās elementu izkārtojums neņem vērā, t. i., divas kombinācijas, kurās ir vienāds elementu sastāvs, tiek uzskatītas par vienādām.
Kombināciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu C_n^k.
Kombināciju skaitu aprēķina pēc formulām:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Secinājums. $A_n^k \geq C_n^k$.

Kombināciju skaita īpašības:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ja $0 < k < n$.

Paskāla trijstūris:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 = 1 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 = 1 & & C_1^1 = 1 & & & & \\
 & & & C_2^0 = 1 & & C_2^1 = 2 & & C_2^2 = 1 & & & \\
 & & C_3^0 = 1 & & C_3^1 = 3 & & C_3^2 = 3 & & C_3^3 = 1 & & \\
 & C_4^0 = 1 & & C_4^1 = 4 & & C_4^2 = 6 & & C_4^3 = 4 & & C_4^4 = 1 & \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}
$$

Ņūtona binoma formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n.$$

Vidējās vērtības metode

Uzdevumu risināšana balstās uz konkrēti formulētām teorēmām, piemēram,

- Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.
- Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.
- Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Viens no Vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.
Vispārinātais Dirihlē princips: ja vairāk nekā $m \cdot n$ truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz $m+1$ trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

Invariantu metode

Vārds „invariants” cēlies no latīņu valodas un nozīmē nemainīgs.
Par **invariantiem lielumiem / īpašībām** sauc lielumus / īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt **nav** iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

- atrodam **invarianto īpašību**, t. i., īpašību, kura **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem un **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- parādam, ka šī īpašība **nepiemīt** lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā.

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml.
Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – **krāsošana** (bieži izmanto figūras iekrāsošanu kā šaha galdiņu), kur invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

Matemātiskās indukcijas metode

Par **indukciju** sauc spriešanas metodi, kurā no konkrētiem piemēriem iegūst vispārīgu slēdzienu.
Lietojot matemātiskās indukcijas principu uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

- pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*induktīvā bāze*);
- pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (*induktīvais pieņēmums*);
- pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).
- secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Pierādījuma metodi, kas balstās uz matemātiskās indukcijas principa, sauc par **matemātiskās indukcijas metodi**.
Matemātiskās indukcijas metode ļauj no atsevišķu elementu īpašībām izdarīt spriedumus par visu kopu.

Grafu teorijas elementi

Grafs ir punktu (kurus sauc par virsotnēm) kopa kopā ar nogriežņiem (šķautnēm), kas tos savieno.
Grafus ir ērti izmantot, ja ir jāattēlo attiecības starp diviem objektiem.
Grafa šķautņu krustpunkts nav grafa virsotne.
Par grafa **virsotnes pakāpi** sauc šķautņu galu skaitu, kas atrodas šajā virsotnē.
Lemma. Katra grafa virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu grafa šķautņu skaitu.
Secinājumi:

- Virsotņu pakāpju summa ir pāra skaitlis.
- Grafā ir pāra skaits virsotņu, kuru pakāpe ir nepāra skaitlis.

Grafu sauc par **sakarīgu**, ja jebkuras 2 tā virsotnes var savienot ar maršrutu, t.i., no vienas grafa virsotnes var tikt uz kādu citu virsotni, ejot pa grafa šķautnēm.
Par grafa **komponenti** sauc jebkuru tā maksimālu sakarīgu apakšgrafu.
Grafu galvenie veidi:

- Pilns grafs – grafs, kuram katras divas virsotnes ir savienotas ar šķautni.
- Cikls – sakarīgs grafs, kuram divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2 (grafs sastāv no virsotnēm $a_1, a_2, ..., a_n$, kas savienotas ar šķautnēm $a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1$).
- Koks – sakarīgs grafs bez cikliem.
- Divdaļīgs grafs – grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas ar šķautni.

Eilera teorēma. Grafu var uzzīmēt ar vienu rokas vilcienu, nepārklājot līnijas un beidzot zīmēt tajā pašā vietā, kur sāka, tad un tikai tad, ja visām grafa virsotnēm ir pāra pakāpe.

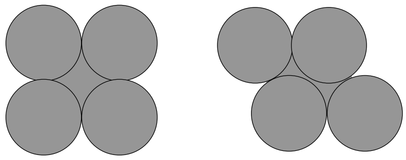
UZDEVUMI

S. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

S.9. Devītā klase

S.9.1. Pierādīt, ka skaitlis $2^{15}+3^{12}$ nav pirmskaitlis.

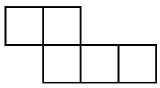
S.9.2. Aprēķināt 1. zīmējumā doto figūru laukumus. Visi zīmējumos attēlotie riņķi ir vienādi un to rādiuss ir 1. a) gadījumā riņķu centri veido kvadrātu.



a) b)

1. zīm.

S.9.3. Kādu lielāko daudzumu 2. zīmējumā attēloto figūriņu var izgriezt no kvadrāta ar izmēriem 9×9 rūtiņas? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām. Figūriņas drīkst pagriezt vai apgāzt „uz mutes”.



2. zīm.

S.9.4. Naturālu skaitļu virknes 7, 14, 17, ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot 1. Kāds ir šīs virknes 2011. loceklis?

S.9.5. Kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis (tie visi ir dažādi). Katrā rūtiņā ierakstīto skaitli a salīdzina ar tās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem un nosaka, par cik no tiem a ir lielāks, šo skaitu sauksim par rūtiņas *svaru*. Rūtiņu sauksim par *labu*, ja tās *svars* ir nepāra skaitlis. Kāds ir lielākais iespējamais *labo* rūtiņu skaits?
(Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Dots, ka x, y, z, t ir pozitīvi skaitļi un $x^2<y$, $y^2<z$, $z^2<t$ un $t^2<x$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem x, y, z, t ir mazāks nekā 1.

S.10.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC uz malas AB atzīmēts tās viduspunkts D. No virsotnes B pret malu AC vilktais augstums BE krusto mediānu CD tās viduspunktā F. Pierādīt, ka $S_{ABE}=2S_{BEC}$.

S.10.3. Vienādojuma $x^2-27x+113=0$ saknes ir taisnleņķa trijstūra katešu garumi, izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

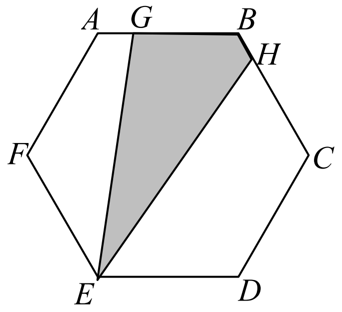
S.10.4. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} xy+z=10 \\ x+yz=11 \end{cases}$.

S.10.5. Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala 7×7 rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz divas rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli k ($2 \le k \le 7$) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir tieši k.
Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Doti tādi veseli skaitļi a un b, ka $3a+5b$ dalās ar 11. Pierādīt, ka skaitlis $5a+b$ arī dalās ar 11.

S.11.2. Uz regulāra sešstūra $ABCDEF$ malas AB atlikts punkts G, bet uz malas BC punkts H tā, ka $AG = BH$ (skat. 3. zīm.). Pierādīt, ka $S_{EGBH} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF}$.



3. zīm.

S.11.3. Zināms, ka a un $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās a vērtības!

S.11.4. Dota virkne $a_1, a_2, \ldots$, kur $a_1 = a_2 = 1$ un $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $n \ge 1$.

Vai nevienādība $a_n > \frac{2^n}{3}$ ir patiesa, ja **a)** $n = 2011$; **b)** $n = 2012$?

S.11.5. Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala 9×9 rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz trīs rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli k ($3 \le k \le 9$) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir k. Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš!

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Kādām reālām parametra a vērtībām vienādojumiem

$$ax^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{un} \quad x \cdot \cos a = 1$$

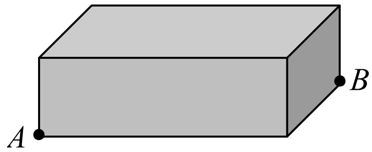
ir vienāds sakņu skaits?

S.12.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstumi ir AD, BE un CF. Pierādīt, ka DA, EB un FC ir trijstūra DEF bisektrises.

S.12.3. Zināms, ka x, y un z ir naturāli skaitļi, $7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8$ un $16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3$. Kāda ir izteiksmes $x^2 + y^2 + z^2$ vērtība?

S.12.4. Uz gludas grīdas nolikts taisnstūra paralēlskaldņa formas dzelzsbetona klucis, kura pamata izmēri ir $13\text{ cm} \times 25\text{ cm}$, bet augstums – h cm. Skudra atrodas punktā A (skat. 4. zīm.) un viņai jānonāk punktā B. Skudra var iet gan apkārt klucim, gan pāri, bet nevar izlīst pa apakšu.

Noteikt, kāds ir īsākā ceļa no punkta A līdz punktam B garums, ja **a)** $h = 7$ cm, **b)** $h = 13$ cm.



4. zīm.

S.12.5. Laura un Dace no naturālu skaitļu kopas $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ visos iespējamos veidos izvēlas četrus dažādus skaitļus un aprēķina to reizinājumu. Ja reizinājums ir mazāks nekā 2012, Laura saņem vienu konfekti, bet, ja lielāks, tad konfekti saņem Dace. Kurai no meitenēm beigās būs vairāk konfekšu?

N. LATVIJAS 62. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

N.9. Devītā klase

N.9.1. Apskatām visas funkcijas $y = ax^2 - 2x + b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a + b = 2012$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

N.9.2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *P*. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta *P* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *P* izvēles.

N.9.3. Kādām *n* vērtībām *n* cilvēkus var sadalīt grupās (varbūt tikai vienā) tā, lai katrā grupā būtu tieši 5, 6 vai 7 cilvēki?

N.9.4. Dota skaitļu virkne 1, 1, 2, 5, 9, 6, ... Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.

a) Noteikt, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis.

b) Aprēķināt virknes 2012. locekli.

N.9.5. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz $n-1$ ieskaitot, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli *n*. Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar *n*.

N.10. Desmitā klase

N.10.1. a) Dots, ka $a + b = c$. Pierādīt, ka $2a^2 \geq c^2 - 2b^2$.

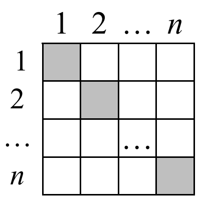
b) Dots, ka $a + b + c = d$. Pierādīt, ka $3a^2 \geq d^2 - 3b^2 - 3c^2$.

N.10.2. Uz trijstūra *ABC* malas *AC* izvēlēts punkts *K*. Nogrieznis *BK* sadala trijstūri *ABC* divos trijstūros. Visi trīs trijstūri (ΔABC un abi dalījumā iegūtie trijstūri) ir līdzīgi. Pierādīt, ka ΔABC ir taisnleņķa trijstūris.

N.10.3. Doti seši pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt, ka var atrast tādu pirmskaitli *p*, ka **tieši viens** no dotajiem skaitļiem dalās ar *p*.

N.10.4. Ir aprēķinātas skaitļu 2^{2012} un 5^{2012} vērtības un iegūtie skaitļi uzrakstīti viens aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

N.10.5. Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, katrā tās rūtiņā ierakstīts vesels skaitlis. Tabulas rindas un kolonnas pēc kārtas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz *n*, sākot no augšējās rindas un kreisās kolonnas (skat. 5. zīm.). Zināms, ka visiem *i* izpildās sakarība: *i*-tajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir vienāda ar *i*-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu.
Atrast visus tādus *n*, kuriem visām šādām tabulām izpildās sekojoša īpašība:
i-tās rindas *j*-tajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar *i*-tās kolonnas *j*-tajā rindā ierakstīto skaitli (t. i., tabula ir simetriska attiecībā pret galveno diagonāli, skat. 5. zīm. iekrāsoto diagonāli).



5. zīm.

N.11. Vienpadsmitā klase

N.11.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *m*, kura ciparu reizinājums ir vienāds ar simetrisku 8-ciparu skaitli? (Par *simetrisku* sauc skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem.)

N.11.2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2y = 8 \\ 2y + yz + 2z = 20 \\ 2z + zx + 2x = 14 \end{cases}.$$

N.11.3. Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs deviņstūris un regulārs trijstūris. Kas ir lielāks: dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trijstūra malu kvadrātu summa?

N.11.4. Atrast augošu aritmētisko progresiju, kuras visi elementi ir naturāli skaitļi un kurai piemīt īpašība: neviens tās elements **nav** naturāla skaitļa *k*-tā pakāpe jebkuram naturālam $k \geq 2$.

N.11.5. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 8 gramus katra, pārējās divas sver 7 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast **vismaz** vienu monētu, kas sver 7 gramus?

N.12. Divpadsmitā klase

N.12.1. Skaitlis *a* ir vienādojuma $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ sakne. Pierādīt, ka $a > -\frac{1}{2}$.

N.12.2. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

N.12.3. Nogrieznis *BP* ir trijstūra *ABC* bisektrise, punkti *N* un *M* ir attiecīgi malu *AB* un *AC* tādi iekšēji punkti, ka $AN = PC$ un $AM = BC$. Taisnes *BP* un *MN* krustojas punktā *X*. Pierādīt, ka $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

N.12.4. Kādiem pirmskaitļiem *p* skaitlim $p^2 + 23$ ir tieši četri naturāli dalītāji?

N.12.5. Regulārā 17-stūrī $A_1A_2...A_{17}$ atzīmētas četras virsotnes A_i, A_j, A_k, A_l ($i < j < k < l$). No pārējām virsotnēm ir jāizvēlas četras virsotnes (apzīmēsim tās ar *B*, *C*, *D* un *E*) tā, lai *B* būtu starp A_i un A_j, *C* būtu starp A_j un A_k, *D* būtu starp A_k un A_l, *E* būtu starp A_l un A_i. Kādām *i*, *j*, *k*, *l* vērtībām punktu četrinieku (*B*, *C*, *D*, *E*) var izvēlēties visvairāk veidos?

V. LATVIJAS 62. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

V.9. Devītā klase

V.9.1. a) Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?

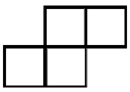
b) Vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?

V.9.2. Pierādīt, ka nav iespējams izveidot trijstūri, kura augstumu garumi ir 4 cm, 7 cm un 10 cm.

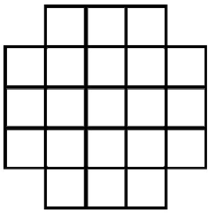
V.9.3. Kvadrātvienādojuma $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ saknes ir a un b, kvadrātvienādojuma $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ saknes ir b un c, bet kvadrātvienādojuma $x^2 + p_3x + q_3 = 0$ saknes ir a un c. Zināms, ka $q_1 \le q_2 \le q_3 \le 0$. Kādas ir iespējamās q_2 vērtības?

V.9.4. Trijstūra ABC iekšpusē izvēlēts punkts E tā, ka $AB^2 - BE^2 + EC^2 = AC^2$. Pierādīt, ka $AE \perp BC$!

V.9.5. Kādu lielāko skaitu 6. zīm. attēloto figūru var izgriezt no 7. zīm. attēlotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



6. zīm.



7. zīm.

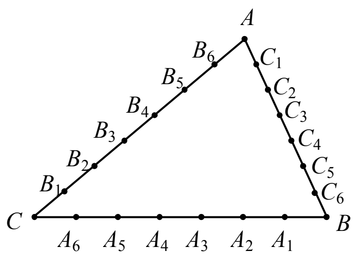
V.10. Desmitā klase

V.10.1. Kādām a vērtībām vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = a \\ x^3 + y^3 = a + 2 \end{cases}$$

ir atrisinājums reālos skaitļos?

V.10.2. Trijstūra ABC katra mala sadalīta septiņās vienādās daļās (skat. 8. zīm.). Pierādīt, ka $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} > S_{ABC}$.



8. zīm.

V.10.3. Naturāla skaitļa N decimālajā pierakstā izmantots tikai cipars 6. Pierādīt, ka skaitļa N^2 decimālajā pierakstā nav cipara 0.

V.10.4. Trijās no piecstūra virsotnēm atrodas kauliņi A, B, C. Atļauts pārbīdīt kauliņu pa piecstūra diagonāli uz citu virsotni, ja tā ir brīva. Vai, atkārtoti pārbīdot šos kauliņus, var panākt, lai kauliņš A atrastos savā vietā, bet kauliņi B un C būtu samainījušies vietām?

V.10.5. Divi spēlētāji uz $N \times N$ rūtiņas liela laukuma spēlē sekojošu spēli. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienā novietojot šaha zirdziņu uz pagaidām neapdraudēta luciņa (visu zirdziņu krāsa ir vienāda). Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar, ja **a)** $N = 12$, **b)** $N = 21$?

(Ja šaha zirdziņš atrodas rūtiņā A, tad tas apdraud visas ar * apzīmētās rūtiņas, skat. 9. zīm.)

	*		*	
*				*
		A		
*				*
	*		*	

9. zīm.

V.11. Vienpadsmitā klase

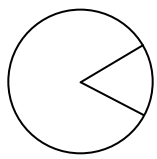
V.11.1. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu *a*, kuriem skaitlis $n^4 + a$ ir salikts skaitlis visiem naturāliem skaitļiem $n > 1$.

V.11.2. Dota tabula ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts atšķirīgs naturāls skaitlis. Ja rūtiņā ierakstītais skaitlis ir lielākais savā rindā, savā kolonnā vai diagonālē, kurā ir vismaz divas rūtiņas, tad šī rūtiņa tiek iekrāsota. Cik rūtiņas tabulā var būt iekrāsotas?

V.11.3. Taisne, kas iet caur trijstūra mediānu krustpunktu, dala trijstūri divās daļās. Kāda ir šo daļu laukumu maksimālā attiecība?

V.11.4. Dota naturālu skaitļu virkne $\{a_i\}$, kur $a_1 = 5$ un katram $n > 1$ $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4$. Pierādīt, ka visiem $n \geq 1$ ir spēkā sakarība $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$.

V.11.5. Divi zēni pēc kārtas griež apaļu kūku, katru reizi nogriežot pa vienam gabalam, kura virspuse ir dotās kūkas virspuses sektora formā, pie tam gabala virspuses laukumam jābūt ne mazākam kā $\dfrac{1}{100}$ un ne lielākam kā $\dfrac{1}{2}$ no sākotnēja kūkas virspuses laukuma (skat. 10. zīm.). Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar nogriezt nevienu atļautā lieluma gabalu. Kurš no zēniem, pareizi spēlējot, uzvarēs?



10. zīm.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Divām naturālu skaitļu virknēm $\{a_i\}$ un $\{b_i\}$ katram $i \geq 1$ ir spēkā sakarības: $a_{b_i} = b_{a_i}$ un $|a_i - b_i| > 2012$. Atrast vienu šādu virkņu piemēru.

V.12.2. Trijstūra *ABC* leņķa *ACB* bisektrise un leņķa *ABC* blakusleņķa bisektrise krustojas punktā *D*. Pierādīt, ka trijstūrim *BCD* apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas.

V.12.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$n=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n+2012}\right].$$

($[x]$ ir veselā daļa no x – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x; piemēram, $[3]=3$, $[4{,}6]=4$, $[0{,}2]=0$).

V.12.4. Kvadrātā ar izmēriem $N\times N$ rūtiņas dažas rūtiņas ir nokrāsotas tā, ka katrai nokrāsotai rūtiņai tieši trīs kaimiņu rūtiņas ir nenokrāsotas, bet katrai nenokrāsotai rūtiņai ir tieši viena nokrāsota kaimiņu rūtiņa. Vai šāds krāsojums ir iespējams, ja **a)** $N=6$, **b)** $N=8$? Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

V.12.5. Riņķa ar diametru 1 iekšpusē uzzīmēti vairāki riņķi, kuru diametru summa ir lielāka nekā 8. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto vismaz 9 uzzīmētos riņķus.

A. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.9. Devītā klase

A.9.1. Atrast vienu skaitli, kuram ir tieši 12 veseli pozitīvi dalītāji.

A.9.2. Trijstūrī ABC $\angle ABC = 90°$, bet punkts P atrodas uz malas AB. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un PC viduspunkti. Pierādīt, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

A.9.3. Kvadrātvienādojuma $x^2 - 507x + a = 0$ saknes ir p^2 un q, kur p un q ir pirmskaitļi. Aprēķināt a skaitlisko vērtību.

A.9.4. Uz tāfeles uzrakstītas deviņas zvaigznītes * * * * * * * * *. Jānis ieraksta kādas zvaigznītes vietā jebkuru ciparu no 1 līdz 9. Pēc tam Pēteris jebkuru divu citu zvaigznīšu vietā ieraksta divus ciparus (tie var arī atkārtoties). Pēc tam vēl divas reizes viņi atkārto šo darbību.
Pēteris uzvar, ja iegūtais deviņciparu skaitlis dalās ar 37. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt?

A.9.5. Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādīt, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Pierādīt: ja p un $14p^2 + 1$ ir pirmskaitļi, tad $14p^2 - 1$ ir naturāla skaitļa kubs.

A.10.2. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, leņķi DAB un BCD ir plati. Pierādīt, ka $BD > AC$.

A.10.3. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (t. i., $x_1 \le x_3 \le x_2$ vai $x_2 \le x_3 \le x_1$).

A.10.4. Vienā un tajā pašā riņķa līnijā ievilkts regulārs 9-stūris un regulārs 10-stūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 19 lokos. Pierādīt, ka ir loks, kura lielums nepārsniedz $2°$.

A.10.5. Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti 10 zaļi punkti, uz otras – 10 sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?
(Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts, t. i., ja tiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas.)

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa n, ka skaitlis $n^2 - 3n - 1$ dalās ar 169.

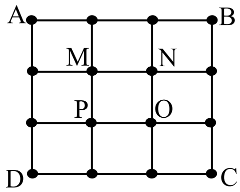
A.11.2. Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes, bet A_1, B_1, C_1 – uz citas taisnes. Pierādīt: ja AB_1 paralēls A_1B un AC_1 paralēls A_1C, tad BC_1 paralēls B_1C.

A.11.3. Atrisināt vienādojumu:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2012}+\sqrt{x-2010}}+\frac{1}{\sqrt{x-2010}+\sqrt{x-2008}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2012}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A.11.4. Pierādīt, ka izliektu 2012-stūri nevar sadalīt 200 izliektos 12-stūros.

A.11.5. Plaknē doti 16 punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa veidā kā parādīts 11. zīm. Taisnstūri sauksim par *labu*, ja tā virsotnes atrodas režģa punktos, malas ir paralēlas režģa līnijām un **nav tā**, ka starp taisnstūra virsotnēm ir gan viens no četriem režģa stūriem (punkti A, B, C, D), gan viens no četriem režģa punktiem, kas atrodas režģa iekšienē (punkti M, N, O, P).
Kāds ir lielākais režģa punktu skaits, ko var atzīmēt tā, lai nebūtu *laba* taisnstūra, kuram visas virsotnes ir atzīmētie punkti?



11. zīm.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Skaitļi A un B ir divi dažādi 7-ciparu skaitļi, kuri katrs satur visus ciparus no 1 līdz 7. Pierādīt, ka A nedalās ar B.

A.12.2. Caur trijstūra ABC malas AB iekšēju punktu P novilkta taisne, kas ir paralēla BC un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos M un N (A, M un B atrodas uz riņķa līnijas tieši šādā secībā). MC krusto AB punktā Q. Pierādīt, ka NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu.

A.12.3. Atrisināt vienādojumu $\lg x \cdot \lg(4-x) = \frac{1}{4}$.

A.12.4. Vai telpā var izvietot **a)** 6 punktus, **b)** 7 punktus tā, lai jebkuri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrastos vienā plaknē?

A.12.5. Klasē ir 17 skolēni. Katru dienu daži no viņiem (vismaz viens) tiek izsaukti pie tāfeles. Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura ir iespējams, ka katriem diviem klases skolēniem ir bijusi diena, kad viens no viņiem ir izsaukts pie tāfeles, bet otrs nē?

VP. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

VP.1. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x ciparu summu. Aprēķināt $S(S(S(2012^{2012})))$.

VP.2. Dotas divas virknes $x_1 = x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_n + 2$ visiem $n \geq 1$ un $y_1 = y_2 = 4$, $y_{n+2} = y_n y_{n+1} - 1$ visiem $n \geq 1$. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa, kas pieder abām virknēm.

VP.3. Trijstūra malu garumi ir a, b un c. Pierādīt, ka trijstūra laukums ir mazāks nekā $\frac{7}{48}(a^2 + b^2 + c^2)$.

VP.4. Atrast visas funkcijas $f(x)$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, tādas, ka visiem reāliem x un y izpildās vienādība

$$f(f(x)+3y)+3y = f(x+4y)+2f(x).$$

VP.5. $N \times N$ rūtiņas liels laukums jāsadala N sakarīgos apgabalos tā, ka katrā no tiem ir tieši N rūtiņas un katrā laukuma rindā un kolonnā atrodas tieši triju apgabalu rūtiņas.

Vai tas ir iespējams, ja **a)** $N = 7$, **b)** $N = 8$?

Apgabalu sauc par sakarīgu, ja no katras tā rūtiņas var nokļūt uz jebkuru citu, pārvietojoties tikai pa šī apgabala rūtiņām; katrā solī drīkst pārvietoties uz rūtiņu, kurai ar doto ir kopīga mala.

IMO. 53. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

IMO.1. Trijstūrim ABC pievilkta riņķa līnija ar centru punktā J pieskaras trijstūra ABC malai BC punktā M, malas AB pagarinājumam – punktā K, bet malas AC pagarinājumam – punktā L. Taisnes LM un BJ krustojas punktā F, taisnes KM un CJ – punktā G. Taisne BC krusto taisni AF punktā S, bet taisni AG – punktā T. Pierādīt, ka punkts M ir nogriežņa ST viduspunkts.

(Par trijstūrim pievilktu riņķa līniju sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras vienai trijstūra malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem.)

IMO.2. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un tādi reāli pozitīvi skaitļi $a_2, a_3, ..., a_n$, ka $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Pierādīt, ka $(1+a_2)^2(1+a_3)^2...(1+a_n)^2 > n^n$.

IMO.3. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli ar melošanu. Tās noteikumi ir atkarīgi no naturāliem skaitļiem n un k, kas spēlētājiem ir zināmi.

Sākumā A izvēlas tādus naturālus skaitļus x un N, ka $1 \leq x \leq N$. Skaitli x spēlētājs A patur slepenībā, bet skaitli N nemelojot pasaka spēlētājam B. Spēlētājs B cenšas iegūt informāciju par x, pēc patikas daudz reižu jautājot spēlētājam A šādā veidā: B izvēlas jebkuru naturālu skaitļu kopu S (iespējams, tādu, kas jau izmantota kādā no iepriekšējiem jautājumiem) un jautā, vai x pieder S. Pēc katra jautājuma A tūlīt atbild „jā" vai „nē". Spēlētājs A drīkst melot, tomēr no katrām $k+1$ pēc kārtas esošām atbildēm vismaz vienai jābūt patiesai.
Galu galā spēlētājam B jānosauc kopa X ar ne vairāk kā n naturāliem skaitļiem. Ja x pieder kopai X, B uzvar; citādi B zaudē. Pierādīt, ka
1) ja $n \geq 2k$, tad spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija;
2) visiem pietiekami lieliem k pastāv tāds $n \geq 1{,}99^k$, ka B nevar droši panākt uzvaru.

IMO.4. Atrodiet visas tādas funkcijas $f: Z \to Z$ (Z – veselo skaitļu kopa), ka jebkuriem veseliem skaitļiem a, b un c, kam $a+b+c=0$, izpildās vienādība

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

IMO.5. Dots taisnleņķa trijstūris ABC, $\angle BCA = 90°$. Trijstūra augstums ir CD un X ir nogriežņa CD iekšējs punkts. Punkti K un L ir tādi attiecīgi nogriežņu AX un BX punkti, ka $BK = BC$ un $AL = AC$. Punkts M ir nogriežņu AL un BK krustpunkts. Pierādīt, ka $MK = ML$.

IMO.6. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem eksistē tādi nenegatīvi veseli skaitļi $a_1, a_2, ..., a_n$, ka $\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + ... + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$.

AB. Atlase komandu olimpiādei „Baltijas Ceļš 2011"

AB. Algebra

AB.1. Doti tādi skaitļi *a* un *b*, ka polinoma $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ visas nulles atbilst reālām *x* vērtībām. Pierādīt, ka $a^2 \geq 2b + 12$.

AB.2. Vai eksistē tāds reāls skaitlis α tāds, ka $\cos\alpha$ ir iracionāls, bet $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ un $\cos 5\alpha$ visi ir racionāli?

AB.3. Doti divi polinomi $F(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ un $G(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ (abi ar koeficientu 1 pie x^3). Vienādojumiem $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ un $F(x) = G(x)$ tika uzrakstītas visas reālās saknes. Izrādījās, ka uzrakstīti 8 dažādi skaitļi. Pierādīt, ka vai nu mazākais, vai arī lielākais no uzrakstītajiem skaitļiem nav vienādojuma $F(x) = 0$ sakne.

AB.4. Zināms, ka *a, b, c* ir pozitīvi reāli skaitļi un $1 + a + b + c = 2abc$. Pierādīt, ka

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geq \frac{3}{2}.$$

AB.5. Atrast visas funkcijas $f: R \to R$ (funkcijas definētas reāliem skaitļiem un kuru vērtības ir reāli skaitļi), kuras apmierina funkcionālvienādojumu:

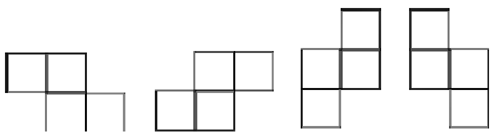
$$f(f(x+y)) = f(x^2 - y^2) + 4xyf(x+y).$$

AB. Kombinatorika

AB.6. Uz taisnstūrveida galdiņa ar n rindām un $n+1$ kolonnu ir uzliktas vairākas figūras. Pierādīt, ka vienmēr var izvēlēties kādas kolonnas (pozitīvu skaitu) tā, lai katrā rindā būtu pāra skaits figūru. (Uz katra lauciņa var atrasties ne vairāk kā viena figūra.)

AB.7. Skaitļi no 1 līdz 2010 sadalīti trīs nešķeļošās kopās – katrā kopā ir tieši 670 elementi. Pierādīt, ka no katras kopas var izvēlēties pa vienam skaitlim tā, lai viens no šiem skaitļiem būtu divu pārējo summa.

AB.8. Tabula ar izmēriem 8×8 rūtiņas aizpildīta ar skaitļiem no 1 līdz 64 tā, ka jebkuru 4 skaitļu, kurus var pārklāt ar kādu figūru (skat. 12. zīm.), summa dalās ar vienu un to pašu skaitli *N*. Vai tas iespējams, ja **a)** $N = 3$; **b)** $N = 4$; **c)** $N = 5$?



12. zīm.

AB.9. Uz galda atrodas 11 kartiņas, uz kurām uzrakstīti skaitļi no 0 līdz 10. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Spēli sāk pirmais spēlētājs. Katrs spēlētājs savā gājienā paņem vienu no atlikušajām kartiņām. Pirmā spēlētāja mērķis ir izveidot augošu aritmētisko progresiju vismaz no 4 kartiņām. Otrā spēlētāja mērķis ir to nepieļaut (tad viņš uzvar). Kuram no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija?

AB.10. Anna un Toms piedalījās vakariņās kopā ar vēl četriem draugu pāriem. Sasveicinoties daži no cilvēkiem paspieda viens otram rokas. Neviens nepaspieda roku savam draugam un nepaspieda roku pats sev. Kad Toms vēlāk apjautājās, cik daudziem katrs ir paspiedis roku, viņš ieguva 9 atšķirīgas atbildes. Ar cik cilvēkiem sarokojās Anna?

AB. Ģeometrija

AB.11. Taisnstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E, zināms, ka $AB = 2BC$. Leņķa CAD bisektrise krusto CD punktā F, bet diagonāli BD – punktā G. Aprēķināt FC garumu, ja $EG = 25$.

AB.12. Vai eksistē trijstūris, kuram leņķis starp katrām divām tā mediānām ir $120°$, un kurš nav vienādmalu?

AB.13. Dots regulārs dodekaedrs ar malas garumu 1. Pierādīt, ka jebkura ceļa garums pa tā virsmu no vienas virsotnes uz tai diametrāli pretējo virsotni ir vismaz 4. (Regulārs dodekaedrs ir telpiska figūra, kurai ir 12 vienādas skaldnes, kas ir regulāri piecstūri.)

AB.14. Dotajā riņķa līnijā iespējams ievilkt sešas riņķa līnijas ar rādiusu r tā, lai tās nepārklātos. Pierādīt, ka tajā var ievilkt septiņas riņķa līnijas ar rādiusu r tā, lai tās nepārklātos.

AB.15. Dots dažādmalu šaurleņķu trijstūris ABC. No punkta A novilkta mediāna, kas krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā A'. Pieskares, kuras novilktas punktos A un A', krustojas punktā A''. Līdzīgi definē B'' un C''. Pierādīt, ka A'', B'' un C'' atrodas uz vienas taisnes.

AB. Skaitļu teorija

AB.16. Vai eksistē 8 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kurus var sadalīt divās kopās tā, lai tām abām būtu vienāds visu kopas elementu reizinājums?

AB.17. Cik veidos $\frac{2011}{2010}$ var izteikt kā divu daļu reizinājumu, kuras katra ir formā $\frac{n+1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis? (Skaitlis n katrai daļai var atšķirties, un reizinātāju secība nav svarīga.)

AB.18. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis m. Vienā gājienā atļauts nodzēst m un tā vietā uzrakstīt $17m$ vai arī $[\sqrt{m}]$ (ar $[x]$ apzīmē reāla skaitļa x veselo daļu). Pierādīt, ka, atkārtojot šādus gājienus, uz tāfeles iespējams iegūt jebkuru naturālu skaitli.

AB.19. Atrast visus naturālu skaitļu pārus (m, n) tādus, ka $2m-1$ dalās ar n un $2n-1$ dalās ar m.

AB.20. Katram naturālam n aplūko kopu:

$$S_n = \{\, 0,\ 1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots, 1+2+\ldots+(n-1)\,\}.$$

Pierādīt:

a) ja n ir skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n nevar atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n;

b) ja n nav skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n vienmēr var atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n.

BW. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2011”

BW. Algebra

BW.1. Reāliem skaitļiem $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ izpildās sakarības

$$x_1 + x_2 = 2x_1', \ x_2 + x_3 = 2x_2', \ \ldots, \ x_{2011} + x_1 = 2x_{2011}',$$

kur $x_1', x_2', ..., x_{2011}'$ ir skaitļu $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ permutācija. Pierādīt, ka

$$x_1 = x_2 = ... = x_{2011}.$$

BW.2. Dota funkcija $f : Z \to Z$ tāda, ka visiem veseliem *x* un *y* izpildās vienādība

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Pierādīt, ka funkcija f ir ierobežota, t. i., eksistē tāda konstante *C*, ka $-C < f(x) < C$ visiem veseliem skaitļiem *x*.

BW.3. Nenegatīvu veselu skaitļu virknē $a_1, a_2, a_3, ...$ visiem $n > 2$ piemīt īpašība, ka a_{n+1} ir $a_n^n + a_{n-1}$ pēdējais cipars. Vai noteikti eksistē tāds n_0, ka virkne $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...$ ir periodiska?

BW.4. Doti nenegatīvi reāli skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* tādi, ka $a + b + c + d = 4$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

BW.5. Dota funkcija $f : R \to R$, kurai visiem reāliem *x* izpildās vienādība

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

Atrast $f(0)$ vērtību.

BW. Kombinatorika

BW.6. Dots naturāls skaitlis *n*. Pierādīt, ka ir vismaz $\frac{n^2}{4}$ tādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un tieši vienu citu punktu ar veselām koordinātām (x, y), $0 \le x, y \le n$.

BW.7. Apzīmēsim ar *T* 15-elementu kopu $\{10a + b : a, b \in Z, 1 \le a < b \le 6\}$. *S* ir tāda *T* apakškopa, kurā sastopami visi seši cipari 1, 2, …, 6, bet kurā nav tādu trīs elementu, kas kopā saturētu visus sešus ciparus. Atrast lielāko iespējamo kopas *S* elementu skaitu.

BW.8. Katru no trim Greifsvaldes skolām A, B un C apmeklē vismaz viens skolēns. No katriem trim skolēniem, pa vienam no katras skolas A, B un C, var atrast divus, kuri pazīst viens otru un divus, kuri nepazīst viens otru. Pierādīt, ka vismaz viens no sekojošiem apgalvojumiem ir patiess:

- kāds skolēns no A pazīst visus skolēnus no B;
- kāds skolēns no B pazīst visus skolēnus no C;
- kāds skolēns no C pazīst visus skolēnus no A.

BW.9. Dots taisnstūris, kura izmērs ir $m \times n$ rūtiņas, tās nokrāsotas melnā vai baltā krāsā. Krāsojumu sauksim par labu, ja izpildās sekojoši nosacījumi:

- Visas rūtiņas, kas pieskaras taisnstūra malai, ir melnas.

- Nekādas četras rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, nav nokrāsotas vienā krāsā.
- Nekādas četras rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, nav nokrāsotas tā, ka vienā krāsā ir tikai tās rūtiņas, kas saskaras tikai ar stūriem (pa diagonāli).

Kādiem taisnstūra izmēriem $m\times n$ ($m, n\geq 3$) ir iespējams labs krāsojums?

BW.10. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli ar veseliem skaitļiem. Sākotnējais skaitlis ir 2011^{2011}. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Vienā gājienā no tā var vai nu atņemt kādu naturālu skaitli starp 1 un 2010 ieskaitot, vai arī izdalīt to ar 2011, noapaļojot uz leju līdz tuvākajam veselajam skaitlim, kad tas nepieciešams. Uzvar spēlētājs, kurš pirmais iegūst nepozitīvu skaitli. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

BW. Ģeometrija

BW.11. *AB* un *CD* ir divi riņķa līnijas ω diametri. Patvaļīgam uz ω izvēlētam punktam *P*, ar *R* un *S* apzīmēsim tā projekcijas attiecīgi uz *AB* un *CD*. Pierādīt, ka nogriežņa *RS* garums nav atkarīgs no punkta *P* izvēles.

BW.12. Kvadrāta *ABCD* iekšpusē izvēlēts tāds punkts *P*, ka $PA:PB:PC$ ir $1:2:3$. Aprēķināt leņķi $\angle BPA$.

BW.13. Punkts *E* atrodas izliekta četrstūra *ABCD* iekšpusē. Četrstūra ārpusē konstruēti trijstūri ΔABF, ΔBCG, ΔCDH un ΔDAI tā, ka $\Delta ABF\sim\Delta DCE$, $\Delta BCG\sim\Delta ADE$, $\Delta CDH\sim\Delta BAE$ un $\Delta DAI\sim\Delta CBE$. Punkti *P*, *Q*, *R* un *S* ir punkta *E* projekcijas attiecīgi uz taisnēm *AB*, *BC*, *CD* un *DA*. Pierādīt: ja četrstūrim *PQRS* var apvilkt riņķa līniju, tad $EF\cdot CD = EG\cdot DA = EH\cdot AB = EI\cdot BC$.

BW.14. Trijstūrī *ABC* ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām *BC*, *CA*, *AB* attiecīgi punktos *D*, *E*, *F*. Uz šīs riņķa līnijas izvēlēts tāds punkts *G*, ka *FG* ir tās diametrs. Taisnes *EG* un *FD* krustojas punktā *H*. Pierādīt, ka $CH \parallel AB$.

BW.15. Punkts *E* atrodas uz izliekta četrstūra *ABCD* malas *AD*. Zināms, ka $\angle ADB=\angle BDC$ un $AE\cdot ED+BE^2=CD\cdot AE$. Pierādīt, ka $\angle EBA=\angle DCB$.

BW. Skaitļu teorija

BW.16. Dots patvaļīgs vesels skaitlis *a* un skaitļu virkne $x_0, x_1, \ldots$, kur $x_0=a$, $x_1=3$ un $x_n=2x_{n-1}-4x_{n-2}+3$ visiem $n>1$. Atrast lielāko skaitli k_a, kuram var atrast tādu pirmskaitli *p*, ka $x_{2011}-1$ dalās ar p^{k_a}

BW.17. Atrodiet visus naturālos skaitļus *d*, kuriem ir spēkā īpašība: ja *d* ir kāda naturāla skaitļa *n* dalītājs, tad *d* ir arī jebkura tāda skaitļa dalītājs, kuru var iegūt no *n*, samainot vietām tā ciparus.

BW.18. Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q) tādus, ka gan p^2+q^3, gan q^2+p^3 ir naturālu skaitļu kvadrāti.

BW.19. Dots pirmskaitlis $p\neq 3$. Pierādīt, ka var atrast aritmētisko progresiju $x_1, x_2, \ldots, x_p$, kas sastāv no dažādiem naturāliem skaitļiem, kuras visu locekļu reizinājums ir naturāla skaitļa kubs.

BW.20. Vesels skaitlis $n\geq 1$ ir balansēts, ja starp tā dalītājiem ir pāra skaits pirmskaitļu. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu *n* tādu, ka no skaitļiem n, $n+1$, $n+2$ un $n+3$ tieši divi ir balansēti.

IETEIKUMI

I.S. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.S.9. Devītā klase

I.S.9.1. Izmantojot kubu summas formulu, izteiksmi $2^{15}+3^{12}$ pārveidojiet par reizinājumu.

I.S.9.2. Aprēķiniet riņķu centru veidotā

a) kvadrāta malas garumu,

b) romba malas un īsākās diagonāles garumu.

I.S.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākā iespējamā vērtība, 2) jāparāda piemērs, ka pie šādas vērtības izpildās uzdevumā prasītais.

I.S.9.4. Aprēķiniet nākamos virknes locekļus un ievērojiet sakarību, kā veidojas virkne.

I.S.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pierādiet, ka visas 9 rūtiņas vienlaicīgi nevar būt *labas*; 2) parādiet piemēru, ka 8 rūtiņas var būt *labas*.

I.S.10. Desmitā klase

I.S.10.1. Atcerieties, kādos gadījumos nevienādības drīkst reizināt.

I.S.10.2. No punkta D novelciet perpendikulu DG pret augstumu BE. Nosakiet ar ko vienāds DG un GF.

I.S.10.3. Mēģiniet atrast sakarību starp Vjeta teorēmu un taisnleņķa trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu.

I.S.10.4. No dotās sistēmas otrā vienādojuma atņemiet pirmo vienādojumu un veiciet ekvivalentus pārveidojumus, lai iegūto vienādību uzrakstītu kā divu izteiksmju reizinājumu, kas vienāds ar 1.

I.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pierādiet, ka lielākais strēmeļu kopgarums nav mazāks kā 12; 2) parādiet piemēru, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 12.

I.S.11. Vienpadsmitā klase

I.S.11.1. Mēģiniet izteiksmi $5a+b$ izteikt formā $p\cdot(a+b)-q\cdot(3a+5b)$, kur p un q ir kaut kādi naturāli skaitļi.

I.S.11.2. Izsakiet abu doto figūru laukumus, izmantojot regulārā sešstūra malu.

I.S.11.3. Pareiziniet skaitli $\dfrac{a^2+a-1}{2a+1}$ ar 4 un skaitītājā atdaliet pilno kvadrātu.

I.S.11.4. Aprēķiniet virknes nākamos locekļus. Izdomājiet a_n vispārīgo formulu, ja n ir pāra skaitlis un ja n ir nepāra skaitlis. Izmantojot matemātiskās indukcijas principu, pierādiet šo sakarību.

I.S.11.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pierādiet, ka lielākais strēmeļu kopgarums nav mazāks kā 15; 2) parādiet piemēru, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 15.

I.S.12. Divpadsmitā klase

I.S.12.1. Šķirojiet gadījumus atkarībā no vienādojuma $ax^2 - 2x + 1 = 0$ veida.

I.S.12.2. Uz katras trijstūra malas kā diametra konstruējiet riņķa līniju. Izmantojiet ievilkto leņķu īpašības, lai pierādītu leņķu vienādību.

I.S.12.3. Pārveidojiet doto vienādojumu sistēmu par tai ekvivalentu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = p \\ x^2 - y^2 = q \end{cases},$$

kur p un q ir veseli skaitļi.

I.S.12.4. Aplūkojiet divus gadījumus: 1) skudra pārvietojas tikai pa grīdu; 2) skudra pārvietojas arī pa dzelzsbetona kluča augšējo pamatu.

I.S.12.5. Sadaliet visus skaitļus pa pāriem tā, ka katra pāra reizinājums ir 48: {1, 48}, {2, 24}, {3, 16}, {4, 12}, {6, 8}. Šķirojiet gadījumus: 1) meitenes izvēlas divus pilnus pārus; 2) skaitļi tiek izvēlēti tā, ka nav paņemti divi pilni pāri.

I.N. LATVIJAS 62. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.N.9. Devītā klase

I.N.9.1. Atrodiet tādas divas x vērtības, kurām atbilstošās y vērtības nav atkarīgas no a un b vērtību izvēles.

I.N.9.2. Attālumus no P līdz katrai no trijstūra malai uztveriet kā trijstūru PAB, PAC, PBC augstumus. Savienojiet punktu P ar ΔABC virsotnēm un aprēķiniet ΔABC laukumu divos dažādos veidos.

I.N.9.3. Izdomājiet, kādām n vērtībām uzdevuma prasības noteikti nebūs iespējams izpildīt. Atrodiet vispārīgu sakarību, ka, sākot no kādas vērtības N, uzdevuma prasības ir iespējams izpildīt!

I.N.9.4. Aprēķiniet virknes nākamos locekļus.

I.N.9.5. Ievērojiet: ja skaitlis x ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli n, tad arī skaitlis $n-x$ ir savstarpējs pirmskaitlis ar n. Aplūkojiet šādu skaitļu pāru summu visām iespējamām x vērtībām!

I.N.10. Desmitā klase

I.N.10.1. Kāpiniet abas vienādības puses kvadrātā un atņemiet no tām kādu pozitīvu lielumu!

I.N.10.2. Aplūkojiet visus iespējamos trijstūru BKC un ABK vienādo leņķu variantus!

I.N.10.3. Nosakiet, kuri no dotajiem skaitļiem var būt nepāra skaitļi un pierādiet, ka vismaz viens no tiem dalīsies ar pietiekami lielu pirmskaitli!

I.N.10.4. Pieņemiet, ka viena skaitļa ciparu skaits ir n, bet otra skaitļa – m, aprēķiniet doto skaitļu reizinājuma ciparu skaitu!

I.N.10.5. Pierādiet, ka der vērtības $n=1$ un $n=2$, bet $n \geq 3$ iespējams konstruēt tādu tabulu, kurai no dotās sakarības neseko prasītais!

I.N.11. Vienpadsmitā klase

I.N.11.1. Pierādiet, ka simetriskais 8-ciparu skaitlis dalās ar 11 un izseciniet, vai skaitlis, kas dalās ar 11 var būt kāda skaitļa ciparu reizinājums!

I.N.11.2. Visiem vienādojumiem abām pusēm pieskaitiet 4 un kreisās puses izteiksmi sadaliet reizinātājos!

I.N.11.3. Izveidojiet zīmējumu, kurā trīs no deviņstūra virsotnēm sakrīt ar trijstūra virsotnēm un aplūkojiet vienādsānu trapeci, kuras garākā mala ir trijstūra mala, bet trīs īsākās – deviņstūra malas!

I.N.11.4. Konstruējiet tādu aritmētisko progresiju, kuras visi elementi ir pāra skaitļi, kas nedalās ar 4 un pierādiet, ka šī progresija apmierina uzdevuma nosacījumus!

I.N.11.5. Pirmajā svēršanas reizē katrā svaru kausā novietojiet pa trim monētām.

I.N.12. Divpadsmitā klase

I.N.12.1. Pierādiet, ka visas vienādojuma saknes ir pozitīvas.

I.N.12.2. Nosakiet, vai visa daudzskaldņa malu skaits var būt nepāra skaitlis! Aprēķiniet divos veidos daudzskaldņa šķautņu skaitu.

I.N.12.3. Izmantojot bisektrises īpašību, vispirms pierādiet, ka $\Delta ABP \sim \Delta AMN$!

I.N.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pamatot, ka der vērtība $p = 2$, 2) pierādīt, ka visiem pārējiem pirmskaitļiem p šai summai būs vismaz pieci naturāli dalītāji.

I.N.12.5. Sākumā pieņemiet, ka atzīmētas tikai divas virsotnes A_i un A_j un b ir virsotņu skaits starp A_i un A_j, bet c – virsotņu skaits starp A_j un A_i. Nosakiet, kādām b un c vērtībām ($b + c = 15$) reizinājuma $b \cdot c$ vērtība būs lielākā iespējamā! Pēc tam šo pieeju attīstiet četru virsotņu gadījumam!

I.V. LATVIJAS 62. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.V.9. Devītā klase

I.V.9.1. Atrodiet tādas pēc kārtas ņemtu skaitļu īpašības, kas reizinājumam neļauj būt vienādam ar dotajiem skaitļiem.

I.V.9.2. Fiksētam trijstūra laukumam izsakiet trijstūra malu garumus un pārbaudiet, vai šiem skaitļiem ir spēkā trijstūra nevienādība.

I.V.9.3. Pierādiet, ka starp skaitļiem a, b, c ir tieši viens pozitīvs un tieši viens – negatīvs.

I.V.9.4. Nogriežņu *AE* un *BC* krustpunktu apzīmējiet ar *D* novelciet perpendikulus *BF* un *CG* pret *AD*.

I.V.9.5. Izkrāsojiet sākotnējo laukumu šaha galdiņa veidā.

I.V.10. Desmitā klase

I.V.10.1. No pirmajiem diviem vienādojumiem iegūstiet reizinājuma xy izteiksmi. Izmantojiet kubu summas formulu, lai iegūstu derīgās a vērtības.

I.V.10.2. Aprēķiniet kreisajā pusē doto trijstūru laukumus kā daļu no ABC laukuma.

I.V.10.3. Uzrakstiet skaitļa N^2 vērtības nelielam sešinieku skaitam un mēģiniet atrast skaitļa veidošanas likumsakarības.

I.V.10.4. Izdomājiet, kā var pārvietoties katrs kauliņš.

I.V.10.5. Ja rūtiņu laukums izkrāsots šaha galdiņa veidā, tad šaha zirdziņš neapdraud tās krāsas rūtiņu uz kādas pats atrodas. Izmantojiet laukuma simetriju.

I.V.11. Vienpadsmitā klase

I.V.11.1. Izdomājiet, kā izteiksmi $x^2 + y^2$ sadalīt reizinātājos. Izvēlieties tādu naturāla skaitļa a izteiksmi, lai līdzīgā veidā izteiksmi $n^4 + a$ varētu izteikt kā reizinājumu.

I.V.11.2. Pieņemiet, ka tabulā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 9 un mēģiniet izvietot tos tā, lai iekrāsoto rūtiņu skaits būtu pēc iespējas lielāks un pēc iespējas mazāks. Pēc tam pierādiet, ka iekrāsoto rūtiņu skaits atrodas noteiktās robežās.

I.V.11.3. Nosakiet daļu laukumu attiecību vienādmalu trijstūrim, pēc tam vispāriniet.

I.V.11.4. Pierādiet, ka visām n vērtībām $a_n \geq 5$ un izsakiet a_{n+1} , izmantojot a_n.

I.V.11.5. Izmantojiet simetriju pret punktu.

I.V.12. Divpadsmitā klase

I.V.12.1. Izvēlieties $b_i = i$ un atrodiet atbilstošo $\{a_i\}$ virkni.

I.V.12.2. Apzīmējiet $\angle ACD = \alpha$ un $\angle ABD = \beta$. Izsakiet $\angle BDC$ un $\angle BAC$.

I.V.12.3. Izmantojiet sakarību, ka $\left[\dfrac{n}{n+i}\right] = 0$ katram $i = 1, 2, ..., 2012$.

I.V.12.4. Sāciet no viena laukuma stūra un vai nu aizpildiet visu laukumu, vai arī iegūstiet pretrunu.

I.V.12.5. Projicējiet uzzīmēto riņķu diametrus uz taisnes.

I.A. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.A.9. Devītā klase

I.A.9.1. Ievērojiet, ka skaitlim p^k, kur k ir naturāls skaitlis un p ir pirmskaitlis, ir tieši $k+1$ dalītājs.

I.A.9.2. Izmantojiet mediānas, kas novilkta no trijstūra taisnā leņķa, un viduslīnijas īpašības.

I.A.9.3. Izmantojiet Vjeta teorēmu par sakņu summu un reizinājumu.

I.A.9.4. Izdomājiet, kā jāspēlē Pēterim, lai viņš vienmēr uzvarētu. Ievērojiet, ka $111 = 37 \cdot 3$.

I.A.9.5. Ievērojiet, ka, sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata.

I.A.10. Desmitā klase

I.A.10.1. Izdomājiet, kādus atlikumus var dot p^2, ja to dala ar 3.

I.A.10.2. Novelciet riņķi, kura diametrs ir *BD*.

I.A.10.3. Novērtējiet kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2 + px + q$ vērtības punktos x_1 un x_2.

I.A.10.4. Ievērojiet, ka noteikti ir divas tādas 10-stūra virsotnes, kas pieder lokam, ko veido divas 9-stūra virsotnes.

I.A.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pierādiet, ka nogriežņu skaits nevar būt lielāks kā 19, 2) parādiet piemēru, kā uzzīmēt 19 nogriežņus tā, lai tie nekrustojas.

I.A.11. Vienpadsmitā klase

I.A.11.1. Pieņemiet pretējo, ka $n^2 - 3n - 1$ dalās ar 169. Pārveidojot izteiksmi $n^2 - 3n - 1$ formā $P(n) + 39$, kur $P(n)$ ir divu binomu reizinājums.

I.A.11.2. Apskatiet divus gadījumus: 1) taisnes, uz kurām atrodas dotie punkti, ir paralēlas; 2) taisnes, uz kurām atrodas dotie punkti, nav paralēlas.

I.A.11.3. Pareiziniet vienādojuma kreisās puses katra saskaitāmā skaitītāju un saucēju ar tā saucējam saistīto izteiksmi (piemēram, izteiksmes $a+b$ saistītā izteiksme ir $a-b$).

I.A.11.4. Izmantojiet daudzstūra iekšējo leņķu summas aprēķināšanas formulu.

I.A.11.5. Atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādiet piemēru, kā nokrāsot 10 punktus tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi, 2) pamatojiet, ka, nokrāsojot 11 punktus, noteikti atradīsies *labs* taisnstūris ar visām nokrāsotām virsotnēm.

I.A.12. Divpadsmitā klase

I.A.12.1. Pieņemiet pretējo, ka $A = kB$, un izdomājiet, kādas vērtības var pieņemt skaitlis k. Apskatiet, kādus atlikumus dod skaitļi A un B, dalot tos ar 9.

I.A.12.2. Ievērojiet, ka pietiek pierādīt, ka $\angle AXQ + \angle AXN = 180°$, kur punkts X ir ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustpunkts.

I.A.12.3. Izmantojiet logaritmiskās funkcijas $y = \lg x$ īpašības.

I.A.12.4. Parādiet, ka abos gadījumos punktus var izvietot, kā prasīts uzdevumā.

I.A.12.5. Atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādiet piemēru, ka ar 5 dienām pietiek, lai izpildītos uzdevumā prasītais, 2) pamatojiet, ka ar mazāk dienām nepietiek.

I.VP. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

I.VP.1. Ievērojiet, ka skaitlis un tā ciparu summa, dalot ar 9, dod vienādus atlikumus.

I.VP.2. Pierādiet, ka abu virkņu locekļi dod dažādus atlikumus, dalot tos ar 11.

I.VP.3. Izmantojiet novērtējumu $\frac{7}{48}(a^2+b^2+c^2) > \frac{\sqrt{48}}{48}(a^2+b^2+c^2)$. Pierādiet, ka ir spēkā nevienādība $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$.

I.VP.4. Izdomājiet, ar kādu izteiksmes $f(x)$ vērtību vienādojumā $[f(f(x)+3y]+3y=[f(x+4y)]+2f(x)$ ar kvadrātiekavām atzīmētie locekļi saīsinās.

I.VP.5. **a)** Pierādiet, ka uzdevumā prasītais nav iespējams, ja $N=7$. **b)** Parādiet piemēru, ka uzdevuma prasītais izpildās, ja $N=8$.

I.IMO. 53. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.IMO.1. Pierādiet, ka $KM \perp BJ$ KM un nogrieznis KM ir paralēls trijstūra ABC bisektrisei.

I.IMO.2. Izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko pierādiet, ka $(a_k+1)^k = k^k a_k \dfrac{1}{(k-1)^{k-1}}$ tikai tad, ja $a_k = \dfrac{1}{k-1}$ un izmantojiet šo sakarību, lai pierādītu nepieciešamo.

I.IMO.3. Pierādiet, ka B ir uzvaroša stratēģija tad un tikai tad, ja uzvaroša stratēģija ir gadījumam $N = n+1$, t. i., nepieciešams atrast vienu skaitli, kas noteikti nevar būt x.

I.IMO.4. Pierādiet, ka $f(0)=0$ un $f(a)=f(-a)$.

I.IMO.5. Izmantojot Eiklīda teorēmu taisnleņķa trijstūrī un līdzīgus trijstūrus, pierādiet, ka $\dfrac{AD}{AL} = \dfrac{AL}{AB}$ un $\Delta DAL \sim \Delta BAL$.

I.IMO.6. Pareiziniet vienādības labo pusi ar lielāko no saucējā esošajām trijnieka pakāpēm un aplūkojiet šīs izteiksmes vērtību pēc moduļa 2. Nosakiet, kādām n vērtībām ir iespējams atrisinājums.

I.AB. ATLASE KOMANDU OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2011”

I.AB. Algebra

I.AB.1. Apzīmējiet polinoma saknes un izsakiet $P(x)$ kā binomu reizinājumu. Pēc tam atrisiniet vienādojumu sistēmu, ko nosaka koeficienti pie polinomu pakāpēm.

I.AB.2. Izsakiet $\cos 2\alpha$ un $\cos 3\alpha$ izmantojot $\cos\alpha$ palīdzību un pieņemiet, ka abas šīs vērtības ir racionālas.

I.AB.3. Apzīmējiet vienādojumu $F(x)=0$ un $G(x)=0$ saknes un nosakiet, kā attiecībā pret šīm saknēm ir izvietotas vienādojuma $F(x)=G(x)$ saknes. Izmantojiet zīmējumu!

I.AB.4. Apzīmējiet $x=\frac{1}{a}+1,\ y=\frac{1}{b}+1,\ z=\frac{1}{c}+1$ un pārveidojiet sākotnējo nevienādību. Pēc tam izmantojiet sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko.

I.AB.5. Izmantojiet jaunus mainīgos $u=x+y$ un $v=x-y$, pārrakstiet doto vienādojumu izmantojot šos mainīgos.

I.AB. Kombinatorika

I.AB.6. Izmantojiet matemātiskās indukcijas metodi – pierādiet, ka prasītā īpašība ir spēkā maziem galdiņiem un, ja atrisinājums (iespēja izvēlēties kolonnas norādītajā veidā) eksistē visām n vērtībām, kurām $n \ge n_0$, tad atrisinājums eksistē arī gadījumam $n=n_0+1$.

I.AB.7. Pieņemiet pretējo – ka šādus skaitļus izvēlēties nav iespējams. Lai nonāktu pie pretrunas, pieņemiet, ka $1, 2, ..., n-1 \in A$, bet $n \in B$.

I.AB.8. Atrodiet, kurās rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem jādod vienāds atlikums, dalot tos ar N.

I.AB.9. Atrodiet visas iespējamās aritmētiskās progresijas, kuras var izveidot no dotajām kartiņām un nosakiet, kuri skaitļi tajās tiek izmantoti biežāk nekā citi.

I.AB.10. Nosakiet, kāds ir lielākais cilvēku skaits, ar kuru varēja sarokoties viens cilvēks, un ko var secināt no Toma saņemtajām atbildēm.

I.AB. Ģeometrija

I.AB.11. Apzīmējiet taisnstūra malu garumus, izmantojiet Pitagora teorēmu un bisektrises īpašību.

I.AB.12. Pieņemiet, ka eksistē trijstūris, kas nav vienādmalu un kam izpildās uzdevumā dotā īpašība. Aplūkojiet mediānas un izmantojiet sinusu teorēmu.

I.AB.13. Ievērojiet, ka regulāra piecstūra visas diagonāles ir vienāda garuma un izmantojiet dodekaedra virsmas izklājumus.

I.AB.14. No pretējā pierādiet, ka lielās riņķa līnijas rādiuss ir vismaz $3r$.

I.AB.15. Pierādiet, ka punkti A'', B'', C'' atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un riņķa līnijas ar diametru OM (O – trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs) radikālās ass.

I.AB. Skaitļu teorija

I.AB.16. No pretējā pierādiet, ka šādi skaitļi neeksistē. Izmantojiet īpašību, ka katram pirmskaitlim p, ar ko dalās kāds no skaitļiem, vienā kopā, otrā kopā jāatbilst citam skaitlim, kas arī dalās ar šo pašu pirmskaitli.

I.AB.17. Izsakiet daļu reizinājumu vispārīgā veidā un ņemiet vērā, ka 2011 ir pirmskaitlis.

I.AB.18. Atrisinājumu sadaliet divās daļās:

1) pierādiet, ka no jebkura naturāla skaitļa, kas lielāks nekā 1, ar doto operāciju palīdzību iespējams iegūt 1,

2) pierādiet, ka no 1 ar doto operāciju palīdzību iespējams iegūt jebkuru naturālu skaitli.

I.AB.19. Pārrakstiet uzdevuma nosacījumus kā vienādojumu sistēmu un izsakiet m kā divu veselu skaitļu dalījumu.

I.AB.20. Izsakiet divu S_n elementu starpību vispārīgā veidā un nosakiet, kādos gadījumos šī starpība dalās ar n.

I.BW. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE "BALTIJAS CEĻŠ 2011"

I.BW. Algebra

I.BW.1. Kāpiniet vienādību abas puses kvadrātā, pēc tam saskaitām iegūtās vienādības un izmantojam, ka $x_1', x_2', ..., x_{2011}'$ ir skaitļu $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ permutācija. Kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja visi saskaitāmie ir 0.

I.BW.2. Ievietojiet dotajā vienādībā $y = f(x)$ un $y = 0$.

I.BW.3. Izmantojiet, ka katru virknes elementu, sākot ar trešo, viennozīmīgi nosaka virknes divi iepriekšējie locekļi, un ievērojiet, ka a_n^n un a_{n-1} pēc moduļa 10 var pieņemt 10 dažādas vērtības.

I.BW.4. Novērtējiet izteiksmi $a^3 + 2$, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Veiciet ekvivalentus pārveidojumus un izmantojiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko.

I.BW.5. Apzīmējiet $f(0) = a$ un $f(1) = b$. Aprēķiniet $f(a)$ nu $f(b)$.

I.BW. Kombinatorika

I.BW.6. Pieņemiet, ka $n' = \left[\frac{n}{2}\right]$ ir lielākais veselais skaitlis, kas apmierina nevienādību $n' \le \frac{n}{2}$. Ievērojiet, ka $\frac{n^2}{4} = n^2 - \frac{3n^2}{4} \le n^2 - 3n'^2$, un pierādiet, ka ir vismaz $n^2 - 3n'^2$ tādas taisnes, kā prasīts uzdevumā.

I.BW.7. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) pierādiet, ka kopā *S* nav vairāk kā 9 elementi, 2) parādiet piemēru, ka kopā *S* var būt 9 elementi.

I.BW.8. Pieņemiet pretējo, ka neizpildās neviens no uzdevumā dotajiem apgalvojumiem, un iegūstiet pretrunu.

I.BW.9. Pierādiet, ka *labs* krāsojums ir iespējams tad un tikai tad, ja *n* vai *m* ir nepāra skaitlis.

I.BW.10. Aplūkosim doto skaitli, uzrakstītu skaitīšanas sistēmā ar bāzi 2011. Šajā bāzē ir 2011 cipari – 0, 1, 2, ..., $<2010>$.

I.BW. Ģeometrija

I.BW.11. Pierādiet, ka punkti *P*, *R*, *O*, *S* atrodas uz vienas riņķa līnijas un *OP* ir šīs riņķa līnijas diametrs.

I.BW.12. Ievērojiet, ka, pagriežot trijstūri *ABP* ap punktu *B* par $90°$, punkts *A* attēlojas par punktu *C* un punkts *P* par jaunu punktu *Q*.

I.BW.13. Izmantojot ievilkto leņķu īpašības un Ptolemaja teorēmu, pierādiet, ka $EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC = AE \cdot CE + BE \cdot DE$.

I.BW.14. Izmantojot pieskaru īpašības un ievilkto leņķu īpašības, pierādiet, ka iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm *AB* un *CH*, kuras krusto taisne *CB*, ir vienādi.

I.BW.15. Izmantojiet simetriju pret taisni *DB*.

I.BW. Skaitļu teorija

I.BW.16. Apskatiet skaitļu virkni $y_n = x_n - 1$.

I.BW.17. Pierādiet, ka d var pieņemt tikai vērtības 1, 3 vai 9.

I.BW.18. Izmantojiet simetriju un šķirojiet vairākus gadījumus: 1) $p = 2$, 2) $p = q$, 3) p un q ir dažādi nepāra pirmskaitļi.

I.BW.19. Apskatiet aritmētisko progresiju $a_1, a_2, ..., a_p$ un šīs progresijas visu locekļu reizinājumu $P = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_p$. Ievērojiet, ka, aritmētiskās progresijas visus locekļus reizinot ar vienu un to pašu skaitli, iegūst citu aritmētisko progresiju.

I.BW.20. Pierādiet no pretējā, t. i., pieņemiet, ka eksistē tāds N, ka nevienam $n \geq N$ nepiemīt uzdevumā prasītā īpašība, un sadaliet visus veselos skaitļus, kas lielāki vai vienādi ar N, maksimāli lielos blokos secīgu skaitļu, kas visi ir vai nu *balansēti*, vai nav *balansēti*. Izdomājiet, kādi var būt iegūto bloku garumi.

ATRISINĀJUMI

A.S. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.S.9. Devītā klase

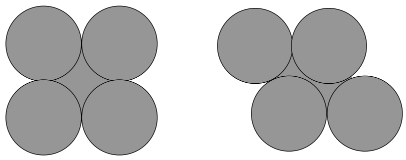
A.S.9.1. *Pierādīt, ka skaitlis* $2^{15}+3^{12}$ *nav pirmskaitlis.*

Izmantosim formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un pārveidosim doto skaitli:

$$2^{15}+3^{12}=(2^5)^3+(3^4)^3=(2^5+3^4)(2^{10}-2^5\cdot 3^4+3^8).$$

Tā kā abās iekavās izteiksmju vērtības ir naturāli skaitļi, kas ir lielāki nekā 1, tad dotais skaitlis nav pirmskaitlis.

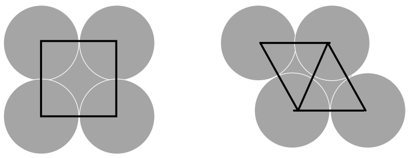
A.S.9.2. *Aprēķināt* 1. *zīmējumā doto figūru laukumus. Visi zīmējumos attēlotie riņķi ir vienādi un to rādiuss ir* 1. *a) gadījumā riņķu centri veido kvadrātu.*



a) b)
1. zīm.

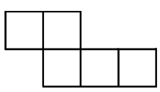
a) Iekrāsoto figūru veido kvadrāts, kura virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2, un četri riņķi, no kuriem izgriezta ceturtdaļa (skat. A1. zīm. a)). Tātad kopējais figūras laukums ir $S_{kvadrata}+4\cdot\frac{3}{4}S_{\text{O}}=2^2+3\cdot\pi\cdot 1^2=4+3\pi$.

b) Iekrāsoto figūru veido divi vienādmalu trijstūri, kuru virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2, divi riņķi, no kuriem izgriezta sestdaļa un divi riņķi, no kuriem izgriezta trešdaļa (skat. A1. zīm. b)). Tātad kopējais figūras laukums ir $2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}+3\pi$.



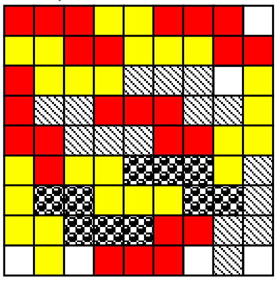
a) b)
A1. zīm.

A.S.9.3. *Kādu lielāko daudzumu* 2. *zīmējumā attēloto figūriņu var izgriezt no kvadrāta ar izmēriem* 9×9 *rūtiņas? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām. Figūriņas drīkst pagriezt vai apgāzt „uz mutes”.*



2. zīm.

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, kāds ir lielākais figūru skaits, ko var izgriezt no kvadrāta. Dotajā kvadrātā pavisam ir 81 rūtiņa. Ievērojam, ka, ar dotajām figūrām pārklājot kvadrāta pirmās rindas rūtiņas, vismaz viena rūtiņa paliks nepārklāta. Tas pats attiecas uz kvadrāta pēdējo rindu. Tātad vismaz divas rūtiņas paliks nepārklātas jeb pārklātas būs ne vairāk kā 79 rūtiņas. No tā secinām, ka kvadrātā 9×9 varēs izvietot ne vairāk kā 15 figūras, jo 16 figūru kopējais laukums ir 80. Otrkārt, A2. zīmējumā parādīts, kā no kvadrāta var izgriezt 15 figūras.



A2. zīm.

A.S.9.4. *Naturālu skaitļu virknes* 7, 14, 17, ... *katrs nākamais loceklis tiek iegūts iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot* 1. *Kāds ir šīs virknes* 2011. *loceklis?*

Aprēķinām nākamos virknes locekļus:

n	a_{n-1}^2	a_n
1	-	7
2	49	$4+9+1=14$
3	196	$1+9+6+1=17$
4	289	$2+8+9+1=20$
5	400	$4+0+0+1=5$
6	25	$2+5+1=8$
7	64	$6+4+1=11$
8	121	$1+2+1+1=5$
9	25	$2+5+1=8$
10	64	$6+4+1=11$

Esam ieguvuši virkni: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ...
Ievērojam, ka, sākot ar piekto virknes locekli, virknē atkārtojas skaitļu grupa „5, 8, 11”. Tā kā $2011 = 4 + 2007 = 4 + 3 \cdot 669$, tad virknes 2011. loceklis būs tāds pats kā virknes 7. loceklis, t. i., **11**.

A.S.9.5. *Kvadrātā ar izmēriem* 3×3 *rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis (tie visi ir dažādi). Katrā rūtiņā ierakstīto skaitli a salīdzina ar tās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem un nosaka, par cik no tiem a ir lielāks, šo skaitu sauksim par rūtiņas svaru. Rūtiņu sauksim par labu, ja tās svars ir nepāra skaitlis. Kāds ir lielākais iespējamais labo rūtiņu skaits?*
(Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka visas 9 rūtiņas vienlaicīgi nevar būt *labas*. Tā kā visi skaitļi ir atšķirīgi, tad kāds no tiem būs vismazākais, t. i., būs lielāks par 0 kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem. Tā kā 0 ir pāra skaitlis, tad tā rūtiņa, kurā ierakstīts vismazākais skaitlis, nav *laba*.
Otrkārt, jāparāda piemērs, ka 8 rūtiņas var būt *labas* (A3. zīmējumā parādīts, ka astoņas rūtiņas var būt *labas* (katrā rūtiņā iekavās ir norādīts šīs rūtiņas *svars*)).

8 (1)	9 (3)	7 (1)
3 (1)	1 (0)	2 (1)
5 (1)	6 (3)	4 (1)

A3. zīm.

A.S.10. Desmitā klase

A.S.10.1. *Dots, ka x, y, z, t ir pozitīvi skaitļi un* $x^2 < y$, $y^2 < z$, $z^2 < t$ *un* $t^2 < x$. *Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem x, y, z, t ir mazāks nekā 1.*

Tā kā visu doto nevienādību abās pusēs ir pozitīvi skaitļi, tad visas četras nevienādības var sareizināt. Tādējādi iegūstam, ka $x^2y^2z^2t^2 < xyzt$. Izdalot iegūtās nevienādības abas puses ar $xyzt > 0$, iegūstam, ka $xyzt < 1$. No iegūtās nevienādības seko, ka *x*, *y*, *z*, *t* visi reizē nevar būt lielāki vai vienādi ar 1, t. i., vismaz viens no skaitļiem *x*, *y*, *z* vai *t* ir mazāks nekā 1, kas arī bija jāpierāda.

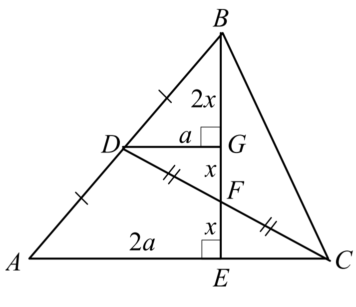
A.S.10.2. *Šaurleņķu trijstūrī ABC uz malas AB atzīmēts tās viduspunkts D. No virsotnes B pret malu AC vilktais augstums BE krusto mediānu CD tās viduspunktā F. Pierādīt, ka* $S_{ABE} = 2S_{BEC}$.

No punkta *D* novelkam perpendikulu *DG* pret *BE*, apzīmējam $DG = a$ (skat. A4. zīm.). Taisnleņķa trijstūri *DGF* un *CEF* ir vienādi (pēc pazīmes „$k\ell$”), jo $\angle GFD = \angle EFC$ kā krustleņķi un $DF = CF$, jo *F* ir *DC* viduspunkts. Tā kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi ir vienādi, tad $DG = EC = a$ un $GF = EF = x$. Tā kā $BD = AD$ un $DG \| AE$ (jo $DG \perp BE$ un $AE \perp BE$), tad *DG* ir trijstūra *ABE* viduslīnija. Tātad $AE = 2DG = 2a$ un $BG = EG = GF + FE = 2x$.
Aprēķinām trijstūru *ABE* un *BEC* laukumus:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4x = 4ax,$$

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} EC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4x = 2ax.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $S_{ABE} = 2S_{BEC}$, kas arī bija jāpierāda.



A4. zīm.

A.S.10.3. *Vienādojuma* $x^2 - 27x + 113 = 0$ *saknes ir taisnleņķa trijstūra katešu garumi, izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!*

Ja dotā vienādojuma saknes – katešu garumi – ir x_1 un x_2, tad taisnleņķa trijstūra laukums ir $S = \frac{x_1 x_2}{2}$. Pēc Vjeta teorēmas vienādojuma sakņu reizinājums ir $x_1 x_2 = 113$, tātad $S_\Delta = \frac{113}{2} = 56{,}5$ cm^2.

A.S.10.4. *Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu sistēmu* $\begin{cases} xy + z = 10 \\ x + yz = 11 \end{cases}$.

No dotās sistēmas otrā vienādojuma atņemam pirmo vienādojumu un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x + yz - xy - z = 11 - 10,$$
$$x - xy + yz - z = 1,$$
$$x(1 - y) - z(1 - y) = 1,$$
$$(x - z)(1 - y) = 1. \qquad (*)$$

Skaitli 1 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var izteikt divos veidos: $1 = 1 \cdot 1$ un $1 = (-1)(-1)$.

Tātad no vienādojuma (*) iegūstam divas vienādojumu sistēmas:

1) $\begin{cases} 1 - y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$. No pirmā vienādojuma iegūstam, ka $y = 0$. Ievietojam iegūto y vērtību dotajā sistēmā un iegūstam, ka $z = 10$ un $x = 11$. Esam ieguvuši, ka skaitļu trijnieks $(11; 0; 10)$ ir dotās sistēmas atrisinājums.

2) $\begin{cases} 1 - y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases}$. No pirmā vienādojuma iegūstam, ka $y = 2$. Ievietojam y vērtību dotajā sistēmā un atrisinām iegūto sistēmu ar saskaitīšanas paņēmienu:

$$\begin{cases} 2x + z = 10 & \big| \cdot(-2) \\ x + 2z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 2z = -20 \\ x + 2z = 11 \end{cases}$$
$$-3x = -9$$
$$x = 3$$

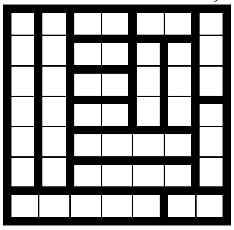
Ievietojot iegūto x vērtību pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $2 \cdot 2 + z = 10$ jeb $z = 4$. Esam ieguvuši, ka skaitļu trijnieks $(3; 2; 4)$ ir dotās sistēmas atrisinājums.

Tātad dotajai sistēmai veselos skaitļos ir divi atrisinājumi (11; 0; 10) un (3; 2; 4).

A.S.10.5. *Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala* 7×7 *rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz divas rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli k (*$2 \le k \le 7$*) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir tieši k.*
Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš.

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka lielākais strēmeļu kopgarums nav mazāks kā 12. Ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 9 (vai mazāks), tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu kopgarums ir $1 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 43 < 49$, tātad ar šo kopgarumu nepietiek, lai noklātu visu laukumu. Ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 10 vai 11, tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu kopgarums ir $1 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 50$. Lai dotais kvadrāts būtu sadalīts pilnībā, tad šāds dalījums neder, jo vienas rūtiņas ir par daudz. Bet tas nozīmē, ka kādam garumam strēmeļu skaits ir mazāks nekā maksimāli iespējamais, bet šis liekais garums ir sadalīts starp cita garuma strēmelēm, tādējādi palielinot šīs grupas kopgarumu un pārsniedzot maksimāli pieļaujamo summu. Tātad lielākais garantētais viena garuma strēmeļu kopgarums ir vismaz 12.

Otrkārt, parādām, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 12. Ja izvēlas strēmeles $2\cdot6+1\cdot5+2\cdot4+4\cdot3+6\cdot2$, tad viena garuma strēmeļu kopgarums ir ne vairāk kā 12. Kā salikt kvadrātu, skat., piemēram, A5. zīm.



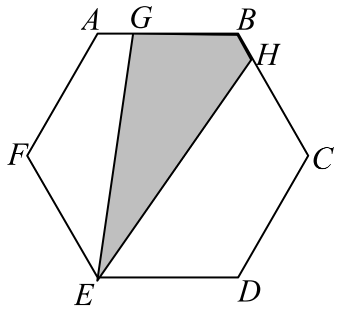
A5. zīm.

A.S.11. Vienpadsmitā klase

A.S.11.1. *Doti tādi veseli skaitļi a un b, ka* $3a+5b$ *dalās ar* 11. *Pierādīt, ka skaitlis* $5a+b$ *arī dalās ar* 11.

Ievērosim, ka $5a+b=11a-6a+11b-10b=11(a+b)-2(3a+5b)$. Tā kā labās puses izteiksmes katrs saskaitāmais dalās ar 11 (viens saskaitāmais satur reizinātāju 11, bet otrs saskaitāmais – reizinātāju $3a+5b$, kas pēc dotā dalās ar 11), tad arī kreisās puses izteiksme $5a+b$ dalās ar 11, kas arī bija jāpierāda.

A.S.11.2. *Uz regulāra sešstūra ABCDEF malas AB atlikts punkts G, bet uz malas BC punkts H tā, ka* $AG=BH$ *(skat.* 3. *zīm.). Pierādīt, ka* $S_{EGBH}=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}$.



3. zīm.

Apzīmējam sešstūra malas garumu ar *a* un $AE=EC=h$, $AE\perp AB$, $EC\perp BC$. Tā kā $AG=BH$, tad $BG=HC$, jo sešstūris ir regulārs. Aprēķinām iekrāsotā četrstūra laukumu (skat. A6. zīm.), sadalot to divos trijstūros:

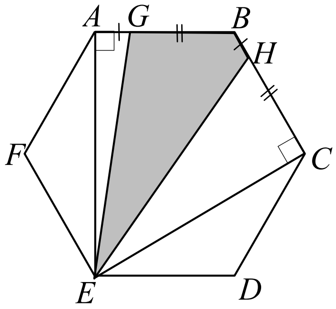
$$S_{EGBH}=S_{EGB}+S_{EBH}=\frac{1}{2}(GB\cdot EA+BH\cdot EC)=\frac{1}{2}(h\cdot GB+h\cdot BH)=$$
$$=\frac{1}{2}h(GB+BH)=\frac{1}{2}h(GB+AG)=\frac{1}{2}h\cdot AB=\frac{1}{2}ha.$$

Izteiksim augstumu *h* izmantojot sešstūra malu *a*. Trijstūris *AFE* ir vienādsānu trijstūris, kuram $\angle AFE=120°$ un $AF=EF=a$. No kosinusu teorēmas seko, ka

$$AE = h = \sqrt{AF^2 + EF^2 - 2\cdot AE\cdot EF\cdot \cos 120°} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2\cdot a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Esam ieguvuši, ka $S_{EGBH} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Tā kā regulārs sešstūris sastāv no 6 vienādmalu trijstūriem ar malas garumu a, tad $S_{ABCDEF} = 6\cdot S_\Delta = 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3\cdot S_{EGBH}$. Tātad $S_{EGBH} = \dfrac{1}{3} S_{ABCDEF}$, kas arī bija jāpierāda.



A6. zīm.

A.S.11.3. *Zināms, ka a un* $\dfrac{a^2+a-1}{2a+1}$ *ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās a vērtības!*

Ja $\dfrac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir vesels skaitlis, tad arī $\dfrac{4(a^2+a-1)}{2a+1} = \dfrac{4a^2+4a-4}{2a+1}$ ir vesels skaitlis.

Pārveidojam iegūto izteiksmi:

$$\frac{4a^2+4a-4}{2a+1} = \frac{(4a^2+4a+1)-5}{2a+1} = \frac{(2a+1)^2-5}{2a+1} = 2a+1-\frac{5}{2a+1}.$$

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, tad 5 jādalās ar $2a+1$, bet 5 dalās tikai ar ± 1 un ± 5. Iespējami šādi gadījumi:

$2a+1$	a	$\dfrac{a^2+a-1}{2a+1}$	
-1	$\mathbf{-1}$	1	der
1	$\mathbf{0}$	-1	der
-5	$\mathbf{-3}$	-1	der
5	$\mathbf{2}$	1	der

Tātad iespējamās a vērtības ir -3, -1, 0 un 2.

A.S.11.4. *Dota virkne* $a_1, a_2, ...,$ *kur* $a_1 = a_2 = 1$ *un* $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $n \geq 1$.

Vai nevienādība $a_n > \dfrac{2^n}{3}$ *ir patiesa, ja* ***a)*** *n = 2011;* ***b)*** *n = 2012?*

1. atrisinājums. Vienādība $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ir otrās kārtas diferenču vienādojums (skat. Teoriju). Šī vienādojuma raksturīgais vienādojums ir $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, kura saknes ir $\lambda_1 = 2$ un $\lambda_2 = -1$. Tātad diferenču vienādojuma atrisinājums ir $a_n = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot(-1)^n$, kur C_1 un C_2 ir reālas konstantes. Izmantojot nosacījumus, ka $a_1 = a_2 = 1$, iegūstam sistēmu attiecībā pret konstantēm C_1 un C_2:

$\begin{cases} 1 = 2C_1 - C_2 \\ 1 = 4C_1 + C_2 \end{cases}$. Saskaitot abus iegūtos vienādojumus, iegūstam, ka $2 = 6C_1$ jeb $C_1 = \frac{1}{3}$. Ievietojam iegūto C_1 vērtību sistēmas pirmajā vienādojumā un iegūstam $1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - C_2$ jeb $C_2 = -\frac{1}{3}$. Esam ieguvuši, ka skaitļus a_n var uzdot ar formulu

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Ja n ir nepāra skaitlis, tad $a_n = \frac{2^n + 1}{3} > \frac{2^n}{3}$. Savukārt, ja n ir pāra skaitlis, tad $a_n = \frac{2^n - 1}{3} < \frac{2^n}{3}$. Tātad **a)** gadījumā nevienādība ir patiesa, bet **b)** gadījumā – aplama.

2. atrisinājums. Apskatām virkni $b_n = 3a_n$, kur $b_1 = b_2 = 3$ un $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Uzdevumā formulētais jautājums ir ekvivalents jautājumam: Vai nevienādība $b_n > 2^n$ ir patiesa, ja a) $n = 2011$; b) $n = 2012$?

Aprēķinām virknes b_n nākamos locekļus:

$$b_3 = 9 = 2^3 + 1;$$
$$b_4 = 9 + 6 = 15 = 2^4 - 1;$$
$$b_5 = 15 + 18 = 33 = 2^5 + 1;$$
$$b_6 = 33 + 30 = 63 = 2^6 - 1.$$

Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim, ka

$$b_{2n-1} = 2^{2n-1} + 1 \text{ un } b_{2n} = 2^{2n} - 1.$$

Bāze.

Ja $i = 1$, tad $b_1 = 2^1 + 1 = 3$.

Ja $i = 2$, tad $b_2 = 2^2 - 1 = 3$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā, ja $n = k$, t. i., izpildās sakarības: $b_{2k-1} = 2^{2k-1} + 1$ un $b_{2k} = 2^{2k} - 1$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka $b_{2k+1} = 2^{2k+1} + 1$ un $b_{2k+2} = 2^{2k+2} - 1$.

Izmantojot virknes $\{b_n\}$ veidošanas likumu, iegūstam

$b_{2k+1} = b_{2k} + 2b_{2k-1} = 2^{2k} - 1 + 2 \cdot (2^{2k-1} + 1) = 2^{2k} - 1 + 2 \cdot 2^{2k-1} + 2 = 2^{2k} + 2^{2k} + 1 =$
$= 2 \cdot 2^{2k} + 1 = 2^{2k+1} + 1;$

$b_{2k+2} = b_{2k+1} + 2b_{2k} = 2^{2k+1} + 1 + 2 \cdot (2^{2k} - 1) = 2^{2k+1} + 1 + 2 \cdot 2^{2k} - = 2^{2k+1} + 2^{2k+1} - 1 =$
$= 2 \cdot 2^{2k+1} - 1 = 2^{2k+2} - 1.$

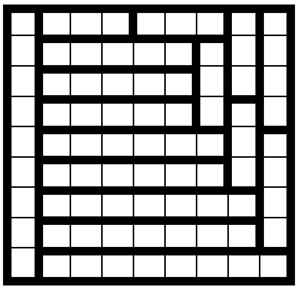
Secinājums. Pēc matemātiskās indukcijas principa visām naturālām n vērtībām ir spēkā sakarība: $b_{2n-1} = 2^{2n-1} - 1$ un $b_{2n} = 2^{2n} + 1$.

Ja $n = 2011$, tad $b_{2011} = 2^{2011} - 1 < 2^{2011}$. Tātad nevienādība $b_n > 2^n$ nav patiesa.

Ja $n = 2012$, tad $b_{2012} = 2^{2012} + 1 > 2^{2012}$ un līdz ar to nevienādība $b_n > 2^n$ ir patiesa.

A.S.11.5. *Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala 9×9 rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz trīs rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli k (*$3 \le k \le 9$*) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir k. Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš!*

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka lielākais strēmeļu kopgarums nav mazāks kā 15. Ja lielākais strēmeļu kopgarums būtu 14 (vai mazāks), tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu kopgarums būtu $1 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 77 < 81$, tātad ar šo kopgarumu nepietiek, lai noklātu visu 9×9 rūtiņu laukumu. Tātad lielākais garantētais viena garuma strēmeļu kopgarums ir vismaz 15.
Otrkārt, parādām, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja lielākais strēmeļu kopgarums ir 15. Ja izvēlas strēmeles $1 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3$, tad viena garuma strēmeļu kopgarums ir ne vairāk kā 15. Šādās strēmelēs kvadrātu var sadalīt (skat. A17. zīm.).



A7. zīm.

A.S.12. Divpadsmitā klase

A.S.12.1. *Kādām reālām parametra a vērtībām vienādojumiem*

$$ax^2 - 2x + 1 = 0 \quad un \quad x \cdot \cos a = 1$$

ir vienāds sakņu skaits?

Pirmo vienādojumu apzīmēsim ar V_1 un otru vienādojumu – ar V_2. Šķirosim gadījumus atkarībā no V_1 veida:

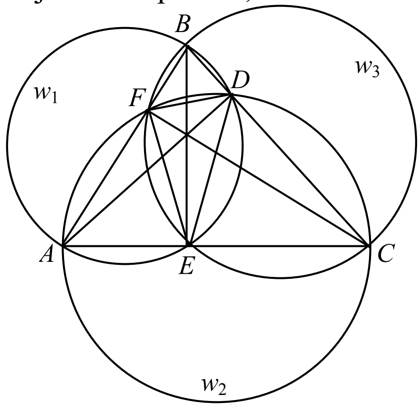
- Ja $a = 0$, tad V_1 ir lineārs vienādojums $-2x + 1 = 0$, kuram ir tieši viena sakne $x = \frac{1}{2}$ un V_2 ir formā $x \cdot \cos 0 = 1$ un tam arī ir tieši viena sakne $x = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$.
- Ja $a \ne 0$, tad V_1 ir kvadrātvienādojums, kura sakņu skaits ir atkarīgs no diskriminanta $D = 4 - 4a = 4(1 - a)$ vērtības, savukārt V_2 ir viena vai neviena sakne.
  - Ja $a < 1$ un $a \ne 0$, tad V_1 ir divas saknes, bet V_2 ir mazāk nekā divas saknes, tātad sakņu skaits atšķiras.
  - Ja $a = 1$, tad V_1 ir tieši viena sakne $x = 1$ un V_2 arī ir tieši viena sakne $x = \frac{1}{\cos 1}$, jo $\cos 1 \ne 0$.

- Ja $a>1$, tad $D<0$ un V_1 sakņu nav. Vienādojumam V_2 sakņu nav, ja $\cos a=0$ jeb $a=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Tā kā $a>1$, tad V_2 nav sakņu, ja $a=\frac{\pi}{2}+\pi k, k=0,1,2,...$ jeb $a=\frac{\pi(2m-1)}{2}, m\in N$.

Tātad meklētās a vērtības ir 0, 1 un $\frac{\pi(2m-1)}{2}$, kur m ir naturāls skaitlis.

A.S.12.2. *Šaurleņķu trijstūrī ABC augstumi ir AD, BE un CF. Pierādīt, ka DA, EB un FC ir trijstūra DEF bisektrises.*

Uz katras trijstūra malas kā diametra konstruēsim riņķa līniju (skat. A8. zīm.). Apzīmēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir AB, ar w_1, riņķa līniju, kuras diametrs ir AC, – ar w_2 un to, kuras diametrs ir BC, – ar w_3. Šīs riņķa līnijas katra iet caur attiecīgās malas galapunktiem un caur to augstumu pamatiem, kas atrodas uz divām pārējām malām, t. i., w_1 iet caur punktiem A, B, D un E; w_2 – caur A, C, D un F, bet w_3 – caur B, C, E un F.
$\angle DBE=\angle DAE$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loku DE riņķa līnijā w_1). Līdzīgi $\angle DAC=\angle DFC$ (no w_2) un $\angle CBE=\angle CFE$ (no w_3).
No šīm sakarībām, ievērojot, ka $\angle CBE=\angle DBE$ un $\angle DAE=\angle DAC$, iegūstam, ka $\angle DFC=\angle CFE$. Tātad FC ir $\angle DFE$ bisektrise.
Līdzīgi $\angle DAF=\angle DCF$ (no w_2), $\angle BAD=\angle BED$ (no w_1) un $\angle BCF=\angle BEF$ (no w_3). Ievērojot, ka $\angle DAF=\angle DAB$ un $\angle BCF=\angle DCF$, iegūstam, ka $\angle BEF=\angle BED$ jeb EB ir $\angle DEF$ bisektrise.
Tā kā FC, EB un DA krustojas vienā punktā, tad DA arī ir $\angle EDF$ bisektrise.



A8. zīm.

A.S.12.3. *Zināms, ka x, y un z ir naturāli skaitļi,* $7x^2-3y^2+4z^2=8$ *un* $16x^2-7y^2+9z^2=-3$. *Kāda ir izteiksmes* $x^2+y^2+z^2$ *vērtība?*

Apskatām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases}7x^2-3y^2+4z^2=8\\16x^2-7y^2+9z^2=-3\end{cases}. \quad (1)$$

Reizinām sistēmas (1) pirmo vienādojumu ar 7 un otro reizinām ar (-3):

$$\begin{cases}49x^2-21y^2+28z^2=56\\-48x^2+21y^2-27z^2=9\end{cases}. \quad (2)$$

Saskaitot sistēmas (2) abus vienādojumus, iegūstam, ka $x^2+z^2=65$.
Reizinām sistēmas (1) pirmo vienādojumu ar 9 un otro reizinām ar (-4):

$$\begin{cases} 63x^2 - 27y^2 + 36z^2 = 72 \\ -64x^2 + 28y^2 - 36z^2 = 12 \end{cases}. \qquad (3)$$

Saskaitot sistēmas (3) abus vienādojumus, iegūstam, ka $-x^2 + y^2 = 84$.
Esam ieguvuši sistēmai (1) ekvivalentu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ x^2 - y^2 = -84 \end{cases}.$$

Tā kā x, y un z ir naturāli skaitļi, apskatām pirmā vienādojuma $x^2 + z^2 = 65$ iespējamos atrisinājumus, attiecīgi no otrā vienādojuma $-x^2 + y^2 = 84$ aprēķinot arī y vērtību. Tā kā x^2 un z^2 ir nenegatīvi skaitļi, tad no vienādojuma $x^2 + z^2 = 65$ seko, ka $x \le 8$ un $z \le 8$.
Aplūkosim, vai katrā no šiem gadījumiem atrisinājums ir arī otrajam vienādojumam:

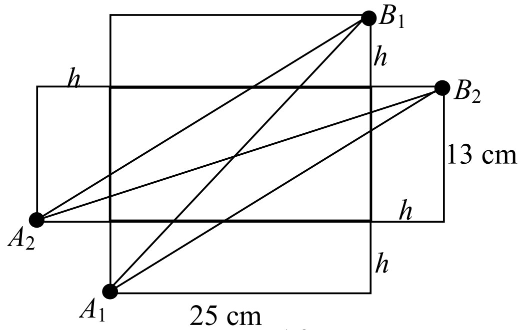
x	x^2	$z^2 = 65 - x^2$	$y^2 = 84 + x^2$	
1	1	64	85	y nav naturāls skaitlis
2	4	60		z nav naturāls skaitlis
3	9	56		z nav naturāls skaitlis
4	**16**	**49**	**100**	**der**
5	25	40		z nav naturāls skaitlis
6	36	29		z nav naturāls skaitlis
7	49	16	133	y nav naturāls skaitlis
8	64	1	148	y nav naturāls skaitlis

Tātad $x^2 + y^2 + z^2 = 165$.
Piezīme. Lai gan tas uzdevumā nebija prasīts, esam atraduši arī x, y un z vērtības.

A.S.12.4. *Uz gludas grīdas nolikts taisnstūra paralēlskaldņa formas dzelzsbetona klucis, kura pamata izmēri ir $13\ cm \times 25\ cm$, bet augstums – h cm.*
Skudra atrodas punktā A (skat. 4. zīm.) un viņai jānonāk punktā B. Skudra var iet gan apkārt klucim, gan pāri, bet nevar izlīst pa apakšu.
Noteikt, kāds ir īsākā ceļa no punkta A līdz punktam B garums, ja ***a)*** $h = 7$ *cm,* ***b)*** $h = 13$ *cm.*

4. zīm.

Ja skudra virzās tikai pa zemi apkārt klucim, tad īsākais ceļš no A līdz B ir $s = 13 + 25 = 38$ cm. Ja skudra neizmanto augšējo skaldni, tad tas arī ir īsākais ceļš. Aplūkosim, kas notiek, ja augšējā skaldne **tiek** izmantota. Apskatīsim kluča virsmas izklājumu bez apakšējās skaldnes. Izklājumā katram no punktiem A un B atbilst divi punkti attiecīgi A_1 un A_2, B_1 un B_2. Tādā gadījumā īsākais ceļš varētu būt viens no variantiem: A_1B_1, $A_1B_2 = A_2B_1$ vai A_2B_2 (skat. A9. zīm.).



A9. zīm.

Lai aprēķinātu iespējamos ceļu garumus, izmantosim Pitagora teorēmu:

- $A_1B_1^{\,2} = 25^2 + (13+2h)^2$;
- $A_1B_2^{\,2} = A_2B_1^{\,2} = (25+h)^2 + (13+h)^2$;
- $A_2B_2^{\,2} = (25+2h)^2 + 13^2$.

a) Ja $h = 7$ cm, tad

- $A_1B_1^{\,2} = 25^2 + 27^2 = 1354$;
- $A_1B_2^{\,2} = A_2B_1^{\,2} = 32^2 + 20^2 = 1424$;
- $A_2B_2^{\,2} = 39^2 + 13^2 > 38^2$;
- $s^2 = 38^2 = 1444$.

Tātad īsākais ceļš ir $A_1B_1 = \sqrt{1354}$ cm.

b) Ja $h = 13$ cm, tad

- $A_1B_1^{\,2} = 25^2 + 39^2 > 38^2$;
- $A_1B_2^{\,2} = A_2B_1^{\,2} = 38^2 + 26^2 > 38^2$;
- $A_2B_2^{\,2} = 51^2 + 13^2 > 38^2$;
- $s^2 = 38^2 = 1444$.

Tātad īsākais ceļš ir 38 cm, ejot apkārt klucim pa zemi.

A.S.12.5. *Laura un Dace no naturālu skaitļu kopas* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ *visos iespējamos veidos izvēlas četrus dažādus skaitļus un aprēķina to reizinājumu. Ja reizinājums ir mazāks nekā 2012, Laura saņem vienu konfekti, bet, ja lielāks, tad konfekti saņem Dace. Kurai no meitenēm beigās būs vairāk konfekšu?*

Sadalīsim visus skaitļus pa pāriem tā, ka katra pāra reizinājums ir 48: $\{1, 48\}$, $\{2, 24\}$, $\{3, 16\}$, $\{4, 12\}$, $\{6, 8\}$.

Ja meitenes izvēlas divus pilnus pārus, tad četru skaitļu reizinājums ir $48^2 = 2304$ un konfektes šajos gadījumos saņem Dace. Divus pilnus pārus var izvēlēties $C_5^2 = 10$ veidos.

Ja skaitļi tiek izvēlēti tā, ka nav paņemti divi pilni pāri, tad katram četru skaitļu komplektam $\{a, b, c, d\}$ varam piekārtot citu četru skaitļu komplektu $\left\{\frac{48}{a}, \frac{48}{b}, \frac{48}{c}, \frac{48}{d}\right\}$. Tā kā nav izvēlēti divi pilni pāri, tad abi šie četrinieki ir atšķirīgi.

Aplūkosim šos komplektus pa pāriem kopā. Šo divu komplektu skaitļu reizinājums ir 48^4. Tātad abu komplektu skaitļu reizinājums vienlaicīgi nevar būt mazāks kā 2012 (jo $2012^2 < 48^4$). Tas nozīmē, ka pēc šo divu komplektu skaitļu reizinājumu aprēķināšanas vai nu abas meitenes saņems pa konfektei, vai arī abas konfektes saņems Dace. Tāpēc arī beigās Dacei būs vairāk konfekšu nekā Laurai.

A.N. LATVIJAS 62. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.N.9. Devītā klase

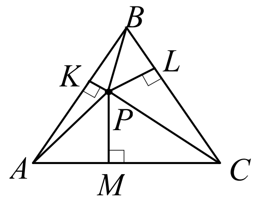
A.N.9.1. *Apskatām visas funkcijas* $y = ax^2 - 2x + b$, *kur* a *un* b *– reāli skaitļi un* $a + b = 2012$. *Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.*

Vairākiem grafikiem kopīgi punkti ir tad, ja vienādām x (abscisu) vērtībām vienādas ir arī y (ordinātu) vērtības. Izmantosim īpašību, ka $a + b = 2012$. Tātad jāatrod tādas x vērtības, kurām y izteiksme kaut kādā veidā satur (piemēram, kā saskaitāmo vai kā reizinātāju) $a + b$. Tā kā y izteiksmē jau ir saskaitāmais b, tad nepieciešams, lai parādītos arī saskaitāmais a. Tātad x^2 jābūt vienādam ar 1 jeb x vērtībai jābūt ± 1.

Ja $x = 1$, tad $y = a - 2 + b = 2012 - 2 = 2010$. Savukārt, ja $x = -1$, tad $y = a + 2 + b = 2012 + 2 = 2014$. Tātad punkti (1; 2010) un (−1; 2014) pieder visu minēto funkciju grafikiem un tie ir divi meklētie punkti.

A.N.9.2. *Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts P. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta P līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta P izvēles.*

Apzīmējam dotā regulārā trijstūra ABC malas garumu ar $a = AB = BC = AC$ un augstumu ar h. Savienojam punktu P ar ΔABC virsotnēm (skat. A10. zīm.).



A10. zīm.

Aprēķinām ΔABC laukumu divos dažādos veidos:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$;
- $S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{APC} = \frac{1}{2} a \cdot PK + \frac{1}{2} a \cdot PL + \frac{1}{2} a \cdot PM =$
  $= \frac{1}{2} a \cdot (PK + PL + PM)$.

Tātad $\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot (PK + PL + PM)$ jeb $h = PK + PL + PM$.

Tā kā trijstūra ABC augstums h nav atkarīgs no punkta P atrašanās vietas, tad esam pierādījuši prasīto.

A.N.9.3. *Kādām n vērtībām n cilvēkus var sadalīt grupās (varbūt tikai vienā) tā, lai katrā grupā būtu tieši* 5, 6 *vai* 7 *cilvēki?*

Ja $n \le 4$, tad uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams – cilvēku ir par maz pat vienai grupai.

Ja $n = 5, 6$ vai 7, tad var izveidot vienu atbilstošā lieluma grupu.

Ja $n = 8$ vai $n = 9$, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams – ir iespējams izveidot ne vairāk kā vienu pilnu grupu, bet atlikušo cilvēku skaits ir nepietiekams vēl vienas grupas izveidošanai.

Ja $10 \le n \le 14$, tad uzdevuma prasības izpildīt ir iespējams: $n = 10 = 5 + 5$; $n = 11 = 5 + 6$; $n = 12 = 6 + 6$; $n = 13 = 6 + 7$; $n = 14 = 7 + 7$.

Ja $n \ge 15$, varam izteikt $n = i + 5k$, kur $i = 10, 11, 12, 13, 14$, un $k \ge 1$. Ievērojam, ka i cilvēkus var sadalīt kā aprakstīts iepriekš, bet atlikušos $5k$ cilvēkus var sadalīt k

grupās pa 5 cilvēkiem katrā. Tātad visiem $n \ge 10$ uzdevuma prasības var izpildīt. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $n = 5, 6, 7$ un $n \ge 10$.

A.N.9.4. *Dota skaitļu virkne* 1, 1, 2, 5, 9, 6, ... *Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir* 1, *bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.*
a) *Noteikt, vai šīs virknes* 2012. *loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis.*
b) *Aprēķināt virknes* 2012. *locekli.*

Tā kā nepāra skaitļa kvadrāts ir nepāra skaitlis un pāra skaitļa kvadrāts ir pāra skaitlis, tad, apzīmējot pāra skaitli ar *p* un nepāra skaitli ar *n*, iegūstam, ka $n+n=p$, $n+p=n$, $p+n=n$.

a) Tātad iegūstam virkni $n, n, p, n, n, p, n, \dots$. Šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 3. Tāpēc tikai tie locekļi, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir pāra. Tā kā 2012 nedalās ar 3, tad virknes 2012. loceklis ir nepāra skaitlis.

b) Turpinot virkni tālāk, nekā dots uzdevuma formulējumā, iegūsim, ka tā ir $1, \underline{1}, \underline{2}, 5, 9, 6, 7, 5, 4, 1, 7, 0, 9, \underline{1}, \underline{2}, 5, \dots$

Katru virknes locekli viennozīmīgi nosaka divi iepriekšējie elementi. Tā kā virknes otrais un trešais loceklis ir 1 un 2, un 14. un 15. loceklis arī ir 1 un 2, tad virkne, sākot ar 2. locekli, ir periodiska ar perioda garumu 12. Tā kā $2006 = 2 + 12 \cdot 167$, tad virknes 2006. loceklis ir 1 un 2007. loceklis ir 2. Tāpēc virknes 2012. loceklis ir **5**.

A.N.9.5. *Dots naturāls skaitlis* $n \ge 3$. *Aplūkojam visus naturālos skaitļus no* 1 *līdz* $n-1$ *ieskaitot, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli n. Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar n.*

Ievērojam: ja skaitlis *x* ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli *n*, tad arī skaitlis $n-x$ ir savstarpējs pirmskaitlis ar *n*. Tāpēc visus skaitļus no 1 līdz $n-1$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar *n*, var sagrupēt pa pāriem *x* un $n-x$. (Ja *n* ir pāra skaitlis 2*m*, tad *m* un $n-m=m$ neveido divu dažādu skaitļu pāri, taču šo pāri neaplūkojam, jo *m* un 2*m* nav savstarpēji pirmskaitļi).
Katrā pārī skaitļu summa ir *n*. Tātad visu aplūkojamo skaitļu summa dalās ar *n*.

A.N.10. Desmitā klase

A.N.10.1. ***a)*** *Dots, ka* $a+b=c$. *Pierādīt, ka* $2a^2 \ge c^2 - 2b^2$.
b) *Dots, ka* $a+b+c=d$. *Pierādīt, ka* $3a^2 \ge d^2 - 3b^2 - 3c^2$.

a) Dotās vienādības abas puses kāpinot kvadrātā, iegūstam: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$.

No vienādības abām pusēm atņemam $2b^2$:

$$a^2 + 2ab - b^2 = c^2 - 2b^2;$$
$$2a^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2b^2;$$
$$2a^2 - (a-b)^2 = c^2 - 2b^2.$$

Tā kā $(a-b)^2 \ge 0$, tad $2a^2 \ge c^2 - 2b^2$, kas bija jāpierāda.

b) Dotās vienādības abas puses kāpinot kvadrātā, iegūstam:

$$(a+b+c)^2 = d^2;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = d^2.$$

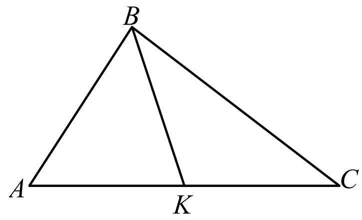
No vienādības abām pusēm atņemot $3b^2 + 3c^2$, iegūstam

$$a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = d^2 - 3b^2 - 3c^2;$$
$$3a^2 - (b^2 - 2ab + a^2) - (a^2 - 2ac + c^2) - (b^2 - 2bc + c^2) = d^2 - 3b^2 - 3c^2;$$
$$3a^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (b-c)^2 = d^2 - 3b^2 - 3c^2.$$

Tā kā $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$ un $(b-c)^2 \geq 0$, tad $3a^2 \geq d^2 - 3b^2 - 3c^2$, kas arī bija jāpierāda.

A.N.10.2. *Uz trijstūra ABC malas AC izvēlēts punkts K. Nogrieznis BK sadala trijstūri ABC divos trijstūros. Visi trīs trijstūri (ΔABC un abi dalījumā iegūtie trijstūri) ir līdzīgi. Pierādīt, ka ΔABC ir taisnleņķa trijstūris.*

No trijstūru BKC un ABK līdzības (skat. A11. zīm.) seko, ka pastāv trīs iespējas.
1) $\angle BKC = \angle ABK$. Tad taisnēm KC un AB jābūt paralēlām (jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi), bet tas nav iespējams, jo tās krustojas punktā A.



A11. zīm.

2) $\angle BKC = \angle BAK$. Tad taisnēm KB un AB jābūt paralēlām (jo kāpšļu leņķi ir vienādi), bet tas nav iespējams, jo tās krustojas punktā B.
3) $\angle BKC = \angle BKA$. Tad leņķis $\angle BKC$ ir taisns, un ΔBKC ir taisnleņķa trijstūris. Tā kā pēc dotā ΔABC ir līdzīgs ΔBKC, tad arī ΔABC ir taisnleņķa trijstūris.

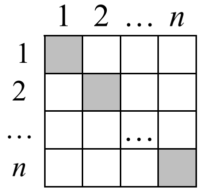
A.N.10.3. *Doti seši pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt, ka var atrast tādu pirmskaitli p, ka* ***tieši viens*** *no dotajiem skaitļiem dalās ar p.*

Dotos skaitļus apzīmēsim ar a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a \geq 1$. Viens no skaitļiem $a+2$, $a+3$ ir nepāra.
Ja nepāra skaitlis ir $a+3$, tad skaitļi $a+1$ un $a+3$ ir nepāra. Šie skaitļi abi vienlaicīgi nevar dalīties ar 3, tāpēc viens no tiem nedalās ar 3. Tas no šiem diviem skaitļiem, kas nedalās ar 2 un 3, ir lielāks nekā 1, tāpēc tas dalās ar kādu pirmskaitli p, kas nav 2 un 3. Tad $p \geq 5$. Šis pirmskaitlis der par meklēto, jo nākamais skaitlis, kas dalās ar p, ir vismaz $a+1+p > a+5$, bet iepriekšējais nepārsniedz $a+3-p < a$.
Gadījums, kad $a+2$ ir nepāra skaitlis, ir analogs. Ja nepāra skaitlis ir $a+2$, tad, izdarot līdzīgus spriedumus, var pierādīt, ka kāds no skaitļiem $a+2$ vai $a+4$ dalās ar kādu pirmskaitli $p \geq 5$, kas der par meklēto.

A.N.10.4. *Ir aprēķinātas skaitļu 2^{2012} un 5^{2012} vērtības un iegūtie skaitļi uzrakstīti viens aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?*

Ar n apzīmēsim skaitļa 2^{2012} ciparu skaitu, bet ar m – skaitļa 5^{2012} ciparu skaitu. Tad $10^{n-1} < 2^{2012} < 10^n$ un $10^{m-1} < 5^{2012} < 10^m$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam $10^{n+m-2} < 10^{2012} < 10^{n+m}$. Tātad $n+m-2 < 2012 < n+m$ un vienīgā iespējamā $n+m$ vērtība (t. i., uzrakstīto ciparu skaits) ir 2013.

A.N.10.5. *Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, katrā tās rūtiņā ierakstīts vesels skaitlis. Tabulas rindas un kolonnas pēc kārtas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz n, sākot no augšējās rindas un kreisās kolonnas (skat. 5. zīm.). Zināms, ka visiem i izpildās sakarība: i-tajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir vienāda ar i-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu.*
Atrast visus tādus n, kuriem visām šādām tabulām izpildās sekojoša īpašība:
i-tās rindas j-tajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar i-tās kolonnas j-tajā rindā ierakstīto skaitli (t. i., tabula ir simetriska attiecībā pret galveno diagonāli, skat. 5. zīm. iekrāsoto diagonāli).



5. zīm.

Viegli pārliecināties, ka der $n=1$ (no vienas rūtiņas sastāvoša tabula vienmēr ir simetriska pret galveno diagonāli) un $n=2$ (tā kā $a+b=a+c$, tad $b=c$, skat. A12. zīm.).

a	b
c	d

A12. zīm.

Lai pierādītu, ka neder kāda n vērtība, ir jāatrod tabula ar izmēriem $n \times n$, kurai visiem i izpildās īpašība: i-tās rindas j-tajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar i-tās kolonnas j-tajā rindā ierakstīto skaitli, bet tabula nav simetriska attiecībā pret galveno diagonāli. Ja $n \geq 3$, tad simetriska pret galveno diagonāli nav, piemēram, A13. zīm. attēlotā tabula.

0	+1	-1	0	…	0
-1	0	+1	0		0
+1	-1	0	0		0
0	0	0	0		0
…				…	0
0	0	0	0	0	0

A13. zīm.

A.N.11. Vienpadsmitā klase

A.N.11.1. *Vai eksistē tāds naturāls skaitlis m, kura ciparu reizinājums ir vienāds ar simetrisku* 8-*ciparu skaitli? (Par simetrisku sauc skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem.)*

Simetrisks 8-ciparu skaitlis $\overline{abcddcba}$ dalās ar 11, jo tā ciparu summa pāra pozīcijās $a+c+d+b$ ir vienāda ar ciparu summu nepāra pozīcijās $b+d+c+a$ (summu starpība 0 dalās ar 11). Tātad simetrisks 8-ciparu skaitlis satur reizinātāju 11. Tā kā neviens cipars nepārsniedz 9, tad dotais skaitlis nevar būt vienāds ar savu ciparu reizinājumu.

A.N.11.2. *Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:*

$$\begin{cases} 2x+xy+2y=8 \\ 2y+yz+2z=20 \\ 2z+zx+2x=14 \end{cases}.$$

Visiem trim vienādojumiem abām pusēm pieskaitot 4, iegūstam

$$\begin{cases} 2x+xy+2y+4=12 \\ 2y+yz+2z+4=24 \\ 2z+zx+2x+4=18 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x(2+y)+2(y+2)=12 \\ y(2+z)+2(z+2)=24 \\ z(2+x)+2(x+2)=18 \end{cases};$$

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=12\\(y+2)(z+2)=24\\(z+2)(x+2)=18\end{cases}. \qquad (*)$$

Sareizinot iegūtos trīs vienādojumus un izmantojot, ka $12\cdot 24\cdot 18 = 12\cdot 12\cdot 2\cdot 2\cdot 9 = (12\cdot 2\cdot 3)^2 = 72^2$, iegūstam

$$\left((x+2)(y+2)(z+2)\right)^2 = 72^2 \text{ jeb}$$

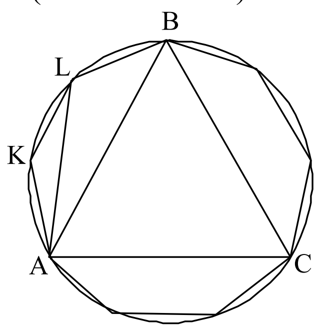
$$(x+2)(y+2)(z+2) = 72 \text{ vai } (x+2)(y+2)(z+2) = -72.$$

Iegūtās sakarības izdalot ar sistēmas (*) katru vienādojumu, iegūstam

$$\begin{cases}z+2=6\\x+2=3\\y+2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\\z=4\end{cases} \text{ vai } \begin{cases}z+2=-6\\x+2=-3\\y+2=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-5\\y=-6\\z=-8\end{cases}.$$

A.N.11.3. *Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs deviņstūris un regulārs trijstūris. Kas ir lielāks: dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trijstūra malu kvadrātu summa?*

Nezaudējot vispārīgumu, trijstūri var novietot tā, lai tā virsotnes sakrīt ar trīs deviņstūra virsotnēm. Aplūkojam regulārā trijstūra malu *AB* un trīs sekojošas deviņstūra malas *AK*, *KL* un *LB* (skat. A14. zīm.).



A14. zīm.

Ievērojam, ka trijstūri *AKL* un *ALB* ir platleņķa, jo $\angle AKL$ un $\angle ALB$ balstās uz lokiem, kas ir lielāki nekā 180°. No kosinusu teorēmas seko, ka $AK^2 + KL^2 < AL^2$ un $AL^2 + LB^2 < AB^2$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$AK^2 + KL^2 + AC^2 + LB^2 < AL^2 + AB^2 \text{ jeb } AK^2 + KL^2 + LB^2 < AB^2.$$

Tas nozīmē, ka regulāra deviņstūra trīs malu kvadrātu summa ir mazāka nekā regulāra trijstūra vienas malas kvadrāts. Tātad visu deviņu deviņstūra malu kvadrātu summa ir mazāka nekā regulāra trijstūra visu trīs malu kvadrātu summa.

A.N.11.4. *Atrast augošu aritmētisko progresiju, kuras visi elementi ir naturāli skaitļi un kurai piemīt īpašība: neviens tās elements* ***nav*** *naturāla skaitļa k-tā pakāpe jebkuram naturālam* $k \geq 2$.

Pierādīsim, ka uzdevuma nosacījumus apmierina aritmētiskā progresija $2, 6, 10, \ldots$, kuras vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 4n - 2$, $n \geq 1$.

Pieņemam, ka ir tāds *n*, ka $a_n = b^k$, kur *b* un *k* – naturāli skaitļi un $k \geq 2$. Tā kā visi virknes locekļi a_n ir pāra skaitļi, tad b^k ir pāra skaitlis un arī *b* ir pāra skaitlis. Bet tad b^k dalās ar 2^k, un pie $k \geq 2$ b^k dalās ar 4. Taču a_n ar 4 nedalās – pretruna, tāpēc minētā virkne atbilst uzdevuma nosacījumiem.

<u>*Piezīme.*</u> Šī nav vienīgā virkne, kas apmierina uzdevuma prasības.

A.N.11.5. *Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 8 gramus katra, pārējās divas sver 7 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast* ***vismaz*** *vienu monētu, kas sver 7 gramus?*

Lai atrastu vismaz vienu monētu, kas sver 7 gramus, var rīkoties, piemēram, šādi. Vispirms katrā svaru kausā novieto pa trim monētām. Ja svari ir līdzsvarā, tad katra 7 g smagā monēta ir savā kausā. Tad izvēlas divas monētas no viena kausa, ievieto katru no tām savā svaru kausā un sver vēlreiz. Ja to masas ir vienādas, tad atlikusī monēta sver 7 g; ja nē, tad vieglākā no pēdējā reizē svērtajām sver 7 g.

Ja pirmajā svēršanā viens svaru kauss (apzīmēsim to ar *A*) bija vieglāks, tad abas 7 g monētas atradās šajā svaru kausā. Tad izvēlas divas monētas no kausa *A*, ievieto katru savā svaru kausā un sver vēlreiz. Ja svari ir līdzsvarā, tad atrastas abas 7 g monētas; pretējā gadījumā vieglākā no pēdējā reizē svērtajām sver 7 gramus.

A.N.12. Divpadsmitā klase

A.N.12.1. *Skaitlis a ir vienādojuma* $x^3-2x^2+3x-4=0$ *sakne. Pierādīt, ka* $a>-\frac{1}{2}$.

Ja $x<0$, tad $x^3<0$, $x^2>0$, $-2x^2<0$, $3x<0$ un $x^3-2x^2+3x-4<0$.

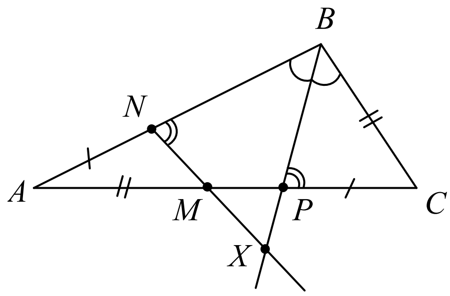
Tātad vienādojuma $x^3-2x^2+3x-4=0$ sakne nevar būt negatīvs skaitlis, līdz ar to $a\geq 0>-\frac{1}{2}$.

A.N.12.2. *Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.*

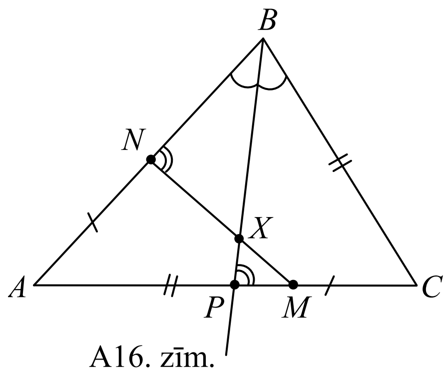
Katra šķautne ir tieši divu skaldņu mala, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu, tāpēc šī summa ir pāra skaitlis. Bet, saskaitot nepāra skaitu nepāra skaitļu, iegūstam nepāra skaitli. Iegūstam pretrunu. Tātad neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

A.N.12.3. *Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC tādi iekšēji punkti, ka* $AN=PC$ *un* $AM=BC$. *Taisnes BP un MN krustojas punktā X. Pierādīt, ka* $\Delta NBX\sim\Delta PBC$.

Pieņemsim, ka punkts *M* ir nogriežņa *AP* iekšējs punkts (skat. A15. zīm.). No bisektrises īpašības iegūstam $\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{PC}$. Tā kā $AM=BC$ un $AN=PC$, tad ir spēkā $\frac{AB}{AP}=\frac{AM}{AN}$. Tāpēc $\Delta ABP\sim\Delta AMN$ (pēc pazīmes "$m\ell m$", jo $\angle A$ ir kopīgs un trijstūru malas ir proporcionālas). Tātad $\angle ANM=\angle APB$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros. No blakusleņķu īpašības seko, ka $\angle BNX=180°-\angle ANM$ un $\angle BPC=180°-\angle APB$, tāpēc $\angle BNX=\angle BPC$. Tā kā $\angle NBX=\angle PBC$ pēc bisektrises definīcijas un $\angle BNX=\angle BPC$, $\Delta NBX\sim\Delta PBC$ (pēc pazīmes "$\ell\ell$"), kas arī bija jāpierāda.



A15. zīm.



A16. zīm.

Piezīme. Ja punkts *M* atrodas uz nogriežņa *PC* (skat. A16. zīm.) vai sakrīt ar punktu *P*, tad risinājums ir analogs.

A.N.12.4. *Kādiem pirmskaitļiem p skaitlim* p^2+23 *ir tieši četri naturāli dalītāji?*

Ja $p=2$, tad skaitlim $p^2+23=27$ ir tieši 4 naturāli dalītāji $1,3,9,27$.
Ja $p>2$, tad *p* ir nepāra skaitlis $2k+1$, kur *k* ir naturāls skaitlis. Bet tādā gadījumā

$$p^2+23=(2k+1)^2+23=4(k^2+k)+24=4k(k+1)+24.$$

Divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis, tāpēc

$$k(k+1)=2m \text{ un } 4k(k+1)+24=8m+24=8(m+3).$$

Šim skaitlim ir vismaz pieci naturāli dalītāji $1,2,4,8$ un $8(m+3)$.
Tātad neviens nepāra pirmskaitlis neder par uzdevuma atrisinājumu. Esam ieguvuši, ka der tikai vērtība $p=2$.

A.N.12.5. *Regulārā 17-stūrī* $A_1A_2...A_{17}$ *atzīmētas četras virsotnes* A_i, A_j, A_k, A_l $(i<j<k<l)$. *No pārējām virsotnēm ir jāizvēlas četras virsotnes (apzīmēsim tās ar B, C, D un E) tā, lai B būtu starp* A_i *un* A_j, *C būtu starp* A_j *un* A_k, *D būtu starp* A_k *un* A_l, *E būtu starp* A_l *un* A_i. *Kādām i, j, k, l vērtībām punktu četrinieku (B, C, D, E) var izvēlēties visvairāk veidos?*

Ar *b*, *c*, *d* un *e* apzīmējam virsotņu skaitu attiecīgi starp A_i un A_j, starp A_j un A_k, starp A_k un A_l un starp A_l un A_i. Virsotņu četriniekus (B,C,D,E) var izvēlēties $b\cdot c\cdot d\cdot e$ veidos. Tā kā virsotnes *B*, *C*, *D* un *E* nevar sakrist ar A_i, A_j, A_k un A_l, tad $b+c+d+e=17-4=13$. Jāatrod, kādām b,c,d,e vērtībām reizinājums $b\cdot c\cdot d\cdot e$ sasniedz lielāko vērtību pie nosacījuma, ka $b+c+d+e=13$.
Sākumā apskatām vienkāršāku problēmu: atrast reizinājuma $b\cdot c$ lielāko iespējamo vērtību, ja zināms, ka $b+c=S$, kur *S* – fiksēts vesels skaitlis un *b* un *c* – veseli skaitļi. Salīdzināsim, kā mainās reizinājuma vērtība, ja vienu reizinātāju palielina, bet otru samazina par 1. Salīdzinot $b\cdot c$ un $(b+1)\cdot(c-1)=bc-b+c-1$, konstatējam, ka

$$b\cdot c<(b+1)\cdot(c-1), \text{ ja } -b+c-1>0 \text{ jeb } b<c-1;$$
$$b\cdot c=(b+1)\cdot(c-1), \text{ ja } -b+c-1=0 \text{ jeb } b=c-1;$$
$$b\cdot c>(b+1)\cdot(c-1), \text{ ja } -b+c-1<0 \text{ jeb } b>c-1.$$

Tātad, ja $b\cdot c$ vērtība sasniedz maksimumu, tad $b\geq c-1$. Līdzīgā veidā var izsecināt, ka $c\geq b-1$. Tas nozīmē, ka $b\cdot c$ vērtība var sasniegt maksimumu tikai, ja $b=c$, $b=c-1$ vai $c=b-1$.
Tagad atgriežamies pie sākotnējā uzdevuma. Ja $b\cdot c\cdot d\cdot e$ sasniedz maksimālo vērtību, tad reizinājumiem $b\cdot c$, $b\cdot d$, $b\cdot e$, $c\cdot d$, $c\cdot e$, $d\cdot e$ arī jāsasniedz

maksimums. Tas ir iespējams tikai tad, ja katri divi no skaitļiem b, c, d un e vai nu ir vienādi, vai atšķiras tieši par 1. Un tas var notikt tikai, ja viens no b, c, d un e ir vienāds ar 4, bet visi pārējie – ar 3. Tad punktus B, C, D, E varēs izvēlēties $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ veidos.

Šajā gadījumā virsotnes A_i, A_j, A_k, A_l jāizvēlas tā, lai i, j, k, l apmierina sekojošus nosacījumus:

$i < j < k < l$, $i = 1, 2, 3, 4$ vai 5,

$j - i = 4 \text{ vai } 5$, $k - j = 4 \text{ vai } 5$, $l - k = 4 \text{ vai } 5$, pie tam tieši viens no $j - i$, $k - j$, $l - k$, $17 + i - l$ ir 5.

Atbilstoši šiem nosacījumiem (i, j, k, l) var izvēlēties 17 veidos: $(1, 5, 9, 13)$, $(1, 5, 9, 14)$, $(1, 5, 10, 14)$, $(1, 6, 10, 14)$, $(2, 6, 10, 14)$, $(2, 6, 10, 15)$, $(2, 6, 11, 15)$, $(2, 7, 11, 15)$, $(3, 7, 11, 15)$, $(3, 7, 11, 16)$, $(3, 7, 12, 16)$, $(3, 8, 12, 16)$, $(4, 8, 12, 16)$, $(4, 8, 12, 17)$, $(4, 8, 13, 17)$, $(4, 9, 13, 17)$, $(5, 9, 13, 17)$.

A.V. LATVIJAS 62. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.V.9. Devītā klase

A.V.9.1. ***a)*** *Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis* 20112012*?*
b) *Vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis* 20112012*?*

a) No pieciem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 5. Tātad arī to reizinājums dalās ar 5, bet 20112012 ar 5 nedalās.
b) No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši divi ir pāra skaitļi, no kuriem viens dalās ar 4. Tātad to reizinājums dalās ar 8, bet 20112012 ar 8 nedalās, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 8.

A.V.9.2. *Pierādīt, ka nav iespējams izveidot trijstūri, kura augstumu garumi ir* 4 *cm,* 7 *cm un* 10 *cm.*

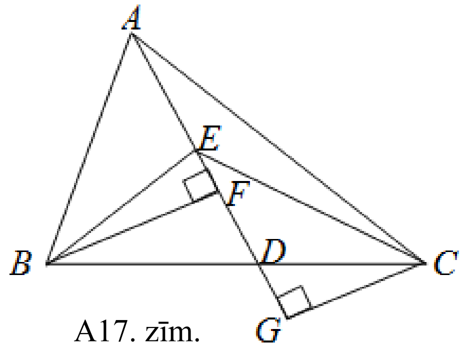
Pieņemsim pretējo, ka šādu trijstūri iespējams izveidot. Trijstūra laukumu apzīmējam ar S, tad no trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas $S_\Delta = \frac{a \cdot h_a}{2}$ seko, ka tā malu garumi ir $\frac{2S}{4}$, $\frac{2S}{7}$ un $\frac{2S}{10}$. Trijstūra malām jāizpildās trijstūra nevienādībai, t. i., divu īsāko malu garumu summai jābūt lielākai nekā trešās malas garumam. Bet $\frac{2S}{7} + \frac{2S}{10} = \frac{17}{70} 2S = \frac{34}{140} 2S < \frac{35}{140} 2S = \frac{2S}{4}$ – pretruna. Tātad šādu trijstūri izveidot nav iespējams, līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

A.V.9.3. *Kvadrātvienādojuma* $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ *saknes ir a un b, kvadrātvienādojuma* $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ *saknes ir b un c, bet kvadrātvienādojuma* $x^2 + p_3 x + q_3 = 0$ *saknes ir a un c. Zināms, ka* $q_1 \le q_2 \le q_3 \le 0$. *Kādas ir iespējamās* q_2 *vērtības?*

No Vjeta teorēmas par vienādojuma sakņu reizinājuma, seko ka $q_1 = ab$, $q_2 = bc$, $q_3 = ac$. Tātad $ab \le bc \le ac \le 0$. Ja neviens no skaitļiem a, b, c nav nulle, tad divi no tiem ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi, tāpēc to reizinājums būtu lielāks nekā nulle. Tātad vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir 0. Ja $a \ne 0$, $b = 0$, $c \ne 0\ (q_3 = ac \ne 0)$. Tad iegūstam pretrunu, ka $0 \le q_3 \le 0$ jeb $q_3 = 0$. Tātad $q_3 = ac = 0$, tātad a vai c ir 0. Ja $c = 0$, tad $q_2 = bc = 0$. Ja $a = 0$, $c \ne 0$, tad $q_1 = ab = 0$ un no nevienādības $0 \le q_2 \le 0$ seko, ka $q_2 = 0$. Tātad $q_2 = 0$.

A.V.9.4. *Trijstūra ABC iekšpusē izvēlēts punkts E tā, ka* $AB^2 - BE^2 + EC^2 = AC^2$. *Pierādīt, ka* $AE \perp BC$*!*

Nogriežņu AE un BC krustpunktu apzīmējam ar D. Pieņemsim, ka $\angle ADB = \alpha \le 90°$ (gadījums, kad $\angle ADB > 90°$ ir analogs). Novelkam perpendikulus BF un CG pret AD (skat. A17. zīm.).



A17. zīm.

Lietojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūros *ABF*, *BEF*, *ACG* un *ECG*, iegūstam:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2;$$
$$BE^2 = BF^2 + EF^2;$$
$$AC^2 = AG^2 + CG^2;$$
$$EC^2 = EG^2 + CG^2.$$

Atņemam iegūtās nevienādības un iegūstam:

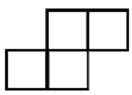
- $AB^2 - BE^2 = (AF^2 + BF^2) - (BF^2 + EF^2) = AF^2 - EF^2 =$
  $= (AF - EF)(AF + EF) = AE(AF + EF);$
- $AC^2 - EC^2 = (AG^2 + CG^2) - (EG^2 + CG^2) = AG^2 - EG^2 =$
  $= (AG - EG)(AG + EG) = AE(AG + EG).$

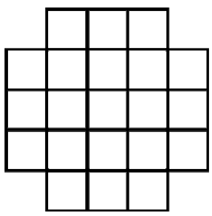
Tā kā pēc dotā $AB^2 - BE^2 = AC^2 - EC^2$, tad $AE(AF + EF) = AE(AG + EG)$ jeb $AF + EF = AG + EG$. Pieskaitot abām pusēm *AE*, iegūstam

$$AE + AF + EF = AE + AG + EG \text{ jeb } 2AF = 2AG.$$

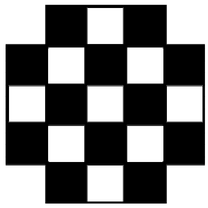
Tātad punkti *F* un *G* sakrīt. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $AD \perp BC$ jeb $AE \perp BC$, kas arī bija jāpierāda.

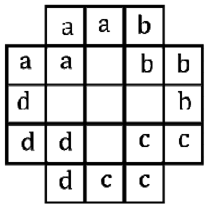
A.V.9.5. *Kādu lielāko skaitu 6. zīm. attēloto figūru var izgriezt no 7. zīm. attēlotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.*


6. zīm.


7. zīm.

Izkrāsojam doto figūru šaha galdiņa veidā (skat. A18. zīm.).


A18. zīm.



A19. zīm.

Katra izgriežamā figūriņa aizņem tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas. Tā kā ir deviņas baltas rūtiņas, tad var izgriezt ne vairāk kā četras figūriņas. Četras figūriņas var izgriezt, kā parādīts piemēram, A19. zīm. (vienas figūras rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem).

A.V.10. Desmitā klase

A.V.10.1. *Kādām a vērtībām vienādojumu sistēmai*

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=a \\ x^3+y^3=a+2 \end{cases}$$

ir atrisinājums reālos skaitļos?

Kāpinot pirmo vienādojumu kvadrātā un atņemot no iegūtā vienādojuma otro, iegūstam $x^2+2xy+y^2-(x^2+y^2)=4-a$; $2xy=4-a$ jeb $xy=2-\frac{a}{2}$. Izmantojot kubu summas formulu, pārveidojam dotās sistēmas trešā vienādojuma kreiso pusi:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=a+2. \qquad (*)$$

Tā kā $x+y=2$, $x^2+y^2=a$ un $xy=2-\frac{a}{2}$, tad vienādojumu (*) var pārrakstīt formā:

$$2\cdot\left(a-2+\frac{a}{2}\right)=a+2;$$
$$3a-4=a+2;$$
$$2a=6;$$
$$a=3.$$

Ievietojot dotajā sistēmā $a=3$, iegūstam sistēmu:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=3 \\ x^3+y^3=5 \end{cases}.$$

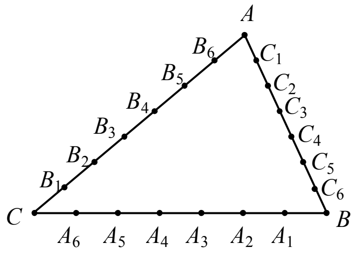
No pirmā vienādojuma iegūstam, ka $y=2-x$. Šo izteiksmi ievietojam 2. un 3. vienādojumā un atrisinām iegūtos vienādojumus:

$$x^2+(2-x)^2=3; \qquad x^3+(2-x)^3=5;$$
$$x^2+4-4x+x^2=3; \qquad x^3+8-12x+6x^2-x^3=5;$$
$$2x^2-4x+1=0; \qquad 6x^2-12x+3=0;$$
$$2x^2-4x+1=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

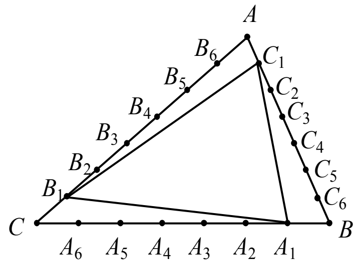
Tā kā abiem vienādojumiem ir viens un tas reāls atrisinājums, tad vērtība $a=3$ ir vienīgā vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

A.V.10.2. *Trijstūra ABC katra mala sadalīta septiņās vienādās daļās (skat.* 8. *zīm.). Pierādīt, ka* $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}>S_{ABC}$.



8. zīm.

Aprēķināsim $S_{A_1B_1C_1}$ (skat. A20. zīm.). $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - S_{A_1B_1C} - S_{AB_1C_1} - S_{A_1BC_1}$.



A20. zīm.

Trijstūra A_1B_1C augstums pret malu A_1C ir $\frac{1}{7}$ no trijstūra ABC augstuma pret malu BC un $A_1C = \frac{6}{7}BC$. Tātad $S_{A_1B_1C} = \frac{1}{2} \cdot h_{A_1C} \cdot A_1C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} h_{BC} \cdot \frac{6}{7} BC = \frac{6}{49} S_{ABC}$.

Līdzīgi arī $S_{AB_1C_1} = S_{A_1BC_1} = \frac{6}{49} S_{ABC}$.

Tātad $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - 3 \cdot \frac{6}{49} \cdot S_{ABC} = S_{ABC} - \frac{18}{49} S_{ABC} = \frac{31}{49} S_{ABC}$.

Līdzīgi aprēķinām $S_{A_2B_2C_2} = S_{ABC} - S_{A_2B_2C} - S_{AB_2C_2} - S_{A_2BC_2}$. Trijstūra A_2B_2C augstums pret malu A_2C ir $\frac{2}{7}$ no trijstūra ABC augstuma pret malu BC un $A_2C = \frac{5}{7}BC$. Tātad $S_{A_2B_2C} = \frac{10}{49} S_{ABC}$. Līdzīgi iegūstam, ka $S_{AB_2C_2} = S_{A_2BC_2} = \frac{10}{49} S_{ABC}$. Tātad $S_{A_2B_2C_2} = \frac{19}{49} S_{ABC}$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = \frac{50}{49} S_{ABC} > S_{ABC}$.

A.V.10.3. *Naturāla skaitļa N decimālajā pierakstā izmantots tikai cipars* 6. *Pierādīt, ka skaitļa* N^2 *decimālajā pierakstā nav cipara* 0.

Pieņemsim, ka $N = \underbrace{666...6}_{n}$.

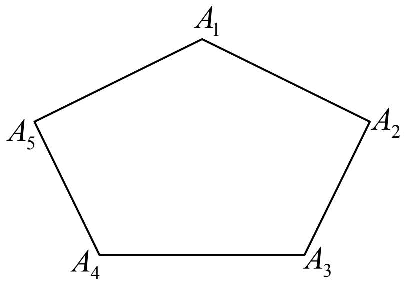
Tad $N^2 = \underbrace{66...6}_{n} \cdot \underbrace{66...6}_{n} = 6 \cdot 6 \cdot \underbrace{11...1}_{n} \cdot \underbrace{11...1}_{n} = 4 \cdot 9 \cdot \underbrace{11...1}_{n} \cdot \underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{44...4}_{n} \cdot \underbrace{99...9}_{n} =$

$= \underbrace{44...4}_{n} \cdot (1\underbrace{00...0}_{n} - 1) = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{00...0}_{n} - \underbrace{44...4}_{n} = \underbrace{44...4}_{n-1}3\underbrace{55...5}_{n-1}6$.

Esam ieguvuši, ka skaitlis N^2 satur tikai ciparus $3, 4, 5$ un 6. Tātad N^2 nesatur ciparu 0, kas arī bija jāpierāda.

A.V.10.4. *Trijās no piecstūra virsotnēm atrodas kauliņi A, B, C. Atļauts pārbīdīt kauliņu pa piecstūra diagonāli uz citu virsotni, ja tā ir brīva. Vai, atkārtoti pārbīdot šos kauliņus, var panākt, lai kauliņš A atrastos savā vietā, bet kauliņi B un C būtu samainījušies vietām?*

Aplūkojam piecstūri $A_1A_2A_3A_4A_5$ (skat. A21. zīm.).



A21. zīm.

Ievērojam, ka kauliņi var tikt pārvietoti tikai pa ciklu $A_1A_3A_5A_2A_4A_1$, nemainot secību. Tātad kauliņi B un C nevar samainīties vietām.

A.V.10.5. *Divi spēlētāji uz $N \times N$ rūtiņas liela laukuma spēlē sekojošu spēli. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienā novietojot šaha zirdziņu uz pagaidām neapdraudēta lauciņa (visu zirdziņu krāsa ir vienāda). Spēlētājs, kurš nevar izdarīt kārtējo gājienu, zaudē. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar, ja* ***a)*** $N = 12$, ***b)*** $N = 21$*?*
*(Ja šaha zirdziņš atrodas rūtiņā A, tad tas apdraud visas ar * apzīmētās rūtiņas, skat. 9. zīm.)*

	*		*	
*				*
		A		
*				*
	*		*	

9. zīm.

Pieņemsim, ka laukums ir izkrāsots šaha galdiņa veidā. Jebkuram šādi nokrāsotam kvadrātam $N \times N$ piemīt centrālā simetrija. Ievērosim, ka, šaha zirdziņu novietojot uz vienas krāsas lauciņa, tas apdraud pretējas krāsas lauciņus.

a) Pareizi spēlējot, uzvar otrais spēlētājs. Neatkarīgi no tā, kāds ir pirmā spēlētāja pirmais gājiens, otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, kas simetrisks attiecībā pret laukuma centru – šis lauciņš ir tādā pašā krāsā kā lauciņš, uz kura tikko uzlikts šaha zirdziņš, tātad tikko izdarītais gājiens neapdraud šo lauciņu. Līdz ar to, ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrajam spēlētājam būs iespējams izdarīt simetrisku gājienu.

b) Pareizi spēlējot uzvar pirmais spēlētājs. Pirmajā gājienā zirdziņš jānovieto laukuma centrā, un pēc tam jāspēlē simetriski otrā spēlētāja gājieniem kā aprakstīts a) punktā.

A.V.11. Vienpadsmitā klase

A.V.11.1. *Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu a, kuriem skaitlis* $n^4 + a$ *ir salikts skaitlis visiem naturāliem skaitļiem* $n > 1$.

Izvēlēsimies $a = 4k^4$, kur k ir naturāls skaitlis. Tad

$$n^4 + 4k^4 = (n^2)^2 + (2k^2)^2 + 4n^2k^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2)^2 - (2nk)^2 =$$
$$= (n^2 - 2nk + 2k^2)(n^2 + 2nk + 2k^2).$$

Tā kā $k \geq 1$ un $n > 1$, tad abi reizinātāji ir lielāki nekā 1, tātad $n^4 + 4k^4$ ir salikts skaitlis. Tā kā k ir patvaļīgs naturāls skaitlis, tad ir bezgalīgi daudz atbilstošo a vērtību.

A.V.11.2. *Dota tabula ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts atšķirīgs naturāls skaitlis. Ja rūtiņā ierakstītais skaitlis ir lielākais savā rindā, savā kolonnā vai diagonālē, kurā ir vismaz divas rūtiņas, tad šī rūtiņa tiek iekrāsota. Cik rūtiņas tabulā var būt iekrāsotas?*

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tabulā pa reizei ierakstīti skaitļi no 1 līdz 9.

1) Pierādīsim, ka iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7. Nekad nevar būt iekrāsota rūtiņa, kurā ierakstīts 1 (jo katrā no virzieniem kādā rūtiņā būs ierakstīts lielāks skaitlis). Ja nav iekrāsota rūtiņa ar 2, tad jau divas rūtiņas ir neiekrāsotas un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7. Ja rūtiņa ar 2 ir iekrāsota, tad tas iespējams tikai tad, ja 1 un 2 abi atrodas uz „īsās” diagonāles (skat. A22. zīm.).

Aplūkosim tabulas stūra rūtiņas (skat. A23. zīm.). Rūtiņa ar mazāko no šiem četriem skaitļiem nebūs iekrāsota, jo visos virzienos ir kāda rūtiņa, kurā ierakstīts lielāks skaitlis. Tātad vēl vismaz viena rūtiņa ir neiekrāsota un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7.

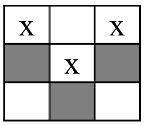
1		
	2	

A22. zīm.

x		x
1		
x	2	x

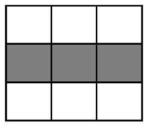
A23. zīm.

A24. zīm.



A25. zīm.

A26. zīm.



A27. zīm.

2) Pierādīsim, ka iekrāsotas ir vismaz 5 rūtiņas.

Aplūkosim četras rūtiņas, kas atrodas tabulas sānu malu vidū. Tās pa pāriem veido četras īsās diagonāles. Tātad vismaz divas no tām ir iekrāsotas. Aplūkosim visus trīs iespējamos variantus:

a) visas četras vidus rūtiņas ir iekrāsotas (skat. A24. zīm.). Bet tad jābūt iekrāsotai vismaz vēl vienai rūtiņai uz garās diagonāles. Līdz ar to kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 5;

b) iekrāsotas trīs vidus rūtiņas (skat. A25. zīm.). Aplūkosim rūtiņas, kas atzīmētas ar „x”. Katrām divām „x” rūtiņām ir kopīgs viens rūtiņu virziens (augšējā rinda, abas garās diagonāles). Katrā no šiem virzieniem jābūt kādai iekrāsotai rūtiņai. Ar vienas rūtiņas iekrāsošanu nevar „nosegt” visus trīs virzienus uzreiz. Tātad kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz $3+2=5$;

c) iekrāsotas ir divas vidus rūtiņas (skat. A26. zīm.). Tā kā tās „nosedz” visas četras īsās diagonāles, tad tām jābūt kādas rindas vai kolonnas pretējām rūtiņām. Tā kā vairāk neviena sānu malu vidus rūtiņa nav iekrāsota, tad vidējā kolonnā jābūt iekrāsotai centrālajai rūtiņai (skat. A27. zīm.). Tas nozīmē, ka vēl pa vienai iekrāsotai rūtiņai jābūt tabulas augšējā un apakšējā rindā un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 5.

Tātad iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 5 un ne vairāk par 7 (A28., A29. un A30. zīm. dots piemērs katram gadījumam).

1	5	2
7	8	9
4	6	3

A28. zīm.

7	3	1
6	8	4
2	5	9

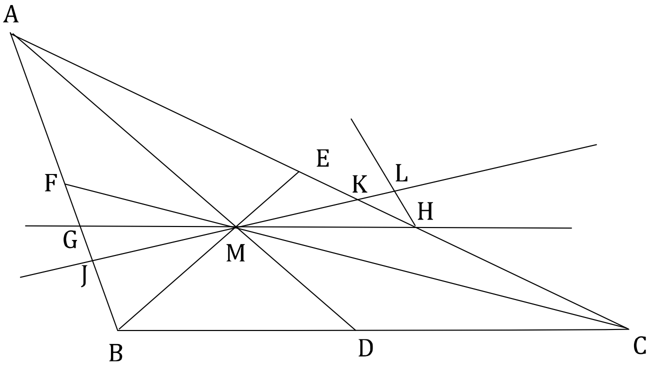
A29. zīm.

7	3	8
2	5	4
6	1	9

A30. zīm.

A.V.11.3. *Taisne, kas iet caur trijstūra mediānu krustpunktu, dala trijstūri divās daļās. Kāda ir šo daļu laukumu maksimālā attiecība?*

Izvēlēsimies vienu trijstūra malu (piemēram, BC) un caur mediānu AD, BE un CF krustpunktu M novilksim tai paralēlu taisni, kas malas AB un AC krusto attiecīgi punktos G un H (skat. A31. zīm.).



A31. zīm.

Tā kā $GH \| BC$ tad $\Delta ABC \sim \Delta AGH$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$”). No mediānu īpašības seko, ka $AM : MD = 2:1$. Tātad $AM : AD = 2:3$. No tā seko, ka trijstūru līdzības koeficients ir $\frac{2}{3}$ jeb $\frac{S_{AGH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Tātad trijstūra AGH laukums ir $\frac{4}{9}$ no trijstūra ABC laukuma. Četrstūra $BGHC$ un trijstūra AGH laukumu attiecība ir $5:4$. Pierādīsim, ka šī ir lielākā iespējamā trijstūra daļu laukumu attiecība. Aplūkosim, kas notiek, ja taisni GH pagriež ap punktu M, iegūstot taisni JK. Tad $S_{AJK} = S_{AGH} - S_{KMH} + S_{GMJ}$. Novelkam $HL \| AB$ $(L \in JK)$. $S_{KHL} > 0$, jo $\angle KHL = \angle BAC$. Tā kā $GM = MH$ (AM ir ΔGAH mediāna), $\angle GMJ = \angle LMH$ (krustleņķi) un $\angle MGJ = \angle MHL$ (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un HL), tad $S_{GMJ} = S_{HML}$ (pēc pazīmes „$\ell m\ell$”). Tātad neatkarīgi no punkta J izvēles $S_{GMJ} > S_{MKH}$. Aplūkosim četrstūra $BJKC$ un trijstūra AJK laukumu attiecību:

$$\frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} = \frac{S_{BGHC} - S_{GMJ} + S_{MKH}}{S_{AGH} + S_{GMJ} - S_{MKH}} < \frac{S_{BGHC}}{S_{AGH}} = \frac{5}{4}.$$

Brīdī, kad J punkts „sasniegs” B (vai K „sasniegs” C), abu trijstūra daļu laukumi būs vienādi (mediāna dala trijstūri vienlielās daļās), t. i., šo laukumu attiecība būs 1.

Analogi pierāda, ka $S_{BJM} \geq S_{EKM}$, tāpēc $\frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} = \frac{S_{BEC} + S_{BJM} - S_{EKM}}{S_{ABE} - S_{BJMJ} + S_{EKM}} \geq \frac{S_{BEC}}{S_{ABE}} = 1$.

Tātad $1 \leq \frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} \leq \frac{5}{4}$ jeb lielākā trijstūra daļu laukumu attiecība ir $5:4$.

A.V.11.4. *Dota naturālu skaitļu virkne* $\{a_i\}$, *kur* $a_1 = 5$ *un katram* $n > 1$ $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4$. *Pierādīt, ka visiem* $n \geq 1$ *ir spēkā sakarība* $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$.

Ievērosim, ka a_n ir augoša skaitļu virkne un visi tās locekļi ir lielāki vai vienādi ar 5. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4;$$

$$(a_n)^2 = (a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4) \cdot a_n = (a_1 a_2 ... a_{n-1} \cdot a_n + 4a_n);$$

$$(a_n)^2 - 4a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n;$$

$$(a_n)^2 - 4a_n + 4 = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n + 4;$$

$$(a_n - 2)^2 = a_{n+1}.$$

Tā kā $a_n - 2 > 0$ visām n vērtībām, varam vilkt kvadrātsakni no abām vienādojuma pusēm:

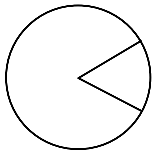
$$a_n - 2 = \sqrt{a_{n+1}} \text{ jeb } a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2 \text{ visiem } n > 1.$$

Atliek pārbaudīt gadījumu, kad $n=1$:

$$a_1=5,\ a_2=5+4=9 \text{ un } a_1-\sqrt{a_2}=5-\sqrt{9}=2.$$

Tātad sakarība ir spēkā visiem $n\geq 1$.

A.V.11.5. *Divi zēni pēc kārtas griež apaļu kūku, katru reizi nogriežot pa vienam gabalam, kura virspuse ir dotās kūkas virspuses sektora formā, pie tam gabala virspuses laukumam jābūt ne mazākam kā* $\frac{1}{100}$ *un ne lielākam kā* $\frac{1}{2}$ *no sākotnēja kūkas virspuses laukuma (skat. 10. zīm.). Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar nogriezt nevienu atļautā lieluma gabalu. Kurš no zēniem uzvarēs, pareizi spēlējot?*



10. zīm.

Pareizi spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt. Lai to panāktu, pēc katra pirmā spēlētāja gājiena viņš nogriež sev sektoru, kas ir simetrisks tikko nogrieztajam pirmā spēlētāja sektoram attiecībā pret riņķa centru. Tādā veidā otrais spēlētājs vienmēr varēs veikt gājienu, jo, ja pirmais spēlētājs sev varēja nogriezt kādu sektoru, tad pirms viņa gājiena šis sektors vēl nebija nogriezts un attiecīgi tam simetriskais sektors arī nebija nogriezts (ievērojam, ka sektora laukums nav lielāks kā $\frac{1}{2}$, tāpēc simetriskie sektori nepārklājas). Atliek ievērot tikai to, ka spēle noteikti beigsies, jo ar katru gājienu riņķa pieejamais laukums samazinās vismaz par $\frac{1}{100}$ no pilnā riņķa laukuma vērtības.

A.V.12. Divpadsmitā klase

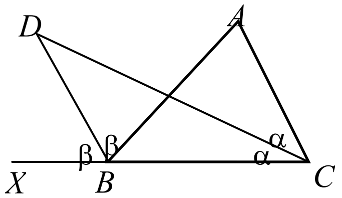
A.V.12.1. *Divām naturālu skaitļu virknēm* $\{a_i\}$ *un* $\{b_i\}$ *katram* $i\geq 1$ *ir spēkā sakarības:* $a_{b_i}=b_{a_i}$ *un* $|a_i-b_i|>2012$. *Atrast vienu šādu virkņu piemēru.*

Der, piemēram, virknes $a_i=i+2013$ un $b_i=i$.

$$a_{b_i}=a_i=i+2013,\ b_{a_i}=b_{i+2013}=i+2013,\ a_i-b_i=2013>2012.$$

A.V.12.2. *Trijstūra ABC leņķa ACB bisektrise un leņķa ABC blakusleņķa bisektrise krustojas punktā D. Pierādīt, ka trijstūrim BCD apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas.*

Apzīmēsim $\angle ACD=\angle BCD=\alpha$ un $\angle ABD=\angle DBX=\beta$ (skat. A32. zīm.). Tad $\angle ABC=180°-2\beta$,
$\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-(180°-2\beta)-2\alpha)=2\beta-2\alpha=2(\beta-\alpha)$
un $\angle BDC=180°-\angle DBA-\angle ABC-\angle DCB=180°-\beta-(180°-2\beta)-\alpha=\beta-\alpha$.



A32. zīm.

Aplūkosim divas riņķa līnijas, kas apvilktas attiecīgi trijstūriem *BDC* un *ABC*. Abas satur hordu *BC*. Trijstūrim *BDC* apvilktajā riņķa līnijā uz šīs hordas balstās ievilktais leņķis *BDC*. Tātad atbilstošā centra leņķa lielumam jābūt divreiz lielākam nekā $\angle BDC$ jeb jābūt vienādam ar $2(\beta-\alpha)=\angle BAC$, kas sakrīt ar ap trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas ievilktā leņķa, kas balstās uz hordu *BC*, lielumu.
Tātad ap trijstūri *BDC* apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz ap trijstūri *ABC* apvilktās riņķa līnijas.

A.V.12.3. *Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu*

$$n=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n+2012}\right].$$

($[x]$ *ir veselā daļa no x – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x; piem.,* $[3]=3$, $[4{,}6]=4$, $[0{,}2]=0$*).*

Ievērojam, ka $\left[\dfrac{n}{n+i}\right]=0$ katram $i=1,2,\ldots,2012$. Vērtības $n=1$ un $n=2$ neder par vienādojuma saknēm. Tāpēc apskatām gadījumu, kad $n\geq 3$. Vienādojuma labajā pusē ir $n-1$ saskaitāmie, kuri visi nav mazāki kā 1, tāpēc šajā gadījumā

$$n=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n+2012}\right]\geq\left[\frac{n}{2}\right]+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-2}=\left[\frac{n}{2}\right]+n-2.$$

Tāpēc $n\geq\left[\dfrac{n}{2}\right]+n-2$ jeb $2\geq\left[\dfrac{n}{2}\right]$. No pēdējās nevienādības seko, ka $\dfrac{n}{2}<3$ jeb $n<6$.

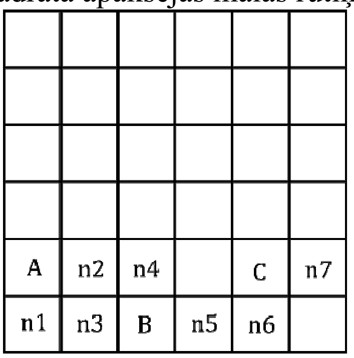
Tā kā vērtības $n=1$ un $n=2$ neder, tad jāpārbauda vērtības $n=3,4,5$:

- ja $n=3$, tad $\left[\dfrac{3}{2}\right]+\left[\dfrac{3}{3}\right]+\left[\dfrac{3}{4}\right]+\ldots+\left[\dfrac{3}{2015}\right]=1+1+0+\ldots+0=2\neq 3$;
- ja $n=4$, tad $\left[\dfrac{4}{2}\right]+\left[\dfrac{4}{3}\right]+\left[\dfrac{4}{4}\right]+\ldots+\left[\dfrac{4}{2016}\right]=2+1+1+0+\ldots+0=4$;
- ja $n=5$, tad $\left[\dfrac{5}{2}\right]+\left[\dfrac{5}{3}\right]+\left[\dfrac{5}{4}\right]+\left[\dfrac{5}{5}\right]+\ldots+\left[\dfrac{4}{2017}\right]=2+1+1+1+0+\ldots+0=5$.

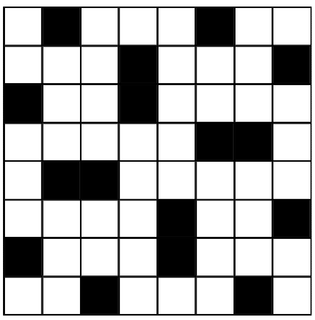
Tātad vienādojuma atrisinājums ir $n=4$ un $n=5$.

A.V.12.4. *Kvadrātā ar izmēriem* $N\times N$ *rūtiņas dažas rūtiņas ir nokrāsotas tā, ka katrai nokrāsotai rūtiņai tieši trīs kaimiņu rūtiņas ir nenokrāsotas, bet katrai nenokrāsotai rūtiņai ir tieši viena nokrāsota kaimiņu rūtiņa. Vai šāds krāsojums ir iespējams, ja* ***a)*** $N=6$*,* ***b)*** $N=8$*? Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.*

a) Pierādīsim, ka gadījumā, kad $N=6$, uzdevumā dotais krāsojums nav iespējams. Aplūkojam kvadrāta apakšējās malas rūtiņas (skat. A33. zīm.)



A33. zīm.

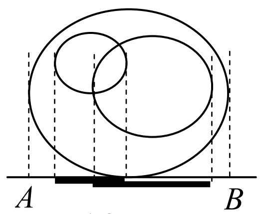

A34. zīm.

Ievērojam, ka neviena stūra rūtiņa nevar būt iekrāsota (jo katrai no tām ir tikai divas kaimiņu rūtiņas). Pieņemsim, ka rūtiņas n1 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa ir A (ja izvēlētos apakšējās rindas blakus rūtiņu, tad tālākie spriedumi būtu simetriski jāattiecina uz kvadrāta kreiso malu). Tā kā A ir iekrāsota un tai ir tikai trīs kaimiņu rūtiņas, tad tās visas ir neiekrāsotas un arī n2 ir neiekrāsota (tātad A ir n2 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa un n3 ir neiekrāsota). Vienīgā n3 kaimiņu rūtiņa, kas var būt iekrāsota, ir B. Tātad neiekrāsotas ir arī n4 un n5. Rūtiņa n6 nevar būt iekrāsota, jo tad n5 būtu divi iekrāsoti kaimiņi. Rūtiņai n6 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa var būt tikai C. Rūtiņa n7 nevar būt iekrāsota, jo tai ir tikai trīs kaimiņi, no kuriem viena rūtiņa jau ir iekrāsota. Līdz ar to esam ieguvuši situāciju, ka apakšējā labā stūra rūtiņa nevar būt nedz iekrāsota (tad n6 būtu divi iekrāsoti kaimiņi), nedz neiekrāsota (jo tad tai nav iekrāsota kaimiņu rūtiņa). Tātad šāds krāsojums nav iespējams.

b) Ja $n=7$, tad uzdevumā prasītais krāsojums ir iespējams (piemēram, skat. A34. zīm.).

A.V.12.5. *Riņķa ar diametru* 1 *iekšpusē uzzīmēti vairāki riņķi, kuru diametru summa ir lielāka nekā* 8. *Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto vismaz* 9 *uzzīmētos riņķus.*

Novelkam dotajam riņķim pieskari un projicējam uz tās uzzīmēto riņķu diametrus, kas paralēli novilktajai piekarei (skat., A35. zīm.). Šo diametru projekciju garumi ir vienādi ar attiecīgo diametru garumiem. Visu uzzīmēto riņķu diametru projekcijas atrodas nogriežņa *AB* iekšpusē. Tā kā nogriežņa *AB* garums ir 1, bet visu uzzīmēto riņķu diametru kopējais garums (un tātad arī projekciju kopējais garums) lielāks nekā 8, tad uz nogriežņa *AB* būs kāds punkts, kas pieder vairāk nekā 8, t. i., vismaz 9, riņķu diametru projekcijām (pretējā gadījumā katrs nogriežņa *AB* punkts pieder ne vairāk kā 8 diametru projekcijām, tātad to kopējais garums nepārsniedz 8). Caur šo punktu velkot taisni perpendikulāri *AB*, tā krustos vismaz deviņus uzzīmētos riņķus, kas arī bija jāpierāda.



A35. zīm.

A.A. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.A.9. Devītā klase

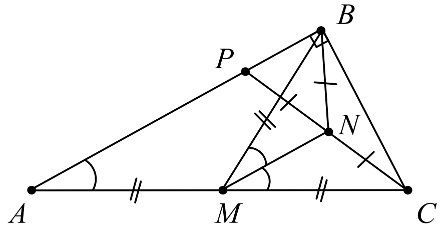
A.A.9.1. *Atrast vienu skaitli, kuram ir tieši* 12 *veseli pozitīvi dalītāji.*

Uzdevumā prasītais skaitlis ir, piemēram, skaitlis 2^{11}. Tā dalītāji ir skaitļi

$$1=2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10},\ 2^{11}.$$

A.A.9.2. *Trijstūrī ABC* $\angle ABC = 90°$*, bet punkts P atrodas uz malas AB. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un PC viduspunkti. Pierādīt, ka* $\angle BAC = \angle BMN$.

Taisnleņķa trijstūrī mediānas, kas vilkta no taisnā leņķa virsotnes, garums ir puse no hipotenūzas garuma. Apskatot taisnleņķa trijstūrus *ABC* un *PBC*, iegūstam, ka $AM = BM = CM$ un $PN = BN = CN$ (skat. A36. zīm.). Tāpēc $\Delta MBN = \Delta MCN$ (pēc pazīmes „*mmm*") un $\angle BMN = \angle CMN$ kā attiecīgie leņķi vienādos trijstūros.



A36. zīm.

MN ir ΔAPC viduslīnija, tāpēc $AP \| MN$ un $\angle CMN = \angle CAP$ kā kāpšļu leņķi. Tātad $\angle BMN = \angle CMN = \angle CAP = \angle BAC$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.9.3. *Kvadrātvienādojuma* $x^2 - 507x + a = 0$ *saknes ir* p^2 *un q, kur p un q ir pirmskaitļi. Aprēķināt a skaitlisko vērtību.*

No Vjeta teorēmas par sakņu summu seko, ka $p^2 + q = 507$. Tā kā 507 ir nepāra skaitlis, tad vienam no pirmskaitļiem jābūt pāra skaitlim, t. i., *p* vai *q* ir 2. Ja $q = 2$, tad $p^2 = 505$, bet tad *p* nav vesels skaitlis. Tātad $p = 2$ un $q = 507 - 2^2 = 503$. Izmantojot Vjeta teorēmu par sakņu reizinājumu, iegūstam, ka $a = p^2 q = 2012$.

A.A.9.4. *Uz tāfeles uzrakstītas deviņas zvaigznītes* * * * * * * * * *. *Jānis ieraksta kādas zvaigznītes vietā jebkuru ciparu no* 1 *līdz* 9. *Pēc tam Pēteris jebkuru divu citu zvaigznīšu vietā ieraksta divus ciparus (tie var arī atkārtoties). Pēc tam vēl divas reizes viņi atkārto šo darbību.*
Pēteris uzvar, ja iegūtais deviņciparu skaitlis dalās ar 37. *Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt?*

Ievērosim, ka

$$\overline{aaabbbccc} = \overline{aaa000000} + \overline{bbb000} + \overline{ccc} = 111 \cdot \overline{a000000} + 111 \cdot \overline{b000} + 111 \cdot c =$$
$$= 111 \cdot (\overline{a000000} + \overline{b000} + c) = 111 \cdot \overline{a00b00c} = 37 \cdot 3 \cdot \overline{a00b00c}.$$

Tātad Pēteris var uzvarēt, panākot, ka izveidojas skaitlis $\overline{aaabbbccc}$. Lai to panāktu, Pēteris domās sadala zvaigznītes pēc kārtas grupās pa trim. Kad Jānis ieraksta kādu ciparu, Pēteris tās pašas grupas abu pārējo zvaigznīšu vietā ieraksta tādus pašus ciparus kā Jānis. Tātad pēc Pētera gājiena katrā grupā vai nu visas trīs zvaigznītes ir aizstātas ar cipariem, vai arī visas trīs zvaigznītes ir neaizstātas. Tātad pēc kārtējā Jāņa gājiena Pēteris atkal varēs rīkoties tāpat un panākt savu uzvaru.

A.A.9.5. *Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir* 3 *un* 13. *Pierādīt, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.*
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

Ja trapeces augstums ir h, tad tās laukums ir $S = \frac{(3+13)}{2} \cdot h = 8h$. Tātad vienlielo trijstūru laukumi ir $S_{\Delta} = \frac{8h}{5} = 1{,}6h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Šī trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h = 1{,}5h < 1{,}6h$. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros, jo ir viens trijstūris, kura laukums ir mazāks nekā $1{,}6h$.

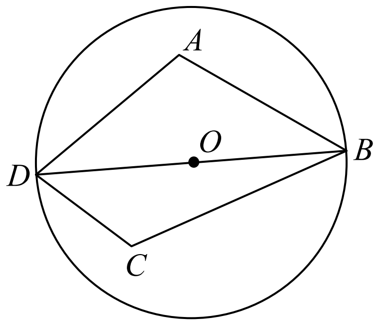
A.A.10. Desmitā klase

A.A.10.1. *Pierādīt: ja p un $14p^2+1$ ir pirmskaitļi, tad $14p^2-1$ ir naturāla skaitļa kubs.*

Ja $p \neq 3$, tad p^2, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tāpēc $14p^2+1$ dalās ar 3 un nav pirmskaitlis. Ja $p = 3$, tad $14 \cdot 3^2 + 1 = 127$ ir pirmskaitlis un $14p^2 - 1 = 125 = 5^3$, t. i., skaitlis $14p^2 - 1$ ir naturāla skaitļa kubs. Tā kā $p = 3$ ir vienīgais pirmskaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, tad esam pierādījuši prasīto.

A.A.10.2. *Dots izliekts četrstūris ABCD, leņķi DAB un BCD ir plati. Pierādīt, ka $BD > AC$.*

Novelkam riņķi, kura diametrs ir BD (skat. A37. zīm.). Tā kā leņķi DAB un BCD ir plati, tad punkti A un C atrodas riņķa iekšpusē. Tātad $AC < BD$, jo jebkurš nogrieznis riņķa iekšpusē ir īsāks nekā riņķa diametrs.



A37. zīm.

A.A.10.3. *Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (t. i., $x_1 \le x_3 \le x_2$ vai $x_2 \le x_3 \le x_1$).*

Aplūkosim kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2 + px + q$ vērtības punktos x_1 un x_2:

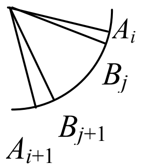
$$\frac{1}{3}x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 + px_1 + q - \frac{2}{3}x_1^2 = 0 - \frac{2}{3}x_1^2 = -\frac{2}{3}x_1^2 \le 0;$$

$$\frac{1}{3}x_2^2 + px_2 + q = -x_2^2 + px_2 + q + \frac{4}{3}x_2^2 = 0 + \frac{4}{3}x_2^2 = \frac{4}{3}x_2^2 \ge 0.$$

Tā kā vienā no šiem punktiem polinoma vērtība ir negatīva vai vienāda ar 0, bet otrā – nenegatīva, pie tam kvadrātfunkcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir arī tāds punkts x_3, kurā funkcija $\frac{1}{3}x^2 + px + q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts x_3 ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ sakne, kas atrodas starp punktiem x_1 un x_2.

A.A.10.4. *Vienā un tajā pašā riņķa līnijā ievilkts regulārs* 9*-stūris un regulārs* 10*-stūris. To virsotnes sadala riņķa līniju* 19 *lokos. Pierādīt, ka ir loks, kura lielums nepārsniedz* $2°$.

Tā kā riņķa līnija sadalīta 19 lokos, tad nav tādu 9-stūra un 10-stūra virsotņu, kas sakristu. Tāpēc, izmantojot Dirihlē principu, iegūstam, ka noteikti ir divas tādas 10-stūra virsotnes B_j un B_{j+1}, kas pieder lokam A_iA_{i+1}, ko veido divas 9-stūra virsotnes (skat. A38. zīm.).

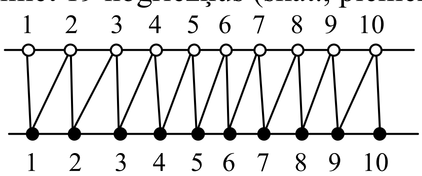


A38. zīm.

Regulāra 9-stūra virsotnes sadala riņķa līniju $360° : 9 = 40°$ lielos lokos, bet 10-stūra virsotnes riņķa līniju sadala $360° : 10 = 36°$ lielos lokos. Tātad $\cup A_iB_j + \cup B_{j+1}A_{i+1} = \cup A_iA_{i+1} - \cup B_jB_{j+1} = 40° - 36° = 4°$. Ja divu loku leņķisko lielumu summa ir $4°$, tad vismaz viens no šo loku leņķiskajiem lielumiem nepārsniedz $2°$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.10.5. *Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti* 10 *zaļi punkti, uz otras –* 10 *sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?*
(Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts, t. i., ja tiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas.)

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka nogriežņu skaits nevar būt lielāks kā 19. Visus zaļos punktus sanumurējam no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz 10 (skat. A39. zīm.). Līdzīgi sanumurējam visus sarkanos punktus. Iedomāsimies, ka katri divi dažādas krāsas punkti savienoti ar nogriezni. Aplūkojam katra nogriežņa galapunktos ierakstīto skaitļu summas. Ievērojam, ja summas ir vienādas, tad atbilstošie nogriežņi krustojas. Šīs summas pieņem vērtības 2, 3, 4, ..., 20. Tātad pavisam iespējamas 19 dažādas vērtības, līdz ar to esam pamatojuši, ka lielākais nogriežņu skaits, ko var novilkt tā, lai tie nekrustotos, ir 19. Otrkārt, parādām, kā uzzīmēt 19 nogriežņus (skat., piemēram, A39. zīm.).



A39. zīm.

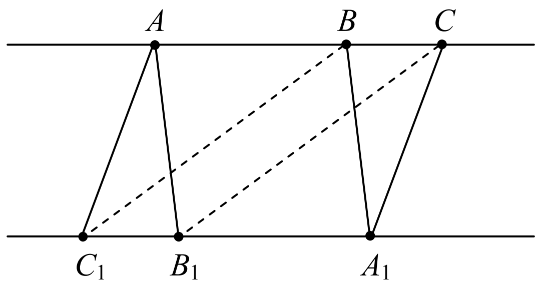
A.A.11. Vienpadsmitā klase

A.A.11.1. *Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa n, ka skaitlis* n^2-3n-1 *dalās ar* 169.

Pieņemsim pretējo, ka n^2-3n-1 dalās ar 169. Tad $n^2-3n-1=(n-8)(n+5)+39$ dalās ar 13. Tā kā saskaitāmais 39 dalās ar 13, tad arī otram saskaitāmajam $(n-8)(n+5)$ jādalās ar 13. Skaitlis $n-8$ ir par 13 lielāks nekā $n+5$, tātad tie abi vienlaicīgi dalās ar 13; no kā seko, ka $(n-8)(n+5)$ dalās ar 169. Bet tādā gadījumā $(n-8)(n+5)+39$ nedalās ar 169. Esam ieguvuši pretrunu. Tātad nav tāda naturāla skaitļa *n*, ka skaitlis n^2-3n-1 dalās ar 169.

A.A.11.2. *Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes, bet* A_1, B_1, C_1 *– uz citas taisnes. Pierādīt: ja* AB_1 *paralēls* A_1B *un* AC_1 *paralēls* A_1C*, tad* BC_1 *paralēls* B_1C.

Pieņemsim, ka punkti *A, B, C* uz dotās taisnes atrodas tieši šādā secībā (citi gadījumi līdzīgi). Apskatām divus gadījumus.
1. Taisnes, uz kurām atrodas dotie punkti, ir paralēlas (skat. A40. zīm.).
Četrstūri ACA_1C_1 un ABA_1B_1 ir paralelogrami, jo to pretējās malas ir paralēlas. Tātad $AC=C_1A_1$ un $AB=B_1A_1$ kā paralelogramu pretējās malas. Tad $BC=AC-AB=C_1A_1-B_1A_1=C_1B_1$. Tā kā paralelogramu pretējie leņķi ir vienādi, tad $\angle ACA_1=\angle AC_1A_1$ un $\angle ABA_1=\angle AB_1A_1$. No pēdējās vienādības seko, ka $\angle CBA_1=\angle C_1B_1A$ kā vienādu leņķu blakusleņķi. Tātad esam ieguvuši, ka $\Delta A_1BC=\Delta AB_1C_1$ (pēc pazīmes „$\ell m\ell$”); pie tam viens trijstūris ir iegūts ar otrā pagriezienu par $180°$. Tas nozīmē, ka $CB=B_1C_1$, pie tam punktu pāri *B*, *C* un C_1, B_1 uz taisnēm izvietoti tieši šajā secībā. Tāpēc BCB_1C_1 ir paralelograms un $BC_1 || B_1C$ kā paralelograma pretējās malas.



A40. zīm.

2. Taisnes, uz kuram atrodas dotie punkti, nav paralēlas; tās krustojas kādā punktā *O*.
Par nogriežņa XY virzītu nogriezni $\overline{XY}$ sauksim nogriezni, kur taisnei, kurai tas pieder, ir piekārtots virziens. Ja $\overline{XY}$ virziens sakrīt ar taisnes virzienu, tā vērtība ir XY; pretējā gadījumā tā vērtība ir $-XY$.
No Talesa teorēmas seko, ka izpildās vienādības $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OB_1}:\overline{OA_1}$ un $\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{OA_1}:\overline{OC_1}$. Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\overline{OC}:\overline{OB}=\overline{OB_1}:\overline{OC_1}$. Tad no Talesa apgrieztās teorēmas seko, ka $BC_1 || B_1C$.
Tā kā esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus, tad uzdevumā prasītais ir pierādīts.
Piezīme. Virzītie nogriežņi tiek lietoti, lai varētu pielietot Talesa apgriezto teorēmu. Iespējams arī līdzīgs pierādījums ar parastiem nogriežņu garumiem; šajā gadījumā būtu jāšķiro vairāki punktu izvietojuma gadījumi, atkarībā no tā, kurā pusē no *O* uz taisnes atrodas katrs punkts.

A.A.11.3. *Atrisināt vienādojumu:*

$$\frac{1}{\sqrt{x-2012}+\sqrt{x-2010}}+\frac{1}{\sqrt{x-2010}+\sqrt{x-2008}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2012}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pareizinot vienādojuma kreisās puses katra saskaitāmā skaitītāju un saucēju ar tā saucējam saistīto izteiksmi (piemēram, izteiksmes $a+b$ saistītā izteiksme ir $a-b$), iegūstam

$$\frac{\sqrt{x-2012}-\sqrt{x-2010}}{-2}+\frac{\sqrt{x-2010}-\sqrt{x-2008}}{-2}+\ldots+$$
$$+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{-2}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{x+2010}-\sqrt{x+2012}}{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pareizinot vienādojuma abas puses ar 2 un saīsinot vienādos locekļus, iegūstam:

$$\sqrt{x+2012}-\sqrt{x-2012}=\sqrt{2}.$$

Veicam identiskus pārveidojumus:

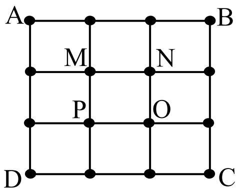
$$\sqrt{x+2012}=\sqrt{x-2012}+\sqrt{2};$$
$$x+2012=x-2012+2\sqrt{2(x-2012)}+2;$$
$$4022=2\sqrt{2(x-2012)};$$
$$2011=\sqrt{2(x-2012)};$$
$$2011^2=2(x-2012);$$
$$x=\frac{2011^2}{2}+2012=2024072{,}5.$$

Esam ieguvuši, ka $x=\frac{2011^2}{2}+2012=2024072{,}5$. Tā kā ir jāievēro definīcijas apgabals, pārliecināmies, vai zem kvadrātsaknes nav negatīvs lielums un vai kāds no saucējiem nav 0. Tā kā vērtība $x=2024072{,}5$ apmierina šīs prasības, tad tā ir uzdevumā dotā vienādojuma atrisinājums.

A.A.11.4. *Pierādīt, ka izliektu* 2012*-stūri nevar sadalīt* 200 *izliektos* 12*-stūros.*

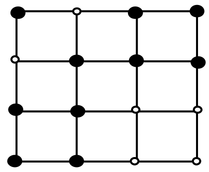
Izliekta 2012-stūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot(2012-2)=180°\cdot 2010$. Tos ir jānoklāj ar 200 12-stūru leņķiem, kuru visu leņķu summa ir $200\cdot 180°\cdot(12-2)=2000\cdot 180°$. Tā kā $2000\cdot 180°<2010\cdot 180°$, tad uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

A.A.11.5. *Plaknē doti* 16 *punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa veidā kā parādīts* 11. *zīm. Taisnstūri sauksim par labu, ja tā virsotnes atrodas režģa punktos, malas ir paralēlas režģa līnijām un nav tā, ka starp taisnstūra virsotnēm ir gan viens no četriem režģa stūriem (punkti A, B, C, D), gan viens no četriem režģa punktiem, kas atrodas režģa iekšienē (punkti M, N, O, P).*
Kāds ir lielākais režģa punktu skaits, ko var atzīmēt tā, lai nebūtu laba taisnstūra, kuram visas virsotnes ir atzīmētie punkti?



11. zīm.

Atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām piemēru (skat. A41. zīm.), kā atzīmēt (punkti, kas nokrāsoti melnā krāsā) 10 punktus tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi.



A41. zīm.

Otrkārt, pamatosim, ka, atzīmējot 11 punktus, noteikti atradīsies *labs* taisnstūris ar visām atzīmētām virsotnēm. Ja ir atzīmēti 11 punkti, tad ir divas iespējas:
1. Ir kāda rinda, kurā ir atzīmēti 4 punkti. Šajā gadījumā noteikti ir arī tāda rinda, kurā ir atzīmēti vismaz 3 punkti, tad no šīm abām rindām noteikti var izvēlēties *labu* taisnstūri, kuram visas virsotnes ir atzīmētas (ņemam vai nu divus vidējos, vai malējos punktus (tos, kuri abi ir atzīmēti) no tās rindas, kur ir 3 atzīmēti punkti un tos pašus no tās rindas, kur ir 4).
2. Nav tādas rindas, kurā ir atzīmēti 4 punkti. Ja katrā rindā ir ne vairāk kā 3 atzīmēti punkti, tad ir vismaz 3 rindas, kurās ir vismaz 3 atzīmēti punkti. Tātad būs vai nu augšējā un apakšējā, vai divas vidējās rindas ar 3 atzīmētiem punktiem. Tad no šīm divām rindām var izvēlēties *labu* taisnstūri, kuram visas virsotnes ir atzīmētas – jāņem tās divas kolonas, kurās abām šīm rindām ir atzīmēti punkti.

A.A.12. Divpadsmitā klase

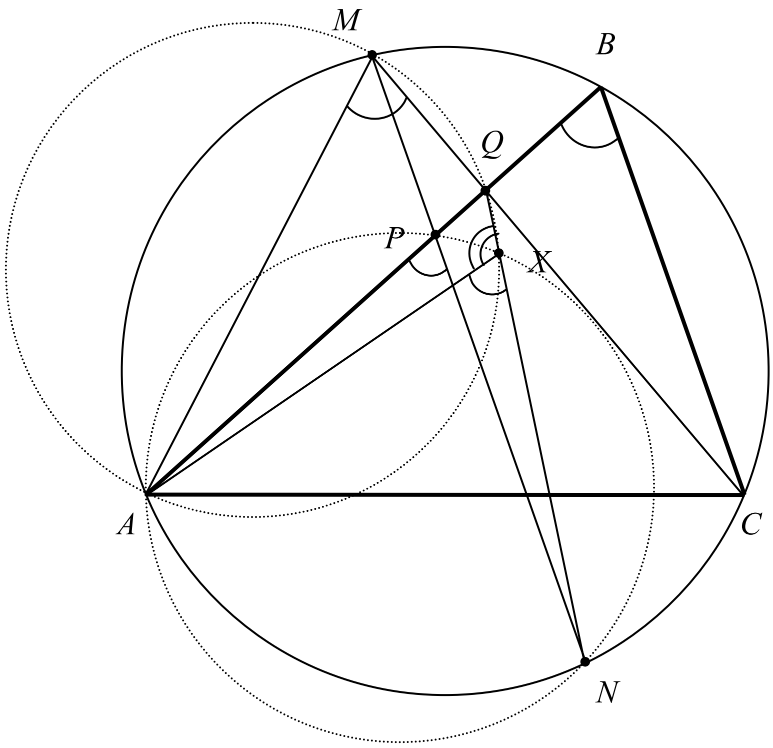
A.A.12.1. *Skaitļi A un B ir divi dažādi 7-ciparu skaitļi, kuri katrs satur visus ciparus no 1 līdz 7. Pierādīt, ka A nedalās ar B.*

Tā kā abu doto skaitļu decimālais pieraksts sastāv no vieniem un tiem pašiem cipariem, to ciparu summas ir vienādas ar 28, tad A un B, dalot ar 9, dod vienādu atlikumu 1, t. i., $A = 9N + 1$ un $B = 9M + 1$, N un M – naturāli skaitļi. Pieņemsim, ka $A = kB$, kur k ir naturāls skaitlis un $2 \leq k \leq 7$ (k nepārsniedz 7, jo skaitļi A un B abi ir septiņciparu skaitļi un A pirmais cipars nepārsniedz 7). Skaitlis $kB = k(9M + 1) = 9kM + k$, dalot ar 9, dod atlikumu $k \neq 1$. Tā kā skaitļi A un kB, dalot tos ar 9, dod dažādus atlikumus, tad tie nav vienādi, t. i,. $A \neq kB$ jeb skaitlis A nedalās ar B, kas arī bija jāpierāda.

<u>*Piezīme.*</u> Atrisinājumu var pierakstīt īsāk, lietojot kongruences: $A \equiv B \equiv 1 \pmod 9$ un $kB \equiv k \pmod 9$. Ja $A = kB$, tad $1 \equiv k \pmod 9$. Tā kā $2 \leq k \leq 7$, iegūta pretruna.

A.A.12.2. *Caur trijstūra ABC malas AB iekšēju punktu P novilkta taisne, kas ir paralēla BC un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos M un N (A, M un B atrodas uz riņķa līnijas tieši šādā secībā). MC krusto AB punktā Q. Pierādīt, ka NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu.*

Apzīmējam ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustpunktu ar X (skat. A42. zīm.).



A42. zīm.

Lai pierādītu, ka X atrodas uz nogriežņa NQ, pietiek parādīt, ka $\angle AXQ + \angle AXN = 180°$.

$\angle APN = \angle ABC$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm *MN* un *BC*, kuras krusto taisne *AB*. Savukārt $\angle AXN = \angle APN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *AN*. Kā ievilktie leņķi ir vienādi arī $\angle AMC = \angle ABC$. Tā kā *A*, *M*, *Q*, *X* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad $\angle AXQ + \angle AMQ = 180°$ jeb $\angle AXQ = 180° - \angle AMQ = 180° - \angle AMC$. Esam ieguvuši, ka $\angle AXN = \angle ABC$ un $\angle AXQ = 180° - \angle ABC$. Līdz ar to $\angle AXQ + \angle AXN = 180° - \angle ABC + \angle ABC = 180°$. Tātad X atrodas uz nogriežņa *NQ* jeb *NQ* iet caur ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustpunktu.

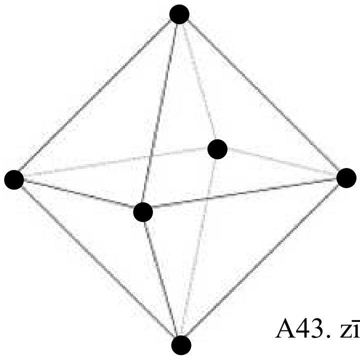
A.A.12.3. *Atrisināt vienādojumu* $\lg x \cdot \lg(4-x) = \frac{1}{4}$.

Ievērosim, ka logaritma $\lg a$ vērtība nav definēta, ja $a < 0$, un $\lg a < 0$, ja $0 < a < 1$. Ja $x < 1$ vai $x > 3$, tad izteiksmes $\lg x \cdot \lg(4-x)$ vērtība ir vai nu negatīva, vai vispār neeksistē; ja $1 \le x \le 3$, tad arī $1 \le 4 - x \le 3$. Izmantojot, ka $y = \lg x$ ir augoša funkcija, iegūstam, ka $\lg x \cdot \lg(4-x) \le \lg 3 \cdot \lg 3$. Tā kā $3 < \sqrt{10}$, tad $\lg 3 < \lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ un $\lg x \cdot \lg(4-x) < \frac{1}{4}$. Tātad dotajam vienādojumam atrisinājuma nav.

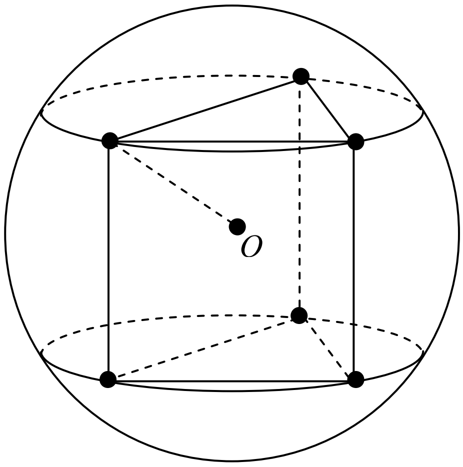
A.A.12.4. *Vai telpā var izvietot* ***a)*** *6 punktus,* ***b)*** *7 punktus tā, lai jebkuri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrastos vienā plaknē?*

a) Jā, tas ir iespējams, ja tos novieto, piemēram, oktaedra virsotnēs (skat. A43. zīm.). Tiešām, jebkuri trīs no punktiem atrodas vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrodas vienā plaknē.

b) Jā, prasītais ir iespējams. Piemēram, par punktiem var izvēlēties regulāras trijstūra prizmas, kuras sānu skaldnes ir kvadrāti, virsotnes un tai apvilktās sfēras centru (skat. A44. zīm.).



A43. zīm.



A44. zīm.

A.A.12.5. *Klasē ir* 17 *skolēni. Katru dienu daži no viņiem (vismaz viens) tiek izsaukti pie tāfeles. Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura ir iespējams, ka katriem diviem klases skolēniem ir bijusi diena, kad viens no viņiem ir izsaukts pie tāfeles, bet otrs nē?*

Atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka ar 5 dienām pietiek, lai izpildītos uzdevumā prasītais. Piemēram, 1. dienā pie tāfeles tika izsaukts 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. un 8. skolēns, 2. dienā – 1., 2., 3., 4., 9., 10., 11. un 12. skolēns, 3. dienā – 1., 2., 5., 6., 9., 10., 13. un 14. skolēns, 4. dienā – 1., 3., 5., 7., 9., 11., 13. un 15. skolēns, 5. dienā – 17. skolēns.

Otrkārt, pamatosim, ka ar mazāk dienām nepietiek. Teiksim, ka vairāki skolēni ir *vienādā pozīcijā*, ja vienā dienā tie visi bija izsaukti pie tāfeles vai arī visi nebija pie tāfeles. Pēc 1. dienas būs vismaz 9 skolēni *vienādā pozīcijā* (izvēloties jebkurus divus no šiem skolēniem, tie neapmierina uzdevuma nosacījumus). 2. dienā no šīs grupas skolēniem daži (vai neviens) tika izsaukti pie tāfeles, taču paliek vismaz 5 skolēni, kas abās dienas bija *vienādā pozīcijā*. Savukārt pēc trīs dienām noteikti būs vismaz 3 skolēni, kas visās dienās bija *vienādā pozīcijā*, bet pēc 4. dienas joprojām varēs atrast vismaz 2 skolēnus, kas visas četras dienas bija *vienādā pozīcijā*. Izvēloties šo skolēnu pāri, tam nevarēs atrast dienu, kad viens bija pie tāfeles, bet otrs – nē. Tātad ar mazāk nekā 5 dienām nepietiek.

A.VP. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

A.VP.1. *Ar* $S(x)$ *apzīmēsim skaitļa x ciparu summu. Aprēķināt* $S(S(S(2012^{2012})))$.

Ievērosim, ka skaitlis un tā ciparu summa, dalot ar 9, dod vienādus atlikumus. Tātad $x \equiv S(x) \pmod 9$ un $x \equiv S(S(S(x))) \pmod 9$.

Izmantojot, ka skaitļa 2012 ciparu summa ir 5, aprēķinām, kāds atlikums rodas, ja skaitli 2012^{2012} dala ar 9:

$$2012^{2012} \equiv 5^{(2010+2)} \equiv 5^{2010} \cdot 5^2 \equiv (5^6)^{335} \cdot 7 \equiv 1^{335} \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9.$$

Pārveidojumos tika izmantots, ka $5^6 \equiv 25^3 \equiv 7^3 = 49 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 28 \equiv 1 \pmod 9$.

Tātad $2012^{2012} \equiv S(2012^{2012}) \equiv S(S(2012^{2012})) \equiv S(S(S(2012^{2012}))) \equiv 7 \pmod 9$.

Novērtēsim izteiksmes 2012^{2012} ciparu skaitu:

$$2012^{2012} < 10000^{2500} = (10^4)^{2500} = 10^{10000}.$$

Ieguvām, ka skaitlim 2012^{2012} ir ne vairāk kā 10000 ciparu. Tātad šī skaitļa ciparu summa ir $S(2012^{2012}) \le 9 \cdot 10000 = 90000$. Redzams, ka skaitlim $S(2012^{2012})$ ir ne vairāk kā 5 cipari, tātad $S(S(2012^{2012})) < 9 \cdot 5 = 45$. Tā kā $S(S(2012^{2012}))$ ir mazāks nekā 45 un, dalot ar 9, dod atlikumu 7, tad tā iespējamās vērtības ir 7, 16, 25, 34, 43. Visos gadījumos redzams, ka $S(S(S(2012^{2012}))) = 7$.

A.VP.2. *Dotas divas virknes* $x_1 = x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_n + 2$ *visiem* $n \ge 1$ *un* $y_1 = y_2 = 4$, $y_{n+2} = y_n y_{n+1} - 1$ *visiem* $n \ge 1$. *Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa, kas pieder abām virknēm.*

Aprēķinām $x_3 = 9 + 3 + 2 = 14$ un $y_3 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$. Ievērojam, ka $x_3 - x_2 = 14 - 3 = 11$ un $y_3 - y_2 = 15 - 4 = 11$. Tātad x_2, x_3 un y_2, y_3 attiecīgi dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 11, t. i., $x_2 \equiv x_3 \equiv 3 \pmod{11}$ un $y_2 \equiv y_3 \equiv 4 \pmod{11}$.

Izmantojot matemātisko indukciju, pamatosim, ka pirmās virknes visi locekļi ir kongruenti ar 3 pēc moduļa 11 (dalot tos ar 11, atlikums ir 3).

Bāze. $x_1 \equiv x_2 \equiv 3 \pmod{11}$.

Induktīvais pieņēmums. $x_k \equiv x_{k+1} \equiv 3 \pmod{11}$.

Induktīvā pāreja. Lai pierādītu, ka $x_{k+2} \equiv 3 \pmod{11}$, izmantojam doto virknes definīciju un induktīvo pieņēmumu:

$$x_{k+2} = x_{k+1}^2 + x_k + 2 \equiv 3^2 + 3 + 2 = 14 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Secinājums. Pēc matemātiskās indukcijas principa visi pirmās virknes locekļi ir kongruenti ar 3 pēc moduļa 11.

Līdzīgi pamatosim, ka otrās virknes visi locekļi ir kongruenti ar 4 pēc moduļa 11.

Bāze. $y_1 \equiv y_2 \equiv 4 \pmod{11}$.

Induktīvais pieņēmums. $y_k \equiv y_{k+1} \equiv 4 \pmod{11}$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka $y_{k+2} \equiv 4 \pmod{11}$:

$$y_{k+2} = y_k \cdot y_{k+1} - 1 \equiv 4 \cdot 4 - 1 = 15 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Secinājums. Pēc matemātiskās indukcijas principa visi otrās virknes locekļi ir kongruenti ar 4 pēc moduļa 11.

Tā kā abu virkņu locekļi dod dažādus atlikumus, dalot tos ar 11, tad nav tāda naturāla skaitļa, kas pieder abām virknēm.

A.VP.3. *Trijstūra malu garumi ir a, b un c. Pierādīt, ka trijstūra laukums ir mazāks nekā* $\frac{7}{48}(a^2+b^2+c^2)$.

Trijstūra laukumu apzīmējam ar *S*, tad mums jāpierāda, ka

$$S<\frac{7}{48}(a^2+b^2+c^2).$$

Ievērojam, ka $\frac{7}{48}(a^2+b^2+c^2)>\frac{\sqrt{48}}{48}(a^2+b^2+c^2)=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$.

Pierādīsim, ka ir spēkā nevienādība:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2. \qquad (*)$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{9};$$

$$3a^2+3b^2+3c^2\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac;$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geq 0;$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\geq 0;$$

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo trīs nenegatīvu skaitļu summa noteikti ir lielāka vai vienāda ar 0. Tā kā ekvivalentu pārveidojumu rezultātā esam ieguvuši patiesu nevienādību, tad arī nevienādība (*) ir patiesa.

Izmantojot nevienādību (*), novērtējam izteiksmes $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$ vērtību:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{36}\cdot(a+b+c)^2=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}\cdot\frac{a+b+c}{r}=\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot S\cdot\frac{a+b+c}{r},$$

kur *r* – trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss. Pārveidojumos tika izmantota trijstūra laukuma aprēķināšanas formula $S_\Delta=pr$, kur $p=\frac{a+b+c}{2}$ – trijstūra pusperimetrs.

Aprēķināsim mazāko iespējamo daļas $\frac{a+b+c}{r}$ vērtību. Tā kā *a*, *b*, *c* ir dotā trijstūra malas, tad vērtība $a+b+c=2p$ ir fiksēta. Lai daļas vērtība pie fiksēta skaitītāja būtu vismazākā, saucēja vērtībai jābūt lielākajai iespējamai. Tātad jāatrod lielāko iespējamo *r* vērtību. Zinot, ka $r=\frac{S}{p}$, nepieciešams atrast lielāko iespējamo *S* vērtību. Pēc Hērona formulas $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ jeb $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Pierādīsim, ka lielākā *S* vērtība ir tad, ja $a=b=c=\frac{2p}{3}$. Pietiek pierādīt, ka izteiksmes $(p-a)(p-b)$ vērtība, ja $a\neq b$, ir mazāka nekā $\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\left(p-\frac{a+b}{2}\right)$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\left(p-\frac{a+b}{2}\right)>(p-a)(p-b);$$
$$p^2-pa-pb+\frac{(a+b)^2}{4}>p^2-pa-pb+ab;$$
$$\frac{(a+b)^2}{4}>ab;$$
$$a^2+2ab+b^2>4ab;$$
$$a^2-2ab+b^2>0;$$
$$(a-b)^2>0.$$

Tā kā $a \neq b$, tad iegūtā nevienādība ir patiesa. Līdz ar to esam pierādījuši, ka lielākā S vērtība ir tad, ja $a=b=c=\frac{2p}{3}$.

Tad lielākā S vērtība ir $S_{\max}=\sqrt{p\left(p-\frac{2p}{3}\right)^3}=\sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Tātad $r_{\max}=\frac{S_{\max}}{p}=\frac{p}{3\sqrt{3}}$ un $\left(\frac{a+b+c}{r}\right)_{\min}=\frac{2p\cdot 3\sqrt{3}}{p}=6\sqrt{3}$.

Tātad $\frac{\sqrt{3}}{18}S\cdot\frac{a+b+c}{r}>\frac{\sqrt{3}}{18}S\cdot 6\sqrt{3}=S$.

Ņemot vērā visus novērtējumus, esam ieguvuši, ka $S<\frac{7}{48}(a^2+b^2+c^2)$, kas arī bija jāpierāda.

A.VP.4. *Atrast visas funkcijas $f(x)$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, tādas, ka visiem reāliem x un y izpildās vienādība*

$$f(f(x)+3y)+3y=f(x+4y)+2f(x).$$

Atrodam tādu *y*, lai izteiksmē $[f(f(x)+3y)]+3y=[f(x+4y)]+2f(x)$ ar kvadrātiekavām atzīmētie locekļi saīsinās: $f(x)+3y=x+4y$ jeb $y=f(x)-x$.
Ievietojot $y=f(x)-x$, iegūstam

$$f(4f(x)-3x)+3f(x)-3x=f(4f(x)-3x)+2f(x);$$
$$f(x)=3x.$$

Pārbaudām, vai iegūtā funkcija $f(x)=3x$ ir dotā vienādojuma atrisinājums:

$$f(3x+3y)+3y=3(x+4y)+2\cdot 3x;$$
$$3(3x+3y)+3y=3x+12y+6x;$$
$$9x+12y=9x+12y.$$

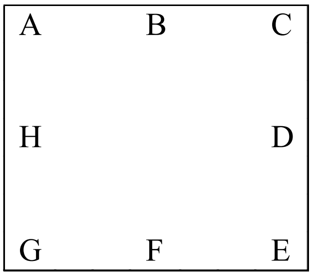
Tātad $f(x)=3x$ ir meklētais atrisinājums.

A.VP.5. *$N\times N$ rūtiņas liels laukums jāsadala N sakarīgos apgabalos tā, ka katrā no tiem ir tieši N rūtiņas un katrā laukuma rindā un kolonnā atrodas tieši triju apgabalu rūtiņas.*
Vai tas ir iespējams, ja ***a)*** *$N=7$,* ***b)*** *$N=8$?*
Apgabalu sauc par sakarīgu, ja no katras tā rūtiņas var nokļūt uz jebkuru citu, pārvietojoties tikai pa šī apgabala rūtiņām; katrā solī drīkst pārvietoties uz rūtiņu, kurai ar doto ir kopīga mala.

a) Pierādīsim, ka uzdevumā prasītais nav iespējams, ja $N = 7$. Aplūkosim, cik garas var būt katra apgabala projekcijas uz rūtiņu laukuma malām. Skaidrs, ka abas projekcijas ir nogriežņi (jo pārvietojoties no rūtiņas uz rūtiņu un nekādi lēcieni nav iespējami) un to garumu reizinājumam jābūt lielākam vai vienādam ar apgabala rūtiņu skaitu: $p_x \cdot p_y \geq 7$. Aplūkosim, kāda ir mazākā iespējamā projekciju garumu summa s: $p_x + p_y = s$, $p_y = s - p_x$, $p_x(s - p_x) \geq 7$, $p_x^2 - s \cdot p_x + 7 \geq 0$. Lai nevienādībai būtu atrisinājums, diskriminantam jābūt nenegatīvam, t. i., $\frac{s^2}{4} - 7 \geq 0$ jeb $s^2 \geq 28$. Tā kā projekciju garumu summa ir naturāls skaitlis, tad $s \geq 6$. Tātad mazākā projekciju garumu summa ir 6, pie kam septiņas rūtiņas lielu apgabalu iespējams iegūt tikai tad, ja apgabalu ierobežojošais taisnstūris ir kvadrāts 3×3 rūtiņas vai taisnstūris 2×4 rūtiņas (taisnstūris 1×6 neder, jo tad šajā apgabalā ir ne vairāk kā 6 rūtiņas).

Zinot, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši trīs apgabali, varam aprēķināt visu projekciju garumu kopsummu: 3·7 (rindas) + 3·7 (kolonnas) = 42. No iepriekš aprēķinātā seko, ka katrai no septiņu apgabalu projekciju garumu summām jābūt 6 (ja kaut viena apgabala projekciju garumu summa pārsniegtu 6, tad visu projekciju garumu summa pārsniegtu $7 \cdot 6 = 42$). Tātad visi apgabalus ierobežojošie taisnstūri ir vai nu 3×3 rūtiņas lieli kvadrāti, vai arī 2×4 rūtiņas lieli taisnstūri.

Aplūkosim, kāda situācija veidojas uz malējām rindām un kolonnām (skat. A45. zīm.):

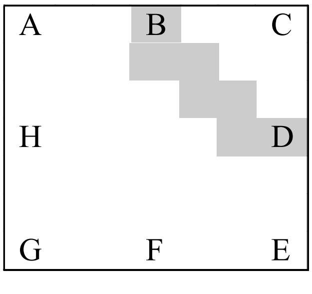


A45. zīm.

Katrā no šīm rindām un kolonnām atrodas trīs dažādi apgabali. Stūra rūtiņas pieder apgabaliem A, C, E un G, bet vismaz viena no kontūra malu rūtiņām (netiek apgalvots, ka tieši vidējā!) pieder apgabaliem B, D, F un H).

Rūtiņas, kas pieder dažādiem laukuma stūriem (piemēram, A un C) vai atrodas pie pretējām malām (piemēram, B un F), nevar piederēt vienam apgabalam (jo vienas projekcijas garums (7) pārsniedz viena apgabala projekciju garumu summu (6)). Pierādīsim, ka arī malu vidus rūtiņas (piemēram, B un D) nevar piederēt vienam apgabalam, jo tad būs tāda rinda vai kolonna, kurā atrodas tikai divu apgabalu rūtiņas.

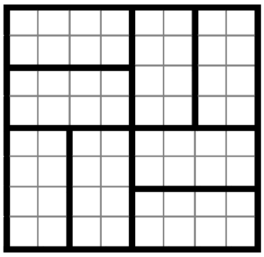
Pieņemsim pretējo, ka tas tomēr ir iespējams. Tad no B uz D mēs varam nokļūt, pārvietojoties uz blakus rūtiņu, kas visu laiku pieder vienam apgabalam (skat. A46. zīm.):



A46. zīm.

Šis izveidotais ceļš pilnībā ierobežo stūra apgabalu, kuram pieder rūtiņa C. Ja stūra apgabala projekcijas ir c_x un c_y, tad apgabala, kam pieder rūtiņas B un D, projekcijām jābūt vismaz c_x+1 un c_y+1. No iepriekšējiem spriedumiem $c_x+c_y=6$. Tātad $(c_x+1)+(c_y+1)=8>6$ un šāds apgabals nav iespējams. Tātad katra no rūtiņām A, B, C, D, E, F, G un H pieder savam apgabalam, kas nozīmē, ka ir nepieciešami vismaz 8 apgabali, lai apmierinātu apgabalu izvietojumu pie laukuma malām. Esam ieguvuši pretrunu, tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

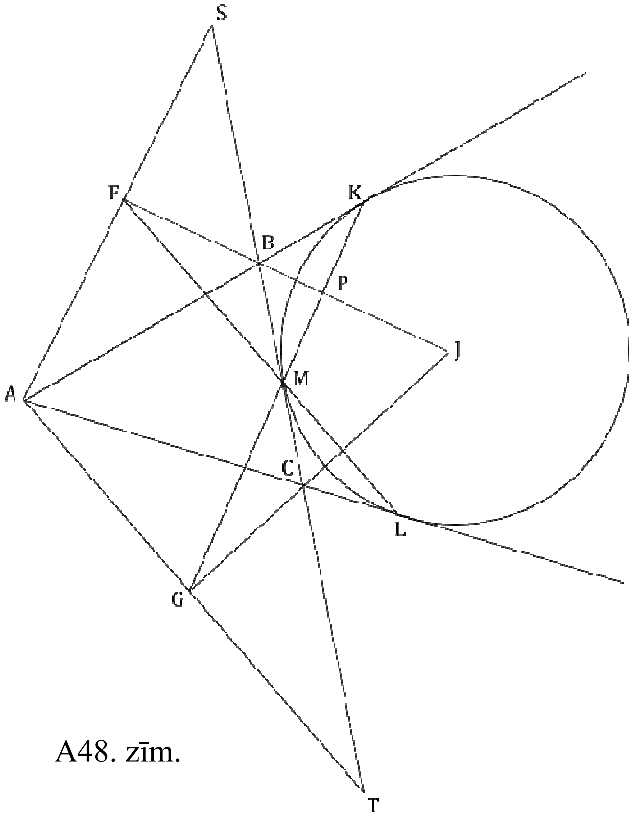
b) Ja $N=8$, tad uzdevumā prasīto var izpildīt (skat. A47. zīm.)



A47. zīm.

A.IMO. 53. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.IMO.1. *Trijstūrim ABC pievilkta riņķa līnija ar centru punktā J pieskaras trijstūra ABC malai BC punktā M, malas AB pagarinājumam – punktā K, bet malas AC pagarinājumam – punktā L. Taisnes LM un BJ krustojas punktā F, taisnes KM un CJ – punktā G. Taisne BC krusto taisni AF punktā S, bet taisni AG – punktā T. Pierādīt, ka punkts M ir nogriežņa ST viduspunkts.*
(Par trijstūrim pievilktu riņķa līniju sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras vienai trijstūra malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem.)



A48. zīm.

Nogriežņi KM un BJ ir savstarpēji perpendikulāri, jo ΔMBK ir vienādsānu trijstūris ($BM = BK$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no viena punkta). Leņķa ABC bisektrise arī ir perpendikulāra BJ un, tātad nogrieznis KM ir paralēls ar trijstūra ABC bisektrisei.

No šejienes seko $\angle BMK = \frac{1}{2}\angle ABC$ (kā iekšējie šķērsleņķi) un, līdzīgi, $\angle FMB = \angle CML = \frac{1}{2}\angle ACB$. Ar P apzīmējam nogriežņu KM un FJ krustpunktu. No sakarībām trijstūrī FPM ($\angle FMP = 90°$) iegūstam, ka

$$\angle PFM = 90° - \angle FMB - \angle BMK = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Punkti K un M ir novietoti simetriski attiecībā pret taisni FJ, tāpēc $\angle KFJ = \angle JFM = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle KAJ$ (AJ ir vienādsānu trijstūra KAL ($AK = AL$) bisektrise). Punkti K, J, A un F pieder vienai riņķa līnijai. Šajā riņķa līnijā $\angle AKJ$ un $\angle AFJ$ balstās uz viena loka un $AK \perp KJ$, tātad $\angle AKJ = \angle AFJ = 90°$. Tā kā $FJ \perp AS$ un $FJ \perp KM$, tad $AS \parallel KM$. Četrstūris $ASKM$ ir vienādsānu trapece ar pamatiem AS un KM. No leņķu vienādības $\angle SMK = \angle AKM = \angle ASM = \angle SAK$ iegūstam, ka $\Delta BPK = \Delta BPM$ un $\Delta BFS = \Delta AFB$ (kā taisnleņķa trijstūri ar vienādiem šauriem leņķiem un kopīgu kateti). Vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tāpēc $AB = BS$ un $BK = BM$. Līdz ar to

$$AK = AB + BK = BS + BM = MS.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $AL = TM$. Bet $AL = AK$ kā pieskares, kas vilktas no punkta A pret vienu riņķa līniju. Tātad $MS = AK = AL = TM$ jeb M ir nogriežņa ST viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.IMO.2. *Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un tādi reāli pozitīvi skaitļi $a_2, a_3, ..., a_n$, ka $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Pierādīt, ka $(1+a_2)^2(1+a_3)^2...(1+a_n)^2 > n^n$.*

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$(a_k+1)^k = \left(a_k + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + ... + \frac{1}{k-1}\right)^k = \left(k\left(\frac{a_k + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + ... + \frac{1}{k-1}}{k}\right)\right)^k \geq$$

$$\geq \left(k \cdot \sqrt[k]{a_k \frac{1}{(k-1)^{k-1}}}\right)^k = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Atzīmēsim, ka nevienādība ir stingra, izņemot gadījumu, ja $a_k = \frac{1}{k-1}$. Ja visām k vērtībām šī vienādība būtu spēkā, tad $a_2 a_3 ... a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot ... \cdot \frac{1}{n} < 1$, kas ir pretrunā ar doto sakarību $a_2 a_3 ... a_n = 1$. No šejienes seko, ka vienlaicīgi visām k vērtībām a_k nevar būt vienāds ar $\frac{1}{k-1}$.

Sareizinot iegūtās nevienādības, kur $k = 2,3,...,n$, iegūstam

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3...(a_n+1)^n > \frac{2^2}{1^1} a_2 \frac{3^3}{2^2} a_3 ... \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_n = n^n a_2 a_3 ... a_n = n^n.$$

A.IMO.3. *Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli ar melošanu. Tās noteikumi ir atkarīgi no naturāliem skaitļiem n un k, kas spēlētājiem ir zināmi.*
Sākumā A izvēlas tādus naturālus skaitļus x un N, ka $1 \leq x \leq N$. Skaitli x spēlētājs A patur slepenībā, bet skaitli N nemelojot pasaka spēlētājam B. Spēlētājs B cenšas iegūt informāciju par x, pēc patikas daudz reižu jautājot spēlētājam A šādā veidā: B izvēlas jebkuru naturālu skaitļu kopu S (iespējams, tādu, kas jau izmantota kādā no iepriekšējiem jautājumiem) un jautā, vai x pieder S. Pēc katra jautājuma A tūlīt atbild „jā” vai „nē”. Spēlētājs A drīkst melot, tomēr no katrām $k+1$ pēc kārtas esošām atbildēm vismaz vienai jābūt patiesai.
Galu galā spēlētājam B jānosauc kopa X ar ne vairāk kā n naturāliem skaitļiem. Ja x pieder kopai X, B uzvar; citādi B zaudē. Pierādīt, ka
***a)** ja $n \geq 2k$, tad spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija;*
***b)** visiem pietiekami lieliem k pastāv tāds $n \geq 1{,}99^k$, ka B nevar droši panākt uzvaru.*

a) Vispirms pierādīsim, ka B ir uzvaroša stratēģija tad un tikai tad, ja uzvaroša stratēģija ir gadījumam $N = n+1$, t. i., nepieciešams atrast vienu skaitli, kas noteikti nevar būt x.

Vienā virzienā pierādījums ir triviāls – ja nebūs stratēģijas viena skaitļa izslēgšanai, tad B nav uzvarošas stratēģijas vispārīgā gadījumā.

Pierādījumam otrā virzienā izmantosim matemātisko indukciju:

Pieņemsim, ka $N > n+1$ un ir zināms, ka uzvaroša stratēģija ir zināma visiem N' tādiem, ka $n+1 \le N' < N$. Sadalīsim N $n+1$ netukšā skaitļu kopā $G_1, G_2, ..., G_{n+1}$. Tagad tā vietā lai uzdotu jautājumus: „Vai skaitlis pieder kopai $S \subset \{1, ..., n+1\}$?”, nepieciešams uzdot jautājumus „Vai skaitlis pieder kopai $\bigcup_{s \in S} G_s$?”. Izmantojot uzvarošo stratēģiju gadījumam $n+1$, iespējams izslēgt vienu no kopām G_i, tādējādi samazinot kopējo skaitļu skaitu, kuram pēc induktīvā pieņēmuma eksistē uzvaroša stratēģija.

Tātad pietiek parādīt, ka eksistē uzvaroša stratēģija, ja $n = 2^k$, $N = 2^k + 1$.

Pieņemsim, ka mēs meklējam nevis skaitli x, bet $x-1$, kas atrodas robežās $0 \le (x-1) \le N - 1 = 2^k$.

Lai uzrakstītu visus skaitļus binārā skaitīšanas sistēmā, nepieciešams $k+1$ bits. Pie kam visiem skaitļiem izņemot 2^k ($k+1$)-ajā pozīcijā ir 0.

Atrisinājums 1.1. Ar S_i visiem $i = 1, 2, ..., k$ apzīmēsim tos skaitļus, kuriem binārajā pierakstā i-tajā pozīcijā ir cipars 0. Pirmos k jautājumus B uzdod formā „Vai skaitlis $x-1$ pieder kopai S_i?” (visiem $i = 1, 2, ..., k$ pēc kārtas). Katrai pozīcijai izvēlēsimies ciparu $a_i = 0$, ja atbilde uz i-to jautājumu ir „jā”, vai $a_i = 1$, ja atbilde ir „nē”. Katrai pozīcijai noteiksim arī izvēlētajam ciparam pretējo: $a_i^* = 1 - a_i$. Tagad veidosim bināros skaitļus $w_i = \overline{a_k^* a_{k-1}^* ... a_{i+1}^* a_i a_{i-1} ... a_1}$ visiem $i = 0, 1, ..., k$. Nākamos jautājumus B uzdod formā „Vai skaitlis $x-1$ pieder kopai $\{w_i\}$?” (visiem $i = 0, 1, ..., k$ pēc kārtas). Ja A kaut reizi atbild, ka skaitlis nav w_i, tad izvēlēsimies mazāko nenegatīvo j, kuram A tā ir atbildējis. Ja pieņemtu, ka $x - 1 = w_j$, tad iegūtu, ka A ir melojis $k+1$ reizi pēc kārtas, atbildot uz jautājumiem $S_{j+1}, S_{j+2}, ..., S_k, \{w_0\}, \{w_1\}, ..., \{w_j\}$. Tātad B zina, ka $x - 1 \ne w_j$ un ir uzvarējis.

Ja A vienmēr atbild, ka $x = w_i$, tad, ja $x - 1 = 2^k$ (binārais pieraksts sastāv no 1 un k nullēm), tad A ir melojis $k+1$ reizi pēc kārtas, atbildot uz jautājumiem $\{w_0\}, \{w_1\}, ..., \{w_k\}$. Tātad B zina, ka $x - 1 \ne 2^k$ un atkal ir uzvarējis.

Atrisinājums 1.2. Jebkurš skaitlis $x-1$ ir uzrakstāms binārā formā $b_k b_{k-1} ... b_1 b_0$, kur katrs no binārajiem cipariem b_i, $i = 0, 1, ..., k$ ir 0 vai 1. Vispirms B $k+1$ reizi uzdod jautājumu „Vai b_k ir 1?” Ja visas atbildes ir „nē”, tad droši zināms, ka $x - 1 \ne 2^k$. Ja kāda no atbildēm ir „jā”, tad nākamos k jautājumus uzdod par katru no cipariem $b_{k-1}, b_{k-2}, ..., b_1, b_0$: „Vai b_i ir 1?”. Tagad iespējams izveidot bināru skaitli, kas pretējs pēdējai $k+1$ atbildei: i-tajā pozīcijā 0, ja atbilde uz jautājumu par b_i bija „jā”, vai 1, ja - „nē”. Tā kā vismaz vienai no pēdējās $k+1$ atbildes bija jābūt patiesai, tad uzbūvētais skaitlis nevar būt $x-1$ (jo tam visas $k+1$ pēdējās atbildes būtu aplamas).

b) Ievērosim, ka A varētu mēģināt rīkoties tā, ka formāli noteikumi par vienu patiesu atbildi starp jebkurām $k+1$ secīgām atbildēm būtu ievēroti, bet neviens konkrēts skaitlis nebūtu izvēlēts, t. i., visu laiku tiktu mēģināts saglabāt situāciju, ka nevienu no iespējamiem skaitļiem izslēgt nav iespējams, jo pretruna neveidojas. Varētu spriest tā, ka A pirms katras atbildes pēc kārtas pārdomātu: „Kā man būtu jāatbild, ja es būtu iedomājies skaitli i?” (i vietā ievietojot pēc kārtas visus skaitļus no iespējamo skaitļu apgabala $1, 2, ..., n, n+1$).

Pieņemsim, ka $\varepsilon > 0$ ir mazs parametrs un pierādīsim, ka eksistē A stratēģija, kas neļauj B uzvarēt, ja $n+1=\varepsilon(2-\varepsilon)^{k+1}$. Izvēloties ε pietiekami mazu (piemēram, 10^{-3}) un k – pietiekami lielu (piemēram, $k>2000$), n vērtība būs lielāka nekā 1.99^k. Joprojām uzskatām, ka $N=n+1$, t. i., pierādīsim, ka pat šajā situācijā (kad pietiktu izslēgt vienu skaitli) B nevar uzvarēt.

Ar a_r apzīmēsim to skaitļu skaitu, kuri ir pretrunā ar pēdējām r atbildēm, t. i., ja būtu izvēlēts kāds no šiem skaitļiem, tad pēdējās r atbildes būtu nepatiesas. Spēlētāja A stratēģija būs atbildēt tā, ka tiek minimizēta funkcijas $\sum a_r(2-\varepsilon)^r$ vērtība. Šīs funkcijas vērtību sauksim par *rezultātu*. Spēles sākumā rezultāts ir $n+1$.

Pieņemsim, ka pēc kāda gājiena rezultāts ir R. Nākamo jautājumu B uzdod par kādu skaitļu kopu S. Pieņemsim, ka $n_1=|S|$ un $n_2=(n+1)-|S|$. Pieņemsim, ka $R=R_1+R_2$, kur R_1 ir rezultāta daļa, kuru veido to skaitļu, kas ietilpst kopā S, ieguldījums, bet R_2 – tā rezultāta daļa, ko veido kopā S neietilpstošo skaitļu ieguldījums. Tad jaunais rezultāts ir $\min((2-\varepsilon)R_1+n_2,(2-\varepsilon)R_2+n_1)$. Tā kā $(2-\varepsilon)R_1+n_2+(2-\varepsilon)R_2+n_1=(2-\varepsilon)R+n+1$, tad var apgalvot, ka jaunais rezultāts nepārsniedz $\frac{1}{2}((2-\varepsilon)R+n+1)$. Ar indukcijas palīdzību pierādīsim, ka rezultāts nevar pārsniegt $\frac{n+1}{\varepsilon}$. Tā kā $\varepsilon<1$, tad sākumā šī sakarība izpildās: $n+1\le\frac{n+1}{\varepsilon}$.

Pieņemsim, ka šī sakarība ir spēkā pēc m soļiem: $R\le\frac{n+1}{\varepsilon}$. Tad pēc nākamā soļa rezultāts nepārsniedz $\frac{1}{2}((2-\varepsilon)\frac{n+1}{\varepsilon}+n+1)=\frac{n+1}{\varepsilon}$, kas bija jāpierāda.

Tas nozīmē, ka rezultāta aprēķināšanas procesā, nevienam r nevar būt spēkā sakarība $(2-\varepsilon)^r>\frac{n+1}{\varepsilon}$. Bet tā kā tika izvēlētas tādas k un n vērtības, ka $n+1=\varepsilon(2-\varepsilon)^{k+1}$, tas nozīmē, ka esam ieguvuši pretrunu un vērtības no 1 līdz $n+1$ nav atšķiramas – par katru no tām uz $k+1$ secīgiem jautājumiem vismaz viena atbilde ir patiesa.

A.IMO.4. *Atrodiet visas tādas funkcijas* $f:Z\to Z$ *(Z – veselo skaitļu kopa), ka jebkuriem veseliem skaitļiem a, b un c, kam* $a+b+c=0$*, izpildās vienādība*

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

Ievietojot $a=b=c=0$, iegūstam, ka $3f(0)^2=6f(0)^2$, no kurienes seko, ka $f(0)=0$. Ievietojot $b=-a,\ c=0$, iegūstam

$$f(a)^2+f(-a)^2=2f(a)f(-a);$$
$$f(a)^2-2f(a)f(-a)+f(-a)^2=0;$$
$$(f(a)-f(-a))^2=0;$$
$$f(a)=f(-a).$$

Tātad funkcija f ir pāra funkcija.

Pieņemsim, ka kādai $a\in Z$ vērtībai $f(a)=0$. Tā kā pēc dotā $a+b+c=0$ jeb $c=-(a+b)$, tad doto vienādojumu varam pārrakstīt formā:

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(a+b)+2f(-(a+b))f(a);$$
$$f(b)^2-2f(b)f(a+b)+f(a+b)^2=0;$$

$$(f(b)-f(a+b))^2=0;$$
$$f(a+b)=f(b).$$
Tātad, ja kādai $a\,(a\neq 0)$ vērtībai $f(a)=0$, tad f ir periodiska funkcija ar periodu a.
Ievietojot $b=a, c=2a$ sākotnējā vienādībā, iegūstam
$$f(a)^2+f(a)^2+f(2a)^2=2f(a)^2+2f(a)f(2a)+2f(2a)f(a);$$
$$f(2a)^2-4f(a)f(2a)=0;$$
$$f(2a)(f(2a)-4f(a))=0;$$
$$f(2a)=0 \text{ vai } f(2a)=4f(a).$$
Izvēloties $a=1$, iegūstam $f(2)=0$ vai $f(2)=4f(1)$.
Ja $f(2)=0$, tad f ir periodiska funkcija ar periodu 2 un visām nepāra n vērtībām ir jābūt spēkā sakarībai $f(n)=f(1)$. Viegli pārbaudīt, ka visām $m\in Z$ funkcija
$f(x)=\begin{cases}0, \text{ ja } n\equiv 0 \pmod 2\\ m, \text{ ja } n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$ apmierina uzdevuma nosacījumus.
Ja $f(2)=4f(1)$, pie kam $f(1)\neq 0$, tad pieņemsim, ka visām $i\in\{0,1,2,..,n\}$ ($n>0$) ir spēkā sakarība $f(i)=i^2f(1)$, bet šī sakarība nav spēkā, ja $i=n+1$ un atradīsim iespējamās n vērtības. Šī sakarība ir spēkā, ja

- $i=0 \;\Rightarrow\; f(0)=0^2\cdot f(1)=0;$
- $i=1 \;\Rightarrow\; f(1)=1^2\cdot f(1)=f(1);$
- $i=2 \;\Rightarrow\; f(2)=2^2\cdot f(1)=4f(1).$

Ievietojot $a=1,\ b=n,\ c=-n-1$ sākotnējā vienādojumā, iegūstam
$$f(1)^2+f(n)^2+f(-n-1)^2=2f(1)f(n)+2f(n)f(-n-1)+2f(-n-1)f(1);$$
$$f(1)^2+n^4f(1)^2+f(n+1)^2=2n^2f(1)^2+2(n^2+1)f(n+1)f(1);$$
$$(f(n+1)-(n+1)^2f(1))\cdot(f(n+1)-(n-1)^2f(1))=0;$$
$$f(n+1)=(n+1)^2f(1) \text{ vai } f(n+1)=(n-1)^2f(1).$$
Pirmais variants $f(n+1)=(n+1)^2f(1)$ liecinātu, ka arī vērtībai $i=n+1$ minētā sakarība ir spēkā un tas neatbilst šobrīd meklētās funkcijas īpašībai.
Ja $f(n+1)=(n-1)^2f(1)$, tad, dotajā vienādojumā ievietojot $a=n+1$, $b=1-n$, $c=-2$, iegūstam
$$f(n+1)^2+f(1-n)^2+f(-2)^2=2f(n+1)f(1-n)+2f(1-n)f(-2)+2f(-2)f(n+1);$$
$$(n-1)^4f(1)^2+(1-n)^4f(1)^2+16f(1)^2=2(n-1)^4f(1)^2+2\cdot4\cdot2(n-1)^2f(1)^2;$$
$$2(n-1)^4f(1)^2+16f(1)^2=2\cdot4\cdot2(n-1)^2f(1)^2+2(n-1)^4f(1)^2;$$
$$2(n-1)^4+16=16(n-1)^2+2(n-1)^4;$$
$$(n-1)^2=1;$$
$$n=0 \text{ vai } n=2.$$
Tā kā mēs interesējamies tikai par pozitīvām n vērtībām, tad der tikai atrisinājums $n=2$, un tādējādi $f(3)=(2-1)^2f(1)=f(1)$.
Ievietojot dotajā vienādojumā $a=1$, $b=3$, $c=4$, iegūstam $f(4)=0$ vai $f(4)=4f(1)=f(2)$.
Ja $f(4)\neq 0$, tad $f(2)^2+f(2)^2+f(4)^2=2f(2)^2+4f(2)f(4)$, no kurienes $f(4)=4f(2)$. Tā kā iepriekš ir iegūta sakarība $f(4)=f(2)$, tad seko, ka $f(2)=0$, kas ir pretrunā ar iepriekš izdarīto pieņēmumu. Tātad $f(4)=0$ un funkcijas f

perioda garums ir 4. Tad $f(4k)=0, f(4k+1)=f(4k+3)=m, f(4k+2)=4m$. Viegli var pārbaudīt, ka šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

Vēl jāapskata gadījums, kad $f(n)=n^2 f(1)$ visiem $n \in N$ jeb $f(n)=mn^2$ patvaļīgai $m \in Z$ vērtībai. Arī šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

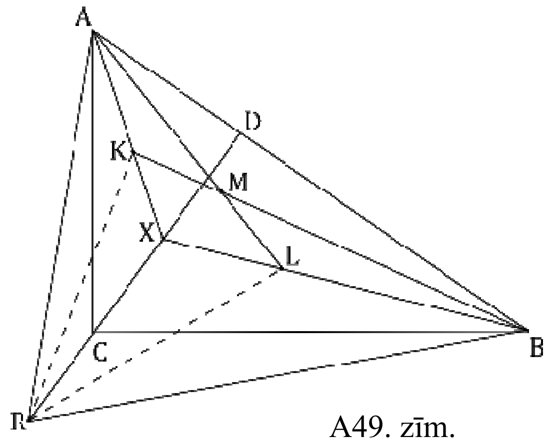
Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina šādas funkcijas:

$f(n)=\begin{cases} 0, \text{ ja } \ n \equiv 0 \pmod 2 \\ m, \text{ ja } \ n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$ patvaļīgai $m \in Z$ vērtībai;

$f(n)=\begin{cases} 0, \text{ ja } n \equiv 0 \pmod 4 \\ m, \text{ ja } n \equiv 1 \pmod 2 \\ 4m, \text{ ja } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$ patvaļīgai $m \in Z$ vērtībai;

$f(n)=mn^2$ patvaļīgai $m \in Z$ vērtībai.

A.IMO.5. *Dots taisnleņķa trijstūris ABC, $\angle BCA=90°$. Trijstūra augstums ir CD un X ir nogriežņa CD iekšējs punkts. Punkti K un L ir tādi attiecīgi nogriežņu AX un BX punkti, ka $BK=BC$ un $AL=AC$. Punkts M ir nogriežņu AL un BK krustpunkts. Pierādīt, ka $MK=ML$.*



A49. zīm.

No sakarībām taisnleņķa trijstūrī (Eiklīda teorēma) iegūstam, ka $AD \cdot AB = AC^2$. Tā kā pēc dotā $AC=AL$, tad $AD \cdot AB = AL^2$ jeb $\dfrac{AD}{AL}=\dfrac{AL}{AB}$. Tātad $\Delta DAL \sim \Delta BAL$ (pēc pazīmes „$m\ell m$”), jo $\angle DAL$ ir kopīgs abiem trijstūriem un to malas ir proporcionālas. Tāpēc $\angle ALD = \angle ABL$.

Uz augstuma CD pagarinājuma ārpus trijstūra ABC atliekam punktu R tā, lai $DX \cdot DR = BD \cdot AD$ (šāds punkts noteikti eksistē, jo $BD \cdot AD = CD^2$ un $DX < CD$).

Pārrakstot šo sakarību proporcijas veidā, iegūstam $\dfrac{DX}{BD}=\dfrac{AD}{DR}$. Tā kā trijstūri BDX un ARD abi ir taisnleņķa, tad tie savā starpā ir līdzīgi. Tāpēc $\angle ARD = \angle ABX = \angle ALD$.

Tātad punkti R, A, D, L pieder vienai riņķa līnijai, kuras diametrs ir RA, jo $\angle ADR = 90°$. Tātad $RL \perp LA$ un pēc Pitagora teorēmas $RL^2 = AR^2 - AL^2 = AR^2 - AC^2$.

Līdzīgi iegūstam, ka $RK \perp KB$ un $RK^2 = BR^2 - BK^2 = BR^2 - BC^2$.

Tā kā $RC \perp AB$, tad, izmantojot Pitagora teorēmu un pārveidojumus, iegūstam

$$AR^2 - AC^2 = AR^2 - (AD^2 + DC^2) = (AR^2 - AD^2) - DC^2 = RD^2 - DC^2 =$$
$$= (BR^2 - BD^2) - DC^2 = BR^2 - (BD^2 + DC^2) = BR^2 - BC^2.$$

Tā kā $AL = AC$ un $BK = BC$, tad $AR^2 - AL^2 = BR^2 - BK^2$ jeb $RL^2 = RK^2$.
Tātad esam ieguvuši, ka $RL = RK$. Līdz ar to $\Delta RKM = \Delta RLM$ (pēc pazīmes „*kh*"), jo $RL = RK$, $\angle RKM = \angle RLM = 90°$ un RM ir kopīga hipotenūza.
Tātad $MK = ML$ kā attiecīgie elementi vienādos trijstūros.

A.IMO.6. *Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem eksistē tādi nenegatīvi veseli skaitļi* $a_1, a_2, ..., a_n$, *ka* $\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + ... + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$.

Pareizinām vienādības labo pusi ar lielāko no saucējā esošajām trijnieka pakāpēm (apzīmēsim tās kāpinātāju ar M):

$$1 \cdot 3^{M-a_1} + 2 \cdot 3^{M-a_2} + ... + n \cdot 3^{M-a_n} = 3^M .$$

Ievērojot, ka $3^t \equiv 1^t \equiv 1 \pmod 2$, aplūkojam šīs izteiksmes vērtību pēc moduļa 2:

$$1 \cdot 3^{M-a_1} + 2 \cdot 3^{M-a_2} + ... + n \cdot 3^{M-a_n} \equiv 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = 3^M \equiv 1 \pmod 2 .$$

Lai izteiksmi $\frac{n(n+1)}{2}$, dalot ar 2, iegūtu atlikumu 1, tad $n = 4k+1$ vai $n = 4k+2$.
Pierādīsim, ka atrisinājums eksistē jebkurai nenegatīvai veselai k vērtībai.
Vispirms pierādīsim, ka, ja izdosies atrast atrisinājumu nepāra n vērtībai, tad atrisinājums būs arī vērtībai $n+1$.
Apskatīsim patvaļīgu nepāra skaitli $n = 2j - 1$ un izmantosim šādas sakarības:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{a_j}} = \frac{1}{2^{a_j+1}} + \frac{1}{2^{a_j+1}}; \\ &\frac{j}{3^{a_j}} = \frac{j}{3^{a_j+1}} + \frac{2j}{3^{a_j+1}} = \frac{j}{3^{a_j+1}} + \frac{n+1}{3^{a_j+1}}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Ar šo sakarību palīdzību izteiksmi, kurā ir nepāra skaits saskaitāmo, iespējams pārveidot par izteiksmi, kurā ir par vienu saskaitāmo vairāk.
Tas nozīmē, ka, atrodot atrisinājumu vērtībai $n = 4k+1$, atrisinājums būs arī vērtībai $n = 4k+2$, tātad nepieciešams pierādīt, ka atrisinājums eksistē visām $n = 4k+1$ ($k \geq 0$) vērtībām.
Pierādīsim, ka
a) no atrisinājuma $12m+1$ var iegūt atrisinājumu $12m+13$,
b) no atrisinājuma $12m+5$ var iegūt atrisinājumu $12m+17$,
c) no atrisinājuma $12m+9$ var iegūt atrisinājumu $12m+21$,
kur m – vesels nenegatīvs skaitlis.
a) Pieņemsim, ka ir izdevies atrast atrisinājumu, ja $n = 12m+1$, kur $m \geq 1$. Pārveidosim to par atrisinājumu vērtībai $n = 12m+13$, „pagarinot" gan vienādības kreisajā, gan labajā pusē esošās izteiksmes par 12 locekļiem.
Visiem pāra skaitļiem $2k$, kuriem $2k \in (12m+1, 12m+13]$, vajadzīgo skaitu locekļu var iegūt, izmantojot sakarības (*).
Nepāra locekļu izteikšanai izmantosim šādas sakarības:
Ja $k = 4m+2$, tad

$$\frac{1}{2^{a_k}} = \frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k+2}} + \frac{1}{2^{a_k+2}} + \frac{1}{2^{a_k+2}} + \frac{1}{2^{a_k+2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{a_k+2}} + \frac{1}{2^{a_k+3}} + \frac{1}{2^{a_k+3}} + \frac{1}{2^{a_k+2}} + \frac{1}{2^{a_k+2}};$$

$$\frac{4m+2}{3^{a_k}}=\frac{4m+2}{3^{a_k+1}}+\frac{8m+4}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+2}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+4}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+4}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+2}{3^{a_k+2}}+\frac{24m+12}{3^{a_k+3}}+$$
$$+\frac{24m+12}{3^{a_k+2}}=\frac{4m+2}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+3}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+9}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+5}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+7}{3^{a_k+2}}.$$
Ja $k=4m+4$, tad
$$\frac{1}{2^{a_k}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}};$$
$$\frac{4m+4}{3^{a_k}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{24m+24}{3^{a_k+2}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{12m+11}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+13}{3^{a_k+2}}.$$
Tātad esam ieguvuši visus nepieciešamos divpadsmit papildus locekļus.
b) Pieņemsim, ka ir izdevies atrast atrisinājumu, ja $n=12m+5$, kur $m\geq 0$. Pārveidosim to par atrisinājumu vērtībai $n=12m+17$, „pagarinot” gan vienādības kreisajā, gan labajā pusē esošās izteiksmes par 12 locekļiem.
Visiem pāra skaitļiem $2k$, kuriem $2k\in(12m+5,12m+17]$, trūkstošos locekļus var iegūt, izmantojot sakarības (*).
Nepāra locekļiem izmantosim sakarības:
Ja $k=4m+4$, tad
$$\frac{1}{2^{a_k}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=$$
$$=\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+4}}+\frac{1}{2^{a_k+4}}+\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}};$$
$$\frac{4m+4}{3^{a_k}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+3}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+3}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+2}}+$$
$$+\frac{8m+8}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+3}}+\frac{24m+24}{3^{a_k+4}}+\frac{24m+24}{3^{a_k+3}}+\frac{24m+24}{3^{a_k+2}}=$$
$$=\frac{4m+4}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+7}{3^{a_k+4}}+\frac{12m+17}{3^{a_k+4}}+\frac{12m+9}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+15}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+11}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+13}{3^{a_k+2}}.$$
Tātad esam ieguvuši visus nepieciešamos divpadsmit papildus locekļus.
c) Pieņemsim, ka ir izdevies atrast atrisinājumu, ja $n=12m+9$, kur $m\geq 0$. Pārveidosim to par atrisinājumu vērtībai $n=12m+21$, „pagarinot” gan vienādības kreisajā, gan labajā pusē esošās izteiksmes par 12 locekļiem.
Visiem pāra skaitļiem $2k$, kuriem $2k\in(12m+9,12m+21]$, trūkstošos locekļus var iegūt, izmantojot sakarības (*).
Nepāra locekļiem izmantosim sakarības:
Ja $k=4m+6$, tad
$$\frac{1}{2^{a_k}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+3}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}};$$
$$\frac{4m+6}{3^{a_k}}=\frac{4m+6}{3^{a_k+1}}+\frac{8m+12}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+6}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+12}{3^{a_k+2}}+\frac{8m+12}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+6}{3^{a_k+2}}+\frac{24m+36}{3^{a_k+3}}+$$
$$+\frac{24m+36}{3^{a_k+2}}=\frac{4m+6}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+15}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+21}{3^{a_k+3}}+\frac{12m+17}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+19}{3^{a_k+2}}.$$
Ja $k=4m+4$, tad
$$\frac{1}{2^{a_k}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+2}}+\frac{1}{2^{a_k+2}};$$
$$\frac{4m+4}{3^{a_k}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{8m+8}{3^{a_k+1}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{24m+24}{3^{a_k+2}}=\frac{4m+4}{3^{a_k+1}}+\frac{12m+11}{3^{a_k+2}}+\frac{12m+13}{3^{a_k+2}}.$$
Tātad esam ieguvuši visus nepieciešamos divpadsmit papildus locekļus.

Atliek parādīt, ka iespējams atrast izteiksmes sākotnējām k vērtībām:

- ja $k=1$, tad $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=1$;
- ja $k=5$, tad $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\frac{5}{27}=1$;
- ja $k=9$, tad
$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{3}{27}+\frac{4}{27}+\frac{5}{27}+\frac{6}{81}+\frac{7}{81}+\frac{8}{81}+\frac{9}{81}=1$;
- ja $k=13$, tad

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{81}+\frac{6}{81}+\frac{7}{243}+\frac{8}{81}+\frac{9}{81}+\frac{10}{243}+\frac{11}{81}+\frac{12}{243}+\frac{13}{243}=1.$$

Tātad sākotnējam vienādojumam ir atrisinājums visām n vērtībām, kuras var izteikt formā $n=4k+1$ vai $n=4k+2$, kur k – vesels nenegatīvs skaitlis.

A.AB. ATLASE KOMANDU OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2011”

A.AB. Algebra

A.AB.1. *Doti tādi skaitļi a un b, ka polinoma* $P(x)=x^3+ax^2+bx-8$ *visas nulles atbilst reālām x vērtībām. Pierādīt, ka* $a^2 \geq 2b+12$.

Apzīmējam polinoma saknes ar *p*, *q* un *r*. Tad

$$P(x)=(x-p)(x-q)(x-r)=x^3-(p+q+r)x^2+(pq+pr+qr)x-pqr=$$
$$=x^3+ax^2+bx-8.$$

Tātad $\begin{cases} p+q+r=-a \\ pq+pr+qr=b \\ pqr=8 \end{cases}$.

Kāpinot kvadrātā iegūtās sistēmas pirmo vienādojumu un izmantojot sistēmas otro vienādojumu, iegūstam

$$a^2=(p+q+r)^2=p^2+q^2+r^2+2(pq+pr+qr)=$$
$$=p^2+q^2+r^2+2b=3\cdot\frac{p^2+q^2+r^2}{3}+2b.$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam novērtējumu:

$$3\cdot\frac{p^2+q^2+r^2}{3}\geq 3\sqrt[3]{p^2q^2r^2}=3\sqrt[3]{8^2}=3\cdot 2^2=12.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a=3\cdot\frac{p^2+q^2+r^2}{3}+2b\geq 12+2b$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.2. *Vai eksistē tāds reāls skaitlis* α *tāds, ka* $\cos\alpha$ *ir iracionāls, bet* $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ *un* $\cos 5\alpha$ *visi ir racionāli?*

Izmantosim trigonometriskās sakarības:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad (*)$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \qquad (**)$$

Ja $\cos 2\alpha$ un $\cos 3\alpha$ ir racionāli, tad varam apzīmēt $\cos 2\alpha=\frac{p}{q}$ un $\cos 3\alpha=\frac{r}{s}$, kur p, q, r un s ir veseli skaitļi, pie kam $q\neq 0$ un $s\neq 0$.

Izmantojot $\cos 2\alpha$ un $\cos 3\alpha$, izteiksim $\cos\alpha$. No (*) izsakām $2\cos^2\alpha=\cos 2\alpha+1$ un, ievietojot vienādībā (**), iegūstam

$$\cos 3\alpha = 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha)-3\cos\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = 2\cos\alpha(\cos 2\alpha+1)-3\cos\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha+2-3);$$
$$\cos\alpha=\frac{\cos 3\alpha}{2\cos 2\alpha-1}=\frac{\frac{r}{s}}{2\frac{p}{q}-1}=\frac{rq}{(2p-q)s}.$$

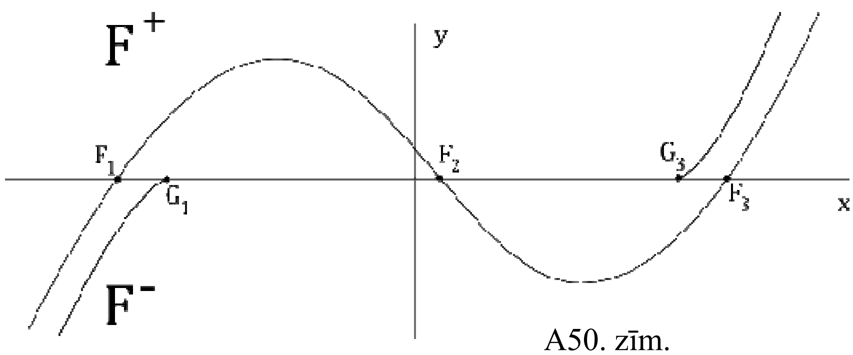
Ja $2p\neq q$, tad saucējā esošā vērtība nav 0 un, tātad arī $\cos\alpha$ ir racionāls (veselu skaitļu summa, starpība, reizinājums un dalījums ir racionāls skaitlis), kas ir pretrunā ar doto.

Apskatām gadījumu, kad $2p = q$. Tas nozīmē, ka $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ un $2\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ jeb $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$, kas, savukārt, nozīmē, ka $3\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z$ un $\cos 3\alpha = 0$, bet $5\alpha = \pm\frac{5\pi}{6} + 5\pi n, n \in Z$ un līdz ar to $\cos 5\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Šajā gadījumā $\cos 5\alpha$ ir iracionāls un atkal esam ieguvuši pretrunu ar doto.
Tātad uzdevuma nosacījumos minētā α vērtība neeksistē.

A.AB.3. *Doti divi polinomi $F(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ un $G(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ (abi ar koeficientu 1 pie x^3). Vienādojumiem $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ un $F(x) = G(x)$ tika uzrakstītas visas reālās saknes. Izrādījās, ka uzrakstīti 8 dažādi skaitļi. Pierādīt, ka vai nu mazākais, vai arī lielākais no uzrakstītajiem skaitļiem nav vienādojuma $F(x) = 0$ sakne.*

No algebras pamatteorēmas seko, ka n-tās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā n saknes. Apzīmēsim vienādojuma $F(x) = 0$ saknes ar F_1, F_2, F_3 $(F_1 < F_2 < F_3)$, vienādojuma $G(x) = 0$ saknes ar G_1, G_2, G_3 $(G_1 < G_2 < G_3)$, un vienādojuma $F(x) = G(x)$ jeb $F(x) - G(x) = (a_1 - b_1)x^2 + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3) = 0$ saknes ir H_1, H_2 $(H_1 < H_2)$. Ievērojam, ka gan $F(x)$, gan $G(x)$ vērtības, ja $x \to -\infty$, ir negatīvas, bet, ja $x \to +\infty$, ir pozitīvas. Aplūkosim funkcijas $F(x)$ grafiku (skat. A50. zīm.), kas visu koordinātu plakni sadala divās daļās (zem tā F^- un virs F^+):



A50. zīm.

Pieņemsim pretējo, t. i., ka F_1 ir mazākā, bet F_3 – lielākā no visām astoņām saknēm. Tā kā $G_1 > F_1$, tad mazām x vērtībām funkcijas $y = G(x)$ grafiks atrodas plaknes daļā F^-. Līdzīgi, no $G_3 < F_3$ seko, ka lielām x vērtībām funkcijas $y = G(x)$ grafiks atrodas plaknes daļā F^+.

Bet intervālā starp vērtībām G_1 un G_3 atrodas vienādojuma $F(x) = G(x)$ saknes H_1 un H_2 $(H_1 < H_2)$. Tas nozīmē, ka šajos punktos funkciju $y = F(x)$ un $y = G(x)$ grafiki krustojas. Bet tad, ja $x < H_1$, tad $G(x) < F(x)$ (jeb $G(x)$ atrodas F^-), ja $H_1 < x < H_2$, tad $G(x) > F(x)$ (jeb $G(x)$ atrodas F^+), ja $x > H_2$, tad $G(x) < F(x)$ (jeb $G(x)$ atrodas F^-). Bet tas nozīmē, ka $G(x)$ atrodas F^- arī pie $x > F_3$, kas ir pretrunā ar iepriekš izdarītajiem secinājumiem. Šo pretrunu izraisīja pieņēmums, ka no visām astoņām saknēm gan mazākā, gan lielākā ir vienādojuma $F(x) = 0$ sakne.

Piezīme. Lai gan uzdevumā nav prasīts, šos pašus spriedumus varētu atkārtot arī par funkciju $G(x)$, jo abas funkcijas $F(x)$ un $G(x)$ šī uzdevuma nozīmē ir pilnīgi simetriskas.

A.AB.4. *Zināms, ka a, b, c ir pozitīvi reāli skaitļi un* $1+a+b+c=2abc$. *Pierādīt, ka*

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a}\geq\frac{3}{2}.$$

Apzīmējam $x=\frac{1}{a}+1,\ \ y=\frac{1}{b}+1,\ \ z=\frac{1}{c}+1$. Tad

$$\frac{ab}{1+a+b}=\frac{ab(1+c)}{(1+a+b)(1+c)}=\frac{ab+abc}{1+a+b+c+ac+bc}=\frac{ab+abc}{2abc+ac+bc}=$$

$$=\frac{abc\left(\frac{1}{c}+1\right)}{abc\left(2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{1}{c}+1}{2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=\frac{z}{x+y}.$$

Līdzīgi $\frac{bc}{1+b+c}=\frac{x}{y+z},\ \frac{ca}{1+c+a}=\frac{y}{x+z}$ un sākotnējā nevienādība ir identiska nevienādībai

$$\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\geq\frac{3}{2}.$$

Pārveidojam iegūtās nevienādības kreiso pusi:

$$\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}-3=$$

$$=(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)-3=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3}\right):\left(\frac{3}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}}\right)-3.$$

Tā kā daļas skaitītājā ir skaitļu $x+y,\ y+z,\ z+x$ vidējais aritmētiskais, bet saucējā – vidējais harmoniskais, tad no tā, ka vidējais aritmētiskais vienmēr ir lielāks vai vienāds ar vidējo harmonisko, seko, ka daļas vērtība ir vismaz 1.
Tātad

$$\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3}\right):\left(\frac{3}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},$$

kas arī bija jāpierāda.

A.AB.5. *Atrast visas funkcijas* $f:R\rightarrow R$ *(funkcijas definētas reāliem skaitļiem un kuru vērtības ir reāli skaitļi), kuras apmierina funkcionālvienādojumu:*

$$f(f(x+y))=f(x^2-y^2)+4xyf(x+y).$$

Pārveidojam doto vienādojumu $f(f(x+y))=f((x-y)(x+y))+4xyf(x+y)$.

Apzīmējam $u=x+y$ un $v=x-y$.

Ievērojot, ka $u^2-v^2=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$, pārrakstām doto vienādojumu:

$$f(f(u)) = f(uv) + (u^2 - v^2)f(u). \quad (*)$$

Ja $u = 1$, tad $f(f(1)) = f(v) + (1 - v^2)f(1)$, ja arī $v = 1$, tad $f(f(1)) = f(1)$.

Izsakot, $f(v) = cv^2$, kur $c = f(1)$. Izmantojot atrastās sakarības:

$$c^3 = f(c) = f(f(1)) = f(1) = c.$$

Tātad derīgās c vērtības ir $\{-1, 0, 1\}$.

Pārbaudām, vai iegūtā funkcija $f(x) = cx^2$, $c = \{-1, 0, 1\}$ apmierina doto vienādojumu:

$$f(c(x+y)^2) = c(x^2 - y^2)^2 + 4xy \cdot c(x+y)^2;$$

$$c \cdot c^2(x+y)^4 = c(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 + 2xy + y^2));$$

$$c^3(x+y)^4 = c(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3);$$

$$c^3(x+y)^4 = c(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4);$$

$$c^3(x+y)^4 = c(x+y)^4.$$

Esam ieguvuši, ka $c^3 = c$, kas ir patiesa vienādība, ja $c = \{-1, 0, 1\}$.

Tātad meklētās funkcijas ir $f(x) = 0$, $f(x) = -x^2$ un $f(x) = x^2$.

A.AB. Kombinatorika

A.AB.6. *Uz taisnstūrveida galdiņa ar n rindām un $n+1$ kolonnu ir uzliktas vairākas figūras. Pierādīt, ka vienmēr var izvēlēties kādas kolonnas (pozitīvu skaitu) tā, lai katrā rindā būtu pāra skaits figūru. (Uz katra lauciņa var atrasties ne vairāk kā viena figūra.)*

Vispirms ievērosim, ka doto galdiņu varam uzskatīt par taisnstūra tabulu A ar n rindām un $n+1$ kolonnu, kuras katrā rūtiņā ir ierakstīts 1, ja uz attiecīgās galdiņa rūtiņas ir uzlikta figūra, bet 0 – ja figūriņas nav. Ar $A[k,r]$ apzīmēsim skaitli, kas ierakstīts *k*-tās kolonnas *r*-tajā rindā esošajā rūtiņā. Otrkārt, ievērosim, ka kolonnu un rindu secība tabulā nav būtiska – uzdevuma risinājums nemainās, ja tabulas A vietā aplūko tabulu, kuras divas kolonnas vai rindas samainītas vietām.

Apskatām gadījumu, kad $n = 1$. Tad tabulai A ir viena rinda un divas kolonas. Ja kādā no rūtiņām ir ierakstīta 0, tad izvēlamies šo kolonnu, bet, ja abās rūtiņās ir ierakstīti 1, tad izvēlamies abas kolonnas. Tādējādi, izvēlēto rūtiņu summa vienīgajā rindā ir vai nu 0 vai 2 un jebkuram rūtiņu aizpildījumam gadījumam $n = 1$ eksistē atrisinājums.

Izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Pieņemsim, ka atrisinājums (iespēja izvēlēties kolonnas norādītajā veidā) eksistē visām n vērtībām, kurām $n \ge n_0$.

Pierādīsim, ka atrisinājums eksistē arī gadījumam $n = n_0 + 1$.

Aplūkosim tabulu A ar n rindām un $n+1$ kolonnu. Ja tajā ir kāda kolonna, kurā visi ierakstītie skaitļi ir 0, tad izvēlamies to. Ja tabulā šādas kolonnas nav, tad pārkārtojam rindas un/vai kolonnas tā, ka tabulas apakšējā labā stūra rūtiņā ir 1, t. i., $A[n+1, n] = 1$.

Tagad veidosim jaunu tabulu B, kas arī sastāvēs tikai no 0 un 1:

$$B[k,r] = \begin{cases} A[k,r] + A[n+1,r] \pmod 2), \mathit{ja}\ k \le n\ \mathit{un}\ A[k,n] = 1 \\ A[k,r]\ \mathit{pretējā\ gadījumā} \end{cases}.$$

Tas nozīmē, ka pēdējās kolonnas rūtiņu vērtības pēc moduļa 2 tiek pieskaitītas visām tām kolonnām (izņemot pēdējo), kurās pēdējās rindas rūtiņā ierakstīts 1.

Tātad tabulā B pēdējā (*n*-tajā) rindā tikai pēdējās kolonnas ($n+1$-ās) rūtiņā ir ierakstīts 1.

Aplūkojot tabulas B pirmās $n-1$ rindas un n kolonnas, šīs rūtiņas arī veido tabulu, kas atbilst uzdevuma noteikumiem. Pēc induktīvā pieņēmuma, tai eksistē atrisinājums un ir iespējams izvēlēties kolonnas $1 \le k_1, k_2, ..., k_P \le n$ tā, ka šajās kolonnās esošās rūtiņās pa rindām katrā ir ierakstīts pāra skaits vieninieku.

Tagad salīdzināsim kolonnu $k_1, k_2, ..., k_P$ rūtiņu saturu sākotnējā tabulā A un pārveidotajā tabulā B. Ja kolonnu saturs neatšķiras, tad esam atraduši nepieciešamo kolonnu komplektu (jo pēdējā A rindā visās rūtiņās būs ierakstītas nulles un tā pretrunu neradīs).

Ja kāda A un B kolonna savā starpā atšķiras, tad ievērosim, ka atšķirība starp A un B kolonnām var veidoties tikai tad, ja attiecīgai A kolonnai tika pieskaitīts pēdējās kolonnas saturs. Ja tabulas B rindā r rūtiņu summa bija b_r, tad atbilstošo tabulas A rindas r rūtiņu summu var iegūt kā $a_r = b_r - P \cdot A[n+1, r]$.

Ja $P = 2m$, tad $k_1, k_2, ..., k_P$ ir atrisinājums arī sākotnējai tabulai A (jo atšķirība starp rūtiņu summām katrā A un B rindā ir pāru skaitlis).

Ja $P = 2m-1$, tad atrastajām kolonnām paņemot klāt A pēdējo ($n+1$-o) kolonnu, iegūsim, ka tabulas A rindas r rūtiņu summa ir aprēķināma kā $a_r = b_r - P \cdot A[n+1, r] + A[n+1, r] = b_r - 2(m-1)A[n+1, r]$ un atrisinājumu tabulai A veido kolonnas $k_1, k_2, ..., k_P, n+1$.

Tātad esam pierādījuši, ka jebkurai n vērtībai iepriekš aprakstītā veida tabulām eksistē atrisinājums.

A.AB.7. *Skaitļi no* 1 *līdz* 2010 *sadalīti trīs nešķeļošās kopās – katrā kopā ir tieši* 670 *elementi. Pierādīt, ka no katras kopas var izvēlēties pa vienam skaitlim tā, lai viens no šiem skaitļiem būtu divu pārējo summa.*

Pieņemsim, ka šādus skaitļus izvēlēties nav iespējams. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $1, 2, ..., n-1 \in A$, bet $n \in B$. Pieņemsim, ka $x \in C$ un $x-1 \notin A$.

Ja $x-1 \in B$, tad trijnieks $(1, x-1, x)$ ir meklētais, un skaitļus var izvēlēties atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

Apskatām gadījumu, kad $x-1 \in C$. Tad 1) ja $x-n \in A$ var iegūt trijnieku $(x-n, n, x)$, 2) ja $x-n \in B$ – trijnieku $(n-1,\ x-n,\ x-1)$. Tātad, lai nevarētu izvēlēties uzdevumā prasītos trīs skaitļus, jābūt, ka $x-n \in C$.

No $x-n-1 \in A$ var iegūt trijnieku $(x-n-1,\ n,\ x-1)$, bet no $x-n-1 \in B$ – trijnieku $(1,\ x-n-1,\ x-n)$. Tādējādi, varam secināt, ka $x-n-1 \in C$.

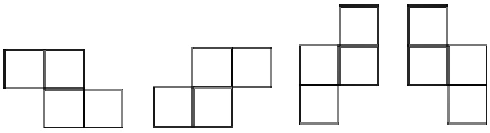
Līdzīgi apskatot $x-kn$ un $x-kn-1$, kur k ir jebkurš naturāls skaitlis, iegūstam, ka $x-kn \in C$ un $x-kn-1 \in C$, bet tas nav iespējams, jo pirmie pēc kārtas esošie naturālie skaitļi $1, 2, ..., n-1$ pieder A.

Secinām, ka sākotnējais pieņēmums, ka $x-1 \notin A$, bija kļūdains, tātad $x-1 \in A$.

Tad visiem $x \in C$ atbilstošais $x-1 \in A$. Bet kopās A un C ir vienāds elementu skaits. Tas nozīmē, ka spēkā ir arī spriedums pretējā virzienā: ja $x \in A$, tad $x+1 \in C$. Bet tad no $1 \in A$, sekotu $2 \in C$, kas nav iespējams, jo $2 \in A$, ja $n > 2$, un $2 \in B$, ja $n = 2$.

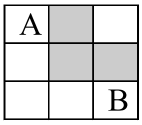
Esam ieguvuši pretrunu, kas nozīmē, ka sākotnējais pieņēmums ir bijis aplams un uzdevumā prasītos trīs skaitļus vienmēr var izvēlēties.

A.AB.8. *Tabula ar izmēriem* 8×8 *rūtiņas aizpildīta ar skaitļiem no* 1 *līdz* 64 *tā, ka jebkuru* 4 *skaitļu, kurus var pārklāt ar kādu figūru (skat.* 12. *zīm.), summa dalās ar vienu un to pašu skaitli N. Vai tas iespējams, ja* ***a)*** $N = 3$*;* ***b)*** $N = 4$*;* ***c)*** $N = 5$*?*



12. zīm.

Skaitļiem, kas ierakstīti rūtiņās A un B (skat. A51. zīm.), jādod vienāds atlikums, dalot ar N, jo trīs pelēkās rūtiņas gan kopā ar rūtiņu A, gan rūtiņu B, veido derīgu četru rūtiņu figūru.



A51. zīm.

Šādā veidā izpētot visas konfigurācijas, iegūsim visas rūtiņas, kurās ierakstīto skaitļu atlikumiem jābūt vienādiem. Aizpildām tabulu (skat. A52. zīm.), rūtiņās, vienādu burtu ierakstām tad, ja tajās ierakstīto skaitļu atlikumi, dalot tos ar *N*, ir vienādi:

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*	*e*	*f*	*g*	*h*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
g	*h*	*e*	*f*	*g*	*h*	*e*	*f*
a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*	*e*	*f*	*g*	*h*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
g	*h*	*e*	*f*	*g*	*h*	*e*	*f*

A52. zīm.

Redzam, ka 8×8 rūtiņu tabulā ir astoņu rūtiņu grupas katrā pa astoņām rūtiņām, kurās ierakstītie skaitļi dod vienu un to pašu atlikumu, dalot ar *N*.

Ja $N=3$, tad skaitļi no 1 līdz 64 veido šādus atlikumus: 22 skaitļiem atlikums ir 1, 21 skaitlim – atlikums 0, 21 skaitlim – atlikums 2. Šos skaitļus nevar sadalīt grupās pa 8 tā, lai katras grupas skaitļiem būtu vienāds atlikums, dalot ar 3.

Ja $N=5$, tad skaitļi no 1 līdz 64 veidos šādus atlikumus: 12 skaitļi būs ar atlikumu 0, bet pa 13 skaitļiem būs ar atlikumu 1, 2, 3 vai 4. Šos skaitļus nevar sadalīt grupās pa 8 tā, lai katras grupas skaitļiem būtu vienāds atlikums, dalot ar 5.

Ja $N=4$, tad katrs no atlikumiem 0, 1, 2, 3 ir tieši 16 skaitļiem un tos var sadalīt 8 grupās, lai izpildītos A52. zīmējuma nosacījumi. Tabulas (skat. A53. zīm.) katrā rūtiņā norādīts rūtiņā ierakstītā skaitļa atlikums, dalot ar 4. Piemēram, skaitļus var izkārtot kā parādīts A54. zīm.

1	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*
0	*3*	*2*	*1*	*0*	*3*	*2*	*1*
3	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*
2	*1*	*0*	*3*	*2*	*1*	*0*	*3*
1	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*
0	*3*	*2*	*1*	*0*	*3*	*2*	*1*
3	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*
2	*1*	*0*	*3*	*2*	*1*	*0*	*3*

A53. zīm.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

A54. zīm.

A.AB.9. *Uz galda atrodas* 11 *kartiņas, uz kurām uzrakstīti skaitļi no* 0 *līdz* 10. *Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Spēli sāk pirmais spēlētājs. Katrs spēlētājs savā gājienā paņem vienu no atlikušajām kartiņām. Pirmā spēlētāja mērķis ir izveidot augošu aritmētisko progresiju vismaz no* 4 *kartiņām. Otrā spēlētāja mērķis ir to nepieļaut (tad viņš uzvar). Kuram no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija*?

Pierādīsim, ka uzvaroša stratēģija ir otrajam spēlētājam. Apskatām visas iespējamās aritmētiskās progresijas, kuras var izveidot no dotajām kartiņām:

$(0,1,2,3)$	$(5,6,7,8)$	$(4,6,8,10)$
$(1,2,3,4)$	$(6,7,8,9)$	$(1,3,5,7)$
$(2,3,4,5)$	$(7,8,9,10)$	$(3,5,7,9)$
$(3,4,5,6)$	$(0,2,4,6)$	$(0,3,6,9)$
$(4,5,6,7)$	$(2,4,6,8)$	$(1,4,7,10)$

Vispirms ievērosim, ka ir tikai divas aritmētiskās progresijas, kuras neizmanto skaitļus 4 vai 7; tās ir (0, 1, 2, 3) un (0, 3, 6, 9). Ja otrajam spēlētājam pēc diviem gājieniem izdotos savā rīcībā iegūt gan 4, gan 7, tad ar atlikušajiem diviem gājieniem pietiktu, lai nepieļautu izveidot kādu no šīm divām progresijām. Tā kā šīm divām progresijām ir tikai divi kopīgi skaitļi 0 un 3, tad pēc trim gājieniem pirmais spēlētājs savā rīcībā var būt ieguvis ne vairāk kā trīs skaitļus no vienas progresijas. Otrajam spēlētājam atliek paņemt ceturto šīs progresijas skaitli un ceturtajā gājienā paņemt kādu atlikušās progresijas skaitli.

Simetrijas dēļ skaitļu pāris $10-6=4$ un $10-3=7$ ir tikpat nozīmīgs, t. i., tā iegūšana savā rīcībā garantē otrā spēlētāja uzvaru.

Pierādīsim, ka šādā pat nozīmē svarīgs ir arī pāris $\{4,9\}$. Ir tikai trīs progresijas, kurās netiek izmantots neviens no šiem skaitļiem: $(0,1,2,3)$, $(5,6,7,8)$ un $(1,3,5,7)$. Pirmajām divām nav kopīgu elementu, bet abām ir pa diviem kopīgiem elementiem ar $(1,3,5,7)$.

Ja otrajam spēlētājam savā rīcībā izdotos iegūt gan 4, gan 9, tad varam uzskatīt, ka pirmais spēlētājs visus trīs gājienus būs veltījis, lai izveidotu kādu no trim tikko aplūkotajām progresijām. Varam pieņemt, ka ne vairāk kā viens no pirmajiem trim pirmā spēlētāja izvēlētajiem skaitļiem ir no progresijas $(0,1,2,3)$.

Ja no $(0,1,2,3)$ nav izvēlēts neviens skaitlis un visi trīs skaitļi ir izvēlēti no $(5,6,7,8)$, tad otrajam spēlētājam vispirms jāizvēlas ceturtais skaitlis no $(5,6,7,8)$ un pēc tam jāizvēlas viens no skaitļiem 1 vai 3 (vismaz viens no tiem būs palicis brīvs, jo ceturtajā gājienā pirmais spēlētājs varēja izvēlēties tikai vienu no tiem).

Ja no $(0,1,2,3)$ pirmais spēlētājs pirmo trīs gājienu laikā ir izvēlējis vienu skaitli, tad otrais spēlētājs izvēlas skaitli no $(1,3,5,7)$, kas izjauc divas progresijas un ceturtajā gājienā var izvēlēties pēdējo skaitli no vēl atlikušās progresijas.

Simetrijas dēļ arī skaitļu pāris $\{10-4=6,\ 10-9=1\}$ ir tikpat nozīmīgs.

Tātad ir četri nozīmīgi skaitļu pāri: $\{4, 7\},\{4, 9\},\{1, 6\},\{3, 6\}$. Viegli pārliecināties, ka otrais spēlētājs savā rīcībā varēs iegūt vismaz viena nozīmīgā skaitļu pāra abus skaitļus: ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā izvēlas 4, tad otrais spēlētājs izvēlas 6 un pēc otrā gājiena būs savā rīcībā ieguvis vai nu $\{1, 6\}$, vai $\{3, 6\}$. Savukārt, ja pirmais spēlētājs pirmajā gājienā izvēlas jebkuru citu, no 4 atšķirīgu skaitli, tad otrais spēlētājs pirmajā gājienā izvēlas 4 un pēc otrā gājiena savā rīcībā var iegūt vai nu skaitļu pāri $\{4, 7\}$, vai $\{4, 9\}$. Tātad, turpinot spēli, otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt, t. i., neļaut pirmajam spēlētājam izveidot aritmētisko progresiju.

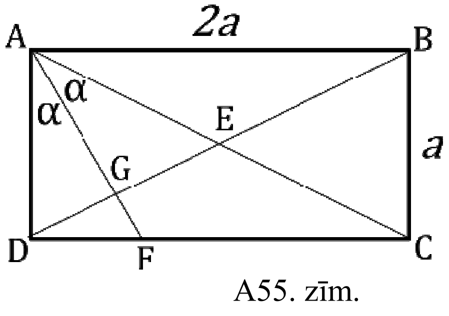
A.AB.10. *Anna un Toms piedalījās vakariņās kopā ar vēl četriem draugu pāriem. Sasveicinoties daži no cilvēkiem paspieda viens otram rokas. Neviens nepaspieda roku savam draugam un nepaspieda roku pats sev. Kad Toms vēlāk apjautājās, cik daudziem katrs ir paspiedis roku, viņš ieguva* 9 *atšķirīgas atbildes. Ar cik cilvēkiem sarokojās Anna?*

Neviens nesarokojās pats ar sevi un savu draugu, tātad lielākais cilvēku skaits, ar kuru varēja sarokoties viens cilvēks, bija 8 (visu citu pāru pārstāvji). Tā kā Toms saņēma 9 atšķirīgas atbildes, tad katrs sarokošanās reižu skaits no 0 līdz 8 bija sastopams tieši vienu reizi. Anna nevar būt sarokojusies 8 reizes, jo tad viņa būtu sarokojusies ar visiem, izņemot Tomu un, nebūtu ciemiņa, kurš nav sarokojies ne ar vienu jeb sarokojies 0 reizes. Tātad 8 reizes ir sarokojies kāds no ciemiņiem (apzīmēsim šo ciemiņu ar A). Vienīgais, kurš ar šo draugu nav sarokojies, ir šī ciemiņa draugs Ad. Tad Ad ir vienīgais, kurš nav sarokojies ne ar vienu citu. Tas nozīmē, ka visi pārējie vakariņu dalībnieki ir pa reizei sasveicinājušies un starp pārējiem viesiem (izņemot A un Ad) un Annu ir ciemiņi, kas ar citiem sasveicinājušies no 1 līdz 7 reizēm. Ja tagad no aplūkošanas izslēgsim tās sarokošanās, kas notika ar draugu pāri A un Ad, par kuru sarokošanās skaitu jau zinām, varam uzskatīt, ka uz vakariņām ir ieradies par vienu draugu pāri mazāk un savstarpējās sarokošanās jābūt pārstāvētiem visiem skaitļiem no 0 līdz 6. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūsim, ka vienam no pāriem tā pārstāvjiem „jauno sarokošanos skaits" būs 6 un 0 (kopējais sarokošanos skaits – 7 un 1). Izslēdzot arī šo pāri no turpmākas aplūkošanas, atlikušajiem diviem pāriem un Annai ar Tomu savā starpā „jāsadala" 0 līdz 4 sarokošanās. Priekšpēdējais pāris ar pēdējo pāri un Annu un Tomu būs sarokojies attiecīgi 4 un 0 reizes (kopējais sarokošanos skaits – 6 un 2). Pēdējais pāris ar Annu un Tomu būs sarokojies attiecīgi 2 un 0 reizes (kopējais sarokošanos skaits – 5 un 3). Tātad Anna sarokojās pa vienai reizei ar katra pāra pārstāvi, t. i., Anna paspieda roku 4 cilvēkiem.

A.AB. Ģeometrija

A.AB.11. *Taisnstūra ABCD diagonāles krustojas punktā E, zināms, ka* $AB = 2BC$. *Leņķa CAD bisektrise krusto CD punktā F, bet diagonāli BD – punktā G. Aprēķināt FC garumu, ja* $EG = 25$.

Apzīmējam taisnstūra malu garumus $AD = BC = a$ un $AB = CD = 2a$ (skat. A55. zīm.).



A55. zīm.

Izmantojot Pitagora teorēmu, aprēķinām diagonāles garumu:

$$BD = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}\,.$$

Aplūkojam trijstūri ADE un izmantojam bisektrises īpašību:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DG}{GE} \Rightarrow \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}BD - EG}{25} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} - 25}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 50 = \frac{5}{2}a - 25\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a = 20 + 10\sqrt{5} = 10(2+\sqrt{5}).$$

Izmantojam bisektrišu īpašību trijstūrim ADC:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CF}\ \Rightarrow\ \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a - CF}{CF};$$

$$a \cdot CF = 2\sqrt{5}a^2 - a\sqrt{5} \cdot CF;$$

$$a \cdot CF(1+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}a^2;$$

$$CF = \frac{2\sqrt{5}a}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}\cdot 10(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}+1} = \frac{20(2\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{20(10 - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5)}{4} = 5(5+3\sqrt{5}).$$

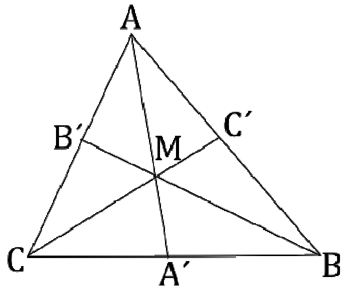
A.AB.12. *Vai eksistē trijstūris, kuram leņķis starp katrām divām tā mediānām ir* $120°$*, un kurš nav vienādmalu?*

Pieņemsim, ka eksistē trijstūris ABC, kas nav vienādmalu un kam izpildās uzdevumā dotā īpašība. Pieņemsim, ka AA' ir šī trijstūra īsākā mediāna. Ar M apzīmēsim mediānu krustpunktu.

No sinusu teorēmas trijstūrī $BA'M$ (skat. A56. zīm.) un mediānu īpašības ($AM : MA' = 2:1$ jeb $AM = 2MA'$) iegūstam:

$$\frac{\sin\angle MBA'}{\sin\angle MA'B} = \frac{MA'}{MB} = \frac{MA}{2MB} \le \frac{MB}{2MB} = \frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\angle MBA' \le \frac{1}{2}\sin\angle MA'B \le \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$



A56. zīm.

Tātad $\angle MBA' = \angle MBC \le 30°$.

Tādējādi $\angle MBC \le 30°$, pie kam vienādība tiek sasniegta tikai tad, ja $\sin\angle MA'B = 1$ jeb $\angle MA'B = 90°$.

Līdzīgi pierāda, ka $\angle MCB \le 30°$.

Tā kā trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad $\angle MBC + \angle MCB + \angle BMC = 180°$.

Izmantojot, ka pēc dotā $\angle BMC = 120°$, iegūstam, ka $\angle MBC + \angle MCB = 60°$.

Pēdējā vienādība ir iespējama tikai tad, ja $\angle MBC = \angle MCB = 30°$.

Tā kā malas BC pieleņķi ir vienādi, tad ΔMBC ir vienādsānu. No sakarībām vienādsānu trijstūrī seko, ka MA' ir gan mediāna, gan arī augstums, t. i., $MA' \perp BC$.

Īsākā mediāna AA' ir perpendikulāra pret pamatu BC jeb $A'A$ ir vidusperpendikuls. No tā seko, ka trijstūris ABC ir vienādsānu. Izmantojot trigonometrisko sakarību $\Delta MA'B$ un $\Delta AA'B$, iegūstam

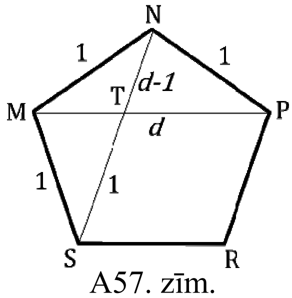
$$\mathrm{tg}MAB' = \frac{MA'}{A'B}\ \Rightarrow\ MA' = A'B\ \mathrm{tg}30° = A'B\cdot\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\mathrm{tg}ABA' = \frac{AA'}{A'B} = \frac{3\cdot MA'}{A'B} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}A'B}{A'B} = \sqrt{3}.$$

Tā kā trijstūrī visi leņķi ir mazāki nekā $180°$, tad $\angle ABC = \angle ACB = 60°$ un trijstūris ABC ir vienādmalu. Tātad pieņēmums, ka ΔABC nav vienādmalu, ir aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka trijstūris, kuram izpildās uzdevumā dotā sakarība, vienmēr ir vienādmalu.

A.AB.13. *Dots regulārs dodekaedrs ar malas garumu* 1. *Pierādīt, ka jebkura ceļa garums pa tā virsmu no vienas virsotnes uz tai diametrāli pretējo virsotni ir vismaz* 4. *(Regulārs dodekaedrs ir telpiska figūra, kurai ir* 12 *vienādas skaldnes, kas ir regulāri piecstūri.)*

Regulāra piecstūra visas diagonāles ir vienāda garuma – apzīmēsim šo garumu ar d (skat. A57. zīm.).



A57. zīm.

Visi regulāra piecstūra iekšējie leņķi ir vienādi un to vērtība ir $\frac{180°(5-2)}{5} = 108°$.

Apzīmēsim $\angle NMP = \alpha = 36°$ un $\angle MNP = 3\alpha = 108°$. Trijstūri MNT un MNP abi ir vienādsānu ar leņķi α pie pamata. Tātad šie trijstūri ir līdzīgi un to atbilstošās malas ir proporcionālas:

$$\frac{d-1}{1} = \frac{1}{d} \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

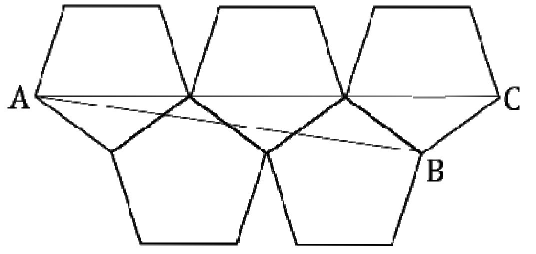
(kvadrātvienādojuma otra sakne $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ir negatīva un tāpēc neder).

Izmantojot kosinusu teorēmu ΔMNP, aprēķinām $\cos\alpha$ un $\cos 3\alpha$:

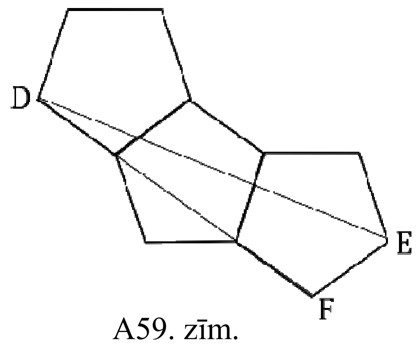
$$1^2 = 1^2 + d^2 - 2d\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{d}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4};$$

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 3\alpha \Rightarrow \cos 3\alpha = 1 - \frac{d^2}{2} \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Lai noteiktu attālumu līdz diametrāli pretējai virsotnei, jāapskata divi iespējamie gadījumi (skat. zīm., kurā doti dodekaedra izklājumi) un jāaprēķina attālumi AB un DE:



A58. zīm.



A59. zīm.

No kosinusu teorēmas trijstūrī ABC:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos ACB\,;$$

$$AB^2 = (3d)^2 + 1^2 - 6d\cos\theta = 6d^2 + 1 = 6\frac{6+2\sqrt{5}}{4} + 1 = 10 + 3\sqrt{5} > 10 + 6 = 16\,;$$

Tā kā $AB^2 > 16$, tad AB garums ir lielāks nekā 4.
Ievērojam, ka $DF = 2 + d$, un izmantojam kosinusu teorēmu ΔDEF:

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2 \cdot DF \cdot EF \cdot \cos DFE\,;$$

$$DE^2 = (2+d)^2 + 1^2 - 2(2+d)\cos 3\alpha =$$

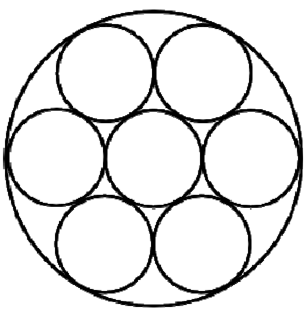
$$= \left(2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \left(2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) =$$

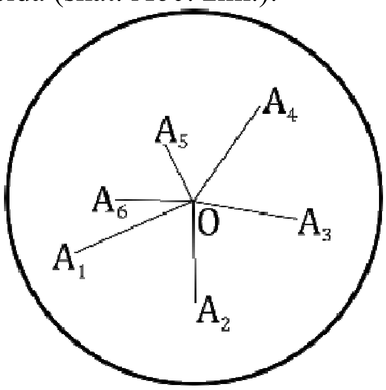
$$= \frac{5}{4}(1+\sqrt{5})^2 + 1 + \sqrt{5} = \frac{17+7\sqrt{5}}{2} = \frac{17+\sqrt{245}}{2} > \frac{17+\sqrt{225}}{2} = \frac{17+15}{2} = 16\,.$$

Tātad arī DE garums ir lielāks nekā 4 un prasītais pierādīts.

A.AB.14. *Dotajā riņķa līnijā iespējams ievilkt sešas riņķa līnijas ar rādiusu r tā, lai tās nepārklātos. Pierādīt, ka tajā var ievilkt septiņas riņķa līnijas ar rādiusu r tā, lai tās nepārklātos.*

Pierādīsim, ka lielās riņķa līnijas rādiuss ir vismaz $3r$. Ja tas izdosies, tad septiņas riņķa līnijas tajā varēs ievilkt klasiskā veidā (skat. A60. zīm.):


A60. zīm.

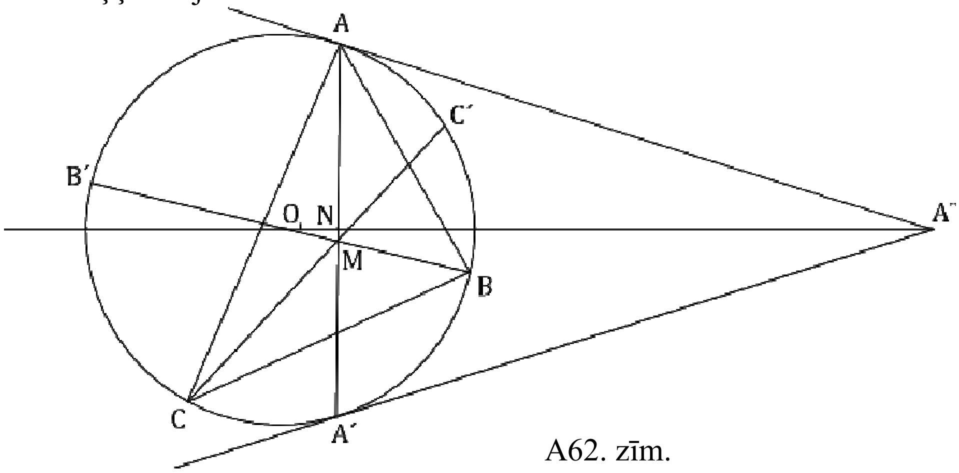


A61. zīm.

Pieņemam pretējo, ka lielās riņķa līnijas rādiuss ir mazāks nekā $3r$. Apzīmējam lielās riņķa līnijas centru ar O, bet mazo riņķa līniju centrus attiecīgi ar $A_1, A_2, ..., A_6$. Neviens no punktiem $A_1, A_2, ..., A_6$ nevar sakrist ar O, jo tad vairāk nevienu riņķa līniju lielajā riņķa līnijā nevarētu ievilkt.
Visiem attālumiem $OA_1, OA_2, ..., OA_6$ (skat. A61. zīm.) jābūt mazākiem nekā $2r$, jo visu mazo riņķa līniju centriem jāatrodas vismaz attālumā r no lielās riņķa līnijas (pretējā gadījumā mazā riņķa līnija neatradīsies lielās riņķa līnijas iekšpusē). Vismaz viens no leņķiem $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, ..., \angle A_6OA_1$ nepārsniedz 60°, jo pilns leņķis ir 360° liels. Pieņemsim, ka šis leņķis ir $\angle A_1OA_2$. Tas nozīmē, ka trijstūrī A_1OA_2 mala A_1A_2 nav garākā no malām, jo neatrodas pret lielāko no leņķiem. Tātad $A_1A_2 \le \max(OA_1, OA_2) < 2r$, kas nozīmē, ka mazās riņķa līnijas ar centriem punktos A_1 un A_2 krustojas. Iegūta pretruna – tātad lielās riņķa līnijas rādiuss ir vismaz $3r$ un tajā var ievilkt septiņas riņķa līnijas ar rādiusu r kā aprakstīts iepriekš.

A.AB.15. *Dots dažādmalu šaurleņķu trijstūris ABC. No punkta A novilkta mediāna, kas krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā A'. Pieskares, kuras novilktas punktos A un A', krustojas punktā A''. Līdzīgi definē B'' un C''. Pierādīt, ka A'', B'' un C'' atrodas uz vienas taisnes.*

Ar M apzīmēsim mediānu krustpunktu, bet ar O – trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centru (skat. A62. zīm.). Tā kā ΔABC nav vienādmalu, tad punkti M un O nesakrīt. Parādīsim, ka punkti A'', B'', C'' atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un riņķa līnijas ar diametru OM radikālās ass.



A62. zīm.

Ar N apzīmēsim $A''O$ un AA' krustpunktu. Tā kā $A''O$ ir pieskaru AA'' un $A'A''$ simetrijas ass, tad $A''O \perp AA'$ jeb $\angle ONM = 90°$. Tāpēc punkts N atrodas uz riņķa līnijas ar diametru OM. Tā kā rādiuss, kas vilkts pret pieskaršanās punktu, ir perpendikulārs pieskarei šajā punktā, tad OAA'' ir taisnleņķa trijstūris ($OA \perp AA''$ un $\angle OAA'' = 90°$) un AN ir šī trijstūra augstums pret OA''. No taisnleņķa trijstūra īpašībām katetes kvadrāts ir vienāds ar šīs katetes projekciju uz hipotenūzas, kas pareizināta ar hipotenūzas garumu, tāpēc $AA''^2 = A''N \cdot A''O$. Vienādības kreisajā pusē ir punkta A'' pakāpe attiecībā pret ABC apvilkto riņķa līniju, bet labajā – A'' pakāpe attiecībā pret riņķa līniju, kuras diametrs ir OM. Tas nozīmē, ka punkts A'' atrodas uz šo riņķa līniju radikālās ass (skat. Teoriju).
Analogi pierāda, ka punkti B'' un C'' atrodas uz riņķa līnijas radikālās ass. Tā kā visi punkti atrodas uz radikālās ass, tad esam pierādījuši, ka A'', B'' un C'' atrodas uz vienas taisnes.

A.AB. Skaitļu teorija

A.AB.16. *Vai eksistē 8 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kurus var sadalīt divās kopās tā, lai tām abām būtu vienāds visu kopas elementu reizinājums?*

Pierādīsim, ka šādi skaitļi neeksistē. Pieņemsim pretējo, ka prasītos astoņus skaitļus ir iespējams atrast un n ir mazākais no tiem. Aplūkojam tādus pirmskaitļus p, ar ko dalās kāds no skaitļiem $n+i$, kur $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ja visus skaitļus var sadalīt divās kopās ar vienādām skaitļu reizinājuma vērtībām, tad katrā no šīm kopām ir skaitlis, kas dalās ar p. Tas nozīmē, ka eksistē tāds indekss $j \neq i, 0 \leq j \leq 7$, ka skaitlis $n+j$ dalās ar p. Tātad arī skaitļu starpība $(n+i)-(n+j) = i-j$ dalās ar p. Ievērosim, ja $|i-j| \leq 6$, tad $p \leq 5$.

Starp skaitļiem $\{n+1, n+2, ..., n+6\}$ ir tieši trīs nepāra skaitļi. Precīzāk, tie ir trīs pēc kārtas esoši nepāra skaitļi, kas lielāki nekā 1, tāpēc tieši viens no tiem dalās ar 3 un ne vairāk kā viens – ar 5. Šī iemesla dēļ vismaz vienam no nepāra skaitļiem ir vēl kāds dalītājs – nepāra pirmskaitlis, kas atšķirīgs no 3 un 5. No otras puses, iepriekš tika pierādīts, ka vienīgie derīgie nepāra pirmskaitļi ir 3 un 5. Esam ieguvuši pretrunu, tātad astoņus skaitļus ar iepriekš aprakstīto īpašību atrast nav iespējams.

A.AB.17. *Cik veidos $\frac{2011}{2010}$ var izteikt kā divu daļu reizinājumu, kuras katra ir formā $\frac{n+1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis? (Skaitlis n katrai daļai var atšķirties, un reizinātāju secība nav svarīga.)*

Uzskatīsim, ka divas meklētās daļas ir $\frac{p+1}{p}$ un $\frac{q+1}{q}$, kur p, q ir naturāli skaitļi un $p \geq q$. Tad $\frac{(p+1)(q+1)}{pq} = \frac{2011}{2010}$. (*)

Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, tad nav iespējams, ka daļas skaitītāja skaitli veido divu skaitļu, kas lielāki nekā 1, reizinājums. Ja $n > 1$, tad skaitļi n un $n+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad $\frac{n+1}{n}$ ir nesaīsināma daļa. Vienīgā iespēja, ka daļas $\frac{p+1}{q}$ un $\frac{q+1}{p}$ saīsinās tā, ka vienas daļas skaitītājā paliek skaitlis 2011, bet otras – 1. Tā kā $\frac{1}{n} \leq 1$, tad daļa, kuras skaitītājā ir 2011, ir lielākā no daļām, jo abu daļu reizinājums ir $\frac{2011}{2010} > 1$. Pēc pieņēmuma $p \geq q$, tad $\frac{p+1}{q} > \frac{p+1}{p} > \frac{q+1}{p}$. Tad saīsinot $\frac{p+1}{q}$ iegūstam daļu, kuras skaitītājā ir 2011, bet daļas $\frac{q+1}{p}$ skaitītājā pēc saīsināšanas būs 1. Tāpēc skaitlim p ir jādalās ar $q+1$ bez atlikuma jeb $p = (q+1)k$. Sakarību (*) varam pārveidot šādi:

$$\frac{((q+1)k+1)(q+1)}{(q+1)kq} = \frac{(qk+k+1)}{kq} = \frac{2011}{2010};$$

$$2010qk + 2010k + 2010 = 2011kq;$$

$$kq = 2010(k+1) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2010(k+1)}{k}.$$

Tā kā $k+1$ nedalās ar k, tad k ir jābūt skaitļa 2010 dalītājam. Lai noteiktu 2010 dalītāju skaitu, sadalām to pirmreizinātājos: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Veidojot dalītāju, katru no pirmreizinātājiem varam vai nu iekļaut tajā kā reizinātāju, vai arī nē. Tātad pavisam ir $2^4 = 16$ dalītāji jeb k var pieņemt vērtības: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 un 2010.

Jebkurš no šiem skaitļiem der, lai iegūtu q vērtību. Tātad daļu $\frac{2011}{2010}$ var izteikt kā divu daļu reizinājumu **16 dažādos veidos**.

<u>*Piezīme.*</u> Lai gan uzdevumā nav prasīts, varam atrast arī visus derīgos p un q vērtību pārus:
(4021, 4020), (6032, 3015), (8043, 2680), (12065, 2412), (14076, 2345), (22120, 2211), (32175, 2144), (62340, 2077), (136747, 2040), (271484, 2025), (406221, 2020), (675695, 2016), (810432, 2015), (1349380, 2013), (2023065, 2012), (4044120, 2011).

A.AB.18. *Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis m. Vienā gājienā atļauts nodzēst m un tā vietā uzrakstīt* $17m$ *vai arī* $[\sqrt{m}]$ *(ar* $[x]$ *apzīmē reāla skaitļa x veselo daļu). Pierādīt, ka, atkārtojot šādus gājienus, uz tāfeles iespējams iegūt jebkuru naturālu skaitli.*

Atrisinājumu sadalīsim divās daļās:
1) pierādīsim, ka no jebkura naturāla skaitļa, kas lielāks par 1, ar doto operāciju palīdzību iespējams iegūt 1,
2) pierādīsim, ka no 1 ar doto operāciju palīdzību iespējams iegūt jebkuru naturālu skaitli.
Pieņemsim, ka dots patvaļīgs naturāls skaitlis p. Ievērojam, ka visiem $p>1$ izpildās $\mathrm{p}>\sqrt{p}>1$ un $p>[\sqrt{p}]\geq 1$. Tāpēc, atkārtojot operāciju $[\sqrt{p}]$, katrā solī iegūsim aizvien mazāku naturālu skaitli. Tā kā *p* ir fiksēts skaitlis, kas ar katru gājienu samazinās, tad kādā brīdī tiks iegūts 1. Esam parādījuši, kā no jebkura naturāla skaitļa iegūt 1.
Vēl jāparāda, kā no 1 var iegūt jebkuru naturālu skaitli *n*.
Pamatosim, ka jebkuru naturālu skaitli n var iegūt no 1, sākumā a reizes veicot reizināšanu ar 17, bet pēc tam izpildot otru operāciju – velkot kvadrātsakni un pēc tam ņemot veselo daļu no iegūtās vērtības. Lai tas būtu iespējams, ir jāizpildās sakarībai $n^{2^k}\leq 17^a<(n+1)^{2^k}$ jeb logaritmējot visas nevienādības puses pie bāzes 17.
Šī intervāla saknēm jābūt lielākām vai vienādām ar 1, t. i., jāizpildās nevienādībai $2^k\log_{17}n\leq a<2^k\log_{17}(n+1)$. Lai šajā intervālā būtu vismaz viens derīgs naturāls skaitlis a, ja $2^k(\log_{17}(n+1)-\log_{17}n)\geq 1$. Pārveidojot iepriekšējo sakarību iegūstam:

$$2^k\log_{17}\frac{n+1}{n}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \log_{17}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2^k}\geq \log_{17}17 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2^k}\geq 17.$$

Tātad jāatrod mazākā k vērtība $k=k_0$, kurai $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2^{k_0}}\geq 17$ jeb $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2^{k_0}}\geq 17$.

Pēc tam jāatrod atbilstošo a vērtību kā $a=\left[2^{k_0}\log_{17}n\right]$.

A.AB.19. *Atrast visus naturālu skaitļu pārus* (m,n) *tādus, ka* $2m-1$ *dalās ar n un* $2n-1$ *dalās ar m.*

Pārrakstot uzdevuma nosacījumus, iegūsim, ka nepieciešams atrast vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases}2m-1=kn\\2n-1=lm\end{cases}$$

atrisinājumus naturālos skaitļos.

No otrā vienādojuma izsakot $n=\dfrac{lm+1}{2}$ un ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūstam:

$$2m = k\frac{lm+1}{2}+1;$$
$$4m = klm + k + 2;$$
$$m = \frac{k+2}{4-kl}.$$

Tā kā visi skaitļi m, k, l ir naturāli, tad saucēja vērtībai $4-kl$ jābūt lielākai nekā 0, t. i., $4-kl>0$ jeb $kl<4$.

Apskatām visus iespējamos variantus:

k	l	m	n
1	1	1	1
1	2	3/2 (nav naturāls skaitlis)	2
1	3	3	5
2	1	2	3/2 (nav naturāls skaitlis)
3	1	5	3

Tātad meklētie skaitļu pāri ir (1; 1), (3; 5) un (5; 3).

A.AB.20. *Katram naturālam n aplūko kopu:*

$$S_n = \{\,0,\ 1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots, 1+2+\ldots+(n-1)\,\}.$$

Pierādīt:

a) *ja n ir skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n nevar atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n;*

b) *ja n nav skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n vienmēr var atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n.*

Ja divu kopas S_n elementu starpība dalās ar n, tad tas nozīmē, ka ir iespējams atrast divus tādus indeksus k un m, ka $0 \le k < m \le n-1$ un elementu starpība izsakāma kā $\sum_{i=k+1}^{m} i = \frac{(m+k+1)(m-k)}{2}$. No skaitītājā esošajiem diviem reizinātājiem viens ir pāra, bet otrs – nepāra. Lai divu S_n elementu starpība dalītos ar n, tad izteiksmes $\frac{(m+k+1)(m-k)}{2n}$ vērtībai jābūt veselam skaitlim.

a) Ja n ir divnieka pakāpe, tad saucējā ir pāra skaitlis un tas nozīmē, ka ar to var dalīties tikai viens no skaitītājā esošajiem reizinātājiem. Lielākā iespējamā pirmā reizinātāja vērtība nepārsniedz $(n-1)+(n-2)+1 = 2(n-1)$, savukārt otrā: $(n-1)-0 = n-1$. Tas nozīmē, ka nevienā gadījumā skaitītājā esošais skaitlis nedalās ar $2n$ bez atlikuma. Tātad kopā S_n nevar atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n.

b) Ja n nav divnieka pakāpe, tad n var izteikt to kā $n=(2p+1)2^r$, kur $p \ge 1$ un $r \ge 0$.

Pierādīsim stiprāku apgalvojumu: ja n nav skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n vienmēr varēs atrast divus elementus, kuru starpība ir n. Ņemot vērā to, ka ar divnieka pakāpi dalās tikai viens no skaitļiem $m+k+1$ un $m-k$, atrisinājumu meklēsim kā vienas no divām vienādojumu sistēmām atrisinājumu:

$$\begin{cases} m+k+1 = 2p+1 \\ m-k = 2^{r+1} \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} m+k+1 = 2^{r+1} \\ m-k = 2p+1 \end{cases}. \qquad (*)$$

Abu sistēmu otrā vienādojuma abām pusēm pieskaitām 1:

$$\begin{cases} m+k+1=2p+1 \\ m-k+1=2^{r+1}+1 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} m+k+1=2^{r+1} \\ m-k+1=2p+2 \end{cases}.$$

Tā kā $m+k+1 \geq m-k+1$, tad, lai sistēmām būtu atrisinājums, jāizpildās nosacījumiem:

$$\begin{matrix} 2p+1 \geq 2^{r+1}+1 \\ p \geq 2^r \end{matrix} \quad \text{vai} \quad \begin{matrix} 2^{r+1} \geq 2p+2 \\ p \leq 2^r - 1 \end{matrix}.$$

Izmantojot saskaitīšanas paņēmienu, atrisinām sistēmas (*):

$$\begin{cases} 2m+1=2p+2^{r+1}+1 \\ 2k+1=2p-2^{r+1}+1 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} 2m+1=2p+2^{r+1}+1 \\ 2k+1=2^{r+1}-2p-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} m=p+2^r \\ k=p-2^r \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} m=p+2^r \\ k=2^r-p \end{cases}.$$

Tā kā $p \geq 1$, $r \geq 0$, tad $m = p + 2^r < p2^{r+1} + 2^r = (2p+1)2^r = n$

Tātad m vērtība ir derīga, jo atrodas intervālā $0 < m < n$. Tā kā spēkā ir nevienādības $p+1 \geq 2^r$ un $2^r \geq p$, tad $k \geq 0$.

Vēl jāpārbauda, vai ir spēkā nevienādības $k < m < n$:

$$k = p - 2^r + 1 \leq p < p + 2^r = m \quad \text{un} \quad k = 2^r - p < 2^r + p = m.$$

Tātad visām n vērtībām iespējams atrast derīgas m un k vērtības.

Līdz ar to esam pierādījuši: ja n nav skaitļa 2 pakāpe, tad kopā S_n vienmēr var atrast divus elementus, kuru starpība dalās ar n.

A.BW. Starptautiskā matemātikas komandu olimpiāde "Baltijas Ceļš 2011"

A.BW. Algebra

A.BW.1. *Reāliem skaitļiem* $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ *izpildās sakarības*

$$x_1 + x_2 = 2x_1',\ x_2 + x_3 = 2x_2',\ ...,\ x_{2011} + x_1 = 2x_{2011}',$$

kur $x_1', x_2', ..., x_{2011}'$ *ir skaitļu* $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ *permutācija. Pierādīt, ka*

$$x_1 = x_2 = ... = x_{2011}.$$

Kāpinām doto vienādību abas puses kvadrātā, pēc tam saskaitām iegūtās vienādības un izmantojam, ka $x_1', x_2', ..., x_{2011}'$ ir skaitļu $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ permutācija:

$$(x_1 + x_2)^2 + ... + (x_{2011} + x_1)^2 = (2x_1')^2 + ... + (2x_{2011}')^2 = (2x_1)^2 + ... + (2x_{2011})^2.$$

Atverot iekavas, iegūstam:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + ... + x_{2011}^2 + 2x_{2011}x_1 + x_1^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 + ... + 4x_{2011}^2;$$

$$0 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + ... + x_{2011}^2 - 2x_{2011}x_1 + x_1^2;$$

$$(x_1 - x_2)^2 + ... + (x_{2011} - x_1)^2 = 0.$$

Kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja visi saskaitāmie ir 0. Tātad $x_1 - x_2 = 0, ..., x_{2011} - x_1 = 0$ jeb $x_1 = x_2 = ... = x_{2011}$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.2. *Dota funkcija* $f : Z \to Z$ *tāda, ka visiem veseliem x un y izpildās vienādība*

$$f\big(f(x) - y\big) = f(y) - f(f(x)).$$

Pierādīt, ka funkcija f *ir ierobežota, t. i., eksistē tāda konstante C, ka* $-C < f(x) < C$ *visiem veseliem skaitļiem x.*

Ja $y = f(x)$, tad $f(y - y) = f(y) - f(y)$ jeb $f(0) = 0$.
Ja $y = 0$, tad visiem x izpildās $f(f(x)) = f(0) - f(f(x))$,

$$2f(f(x)) = 0,$$

$$f(f(x)) = 0.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $f(f(x) - y) = f(y)$.
Ja $x = 0$, tad iegūstam, ka $f(f(0) - y) = f(y)$ jeb $f(-y) = f(y)$.
Apzīmējot $y = -z$, iegūstam

$$f(f(x) + z) = f(-z) = f(z). \qquad (*)$$

Iespējami 2 gadījumi:

1) Ja $f(x) = 0$ visām x vērtībām, tad funkcija f ir ierobežota.
2) Ja eksistē tāda vērtība x_0, ka $f(x_0) \neq 0$, tad no (*) seko, ka funkcija f ir periodiska funkcija, tātad tā ir ierobežota.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka funkcija f ir ierobežota, t. i., eksistē tāda konstante C, ka $-C < f(x) < C$ visām veselām x vērtībām.

A.BW.3. *Nenegatīvu veselu skaitļu virknē* $a_1, a_2, a_3, ...$ *visiem* $n > 2$ *piemīt īpašība, ka* a_{n+1} *ir* $a_n^n + a_{n-1}$ *pēdējais cipars. Vai noteikti eksistē tāds* n_0, *ka virkne* $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...$ *ir periodiska?*

Ja $n > 2$, tad būtībā tiek apskatīta virkne pēc moduļa 10.

Katru virknes elementu, sākot ar trešo, viennozīmīgi nosaka virknes divi iepriekšējie locekļi. Tāpēc, ja eksistē tādi veseli skaitļi $n_0 > 2$ un $k > 0$, ka $a_{n_0} = a_{n_0+4k}$ un $a_{n_0+1} = a_{n_0+4k+1}$, tad virkne, sākot ar a_{n_0}, ir periodiska ar periodu 4*k*.

Apskatām pārus (a_{2+4j}, a_{3+4j}), $0 \le j \le 100$. Tā kā a_n^n un a_{n-1} pēc moduļa 10 var pieņemt 10 dažādas vērtības, tad izteiksme $a_n^n + a_{n-1}$ var pieņemt ne vairāk kā $10 \cdot 10 = 100$ dažādas vērtības pēc moduļa 10.

Tātad noteikti eksistē tādi veseli skaitļi j_1 un j_2, $0 \le j_1 < j_2 \le 100$, ka $a_{2+4j_1} = a_{2+4j_2}$ un $a_{3+4j_1} = a_{3+4j_2}$. Izvēloties $n_0 = 2 + 4j_1$, iegūstam periodisku virkni $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$.

A.BW.4. *Doti nenegatīvi reāli skaitļi a, b, c, d tādi, ka* $a+b+c+d=4$. *Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

Novērtēsim izteiksmi a^3+2, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$a^3+2 = a^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3a.$$

Izmantojot iegūto nevienādību, novērtēsim dotās nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \le \frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3b+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6}$$

Ja pierādīsim, ka

$$\frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3b+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6} \le \frac{4}{9},$$

tad no nevienādību īpašības (ja $x \le y$ un $y \le z$, tad $x \le z$) sekos, ka arī dotā nevienādība ir patiesa.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}+\frac{d}{d+2} \le \frac{4}{3};$$

$$\frac{a+2-2}{a+2}+\frac{b+2-2}{b+2}+\frac{c+2-2}{c+2}+\frac{d+2-2}{d+2} \le \frac{4}{3};$$

$$1-\frac{2}{a+2}+1-\frac{2}{b+2}+1-\frac{2}{c+2}+1-\frac{2}{d+2} \le \frac{4}{3};$$

$$-\frac{2}{a+2}-\frac{2}{b+2}-\frac{2}{c+2}-\frac{2}{d+2} \le \frac{4}{3}-4;$$

$$-2\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right) \le -\frac{8}{3};$$

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2} \ge \frac{4}{3};$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right) \ge \frac{1}{3}.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa kā nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right) \ge \frac{4}{(a+2)+(b+2)+(c+2)+(d+2)} = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

Tā kā tika veikti ekvivalenti un iegūta patiesa nevienādība, tad secinām, ka arī dotā nevienādība ir patiesa.

A.BW.5. *Dota funkcija* $f: R \to R$*, kurai visiem reāliem x izpildās vienādība*

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

Atrast $f(0)$ *vērtību.*

Pieņemsim, ka $f(0) = a$ un $f(1) = b$.

Tad $f(f(0)) = f(a)$, bet no dotās vienādības iegūstam, ka

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 = 1. \qquad (*)$$

Tātad $f(a) = 1$.

Līdzīgi no $f(f(1)) = f(b)$ un $f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 = 1$ seko, ka $f(b) = 1$.

Tā kā $f(f(a)) = f(1) = b$ un $f(f(a)) = a^2 - a + 1$, tad $a^2 - a + 1 = b$. (**)

No $f(f(b)) = f(1) = b$ un $f(f(b)) = b^2 - b + 1 = b$ seko, ka $b^2 - 2b + 1 = 0$ jeb $b = 1$.

Ievietojot vienādībā (**) vērtību $b = 1$, iegūstam

$$a^2 - a + 1 = 1,$$

$$a^2 - a = 0,$$

$$a_1 = 0 \text{ un } a_2 = 1.$$

Ja $a = 0$, tad $f(0) = 0$ un $f(f(0)) = 0$, kas ir pretrunā ar (*).

Ja $a = 1$, tad $f(1) = 1$ un $f(f(0)) = 1$. Tātad $f(0) = 1$.

A.BW. Kombinatorika

A.BW.6. *Dots naturāls skaitlis n. Pierādīt, ka ir vismaz* $\frac{n^2}{4}$ *tādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un tieši vienu citu punktu ar veselām koordinātām* (x, y)*,* $0 \le x, y \le n$*.*

Pieņemsim, ka $n' = \left[\frac{n}{2}\right]$ ir lielākais veselais skaitlis, kas apmierina nevienādību $n' \le \frac{n}{2}$.

Tā kā $\frac{n^2}{4} = n^2 - \frac{3n^2}{4} \le n^2 - 3n'^2$, tad ir pietiekami, ja pierādīsim, ka ir vismaz $n^2 - 3n'^2$ tādas taisnes, kā prasīts uzdevumā (ja *n* ir pāra skaitlis, tad šis apgalvojums sakrīt ar uzdevumā doto; ja *n* ir nepāra skaitlis, tad – apgalvojums ir "spēcīgāks").

Punktu sauksim par *svarīgu*, ja tā abas koordinātas ir veseli skaitļi no 1 līdz *n* (abus skaitļus ieskaitot). *Svarīgo* punktu skaits ir n^2. *Svarīgu* punktu sauksim par *mazu*, ja tā abas koordinātas nav lielākas kā *n*, pretējā gadījumā – par *lielu*. Ievērojam, ka *mazo* punktu skaits ir n'^2.

Taisni, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un satur vismaz divus *svarīgus* punktus, sauksim par *sliktu*.

Apskatām patvaļīgu *sliktu* taisni *l*.

Pieņemsim, ka *l* iet caur tieši *k svarīgiem* punktiem un ka $P(x, y)$ ir *svarīgs* punkts, kas atrodas vistuvāk koordinātu sākumpunktam.

Definējam punktu $P_i = (x \cdot i, y \cdot i)$ visiem veseliem skaitļiem *i*, *svarīgie* punkti uz taisnes *l* ir $P_1, P_2, ..., P_k$. Tā kā uz *sliktas* taisnes atrodas vismaz divi *svarīgi* punkti, tad $k \geq 2$. Tātad $P = P_1$ ir *mazs* punkts, jo noteikti $2x \leq n$ un $2y \leq n$ (lai punkts atrastos dotajā apgabalā) un līdz ar to $x \leq \frac{n}{2}$ un $y = \frac{n}{2}$.

Ar k' apzīmējam tādu veselu skaitli, ka $P_1, P_2, ..., P_{k'}$ ir *mazi* punkti uz taisnes *l*, bet $P_{k'+1}, ..., P_k$ ir *lieli* punkti uz taisnes *l*. Tā kā punkts $P_{k'+1}$ nav *mazs* punkts, tad punkts $P_{2(k'+1)}$ nav *svarīgs* punkts. Tātad $k \leq 2k'+1$.

Tā kā $k' \geq 1$, tad $2k'+1 \leq 3k'$ un $k \leq 3k'$. Summējot iegūto nevienādību pa visām *sliktām* taisnēm, iegūstam, ka *svarīgo* punktu, kas atrodas uz *sliktām* taisnēm, skaits ir ne lielāks kā trīskāršots visu *mazo* punktu skaits, t. i., ne lielāks kā $3n'^2$.

Tātad ir vismaz $n^2 - 3n'^2$ *svarīgi* punkti, kas neatrodas uz kādas no *sliktajām* taisnēm. Līdz ar to esam pierādījuši, ka ir vismaz $n^2 - 3n'^2$ (tātad arī $\frac{n^2}{4}$) tādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un tieši vienu citu punktu ar veselām koordinātām (x, y), $0 \leq x, y \leq n$.

A.BW.7. *Apzīmēsim ar T 15-elementu kopu* $\{10a + b : a, b \in Z, 1 \leq a < b \leq 6\}$. *S ir tāda T apakškopa, kurā sastopami visi seši cipari* 1, 2, ..., 6, *bet kurā nav tādu trīs elementu, kas kopā saturētu visus sešus ciparus. Atrast lielāko iespējamo kopas S elementu skaitu.*

Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka kopā *S* nav vairāk kā deviņi elementi. Sadalām visus kopas *T* elementus šādās piecās grupās:

12, 36, 45
13, 24, 56
14, 26, 35
15, 23, 46
16, 25, 34

Katrā grupā parādās visi seši cipari. Tātad kopā *S* var būt ne vairāk kā divi skaitļi no katras grupas, t. i., kopa *S* satur ne vairāk kā $2 \cdot 5 = 10$ elementus. Pieņemsim, ka kopas *S* lielākais apjoms ir 10 elementi, t. i., no katras sadalījuma rindas kopā *S* ietilpst tieši divi elementi. Kopā *S* noteikti ir tāds cipars, kurš neparādās vismaz divas reizes (pretējā gadījumā kopā *S* trūkst lielākais 3 elementu, t. i., kopā *S* ir vismaz 12 elementi) un parādās vismaz vienu reizi (pretējā gadījumā šis cipars kopā *S* neparādās nemaz). Pieņemsim, ka tāds cipars ir 1 (citi gadījumi ir analogi) un ka $12, 13 \notin S$, bet $16 \in S$.

Apskatām šādu elementu sadalījumu (elementi, kas ir treknrakstā, pieder kopai *S*, bet elementi slīprakstā – nepieder).

12, **36**, **45**
13, **24**, **56**
14, 26, 35
15, 23, 46
16, 25, 34

Tā kā $16, 45 \in S$, tad $23 \notin S$. Ja $24, 36 \in S$, tad $15 \notin S$. Tātad kopā *S* no skaitļu trijnieka 15, 23, 46 ietilpst ne vairāk kā viens skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka kopā *S* no katras sadalījuma grupas ietilpst tieši divi elementi.

Otrkārt, parādām, ka kopas *S* apjoms var būt 9. Piemēram, kopas *S* elementi var būt

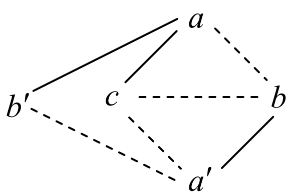
12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26.

A.BW.8. *Katru no trim Greifsvaldes skolām A, B un C apmeklē vismaz viens skolēns. No katriem trim skolēniem, pa vienam no katras skolas A, B un C, var atrast divus, kuri pazīst viens otru un divus, kuri nepazīst viens otru. Pierādīt, ka vismaz viens no sekojošiem apgalvojumiem ir patiess:*

- *kāds skolēns no A pazīst visus skolēnus no B;*
- *kāds skolēns no B pazīst visus skolēnus no C;*

kāds skolēns no C pazīst visus skolēnus no A.

Pierādīsim no pretējā, t. i., ka neizpildās neviens no uzdevumā dotajiem apgalvojumiem. Pieņemsim, ka *a* ir skolas A skolēns, kurš pazīst visvairāk skolēnus no skolas B. Tā kā *a* nepazīst visus skolēnus no skolas B, tad ir tāds skolēns *b*, kuru *a* nepazīst. Līdzīgi var atrast tādu skolas C skolēnu *c*, kuru nepazīst skolēns *b* un skolas A skolēnu a', kuru nepazīst skolēns *c*. No tā, ka *a* nepazīst *b* un *b* nepazīst *c*, seko, ka *a* pazīst *c*. Līdzīgi iegūstam, ka a' pazīst *b*. Ja *b* pazīst *a* un nepazīst a', tad *a* un a' ir divi dažādi skolas A skolēni. Tā kā skolēns *a* pazīst visvairāk skolēnus no skolas B, tad ir tāds skolas B skolēns b', kuru pazīst *a* un nepazīst a'. Izveidojusies situācija, kas attēlota A63. zīmējumā, kur nepārtraukta līnija savieno skolēnus, kas pazīst viens otru, bet pārtraukta – kas nepazīst.



A63. zīm.

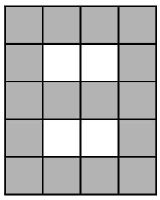
Ja b' un *c* pazīst viens otru, tad skolēnu trijniekā $\{a, b', c\}$ katri divi skolēni ir pazīstami, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Ja b' un *c* nepazīst viens otru, tad skolēnu trijniekā $\{a', b', c\}$ nav divu skolēnu, kas būtu pazīstami (arī pretruna ar doto). Tātad sākotnējais pieņēmums nav pareizs. Līdz ar to esam pierādījuši, ka vismaz viens no uzdevumā dotajiem apgalvojumiem ir patiess.

A.BW.9. *Dots taisnstūris, kura izmērs ir $m \times n$ rūtiņas, tās nokrāsotas melnā vai baltā krāsā. Krāsojumu sauksim par labu, ja izpildās sekojoši nosacījumi:*

- *Visas rūtiņas, kas pieskaras taisnstūra malai, ir melnas.*
- *Nekādas četras rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, nav nokrāsotas vienā krāsā.*
- *Nekādas četras rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, nav nokrāsotas tā, ka vienā krāsā ir tikai tās rūtiņas, kas saskaras tikai ar stūriem (pa diagonāli).*

Kādiem taisnstūra izmēriem $m \times n$ $(m, n \geq 3)$ ir iespējams labs krāsojums?

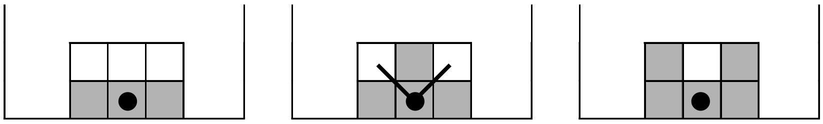
Pierādīsim, ka *labs* krāsojums ir iespējams tad un tikai tad, ja *n* vai *m* ir nepāra skaitlis. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka rindu skaits ir nepāra skaitlis. Ja visas rūtiņas, kas pieskaras taisnstūra malām, un katru otro rindu nokrāso melnu, tad iegūstam *labu* krāsojumu (piemēram, skat. A64. zīm., kur $m = 5$ un $n = 4$).



A64. zīm.

Vēl jāpierāda, ka neeksistē *labs* krāsojums, ja m un n abi ir pāra skaitļi.
Apskatīsim grafu, kura virsotnes ir rūtiņas. Šķautne starp divām rūtiņām A un B, kam kopīga ir tikai virsotne, tiek vilkta tad un tikai tad, ja divas pārējās rūtiņas, kam gan ar A, gan ar B ir kopīga mala, ir nokrāsotas vienā krāsā. Ievērojam, ka rūtiņas lielākā iespējamā pakāpe (izejošo šķautņu skaits) ir 4, jo rūtiņai pa diagonāli atrodas lielākais 4 citas rūtiņas.
Grafam, kas atbilst labam krāsojumam, ir šādas īpašības:

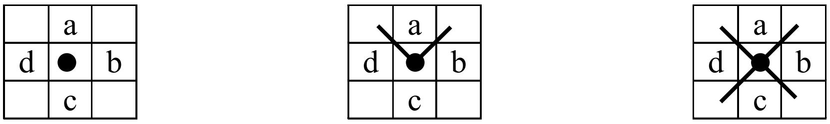
- Taisnstūra stūra rūtiņu pakāpe ir 1, jo stūra rūtiņas abas blakus rūtiņas ir vienā krāsā (melnas).
- Taisnstūra malējo (ne stūra) rūtiņu pakāpe ir 0 vai 2 (skat. Iespējamos *labos* krāsojumus A65. zīm.).



pakāpe 0 pakāpe 2 pakāpe 0

A65. zīm.

- Rūtiņu, kas atrodas taisnstūra iekšpusē, pakāpe ir 0, 2 vai 4 (skat. A66. zīm.).



Pakāpe 0	Pakāpe 2	Pakāpe 4
a, c - vienā krāsā; b, d - otrā krāsā	a, b, c - vienā krāsā; d - otrā krāsā	a, b, c, d - vienā krāsā

A66. zīm.

Vēl jāparāda, ka rūtiņas pakāpe nevar būt 1 un 3. Pieņemsim, ka virsotnes pakāpe ir 1 (skat. A67. zīm. a)), tad rūtiņas a un b ir, piemēram, melnā krāsā. Rūtiņa c ir balta, tad rūtiņai d jābūt melnai, bet tādā gadījumā jānovelk vēl viena šķautne. Pretruna ar pieņēmumu, ka pakāpe ir 1. Līdzīgi pierāda, ka rūtiņas pakāpe nevar būt 3 (skat. A67. zīm. b)).

a) b)

A67. zīm.

Apgalvojums, ka krāsojums, kas nav *labs*, ir ekvivalents ar apgalvojumu, ka nekādas divas grafa šķautnes nekrustojas (ja grafa šķautnes krustojas, tad kvadrāta 2×2 rūtiņas visas rūtiņas ir nokrāsotas vienā krāsā vai arī vienā krāsā ir nokrāsotas rūtiņas, kas saskaras ar tikai stūriem – pretruna ar doto).
Iedomāsimies, ka uz dotā taisnstūra mēs uzliekam režģi, kas nokrāsots kā šaha galdiņš. Ievērojam, ka šajā krāsojumā nav tādas šķautnes, kas savieno dažādas krāsas rūtiņas. Veidojas divi dažādi grafa komponenšu savienojumi, t. i., dotajam grafam ir divi apakšgrafi. Ja m un n ir pāra skaitļi, tad stūra rūtiņas, kas pieder vienai taisnstūra malai, atrodas dažādos grafa komponenšu savienojumos. Tā kā virsotņu, kas atrodas vienā savienojumā, pakāpju summa ir pāra skaitlis (skat. Teoriju), tad taisnstūra pretējo stūru rūtiņām jāatrodas vienā un tajā pašā komponentu savienojumā. Tātad ir maršruts no vienas stūra rūtiņas uz tai pretējā stūra rūtiņu. Pavisam ir divi šādi maršruti. Šie divi maršruti noteikti krustojas, t. i., eksistē divas šķautnes, kas krustojas. Tātad šis krāsojums nav *labs*. Līdz ar to esam pierādījuši, ka *labs* krāsojums iespējams tikai tad, ja m vai n ir nepāra skaitlis.

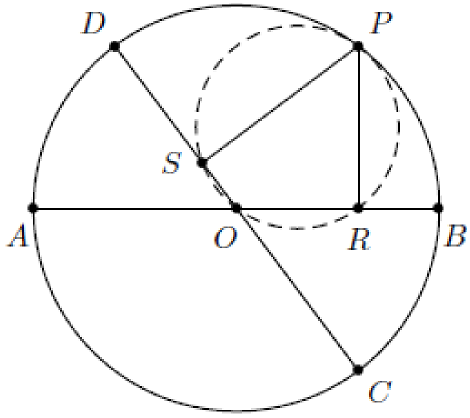
A.BW.10. *Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli ar veseliem skaitļiem. Sākotnējais skaitlis ir* 2011^{2011}. *Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Vienā gājienā no tā var vai nu atņemt kādu naturālu skaitli starp* 1 *un* 2010 *ieskaitot, vai arī izdalīt to ar* 2011, *noapaļojot uz leju līdz tuvākajam veselajam skaitlim, kad tas nepieciešams. Uzvar spēlētājs, kurš pirmais iegūst nepozitīvu skaitli. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?*

Pierādīsim, ka uzvaroša stratēģija ir otrajam spēlētājam.
Turpmāk aplūkosim skaitli, uzrakstītu skaitīšanas sistēmā ar bāzi 2011. Šajā bāzē ir 2011 cipari – 0, 1, 2, ..., $<2010>$.
Sākotnējo skaitli 2011^{2011} uzrakstot skaitīšanas sistēmā ar bāzi 2011, iegūsim skaitli, kas būs formā $1\underbrace{0....0}_{2011}$. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs vienmēr var panākt, ka pēc katra viņa gājiena skaitlis 2011 skaitīšanas sistēmā beidzas ar nepāra skaitu nuļļu un, ja otrais spēlētājs ievēro šo stratēģiju, tad situāciju, ka skaitlis pēc gājiena beidzas ar nepāra skaitu nuļļu, nekad nevar panākt pirmais spēlētājs.
Ja pēc otrā (vai pirms pirmā) spēlētāja kārtējā gājiena ir izdevies panākt situāciju, ka skaitlis beidzas ar nepāra skaitu nuļļu, tad tas nozīmē, ka skaitlis dalās ar 2011. Atcerēsimies, ka sākotnējais skaitlis atbilst šim nosacījumam.
Pirmajam spēlētājam no šāda skaitļa atņemot jebkuru skaitli starp 1 un 2010 ieskaitot, tiks iegūts skaitlis, kas nedalās ar 2011 un, tātad tas nebeigsies ar 0 skaitīšanas sistēmā ar bāzi 2011. Ja skaitlis tiktu izdalīts ar 2011, tad nuļļu skaits skaitļa beigās samazinātos par viens un, tātad nuļļu skaits skaitļa beigās būtu pāru skaitlis. Esam parādījuši, ka, ja pirms pirmā spēlētāja gājiena skaitlis beidzās ar nepāra skaitu nuļļu, tad pēc sava gājiena pirmais spēlētājs nevar panākt situāciju, lai skaitļa beigās būtu nepāra skaits nuļļu.
Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena skaitļa beigās ir kādas 0, tad, pēc iepriekš izspriestā, to skaits ir pāra skaitlis un, izdalot šo skaitli ar 2011, otrais spēlētājs atjaunos situāciju, kad skaitļa beigās ir nepāra skaits nuļļu.
Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena skaitļa beigās nuļļu nav, tad nepieciešams šķirot vairākus gadījumus:
1) atlicis vienciparu skaitlis robežās no 1 līdz $<2010>$, kuru ar vienu gājienu iespējams pārveidot par 0 un, tātad uzvarēt;
2) atlicis vairākciparu skaitlis, kur priekšpēdējais cipars nav 0. Tad pēdējais cipars ir robežās no 1 līdz $<2010>$ un atņemot skaitli, kas vienāds ar šo pēdējo ciparu, iegūsim skaitli, kas beidzas ar vienu (nepāra skaits) nulli;
3) atlicis vairākciparu skaitlis, pie kam pirms pēdējā cipara skaitļa pierakstā ir k ($k>0$) nulles. Ja k ir pāra skaitlis, tad atņemot skaitli, kas vienāds ar šo pēdējo ciparu, iegūsim skaitli, kas beidzas ar $k+1$ (nepāra skaits) nulli. Ja k ir nepāra skaitlis, tad izdalot skaitli ar 2011 un noapaļojot uz leju, iegūsim skaitli, kurā, salīdzinot ar sākotnējo, ir atmests pēdējais cipars un, tātad, iegūsim skaitli, kas beidzas ar k (nepāra skaits) nullēm.
Ievērojot, ka pēc katra gājiena atlikušais skaitlis arvien samazinās, pie kam skaitļa pieraksta garums katrā gājienā samazinās ne vairāk kā par vienu ciparu, varam secināt, ka otrais spēlētājs, šādi spēlējot, noteikti uzvarēs.

A.BW. Ģeometrija

A.BW.11. *AB un CD ir divi riņķa līnijas* ω *diametri. Patvaļīgam uz* ω *izvēlētam punktam P, ar R un S apzīmēsim tā projekcijas attiecīgi uz AB un CD. Pierādīt, ka nogriežņa RS garums nav atkarīgs no punkta P izvēles.*

Apzīmējam ar *O* riņķa līnijas ω centru (skat. A68. zīm.).



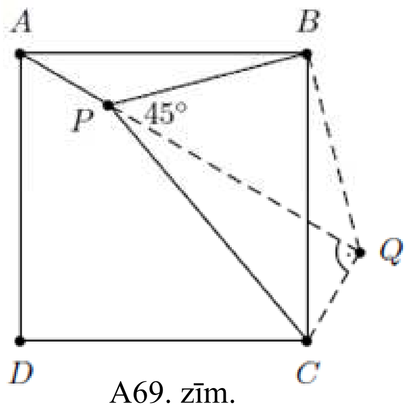
A68. zīm.

Tā kā punkti *R* un *S* ir punkta *P* projekcijas uz *AB* un *CD*, tad $\angle PRO = \angle PSO = 90°$. Tātad punkti *P*, *R*, *O*, *S* atrodas uz vienas riņķa līnijas ω' un *OP* ir riņķa līnijas ω' diametrs (jo uz hordas *OP* balstās $90°$ liels ievilktais leņķis), kas ir vienāds ar riņķa līnijas ω rādiusu.

Nogrieznis *RS* ir riņķa līnijas ω' horda, uz kuras balstās $\angle BOD$. Tā kā riņķa līnijas ω' diametrs nav atkarīgs no punkta *P* izvēles un $\angle BOD$ ir nemainīgs, tad arī *RS* garums ir nemainīgs (vienādās riņķa līnijās vienādiem leņķiem atbilst vienādas hordas).

A.BW.12. *Kvadrāta ABCD iekšpusē izvēlēts tāds punkts P, ka* $PA:PB:PC$ *ir* $1:2:3$. *Aprēķināt leņķi* $\angle BPA$.

Pagriežot trijstūri *ABP* ap punktu *B* par $90°$ (skat. A69. zīm.), punkts *A* attēlojas par punktu *C* un punkts *P* par jaunu punktu *Q* ($PA = QC = x,\ PB = BQ = 2x,\ PC = 3x$).



A69. zīm.

Tad $\angle PBQ = \angle PBC + \angle CBQ = \angle PBC + \angle ABP = 90°$. Tātad trijstūris *PBQ* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un $\angle BQP = \angle BPQ = 45°$.

Trijstūrī *PBQ* izmantojam Pitagora teorēmu:

$$PQ^2 = BQ^2 + PB^2 = 2\cdot(2x)^2 = 8x^2 \text{ jeb } PQ = \sqrt{8}x.$$

Pārbaudīsim, vai ΔPQC malu garumiem izpildās Pitagora teorēmas apgrieztā teorēma:

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2$$
$$(3x)^2 = (\sqrt{8}x)^2 + x^2$$
$$9x^2 = 9x^2$$

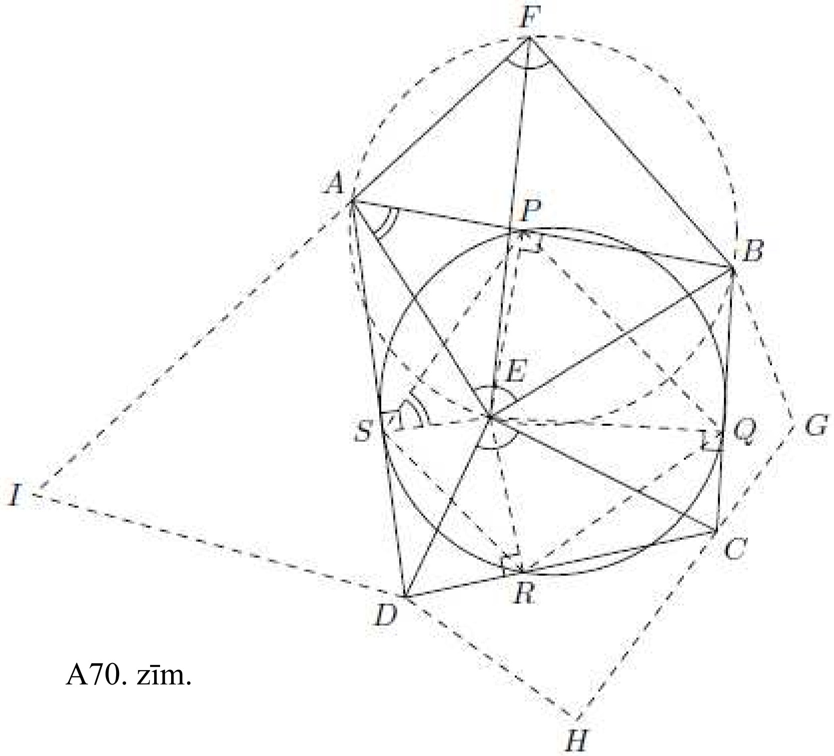
Tātad ΔPQC ir taisnleņķa trijstūris $(\angle PQC = 90°)$.

Līdz ar to $\angle BPA = \angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = 45° + 90° = 135°$.

<u>*Piezīme.*</u> Sanāk, ka punkti *A*, *P* un *Q* atrodas uz vienas taisnes.

A.BW.13. *Punkts E atrodas izliekta četrstūra ABCD iekšpusē. Četrstūra ārpusē konstruēti trijstūri* ΔABF, ΔBCG, ΔCDH *un* ΔDAI *tā, ka* $\Delta ABF \sim \Delta DCE$, $\Delta BCG \sim \Delta ADE$, $\Delta CDH \sim \Delta BAE$ *un* $\Delta DAI \sim \Delta CBE$. *Punkti P, Q, R un S ir punkta E projekcijas attiecīgi uz taisnēm AB, BC, CD un DA. Pierādīt: ja četrstūrim PQRS var apvilkt riņķa līniju, tad* $EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC$.

Tā kā *P*, *Q*, *R* un *S* ir punkta *E* projekcijas uz četrstūra *ABCD* malām, tad $\angle EPB = \angle EQC = \angle ERD = \angle ESA = 90°$ (skat. A70. zīm.).



A70. zīm.

Tātad ap četrstūriem *APES*, *BQEP*, *CREQ* un *DSER* var apvilkt riņķa līnijas, jo šo četrstūru pretējo leņķu summas ir $180°$. Ap četrstūri *PQRS* var apvilkt riņķa līniju pēc uzdevuma dotajiem. Izmantojot, ka ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša riņķa līnijas loka, ir vienādi, iegūstam

- $\angle AEB = 180° - (\angle EAB + \angle ABE)$ (trijstūra iekšējo leņķu summa);
- $\angle AEB = 180° - (\angle ESP + \angle PQE)$ (sakarības ievilktos četrstūros *APES* un *PBQE*);
- $\angle AEB = 180° - (180° - \angle ESR - \angle RQE)$ (ievilkta četrstūra *PQRS* pretējo leņķu summa ir $180°$);
- $\angle AEB = \angle ESR + \angle RQE$;
- $\angle AEB = \angle EDC + \angle DCE$ (sakarības ievilktos četrstūros *SERD* un *REQC*);
- $\angle AEB = 180° - \angle DEC$ (trijstūra iekšējo leņķu summa);
- $\angle AEB = 180° - \angle AFB$ (attiecīgie leņķi līdzīgos trijstūros *DCE* un *ABF*).

Esam ieguvuši, ka $\angle AEB + \angle AFB = 180°$. Tātad ap četrstūri *AEBF* var apvilkt riņķa līniju. No Ptolemaja teorēmas (skat. Teoriju) seko, ka

$$EF \cdot AB = AE \cdot BF + BE \cdot AF. \qquad (*)$$

Tā kā $\Delta ABF \sim \Delta DCE$, tad $\frac{AB}{CD} = \frac{BF}{CE} = \frac{AF}{DE} = k$ jeb $AB = k \cdot CD$, $BF = k \cdot CE$ un $AF = k \cdot DE$.

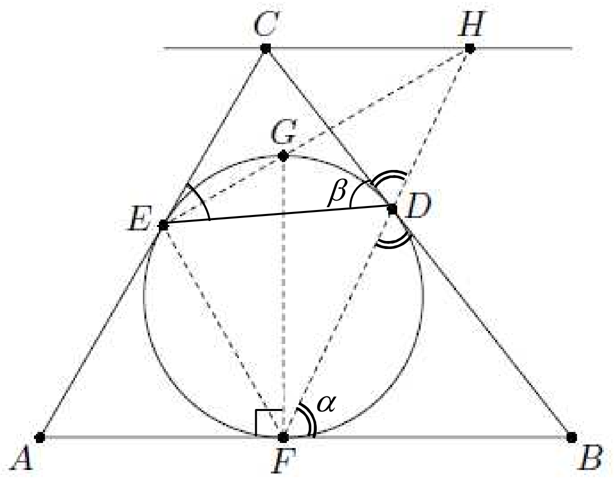
Ievietojot šīs sakarības vienādībā (*), iegūstam

$$EF \cdot k \cdot CD = AE \cdot k \cdot CE + BE \cdot k \cdot DE;$$
$$EF \cdot CD = AE \cdot CE + BE \cdot DE.$$

Esam ieguvuši, ka reizinājuma $EF \cdot CD$ vērtība ir atkarīga tikai no nogriežņu AE, CE, BE, DE vērtībām.
Līdzīgi var pierādīt, ka arī reizinājumi $EG \cdot DA$, $EH \cdot AB$, $EI \cdot BC$ ir vienādi ar izteiksmi $AE \cdot CE + BE \cdot DE$.
Līdz ar to esam pierādījuši, ka $EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC$.

A.BW.14. *Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Uz šīs riņķa līnijas izvēlēts tāds punkts G, ka FG ir tās diametrs. Taisnes EG un FD krustojas punktā H. Pierādīt, ka* $CH \parallel AB$.

No pieskaru īpašībām seko, ka $BF = BD$ un $EC = CD$. Tātad ΔFBD un ΔECD ir vienādsānu trijstūri. Apzīmējam $\angle DFB = \angle FDB = \alpha$ un $\angle CED = \angle EDC = \beta$ (skat. A71. zīm.).



A71. zīm.

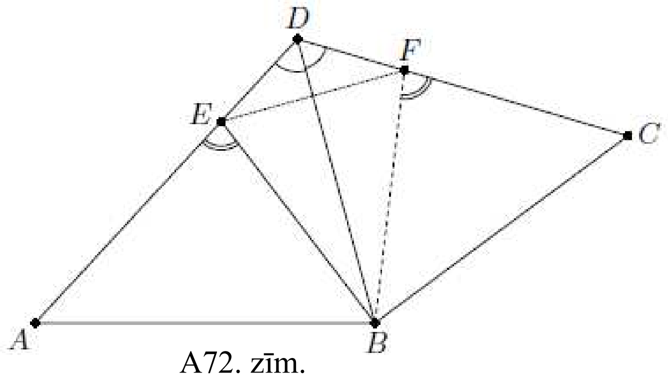
Tad $\angle FBD = 180° - 2\angle DFB = 180° - 2\alpha$ un $\angle ECD = 180° - 2\angle CED = 180° - 2\beta$.
Ievērojam, ka $\angle FDB = \angle CDH = \alpha$ kā krustleņķi. Tā kā FG ir diametrs, tad $GF \perp AB$ jeb $\angle GFB = 90°$ un $\angle GFD = 90° - \angle DFB = 90° - \alpha$.
$\angle GED = \angle GFD = 90° - \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku GD.
Aprēķinām ΔEDH leņķi $\angle EHD$:

$$\angle EHD = 180° - \angle GED - \angle EDH = 180° - (90° - \alpha) - (\alpha + \beta) = 90° - \beta.$$

Ievērojam, ka $\angle ECD = 180° - 2\beta = 2(90° - \beta) = 2\angle EHD$. Tātad punkts H atrodas uz riņķa līnijas, kas iet caur punktiem D un E un kuras centrs ir punktā C.
Tad $CE = CD = CH$ kā rādiusi un līdz ar to ΔDCH ir vienādsānu trijstūris, kura virsotnes leņķis ir $\angle DCH = 180° - 2\angle CDH = 180° - 2\alpha$.
Tātad $CH \parallel AB$, jo $\angle DCH = \angle BCH = \angle CBA = 180° - 2\alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm AB un CH, kuras krusto taisne CB.

A.BW.15. *Punkts E atrodas uz izliekta četrstūra ABCD malas AD. Zināms, ka* $\angle ADB = \angle BDC$ *un* $AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE$. *Pierādīt, ka* $\angle EBA = \angle DCB$.

Pieņemsim, ka punkts F ir simetrisks punktam E attiecībā pret taisni DB (skat. A72. zīm.).



A72. zīm.

No vienādības $\angle ADB = \angle BDC$ secinām, ka punkts F un punkts C atrodas uz taisnes DC un tie atrodas vienā pusē no punkta D. Pēc dotā $AE \cdot ED < AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE$ jeb $FD = ED < CD$; tas nozīmē, ka punkts F ir segmenta DC iekšējs punkts.
Ievērojam, ka trijstūri DEB un DFB ir vienādi (simetriski attiecībā pret taisni DB). Tad $\angle AEB = \angle BFC$ (kā vienādu leņķu blakusleņķi).
No dotās vienādības iegūstam, ka

$$BE^2 = CD \cdot AE - AE \cdot ED = AE \cdot (CD - ED) = AE \cdot (CD - FD) = AE \cdot CF.$$

Dalot vienādības $BE^2 = AE \cdot CF$ abas puses ar $BE \cdot CF$, iegūstam $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AE}{BE}$.

Ņemot vērā, ka $BE = BF$, iegūto attiecību varam pārveidot formā $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AE}{FB}$. (*)

Tā kā izpildās vienādība (*) un $\angle AEB = \angle BFC$, tad $\Delta BEA \sim \Delta CFB$ (pēc pazīmes "$m\ell m$"). Tātad $\angle EBA = \angle FCB = \angle DCB$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.

A.BW. Skaitļu teorija

A.BW.16. *Dots patvaļīgs vesels skaitlis a un skaitļu virkne* $x_0, x_1, \ldots$, *kur* $x_0 = a$, $x_1 = 3$ *un* $x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3$ *visiem* $n > 1$. *Atrast lielāko skaitli* k_a, *kuram var atrast tādu pirmskaitli p, ka* $x_{2011} - 1$ *dalās ar* p^{k_a}

Apzīmējam $y_n = x_n - 1$, tad $y_0 = a - 1$ un $y_1 = 3 - 1 = 2$.
Izmantojot doto sakarību, iegūstam

$$\begin{aligned} y_n = x_n - 1 &= (2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3) - 1 = \\ &= 2(y_{n-1} + 1) - 4(y_{n-2} + 1) + 3 - 1 = \\ &= 2y_{n-1} + 2 - 4y_{n-2} - 4 + 2 = \\ &= 2y_{n-1} - 4y_{n-2} \end{aligned}$$

Esam ieguvuši, ka $y_n = 2y_{n-1} - 4y_n$ jeb $y_{n-1} = 2y_{n-2} - 4y_{n-3}$.
Tātad $y_n = 2(2y_{n-2} - 4y_{n-3}) - 4y_{n-2} = 4y_{n-2} - 8y_{n-3} - 4y_{n-2} = -8y_{n-3}$ visiem $n > 2$.
Izmantojot iegūto sakarību $y_n = -8y_{n-3}$, pārveidojam izteiksmi $x_{2011} - 1$:

$$x_{2011} - 1 = y_{2011} = -8y_{2008} = -8 \cdot (-8y_{2005}) = \ldots = (-8)^{670} y_1 = (2^3)^{670} \cdot 2 = 2^{2011}.$$

Tātad $k_a = 2011$.

A.BW.17. *Atrodiet visus naturālos skaitļus d, kuriem ir spēkā īpašība: ja d ir kāda naturāla skaitļa n dalītājs, tad d ir arī jebkura tāda skaitļa dalītājs, kuru var iegūt no n, samainot vietām tā ciparus.*

Pieņemsim, ka d ir k-ciparu skaitlis ar īpašību: ja naturāls skaitlis n dalās ar d, tad ar d dalās arī jebkurš naturāls skaitlis m, kura cipari ir tādi paši kā skaitlim n.

Tādā gadījumā eksistē ($k+2$)-ciparu skaitlis, kas sākas ar „10”, t. i., $\overline{10a_1a_2...a_k}$, kurš dalās ar *d*. Ja tā nebūtu, tad *d* daudzkārtnim, kas mazāks nekā 10^{k+1} kā nākamais sekotu daudzkārtnis, kas lielāks vai vienāds ar $11 \cdot 10^k$. Bet tas nozīmētu, ka $d > 10^k$, kas ir pretrunā ar to, ka *d* ir *k*-ciparu skaitlis un, tātad $d < 10^k$.

Ja $\overline{10a_1a_2...a_k}$ dalās ar *d*, tad, pēc uzdevuma nosacījumiem, ar *d* dalās arī skaitļi $\overline{a_1a_2...a_k10}$ un $\overline{a_1a_2...a_k01}$. Tā kā šie abi skaitļi dalās ar *d*, tad arī to starpībai $\overline{a_1a_2...a_k10} - \overline{a_1a_2...a_k01} = 9$ jādalās ar *d*. Tātad *d* vērtības var būt tikai 1, 3 vai 9.

Tā kā ar 1 dalās jebkurš skaitlis, tad vērtība $d = 1$ atbilst uzdevuma nosacījumiem.
Izmantojot dalāmības pazīmes ar 3 un 9, iegūstam, ka der arī vērtības $d = 3$ un $d = 9$.

A.BW.18. *Atrast visus pirmskaitļu pārus* (p, q) *tādus, ka gan* $p^2 + q^3$, *gan* $q^2 + p^3$ *ir naturālu skaitļu kvadrāti.*

Apskatām vienīgo gadījumu, kad *p* ir pāra skaitlis. Ja $p = 2$, tad jāatrod tāda *q* vērtība, lai $q^2 + 8$ un $q^3 + 4$ būtu naturālu skaitļu kvadrāti.

Tā kā $q^2 + 8 > q^2$, tad

$$q^2 + 8 \geq (q+1)^2;$$
$$q^2 + 8 \geq q^2 + 2q + 1;$$
$$2q \leq 7;$$
$$q \leq 3{,}5.$$

Iegūstam, ka $q = 2$ vai $q = 3$. Pārbaudām, vai $q^3 + 4$ ir naturāla skaitļa kvadrāts:

$$q = 2 \;\Rightarrow\; q^3 + 4 = 8 + 4 = 12 \text{ (neder);}$$
$$q = 3 \;\Rightarrow\; q^3 + 4 = 27 + 4 = 31 \text{ (neder).}$$

Tātad $p \neq 2$ un simetrijas dēļ arī $q \neq 2$.

Tālāk apskatām gadījumu, kad $p = q$. Tad $p^3 + p^2 = p^2(p+1)$ ir jābūt naturāla skaitļa kvadrātam.
Tā kā viens no reizinātājiem jau ir skaitļa kvadrāts, tad arī otram reizinātājam jābūt kāda naturāla skaitļa *n* kvadrātam, t. i., $p + 1 = n^2$ jeb $p = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$.
Lai *p* būtu pirmskaitlis, vienam no reizinātājiem jābūt vienādam ar 1. Tas iespējams, ja $n = 2$. Tātad $p = 2^2 - 1 = 3$. Esam ieguvuši, ka skaitļu pāris $(3; 3)$ apmierina uzdevuma prasības.
Vēl jāapskata gadījums, kad *p* un *q* ir dažādi nepāra pirmskaitļi. Pieņemsim, ka *a* ir tāds naturāls skaitlis, ka $p^2 + q^3 = a^2$, t. i., $q^3 = a^2 - p^2 = (a+p)(a-p)$.

Abi reizinātāji $a + p$ un $a - p$ nevar dalīties ar *q*, jo tad arī to starpība $a + p - (a - p) = 2p$ dalītos ar *q*, kas nav iespējams, jo *p* un *q* ir dažādi nepāra pirmskaitļi.

Tātad viens no reizinātājiem ir q^3, bet otrs reizinātājs ir 1.

Tā kā $a - p$ ir mazākais reizinātājs, tad $a - p = 1$ un $a + p = q^3$. Atņemot abas vienādības, iegūstam, ka $2p = q^3 - 1$ jeb $q^3 = 2p + 1$. Simetrijas dēļ $p^3 = 2q + 1$.

Ja $p < q$, tad $q^3 = 2p + 1 < 2q + 1 = p^3$ jeb $q^3 < p^3$, kas nevar būt, jo $p < q$. Gadījums, kad $p > q$, ir analogs. Esam ieguvuši, ka gadījumā, kad *p* un *q* ir dažādi nepāra pirmskaitļi, nav tāda pāra $(p; q)$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad $(3; 3)$ ir vienīgais pirmskaitļu pāris, kas apmierina uzdevuma prasības.

A.BW.19. *Dots pirmskaitlis* $p \neq 3$. *Pierādīt, ka var atrast aritmētisko progresiju* $x_1, x_2, ..., x_p$, *kas sastāv no dažādiem naturāliem skaitļiem, kuras visu locekļu reizinājums ir naturāla skaitļa kubs*

Pieņemsim, ka naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, ..., a_p$ ir aritmētiskā progresija un šīs progresijas visu locekļu reizinājums ir $P = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_p$. Ja aritmētiskās progresijas visus locekļus reizina ar vienu un to pašu skaitli, tad iegūst citu aritmētisko progresiju. Tātad katram naturālam skaitlim *n* virkne $a_1 P^n, a_2 P^n, ..., a_p P^n$ arī ir aritmētiskā progresija, kuras visu locekļu reizinājums ir $a_1 P^n \cdot a_2 P^n \cdot ... \cdot a_p P^n = P^{n \cdot p} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_p = P^{n \cdot p} \cdot P = P^{n \cdot p+1}$. Lai $P^{n \cdot p+1}$ būtu kāda skaitļa kubs, tad kāpinātājam $np+1$ jādalās ar 3. Tā kā *p* ir pirmskaitlis, tad iespējami 2 gadījumi:

- ja $p \equiv 1 \pmod 3$, tad $2p+1 \equiv 0 \pmod 3$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis *q*, ka $2p+1 = 3q$. Šajā gadījumā $n = 2$ un meklētā aritmētiskā progresija ir formā $a_1 P^2, a_2 P^2, ..., a_p P^2$;
- ja $p \equiv 2 \pmod 3$, tad $1p+1 \equiv 0 \pmod 3$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis *q*, ka $1p+1 = 3q$. Šajā gadījumā $n = 1$ un meklētā virkne ir formā $a_1 P, a_2 P, ..., a_p P$.

A.BW.20. *Vesels skaitlis* $n \geq 1$ *ir balansēts, ja starp tā dalītājiem ir pāra skaits pirmskaitļu. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n tādu, ka no skaitļiem* n, $n+1$, $n+2$ *un* $n+3$ *tieši divi ir balansēti.*

Pierādīsim no pretējā. Pieņemsim, ka eksistē tāds *N*, ka nevienam $n \geq N$ nepiemīt uzdevumā prasītā īpašība. Sadalām visus veselos skaitļus, kas lielāki vai vienādi ar *N*, maksimāli lielos blokos secīgu skaitļu, kas visi ir vai nu *balansēti*, vai nav *balansēti*. Skaitlis $N-1$ var būt ar uzdevumā prasīto īpašību (skat. A73. zīm., kur ar *b* apzīmēts *balansēts* skaitlis, ar *n* – *nebalansēts*).

$N-1$	N	$N+1$	$N+2$	$N+3$
b	*b*	*n*	*n*	*n*
b	*n*	*n*	*b*	*n*
b	*n*	*b*	*n*	*n*
n	*n*	*b*	*b*	*b*
n	*b*	*b*	*n*	*b*
n	*b*	*n*	*b*	*b*

A73. zīm.

Izdzēšam pirmo bloku, lai nav situācija, ka blakus atrodas divi bloki ar garumu 1. Tad pēc pieņēmuma visiem $N' > N$ blakus neatrodas divi bloki, kuru garums ir lielāks vai vienāds ar 2 un blakus neatrodas arī divi bloki ar garumu 1 (pretējā gadījumā var atrast tādu skaitli *k*, ka tieši 2 no skaitļiem *k*, $k+1$, $k+2$, $k+3$ ir *balansēti*).

Iespējami 2 gadījumi:

1. Visu *nebalansēto* bloku garums ir 1, pārējo (*balansēto*) bloku garums ir vismaz 3. Apskatām *nebalansētu* skaitli $u > 2N' + 3$ ar īpašību $u \equiv 1 \pmod 4$ (piemēram, $n = p^2$, kur *p* ir nepāra pirmskaitlis). Tā kā *balansēto* bloku garums ir vismaz 3, tad skaitļi $u-3$, $u-1$ un $u+1$ noteikti ir *balansēti*.

   Tā kā $u = p^2 \equiv 1 \pmod 4$, tad $u-3$ un $u+1$ ir *balansēti* pāra skaitļi (tiem ir pāra skaitlis dalītāju, kas ir pirmskaitļi, tai skaitā pirmskaitlis 2), kas nedalās ar

4, t. i., dalās tikai ar 2. Tātad $\frac{u-3}{2}$ un $\frac{u+1}{2}$ ir nepāra skaitļi un tie ir *nebalansēti*, jo to dalītāju, kas ir pirmskaitļi, skaits samazinās par 1 (vairāk nav dalītāja 2), t. i., dalītāju skaits kļūst nepāra.

Skaitlis $u-1$ ir *balansēts* pāra skaitlis, kas dalās ar 4. Skaitlis $\frac{u-1}{2}$ arī ir *balansēts* pāra skaitlis, jo tam nemainās dalītāju, kas ir pirmskaitļi, skaits.

Tā kā skaitļi $\frac{u-3}{2}=\frac{u-1}{2}-1$, $\frac{u-1}{2}$, $\frac{u+1}{2}=\frac{u-1}{2}+1$ ir secīgi veseli skaitļi, tad rodas pretruna, jo esam ieguvuši *balansētu* bloku, kurā ir tikai skaitlis $\frac{u-1}{2}$, t. i., bloka garums ir 1.

2. Visu *balansēto* bloku garums ir 1, pārējo (*nebalansēto*) bloku garums ir vismaz 3. Apskatām *balansētu* skaitli $b>2N'+3$ ar īpašību $b\equiv 1 \pmod 4$ (piemēram, $b=p^2q^2$, kur p un q ir dažādi nepāra pirmskaitļi).

   Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $\frac{b-3}{2}$ ir *balansēts*, $\frac{b-1}{2}$ ir *nebalansēts*, $\frac{b+1}{2}$ ir *balansēts*. Tā kā $\frac{b-3}{2}$, $\frac{b-1}{2}$, $\frac{b+1}{2}$ ir secīgi veseli skaitļi, tad esam ieguvuši *nebalansētu* bloku, kurā ir tikai skaitlis $\frac{b-1}{2}$, t. i., šī bloka garums ir 1.

   Pretruna ar pieņēmumu.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka neeksistē tāds N, ka nevienam $n\ge N$ nepiemīt uzdevumā prasītā īpašība. Tātad eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, ka tieši divi no skaitļiem n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ir balansēti.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: S.9.4, S.11.4, N.9.4, N.11.4, V.11.4, V.12.1, VP.2, AB.5, BW.3

Nevienādības, nevienādību sistēmas: S.10.1

Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: N.12.5, VP.3, IMO.2, AB.1, AB.4, BW.4

Funkcionālvienādojumi, funkcionālnevienādības: VP.4, IMO.4, BW.2, BW.5

Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.10.4, S.12.1, S.12.3, N.11.2, V.10.1, A.11.3, A.12.3, AB.3

Pārveidojumi: S.9.1, S.10.1, V.11.1, A.11.3, AB.2

Polinomi: S.10.3, S.11.3, N.9.1, N.12.1, V.9.3, A.9.3, A.10.3, AB.1

Ekstrēmu uzdevumi: BW.1

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: V.12.2, A.12.2, IMO.5, BW.15

Ar riņķa līniju saistītas līnijas: IMO.1, AB.15, BW.11, BW.13, BW.14

Sakarības trijstūros: S.10.2, S.12.2, S.12.4, N.9.2, N.10.2, N.11.3, N.12.3, V.9.2, V.9.4, V.12.2, A.9.2, A.10.2, A.11.2, A.12.2, VP.3, IMO.1, IMO.5, AB.11, AB.12, AB.15, BW.12, BW.14

Laukumi: S.9.2, S.10.2, S.11.2, V.10.2, V.11.3, A.9.5

Līdzība: S.10.2, N.12.3, BW.13

Figūru sistēmas, piemēri: AB.14

Invariantu metode: A.11.4

Ekstremālie elementi: V.11.3, V.12.5, A.9.5, AB.13

SKAITĻU TEORIJA

Atlikumi, kongruences: S.11.1, N.9.4, N.9.5, N.10.3, N.11.1, N.11.4, N.12.4, V.10.3, A.11.1, A.12.1, VP.2, IMO.6, AB.16, AB.20, BW.16, BW.18, BW.19

Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: N.12.4, V.9.1, A.9.1, A.9.3, A.10.1, BW.16, BW.20

Dalāmības īpašības un pazīmes: A.9.4, BW.17

Vienādojumi veselos skaitļos: V.12.3, AB.17, AB.19

Skaitļa pieraksts: S.10.4, VP.1

Citi: AB.18

KOMBINATORIKA

Dirihlē princips: A.10.4

Invariantu metode, krāsošana: V.9.5, V.10.4, AB.8

Kombinatorikas struktūras: N.12.2, BW.8

Skaitīšana: S.12.5, N.9.3, A.12.5, AB.10, BW.7

Gadījumu pārlase: S.9.3, N.10.5, V.12.4, A.11.5, A.12.4, VP.5, AB.7, BW.9,

Matemātiskā indukcija: IMO.6, AB.6, AB.10

Ekstrēmu uzdevumi: S.9.5, S.10.5, S.11.5, V.11.2, A.10.5, BW.6

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde: N.11.5, V.10.5, V.11.5, A.9.4, IMO.3, AB.9, BW.10

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome:	A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja:	D. Kūma

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.

48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.