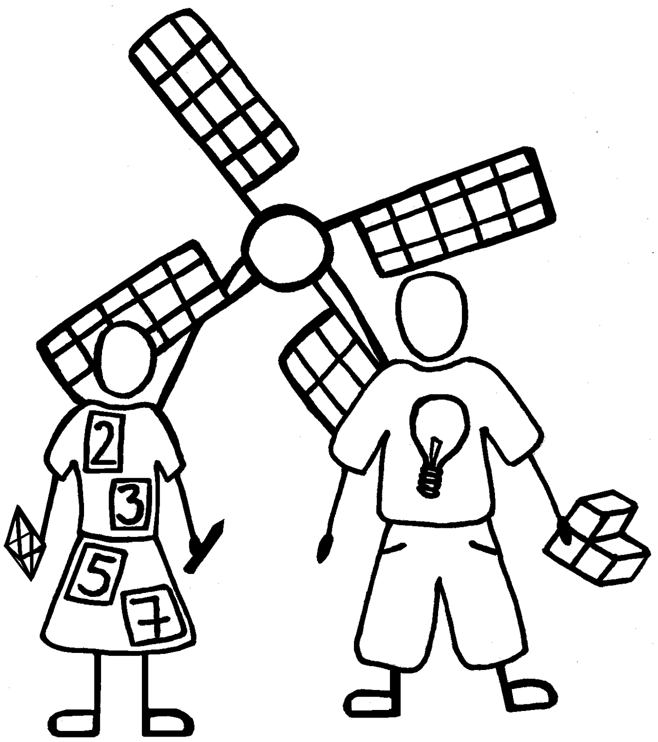
MARUTA AVOTIŅA, LAURA FREIJA

Matemātikas sacensības 9.–12. klasēm 2010./2011. mācību gadā



RĪGA 2011

M. Avotiņa, L. Freija. Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2011. – 156 lpp.

Grāmatā apkopoti 2010./2011. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. – 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Grāmatas sākumā dots īss teorijas izklāsts, kas varētu būt nepieciešams uzdevumu risināšanā.

Izsakām pateicību 2010./2011. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotājiem: A. Ambainim, A. Bērziņam, M. Opmanim, R. Opmanim, R. Ozolam, M. Valdatam, I. Veilandei, J. Vihrovam.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-435-1

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības pagājušā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā olimpiādes, kuras norisinās pašlaik. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko pasaules daļu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Līdz ar to olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām arī pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.).

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs vidusskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm, un skolotājiem, lai veiksmīgi organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas tās matemātikas olimpiādes, kurās var piedalīties Latvijas 9. – 12. klašu skolēni. Šāda veida mācību līdzeklis tiek izdots katru gadu, un pašlaik ir pieejami uzdevumu krājumi sākot ar 2005./2006. mācību gadu. Šajā grāmatā apskatītas tās olimpiādes, kuras norisinājās 2010./2011. mācību gadā:

- *Sagatavošanās matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1987./1988. mācību gada, tās rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Sagatavošanās olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu, tāpēc katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tas ir atkarīgs no matemātikas skolotājiem, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada* (*agrāk – Rajona*) *matemātikas olimpiāde* notiek kopš 20. gadsimta piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Novada olimpiāde notiek novada/novadu apvienības/pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts matemātikas olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Novada olimpiāde, notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek 2 dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas veiksmīgākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.
- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja

izrādījās tik auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, kā citās valstīs. Atklāto olimpiādi matemātikā rīko LU A. Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.

- *Starptautiskā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai Austrumu bloka valstis. Pēdējos gados tajā piedalās ap 100 valstīm no visas pasaules. Katra dalībvalsts izvirza ne vairāk kā 6 skolēnu komandu dalībai. Olimpiādē tiek vērtēts katrs skolēns atsevišķi. 2010./2011. mācību gadā Latvijas komandas dalībnieki ieguva 1 sudraba un 1 bronzas medaļu, kā arī 1 atzinības rakstu. Katru gadu neoficiāli tiek vērtēts arī komandas sniegums.
- *Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš"* tiek organizētas, lai izvēlētos skolēnus starptautiskajai komandu olimpiādei, kas norisinās mācību gada sākumā, tāpēc tās notiek jau septembra vidū. Uz atlases sacensībām tiek aicināti skolēni, kuri iepriekšējā mācību gadā uzrādījuši labus rezultātus Valsts un Atklātajā matemātikas olimpiādē.
- *Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš"* savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šī olimpiāde pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis. Tagad „Baltijas Ceļā" piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande. Katra valsts šīm sacensībām izvirza 5 skolēnu komandu, kurai olimpiādē 4,5 stundu laikā kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi. 2010./2011. mācību gadā Latvijas komanda 10 valstu konkurencē izcīnīja 4. vietu.

Šajā uzdevumu krājumā ne tikai apkopoti un izvērsti aprakstīti 2010./2011. mācību gada matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi, kā arī iekļautas sadaļas – „Ieteikumi" un „Teorija". Sadaļā „Ieteikumi" skolēni var smelties idejas uzdevuma risināšanā, ja neizdodas uzdevumu atrisināt patstāvīgi. Skolotāji ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos. Sadaļā „Teorija" iekļauts minimālais teorijas apjoms, kas varētu būt nepieciešams olimpiāžu uzdevumu risināšanā. Skolēni šo sadaļu var izmantot gan meklējot palīdzību uzdevumu risināšanā, gan gatavojoties matemātikas olimpiādēm, gan patstāvīgi apgūstot jaunas zināšanas. Skolotāji šo sadaļu var izmantot darbam matemātikas pulciņos.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Grāmatā visiem uzdevumiem dots izvērsts un pilnīgs atrisinājums, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu uzdevuma atrisinājuma pierakstu.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatas piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām apgūt šos paņēmienus, lai varētu turpmāk tos izmantot. Grāmatā piedāvājam mums zināmos racionālākos risinājumus un risinājumus, kas satur vērtīgas idejas, taču tie nav vienīgie šo uzdevumu atrisinājumi

Lai darbs ar grāmatu attīsta radošumu, un ceram, ka risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Autori

TEORIJA

BIEŽĀK SASTOPAMIE UZDEVUMU VEIDI

„Atrast vismazāko / vislielāko vērtību" – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām:

1) **atrast** šo vismazāko / vislielāko vērtību <u>un</u> **uzrādīt piemēru**;
2) **pierādīt**, ka mazāka / lielāka vērtība nevar būt.

Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2. daļu.

„Vai var ...?" – Uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā"**, vai atbilde **„nē"**. Ja atbilde ir:

- **„jā"**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **„nē"**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt ...?" – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības.

ALGEBRA

Saīsinātās reizināšanas formulas:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$, no kā seko
    - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
    - $(a-b)^2 = (b-a)^2$;
    - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$.

Par reāla skaitļa a **moduli** jeb absolūto vērtību (apzīmē $|a|$) sauc lielāko no skaitļiem a un $-a$. Tātad $|a| = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geq 0, \\ -a, & \text{ja } a < 0. \end{cases}$

Moduļa īpašības:

- $|a| \geq 0$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$;
- $|-a| = |a|$;
- $|a-b| = |b-a|$

- $|a+b| \le |a| + |b|$;
- $|a-b| \ge |a| - |b|$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, ja $b \ne 0$.

Par skaitļa x **veselo daļu** (apzīmē $[x]$) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x, t. i., veselo skaitli m tādu, ka $m \le x < m+1$.
Par skaitļa x **daļveida daļu** (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x - [x]$.

Polinomi

Par mainīgā x n-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

kur n – vesels nenegatīvs skaitlis, a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 – patvaļīgi skaitļi ($a_n \ne 0$).

Nultās pakāpes polinoms ir konstante, kas nav vienāda ar nulli.

Nulles polinoms ir konstante, kas vienāda ar nulli.

Saka, ka polinoms $P(x)$ dalās bez atlikuma ar polinomu $S(x)$, ja eksistē tāds polinoms $Q(x)$, ka $Q(x) \cdot S(x) = P(x)$.

Bezū teorēma. Dalot polinomu $P(x)$ ar binomu $x - a$, atlikumā iegūst $P(a)$, t. i., skaitli, kas ir polinoma vērtība pie $x = a$.

Secinājums. Lai mainīgā x n-tās pakāpes polinoms $P(x)$ dalītos bez atlikuma ar $x - a$, nepieciešami un pietiekami, lai skaitlis a būtu šī polinoma sakne, t. i., lai būtu spēkā vienādība $P(a) = 0$.

Algebras pamatteorēma. Polinomam $P_n(x)$ ir ne vairāk kā n saknes.

Lai polinomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ sadalītu reizinātājos, bieži izmanto šādas teorēmas:

- Katru polinomu P_n var sadalīt reizinātājos tā, lai katrs reizinātājs būtu pirmās vai otrās pakāpes polinoms.
- Ja $x = a$ ir polinoma P_n sakne, tad P_n dalās bez atlikuma ar binomu $x - a$ jeb polinoms P_n satur reizinātāju $x - a$.
- Ja polinomam P_n ir vesela sakne $x = a$, tad a ir brīvā locekļa a_0 dalītājs.
- Lai racionāls skaitlis (nesaīsināma daļa $\frac{p}{q}$) būtu polinoma sakne (polinoma koeficienti ir veseli skaitļi), nepieciešami, lai p būtu brīvā locekļa a_0 dalītājs, bet q būtu a_n dalītājs (t. i., a_0 dalītos bez atlikuma ar p, bet a_n – ar q).

Teorēma. Starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kur $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ un a_i, $i=0,1,...,n$, ir veseli skaitļi.

Pierādījums. Apskatām starpību

$$P(x)-P(y)=a_nx^n+...+a_1x+a_0-(a_ny^n+...+a_1y+a_0)=a_n(x^n-y^n)+...+a_1(x-y).$$

Izmantojot formulu $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$, kur n – naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i-y^i), i=1,2,...,n$ dalās ar ($x-y$). Tātad arī starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kas arī bija jāpierāda.

Kvadrāttrinoms un kvadrātvienādojums

Polinomu, kuru var pierakstīt formā ax^2+bx+c, kur *a*, *b* un *c* – reāli nenulles skaitļi, sauc par **kvadrāttrinomu**.

Par **kvadrātvienādojumu** sauc vienādojumu $ax^2+bx+c=0$, kur *x* ir mainīgais, bet *a*, *b*, *c* ir reāli skaitļi ($a\neq 0$).

Skaitļus *a*, *b*, *c* sauc par kvadrātvienādojuma **koeficientiem**; ax^2 sauc par kvadrātisko locekli, bx – lineāro locekli, *c* – brīvo locekli.

Kvadrātvienādojuma **sakņu aprēķināšana**:

- $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, kur diskriminants $D=b^2-4ac$;
- **Vjeta teorēma**: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$;

Kvadrātvienādojuma **sakņu skaits** ir atkarīgs no diskriminanta $D=b^2-4ac$ vērtības:

- $D<0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D=0$ – vienādojumam ir viena sakne jeb divas vienādas saknes $x=\dfrac{-b}{2a}$.
- $D>0$ – vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Kvadrāttrinomu var **sadalīt reizinātājos** izmantojot formulu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

Par **reducēto** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram $a=1$.

Par **nepilno** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram kāds no koeficientiem (izņemot *a*) ir vienāds ar nulli.

Ir trīs veidu nepilnie kvadrātvienādojumi:

- ja $b=0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2+c=0$ jeb $x^2=-\dfrac{c}{a}$:
  - ja $-\dfrac{c}{a}\geq 0$, tad $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$;
  - ja $-\dfrac{c}{a}<0$, tad vienādojumam nav reālu sakņu;

- ja $c = 0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2 + bx = 0$ jeb $x(ax + b) = 0$, kura saknes ir $x = 0$ un $x = -\frac{b}{a}$;
- ja $b = 0$ un $c = 0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2 = 0$ jeb $x^2 = 0$, kura sakne ir $x = 0$.

Funkcijas

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **pāra funkciju**, ja katram *x* no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = f(x)$. Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret *y* asi.
Funkciju $y = f(x)$ sauc par **nepāra funkciju**, ja katram *x* no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = -f(x)$. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, t. i., punktu $(0; 0)$.
Funkciju sauc par **augošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$ jeb funkciju sauc par augošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, palielinās funkcijas vērtības.
Funkciju sauc par **dilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$ jeb funkciju sauc par dilstošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, samazinās funkcijas vērtības.
Ja funkcija kādā intervālā ir tikai dilstoša vai tikai augoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju.
Funkciju vispārīgās īpašības:

- ja funkcija f ir augoša, tad funkcija $(-f)$ ir dilstoša;
- divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;
- divu augošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- divu dilstošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- augošas un dilstošas funkcijas kompozīcija ir dilstoša funkcija;
- pāra funkciju summa (reizinājums) ir pāra funkcija;
- divu nepāra funkciju reizinājums (dalījums) ir pāra funkcija;
- pāra un nepāra funkcijas reizinājums (dalījums) ir nepāra funkcija.

Funkciju $f(x)$ un $g(x)$ **grafiku krustpunktu *x* koordinātas** ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

Lineārā funkcija: $f(x) = kx + b$.

- Lineārās funkcijas grafiks ir taisne.
- Punkts $(0; b)$ ir lineārās funkcijas krustpunkts ar *y* asi.
- Koeficientu *k* sauc par taisnes virziena koeficientu.
- Ja $k > 0$, tad taisne ir augoša; ja $k < 0$, tad taisne ir dilstoša.
- Lineārās funkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Ja $b = 0$, tad lineāro funkciju sauc par tiešās proporcionalitātes funkciju.

Apgrieztās proporcionalitātes funkcija: $f(x) = \frac{k}{x}$.

- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas grafiks ir hiperbola.
- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas grafiks nekrusto ne *x* asi, ne *y* asi.

- Ja $k > 0$, tad funkcijas grafiks atrodas 1. un 3. kvadrantā; ja $k < 0$, tad funkcijas grafiks atrodas 2. un 4. kvadrantā.
- Ja $k > 0$, tad funkcija ir dilstoša; ja $k < 0$, tad funkcija ir augoša.
- Apgrieztās proporcionalitātes funkcijas inversā funkcija ir apgrieztās proporcionalitātes funkcija.

Kvadrātfunkcija: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Ja $a > 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz augšu. Funkcijai ir vismazākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes x koordināta.
- Ja $a < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz leju. Funkcijai ir vislielākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes x koordināta.
- Ja $D = b^2 - 4ac < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks nekrusto x asi.
- Punkts $(0; c)$ ir kvadrātfunkcijas grafika krustpunkts ar y asi.

Eksponentfunkcija: $y = a^x$.

- Ja $a > 1$, tad eksponentfunkcijas grafiks ir augoša funkcija; ja $0 < a < 1$, tad – dilstoša funkcija.
- Eksponentfunkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(0; +\infty)$.
- Eksponentfunkcijas inversā funkcija ir logaritmiskā funkcija.

Logaritmiskā funkcija: $f(x) = \log_a x$.

- Ja $a > 1$, tad logaritmiskās funkcijas grafiks ir augoša funkcija; ja $0 < a < 1$, tad – dilstoša funkcija.
- Logaritmiskās funkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(0; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Logaritmiskās funkcijas inversā funkcija ir eksponentfunkcija.

Trigonometriskās funkcijas: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg} x$, $f(x) = \mathrm{ctg} x$.

- Sinusa un kosinusa funkciju vērtību apgabals ir intervāls $[-1; 1]$, t. i., šīs funkcijas ir ierobežotas.
- Sinusa un kosinusa funkciju definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Funkcija $f(x) = \mathrm{tg} x$ nav definēta, ja $x = \pi n$, $n \in Z$; funkcija $f(x) = \mathrm{ctg} x$ nav definēta, ja $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
- Kosinusa funkcija ir pāra funkcija, t. i., $\cos(-x) = \cos x$.
- Sinusa, tangensa un kotangensa funkcijas ir nepāra funkcijas, t. i., $\sin(-x) = -\sin x$, $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg} x$ un $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg} x$.
- Sinusa un kosinusa funkcijas ir periodiskas funkcijas ar perioda garumu $T = 2\pi$.
- Tangensa un kotangensa funkcijas ir periodiskas funkcijas ar perioda garumu $T = \pi$.

Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kas kā mainīgo satur nezināmo funkciju.
Risināšanas metodes:

- Dažādu vērtību ievietošana (piemēram, $x=0$, $x=1$, $x=y=0$);
- Substitūciju metode (jāievēro sākotnējais definīcijas apgabals);
- Ekvivalentu pārveidojumu veikšana;
- Nenoteikto koeficientu metode.

Elementārās funkcijas: Ja f ir nepārtraukta funkcija, kas visiem $x, y \in R$ apmierina vienādību:

- $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (Koši vienādība), tad $f(x)=Cx$, kur konstante $C=f(1)$;
- $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, tad $f(x)=C^x$, kur C – konstante;
- $f(xy)=f(x)+f(y)$, tad $f(x)=C\ln x$, kur C – konstante;
- $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, tad $f(x)=x^C$, kur C – konstante;
- $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ (Jensena vienādība), tad $f(x)=C_1x+C_2$, kur C_1, C_2 – konstantes.

Klasiskās nevienādības

Izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs $a^2 \geq 0$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo ģeometrisko** $A \geq G$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \quad \text{jeb} \quad a_1+a_2+...+a_n \geq n\cdot\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \quad \text{visiem}$$

$$a_i > 0,\ i=1, 2, ..., n.$$

Secinājumi:

- $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$;
- $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko** $Q \geq A$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko** $A \geq H$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \quad \text{visiem } a_i > 0,\ i=1, 2, ..., n.$$

Piezīme: $H \leq G \leq A \leq Q$.

Koši-Buņakovska nevienādība:

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right) \geq \left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2,$$

kur $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi.

Progresijas un rekurences sakarības

Virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par **aritmētisko progresiju**. Šo skaitli sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci** un apzīmē ar d: $a_{n+1} = a_n + d$.

Lai definētu aritmētisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un diferenci.

Lai aprēķinātu virknes n-to locekli, lieto formulu $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Virkni, kuras katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu nenulles skaitli, sauc par **ģeometrisko progresiju**. Šo skaitli sauc par ģeometriskās progresijas **kvocientu** q: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Lai definētu ģeometrisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un kvocientu.

Lai aprēķinātu virknes n-to locekli, lieto formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$.

Ja $|\, q \,| < 1$, tad ģeometrisko progresiju sauc par **bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju** un tās visu locekļu summu aprēķina pēc formulas $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Par **rekurentu virkni** sauc skaitļu virkni u_0, u_1, …, u_n, …, kuras katrs loceklis ir vienādā veidā, t. i., neatkarīgi no locekļa numura n, izsakāms ar noteikta skaita (piemēram, k) iepriekšējiem locekļiem:

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-k}), \text{ kur } n = k, k+1, ...$$

Par **rekurences sakarību** sauc vienādojumu, kas rekursīvi definē skaitļu virkni.

Ja funkcija f ir lineāra (t. i., nesatur reizinājumus, dalījumus un pakāpes, kas augstākas par pirmo), tad iegūstam vienādību

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}, \text{ kur } a_k \neq 0, \qquad (*)$$

ko sauc par ***k*-tās kārtas lineāru rekurentu jeb diferenču vienādojumu**.

Piezīme: Aritmētiskā un ģeometriskā progresija arī ir rekurentas virknes.

Lineāro diferenču vienādojumu atrisināšana

Diferenču vienādojumu (*) var apmierināt daudzas virknes. Lai k-tās kārtas lineārā diferenču vienādojuma (*) atrisinājums būtu viennozīmīgi noteikta virkne, jāuzdod šīs virknes pirmo k locekļu u_0, u_1, …, u_{k-1} vērtības. Tie ir sākumnosacījumi, kas ļauj viennozīmīgi aprēķināt turpmākos locekļus, sākot no u_k.

Diferenču vienādojumu galvenā risināšanas metode.

Vispirms sastāda vienādojumam (*) atbilstošo **raksturīgo jeb harakteristisko vienādojumu** $r(t) = 0$ ar mainīgo t, kur $r(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - ... - a_{k-1} t - a_k$ ir k-tās pakāpes polinoms.

Ja polinoma $r(t)$ visas saknes r_1, r_2, …, r_k ir reālas un dažādas, vienādojuma (*) vispārīgais atrisinājums ir lineāra kombinācija no k ģeometriskām progresijām:

$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + ... + C_k r_k^n .$$

Konstantes C_1, C_2, …, C_k atrod no sākumnosacījumiem, izmantojot zināmās vērtības u_0, u_1, …, u_{k-1}, t. i., atrisinot k lineāru vienādojumu sistēmu

$$u(i) = u_i \text{ jeb } C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + ... + C_k r_k^i = u_i , \; i = 0, 1, ..., k-1 .$$

Ja dots otrās kārtas lineārs diferenču vienādojums $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$, tad tā raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums formā $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$.

Ja kvadrātvienādojuma saknes r_1 un r_2 ir

- reālas un dažādas, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir $u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$;
- vienādas $r_1 = r_2 = r$, tad dotā diferenču vienādojuma atrisinājums ir $u_n = C_1 r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$ jeb $u_n = (C_1 + nC_2) r^n$.

Vienkāršākais otrās kārtas lineārais diferenču vienādojums $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ar sākuma nosacījumiem $u_0 = 0$ un $u_1 = 1$ definē virkni, kuras locekļus sauc par **Fibonači skaitļiem** (apzīmē F_n). Ja uzdoti sākuma nosacījumi $u_0 = 2$ un $u_1 = 1$, tad veidojas skaitļu virkne, kuras locekļus sauc par **Lukasa skaitļiem** (apzīmē l_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
l_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

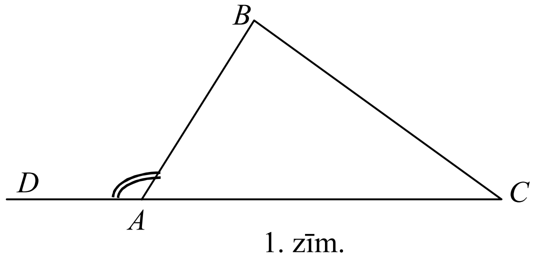
Fibonači skaitļu īpašības:

- $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, kur $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ un $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$;
- $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$;
- $F_{2n} = (F_{n-1} + F_{n+1}) F_n = (2F_{n-1} + F_n) F_n$;
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

ĢEOMETRIJA

Trijstūri

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.
Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis (skat. 1. zīm.).



$$\angle BAD = \angle ABC + \angle BCA$$

1. zīm.

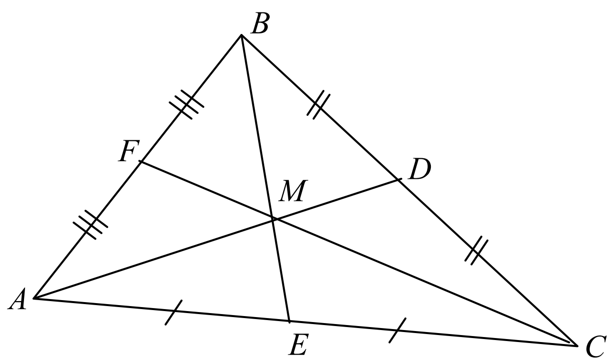
Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par trijstūra **viduslīniju**.
Viduslīnijas īpašības:

- Trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- Trijstūra viduslīnijas garums ir vienāda ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas;
- Trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

Par **trijstūra augstumu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējo malu (vai pretējās malas pagarinājumu) un ar to veido taisnu leņķi. Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

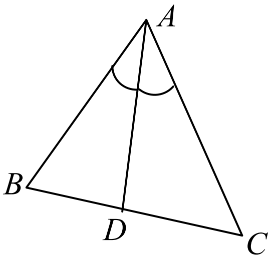
Par **trijstūra mediānu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējās malas viduspunktu.
Trijstūra mediānu īpašība. Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, t. i., $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}$, kur M – mediānu krustpunkts (skat. 2. zīm.).



2. zīm.

Par **bisektrisi** sauc taisni, kas sadala leņķi divās vienādās daļās.
Par **trijstūra bisektrisi** sauc trijstūra leņķa bisektrises nogriezni, kas atrodas trijstūra iekšpusē. Trijstūra bisektrises krustojas vienā punktā.

Trijstūra bisektrises īpašība. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, t. i., $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (skat. 3. zīm.).



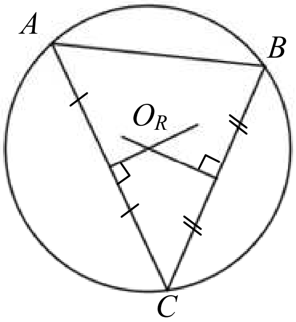
3. zīm.

Par nogriežņa **vidusperpendikulu** sauc taisni, kas iet caur dotā nogriežņa viduspunktu un ir perpendikulāra dotajam nogrieznim.

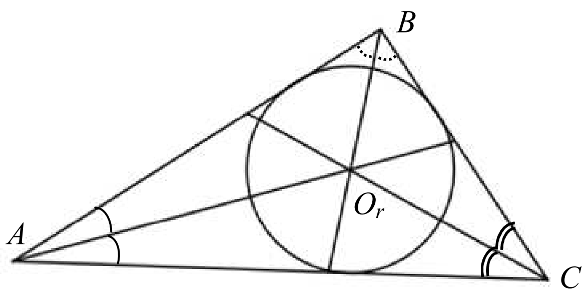
Vidusperpendikula īpašība. Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem.

Jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula.

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir **trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 4. zīm.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir **trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 5. zīm.).



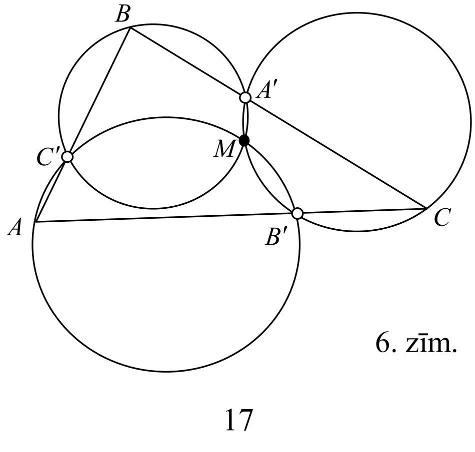
4. zīm.



5. zīm.

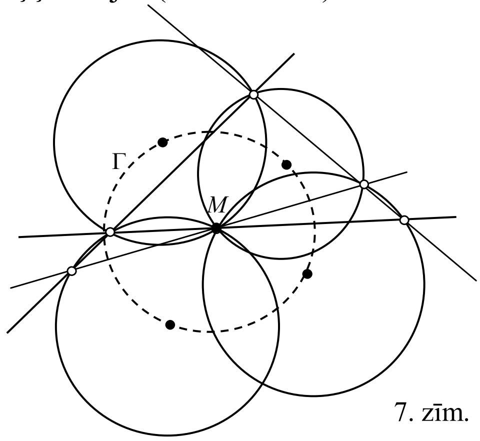
Simsona teorēma. Ja no trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas punkta novelk perpendikulus pret taisnēm AB, BC, CA, tad perpendikulu pamati atrodas uz vienas taisnes. Šo taisni sauc par Simsona taisni.

Mikela teorēma. Ja uz katras no trijstūra ABC malām vai to pagarinājumiem ir atlikts punkts, tad trīs riņķi, kur katrs no tiem iet caur citu trijstūra ABC virsotni un abiem punktiem, kas atlikti uz attiecīgās virsotnes piemalām, krustojas vienā punktā M (skat. 6. zīm.). Punktu M sauc par Mikela punktu un trīs riņķus sauc par Mikela riņķiem.



6. zīm.

Mikela teorēmas vispārinājums četrām taisnēm. Ja dotas četras taisnes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4, kur katra krustojas ar katru, un četri riņķi, kur katrs no tiem iet caur citiem trim taišņu ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 un ℓ_4 krustpunktiem, tad tās krustojas punktā *M*. Punktu *M* sauc par Mikela ceturto punktu un četrus riņķus sauc par Mikela riņķiem. Šo četru Mikela riņķu centri atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. 7. zīm.).



7. zīm.

Trijstūru vienādības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām
- „*m* ℓ *m*" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām;
- „ℓ *m* ℓ" – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem.

Trijstūru līdzības pazīmes:

- „*mmm*" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām ;
- „*m* ℓ *m*" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi;
- „$\ell\ell$" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem .

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu *k*), bet laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k, \qquad \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2$$

Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu *k*.

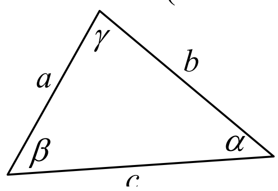
Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

- $S_\Delta = \frac{ah_a}{2}$;
- $S_\Delta = p \cdot r$;
- $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$;
- $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kur γ – leņķis starp malām *a* un *b*;
- $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hērona formula),

kur *a*, *b*, *c* – trijstūra malas, h_a – augstums, kas novilkts pret malu *a, p* – pusperimetrs, *r* – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, *R* – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Sinusu teorēma: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (skat. 8. zīm.).

Kosinusu teorēma: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (skat. 8. zīm.).



8. zīm.

Nevienādības trijstūros

Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un katras trijstūra malas garums ir lielāks nekā abu pārējo divu malu garumu starpība, t. i., ja *a*, *b*, *c* – trijstūra malu garumi, kur $a \le b \le c$, tad $a + b > c$ un $c - b < a$.

Trijstūra mediāna ir mazāka nekā malu, starp kurām tā atrodas, pussumma, t. i., $m_a < \frac{b+c}{2}$, kur m_a – mediāna, kas novilkta pret malu *a*.

Par **vienādsānu trijstūri** sauc trijstūri, kura divas malas ir vienādas. Vienādās trijstūra malas sauc par sānu malām, bet trešo malu – par pamatu.

Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.

Augstums, kas novilkts pret trijstūra pamatu, ir arī šī trijstūra mediāna un bisektrise.

Ja nogrieznis ir trijstūra augstums un bisektrise, tad tas ir arī trijstūra mediāna un šis trijstūris ir vienādsānu.

Regulārs (vienādmalu) trijstūris

Par **regulāru (vienādmalu) trijstūri** sauc trijstūri, kuram visas malas ir vienādas. Regulāra trijstūra visi leņķi ir vienādi, t. i., $60°$ lieli

Vienādmalu trijstūrī katra mediāna ir arī bisektrise un augstums.

Regulāra trijstūra laukums: $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kur *a* ir trijstūra malas garums.

Regulāra trijstūra augstums: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

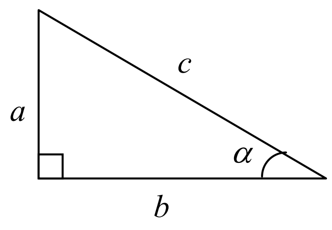
Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnija rādiuss: $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss: $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Taisnleņķa trijstūris

Pitagora teorēma. Taisnleņķa trijstūrī katešu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas garuma kvadrātu, t. i., $a^2 + b^2 = c^2$, kur a un b ir katešu garumi un c – hipotenūzas garums.
Trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī (skat. 9. zīm):

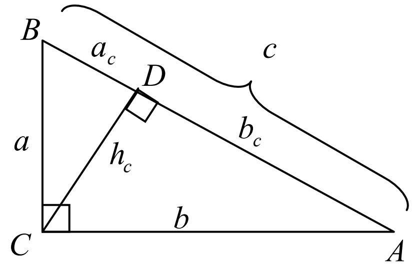
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$;
- $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.



9. zīm.

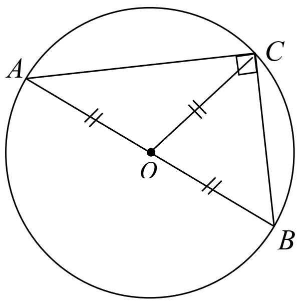
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, t. i., $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (skat. 10. zīm.). Ir spēkā šādas sakarības:

- $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
- $a^2 = a_c \cdot c$;
- $b^2 = b_c \cdot c$;
- $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$.



10. zīm.

Ap taisnleņķa trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā, un tās rādiusa garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.
Taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta no taisnā leņķa virsotnes, ir vienāda ar trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu, t. i., ar pusi no hipotenūzas (skat. 11. zīm.).



11. zīm.

Riņķis un riņķa līnija

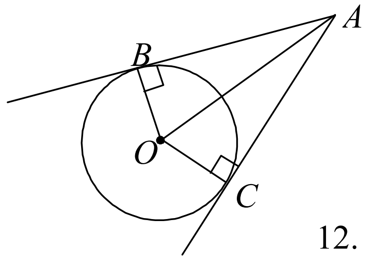
Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas **centru**, bet attiecīgo attālumu — par riņķa līnijas **rādiusu**.
Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.
Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
Par riņķa līnijas **loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.
Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.
Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.

Ar riņķi un riņķa līniju saistītās formulas:

- $D = 2R$, kur D – diametrs un R – riņķa līnijas rādiuss;
- riņķa laukums: $S = \pi R^2$;
- sektora laukums: $S_{sektora} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}$;
- riņķa līnijas garums: $C = 2\pi R$;
- riņķa līnijas loka garums: $l_{loka} = \dfrac{\pi R \alpha}{180°}$.

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti B un C – šo pieskaru pieskaršanās punkti un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 12. zīm.), tad

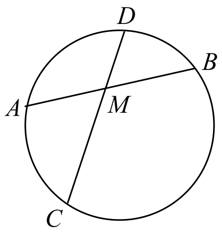
- $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\angle BAO = \angle CAO$;
- $OB \perp AB$.



12. zīm.

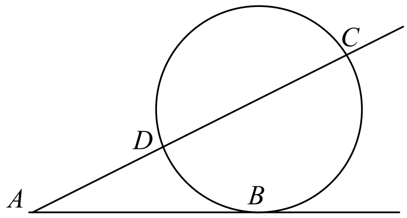
Metriskās sakarības riņķa līnijā

Hordu īpašība



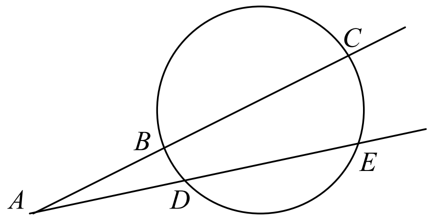
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Pieskares – sekantes īpašība



$AB^2 = AC \cdot AD$

Sekanšu īpašība



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Leņķi riņķa līnijā

Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.

Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka, uz kura tas balstās, leņķisko lielumu, t. i., $\angle AOB = \cup AmB$ (skat. 11. zīm.).

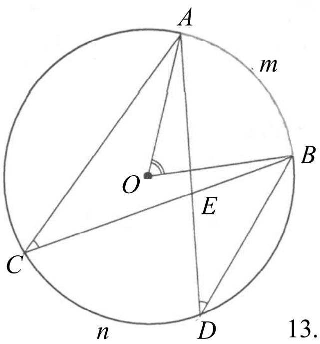
Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.

Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma, t. i., $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$ (skat. 11. zīm.).

Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, piemēram, $\angle ACB = \angle ADB$ (skat. 13. zīm.).

Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.

Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir $90°$ un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.



13. zīm.

Par **hordas - pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.

Hordas - pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.

Par riņķa līnijas **ārējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas ārpus riņķa un tā malas krusto riņķa līniju vai arī viena vai abas malas pieskaras riņķa līnijai.

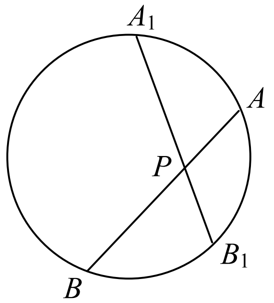
Ārējā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no to divu loku leņķisko lielumu starpības, kuri atrodas starp leņķa malām.

Par riņķa līnijas **iekšējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa iekšpusē, bet malas krusto riņķa līniju.

Iekšējā leņķa lielums jeb leņķa lielums starp divām hordām ir vienāds ar to divu loku, no kuriem viens ir starp leņķa malām, bet otrs ir starp leņķa malu pagarinājumiem, leņķisko lielumu pussummu, t. i., $\angle CED = \dfrac{\cup CnD + \cup AmB}{2}$ (skat. 11. zīm.).

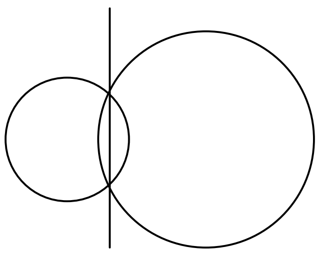
Radikālā ass un punkta pakāpe attiecībā pret riņķa līniju

Ja dota riņķa līnija, patvaļīgi izvēlēts punkts P un taisne, kas iet caur šo punktu P un krusto riņķa līniju punktos A un B (skat. 14. zīm.), tad nogriežņu garumu reizinājums $PA \cdot PB$ nav atkarīgs no taisnes AB izvēles. Šo reizinājumu $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1$ sauc par **punkta *P* pakāpi attiecībā pret riņķa līniju**.

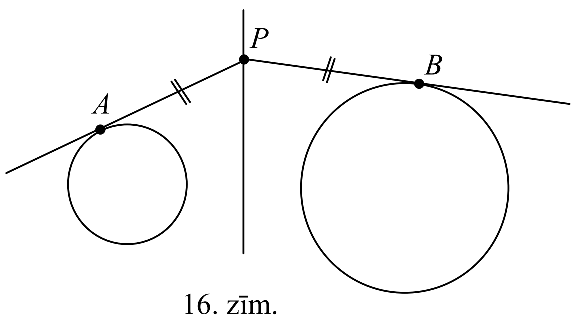


14. zīm

Ja punkts P atrodas ārpus riņķa līnijas, tad tā pakāpe attiecībā pret šo riņķa līniju ir vienāda ar no šī punkta vilktās pieskares nogriežņa garuma kvadrātu.
Par divu riņķa līniju **radikālo asi** sauc to punktu kopu, kuru pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas.
Radikālā ass eksistē tad un tikai tad, ja riņķa līnijas nav koncentriskas.
Radikālā ass ir perpendikulāra taisnei, kas iet caur abu riņķa līniju centriem
Punktam, kas atrodas uz divu riņķa līniju kopējās hordas, pakāpes attiecībā pret šīm riņķa līnijām ir vienādas. Tātad divām krustiskām riņķa līnijām radikālā ass ir taisne, kas iet caur šo riņķa līniju kopējiem punktiem (skat. 15. zīm.).
Ja riņķa līnijām nav kopīgu punktu, tad radikālā ass ir taisne, kas sastāv no visiem tiem punktiem, no kuriem vilkto pieskaru nogriežņi pret šīm riņķa līnijām ir vienādi (skat. 16. zīm.).



15. zīm.



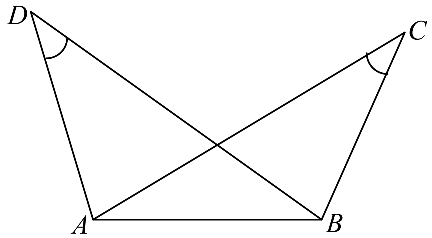
16. zīm.

Ievilkti un apvilkti četrstūri

Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

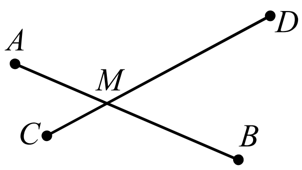
Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja:

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;
- izpildās vienādība $\angle ACB = \angle BDA$ (skat. 17. zīm.);



17. zīm.

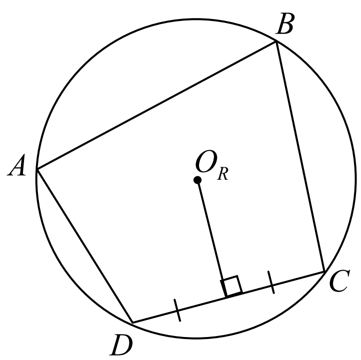
- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AB un CD krustpunkts (skat. 18. zīm.).



18. zīm.

Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju.
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.
Četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas.

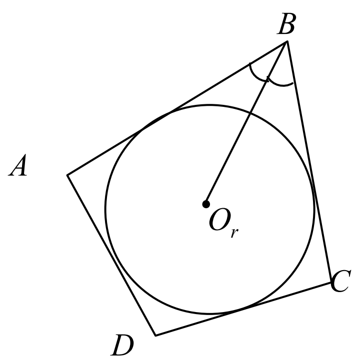
Ievilkts četrstūris



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

O_R – malu vidusperpendikulu krustpunkts

Apvilkts četrstūris



$AB + CD = AD + BC$

O_r – leņķu bisektrišu krustpunkts

Vektori

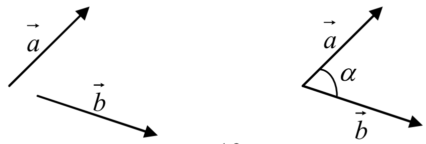
Par **vektoru** sauc orientētu nogriezni.
Par nulles vektoru sauc vektoru, kuram sakrīt sākuma punkts un beigu punkts, t. i., jebkurš punkts ir nulles vektors.

Par nenulles vektora $\vec{a}$ **garumu** jeb **moduli** sauc nogriežņa a garumu un apzīmē ar $|\vec{a}|$.

Ja dots vektors $\vec{a} = (a_x, a_y)$, tad $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Par nenulles vektora **virzienu** sauc tās taisnes virzienu, uz kuras šis vektors atrodas.
Par nenulles vektora **vērsumu** sauc stara, uz kura atrodas vektors un kura sākumpunkts sakrīt ar vektora sākumpunktu, vērsumu.

Par **kolineāriem** vektoriem sauc vektorus, kas ir savstarpēji paralēli.
Par **vienādiem** vektoriem sauc kolineārus vektorus, kuriem ir vienādi garumi un vienādi vērsumi.
Par **pretējiem** vektoriem sauc divus kolineārus vektorus, kuru garumi vienādi, bet vērsumi pretēji.
Dotajam vektoram pretējo vektoru apzīmē, mainot dotā vektora zīmi vai mainot vietām burtus (piemēram, $\vec{a}$ pretējais vektors ir $-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ pretējais vektors ir $-\overrightarrow{AB}$ jeb $\overrightarrow{BA}$).
Par **leņķi starp diviem nenulles vektoriem** sauc leņķi starp šo vektoru virzieniem (skat. 19. zīm.).



19. zīm.

Par **perpendikulāriem** jeb **ortogonāliem** vektoriem (raksta $\vec{a} \perp \vec{b}$) sauc divus vektorus, starp kuriem leņķis ir $90°$.
Par divu vektoru **skalāro reizinājumu** sauc šo vektoru garumu reizinājumu ar kosinusu no leņķa starp vektoriem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \text{, kur } \alpha \text{ – leņķis starp vektoriem.}$$

Ja doti vektori $\vec{a} = (a_x, a_y)$ un $\vec{b} = (b_x, b_y)$, tad šo vektoru skalāro reizinājumu var aprēķināt pēc formulas: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.
No skalārā reizinājuma definīcijas var izteikt vektoru veidotā leņķa kosinusu: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Vektora reizinājums ar skaitli ir vektors, bet divu vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis.
No skalārā reizinājuma definīcijas izriet, ka divu vienādi vērstu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar to garumu reizinājumu: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Divu vienādu un vienādi vērstu vektoru skalāro reizinājumu sauc par skalāro kvadrātu un tas ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir nulle tad un tikai tad, ja šie vektori ir savstarpēji perpendikulāri:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

SKAITĻU TEORIJA

Skaitļu iedalījums

- N – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- Z – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- Q – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in Z$ un $n \in N$.
- I – iracionālie skaitļi: bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi (piemēram, $\sqrt{2}$, e, π).
- R – reālie skaitļi: racionālie skaitļi Q un iracionālie skaitļi I.

Dalāmība

Par vesela skaitļa b **dalītāju** sauc veselu skaitli a, ja eksistē tāds vesels skaitlis c, ka $ac = b$. Skaitli b sauc par skaitļa a **dalāmo** jeb **daudzkārtni**, bet a – par skaitļa b **dalītāju**.

Ja skaitlis b dalās ar skaitli a, tad to apzīmē ar $a \mid b$ vai $b \vdots a$.

Dalāmības īpašības (a, b, c, d un n ir veseli skaitļi):

- $0 \vdots a$, $a \vdots \pm 1$, $a \vdots a$;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots c$, tad $a \vdots c$;
- ja $a \vdots c$, tad $ab \vdots c$;
- ja $a \vdots c$ un $b \vdots c$, tad $ax + by \mid c$ jebkuriem veseliem skaitļiem x un y;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots a$, tad $a = \pm b$;
- ja $a \vdots b$ un $c \vdots d$, tad $ac \vdots bd$;
- ja $ac \vdots bc$, tad $a \vdots b$;
- ja $a \vdots b$ un $a, b > 0$, tad $b \le a$;
- ja $a \cdot b = c$, tad $c \vdots a$ vai $c \vdots b$;
- ja divi skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar c, tad šo skaitļu starpība $a - b$ dalās ar c;
- skaitlis dalās ar $n = a \cdot b$ (a un b – savstarpēji pirmskaitļi), ja tas dalās gan ar a, gan ar b.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2, ja tas beidzas ar pāra ciparu;
- skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3;
- skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4;
- skaitlis dalās ar 5, ja tas beidzas ar ciparu 0 vai 5;
- skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9;
- skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.
Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, piemēram,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.

Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).

Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_m + 1)$ dažādi dalītāji, šo dalītāju summa ir $(1 + p_1 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + ... + p_2^{k_2})...(1 + p_m + ... + p_m^{k_m})$.

Ja p ir pirmskaitlis un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

Fermā mazā teorēma. Ja p ir pirmskaitlis un a nedalās ar p, tad $a^{p-1} - 1$ dalās ar p.

Fermā lielā teorēma. Vienādojumam $x^n + y^n = z^n$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos, ja $n > 2$.

Salikta skaitļa n mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.

Naturāls skaitlis $n > 1$ nav pirmskaitlis tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitļa n dalītājs $m > 1$, kurš nepārsniedz $\sqrt{n}$.

Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis n ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Skaitļa $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ īpašības:

- Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz n, ir $n!$ dalītāji.
- Visi skaitļa $n!+1$ naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki nekā n.
- Visi skaitļi intervālā $[n!+2; n!+n]$ ir salikti skaitļi.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **lielāko kopīgo dalītāju** sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru katrs no dotajiem skaitļiem dalās bez atlikuma. Divu skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju apzīmē ar $LKD\,(a, b)$.

Skaitļus a un b sauc par **savstarpējiem pirmskaitļiem**, ja $LKD\,(a, b) = 1$.

Operācijai LKD piemīt šādas īpašības (a, b, c un m ir naturāli skaitļi):

- $LKD\,(a, a) = a$.
- $LKD\,(a, 1) = 1$ (jebkurš naturāls skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli 1).
- $LKD\,(a, b) = LKD\,(b, a)$.
- $LKD\,(a, a+1) = 1$ (secīgi naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi).
- $LKD\,(ma, mb) = m \cdot LKD\,(a, b)$.
- $LKD\,(a, b) = LKD\,(a, ac + b)$
- Ja a un b dalās ar m, tad $LKD\,(a, b)$ arī dalās ar m.
- $LKD\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{LKD\,(a, b)}{m}$.
- $LKD\,(a^m, b^m) = \left(LKD\,(a, b)\right)^m$.
- $LKD\,(p^x, p^y) = p^{\min(x,\, y)}$.

Lielāko kopīgo dalītāju var atrast ar **Eiklīda algoritmu**, kas balstīts uz dalīšanu ar atlikumu: vispirms nepilni izdala lielāko skaitli ar mazāko un tad katrā nākamajā solī iepriekšējās darbības dalītāju dala ar iegūto atlikumu. Lielākais kopīgais dalītājs ir pēdējais iegūtais nenulles atlikums.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **mazāko kopīgo dalāmo** sauc mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no dotajiem skaitļiem bez atlikuma. Divu skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo apzīmē ar $MKD\,(a, b)$.

Operācijai MKD piemīt šādas īpašības (a, b, c un m ir naturāli skaitļi):

- $MKD\,(a, a) = a$.
- $MKD\,(a, b) = MKD\,(b, a)$.
- $MKD\,(ma, mb) = m \cdot MKD\,(a, b)$.
- Ja a vai b dalās ar m, tad $MKD\,(a, b)$ arī dalās ar m.
- Ja gan a, gan b dalās ar m, tad $MKD\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{MKD\,(a, b)}{m}$.
- $MKD(a^m, b^m) = \left(MKD\,(a, b)\right)^m$.
- $MKD\,(p^x, p^y) = p^{\max(x,\, y)}$.
- $MKD\,(a, b) = \frac{ab}{LKD\,(a, b)}$ jeb $MKD\,(a, b) \cdot LKD\,(a, b) = ab$.

Skaitļu pieraksts:

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis;
- $2n + 1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3;
- $3n + 1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
Piezīme. No k pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar k.

Kongruence

Ja a un m, $m \neq 0$, ir veseli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst, a dalot ar m, ir tāds vesels skaitlis r, ka $a = q \cdot m + r$, kur q ir vesels skaitlis un $0 < |r| < |m|$. Šajā gadījumā iespējami divi dažādi atlikumi. Ja, a dalot ar m, r_1 ir pozitīvs atlikums un r_2 – negatīvs, tad $r_1 = r_2 + m$.

Ja a un m ir naturāli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst skaitli a dalot ar m, ir vesels skaitlis robežās no 0 līdz $m - 1$.

Divi skaitļi a un b ir **kongruenti pēc moduļa *m*** (apzīmē ar pierakstu $a \equiv b \pmod{m}$), kur $m \neq 0$, tad un tikai tad, ja $a - b$ dalās ar m jeb skaitļi a un b dod vienādu atlikumu, ja tos dala ar m.

Kongruences īpašības:

- jebkuram m izpildās vienādība: $a \equiv a \pmod{m}$;
- $a \equiv b \pmod{m}$ tad un tikai tad, ja $a \equiv b \pmod{(-m)}$;
- ja $m = \pm 1$, tad jebkuriem diviem skaitļiem a un b izpildās vienādība $a \equiv b \pmod{m}$, t. i., visi veselie skaitļi ir kongruenti pēc moduļa 1;
- ja $m = 0$, tad $a \equiv b \pmod{m}$ tad un tikai tad, ja $a = b$;
- ja $m \,\vdots\, m_1$ un $a \equiv b \pmod{m}$, tad $a \equiv b \pmod{m_1}$;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $ka \equiv kb \pmod{m}$, kur k ir vesels skaitlis;

- ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, tad $a + a_1 \equiv b + b_1 \pmod{m}$, $a - a_1 \equiv b - b_1 \pmod{m}$ un $aa_1 \equiv bb_1 \pmod{m}$.

Secinājums. Ja $f(a_1, a_2, ..., a_k)$ ir patvaļīga vesela izteiksme un $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, ... , $a_k \equiv b_k \pmod{n}$, tad

$$f(a_1, a_2, ..., a_k) \equiv f(b_1, b_2, ..., b_k) \pmod{n}.$$

Tas nozīmē, ka, veicot aprēķinus pēc moduļa *n*, jebkuru skaitli izteiksmē var aizvietot ar jebkuru citu tam kongruentu skaitli. Parasti skaitli *a* aizvieto ar skaitļa *a* atlikumu pēc moduļa *n*, bet atsevišķos gadījumos var ņemt citu tam kongruentu skaitli.

Teorēma. Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa m ir periodiska.

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus a^n pēc moduļa *m*. Tiklīdz virknē $a^n \pmod{m}$ parādās vienādi skaitļi, mēs esam atraduši periodu.

KOMBINATORIKA

Saikļu lietojums:

- saiklis „un" nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām vai nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- saiklis „vai" nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības vai nosacījumi);
- saiklis „vai nu ... , vai" nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam.

Kombinatorikas **saskaitīšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas **vai nu** viena, **vai** otra, **vai** trešā utt. veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ veidos.
Kombinatorikas **reizināšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida **un** otrā veida, **un** trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ veidos.

Par **permutāciju** sauc visu doto elementu sakārtojumu rindā.
Ja n dažādi elementi jāsakārto rindā, tad to var izdarīt $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ dažādos veidos.

Par **variācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vai nu ar elementu sastāvu, vai to izkārtojumu izlasē.
Visu variāciju skaitu no n elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu A_n^k. Variāciju skaitu aprēķina pēc formulas:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Par **kombinācijām** no n elementiem pa k elementiem katrā sauc tādas izlases, kurās ir tieši k dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vismaz ar vienu elementu.
Kombināciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē ar simbolu C_n^k.
Kombināciju skaitu aprēķina pēc formulām:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Secinājums. $A_n^k \geq C_n^k$.

Kombināciju skaita īpašības:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ja $0 < k < n$.

Paskāla trijstūris:

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Ņūtona binoma formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n .$$

Vidējās vērtības metode

Uzdevumu risināšana balstās uz konkrēti formulētām teorēmām, piemēram,

- Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.
- Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.
- Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Viens no Vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā *n* truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.
Vispārinātais Dirihlē princips: ja vairāk nekā $m \cdot n$ truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz $m+1$ trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

Invariantu metode

Vārds „invariants” cēlies no latīņu valodas un nozīmē nemainīgs.
Par **invariantiem lielumiem / īpašībām** sauc lielumus / īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt **nav** iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

- atrodam **invarianto īpašību**, t. i., īpašību, kura **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem un **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- parādam, ka šī īpašība **nepiemīt** lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā.

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml.
Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – **krāsošana** (bieži izmanto figūras iekrāsošanu kā šaha galdiņu), kur invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

Matemātiskās indukcijas metode

Par **indukciju** sauc spriešanas metodi, kurā no konkrētiem piemēriem iegūst vispārīgu slēdzienu.
Lietojot matemātiskās indukcijas principu uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

- pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*induktīvā bāze*);
- pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (*induktīvais pieņēmums*);
- pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).
- secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Pierādījuma metodi, kas balstās uz matemātiskās indukcijas principa, sauc par **matemātiskās indukcijas metodi**.
Matemātiskās indukcijas metode ļauj no atsevišķu elementu īpašībām izdarīt spriedumus par visu kopu.

UZDEVUMI

S. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

S.9. Devītā klase

S.9.1. Pierādiet, ka $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

S.9.2. Trijstūrī viena no mediānām perpendikulāra vienai no bisektrisēm. Pierādiet, ka viena no trijstūra malām ir divas reizes garāka par otru.

S.9.3. Zināms, ka skaitlis A dalās ar 7 un tā decimālais pieraksts satur tikai ciparus 1. Pierādiet, ka A dalās arī ar 13.

S.9.4. Pierādiet, ka izliektu 39-stūri nevar sadalīt deviņos izliektos sešstūros.

S.9.5. Dots kvadrāts ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai. Zaudē tas, pēc kura gājiena izveidojas iekrāsots kvadrāts 2×2 rūtiņas. Kurš no spēlētājiem vienmēr var panākt savu uzvaru? Aprakstiet uzvarētāja spēles stratēģiju.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādiet, ka $b^2 > 4ac$.

S.10.2. Vai var rindā uzrakstīt 2010 dažādus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_{2010}$ tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- katrs no tiem ir kādam naturālam skaitlim apgrieztais skaitlis,
- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_{2010} - a_{2009}$.

S.10.3. Atrodiet visus naturālos skaitļus n, kuriem izpildās vienādība

$$n = pqrs = 2p^{10} - 38 \ (p, q, r, s - \text{dažādi pirmskaitļi}).$$

S.10.4. Piramīdas pamats ir daudzstūris ar nepāra skaitu malu. Vai uz visām tās šķautnēm var izvēlēties virzienus tā, lai iegūto vektoru summa būtu $\vec{0}$?

S.10.5. Ir deviņas lampiņas, kas pēc kārtas sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz 10. Sākumā visas lampiņas ir izslēgtas. Vadības panelī ir četri slēdži, kuru numuri ir 2, 3, 5 un 7. Kad pārslēdz slēdzi ar numuru K, visas lampiņas, kuru numuri ir K daudzkārtņi, tiek pārslēgtas uz pretējo (ieslēdz, ja bija izslēgta, vai izslēdz, ja bija ieslēgta). Kāds lielākais lampiņu skaits vienlaicīgi var būt ieslēgtas?

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x + 8^y = 13^z$.

S.11.2. Riņķa līnijā ω_1 ar centru punktā O_1 novilkta horda AB un tai paralēls rādiuss O_1C ($CB < AC$). Riņķa līniju, kas iet caur punktiem A, O_1 un C, apzīmēsim ar ω_2. Pierādiet, ka ω_2 centrs O_2 atrodas uz taisnes, kas iet caur punktiem B un C.

S.11.3. Dota virkne $x_0 > 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ ($n = 0, 1, 2, ...$). Pierādiet, ka $x_{333} > 10$.

S.11.4. Dota kvadrātveida tabula ar izmēriem 15×15 rūtiņas. Katra tās rūtiņa nokrāsota vienā no trīs dažādām krāsām. Pierādiet, ka atradīsies vismaz divas tādas rindiņas, kurās vismaz vienas krāsas rūtiņu skaits ir vienāds.

S.11.5. Plaknē doti 100 zili un 100 sarkani punkti, nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka tos pa pāriem var savienot ar 100 nogriežņiem tā, ka katram nogrieznim vienā galā ir zils punkts, otrā – sarkans un nogriežņi nekrustojas.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Vai eksistē tāda a vērtība, ka vienādojumam $\sin x = ax$ ir tieši 2010 dažādas saknes?

S.12.2. Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurā no katras sānu šķautnes viduspunkta pretējā šķautne redzama taisnā leņķī?

S.12.3. Aprēķiniet izteiksmes $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3$ vērtību.

S.12.4. Dots, ka naturāls skaitlis $n = 2 \cdot (10^k + 5)$ dalās ar 67 (k – vesels skaitlis), un tam ir tieši 16 naturāli dalītāji. Atrodiet skaitli n.

S.12.5. Kalkulators strādā ar skaitļu četriniekiem un izpilda tikai divas operācijas:

1) ja tiek ievadīts (a, b, c, d), kalkulators to pārveido par $(a+1, b+d, c-1, d+1)$;

2) ja tiek ievadīts (a, b, c, d), kalkulators to pārveido par $(a, b-1, c+2, d+1)$.

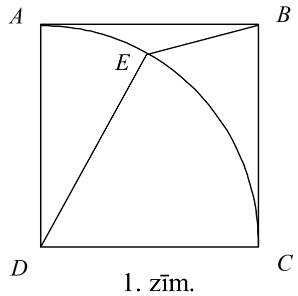
Vai ar šo kalkulatoru, lietojot to vairākkārt, no četrinieka $(3, 4, 2, 1)$ var iegūt četrinieku $(6, 5, 7, 8)$?

N. Latvijas 61. novada olimpiāde matemātikā

N.9. Devītā klase

N.9.1. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b – reāli skaitļi, pie tam $a + b = 2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

N.9.2. Kvadrātā *ABCD* ir ievilkts riņķa līnijas loks *AC* (riņķa līnijas centrs ir *D*, bet rādiuss *DA*; skat. 1. zīm.). Uz loka *AC* atzīmēts tāds punkts *E*, ka $\angle ADE = 2\angle ABE$. Aprēķināt $\angle ABE$ lielumu.



1. zīm.

N.9.3. Aplī uzrakstīti *k* dažādi naturāli skaitļi. Starp tiem pāra skaitļu ir trīs reizes vairāk nekā nepāra skaitļu. Tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, ir divreiz vairāk nekā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2. Kāda ir mazākā iespējamā *k* vērtība?

N.9.4. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu *a*, *x*, *y* un *z*, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

N.9.5. Sacensībās piedalījās deviņas kamaniņbraucējas. Sacensību uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tā ieņem augstāku vietu. Atsevišķu sportistu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām sportistēm bija atšķirīga. Kamaniņbraucēja Maija visos braucienos ieņēma vienu un to pašu – *N*-to vietu. Kādai lielākajai *N* vērtībai iespējams, ka Maija kopvērtējumā tomēr uzvarēs, t. i., iegūs 1. vietu?

N.10. Desmitā klase

N.10.1. a) Dots, ka $s + t = p$. Pierādīt, ka $2s^2 \geq p^2 - 2t^2$.

b) Dots, ka $s + t + u = p$. Pierādīt, ka $3s^2 \geq p^2 - 3t^2 - 3u^2$.

N.10.2. Trijstūrī *ABC* novilkts augstums *AD*. Zināms, ka $AC > AB$. Pierādīt, ka $DC - DB > AC - AB$.

N.10.3. Ar $[a]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *a*. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu $x \cdot \left[x \cdot [x]\right] = 41$.

N.10.4. Trijstūris *ABC* ir vienādsānu ($AB = BC$) un $\angle ABC = 30°$. Uz malas *AB* izvēlēts punkts *E*, bet uz malas *BC* – punkts *F*, tā, ka trijstūris *CEF* ir vienādmalu.

Aprēķināt trijstūru *CEF* un *ABC* laukumu attiecību.

N.10.5. Bobslejista Jāņa komanda piedalījās sacensībās, kurās uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tas ieņem augstāku vietu. Jāņa komanda pirmajā braucienā ieņēma 2., otrajā braucienā – 3., trešajā – 4., bet ceturtajā braucienā – 10. vietu. Pavisam sacensībās piedalījās 18 komandas. Atsevišķu komandu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām komandām bija atšķirīga. Kādu augstāko un kādu zemāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda?

N.11. Vienpadsmitā klase

N.11.1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās nevienādība:

$$x^2 + y^2 + 4 \geq 2x + 2y + xy\,.$$

N.11.2. Uz izliekta četrstūra $ABCD$ malas BC atzīmēts iekšējs punkts E, bet uz pretējās malas AD – iekšējs punkts F. Zināms, ka nogrieznis EF krusto četrstūra $ABCD$ diagonāles to viduspunktos. Pierādīt, ka trijstūru ADE un BCF laukumi ir vienādi.

N.11.3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + xy + y = 17 \\ y + yz + z = 71 \\ z + zx + x = 11 \end{cases}.$$

N.11.4. Zināms, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam $a^b + 1$ dalās ar 21. Kāda ir mazākā iespējamā summas $a + b$ vērtība?

N.11.5. Aplī uzrakstīti n veseli skaitļi, kuru summa ir 10, pie tam katrs skaitlis ir vienāds ar tam pulksteņrādītāja virzienā sekojošo divu skaitļu starpības moduli. Atrast visas iespējamās n vērtības!

N.12. Divpadsmitā klase

N.12.1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

N.12.2. Trijstūrī ABC caur patvaļīgu malas BC iekšējo punktu P tiek vilktas taisnes $u \parallel AC$ un $v \parallel AB$, kuras krusto malas AB un AC attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka trijstūra ABC laukums ir vienāds ar trijstūru MBC un NBC laukumu summu.

N.12.3. Naturālu skaitli sauksim par *fantastisku*, ja tas ir vienāds ar sava kvadrāta ciparu reizinājumu. Piemēram, 1 ir *fantastisks* (jo $1^2 = 1$ un $1 = 1$), bet 4 – nav (jo $4^2 = 16$, bet $1 \cdot 6 = 6 \neq 4$). Pierādīt, ka visi nepāra skaitļi, kas ir lielāki par 1, nav *fantastiski*.

N.12.4. Taisnstūrveida rūtiņu tabula sastāv no n rindām un 2011 kolonnām. Tās rūtiņās ierakstīts pa naturālam skaitlim tā, ka katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar tieši vienā tās kaimiņu rūtiņā ierakstīto skaitli. Kādai lielākajai n vērtībai tas ir iespējams? (Divas rūtiņas sauksim par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

N.12.5. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

V. Latvijas 61. republikas olimpiāde matemātikā

V.9. Devītā klase

V.9.1. Doti 4023 kvadrātvienādojumi formā $x^2+ax+b=0$. Starp visu vienādojumu a vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no -2011 līdz 2011 (ieskaitot), tāpat arī starp b vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no -2011 līdz 2011 (ieskaitot). Vai var gadīties, ka visiem dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi?

V.9.2. Uz taisnleņķa trijstūra garākās katetes kā diametra konstruēta riņķa līnija, kas no hipotenūzas atšķeļ nogriezni, kura garums vienāds ar īsākās katetes garumu. Aprēķināt hipotenūzas un īsākās katetes garumu attiecību!

V.9.3. Parādīt, ka no visiem trīsciparu skaitļiem, kuru pierakstā nav cipara 0, var izvēlēties 81 trīsciparu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas trīs īpašības:

- visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot pirmo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;
- visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot otro ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;
- visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot trešo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi.

V.9.4. Doti četri atsvari, kuru masas ir savā starpā atšķirīgas. Šie atsvari visos iespējamos veidos tika sadalīti pāros, un katrā gadījumā uz sviras svariem tika salīdzinātas abu pāru masas. (Svari nerāda masu starpību, bet ļauj tikai noteikt, uz kura kausa ir lielāks smagums.) Vai, zinot visu šo svēršanu rezultātus (nevienā svēršanā svaru kausi nebija līdzsvarā), iespējams noteikt:

a) vienu atsvaru, kurš ir vai nu vissmagākais, vai visvieglākais;
b) gan vissmagāko, gan visvieglāko atsvaru?

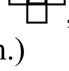
V.9.5. Trīs spēlētāji sēž pie apaļa galda un spēlē kādu spēli, kas sastāv no vairākām kārtām. Katrā kārtā viens no spēlētājiem uzvar un iegūst 3 punktus, nākamais spēlētājs pie galda pulksteņrādītāja virzienā zaudē divus punktus, bet trešais zaudē vienu punktu. Pēc visu kārtu punktu saskaitīšanas izrādījās, ka vienam no spēlētājiem summā ir 0 punktu. Vai var būt, ka kādam no pārējiem spēlētājiem summā ir **a)** 48, **b)** 49 punkti?

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Atrisināt vienādojumu

$$\left|\left||x-2011|-2011\right|-2011\right|=\left|\left||x-1201|-1201\right|-1201\right|.$$

V.10.2. Trijstūra ABC ($AB>BC$) bisektrise BD krusto tam apvilkto riņķa līniju ω punktā M. Uz malas AB izvēlēts punkts N tā, ka $CN\perp BM$. MN un CN vēlreiz krusto ω attiecīgi punktos K un O. Pierādīt, ka $AO=OK$.

V.10.3. Vai tabulā ar izmēriem 6×6 rūtiņas var aizkrāsot **a)** sešas, **b)** septiņas rūtiņas tā, lai no tabulas nevarētu izgriezt ne taisnstūri 1×5 rūtiņas (tas var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), ne figūru , kurā neviena rūtiņa nav aizkrāsota? (Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.)

V.10.4. Dots polinoms $f(x)$ ar veseliem koeficientiem. Vai iespējams, ka $f(2011)=100$, bet $f(11)=1000$?

V.10.5. Kādam mazākajam n ir spēkā apgalvojums: jebkuriem n plaknē novietotiem punktiem (nekādi trīs no tiem nav uz vienas taisnes), var atrast divus platleņķa trijstūrus ar virsotnēm šajos punktos tā, lai šo trijstūru virsotnes nesakrīt.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Dots, ka $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ un $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, kur a, b, c, m, n, p – reāli skaitļi. Pierādīt, ka $-1 \leq am + bn + cp \leq 1$.

V.11.2. Trapeces $ABCD$ sānu malas AD garums ir vienāds ar pamatu AB un CD garumu summu. Pierādīt, ka leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas sānu malas BC viduspunktā.

V.11.3. Atrast visus pirmskaitļus p, kuriem skaitlis $p^{p^2-5} + 2$ arī ir pirmskaitlis.

V.11.4. Aplī izvietoti 2011 punkti, no kuriem 707 nokrāsoti sarkanā, bet pārējie – zaļā krāsā. Tika izvēlēts viens punkts un, sākot no tā, pulksteņa rādītāja virzienā veikts pilns aplis, uz katra loka starp diviem blakus punktiem uzrakstot pa naturālam skaitlim pēc šāda likuma:

- ja pēc zaļa punkta seko sarkans punkts, tad uz loka uzrakstīja 1;
- ja pēc zaļa seko zaļš, tad uzrakstīja 2;
- ja pēc sarkana – sarkans, tad uzrakstīja 3;
- ja pēc sarkana – zaļš, tad uzrakstīja 4.

Kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa?

V.11.5. Plaknē doti n punkti. Zināms, ka jebkura trijstūra laukums, kura virsotnes atrodas šajos punktos, nepārsniedz 1 cm^2. Pierādīt, ka var uzzīmēt trijstūri ar laukumu 4 cm^2 tā, ka visi dotie punkti atradīsies šī trijstūra iekšpusē vai uz tā malām.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Kurš no skaitļiem $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - 2$ un $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}$ ir lielāks?

V.12.2. Trijstūrī ABC nogriežņi AM un CN ir mediānas, kuru viduspunkti ir attiecīgi P un Q. AC krusto taisnes BP un BQ attiecīgi punktos X un Y. Pierādīt, ka $AX = XY = YC$.

V.12.3. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi n un m, kuriem ir patiesa vienādība:

$$(2n)^{2n} - 1 = m^3.$$

V.12.4. Atrast visas stingri augošas funkcijas $g(x)$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kas visiem reāliem skaitļiem x apmierina vienādību:

$$g(g(x)) + g(x) = 2x.$$

V.12.5. Virkni V, kas sastāv no cipariem 0, 1, 2, ..., 9 sauc par *universālu*, ja jebkuru virkni, kurā katrs cipars sastopams tieši vienu reizi, var iegūt no V, izsvītrojot tajā dažus ciparus. Pierādīt, ka *universāla* virkne satur vismaz 55 ciparus.

A. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.9. Devītā klase

A.9.1. Atrast visus naturālu skaitļu pārus $(x; y)$ tādus, ka $x \neq y$ un

$$\frac{1}{x^2+24}+\frac{1}{y^2+24}=\frac{2}{xy+24}.$$

A.9.2. Trijstūrī *ABC* $\angle ABC = 90°$, bet punkts *P* atrodas uz malas *AB*. Punkti *M* un *N* ir attiecīgi *AC* un *PC* viduspunkti. Pierādīt, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

A.9.3. Dots vienādojums $\#x^2-\#x+\#=0$. Divi rūķīši spēlē spēli – pirmais nosauc trīs dažādus skaitļus, bet otrais tos kaut kādā secībā saliek „#" vietās. Vai pirmais rūķītis vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam būtu vismaz viena racionāla sakne?

A.9.4. Kāds lielākais skaits pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var būt ar īpašību, ka katrs no tiem ir izsakāms kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpība?

A.9.5. Kvadrāta ar izmēriem 8×8 rūtiņas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. x. zīmējumā attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek kvadrāta iekšpusē.
Kurās no pārējām trijām kvadrāta stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

			X
	X		
		A	
X			X

x. zīm.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Cik dažādos veidos skaitli 2011 var izteikt kā vismaz divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Saskaitāmo secība nav svarīga.

A.10.2 Nogriežņa *AB* garums ir 10 cm. Uz tā kā uz hipotenūzas konstruēti divi taisnleņķa trijstūri *ABC* un *ABD* tā, ka *C* un *D* atrodas dažādās pusēs no taisnes *AB*. *CD* ir leņķa *ACB* bisektrise. Aprēķināt trijstūra *ABD* laukumu.

A.10.3. Atrisināt doto vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:

$$\begin{cases}(x-y)^2=(z-2)^2\\(y-z)^2=(x-4)^2\\(z-x)^2=(y-6)^2\end{cases}.$$

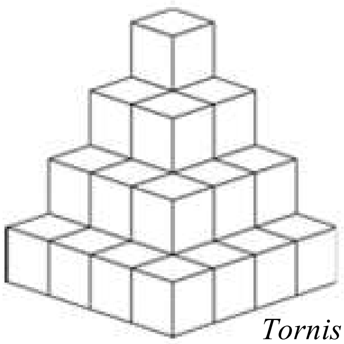
A.10.4. Riņķa līnijā ievilkts regulārs 9-stūris un regulārs 10-stūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 19 lokos. Pierādīt, ka ir loks, kura leņķiskais lielums nepārsniedz $2°$.

A.10.5. *Tornis* ir salikts no vienādiem kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$: apakšējā slānī ir 16 kubiņi, otrajā slānī ir 9 kubiņi, trešajā slānī 4 kubiņi un augšā – viens kubiņš (skat. e. zīm.).

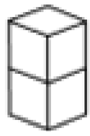
Vai šo *torni* var salikt no

a) *klucīšiem* ar izmēru $1\times1\times2$ (skat. r. zīm.)?

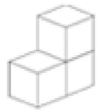
b) *stūrīšiem,* ko veido 3 kubiņi (skat. t. zīm.)?



Tornis
e. zīm.



Klucītis
r. zīm.



Stūrītis
t. zīm.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Dotas trīs aritmētiskās progresijas:

(1) 1, 15, 29, 43, 57, 71,…

(2) 2, 17, 32, 47, 62, 77, …

(3) 3, 19, 35, 51, 67, 83,…

a) Atrast mazāko skaitli, kas pieder visām trim dotajām virknēm.

b) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm.

A.11.2. Ap kvadrātu *ABCD* ir apvilkta riņķa līnija, uz mazākā no lokiem *AB* ir izvēlēts patvaļīgs punkts *P*. Nogrieznis *PC* krusto *AB* un *BD* attiecīgi punktos *M* un *X*; *PD* krusto *AB* un *AC* attiecīgi punktos *N* un *Y*. *MY* un *NX* krustojas punktā *Q*; *AC* un *BD* krustojas punktā *O*. Pierādīt, ka *QXOY* ir taisnstūris.

A.11.3. Cik veidos taisnstūri ar izmēriem 3×12 rūtiņas var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3 rūtiņas? (Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, taisnstūri var būt novietoti gan horizontāli, gan vertikāli.)

A.11.4. Atrisināt vienādojumu:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2011}+\sqrt{x-2009}}+\frac{1}{\sqrt{x-2009}+\sqrt{x-2007}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2009}+\sqrt{x+2011}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A.11.5. Vai pa riņķa līniju var izvietot 2011 dažādus naturālus skaitļus tā, ka jebkuriem diviem blakus esošiem skaitļiem lielākā skaitļa attiecība pret mazāko ir pirmskaitlis?

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 9 sadalīti trīs grupās pa trim skaitļiem un katrā grupā aprēķināta tajā ietilpstošo skaitļu summa. Vai var būt, ka

a) visas summas ir pirmskaitļi?

b) visas summas ir atšķirīgi pirmskaitļi?

A.12.2. Atrast izteiksmes $\sin^{38} x + \cos^{38} x$ vislielāko un vismazāko vērtību.

A.12.3. Uz riņķa līnijas ir izvēlētas divas hordas AC un BD, kas krustojas punktā O, $AO > BO$. MO ir ΔAOB bisektrise, pie tam $AM = DO$. Pierādīt, ka $BM = CO$.

A.12.4. Vai telpā var izvietot 6 punktus tā, lai jebkuri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrastos vienā plaknē?

A.12.5. Pierādīt, ka eksistē tādi pozitīvi skaitļi x un y, ka

$$x^y + y^x + x + y < 1 + \frac{1}{2011}.$$

VP. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

VP.1. Cik ir tādu naturālu skaitļu *N*, $1000 < N < 3000$, kurus nav iespējams izteikt kā divu vai vairāku secīgu naturālu skaitļu summu?

VP.2. Trijstūrī *ABC* no virsotnes *B* vilktā bisektrise krusto malu *AC* punktā *D*, bet ap *ABC* apvilkto riņķa līniju ω – punktā *E*. Punkts *P* ir patvaļīgs ω punkts, kas nesakrīt ne ar vienu no punktiem *A*, *B*, *C*, *E*. Taisnes *PE* un *AC* krustojas punktā *X*. Pierādīt, ka caur punktiem *B*, *D*, *P* un *X* var novilkt riņķa līniju.

VP.3. Atrast visas funkcijas $f:(0;\ \infty) \to (0;\infty)$ tādas, ka visiem *x* izpildās vienādība

$$f(3f(x)-2x)=x.$$

VP.4. Pierādīt, ka rūtiņu lapā var uzzīmēt figūru, kuras malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sadalīt domino figūrās tieši **a)** 40, **b)** 55, **c)** *n* dažādos veidos. (Domino figūra ir taisnstūris ar izmēriem 1×2 rūtiņas, tas var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli.)

VP.5. Tabula ar izmēriem $n\times n$ rūtiņas ir aizpildīta ar skaitļiem $+1$ un -1 tā, ka, paņemot jebkuras divas rindiņas vai divas kolonnas, pozīciju, kurās abu rindiņu (kolonnu) vērtības sakrīt, ir tikpat, cik pozīciju, kurās tās nesakrīt. Pierādīt, ka visu tabulas elementu summas absolūtā vērtība nepārsniedz $n\sqrt{n}$.

IMO. 52. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

IMO.1. Katrai četru dažādu naturālu skaitļu kopai $A=\{a_1; a_2; a_3; a_4\}$ ar S_A apzīmēsim tās elementu summu $a_1+a_2+a_3+a_4$. Ar p_A apzīmēsim tādu pāru (i, j) skaitu, kuriem $1 \le i < j \le 4$ un S_A dalās ar $a_i + a_j$. Atrodiet visas četru dažādu naturālu skaitļu kopas *A*, kam p_A vērtība ir lielākā iespējamā.

IMO.2. Plaknē dota galīga punktu kopa *S*, kas sastāv no vismaz diviem punktiem. Zināms, ka nekādi trīs kopas *S* punkti neatrodas uz vienas taisnes. Par *vējdzirnavām* sauksim sekojošu procesu. Sākumā tiek izvēlēta taisne *t*, uz kuras atrodas tieši viens punkts $P \in S$. Taisne *t* griežas pulksteņa rādītāja virzienā ap punktu *P* kā *rotācijas centru*, līdz uz tās pirmo reizi nonāk vēl kāds punkts no kopas *S*. Šajā brīdī šis punkts, apzīmēsim to ar *Q,* kļūst par jauno *rotācijas centru*, un taisne turpina griezties pulksteņa rādītāja virzienā ap punktu *Q*, līdz uz tās atkal nonāk vēl kāds punkts no kopas *S*, u.t.t. Šis process turpinās bezgalīgi.
Pierādīt, ka var izvēlēties punktu $P \in S$ un taisni *t*, kas iet caur punktu *P*, tā, ka *vējdzirnavām*, kas sākas ar šo taisni *t*, katrs kopas *S* punkts kalpos par *rotācijas centru* bezgalīgi daudz reižu.

IMO.3. Funkcija $f: R \to R$ ir tāda, ka visiem reāliem skaitļiem *x* un *y* izpildās funkcionālnevienādība $f(x+y) \le yf(x) + f\big(f(x)\big)$. Pierādīt, ka $f(x)=0$ visiem $x \le 0$.

IMO.4. Dots naturāls skaitlis *n*. Doti arī sviras svari un *n* atsvari, kuru svars ir attiecīgi 2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}. Visi atsvari *n* soļos ir jāuzliek uz svaru kausiem, tas ir, katrā solī var izvēlēties vienu no atsvariem, kas vēl nav uzlikti uz svariem, un uzlikt to vai nu uz labā, vai kreisā svaru kausa; pie tam, nevienā brīdī labais svaru kauss nedrīkst būt smagāks par kreiso.
Noskaidrojiet, cik dažādos veidos iespējams izpildīt šādu darbību virkni.

IMO.5. Par funkciju $f: Z \to N$ zināms, ka jebkuriem veseliem *m* un *n* starpība $f(m)-f(n)$ dalās ar $f(m-n)$. Pierādīt, ka jebkuriem veseliem *m* un *n* tādiem, ka $f(m) \le f(n)$, skaitlis $f(n)$ dalās ar $f(m)$.

IMO.6. Taisne ℓ ir pieskare ap šaurleņķa trijstūri *ABC* apvilktajai riņķa līnijai Γ. Taisnes ℓ_a, ℓ_b un ℓ_c ir simetriskas taisnei *l* attiecīgi pret taisnēm *BC*, *CA* un *AB*. Pierādīt, ka riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri, ko veido taisnes ℓ_a, ℓ_b un ℓ_c, pieskaras riņķa līnijai Γ.

AB. ATLASE KOMANDU OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Dots reāls pozitīvs skaitlis a un naturāls skaitlis $n \geq 2$. Pierādīt, ka

$$a^n + 1 + a^{-n} \geq \frac{3}{2}(a + a^{-1}).$$

AB.A.2. Atrast visus reālos skaitļus a tādus, ka polinomam $x^3 + ax - 2(a+4)$ ir tieši divas dažādas saknes.

AB.A.3. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Kāda ir izteiksmes $\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} + \ldots + \frac{x_n}{x_n^2 - 1}$ lielākā iespējamā vērtība, ja zināms, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir reāli skaitļi, kas lielāki nekā 1, un $\frac{1}{x_1^2 - 1} + \frac{1}{x_2^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n^2 - 1} = 1$.

AB.A.4. Atrast visas funkcijas $f: Q \to Q$ tādas, ka visiem $x, y \in Q$ (Q – visu racionālo skaitļu kopa) izpildās vienādība $f(x+y) + 6x = f(f(x)) + f(y)$.

AB.A.5. Atrisināt vienādojumu $\cos^2 2010x + \frac{2 + \operatorname{tg}^4 x}{1 + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{\operatorname{tg} 201x}{\operatorname{tg} 67x}$.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Riņķa līnijas C_1 un C_2 krustojas punktos A un B. Punkti P un Q izvēlēti uz riņķa līnijas C_2 tā, ka P atrodas C_1 iekšpusē, bet Q – ārpusē. Taisnes AP un BP vēlreiz krusto C_1 attiecīgi punktos X un Y, taisnes QA un QB vēlreiz krusto C_1 attiecīgi punktos Z un T. Pierādīt, ka $XY = ZT$.

AB.Ģ.2. Uz trijstūra ABC malām AB un BC konstruēti vienādsānu trijstūri ADB un BEC tā, ka $DA = DB$ un punkts D atrodas pretējā pusē no AB nekā punkts C un $EB = EC$ un punkts E atrodas pretējā pusē no BC nekā punkts A. AE un CD krustojas punktā F. Zināms, ka $EF = EB$ un $DF = DB$. Pierādīt, ka punkti A, B, C, D un E atrodas uz vienas riņķa līnijas.

AB.Ģ.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AA' un BB', punkts H ir augstumu krustpunkts. Taisne CH krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju punktā D ($D \neq C$) un taisne DB' krusto šo riņķa līniju punktā E ($E \neq D$). Pierādīt, ka taisne BE sadala nogriezni $A'B'$ uz pusēm.

AB.Ģ.4. Trijstūra piramīda ievilkta sfērā ar rādiusu 1 tā, ka sfēras centrs atrodas piramīdas iekšpusē. Pierādīt, ka šīs piramīdas visu šķautņu garumu summa ir lielāka nekā 6.

AB.Ģ.5. Dots izliekts četrstūris $ABCD$. Punkts F atrodas uz taisnes AC tā, ka $DF \parallel AB$, un punkts E atrodas uz taisnes BD tā, ka $AE \parallel CD$. Pierādīt, ka $EF \parallel BC$.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 200 sadalīti 50 kopās. Pierādīt, ka kādā no tām atradīsies 3 skaitļi, kuri ir kāda trijstūra malu garumi.

AB.K.2. Ričurača festivālā piedalījās 2010 dalībnieki. Tika izspēlētas vairākas ričurača partijas, katrā no tām piedalījās tieši 4 spēlētāji. Zināms, ka nekādi 3 spēlētāji nespēlēja kopā vairāk kā vienu partiju. Pierādīt, ka var atrast 24 dalībnieku grupu tādu, ka nekādi 4 no šiem spēlētājiem nav šajā festivālā kopā spēlējuši ričuraču.

AB.K.3. Dota rūtiņu lapa, kuras izmērs ir 1099×1099 rūtiņas. Katrā no 1100^2 rūtiņu virsotnēm (ieskaitot tās, kuras atrodas uz lapas malas vai stūros) sēž vabole. Vai ir iespējams, ka visas vaboles pārlido uz jaunām vietām šajā rūtiņu lapā (ne obligāti rūtiņu virsotnēs) tā, ka jebkurām divām vabolēm:

1. Ja attālums starp viņām pirms lidošanas bija ne mazāks kā 150 rūtiņas, tad pēc pārlidošanas tas ir samazinājies vismaz 2 reizes.
2. Ja attālums starp viņām pirms pārlidošanas bija ne lielāks kā 10 rūtiņas, tad pēc pārlidošanas tas ir palielinājies vismaz 2 reizes.

AB.K.4. Šaha turnīrā piedalījās 7 spēlētāji, un katri divi savā starpā izspēlēja tieši vienu spēli. Izrādījās, ka jebkuriem 3 spēlētājiem vismaz viena no trijām viņu savstarpējām spēlēm bija rezultatīva (nebeidzās ar neizšķirtu). Noskaidrojiet, kāds var būt lielākais iespējamais neizšķirto partiju skaits šajā turnīrā.

AB.K.5. Rūtiņu lapā $n \times n$ sākumā tieši m rūtiņas ir melnas un pārējās ir baltas. Baltu rūtiņu drīkst nokrāsot melnu, ja tai blakus atrodas vismaz 2 melnas rūtiņas (rūtiņas atrodas blakus, ja tām ir kopīga mala). Atrast mazāko m, pie kura eksistē tāda sākotnējā pozīcija, no kuras, atkārtojot šādu darbību, visas rūtiņas var nokrāsot melnas.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Pierādīt, ka nevienam naturālam n skaitlis $(1+2+...+n)+2$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

AB.S.2. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem eksistē n-tās pakāpes polinoms $p(x)$ ar veseliem koeficientiem un $2n$ dažādi skaitļi $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ tādi, ka $|p(a_i)| = 2^n$ visiem $i = 1, 2, ..., 2n$.

AB.S.3. Profesors Cipariņš lūdz kādam savam skolēnam iedomāties trīsciparu skaitli $\overline{abc}$. Tad viņš lūdz viņam samainīt šī skaitļa ciparus vietām visos iespējamos veidos, iegūstot skaitļus $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ un $\overline{cba}$. Tad viņš lūdz saskaitīt šos piecus skaitļus kopā un pateikt viņam to summu, pie tam viņš apgalvo, ka, zinot šo summu, viņš vienmēr var pateikt, kāds bija sākotnējais skaitlis. Vai tiešām to vienmēr var izdarīt?

AB.S.4. Atrast visas iespējamās naturālās x, y, z un t vērtības tādas, ka $x \geq y \geq z$ un

$$t! = x! + 2y! + 3z!.$$

AB.S.5. Naturālu skaitļu virknē a_n visiem $n > 2$ izpildās sakarība $a_n = \dfrac{MKD(a_{n-1}, a_{n-2})}{LKD(a_{n-1}, a_{n-2})}$. Zināms, ka $a_{119} = 119$ un $a_{289} = 289$. Atrast visas iespējamās a_{2010} vērtības.

BW. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Atrast visus reālo skaitļu četriniekus $(a; b; c; d)$, kas apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}.$$

BW.A.2. Dots reāls skaitlis x tāds, ka $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Pierādīt, ka

$$\cos^2 x \cdot ctgx + \sin^2 x \cdot tgx \geq 1.$$

BW.A.3. Doti reāli skaitļi $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$, kuri visi lielāki par 1. Zināms, ka $|x_i - x_{i+1}| < 1$ visiem $i = 1, 2, ..., n-1$. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

BW.A.4. Atrast visus polinomus $P(x)$ ar reāliem koeficientiem tādus, ka visiem veseliem skaitļiem x izpildās vienādība:

$$(x-2010)P(x+67) = xP(x).$$

BW.A.5. Ar R apzīmē reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f: R \to R$ tādas, ka visiem $x, y \in R$ izpildās vienādība:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Kvadrātā ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas katra rūtiņa izkrāsota kādā no n krāsām tā, ka galvenā diagonāle (no kreisā augšējā līdz labajam apakšējam lauciņam) ir nokrāsota pirmajā krāsā; abas tai blakus esošās diagonāles ir nokrāsotas otrajā krāsā; divas nākamās blakus diagonāles (viena augstāk un viena zemāk) nokrāsotas trešajā krāsā, utt.; divas stūra rūtiņas (labā augšējā un kreisā apakšējā) nokrāsotas n–jā krāsā. Uz laukuma ir iespējams novietot n torņus tā, ka tie neapdraud viens otru un katrs stāv uz citas krāsas lauciņa. Pierādīt, ka $n \equiv 0 \pmod 4$ vai $n \equiv 1 \pmod 4$.

BW.K.2. Valstī ir vairākas pilsētas, viena no tām ir galvaspilsēta. Katrām divām pilsētām A un B ir tiešais reiss no A uz B un tiešais reiss no B uz A, abi šie reisi maksā vienādi. Zināms, ka visiem slēgtiem maršrutiem, kas iet caur katru pilsētu tieši vienu reizi, ir viena un tā pati cena. Pierādīt, ka visiem slēgtiem maršrutiem, kas iet caur katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, tieši vienu reizi, arī ir viena un tā pati cena.

BW.K.3. Korī ir 30 dalībnieki un katram no tiem ir tieši viena cepure. Kādā dienā katrs dalībnieks uzdāvināja savu cepuri kādam citam kora dalībniekam (iespējams, ka daži dalībnieki saņēma vairākas cepures). Pierādīt, ka var izvēlēties tādu 10 dalībnieku grupu, ka neviens no šīs grupas nav saņēmis cepuri no kāda cita šīs grupas dalībnieka.

BW.K.4. Kaudzē atrodas 1000 sērkociņi. Divi dalībnieki pēc kārtas izdara gājienus. Katrā gājienā no kaudzes var paņemt no 1 līdz 5 sērkociņiem; kā arī ne vairāk kā 10 reizes visas spēles laikā ir atļauts veikt īpašo gājienu – paņemt 6 sērkociņus. Piemēram, 7 īpašos gājienus var būt veicis pirmais spēlētājs un 3 – otrais, tad īpašie gājieni vairāk nav atļauti. Uzvar tas spēlētājs, kurš paņem pēdējo sērkociņu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

BW.K.5. Dots vesels skaitlis n, kur $n \geq 3$. Aplūkosim visus izliekta n–stūra sadalījumus trijstūros ar $n-3$ diagonālēm, kuras nekrustojas, un visus šo trijstūru krāsojumus baltos un melnos tā, ka trijstūri, kam ir kopīga mala, vienmēr nokrāsoti dažādās krāsās. Atrast mazāko iespējamo melno trijstūru skaitu.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Kvadrāta $ABCD$ diagonāles AC un BD krustojas punktā S. Riņķa līnijas k un k', kas iet attiecīgi caur punktiem A, C un B, D, krustojas divos dažādos punktos P un Q. Pierādīt, ka S atrodas uz taisnes PQ.

BW.Ģ.2. Dota trapece $ABCD$, kas nav paralelograms.

a) Pierādīt, ka tās malu AB, BC, CD, DA garumi (šādā secībā) neveido aritmētisko progresiju.

b) Pierādīt, ka eksistē tāda trapece, kuras malu AB, BC, CD, DA garumi, samainot to secību, veido aritmētisko progresiju.

BW.Ģ.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums CD; H ir augstumu krustpunkts. Trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes, kas satur leņķa DHB bisektrisi. Noteikt visas iespējamās leņķa CAB vērtības.

BW.Ģ.4. Dots, ka ABC – šaurleņķu trijstūris. Punkti D un E atrodas attiecīgi uz tā malām AC un BC tā, ka A, B, D un E pieder vienai riņķa līnijai. Riņķa līnija, kas iet caur punktiem D, E un C, krusto malu AB divos punktos X un Y. Pierādīt, ka perpendikuls, kas novilkts no C pret AB, iet caur XY viduspunktu.

BW.Ģ.5. Punkti M un N ir izvēlēti uz trijstūra ABC bisektrises AL tā, ka $\angle ABM = \angle ACN = 23°$. Trijstūra iekšienē atrodas punkts X tā, ka $BX = CX$ un $\angle BXC = 2\angle BML$. Aprēķināt $\angle MXN$.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Naturālam skaitlim k ar $d(k)$ apzīmē tā dalītāju skaitu (piemēram, $d(12)=6$) un ar $s(k)$ apzīmē tā ciparu summu (piemēram, $s(12)=3$). Naturālu skaitli n sauc par *burvīgu*, ja eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka $d(k)=s(k)=n$. Kāds ir mazākais *burvīgais* naturālais nepāra skaitlis, kas lielāks par 1?

BW.S.2. Atrast visus tādus naturālus skaitļus n, ka n^2 decimālais pieraksts satur tikai nepāra ciparus.

BW.S.3. Dots, ka p – pirmskaitlis. Katram k, $1 \le k \le p-1$, eksistē viens vienīgs vesels skaitlis, apzīmēsim to ar k^{-1}, tāds, ka $1 \le k^{-1} \le p-1$ un $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod p$. Pierādīt, ka virkne

$$1^{-1}, 1^{-1}+2^{-1},\ 1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}, \ldots,\ 1^{-1}+2^{-1}+\ldots+(p-1)^{-1}$$

(ņemot pēc moduļa p) satur ne vairāk kā $(p+1)/2$ dažādus locekļus.

BW.S.4. Kādiem k var atrast k dažādus pirmskaitļus $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tādus, ka

$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_k^2=2010\,?$$

BW.S.5. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem eksistē tāda naturālo skaitļu kopas N bezgalīga apakškopa A, ka jebkuriem dažādiem $a_1, \ldots, a_n \in A$ skaitļi $a_1+\ldots+a_n$ un $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

IETEIKUMI

I.S. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.S.9. Devītā klase

I.S.9.1. Pārnesiet visus locekļus uz nevienādības kreiso pusi un, izmantojot grupēšanas paņēmienu, sadaliet to reizinātājos.

I.S.9.2. Ievērojiet, ka norādītā mediāna un bisektrise nevar iziet no vienas virsotnes un dotā bisektrise ir arī augstums trijstūrī, kura pamats ir dotā mediāna.

I.S.9.3. Pamatojiet šādu īpašību: dotais skaitlis A dalās ar 7 tikai tad, ja vieninieku skaits dalās ar 6.

I.S.9.4. Ievērojiet: ja 39-stūri var sadalīt 9 izliektos sešstūros, tad izliektā 39-stūra visus leņķus aizpilda deviņu izliekto sešstūru leņķi. Izmantojiet daudzstūra iekšējo leņķu summas formulu.

I.S.9.5. Izdomājiet, kā jāspēlē otrajam spēlētājam, lai viņš vienmēr uzvarētu.

I.S.10. Desmitā klase

I.S.10.1. Aplūkojiet kvadrātfunkciju $f(x)=cx^2+bx+a$ un pierādiet, ka tai eksistē divas saknes.

I.S.10.2. Pierādiet, ka skaitļi $\frac{i}{2010!}$, $i=1, 2, 3, ..., 2010$ apmierina uzdevuma prasības.

I.S.10.3. Pierādiet, ka skaitlis p ir skaitļa 38 dalītājs.

I.S.10.4. Projicējiet visus vektorus uz taisni ℓ, kas perpendikulāra piramīdas pamata plaknei, lai pierādītu, ka uzdevumā prasīto nevar iegūt.

I.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jānosaka lielākais vienlaicīgi ieslēgto lampiņu skaits (jāparāda piemērs); 2) jāpierāda, ka vairāk lampiņas nevar būt ieslēgtas.

I.S.11. Vienpadsmitā klase

I.S.11.1. Izmantojiet kongruenci pēc moduļa 3, lai pierādītu, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

I.S.11.2. Novelciet diametru DC un seciniet, ka ir iegūta vienādsānu trapece *ABCD*. Leņķim AO_1C novelciet bisektrisi un bisektrises krustpunktu ar taisni *BC* apzīmējiet ar burtu *E*. Pierādiet, ka $E = O_2$.

I.S.11.3. Kāpiniet doto sakarību trešajā pakāpē. Apzīmējiet $\alpha = \frac{3}{x_n^3} + \frac{1}{x_n^6} > 0$ un $y_n = x_n^{\ 3}$.

I.S.11.4. Pieņemiet pretējo, ka nav tādu divu rindiņu, kurās vismaz vienas krāsas rūtiņu skaits ir vienāds, t. i., katras krāsas rūtiņu skaits jebkurās divās rindiņās ir dažāds.

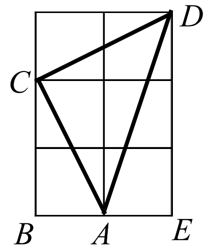
I.S.11.5. Aplūkojiet tādu punktu sadalījumu pa pāriem, ka visu 100 nogriežņu garumu summa ir pati mazākā iespējamā. Pierādiet, ka šajā gadījumā nogriežņi nekrustojas.

I.S.12. Divpadsmitā klase

I.S.12.1. Ievērojiet, ka $y = \sin x$ un $y = ax$ ir nepāra funkcijas.

I.S.12.2. Pieņemiet, ka šāda piramīda eksistē, un, izmantojot vektoru skalāro reizinājumu, iegūstiet pretrunu.

I.S.12.3. Izmantojiet I1. zīmējumu un sakarības taisnleņķa trijstūrī.



I1. zīm.

I.S.12.4. Izmantojiet, ka naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$ dažādi dalītāji. Pārveidojiet doto skaitli *n* formā $n = 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 10^{k-1} + 1)$.

I.S.12.5. Ievērojiet, ka abām operācijām 4. koordinātas izmaiņa ir vienāda un pierādiet, ka ar šo kalkulatoru no četrinieka $(3, 4, 2, 1)$ nevar iegūt četrinieku $(6, 5, 7, 8)$.

I.N. LATVIJAS 61. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.N.9. Devītā klase

I.N.9.1. Apskatiet funkcijas vērtības, ja $x = 1$ un $x = -1$.

I.N.9.2. Pierādiet, ka ΔDEC – vienādmalu, un izmatojiet ΔDEC leņķu lielumus, lai aprēķinātu prasīto.

I.N.9.3. No dotā seciniet, ka k jādalās gan ar 4, gan ar 3.

I.N.9.4. Ievērojiet: ja pieņem, ka dotā vienādība ir patiesa, tad $a \geq x+1$, $a \geq y+1$ un $a \geq z+1$.

I.N.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka N nevar būt lielāks par 7; 2) jāparāda piemērs, ka uzdevumā prasītā situācija pie $N = 7$ ir iespējama, ņemot vērā, ka Maija nedrīkst būt zaudējusi kādai sportistei visos četros braucienos.

I.N.10. Desmitā klase

I.N.10.1. Doto vienādību abas puses kāpiniet kvadrātā un veiciet ekvivalentus pārveidojumus, lai pierādītu uzdevumā prasīto.

I.N.10.2. Izmantojiet trijstūra nevienādību. Ievērojiet, ka augstums var atrasties gan trijstūra iekšpusē, gan ārpusē.

I.N.10.3. Pamatojiet, ka $3 \leq x < 4$, un izmantojiet šīs nevienādības, pārveidojot uzdevumā doto vienādojumu. Pēc tam novērtējiet izteiksmes $[x \cdot 3]$ vērtību.

I.N.10.4. Izmantojiet leņķiskos lielumus, lai pierādītu, ka ΔBFE – vienādsānu. Seciniet, ka F ir BC viduspunkts. Apzīmējiet ΔFCE malas garumu, izsakiet ΔABC sānu malu garumus un aprēķiniet prasīto attiecību, izmantojot attiecīgās laukumu formulas.

I.N.10.5. Lai pamatotu, ka Jāņa komanda var iegūt 1. vietu, izveidojiet rezultātu tabulu, ņemot vērā visus uzdevuma nosacījumus. Ievērojiet, ka nedrīkst būt tāda komanda, kura būtu bijusi labāka par Jāņa komandu visos atsevišķajos braucienos.
Lai atrastu, kādu zemāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda, pirmkārt, jāpamato, ka vienmēr būs divas tādas komandas, kuras būs zaudējušas Jāņa komandai visos četros braucienos; otrkārt, jāizveido rezultātu tabulu, kurā ņemti vērā visi uzdevuma nosacījumi un redzams, ka Jāņa komanda ieņem 16. vietu.

I.N.11. Vienpadsmitā klase

I.N.11.1. Pareiziniet nevienādības abas puses ar 2 un atdaliet pilnos kvadrātus. Izmantojiet faktu, ka reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis.

I.N.11.2. Sadaliet katru no trijstūriem *ADE* un *BCF* divos trijstūros tā, ka lai katram no iegūtajiem trijstūriem viena no malām būtu *EF*. Iegūto trijstūru laukumu izteikšanai lietojiet formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, kur augstums vilkts no virsotnes, kas atrodas pret malu *EF*.

I.N.11.3. Pieskaitiet visu vienādojumu abām pusēm skaitli 1 un sadaliet vienādojumu kreisās puses reizinātājos. Sareiziniet iegūtos vienādojumus.

I.N.11.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda piemērs, ka $a+b$ vērtība var būt 8; 2) jāpierāda, ka $a+b$ vērtība nevar būt mazāka par 8, apskatot b vērtības, kas nepārsniedz 7.

I.N.11.5. Ievērojiet, ka visi uzrakstītie skaitļi ir nenegatīvi, jo katrs no tiem ir divu citu skaitļu starpības modulis.

I.N.12. Divpadsmitā klase

I.N.12.1. Atcerieties, ka zem kvadrātsaknes var atrasties tikai nenegatīvs skaitlis, un novērtējiet katru dotā vienādojuma saskaitāmo.

I.N.12.2. Ievērojiet, ka pietiek pierādīt, ka $S_{AMPN} = S_{MPC} + S_{NBP}$ un ka katram trijstūrim un paralelogramam ir kopīga mala.

I.N.12.3. Pārbaudiet viencipara nepāra skaitļus. Pierādiet, ka arī vairākciparu nepāra skaitļi nevar būt *fantastiski*, izmantojot faktu, ka nepāra skaitlis nevar būt *fantastisks*, ja kāds no tā kvadrāta cipariem ir pāra skaitlis

I.N.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka n nevar būt lielāks par 1; 2) jāparāda piemērs, kas parāda, ka uzdevuma nosacījumi var izpildīties, ja $n=1$.

I.N.12.5. Pierādiet, ka jebkura daudzskaldņa visu skaldņu malu skaitu summa vienmēr ir pāra skaitlis, un izmantojiet šo faktu, lai pierādītu uzdevumā prasīto.

I.V. LATVIJAS 61. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.V.9. Devītā klase

I.V.9.1. Apskatiet vienādojumu, kuram $b = 2011$. Izmantojiet Vjeta teorēmu un ievērojiet, ka 2011 ir pirmskaitlis.

I.V.9.2. Pamatojiet, kura atšķeltā nogriežņa garums ir vienāds ar īsākās katetes garumu. Novelciet nogriezni, kas savieno trijstūra taisnā leņķa virsotni un hipotenūzas krustpunktu ar riņķa līniju. Izmantojiet iegūto trijstūru līdzību.

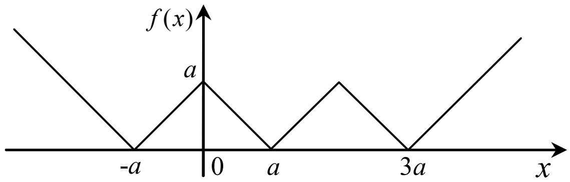
I.V.9.3. Uzdevumā prasītos trīsciparu skaitļus viegli atrast, ja izveido 9 grupas ar 9 skaitļiem katrā grupā.

I.V.9.4. Noskaidrojiet, cik svēršanas tika veiktas un analizējiet visus gadījumus.

I.V.9.5. Apzīmējiet ar jauniem mainīgajiem skaitu, cik kārtās katrs spēlētājs ir ieguvis 3 punktus un uzrakstiet izteiksmes, kas izsaka katra spēlētāja iegūto punktu kopsummu.

I.V.10. Desmitā klase

I.V.10.1. Izmantojiet funkcijas $f(x) = \left|\left|\left|x-a\right|-a\right|-a\right|$, kur a – reāls pozitīvs skaitlis, grafiku (skat. I2. zīm.).



I2. zīm.

I.V.10.2. Izmantojiet trijstūru līdzību un īpašību: ja trijstūrī taisne t ir gan augstums, gan mediāna, tad trijstūris ir vienādsānu. Atcerieties, ka ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka, ir vienādi.

I.V.10.3. **a)** Pamatojiet, ka nevar aizkrāsot sešas rūtiņas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, vispirms secinot, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir jābūt aizkrāsotai vismaz 1 rūtiņai. **b)** Izdomājiet piemēru, kā aizkrāsot septiņas rūtiņas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

I.V.10.4. Apskatiet polinomu formā $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, kur a_i, $i = 0, 1, ..., n$, ir veseli skaitļi. Pamatojiet, ka $f(x) - f(y)$ dalās ar $x - y$, lai pierādītu, ka uzdevumā dotais nav iespējams.

I.V.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka $n \geq 7$, parādot piemēru, ka 6 punktu gadījumā uzdevuma nosacījumi var neizpildīties; 2) jāpamato, ka $n = 7$ apmierina uzdevuma nosacījumus, izmantojot Lemmas:

- *Ja izliekts četrstūris nav taisnstūris, tad kādas trīs no tā virsotnēm veido platleņķa trijstūri*;
- *Ja dots trijstūris ABC un punkts D tā iekšpusē, tad vismaz divi no trijstūriem ABD, BCD, CAD ir platleņķa.*

I.V.11. Vienpadsmitā klase

I.V.11.1. Apskatiet vektorus ar koordinātām $\vec{x} = (a; b; c)$ un $\vec{y} = (m; n; p)$. Izmantojiet vektora garuma un skalārā reizinājuma formulas.

I.V.11.2. Uz malas *AD* atlieciet tādu iekšēju punktu *E*, ka $AE = AB$ un $ED = CD$. Pierādiet, ka $\angle BEC = 90°$, un atlieciet malas *BC* viduspunktu *F*, lai pierādītu, ka *AF* un *DF* ir leņķu *ADC* un *BAD* bisektrises.

I.V.11.3. Pārbaudiet vērtības $p = 2$ un $p = 3$. Ja pirmskaitlis $p > 3$, tad šķirojiet gadījumus: $p = 3k + 1$ un $p = 3k + 2$, pamatojiet, kāpēc nav jāapskata gadījums, kad $p = 3k$.

I.V.11.4. Katru punktu nosacīti sadaliet divās daļās: tajā, kas atrodas loka sākumā un tajā, kas atrodas loka beigās. Pieņemiet, ka uz katra loka uzrakstītais skaitlis ir tā sākuma un beigu *puspunktu* vērtību summa, un sastādiet vienādojumu sistēmu.

I.V.11.5. Izvēlieties trijstūri *ABC* ar vislielāko laukumu (vai vienu no šādiem trijstūriem, ja to ir vairāk). Caur katru trijstūra *ABC* virsotni novelciet taisni, kas ir paralēla trijstūra pretējai malai. Pamatojiet, ka visi punkti pieder trijstūrim, ko norobežo novilktās taisnes.

I.V.12. Divpadsmitā klase

I.V.12.1. Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus (tai skaitā reizināšanu ar 2) un pilno kvadrātu atdalīšanu, pierādiet, ka $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - 2 > \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}$ ir patiesa nevienādība.

I.V.12.2. Izmantojiet trijstūra viduslīnijas īpašības.

I.V.12.3. Ievērojiet, ka $m^3 = (2n)^{2n} - 1 = \left((2n)^n - 1\right)\left((2n)^n + 1\right)$.

I.V.12.4. Pieņemiet, ka kādam *x* izpildās nevienādība $g(x) > x$, un iegūstiet pretrunu ar doto. Līdzīgi pierādiet, ka nevar būt, ka $g(x) < x$.

I.V.12.5. Ar matemātisko indukciju pierādiet vispārīgāku gadījumu: Virkni, kas sastāv no cipariem $c_1, c_2, ..., c_k$ sauc par universālu, ja jebkuru virkni, kurā katrs no cipariem $c_1, c_2, ..., c_k$ ir sastopams tieši vienu reizi, var iegūt no dotās virknes, izsvītrojot tajā dažus ciparus. Universālas virknes garums nevar būt mazāks kā $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

I.A. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.A.9. Devītā klase

I.A.9.1. Veiciet identiskus pārveidojumus un sadaliet iegūto izteiksmi reizinātājos, lai iegūtu vienādojuma 8 atrisinājumus. Neaizmirstiet veikt pārbaudi!

I.A.9.2. Atcerieties, ka taisnleņķa trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā un visi riņķa rādiusi ir vienādi savā starpā.

I.A.9.3. Pamatojiet, kādus skaitļus jāizvēlas pirmajam rūķītim, lai otrā rūķīša izveidotajam kvadrātvienādojumam noteikti būtu vismaz viena racionāla sakne $x=-1$.

I.A.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka nevar būt vairāk kā 3 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi ar uzdevumā doto īpašību; ievērojiet, ka $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$; 2) jāparāda, ka eksistē 3 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, kuri ir izsakāmi kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpība.

I.A.9.5. Ievērojiet, ka ir diagonāles, uz kuru rūtiņām sienāzis var nonākt, un ir tādas diagonāles, uz kuru rūtiņām sienāzis nonākt nevar.

I.A.10. Desmitā klase

I.A.10.1. Ievērojiet, ka pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisko progresiju ar diferenci 1, kuras pēc kārtas ņemtu *n* locekļu a, $a+1,\ldots$, $a+n-1$ summa ir

$$S_n=\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}.$$

I.A.10.2. Ievērojiet, ka ap četrstūri *ACBD* var apvilkt riņķa līniju, jo tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.A.10.3. Atcerieties, ka vienādojumam $a^2=b^2$ vispārīgā gadījumā iespējami divi atrisinājumi: $a=b$ un $a=-b$.

I.A.10.4. Ievērojiet, ka noteikti ir divas tādas 10-stūra virsotnes, kas pieder lokam, ko veido divas 9-stūra virsotnes.

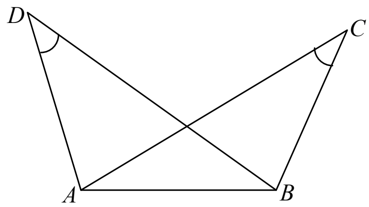
I.A.10.5. a) Pierādiet, ka *torni* nevar salikt no *klucīšiem*, izmantojot invariantu metodi.

b) Parādiet piemēru, kā no *stūrīšiem* var salikt *torni*.

I.A.11. Vienpadsmitā klase

I.A.11.1. a) Vispirms izmantojiet pirmo divu aritmētisko progresiju vispārīgo locekļu formulas, lai atrastu skaitļus, kas pieder šīm abām progresijām. Tad atrodiet iegūtās skaitļu virknes vispārīgā locekļa formulu un, izmantojot arī trešās uzdevumā dotās aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, atrodiet mazāko skaitli, kas pieder visām trim uzdevumā dotajām virknēm.
b) Pierādiet, ka visām trim dotajām virknēm pieder skaitļi, kas izsakāmi formā $1667+1680p$, kur p – vesels, nenegatīvs skaitlis.

I.A.11.2. Pierādiet, ka $MY \parallel BO$ un $NX \parallel AO$. Ievērojiet: ja $\angle ACB = \angle BDA$, tad punkti A, B, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas jeb ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju (skat. I3. zīm.).



I3. zīm.

Atcerieties, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.A.11.3. Izveidojiet rekursīvu sakarību, ar f_n apzīmējot, cik veidos taisnstūri ar izmēriem $3\times n$ var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3. Ievērojiet, ka rūtiņu, kas atrodas lielā taisnstūra augšējajā kreisajā stūrī, var noklāt tikai divos dažādos veidos.

I.A.11.4. Pareiziniet vienādojuma kreisajā pusē esošajiem saskaitāmajiem skaitītāju un saucēju ar to saucējiem saistīto izteiksmi un veiciet identiskus pārveidojumus.

I.A.11.5. Ievērojiet, ka blakusesošo skaitļu kopējais pirmreizinātāju skaits atšķiras tieši par 1, jo to dalījums ir pirmskaitlis.

I.A.12. Divpadsmitā klase

I.A.12.1. a) Parādiet piemēru, kā naturālos skaitļus no 1 līdz 9 var sadalīt trīs grupās pa trim tā, lai katras grupas skaitļu summa būtu pirmskaitlis.
b) Apskatiet, kādas var būt grupu skaitļu summas, lai pierādītu, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 9 nevar sadalīt trīs grupās pa trim skaitļiem tā, lai visas grupu skaitļu summas būtu atšķirīgi pirmskaitļi.

I.A.12.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, pie kādām x vērtībām uzdevumā dotā izteiksme pieņem vērtības 1 un 2^{-18}; 2) jāpierāda, ka šīs vērtības ir uzdevumā dotās izteiksmes lielākā un mazākā vērtība.

I.A.12.3. Izmantojiet bisektrises un hordu īpašības.

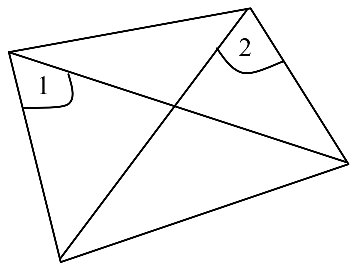
I.A.12.4. Parādiet, ka uzdevumā prasītais ir iespējams.

I.A.12.5. Apskatiet skaitļus $x=\dfrac{1}{N}$ un $y=\dfrac{1}{N^N}$, kur N – naturāls skaitlis, kas lielāks par 1. Izvēlieties tādu N vērtību, lai uzdevumā dotā nevienādība būtu patiesa.

I.VP. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

I.VP.1. Ievērojiet, ka „secīgi naturāli skaitļi” apzīmē aritmētisku progresiju ar diferenci 1. Izmantojiet aritmētiskās progresijas, kuras pirmais loceklis ir a_1 un diference d, pirmo n locekļu summas formulu: $S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$.

I.VP.2. Šķirojiet divus gadījumus: 1) punkts P pieder lokam ABC; 2) punkts P pieder lokam AEC. Atcerieties, ka četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir 180° vai ja $\angle 1 = \angle 2$ (skat. I4.zīm.). Pierādījuma 2. gadījumā izmantojiet ārējā leņķa aprēķināšanas formulu.



I4. zīm.

I.VP.3. Apzīmējiet $g(x) = 3f(x) - 2x$ un iegūstiet sakarību $g(g(x)) + 2g(x) = 3x$. Patvaļīgam x un aplūkojiet virkni $y_0 = x$, $y_1 = g(x)$, $y_2 = g(g(x))$, ..., $y_n = g(y_{n-1})$, ...; ievērojiet, ka šīs virknes locekļi apmierina sakarību: $y_{n+2} + 2y_{n+1} = 3y_n$. Atrisiniet iegūto vienādojumu.

I.VP.4. Izmantojiet matemātiskās indukcijas metodi, lai pierādītu, ka uzdevumā prasītais iespējams visiem naturāliem n.

I.VP.5. Izmantojiet nevienādību starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

I.IMO. 52. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.IMO.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) pierādiet, ka p_A vērtība nevar būt lielāka kā 4, izmantojot faktu, ka summa $a_i + a_j$ ir S_A dalītājs tad un tikai tad, ja $a_i + a_j$ ir arī $S_A - (a_i + a_j) = a_k + a_\ell$ dalītājs (*k* un ℓ – pārējie divi indeksi, kas nesakrīt ar *i* un *j*); 2) izveidojot vienādojumu sistēmu, atrodiet visas četru dažādu naturālu skaitļu kopas *A*, kam $p_A = 4$.

I.IMO.2. Piešķiriet taisnei *t* virzienu un pieņemtiet, ka pusplaknes, ko šī taisne nosaka, ir *pelēkā* un *baltā pusplakne*. Pamatojiet faktu: kopas *S* elementu skaits, kas atrodas *pelēkajā pusplaknē*, kā arī elementu skaits, kas atrodas *baltajā pusplaknē*, visa procesa laikā paliek nemainīgs (izņemot tos brīžus, kad uz taisnes vienlaicīgi atrodas divi punkti). Šķirojiet 2 gadījumus:

- *S* elementu skaits ir nepāra skaitlis;
- *S* elementu skaits ir pāra skaitlis.

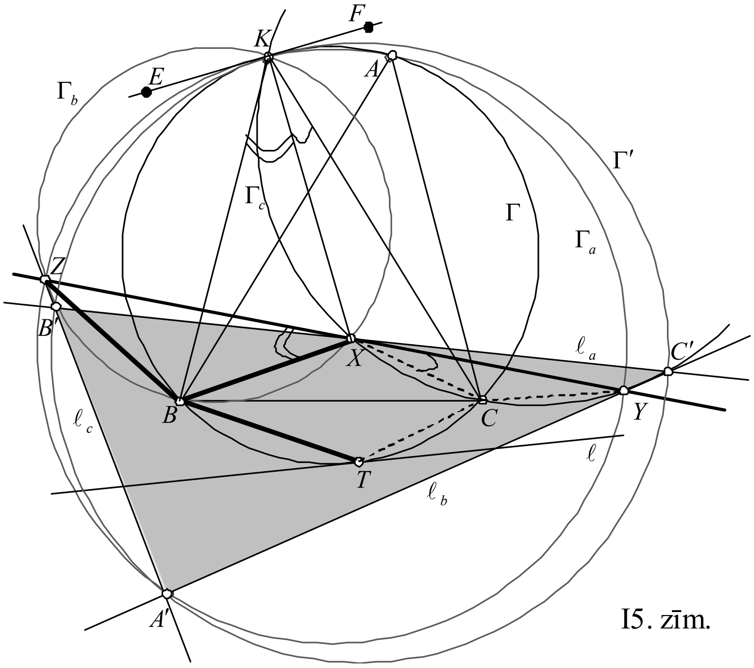
I.IMO.3. Veiciet dažādas substitūcijas un pierādiet, ka $f(a) \geq 0$, ja $a < 0$ un $f(x) \leq 0$ visiem reāliem skaitļiem *x*, lai secinātu, ka $f(x) = 0$ visiem $x < 0$. Izmantojot šos secinājumus, pierādiet, ka $f(0) = 0$.

I.IMO.4. Ar $f(n)$ apzīmējiet dažādo virkņu skaitu, kādos iespējams novietot uz svariem *n* atsvarus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.
Ievērojiet, ka $f(1) = 1$, un, pieņemot, ka $n \geq 2$, pierādiet, ka

$$f(n) = f(n-1) \cdot (2n-1).$$

I.IMO.5. Ievērojiet, ka uzdevumā prasītais izpildās, ja $f(m) = f(n)$, un pierādiet, ka prasītais izpildās arī gadījumā, ja $f(m) < f(n)$.

I.IMO.6. Izmantojot Simsona teorēmu, pierādiet, ka punkti Z, X un Y (punkta T simetriskie attēli attiecīgi pret taisnēm BC, CA un AB) atrodas uz vienas taisnes (skat. I5. zīm.).



I5. zīm.

Izmantojot matemātiskus spriedumus un aprēķinus, pierādiet, ka punkti X, C, Y un C' atrodas uz vienas riņķa līnijas Γ_c, punkti X, Z, B un B' atrodas uz vienas riņķa līnijas Γ_b un punkti Y, Z, A un A' atrodas uz vienas riņķa līnijas Γ_a.

Izmantojot Mikela teorēmu, pierādiet, ka riņķa līnijām Γ', Γ_a, Γ_b un Γ_c ir kopīgs punkts K, un pamatojiet, ka punkts K pieder arī riņķa līnijai Γ.

Apskatiet riņķa līnijas Γ pieskari, kas vilkta caur punktu K. Pierādiet, ka šī pieskare ir arī riņķa līnijas Γ' pieskare punktā K.

I.AB. ATLASE KOMANDU OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

I.AB.A. Algebra

I.AB.A.1. Pierādiet šādas nevienādības: $a^n + a^{-n} + 1 \geq a^2 + a^{-2} + 1 \geq \frac{3}{2}(a + a^{-1})$.

I.AB.A.2. Ievērojiet, ka $x = 2$ ir dotā polinoma sakne. Sadaliet polinomu reizinātājos un analizējiet katra reizinātāja sakņu skaitu.

I.AB.A.3. Izmantojiet nevienādību $2ab \leq a^2 + b^2$, kur $a = \sqrt{n+1}$ un $b = x_i,\ i = 1, 2, ..., n$. Pēc tam visas nevienādības izdaliet ar $x_i^2 - 1 > 0$ un saskaitiet iegūtās nevienādības.

I.AB.A.4. Apskatiet uzdevumā doto vienādību, ievietojot vērtības $x = 0$, $x = f(0)$ un $y = 0$. Atcerieties, ka visas funkcijas $f: Q \to Q$, kuras apmierina Košī vienādojumu $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ir formā $f(x) = f(1)x$.

I.AB.A.5. Izmantojiet formulas $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$ un $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$, lai pārveidotu vienādojuma labās puses izteiksmi. Pēc tam salīdziniet, kāds ir vienādojuma labās un kreisās puses izteiksmes vērtību apgabals.

I.AB.Ģ. Ģeometrija

I.AB.Ģ.1. Pierādiet, ka $XY = ZT$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus.

I.AB.Ģ.2. Apzīmējiet $\angle ADF = \alpha$, $\angle FDB = \beta$, $\angle BEF = \gamma$, $\angle FEC = \delta$ un pierādiet, ka $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \gamma + \delta = 180°$. Atcerieties, ka četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.AB.Ģ.3. Izmantojiet šādus faktus:

- Četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.
- Ja $\angle ACB = \angle BDA$ (skat. I3. zīm.), tad punkti *A*, *B*, *C*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas jeb ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju.
- Punkti *A*, *B*, *C*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas tad un tikai tad, a *M* ir nogriežņu *AB* un *CD* krustpunkts un $AM \cdot MB = CM \cdot MD$,.

I.AB.Ģ.4. Apzīmējiet $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{e_4}$, kur *O* ir lodes centrs un *A*, *B*, C, *D* – piramīdas virsotnes. Izmantojot vienības vektorus $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$, , izsakiet piramīdas visas šķautnes. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, izmantojiet summu $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$.

I.AB.Ģ.5. Izmantojiet līdzīgus trijstūrus un to malu attiecības, lai pierādītu, ka $\Delta CPB \sim \Delta FPE$.

I.AB.K. Kombinatorika

I.AB.K.1. Ievērojiet, ka intervālā [100; 200] ir 101 naturāls skaitlis. Izmantojiet Dirihlē principu.

I.AB.K.2. Aplūkojiet grupu A ar lielāko iespējamo cilvēku skaitu m tādu, ka katrā ričurača partijā spēlēja viens cilvēks, kurš nepieder grupai A. Ievērojiet: lai pierādītu uzdevumā prasīto, pietiek pierādīt, ka $m \geq 24$.

I.AB.K.3. Pamatojiet, ka vaboles var pārlidot uz jaunām vietām tā, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, sadalot doto kvadrātu blokos ar izmēriem 21×21 un projicējot tos visus uz vienu bloku ar izmēriem 42×42, palielinot visus attālumus 2 reizes.

I.AB.K.4. Ievērojiet, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais neizšķirto partiju skaits; 2) jāparāda piemērs, kā spēlētāji var būt spēlējuši, lai rezultātā būtu maksimālais neizšķirto partiju skaits.

I.AB.K.5. Ievērojiet, ka atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākā m vērtība un jāparāda piemērs, kurā šī situācija izpildās; 2) jāpierāda, ka mazākām m vērtībām uzdevumā prasītais nevar realizēties.

I.AB.S. Skaitļu teorija

I.AB.S.1. Apskatiet, kādus atlikumus dod skaitļi $(1+2+...+n)+2$, ja tos dala ar 9, un kādus atlikumus dod naturālu skaitļu kvadrāti, ja tos dala ar 9.

I.AB.S.2. Atcerieties, ka uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) parādiet, ka n var būt 1 un 2; 2) pierādiet, ka citas n vērtības nevar būt, izmantojot, ka $p(x) - p(y)$ dalās ar $x - y$, kur $p(x)$ ir polinoms.

I.AB.S.3. Pierādiet, ka profesors Cipariņš vienmēr var pateikt, kādu skaitli iedomājās skolēns. Ievērojiet, ka visu sešu skaitļu summa ir $222(a+b+c)$, kur $\overline{abc}$ ir skolēna iedomātais skaitlis.

I.AB.S.4. Ievērojiet, ka $t > x$ un $(x+1)! \leq t! \leq x! + 2x! + 3x! = 6x!$.

I.AB.S.5. Pamatojiet, kāpēc $\frac{MKD(p^b, p^{b'})}{LKD(p^b, p^{b'})} = p^{|b-b'|}$, kur p ir pirmskaitlis, un apskatiet kāpinātāju virkni (b_n), kura definēta ar formulu $b_n = |b_{n-1} - b_{n-2}|$ visiem $n > 2$ katram pirmreizinātājam atsevišķi.

I.BW. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

I.BW.A. Algebra

I.BW.A.1. Pieņemiet, ka $d \geq c \geq b \geq a \geq 0$, un, izmantojot doto, iegūstiet, ka $d \leq c \leq b \leq a$.

I.BW.A.2. Pierādiet, ka $\cos^4 x + \sin^4 x \geq \frac{1}{2} \geq \cos x \sin x$, no kurienes seko uzdevumā prasītais.

I.BW.A.3. Izmantojiet matemātisko indukciju. Ievērojiet, ka induktīvajā pārejā pietiek pierādīt, ka $\frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_n}{x_1} \leq 2$.

I.BW.A.4. Apskatiet vērtību $x = 0$. Pierādiet, ka $P(i \cdot 67) = 0$, $i = 1, 2, ..., 30$. Atcerieties: ja $P(a) = 0$, tad $P(x)$ satur reizinātāju $x - a$.

I.BW.A.5. Apskatiet gadījumu, kad $f(0) \neq 0$, ievietojot uzdevumā dotajā funkcionālvienādojumā vērtību $x = 0$, un apskatiet gadījumu, kad $f(0) = 0$.

I.BW.K. Kombinatorika

I.BW.K.1. Ieviesīsiet Dekarta koordinātu sistēmu, kur galvenās diagonāles rūtiņas ir ar koordinātām $(k; k)$, kur $k = 1, ..., n$. Ar $(k; f(k))$ apzīmējiet k-tā torņa koordinātas. Ievērojiet, ka katras krāsas visām rūtiņām abu koordinātu starpības moduļi ir vienādi un dažādu krāsu rūtiņām tie ir atšķirīgi. Izmantojiet doto, ka katrs tornis stāv uz citas krāsas lauciņa un tie katrs atrodas citā rindā un citā kolonnā (jo torņi viens otru neapdraud) un atrodiet attiecīgi $\sum_{k=1}^{n}(f(k)-k)^2$ un $\sum_{k=1}^{n}(f(k))^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2$.

I.BW.K.2. Ievērojiet: ja ar $d(x; y)$ apzīmējam cenu reisam starp pilsētām x un y, tad cenas atšķirība starp slēgtiem maršrutiem, kas iet caur katru pilsētu tieši vienu reizi, un ietver vai neietver galvaspilsētu ir $d(C_i; C) + d(C; C_j) - d(C_i; C_j)$, kur C – galvaspilsēta, bet C_i un C_j – jebkuras divas citas pilsētas.

I.BW.K.3. Apskatiet kora dalībnieku kopas S trīs apakškopas: 1) T – lielākā apakškopa, kas sastāv no dalībniekiem, kas nav saņēmuši cepuri no kāda cita šīs apakškopas dalībnieka; 2) U – kopa, kas sastāv no dalībniekiem, kas saņēmuši cepuri no kopas T dalībniekiem; 3) kopu, kas sastāv no dalībniekiem, kas nepieder kopai $T \cup U$.

I.BW.K.4. Pierādiet, ka otrajam spēlētājam ir uzvarošā stratēģija, un tā ir šāda: pēc otrā spēlētāja gājiena sērkociņu skaitam ir jābūt izsakāmam kā $6n + r$, kur $n > r$, vai $7n$, kur $n \leq r$, ja r – atlikušo īpašo gājienu skaits konkrētajā pozīcijā.

I.BW.K.5. Ar $f(n)$ apzīmējiet n-stūrī mazāko iespējamo melno trijstūru skaitu un ar matemātiskās indukcijas metodi pierādiet, ka $f(n) \leq \left[\frac{n-1}{3}\right]$ un $f(n) \geq \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

I.BW.Ģ. Ģeometrija

I.BW.Ģ.1. Pamatojiet, ka PQ ir riņķa līniju k un k' radikālā ass, un pierādiet, ka punkts S atrodas uz riņķa līniju k un k' radikālās ass, izmantojot punkta pakāpi pret abām riņķa līnijām.

I.BW.Ģ.2. a) Pieņemiet, ka uzdevumā meklētā trapece eksistē un sadaliet to paralelogramā un trijstūrī, lai pierādītu, ka trijstūra malu garumi ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.
b) Lai pierādītu, ka eksistē šajā punktā prasītā trapece, pietiek atrast vienu piemēru, kurš apmierina uzdevuma nosacījumus.

I.BW.Ģ.3. Ievērojiet, ka gan stari HD un HB, gan trijstūrim ABC apvilktā riņķa līnija ir simetriski attiecībā pret taisni, kas satur leņķa DHB bisektrisi. Pierādiet, ka ΔBHE ir vienādmalu trijstūris, lai iegūtu vienīgo iespējamo $\angle CAB$ vērtību.

I.BW.Ģ.4. Apzīmējiet nogriežņa XY viduspunktu ar M un pierādiet, ka $AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2$, izmantojot punktu pakāpes. Trijstūra ABC augstumu no virsotnes C apzīmējiet ar CH un pierādiet, ka $AC^2 - BC^2 = CH^2 = AH^2 - BH^2$. Izmantojot šīs vienādības, pierādiet, ka punkti M un H sakrīt.

I.BW.Ģ.5. Ar K apzīmējiet trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas loka BC viduspunktu un pierādiet, ka ap četrstūri $BMXK$ var apvilkt riņķa līniju, lai pierādītu, ka $\angle XMN = 67°$. Līdzīgi pierādiet, ka ap četrstūri $CXNK$ var apvilkt riņķa līniju, lai pierādītu, ka arī $\angle XNM = 67°$.

I.BW.S. Skaitļu teorija

I.BW.S.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) Pierādiet, ka nepāra skaitļi, kas lielāki par 1 un mazāki par 9, nav *burvīgi*, pierādot un izmantojot sakarību $s(k) \equiv k \pmod 9$, kas ir spēkā visiem k; 2) parādiet piemēru, kas parāda, ka 9 ir *burvīgs* skaitlis.

I.BW.S.2. Pierādiet, ka meklētie skaitļi n nevar būt pāra skaitļi un nepāra skaitļi, kas dalās ar 5. Atrodiet uzdevumā prasītos skaitļus, analizējot skaitļus, kas ir formā: $n = 10k \pm m$, kur $m \in \{1; 3\}$.

I.BW.S.3. Pamatojiet un izmantojiet, ka $(p-k)(p-k)^{-1} \equiv 1 \pmod p$. Izmantojot kongruences īpašības, pierādiet, ka $(p-k)^{-1} \equiv -k^{-1} \pmod p$.

I.BW.S.4. Apskatot mazāko pirmskaitļu kvadrātus, seciniet, ka $k \le 14$. Apskatiet divus gadījumus: kad $p_1, p_2, ..., p_k$ ir nepāra pirmskaitļi un kad viens no $p_1, p_2, ..., p_k$ ir pāra pirmskaitlis 2, un pirmajā gadījumā seciniet, ka nevar atrast k, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, bet otrajā gadījumā pierādiet, ka vienīgā atbilde ir $k = 7$. Neaizmirstiet atrast piemēru, kas parāda, ka pie $k = 7$ tiešām var atrast tādus pirmskaitļus $p_1, p_2, ..., p_k$, lai uzdevumā dotā vienādība būtu patiesa.

I.BW.S.5. Pierādiet, ka uzdevumā doto var panākt pie visiem $n > 1$, rekursīvi definējot skaitļu virkni $x_0, x_1, ...,$ kur $x_0 = n$ un $x_{k+1} = (x_0 + ... + x_k)! + 1$ visiem $k \ge 0$, un apskatot bezgalīgu naturālo skaitļu apakškopu $A = \{x_k \mid k \ge 1\}$.

ATRISINĀJUMI

A.S. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.S.9. Devītā klase

A.S.9.1. Pārveidojam pierādāmo nevienādību:

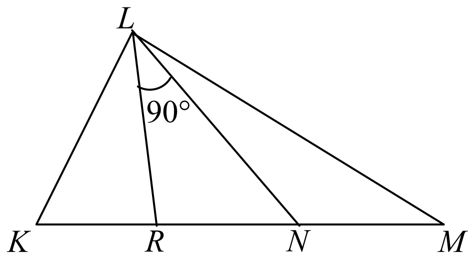
$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0\,;$$
$$x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0\,;$$
$$(x-y)(x^3 - y^3) \geq 0\,.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo ir iespējami 3 gadījumi:

- ja $x > y$, tad $x^3 > y^3$, jo $y = x^3$ ir augoša funkcija, un abas iekavas ir pozitīvas (divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs skaitlis);
- ja $x < y$, tad $x^3 < y^3$ un abas iekavas ir negatīvas;
- ja $x = y$, tad $(x-y)(x^3 - y^3) = 0$.

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

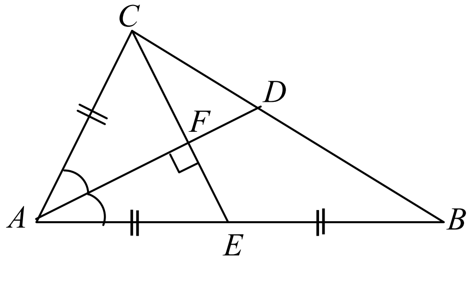
A.S.9.2. Pieņemsim, ka dotā bisektrise *LR* un dotā mediāna *LN* iziet no vienas trijstūra virsotnes (skat. A1. zīm.). Tā kā *LN* ir mediāna, tad $\angle NLM = \alpha > 0$ un $\angle RLM = \angle RLN + \angle NLM = 90° + \alpha > 90°$. No bisektrises definīcijas seko, ka $\angle KLM = 2 \cdot \angle RLM = 180° + 2\alpha > 180°$. Esam ieguvuši, ka viens trijstūra leņķis ir lielāks nekā $180°$, kas nevar būt, jo trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.



A1. zīm.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dotā bisektrise un dotā mediāna iziet no dažādām trijstūra virsotnes. Pieņemsim, ka trijstūrī *ABC* apskatāmā bisektrise ir *AD*, bet mediāna *CE*; tās krustojas punktā *F* (skat. A2. zīm.). Tad trijstūrī *ACE* nogrieznis *AF* ir gan bisektrise, gan augstums; tātad šis trijstūris ir vienādsānu ar sānu malām $AC = AE$.

Tā kā *CE* ir mediāna, tad $AE = EB$ un $AB = 2AE = 2AC$, kas arī bija jāpierāda.



A2. zīm.

A.S.9.3. Apskatīsim skaitļus, kas sastāv tikai no vieniniekiem un dalīsim tos ar 7:

- $1:7=0$ atlikumā 1;
- $11:7=1$ atlikumā 4;
- $111:7=15$ atlikumā 6;
- $1111:7=158$ atlikumā 5;
- $11111:7=1587$ atlikumā 2;
- $111111:7=15873$;
- $1111111=1111110+1=\underbrace{111111}_{:7}\cdot 10+1 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 1;
- $11111111=\underbrace{111111}_{:7}\cdot 100+11 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 4;
- $111111111=\underbrace{111111}_{:7}\cdot 1000+111 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 6;
- utt.

Šādi turpinot, var ievērot, ka atlikumi periodiski atkārtojas, tāpēc nākamais skaitlis, kas dalās ar 7, ir 111111111111.

Tātad vispārīgi skaitlis A, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir formā $A=\underbrace{1...1}_{6k}$, kur k ir naturāls skaitlis, t. i., skaitļa A vieninieku skaits dalās ar 6.

Skaitli A var pierakstīt formā

$$A=111111\cdot 10^{6(k-1)}+111111\cdot 10^{6(k-2)}+...+111111\cdot 10^{6(k-k)}=$$
$$=111111\cdot\left(10^{6(k-1)}+10^{6(k-2)}+...+10^{6(k-k)}\right).$$

Tā kā skaitlis A vienmēr satur reizinātāju 111111, kas dalās ar 13 ($111111:13=8547$), tad arī skaitlis A dalīsies ar 13.

A.S.9.4. Pieņemam, ka ir izdevies 39-stūri sadalīt 9 izliektos sešstūros. Tad izliektā 39-stūra visus leņķus aizpilda deviņu izliekto sešstūru leņķi. Tātad 39-stūra leņķu summai ir jābūt ne lielākai par 9 sešstūru leņķu summu. Taču 39-stūra leņķu summa ir $S_{39}=(39-2)\cdot 180°=37\cdot 180°$, bet deviņu sešstūru leņķu summa ir $9\cdot S_6=9\cdot(6-2)\cdot 180°=36\cdot 180°<37\cdot 180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc 39-stūri nevar sadalīt deviņos izliektos sešstūros.

A.S.9.5. Otrais spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru. Parādīsim, kā jārīkojas otrajam spēlētājam, lai viņš uzvarētu. Sadalīsim rūtiņas pāros, kā parādīts A3. zīmējumā (viena pāra rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem). Otrais spēlētājs katrā gājienā iekrāso rūtiņu, kurā ierakstīts tāds pats burts, kāds bija rūtiņā, kuru pirms tam iekrāsoja pirmais spēlētājs. Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena nebija izveidojies iekrāsots 2×2 rūtiņu kvadrāts, tad arī pēc otrā spēlētāja gājiena tas neizveidosies. Tātad otrais spēlētājs var panākt savu uzvaru šajā spēlē.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

A3. zīm.

A.S.10. Desmitā klase

A.S.10.1. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x)=cx^2+bx+a$. Ievērosim, ka $a^2+ab+ac=a(a+b+c)=f(0)\cdot f(1)$. Tad no dotā seko, ka $f(0)\cdot f(1)<0$. Tātad izteiksmes $f(0)$ un $f(1)$ ir ar pretējām zīmēm, no kā seko, ka kvadrātfunkcija krusto x asi. Varam secināt, ka kvadrātfunkcijai eksistē divas saknes jeb tās diskriminats ir pozitīvs, t. i., $D=b^2-4ac>0$ jeb $b^2>4ac$, kas arī bija jāpierāda.

A.S.10.2. Uzdevumā prasītais ir iespējams, piemēram, skaitļi $\frac{1}{2010!},\frac{2}{2010!},\frac{3}{2010!},...,\frac{2010}{2010!}$ apmierina uzdevuma prasības.

Visiem šiem skaitļiem saucējs dalās ar skaitītāju (jo $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(n-1)\cdot n$ un tas dalās ar katru savu reizinātāju), tātad ar skaitītāju var saīsināt un iegūt daļu, kuras skaitītājā ir 1. Esam parādījuši, ka visi šie skaitļi ir naturālo skaitļu apgrieztie skaitļi (izpildās pirmais nosacījums).

Izpildās arī otrais nosacījums: $a_{i+1}-a_i=\frac{i+1}{2010!}-\frac{i}{2010!}=\frac{i+1-i}{2010!}=\frac{1}{2010!}$ visiem i.

<u>*Piezīme.*</u> Par naturāla skaitļa $n\geq 1$ faktoriālu sauc visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu. To apzīmē ar $n!$.

A.S.10.3. Pārveidojam doto vienādību:

$$pqrs=2p^{10}-38,$$
$$38=2p^{10}-pqrs,$$
$$38=p(2p^9-qrs).$$

No pēdējās vienādības seko, ka 38 dalās ar p. Skaitlim 38 ir četri dalītāji: 1, 2, 19, 38. Tā kā p ir pirmskaitlis, tad pastāv divas iespējas:

- Ja $p=2$, tad $n=2\cdot 2^{10}-38=2(2^{10}-19)=2\cdot 1005=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67=2010$;
- Ja $p=19$, tad $n=2\cdot 2^{10}-38=2\cdot(19^{10}-19)$ dalās ar 4 (izteiksme iekavās ir pāra skaitlis kā divu nepāra skaitļu starpība), tātad skaitlis n nav dažādu pirmskaitļu reizinājums.

Tātad skaitlis 2010 ir vienīgais naturālais skaitlis n, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

A.S.10.4. Atceramies šādas definīcijas:

- Par punkta M projekciju uz taisnes ℓ sauc tādu punktu M', kuram $MM'\perp\ell$.
- Par vektora $\overrightarrow{AB}$ projekciju uz taisnes sauc vektoru, kas vienāds ar $\overrightarrow{A'B'}$, kur A' ir punkta A projekcija un B' ir punkta B projekcija uz šīs taisnes.

Projicējam visus vektorus uz taisni ℓ, kas perpendikulāra piramīdas pamata plaknei. Tad pamata plaknes vektori projicējas nulles vektoros, jo jebkura taisne plaknē ir perpendikulāra novilktajai taisnei ℓ (visas piramīdas pamata virsotnes projicēsies punktā, kurā taisne ℓ krusto piramīdas pamata plakni). Sānu šķautņu vektori projicējas vienāda garuma paralēlos vektoros, kuriem viens no galapunktiem atrodas punktā, kurā projicējas piramīdas virsotne, bet otrs – punktā, kurā taisne ℓ krusto piramīdas pamata plakni. Tā kā sānu šķautņu vektoru skaits ir nepāra skaitlis, tad summā iegūt nulles vektoru nevar, lai kā arī izvēlētos piramīdas šķautņu virsotnes. Tātad uzdevumā prasīto iegūt nevar.

A.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka vienlaicīgi var būt ieslēgtas ne vairāk kā septiņas lampiņas. Ievērojam, ka katru slēdzi ir vērts pārslēgt ne vairāk kā vienu reizi. Aplūkosim trīs lampiņu grupas: [2; 3; 6], [2; 5; 10], [4; 8]. Ir iespējami 2 gadījumi:

- ja 2. lampiņa ir izslēgta, tad izslēgtas ir arī abas trešās grupas lampiņas (jo 4. un 8. lampiņu var ieslēgt vai izslēgt, tikai izmantojot slēdzi ar numuru 2) un šajās trijās grupās kopā ir ne vairāk kā četras ieslēgtas lampiņas. Pat ja ir ieslēgta 7. un 9. lampiņa, vienlaicīgi nevar būt ieslēgtas vairāk kā sešas lampiņas;
- ja 2. lampiņa ir ieslēgta, tad abas trešās grupas lampiņas arī ir ieslēgtas. Ievērojam, ka katrā no grupām var būt ieslēgtas ne vairāk kā divas lampiņas, tātad pa visām trim grupām kopā ir vismaz divas izslēgtas lampiņas (viena pirmajā un viena – otrajā grupā). Varam secināt, ka šajā gadījumā apskatītajās trijās grupās kopā ir ne vairāk kā 5 ieslēgtas lampiņas. Pat ja ir ieslēgta 7. un 9. lampiņa, vienlaicīgi nevar būt ieslēgtas vairāk kā septiņas lampiņas.

Tātad iespējams ieslēgt ne vairāk kā septiņas lampiņas.

Otrkārt, parādām, ka vienlaicīgi var būt ieslēgtas tieši septiņas lampiņas. Tiešām, ja ieslēdz slēdžus 2, 3 un 7, tad ieslēgtas ir septiņas lampiņas 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10.

Tātad lielākais lampiņu skaits, kas vienlaicīgi var būt ieslēgtas, ir 7.

A.S.11. Vienpadsmitā klase

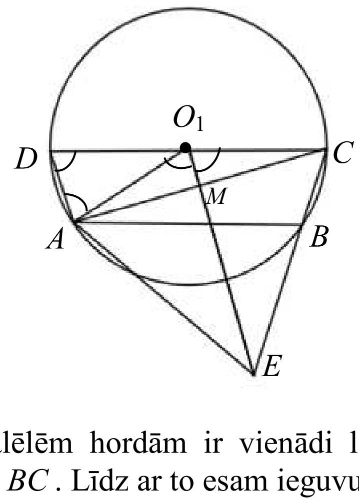
A.S.11.1. Pārveidojam doto vienādojumu formā $8^y = 13^z - 7^x$.

Tā kā skaitlis 8^y nesatur pirmreizinātāju 3, tad tas nedalās ar 3.

Ievērojam, ka $13^z \equiv 1 \pmod 3$ un $7^x \equiv 1 \pmod 3$, tad vienādojuma labā puse dalās ar 3. (Teorēma. Pieņemsim, ka *a*, *b* un *n* ir veseli skaitļi, turklāt $n > 0$. Starpība $a - b$ dalās ar *n* tad un tikai tad, ja *a* un *b* dod vienādus atlikumus, dalot ar *n*.)

Iegūta pretruna, jo vienādības viena puse nevar dalīties ar 3, bet otra – nedalīties ar 3. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

A.S.11.2. Pagarinām rādiusu O_1C līdz diametram *CD* (skat. A4. zīm.).



A4. zīm.

Tā kā starp paralēlēm hordām ir vienādi loki un vienādus loku atšķeļ vienādas hordas, tad $AD = BC$. Līdz ar to esam ieguvuši vienādsānu trapeci *ABCD*.

Apzīmējam $\angle ADC = \angle DCB = \beta$ (jo vienādsānu trapecei leņķi pie pamata ir vienādi). Tā kā $DO_1 = AO_1$ kā riņķa līnijas rādiusi, tad trijstūris DO_1A ir vienādsānu trijstūris un $\angle DAO_1 = \angle ADO_1 = \beta$ kā leņķi pie pamata. Tad $\angle AO_1C = \angle ADO_1 + \angle DAO_1 = 2\beta$ kā trijstūra DO_1A ārējais leņķis.

Novelkam leņķa AO_1C bisektrisi un tās krustpunktu ar taisni *CB* apzīmējam ar *E*. Tā kā pēc konstrukcijas O_1E ir leņķa AO_1C bisektrise, tad $\angle EO_1C = \angle AO_1E = \beta$. Tātad ΔO_1EC ir vienādsānu un $EC = EO_1$.

Ja vienādsānu trijstūrī AO_1C ($AO_1 = CO_1$ kā rādiusi) taisne O_1E satur leņķa AO_1C bisektrisi, tad tā satur arī augstumu un mediānu. Ar M apzīmējam AC un O_1E krustpunktu. Tātad $O_1E \perp AC$ un $AM = MC$. Varam secināt, ka nogrieznis EM trijstūrī ACE ir gan augstums, gan mediāna, tāpēc ΔAEC ir vienādsānu trijstūris un $EC = EA$.

Esam ieguvuši, ka punkts E atrodas vienādos attālumos no riņķa līnijas ω_2 punktiem A, O_1 un C, tātad tas ir ω_2 centrs. Pēc konstrukcijas punkts $E = O_2$ atrodas uz taisnes BC, kas arī bija jāpierāda.

A.S.11.3. Kāpinām dotās vienādības abas puses trešajā pakāpē:

$$x_{n+1}^3 = \left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)^3 = x_n^3 + 3 \cdot x_n^2 \cdot \frac{1}{x_n^2} + 3 \cdot x_n \cdot \frac{1}{x_n^4} + \frac{1}{x_n^6} = x_n^3 + 3 + \alpha,$$

kur $\alpha = \frac{3}{x_n^3} + \frac{1}{x_n^6} > 0$.

Apzīmējot $y_n = x_n{}^3$, iegūstam virkni $y_{n+1} = y_n + 3 + \alpha$, kur $y_0 = x_0^3 > 1$, jo $x_0 > 1$.

Apskatām sakarību $y_{n+1} = y_n + 3$. Tā ir aritmētiskā progresija ar diferenci 3. Pēc aritmētiskās progresijas n-tā locekļa formulas iegūstam, ka $y_{333} = y_0 + (334-1) \cdot 3 = y_0 + 999$ (y_{333} ir virknes 334. loceklis, jo virknes pirmais loceklis ir y_0).

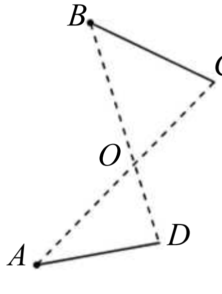
Tā kā $y_{n+1} = y_n + 3 + \alpha > y_n + 3$, tad

$$y_{333} > y_{332} + 3 > y_{331} + 6 > ... > y_1 + 996 > y_0 + 999.$$

Tātad $x_{333}^3 = y_{333} > 1000$ (jo $y_0 > 1$) no kā seko, ka $x_{333} > 10$, kas arī bija jāpierāda.

A.S.11.4. Pieņemsim pretējo. Tad pirmās krāsas rūtiņu skaits jebkurās divās rindiņās ir dažāds. Tātad pirmajā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits ir ne mazāks par $0 + 1 + 2 + \cdots 13 + 14 = 105$. Analoģisks spriedums ir spēkā arī pārējām krāsām. Tātad tabulā jābūt ne mazāk kā $3 \cdot 105 = 315$ rūtiņām, bet dotajā tabulā 15×15 rūtiņas ir tikai 225 rūtiņas. Iegūta pretruna, tātad ir vismaz divas tādas rindiņas, kurās vismaz vienas krāsas rūtiņu skaits ir vienāds.

A.S.11.5. Aplūkosim tādu punktu sadalījumu pa pāriem, ka visu 100 nogriežņu garumu summa ir pati mazākā iespējamā. Pierādīsim, ka šajā gadījumā nogriežņi nekrustojas. Pieņemsim pretējo, ka ir divi nogriežņi AC un BD, kas krustojas punktā O (skat. A5. zīm.). Pieņemsim arī, ka A un B ir zili punkti, bet C un D – sarkani.



A5. zīm.

Tad, nogriežņu AC un BD vietā novelkot nogriežņus AD un BC, to garumu summa ir mazāka nekā sākumā (pamatojums seko no trijstūra nevienādības):

$$AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OD) + (BO + OC) > AD + BC,$$

kas ir pretrunā ar to, ka apskatāmajā sadalījumā garumu summa bija minimālā iespējamā.

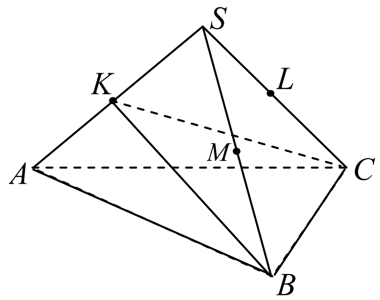
Tātad neeksistē divi tādi nogriežņi, kas krustojas. Esam pierādījuši, ka uzdevumā dotos punktus pa pāriem var savienot ar 100 nogriežņiem tā, ka katram nogrieznim vienā galā ir zils punkts, otrā – sarkans un nogriežņi nekrustojas, ja tos izvēlas, piemēram, tā, ka visu 100 nogriežņu garumu summa ir mazākā iespējamā.

A.S.12. Divpadsmitā klase

A.S.12.1. Tā kā $\sin 0 = 0$ un $a \cdot 0 = 0$, tad $x = 0$ ir vienādojumam $\sin x = ax$ sakne. Ievērojam, ka funkcijas $y = \sin x$ un $y = ax$ ir nepāra ($\sin(-x) = -\sin x$ un $a \cdot (-x) = -ax$). Tātad, ja $x \neq 0$ ir dotā vienādojuma sakne, tad arī $-x$ ir sakne.

Esam ieguvuši, ka šī vienādojuma sakņu skaits vienmēr būs nepāra skaitlis, bet 2010 ir pāra skaitlis. Tātad neeksistē tāda *a* vērtība, ka dotajam vienādojumam ir tieši 2010 saknes.

A.S.12.2. Izmantosim pierādījumu no pretējā. Pieņemam, ka tāda piramīda eksistē un apzīmējam to ar *SABC*. Sānu šķautņu viduspunktus apzīmēsim ar *K*, *L*, *M* (skat. A6. zīm.).



A6. zīm.

Apzīmējam vektorus $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ un $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Tad $\overrightarrow{BK} = -\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}$ un $\overrightarrow{CK} = -\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$. Pieņemam, ka no punkta *K* pretējā šķautne *BC* ir redzama taisnā leņķī, t. i., $\angle BKC = 90^\circ$ jeb $BK \perp KC$. Izmantojam vektoru skalārā reizinājuma īpašību: divu perpendikulāru vektoru skalārais reizinājums ir 0. Tātad

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{CK} = \left(-\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) \cdot \left(-\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} = 0.$$

Līdzīgi, apskatot punktus *L* un *M*, iegūstam, ka

$$\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BL} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = 0;$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{b} = 0.$$

Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam, ka $\frac{1}{4}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$. (*)

Izmantojot skalārā reizinājuma definīciju, iegūstam, ka $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 > 0$, jo vektora $\vec{a}$ garums sakrīt ar šķautnes *SA* garumu.

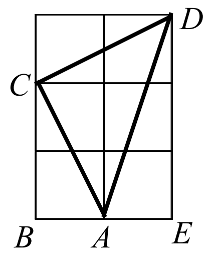
Līdzīgi iegūst, ka $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 > 0$ un $\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 > 0$. Tātad $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} > 0$.

Iegūta pretruna ar (*).

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un vismaz viens no leņķiem *BKC, ALB* un *AMC* nav taisns.

Esam pierādījuši, ka neeksistē tāda piramīda, kurā no katras sānu šķautnes viduspunkta pretējā šķautne redzama taisnā leņķī

A.S.12.3. Iedomāsimies, ka dota rūtiņu lapa. Katras rūtiņas malu garumi ir 1 vienība. Šajā lapā uzzīmēsim trijstūri ACD tā, kā parādīts A7. zīmējumā.



A7. zīm.

Izmantosim trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī.

Apskatām taisnleņķa trijstūri ABC:

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \angle BAC = \operatorname{arctg}2 .$$

Apskatām taisnleņķa trijstūri AED:

$$\operatorname{tg}\angle DAE = \frac{ED}{AE} = \frac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \angle DAE = \operatorname{arctg}3 .$$

Trijstūros ABC un AED izmantosim Pitagora teorēmu, lai aprēķinātu malu AC un AD garumu:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} ;$$
$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} .$$

Ievērojam, ka $AC = CD = \sqrt{5}$.

Tātad ΔACD malu garumi ir $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$. Ievērojam, ka šī trijstūra malu garumi apmierina vienādību $AD^2 = AC^2 + CD^2$. Pēc Pitagora teorēmas apgrieztās teorēmas seko, ka trijstūris ACD ir taisnleņķa trijstūris.

Tātad $\operatorname{tg}\angle CAD = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \angle CAD = \operatorname{arctg}1$.

Apskatām izstieptu leņķi BAE:

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAE = \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}1 .$$

Tā kā izstiepta leņķa lielums ir π, tad $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}1 = \pi$.

A.S.12.4. Tā kā skaitlim a^b, kur a ir pirmskaitlis, ir tieši $b+1$ dažādi dalītāji: a^0, a^1, $a^2, ..., a^b$, tad naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$, kur p_i, $i = 1, 2, ..., m$, ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$ dažādi dalītāji.

Tā kā $16 = 2^4$, tad meklējamais skaitlis n var būt izsakāms vienā no formām:

- $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$;
- $n = p_1^3 \cdot p_2 \cdot p_3$;
- $n = p_1^3 \cdot p_2^3$;
- $n = p_1^7 \cdot p_2$;
- $n = p_1^{15}$,

kur p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, ir dažādi pirmskaitļi.

Tā kā skaitlis $n = 2 \cdot (10^k + 5)$ dalās ar 67, tad $k \geq 1$. Izmantojot pakāpes īpašību $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, pārveidojam doto skaitli:

$$n = 2 \cdot (10 \cdot 10^{k-1} + 5) = 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 10^{k-1} + 1) .$$

Apskatīsim izteiksmes $2 \cdot 10^{k-1} + 1$ ciparu summu. Saskaitāmā $2 \cdot 10^{k-1} = 2\underbrace{0...0}_{k-1}$ ciparu summa ir 2, tātad visas izteiksmes $2 \cdot 10^{k-1} + 1$ ciparu summa ir 3 un šī izteiksme dalās ar 3 visiem $k > 1$. Tā kā pēc dotā skaitlis n dalās ar 67, tad tam ir vismaz četri dažādi pirmreizinātāji: 2, 3, 5 un 67. Tātad skaitlis n ir formā $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$, no kurienes seko, ka $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2(10^3 + 5) = 2010$.

A.S.12.5. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Tā kā abām operācijām 4. koordinātas izmaiņa ir vienāda, tad, skatoties uz ceturto koordinātu *d*, redzam, ka jāizpilda tieši $8 - 1 = 7$ operācijas.

Tā kā skaitli *a* izmaina tikai pirmā operācija, tad jāizpilda $6 - 3 = 3$ reizes pirmā operācija un pārējās četras reizes – otrā.

Izpildot otro operāciju četras reizes, *b* samazinās par 4. Izpildot 1. operāciju, *b* palielinās par ceturtās koordinātas vērtību *d*. Tā kā pēc jebkuras operācijas izpildīšanas *d* palielinās par 1, tad, pielietojot pirmo operāciju trīs reizes, mēs palielināsim *b* vismaz par $1 + 2 + 3 = 6$, t. i., *b* beigu lielums pārsniedz sākotnējo vismaz par $6 - 4 = 2$, kas ir pretrunā ar to, ka *b* jāpalielina no 4 uz 5.

Tātad uzdevumā prasīto panākt nav iespējams.

A.N. LATVIJAS 61. NOVADA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.N.9. Devītā klase

A.N.9.1. Apskatām, kādas ir funkciju vērtības, ja $x = 1$:

$$y = a + 1 + b = 1 + (a + b) = 2012 .$$

Līdzīgi apskatām, kādas ir funkciju vērtības, ja $x = -1$:

$$y = a - 1 + b = (a + b) - 1 = 2010 .$$

Tātad, neatkarīgi no a un b vērtībām, funkcijas vērtības punktos $x = 1$ un $x = -1$ ir nemainīgas jeb punkti $(1; 2012)$ un $(-1; 2010)$ pieder visu minēto funkciju grafikiem, kas arī bija jāpierāda.

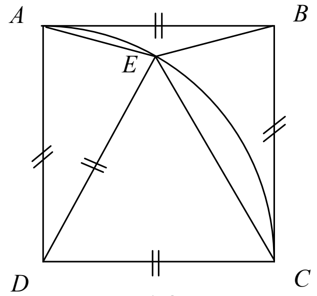
A.N.9.2. Apzīmējam $\angle ABE = x$, tad $\angle ADE = 2x$. $DA = DE$ kā rādiusi (skat. A8. zīm.), tātad ΔADE – vienādsānu. No tā seko, ka

$$\angle DAE = (180° - \angle ADE) : 2 = (180° - 2x) : 2 = 90° - x .$$

$\angle BAE = 90° - \angle DAE = 90° - (90° - x) = x$, tātad ΔAEB – vienādsānu un $AE = BE$.

$\angle EBC = 90° - \angle ABE = 90° - x = \angle DAE$, tātad $\Delta AED = \Delta BEC$ (pēc pazīmes $m\ell m$). Tā kā vienādos trijstūros attiecīgās malas ir vienādas, tad $CE = DE$. Tā kā $DE = DC$ (kā rādiusi), tad ΔDEC – vienādmalu. Tā kā vienādmalu trijstūrī visi leņķi vienādi, tad $\angle EDC = 60°$.

$\angle ADE = 90° - \angle EDC = 30° = 2x \Rightarrow \angle ABE = x = 15°$.

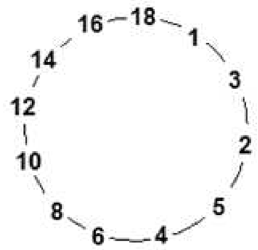


A8. zīm.

A.N.9.3. Pavisam aplī ir uzrakstīti k skaitļi. Tā kā pāra skaitļu skaits ir trīs reizes lielāks par nepāra skaitļu skaitu, tad k jādalās ar 4.

Blakus esošo skaitļu pāru skaits arī ir k. Tā kā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, ir divreiz vairāk nekā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2, tad k jādalās ar 3.

Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3 un 4, ir 12, tātad k mazākā iespējamā vērtība ir 12. Piemērs parāda, ka 12 skaitļus var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem (skat. A9. zīm.).



A9. zīm.

A.N.9.4. Pieņemam, ka dotā vienādība izpildās. Atceramies, ka izteiksmes 7^m vērtība ir lielāka, ja pozitīvais kāpinātājs m ir lielāks. Tātad no dotā varam secināt, ka $a > x$, $a > y$ un $a > z$.

Tā kā a, x, y, z – naturāli skaitļi, tad no iepriekš apskatītajām nevienādībām seko šādas nevienādības: $a \geq x+1$, $a \geq y+1$, $a \geq z+1$ jeb $a-1 \geq x$, $a-1 \geq y$, $a-1 \geq z$. Tā kā 7^x ir augoša funkcija, tad varam veikt novērtējumus: $7^{a-1} \geq 7^x$, $7^{a-1} \geq 7^y$ un $7^{a-1} \geq 7^z$. Tātad

$$7^a = 7 \cdot 7^{a-1} = (4+1+1+1) \cdot 7^{a-1} = 4 \cdot 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} \geq 4 \cdot 7^{a-1} + 7^x + 7^y + 7^z.$$

Tā kā naturāla skaitļa pakāpe vienmēr ir pozitīvs skaitlis, tad $4 \cdot 7^{a-1} > 0$. Tātad, atmetot pozitīvus saskaitāmos, iegūstam, ka $7^a > 7^x + 7^y + 7^z$, no kā seko, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y, z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

A.N.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt pierādīsim, ka N nevar būt lielāks par 7. Ja N būtu 8, tad katrā braucienā tikai viena sportiste būtu zaudējusi Maijai, tātad kopumā būtu tikai četras sportistes no astoņām, kas kopvērtējumā varētu būt zaudējušas Maijai. Tātad četras sportistes kopvērtējumā Maiju noteikti būs apsteigušas un šajā gadījumā Maija kopvērtējumā varētu būt ieguvusi augstākais 5. vietu.

Otrkārt, parādīsim, ka ir iespējama situācija, kad Maija kopvērtējumā uzvar, ja $N = 7$. Veidojot iespējamo rezultātu tabulu, ņemam vērā faktu: ja Maija kādai sportistei būs zaudējusi visos četros braucienos, tad viņa būs zaudējusi šai sportistei arī kopvērtējumā. Tātad, lai Maija kopvērtējumā būtu pirmā, nedrīkst atrasties neviena tāda sportiste, kura būtu ātrāka par Maiju visos četros braucienos.

	1. brauciens		**2. brauciens**		**3. brauciens**		**4. brauciens**		**Kopvērtējums**	
	Laiks	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**
A	40	1	40,01	1	40,02	1	41	8	**161,03**	**2**
B	41,01	8	40,05	2	40,06	2	40,03	1	**161,15**	**3**
C	40,04	2	41,02	8	40,1	3	40,07	2	**161,23**	**4**
D	40,08	3	40,09	3	41,03	8	40,11	3	**161,31**	**5**
E	40,12	4	40,13	4	40,14	4	41,04	9	**161,43**	**6**
F	41,05	9	40,17	5	40,18	5	40,15	4	**161,55**	**7**
G	40,16	5	41,06	9	40,22	6	40,19	5	**161,63**	**8**
H	40,2	6	40,21	6	41,07	9	40,23	6	**161,71**	**9**
Maija	**40,24**	**7**	**40,25**	**7**	**40,26**	**7**	**40,27**	**7**	**161,02**	**1**

Redzam, ka izveidotajā rezultātu tabulā atsevišķu sportistu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām sportistēm ir atšķirīga. Maija katrā atsevišķā braucienā ir ieguvusi 7. vietu un kopvērtējumā uzvar, tātad lielākā N vērtība, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, ir 7.

A.N.10. Desmitā klase

A.N.10.1. a) 1. risinājums. Pārliecināsimies, ka uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa, nezināmo s tajā aizvietojot ar $p-t$ (vienādība $s=p-t$ seko no uzdevumā dotās vienādības $s+t=p$) un veicot ekvivalentus pārveidojumus:

$$2(p-t)^2 \geq p^2-2t^2;$$
$$2p^2-4pt+2t^2-p^2+2t^2 \geq 0;$$
$$p^2-4pt+4t^2 \geq 0;$$
$$(p-2t)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs lielums, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad arī šai nevienādībai ekvivalentā (uzdevumā dotā) nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Pierādīsim uzdevumā doto nevienādību, izmantojot doto vienādojumu un veicot ekvivalentus pārveidojumus:

$$s+t=p \Rightarrow (s+t)^2=p^2 \Rightarrow s^2+2st+t^2=p^2 \Rightarrow s^2+2st-t^2=p^2-2t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2s^2-(s^2-2st+t^2)=p^2-2t^2 \Rightarrow 2s^2-(s-t)^2=p^2-2t^2.$$

Tā kā $(s-t)^2 \geq 0$, tad $2s^2 \geq p^2-2t^2$, kas arī bija jāpierāda.

b) 1. risinājums. Pierādīsim, ka uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa, nezināmo lielumu p^2 tajā aizvietojot ar $(s+t+u)^2$ (vienādība $p^2=(s+t+u)^2$ seko no uzdevumā dotās vienādības $s+t+u=p$) un veicot ekvivalentus pārveidojumus:

$$3s^2 \geq (s+t+u)^2-3t^2-3u^2;$$
$$3s^2+3t^2+3u^2 \geq (s+t+u)^2;$$
$$3s^2+3t^2+3u^2 \geq s^2+t^2+u^2+2st+2su+2tu;$$
$$2s^2+2t^2+2u^2-2st-2su-2tu \geq 0;$$
$$s^2-2st+t^2+s^2-2su+u^2+t^2-2tu+u^2 \geq 0;$$
$$(s-t)^2+(s-u)^2+(t-u)^2 \geq 0.$$

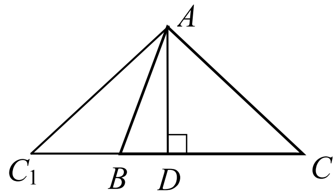
Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs lielums, tad pēdējās nevienādības kreisā puse ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs lielums, tāpēc šī nevienādība ir patiesa. Varam secināt, ka arī šai nevienādībai ekvivalentā (uzdevumā dotā) nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Pierādīsim uzdevumā doto nevienādību, izmantojot doto vienādojumu un veicot ekvivalentus pārveidojumus:

$$s+t+u=p \Rightarrow (s+t+u)^2=p^2;$$
$$s^2+t^2+u^2+2st+2su+2tu=p^2;$$
$$s^2-2t^2-2u^2+2st+2su+2tu=p^2-3t^2-3u^2;$$
$$3\,s^2-(s^2-2st+t^2)-(s^2-2su+u^2)-(s^2-2tu+u^2)=p^2-3t^2-3u^2;$$
$$3s^2-(s-t)^2-(s-u)^2-(t-u)^2=p^2-3t^2-3u^2.$$

Tā kā $(s-t)^2 \geq 0$, $(s-u)^2 \geq 0$ un $(t-u)^2 \geq 0$, tad $3s^2 \geq p^2-3t^2-3u^2$, kas arī bija jāpierāda.

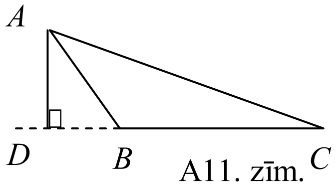
A.N.10.2. Ja AD atrodas ΔABC iekšpusē, atliekam punktu C_1 simetriski punktam C attiecībā pret taisni AD (skat. A10. zīm.). Tad $DC_1 = DC$ un $AC_1 = AC$.



A10. zīm.

Esam ieguvuši, ka $DC - DB = DC_1 - DB = C_1B$. Izmantojot trijstūra nevienādību trijstūrī ABC_1, iegūstam, ka $C_1B > AC_1 - AB$. Tātad $DC - DB > AC_1 - AB = AC - AB$, kas arī bija jāpierāda.

Ja AD atrodas ārpus ΔABC vai sakrīt ar AB (skat. A11. zīm.), pierādāmais apgalvojums seko no trijstūra nevienādības trijstūrī ABC: $DC - DB = CB > AC - AB$, kas arī bija jāpierāda.



A11. zīm.

A.N.10.3. Ja $x \geq 4$, tad vienādojuma kreisā puse nav mazāka par $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ un prasītā vienādība neizpildās. Savukārt, ja $x < 3$, tad vienādojuma kreisā puse nepārsniedz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ un prasītā vienādība neizpildās.

Tātad $3 \leq x < 4$, no kā seko, ka $[x] = 3$. Varam pārrakstīt uzdevumā doto vienādojumu formā $x \cdot [x \cdot 3] = 41$. Tā kā $9 \leq x \cdot 3 < 12$, tad $[x \cdot 3]$ var pieņemt trīs vērtības:

- $[3x] = 9$; $9x = 41$, $x = 4\frac{5}{9}$ – neder, jo $x \notin [3; 4)$;
- $[3x] = 10$; $10x = 41$, $x = 4{,}1$ – neder, jo $x \notin [3; 4)$;
- $[3x] = 11$; $11x = 41$, $x = 3\frac{8}{11}$.

Veicam pārbaudi vērtībai $x = 3\frac{8}{11}$:

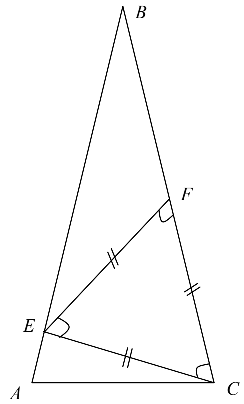
$$3\frac{8}{11} \cdot \left[3\frac{8}{11} \cdot \left[3\frac{8}{11}\right]\right] = 3\frac{8}{11} \cdot \left[3\frac{8}{11} \cdot 3\right] = 3\frac{8}{11} \cdot \left[11\frac{2}{11}\right] = 3\frac{8}{11} \cdot 11 = 41$$

Tātad vienādojuma vienīgais atrisinājums pozitīvos skaitļos ir $x = 3\frac{8}{11}$.

A.N.10.4. Tā kā ΔFCE – vienādmalu, tad $\angle FCE = \angle CEF = \angle EFC = 60°$.

Aprēķinām ΔEBF leņķus (skat. A12. zīm.):

- $\angle EBF = 30°$ (pēc dotā);
- $\angle BFE = 180° - \angle EFC = 120°$ (blakusleņķi);
- $\angle BEF = 180° - \angle EBF - \angle BFE = 30°$ (trijstūra leņķu summa ir $180°$).



A12. zīm.

Tātad ΔEBF – vienādsānu un $BF = FE$. Tā kā ΔFCE – vienādmalu, tad $FE = FC$.
Esam ieguvuši, ka $BF = FC$ jeb F ir BC viduspunkts.
Apzīmējam $AB = BC = 2a \Rightarrow FC = BF = a$.

Tā kā ΔFCE – vienādmalu, tad $S_{CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} FC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 30° = a^2$.

Esam ieguvuši uzdevumā prasīto laukumu attiecību: $\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

A.N.10.5. Apskatīsim, kādu augstāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda. Jāņa komanda noteikti ir zaudējusi tām komandām, kurām tā ir zaudējusi visos atsevišķajos braucienos. Ja kādai komandai ir zaudēts ne visos braucienos, tad kopvērtējumā var būt uzvarējusi gan Jāņa komanda, gan šī otra komanda. Tātad Jāņa komanda var iegūt pirmo vietu tad, ja neatrodas tāda komanda, kura būtu bijusi labāka par Jāņa komandu visos braucienos.

Tas ir iespējams, ja komandas finišējušas, piemēram, šādi (Jāņa komanda apzīmēta ar J):

	1. brauciens		**2. brauciens**		**3. brauciens**		**4. brauciens**		**Kopvērtējums**	
	Laiks	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**
A	38,9	1	38,8	1	42,7	1	43,8	18	**164,2**	**2**
B	41,8	18	38,9	2	42,8	2	42,1	1	**165,6**	**3**
C	41,7	17	48,6	18	42,9	3	42,2	2	**175,4**	**12**
D	41,6	16	48,4	17	44,8	18	42,3	3	**177,1**	**18**
E	41,5	15	48,2	16	44,7	17	42,4	4	**176,8**	**17**
F	41,4	14	48	15	44,6	16	42,5	5	**176,5**	**16**
G	41,3	13	47,8	14	44,5	15	42,6	6	**176,2**	**15**
H	41,2	12	47,6	13	44,4	14	42,7	7	**175,9**	**14**

I	41,1	11	47,4	12	44,3	13	42,8	8	**175,6**	**13**
J	**39**	**2**	**39**	**3**	**43**	**4**	**43**	**10**	**164**	**1**
K	40,9	9	47	10	44,1	11	43,1	11	**175,1**	**10**
L	40,8	8	46,8	9	44	10	43,2	12	**174,8**	**9**
M	40,7	7	46,6	8	43,9	9	43,3	13	**174,5**	**8**
N	40,6	6	46,4	7	43,8	8	43,4	14	**174,2**	**7**
O	40,5	5	46,2	6	43,7	7	43,5	15	**173,9**	**6**
P	40,4	4	46	5	43,6	6	43,6	16	**173,6**	**5**
R	40,3	3	45,8	4	43,5	5	43,7	17	**173,3**	**4**
S	41	10	47,2	11	44,2	12	42,9	9	**175,3**	**11**

Redzam, ka izveidotajā rezultātu tabulā atsevišķu komandu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām komandām ir atšķirīga. Tātad augstākā vieta, kuru kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda, ir 1. vieta.

Apskatīsim, kādu zemāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda. Šim atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka Jāņa komanda nevar ieņemt zemāku vietu kopvērtējumā kā 16. vietu. Jāņa komanda var būt zaudējusi tikai tām komandām, kuras ir uzvarējušas Jāņa komandu vismaz vienā braucienā. Tādas komandas pavisam var būt maksimums 15 (viena pirmajā braucienā, divas citas – otrajā, trīs citas – trešajā un deviņas citas – ceturtajā). Tātad divas komandas noteikti būs zaudējušas Jāņa komandai visos četros braucienos. Tātad Jāņa komanda nevar ieņemt zemāku vietu kopvērtējumā kā 16. vietu.

Otrkārt, parādīsim, ka Jāņa komanda var ieņemt 16. vietu. Tas ir iespējams, ja komandas finišējušas, piemēram, šādi (Jāņa komanda apzīmēta ar J):

	1. brauciens		**2. brauciens**		**3. brauciens**		**4. brauciens**		**Kopvērtējums**	
	Laiks	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**
A	40,05	1	43,8	18	42,7	18	42,4	18	**168,95**	**15**
B	42,45	11	40,8	1	42,65	17	42,35	17	**168,25**	**5**
C	42,5	12	41	2	42,6	16	42,25	15	**168,35**	**7**
D	42,55	13	43,1	4	40	1	42,3	16	**167,95**	**1**
E	42,6	14	43,15	5	40,5	2	42,2	14	**168,45**	**9**
F	42,65	15	43,2	6	40,9	3	42,15	13	**168,9**	**14**
G	42,7	16	43,25	7	42,55	15	40	1	**168,5**	**10**
H	42,75	17	43,3	8	42,5	14	40,05	2	**168,6**	**11**
I	42,8	18	43,35	9	42,45	13	40,1	3	**168,7**	**12**
J	**42**	**2**	**43**	**3**	**42**	**4**	**42**	**10**	**169**	**16**
K	42,05	3	43,4	10	42,4	12	40,15	4	**168**	**2**
L	42,1	4	43,45	11	42,35	11	40,2	5	**168,1**	**3**
M	42,15	5	43,5	12	42,3	10	40,25	6	**168,2**	**4**
N	42,2	6	43,55	13	42,25	9	40,3	7	**168,3**	**6**

O	42,25	7	43,6	14	42,2	8	40,35	8	**168,4**	**8**
P	42,3	8	43,65	15	42,15	7	40,7	9	**168,8**	**13**
R	42,35	9	43,7	16	42,1	6	42,05	11	**170,2**	**17**
S	42,4	10	43,75	17	42,05	5	42,1	12	**170,3**	**18**

Redzam, ka izveidotajā rezultātu tabulā atsevišķu komandu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām komandām ir atšķirīga. Tātad zemākā vieta, kuru kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda, ir 16. vieta.

A.N.11. Vienpadsmitā klase

A.N.11.1. Pareizinām doto izteiksmi ar divi:

$$2x^2+2y^2+8\geq 4x+4y+2xy.$$

To savukārt var pārveidot par triju kvadrātu summu:

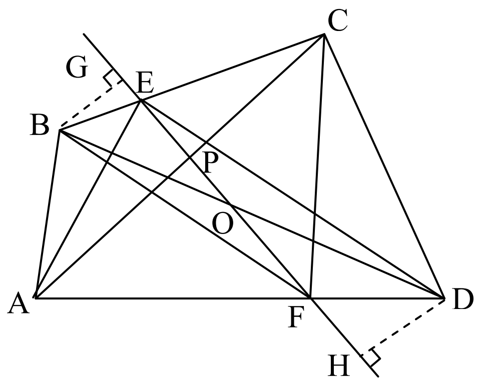
$$(x^2+y^2)+(x^2+4)+(y^2+4)\geq 4x+4y+2xy$$

$$(x^2-2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)\geq 0$$

$$(x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad patiesa ir arī uzdevumā dotā nevienādība, kas arī bija jāpierāda.

A.N.11.2. Apzīmējam diagonāļu *AC* un *BD* viduspunktus attiecīgi ar *P* un O. No virsotnēm *B* un *D* novelkam perpendikulus pret taisni *EF*: $BG\perp EF$ un $DH\perp EF$ (skat. A13. zīm.).



A13. zīm.

Aplūkojam taisnleņķa trijstūrus *BGO* un *DHO*. Šiem trijstūriem ir vienādas hipotenūzas $OB=OD$ (jo *O* ir *BD* viduspunkts) un šaurie leņķi $\angle BOG=\angle DOH$ (kā krustleņķi). Tātad $\Delta BGO=\Delta DHO$ (pēc taisnleņķu trijstūru vienādības pazīmes „$h\ell$”), tāpēc $BG=DH$ kā attiecīgās malas vienādos trijstūros.

Esam ieguvuši, ka trijstūru *EFD* un *BEF* laukumi ir vienādi, jo tiem ir kopīga mala *EF* un pret šo malu vilktie augstumi (*DH* un *BG*) ir vienādi, t. i.,

$$S_{EFD}=S_{BEF}.$$

Līdzīgi, novelkot augstumus no virsotnēm *A* un *C* pret taisni *EF*, iegūstam, ka tie ir vienādi un secinām, ka arī trijstūru *AEF* un *CEF* laukumi ir vienādi, t. i.,

$$S_{AEF}=S_{CEF}.$$

Esam ieguvuši, ka $S_{ADE}=S_{EFD}+S_{AEF}=S_{BEF}+S_{CEF}=S_{BCF}$, kas arī bija jāpierāda.

A.N.11.3. Pieskaitām visu vienādojumu abām pusēm 1 un vienādojumu kreisās puses sadalām reizinātājos:

$$\begin{cases}x+xy+y+1=18\\ y+yz+z+1=72\\ z+zx+x+1=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(1+y)+(y+1)=18\\ y(1+z)+(z+1)=72\\ z(1+x)+(x+1)=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)(y+1)=18\\ (y+1)(z+1)=72\\ (z+1)(x+1)=12\end{cases}.$$

Sareizinot šos trīs vienādojumus, iegūstam, ka

$$((x+1)(y+1)(z+1))^2=72^2\cdot 3 \text{ jeb}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=72\sqrt{3} \text{ vai } (x+1)(y+1)(z+1)=-72\sqrt{3}.$$

Iegūtos vienādojumus izdalot ar sistēmas katru vienādojumu, iegūstam uzdevumā dotās vienādojumu sistēmas abas atbildes:

$$\begin{cases} z+1=4\sqrt{3} \\ x+1=\sqrt{3} \\ y+1=6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}-1 \\ y=6\sqrt{3}-1 \\ z=4\sqrt{3}-1 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} z+1=-4\sqrt{3} \\ x+1=-\sqrt{3} \\ y+1=-6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3}-1 \\ y=-6\sqrt{3}-1. \\ z=-4\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

A.N.11.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim piemēru, ka $a+b$ vērtība var būt 8. Apskatām $5^3+1=(5+1)(5^2-5+1)$. Tā kā $5^2-5+1=21$, tad 5^3+1 dalās ar 21. Esam ieguvuši, ka $a+b$ vērtība var būt 8, ja $a=5$ un $b=3$.

Otrkārt, pārliecināsimies, ka $a+b$ vērtība nevar būt mazāka par 8.

Pierādīsim un izmantosim šādu Lemmu: *Jebkuram naturālam n skaitlis* n^2+1 *nedalās ar 3*.

Ir iespējami 2 gadījumi:

- n dalās ar 3; tad n^2 dalās ar 3 $\Rightarrow$ n^2+1 nedalās ar 3;
- n nedalās ar 3; tad $n^2-1=(n+1)(n-1)$ dalās ar 3 $\Rightarrow$ $n^2+1=(n^2-1)+2$ nedalās ar 3.

Tātad Lemma ir pierādīta.

Ja b ir pāra skaitlis, t. i., $b=2k$, tad $a^b=(a^k)^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts un a^b+1 nedalās ar 3 (saskaņā ar tikko pierādīto Lemmu) un tāpēc nedalās arī ar $3\cdot 7=21$ – pretruna ar doto. Tātad b ir nepāra skaitlis un atliek pārbaudīt b nepāra vērtības, kas ir mazākas par 8:

- ja $b=1$, tad $a\geq 20$, jo a^1+1 jādalās ar 21, bet tad $a+b\geq 21$;
- ja $b=3$, tad $a\geq 5$, jo a^3+1 jādalās ar 21, bet tad $a+b\geq 8$;
- ja $b=5$, tad $a\neq 1$, $a\neq 2$, $a\neq 3$, jo a^5+1 jādalās ar 21, bet tad $a+b>8$;
- ja $b=7$, tad $a\neq 1$, jo a^7+1 jādalās ar 21, bet tad $a+b>8$.

Tātad $a+b$ vērtība nevar būt mazāka par 8.

Esam pierādījuši, ka mazākā iespējamā summas $a+b$ vērtība ir 8.

A.N.11.5. Tā kā katrs no skaitļiem ir divu citu skaitļu starpības modulis, tad visi uzrakstītie skaitļi ir nenegatīvi. Aplūkosim lielāko no tiem, apzīmēsim to ar L. Savukārt ar A un B apzīmēsim skaitlim L pulksteņrādītāja virzienā sekojošos skaitļus secībā ... L, A, B, ..., pie tam $0\leq A\leq L$ un $0\leq B\leq L$.

Lai būtu spēkā vienādība $L=|A-B|$, tad vai nu $A=L$, $B=0$, vai arī $A=0$, $B=L$.

Turpinot spriedumus līdzīgi par A, B un citiem skaitļiem, kas uzrakstīti aplī, iegūstam, ka visi aplī uzrakstītie skaitļi ir vai nu L, vai 0, pie tam tie sadalās k grupiņās pa trim (L, L, 0).

Tātad visu skaitļu summa ir $10=2\cdot L\cdot k$, bet uzrakstīto skaitļu skaits $n=3k$.

Esam ieguvuši, ka $L\cdot k=5$, tātad ir iespējamas divas n vērtības:

- $L=5$, $k=1$ $\Rightarrow$ $n=3\cdot 1=3$;
- $L=1$, $k=5$ $\Rightarrow$ $n=3\cdot 5=15$.

A.N.12. Divpadsmitā klase

A.N.12.1. Tā kā zem kvadrātsaknes var atrasties tikai nenegatīvs skaitlis, tad

$$0 \le a^2 \le 1 \text{ un } 0 \le b^2 \le 1;$$
$$0 \le \sqrt{1-a^2} \le 1 \text{ un } 0 \le \sqrt{1-b^2} \le 1;$$
$$-1 \le -\sqrt{1-a^2} \le 0 \text{ un } -1 \le -\sqrt{1-b^2} \le 0;$$
$$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2} \le \frac{1}{2} \text{ un } -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2} \le \frac{1}{2};$$
$$\left|\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right| \le \frac{1}{2} \text{ un } \left|\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right| \le \frac{1}{2};$$
$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \text{ un } \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

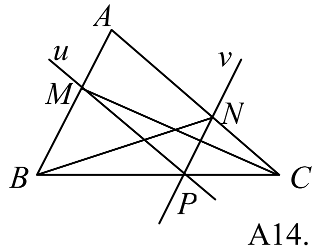
Tā kā $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, tad, ņemot kādu saskaitāmo mazāku par $\frac{1}{4}$, summa būs mazāka par $\frac{1}{2}$, un nevarēs iegūt uzdevumā doto nevienādību. Tātad uzdevumā dotā vienādība izpildās tikai gadījumā, ja $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ un $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Tas nozīmē, ka

$$\sqrt{1-a^2} = 0 \text{ vai } \sqrt{1-a^2} = 1 \text{ un } \sqrt{1-b^2} = 0 \text{ vai } \sqrt{1-b^2} = 1;$$
$$a^2 = 1 \text{ vai } a^2 = 0 \text{ un } b^2 = 1 \text{ vai } b^2 = 0;$$
$$a = \pm 1 \text{ vai } a = 0 \text{ un } b = \pm 1 \text{ vai } b = 0.$$

Tā kā viena saskaitāmā vērtība neietekmē otra saskaitāmā vērtību, tad uzdevumā dotajam vienādojumam ir 9 atrisinājumi: $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;0)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$.

A.N.12.2. Ievērojam, ka $S_{ABC} = S_{MBP} + S_{NPC} + S_{AMPN}$, $S_{MBC} = S_{MBP} + S_{MPC}$ un $S_{NBC} = S_{NPC} + S_{NBP}$ (skat. A14. zīm.). Tātad, lai pierādītu prasīto, atliek pierādīt, ka $S_{AMPN} = S_{MPC} + S_{NBP}$. (*)



A14. zīm.

Ievērojam, ka ΔMPC augstums, kas vilkts no virsotnes C ir vienāds ar paralelograma $AMPN$ ($AM \parallel NP$ un $MP \parallel AN$ pēc dotā) augstumu, kas vilkts pret taisni u. tāpēc $S_{MPC} = \frac{1}{2} MP \cdot h_u = \frac{1}{2} S_{AMPN}$.

Līdzīgi $S_{NBP} = \frac{1}{2} NP \cdot h_v = \frac{1}{2} S_{AMPN}$, jo ΔNBP augstums no virsotnes B vienāds ar paralelograma $AMPN$ augstumu, kas vilkts pret taisni v.

Tātad $S_{MPC} + S_{NBP} = \frac{1}{2} S_{AMPN} + \frac{1}{2} S_{AMPN} = S_{AMPN}$. Esam pierādījuši vienādību (*), tātad arī uzdevumā prasītais ir pierādīts.

A.N.12.3. Viegli pārbaudīt, ka skaitļi 3, 5, 7 un 9 nav fantastiski: $3 \neq 9$, $5 \neq 10$, $7 \neq 36$ un $9 \neq 8$.

Nepāra skaitlis nevar būt *fantastisks*, ja kāds no tā kvadrāta cipariem ir pāra skaitlis, jo tad arī reizinājums ir pāra skaitlis. Vairākciparu nepāra skaitļiem n apskatīsim n^2 decimālā pieraksta pēdējo un priekšpēdējo ciparu:

- Ja $n = 10k + 1$, tad $n^2 = 100k^2 + 10 \cdot 2k + 1$. Tātad n^2 pēdējais cipars ir 1 un, tā kā $2k$ ir pāra skaitlis, tad priekšpēdējais cipars – pāra cipars.
- Ja $n = 10k + 3$, tad $n^2 = 100k^2 + 10 \cdot 6k + 9$. Tātad n^2 pēdējais cipars ir 9 un, tā kā $6k$ ir pāra skaitlis, tad priekšpēdējais cipars – pāra cipars.
- Ja $n = 10k + 5$, tad $n^2 = 100k^2 + 100k + 25$. Tātad n^2 pēdējais cipars ir 5 un priekšpēdējais cipars – 2 (pāra cipars).
- Ja $n = 10k + 7$, tad $n^2 = 100k^2 + 140k + 49 = 100(k^2 + k) + 10(4k + 4) + 9$. Tātad n^2 pēdējais cipars ir 9 un, tā kā $4k + 4$ ir pāra skaitlis, tad priekšpēdējais cipars – pāra cipars.
- Ja $n = 10k + 9$, tad $n^2 = 100k^2 + 180k + 81 = 100(k^2 + k) + 10(8k + 8) + 1$. Tātad n^2 pēdējais cipars ir 1 un, tā kā $8k + 8$ ir pāra skaitlis, tad priekšpēdējais cipars – pāra cipars.

Tātad visiem vairākciparu nepāra skaitļiem to kvadrātu decimālajā pierakstā pirmspēdējais cipars ir pāra skaitlis, līdz ar to tie nevar būt *fantastiski*, kas arī bija jāpierāda.

A.N.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka n nevar būt lielāks par 1. Pieņemsim, ka $n > 1$. Tad visām rūtiņām ir vismaz divas kaimiņu rūtiņas. Aplūkosim vienu rūtiņu, kurā ierakstīts vismazākais skaitlis (šādas rūtiņas var būt arī vairākas). Tajā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar **visās** (vairāk nekā vienā) kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem – pretruna, tātad $n \leq 1$.

Otrkārt, parādīsim piemēru, kas parāda, ka uzdevuma nosacījumi var izpildīties, ja $n = 1$. Tabula var būt, piemēram, šāda:

1	2	3	4	5	...	2008	2009	2010	2010

Tātad lielākā n iespējamā vērtība ir 1.

A.N.12.5. Katra daudzskaldņa šķautne ir mala tieši divām skaldnēm, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu. Tātad daudzskaldņa visu skaldņu malu skaitu summa vienmēr ir pāra skaitlis.

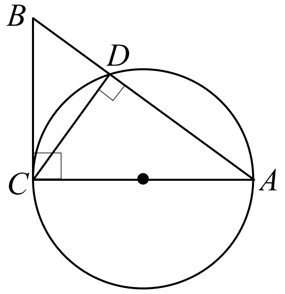
Ja daudzskaldnim būtu nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei būtu nepāra skaits virsotņu (t. i., nepāra skaits malu), tad visu skaldņu malu skaitu summa būtu nepāra skaitlis, jo nepāra skaita nepāru skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu ar iepriekš pierādīto, tātad neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

A.V. LATVIJAS 61. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.V.9. Devītā klase

A.V.9.1. Apskatām vienādojumu, kuram $b=2011$, t. i., $x^2+ax+2011=0$. Pēc Vjeta teorēmas, ja x_1 un x_2 ir šī vienādojuma saknes, tad $x_1x_2=2011$ un $x_1+x_2=-a$. Ievērojam, ka 2011 ir pirmskaitlis. Lai x_1 un x_2 būtu veseli skaitļi, tad x_1 un x_2 vērtībām ir jābūt attiecīgi vai nu 1 un 2011 (tad $a=-2012$), vai -1 un -2011 (tad $a=2012$). Tā kā $-2011 \le a \le 2011$, tad vienādojumam $x^2+ax+2011=0$ nav veselu sakņu ne pie kādām pieļaujamajām a vērtībām. Tātad nav iespējams, ka visiem dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi.

A.V.9.2. Pieņemsim, ka $\angle C=90°$, $AC>BC$ (skat. A15. zīm.).



A15. zīm.

Savienojam virsotni C ar hipotenūzas AB un riņķa līnijas krustpunktu.

Tā kā $\angle CDA=90°$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, tad CD ir ΔABC augstums un $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$"), jo $\angle ACB=\angle ADC=\angle CDB=90°$ un $\angle BAC=\angle CAD=\angle BCD=90°-\angle B$.

Apzīmējam $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$, $CD=h$. Pēc Pitagora teorēmas $a^2+b^2=c^2$ jeb $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Nevar būt, ka $BD=BC$ (tad CBD būtu vienādsānu trijstūris ar taisnu leņķi pie pamata, kas nav iespējams), tāpēc atšķeltais nogrieznis, kas vienāds ar īsāko kateti, ir $AD=BC=a$. Tā kā $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, tad

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{b}{h}. \quad (*)$$

No $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ seko, ka

$$\frac{CD}{BD}=\frac{DA}{CD} \Rightarrow \frac{h}{c\text{-}a}=\frac{a}{h} \Rightarrow h^2=a(c-a) \Rightarrow h=\sqrt{a(c-a)}.$$

Ievietojot iegūto sakarību un $b=\sqrt{c^2-a^2}$ vienādībā (*), iegūstam, ka

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a(c-a)}}=\sqrt{\frac{(c-a)(c+a)}{a(c-a)}}=\sqrt{\frac{c}{a}+1}.$$

Apzīmējot $\frac{c}{a}=k>0$ (jo c un a ir trijstūra malas), iegūstam $k=\sqrt{k+1}$. Kāpinot abas vienādojuma puses kvadrātā un pārnesot visus saskaitāmos uz vienādojuma kreiso pusi, iegūstam kvadrātvienādojumu $k^2-k-1=0$. Iegūtā vienādojuma saknes ir $k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Tā kā $k>0$, tad meklētā attiecība ir $\frac{c}{a}=k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A.V.9.3. Meklēto 81 skaitli varam atrast, piemēram, izveidojot 9 grupas ar 9 skaitļiem katrā grupā šādā veidā:

1. grupa	**2. grupa**	**...**	***i*-tā grupa**	**...**	**9. grupa**
111	212		$\overline{i1i}$		919
122	223		$\overline{i2(i+1)}$, ja $i<9$, vai $\overline{i2(i+1-9)}$, ja $i\geq 9$		921
133	234		$\overline{i3(i+2)}$, ja $i<8$, vai $\overline{i3(i+2-9)}$, ja $i\geq 8$		932
...	...		...		...
199	291		$\overline{i9(i-1)}$, ja $i>1$, vai 199, ja $i=1$		998

Pārbaudām, ka izvēlētie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus. Tiešām:

- ja visiem skaitļiem izsvītrojam pirmo ciparu, iegūstam dažādus divciparu skaitļus, kas nesatur 0 (tie izvietoti augošā secībā, ja skatās pa rindām);
- ja visiem skaitļiem izsvītrojam otro ciparu, tad iegūstam visus divciparu skaitļus, kas nesatur 0;
- ja visiem skaitļiem izsvītrojam trešo ciparu, tad iegūstam visus divciparu skaitļus, kas nesatur 0 (tie izvietoti augošā secībā, ja skatās pa kolonnām).

A.V.9.4. Četrus atsvarus A, B, C, D pa pāriem var sadalīt trīs dažādos veidos: AB un CD, AC un BD, AD un BC. Tātad pavisam tika veiktas trīs svēršanas.

Pieņemsim, ka atsvaru masas ir $x>y>z>t$. Tad divu svēršanu rezultāti vienmēr ir noteikti viennozīmīgi: $x+y>z+t$ un $x+z>y+t$. Trešajā svēršanā ir iespējami abi rezultāti. Apskatīsim abus gadījumus:

- ja $x+t>y+z$, tad atsvars ar masu x vienmēr ir bijis uz smagākā kausa, tāpēc ir vissmagākais, bet nevar noteikt visvieglāko atsvaru (visi pārējie ir 1 reizi bijuši uz smagākā kausa un 2 reizes – uz vieglākā).
- ja $x+t<y+z$, tad atsvars ar masu t vienmēr ir bijis uz vieglākā kausa, tāpēc ir visvieglākais atsvars, bet nevar noteikt vissmagāko atsvaru (visi pārējie ir 1 reizi bijuši uz vieglākā kausa un 2 reizes – uz smagākā).

Tātad, saskaitot cik reizes katrs atsvars ir bijis uz vieglākā kausa un cik reizes – uz smagākā, var atrast vai nu vissmagāko, vai visvieglāko atsvaru – to, kurš visas trīs reizes bijis attiecīgi vai nu uz smagākā, vai vieglākā kausa, taču abus divus atsvarus – gan smagāko, gan vieglāko – vienlaicīgi noteikt nevar.

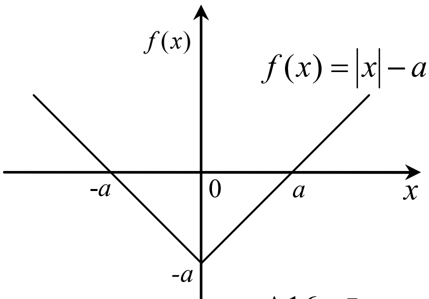
A.V.9.5. Pieņemam, ka spēlētāji ap galdu pulksteņrādītāja virzienā sēž secībā A, B, C. Saskaitīsim, cik kārtās katrs spēlētājs ir ieguvis 3 punktus. Spēlētājam A šo kārtu skaitu apzīmējam ar *a*, spēlētājam B – ar *b*, spēlētājam C – ar *c*. Tad kopējais spēlētāja A kopsummā iegūto punktu skaits ir $3a-2c-b$, spēlētāja B punktu skaits ir $3b-2a-c$, bet spēlētāja C punktu skaits ir $3c-2b-a$. Pieņemam, ka spēlēs beigās spēlētājs A kopsummā ieguva 0 punktus (citos gadījumos spriedumi līdzīgi). Tātad $3a-2c-b=0$ jeb $b=3a-2c$. Tad spēlētāja B iegūtu punktu kopsumma ir $3b-2a-c=3(3a-2c)-2a-c=9a-6c-2a-c=7(a-c)$, bet spēlētāja C iegūto punktu kopsumma ir $3c-2b-a=3c-2(3a-2c)-a=3c-6a+4c-a=7(c-a)$.

Tātad abu pārējo spēlētāju iegūto punktu kopsumma dalās ar 7, tāpēc nevienam spēlētājam nevar būt 48 punkti, jo 48 nedalās ar 7.

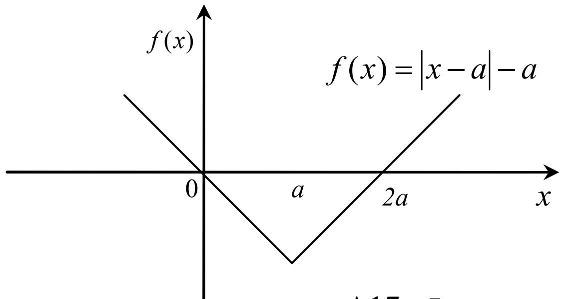
Spēlētāja B punktu summa var būt 49, ja, piemēram, A ir uzvarējis 7 kārtās, B ir uzvarējis 21 kārtā, bet C nav uzvarējis nevienā kārtā. Tiešām, spēlētājs A tad ir ieguvis $3\cdot 7-2\cdot 0-21=0$ punktus, spēlētājs B – $3\cdot 21-2\cdot 7-0=49$ punktus, spēlētājs C – $3\cdot 0-2\cdot 21-7=-49$ punktus.

A.V.10. Desmitā klase

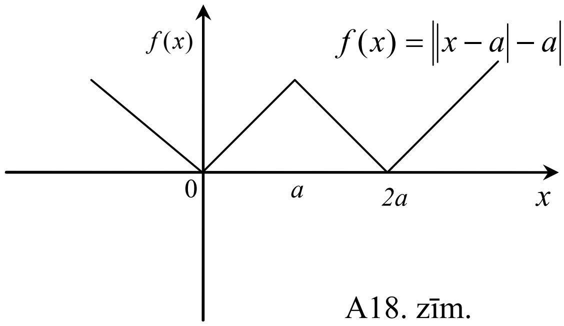
A.V.10.1. Izmantojot funkciju grafiku transformācijas, uzzīmēsim funkcijas $f(x)=\left|\left|\left|x-a\right|-a\right|-a\right|$ grafiku, kur a – reāls pozitīvs skaitlis, grafiku (skat. A16. – A20. zīm.).



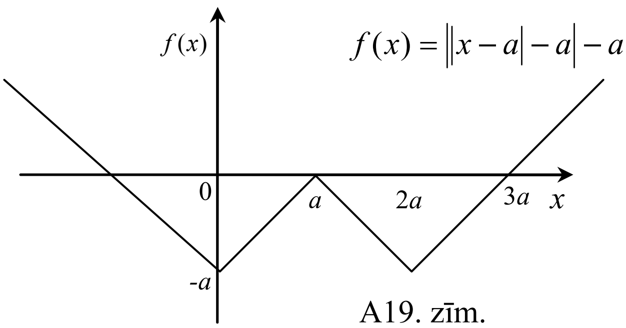
A16. zīm.



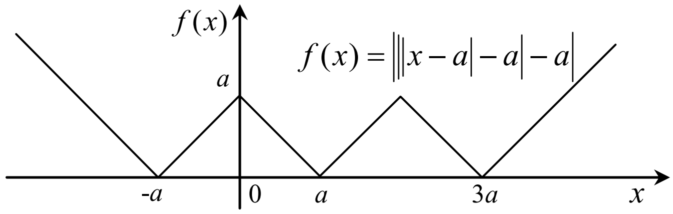
A17. zīm.



A18. zīm.

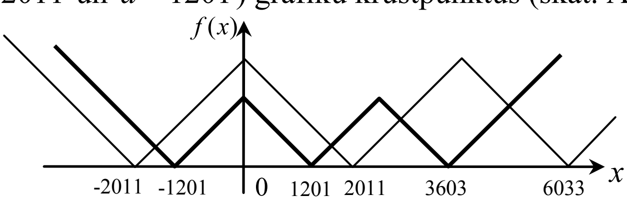


A19. zīm.



A20. zīm.

Viegli ievērot, ka, lai atrisinātu doto vienādojumu, nepieciešams atrast divu šādu funkciju (pie $a=2011$ un $a=1201$) grafiku krustpunktus (skat. A21. zīm.).



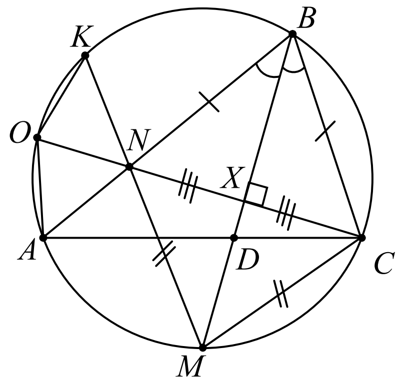
A21. zīm.

Šiem grafikiem ir četri krustpunkti, kas arī dotā vienādojuma atrisinājumi. Tā kā doto grafiku nogriežņi ar x asi veido $45°$ un $135°$ lielus leņķus, tad

$$x_1 = \frac{-2011 + (-1201)}{2} = -1606,\ x_2 = \frac{1201 + 2011}{2} = 1606,$$

$$x_3 = \frac{2011 + 3603}{2} = 2807,\ x_4 = \frac{3603 + 6033}{2} = 4818.$$

A.V.10.2. Trijstūrī *NBC* nogrieznis *BX* ir gan bisektrise, gan augstums, tāpēc ΔNBC ir vienādsānu un $NB = BC$. Tā kā BX ir arī mediāna, tad $NX = XC$ (skat. A22. zīm.).



A22. zīm.

Trijstūrī *NMC* nogrieznis *MX* ir gan mediāna, gan augstums, tāpēc ΔNMC ir vienādsānu trijstūris un $NM = MC$.

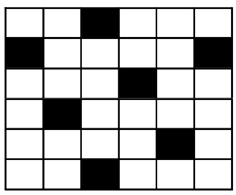
Ievērojam, ka $\Delta NBC \sim \Delta NOA$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$", jo $\angle ONA = \angle BNC$ kā krustleņķi un $\angle AON = \angle CBN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *AC*), tāpēc ΔAON arī ir vienādsānu trijstūris un $OA = ON$.

Līdzīgi iegūst, ka $\Delta NMC \sim \Delta NOK$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$", jo $\angle ONK = \angle MNC$ kā krustleņķi un $\angle KON = \angle CMN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *KC*), tāpēc ΔKON arī ir vienādsānu trijstūris un $OK = ON$.

Tātad esam ieguvuši, ka $AO = OK = ON$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.10.3. a) Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt vismaz vienai aizkrāsotai rūtiņai (ja tādas rindas vai kolonnas nebūtu, tad no tās varētu izgriezt figūru 1×5 rūtiņas). Tā kā ir tieši sešas aizkrāsotas rūtiņas, tad katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši viena aizkrāsota rūtiņa. Aplūkosim to kolonnu, kurā aizkrāsotā rūtiņa atrodas pirmajā rindā. Tāda kolonna eksistē, jo pretējā gadījumā 1. rindā nebūtu aizkrāsota neviena rūtiņa. Šajā kolonnā vienīgā aizkrāsotā rūtiņa atrodas pirmajā rindā, līdz ar to 2.-6. rindas rūtiņas veido neaizkrāsotu rūtiņu taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas. Tātad nevar izpildīt uzdevuma prasības, ja aizkrāsotas ir tikai 6 rūtiņas.

b) Uzdevuma prasības var izpildīt, ja ir aizkrāsotas 7 rūtiņas, piemēram, tā, kā redzams A23. zīmējumā.



A23. zīm.

A.V.10.4. Tā kā $f(x)$ ir polinoms, tad to var uzrakstīt formā $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, kur a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ir veseli skaitļi.

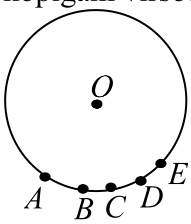
Apskatām starpību

$$f(x) - f(y) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 - (a_n y^n + \ldots + a_1 y + a_0) =$$
$$= a_n (x^n - y^n) + \ldots + a_1 (x - y).$$

Izmantojot formulu $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, kur n ir naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i - y^i)$, kur $i = 1, 2, \ldots, n$, dalās ar ($x - y$). Tātad arī starpība $f(x) - f(y)$ dalās ar ($x - y$).

Tā kā $f(2011) - f(11) = 100 - 1000 = -900$ nedalās ar $2011 - 11 = 2000$, tad uzdevumā dotais nav iespējams.

A.V.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka $n \geq 7$. Tā kā vajag izveidot divus trijstūrus bez kopīgām virsotnēm, tad būs vajadzīgi vismaz seši punkti. A24. zīmējumā parādīts piemērs ar 6 punktiem, no kuriem nevar izveidot divus platleņķa trijstūrus bez kopīgām virsotnēm.



A24. zīm.

Punkts O ir riņķa līnijas centrs un punkti A, B, C, D, E atrodas uz riņķa līnijas, pie tam $\angle AOE$ ir šaurs. Tā kā ir tikai seši punkti un jāizveido divi trijstūri, tad katram punktam jābūt kāda trijstūra virsotnei. Bet jebkurš no trijstūriem, kura viena virsotne ir O, ir šaurleņķu. Tā kā eksistē tāds 6 punktu izkārtojums plaknē, kad uzdevuma nosacījumi neizpildās, tad $n \geq 7$.

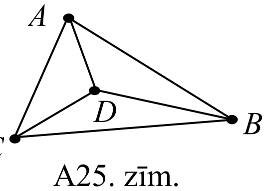
Otrkārt, pierādīsim, ka ar septiņiem punktiem vienmēr pietiek, lai izpildītos uzdevumā dotais nosacījums.

<u>Lemma 1.</u> *Ja izliekts četrstūris nav taisnstūris, tad kādas trīs no tā virsotnēm veido platleņķa trijstūri.*

Izliekta četrstūra iekšējo leņķu summa ir $360°$, tātad, ja ne visi tā leņķi ir $90°$, tad kāds no leņķiem būs lielāks par $90°$ – šī virsotne un divas tās blakus virsotnes veido platleņķa trijstūri. Esam pierādījuši Lemmu 1.

<u>Lemma 2.</u> *Ja dots trijstūris ABC un punkts D tā iekšpusē, tad vismaz divi no trijstūriem ABD, BCD, CAD ir platleņķa.*

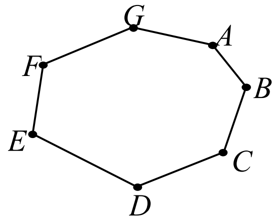
Aplūkosim leņķus ADB, BDC, CDA (skat. A25. zīm.). Šo leņķu summa ir $360°$ un katrs no tiem ir mazāks nekā $180°$, tātad vismaz divi no šiem leņķiem ir lielāki nekā $90°$. Esam pierādījuši Lemmu 2.



A25. zīm.

Iespējami divi gadījumi, kā dotie 7 punkti var būt izvietoti:

- Punkti veido izliektu septiņstūri (skat. A26. zīm.).

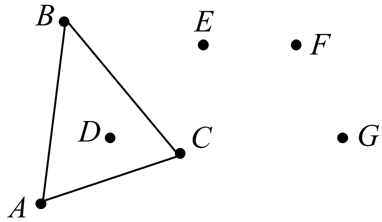


A26. zīm.

Izliekta septiņstūra katrs iekšējais leņķis ir mazāks nekā $180°$ un visu iekšējo leņķu summa ir $S_7 = 180° \cdot (7-2) = 180° \cdot 5$. Pieņemsim, ka ir tieši 4 šaurie vai taisnie leņķi. Šo četru leņķu summa nepārsniedz $4 \cdot 90° = 360° = 2 \cdot 180°$. Tā kā pārējo trīs leņķu summa noteikti ir mazāka nekā $3 \cdot 180°$, tad visu septiņu leņķu summa ir mazāka nekā $5 \cdot 180°$ – iegūstam pretrunu. Tātad šauro vai taisno iekšējo leņķu skaits ir mazāks nekā 4 jeb ir vismaz 4 plati leņķi.

Aplūkosim virsotņu pārus (*A*, *D*), (*D*, *G*), (*G*, *C*), (*C*, *F*), (*F*, *B*), (*B*, *E*), (*E*, *A*). Tā kā no leņķiem ar virsotnēm punktos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* vismaz 4 ir plati leņķi un katrs no leņķiem pāros parādās tieši divas reizes, tad kādā no pāriem būs divi plati leņķi. Šie divi punkti kopā ar blakus virsotnēm veido divus platleņķa trijstūrus bez kopīgiem punktiem.

- Dotie septiņi punkti neveido izliektu septiņstūri (skat. A27. zīm.).



A27. zīm.

Varam izvēlēties četrus punktus un apzīmēt tos tā, ka *A*, *B*, *C* veido trijstūri un *D* atrodas tā iekšpusē (skat. A7. zīm.); pārējos punktus apzīmēsim ar *E*, *F*, *G*. No Lemmas 2 seko, ka vismaz divi no trijstūriem *ABD*, *BCD*, *CAD* ir platleņķa; varam pieņemt, ka tie ir ΔABD un ΔBCD.

Ja punkti *E*, *F*, *G*, *C* neveido taisnstūri, tad no tiem var izveidot platleņķa trijstūri (saskaņā ar Lemmu 1 – ja izliekts četrstūris, un Lemmu 2 – ja ieliekts četrstūris), un punkti *A*, *B*, *D* veido otru platleņķa trijstūri.

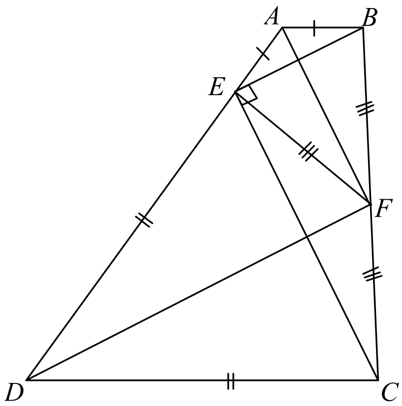
Ja *E*, *F*, *G*, *C* veido taisnstūri, tad *E*, *F*, *G*, *A* neveido taisnstūri (citādi *A* un *C* atrastos vienā punktā), un no tiem var izveidot platleņķa trijstūri (saskaņā ar Lemmu 1 – ja izliekts četrstūris, un Lemmu 2 – ja ieliekts četrstūris), otru platleņķa trijstūri veido punkti *B*, *C*, *D*.

Esam pierādījuši, ka jebkuriem 7 plaknē novietotiem punktiem var atrast 2 platleņķa trijstūrus ar virsotnēm šajos punktos tā, lai šo trijstūru virsotnes nesakrīt.

A.V.11. Vienpadsmitā klase

A.V.11.1. Apskatīsim vektorus ar koordinātām $\vec{x}=(a;b;c)$ un $\vec{y}=(m;n;p)$. Tā kā vektora $\vec{z}=(z_1;z_2;z_3)$ garumu aprēķina pēc formulas $\left|\vec{z}\right|=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$, tad no dotajām sakarībām $a^2+b^2+c^2=1$ un $m^2+n^2+p^2=1$ seko, ka vektoru $\vec{x}$ un $\vec{y}$ garums ir 1. Savukārt izteiksme $am+bn+cp$ izsaka šo vektoru skalāro reizinājumu $\vec{x}\cdot\vec{y}$. Tā kā pēc definīcijas $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=1\cdot1\cdot\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$ un $-1\le\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\le1$, tad $-1\le\vec{x}\cdot\vec{y}\le1$ jeb $-1\le am+bn+cp\le1$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.11.2. Tā kā $AD=AB+DC$, tad uz malas AD var atrast tādu iekšēju punktu E, ka $AE=AB$ un $ED=CD$ (skat. A28. zīm.).



A28. zīm.

Trijstūris EAB ir vienādsānu un tā pamata pieleņķi ir vienādi, tāpēc $\angle AEB=\frac{1}{2}(180°-\angle EAB)=90°-\frac{1}{2}\angle EAB$.

Līdzīgi iegūstam, ka $\angle DEC=\frac{1}{2}(180°-\angle EDC)=90°-\frac{1}{2}\angle EDC$.

Tātad $\angle BEC=180°-\angle AEB-\angle DEC=180°-90°+\frac{1}{2}\angle EAB-90°+\frac{1}{2}\angle EDC=$

$=\frac{1}{2}(\angle EAB+\angle EDC)=\frac{1}{2}\cdot180°=90°$ (tika izmantots fakts, ka trapeces sānu malas pieleņķu summa ir $180°$).

Tātad ΔBEC ir taisnleņķa trijstūris. Šim trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas BC viduspunktā F un $EF=BF=CF$ kā rādiusi.

Tā kā $\Delta ABF=\Delta AEF$ (pēc pazīmes „*mmm*”, jo AE ir kopīga mala, $BF=EF$ un pēc konstrukcijas $AB=AE$), tad $\angle EAF=\angle FAB$ kā attiecīgie leņķi vienādos trijstūros, varam secināt, ka AF ir leņķa BAD bisektrise.

Līdzīgi (no trijstūru FED un FCD vienādības) iegūst, ka DF ir leņķa ADC bisektrise.

Tātad malas BC viduspunkts F ir leņķu BAD un ADC bisektrišu AF un DF krustpunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.V.11.3. Pārbaudām, ka mazākais pirmskaitlis $p=2$ neder, jo $2^{-1}+2=2{,}5$, kas nav pirmskaitlis, bet $p=3$ der, jo $3^4+2=81+2=83$, kas ir pirmskaitlis.

Ja pirmskaitlis $p>3$, tad šķirosim gadījumus, kad $p=3k+1$ un kad $p=3k+2$ (Gadījums $p=3k$ nav jāapskata, jo šajā gadījumā p dalās ar 3 un tātad p nav pirmskaitlis.):

- ja $p=3k+1$, tad katram n skaitlis $p^n=(3k+1)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\cdot(3k)^i\cdot 1^{n-i}$, dalot to ar 3, dod atlikumu 1, jo vienīgais saskaitāmais, kas nedalās ar 3 ir 1 (ja $i=0$). Tātad $p^{p^2-5}+2$ dalās ar 3, tāpēc tas nav pirmskaitlis.
- ja $p=3k+2$; tā kā $p>3$, tad p ir nepāra skaitlis (pāra skaitlis, kas nav vienāds ar 2, nav pirmskaitlis) un p^2-5 ir pāra skaitlis. veicot pārveidojumus, iegūstam $p^{2m}=(3k+2)^{2m}=\left((3k+2)^2\right)^m=(9k^2+6k+3+1)^m=\left(3(3k^2+2k+1)+1\right)^m$.
  Ievērojam, ka skaitlis p^{2m}, dalot ar 3, dod atlikumu 1. Tātad arī šajā gadījumā $p^{p^2-5}+2$ dalās ar 3, tāpēc tas nav pirmskaitlis.

Esam ieguvuši, ka vienīgais pirmskaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 3.

A.V.11.4. Katru punktu nosacīti sadalām divās daļās: tajā, kas atrodas loka sākumā un tajā, kas atrodas loka beigās. Pieņemam, ka uz katra loka uzrakstītais skaitlis ir tā sākuma un beigu *puspunktu* vērtību summa. Ar z_s apzīmējam zaļā sākuma *puspunkta* vērtību, ar z_b – zaļā beigu *puspunkta* vērtību, ar s_s – sarkanā sākuma *puspunkta* vērtību un ar s_b – sarkanā beigu *puspunkta* vērtību. Iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} z_s+s_b=1 & (1)\\ z_s+z_b=2 & (2)\\ s_s+s_b=3 & (3)\\ s_s+z_b=4 & (4)\end{cases}$$

No (2) atņemot (1), iegūstam $z_b-s_b=1$.

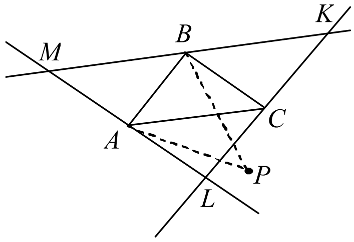
No (4) atņemot (3), iegūstam $z_b-s_b=1$.

Tā kā ieguvām vienu vienādojumu ar 2 nezināmajiem, tad pieņemam, ka $s_b=c$, kur c ir reāls skaitlis. Aprēķinot pārējos nezināmos, iegūstam, ka $z_b=1+c$, $s_s=3-c$ un $z_s=1-c$.

Katrs punkts ir viena loka sākums un viena loka beigas, tātad meklējamajā summā katra punkta vērtība tiek ieskaitīta tieši vienu reizi. Līdz ar to visu uz lokiem uzrakstīto skaitļu summa ir

$$707(s_s+s_b)+1304(z_s+z_b)=707\cdot(3-c+c)+1304\cdot(1-c+1+c)=$$
$$=707\cdot 3+1304\cdot 2=4729.$$

A.V.11.5. No visiem trijstūriem ar virsotnēm dotajos punktos izvēlamies trijstūri ABC ar vislielāko laukumu (vai vienu no šādiem trijstūriem, ja to ir vairāk). Caur katru trijstūra ABC virsotni novelkam taisni, kas ir paralēla trijstūra pretējai malai. Šīs taisnes krustojas punktos K, L, M (skat. A29. zīm.).



A29. zīm.

Aplūkosim taisni KL. Tā dala plakni divās pusplaknēs. Pierādīsim, ka visi dotie punkti atrodas tajā pusplaknē, kurā atrodas trijstūris ABC. Tiešām, ja kāds no dotajiem punktiem, piemēram, P atrastos pretējā pusē, tad trijstūra ABP laukums būtu lielāks nekā trijstūra ABC laukumu (šiem trijstūriem ir vienādi pamati AB, bet trijstūra ABP augstums ir lielāks nekā trijstūra ABC augstums pret malu AB). Līdzīgi, aplūkojot taisnes ML un MK, secinām, ka visi dotie plaknes punkti pieder trijstūrim MKL. Tā kā pēc dotā jebkura trijstūra laukums, kura virsotnes atrodas dotajos plaknes punktos, nepārsniedz 1 cm^2, tad $S_{MKL} = 4 \cdot S_{ABC} \le 4\ \text{cm}^2$, un līdz ar to prasītais apgalvojums ir pierādīts. Ja $S_{MKL} < 4\ \text{cm}^2$, tad trijstūri KLM var „palielināt”, kādu no tā malām paralēli pārbīdot, tā, lai $S_{MKL} = 4\ \text{cm}^2$.

A.V.12. Divpadsmitā klase

A.V.12.1. Pieņemsim, ka $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - 2 > \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus: $\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{2^2} - 2 - \sqrt[3]{3 \cdot 2} - \sqrt[3]{3 \cdot 4} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^3} > 0$.
Pareizinām nevienādības abas puses ar 2 un atdalām pilnos kvadrātus:

$$2\sqrt[3]{3^2} + 2\sqrt[3]{2^2} - 4 - 2\sqrt[3]{3 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{3 \cdot 4} + 2\sqrt[3]{4^2} > 0;$$

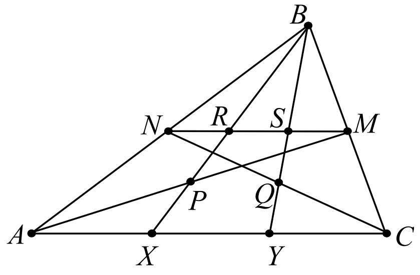
$$\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - 2\sqrt[3]{3 \cdot 2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) + \left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - 2\sqrt[3]{3 \cdot 4} + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right) + \left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - 4 + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right) > 0.$$

Ievērojot, ka $4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 4}$, iegūstam

$$\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right)^2 > 0.$$

Tā kā $(a-b)^2 > 0$, ja $a \ne b$, tad esam ieguvuši pareizu nevienādību. Tātad sākotnējais pieņēmums ir pareizs, t. i., skaitlis $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - 2$ ir lielāks nekā skaitlis $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{2}$.

A.V.12.2. Ar R un S apzīmējam attiecīgi BP un BQ krustpunktus ar MN (skat. A30. zīm.). $NM \| AC$, jo NM ir viduslīnija, tāpēc $\angle PAX = \angle PMR$ kā iekšējie šķērsleņķi. Tā kā pēc dotā $AP = PM$ un $\angle APX = \angle MPR$ kā krustleņķi, tad $\Delta APX = \Delta MPR$ (pēc pazīmes „$\ell m \ell$”). Tātad $AX = RM$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.
$\Delta APX = \Delta MPR$, jo $AX || RM$ un $AP = PM$. Tādēļ $AX = RM$.



A30. zīm.

Savukārt RM ir ΔXBC viduslīnija (jo M ir BC viduspunkts un $RM \| XC$), tāpēc $XC = 2RM$. Iegūstam, ka $2AX = XC$ jeb

$$2AX = XY + YC. \quad (*)$$

Līdzīgi, pierādot, ka $\Delta CYQ = \Delta NQS$, iegūstam, ka $2YC = AX + XY$. (**)

No (*) atņemot (**), iegūstam, ka $AX = YC$. Ievietojot šo vienādību (*), iegūstam, ka $2AX = XY + AX$ jeb $AX = XY$, tātad $AX = XY = YC$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.12.3. Pieņemsim pretējo, ka tādi skaitļi m un n eksistē. Tad $m^3 = (2n)^{2n} - 1 = \left((2n)^n - 1\right)\left((2n)^n + 1\right)$. Tā kā $(2n)^n - 1$ un $(2n)^n + 1$ ir divi viens otram sekojoši nepāra skaitļi, tad tie ir savstarpēji pirmskaitļi no kā seko, ka $(2n)^n - 1 = a^3 \geq 1$ un $(2n)^n + 1 = b^3 > 1$.

Ievērojam, ka $b^3 - a^3 = 2$. Ievērojam, ka mazākā starpība ir starp diviem pēc kārtas sekojošiem nepāra skaitļu kubiem. Apskatīsim šo starpību:

$$(2n+3)^3 - (2n+1)^3 = (2n+3-2n-1)\left((2n+3)^2 + (2n+3)(2n+1) + (2n+1)^2\right) =$$
$$= 2 \cdot \left((2n+3)^2 + (2n+3)(2n+1) + (2n+1)^2\right) > 2.$$

Esam ieguvuši, ka nav divu tādu nepāra skaitļu, kuru kubu starpība būtu 2. Tātad neeksistē tādi naturāli skaitļi n un m, kuriem ir patiesa vienādība $(2n)^{2n} - 1 = m^3$.

A.V.12.4. Pieņemsim, ka kādam x izpildās nevienādība $g(x) > x$. Tad $g(g(x)) > g(x)$, jo funkcija ir stingri augoša un $g(g(x)) + g(x) > x + x = 2x$ – pretruna ar doto, ka $g(g(x)) + g(x) = 2x$.

Gadījumā, ja $g(x) < x$, tad $g(g(x)) < g(x)$, jo funkcija stingri augoša, un $g(g(x)) + g(x) < x + x = 2x$ – pretruna ar doto.

Atliek vienīgi pārbaudīt gadījumu, kad $g(x) = x$ visām reālām x vērtībām:

$$g(g(x)) + g(x) = g(x) + x = x + x = 2x.$$

Tātad vienīgā funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir funkcija $g(x) = x$.

A.V.12.5. Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim šādu <u>Lemmu</u>: *Virkni, kas sastāv no cipariem $c_1, c_2, ..., c_k$ sauc par universālu, ja jebkuru virkni, kurā katrs no cipariem $c_1, c_2, ..., c_k$ ir sastopams tieši vienu reizi, var iegūt no dotās virknes, izsvītrojot tajā dažus ciparus. Universālas virknes garums nevar būt mazāks kā $\frac{k(k+1)}{2}$.*

<u>Bāze</u>. Ja $k = 1$, tad $\frac{k(k+1)}{2} = 1$ un netukšā virknē ir vismaz 1 simbols, kas ir patiess apgalvojums.

<u>Induktīvais pieņēmums.</u> Pieņemam, ka apgalvojums ir patiess virknei, kas sastāv no k cipariem.

<u>Induktīvā pāreja.</u> Pierādīsim, ka apgalvojums ir spēkā virknei, kas sastāv no $k+1$ cipara. Pieņemsim, ka ir *universāla* virkne garumā *S*. Pēc Dirihlē principa vismaz

viens no cipariem $c_i, i \in \{1, 2, ..., k+1\}$ nav starp pirmajiem k *universālās* virknes cipariem. Izsvītrosim visus šādus ciparus c_* un visus ciparus, kas ir pirms pirmā cipara c_*. Atlikušās virknes garums būs ne vairāk kā $S-k-1$, jo tika izsvītrots vismaz viens c un vismaz k cipari pirms pirmā c_*.
Atlikusī virkne ir *universāla*, jo, ja virkni $c_* a_1 a_2 ... a_k$ varēja iegūt no sākotnējās virknes, tad šīs virknes daļa $a_1 a_2 ... a_k$ atradās pēc pirmā c_*, un tāpēc neviens no tās cipariem netika izsvītrots. Tāpēc pēc induktīvā pieņēmuma $S-k-1 \geq \frac{k(k+1)}{2}$ jeb $S \geq \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
<u>Secinājums.</u> Tā kā uzdevumā doti 10 cipari, t. i., $k = 10$, tad pēc Lemmas universālā virkne V satur vismaz $\frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$ ciparus.

A.A. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.A.9. Devītā klase

A.A.9.1. Vienādojumu var pārveidot kā

$$\frac{1}{x^2+24}-\frac{1}{xy+24}=\frac{1}{xy+24}-\frac{1}{y^2+24}.$$

Abās vienādojuma pusēs vienādojot saucējus, iegūstam, ka

$$\frac{xy+24-x^2-24}{(x^2+24)(xy+24)}=\frac{y^2+24-xy-24}{(y^2+24)(xy+24)} \text{ jeb}$$

$$\frac{x(y-x)}{(x^2+24)(xy+24)}=\frac{y(y-x)}{(y^2+24)(xy+24)}.$$

Izdalot abas puses ar $(y-x)$ (to var darīt, jo $x \neq y$) un pareizinot ar $(xy+24)(x^2+24)(y^2+24) \neq 0$, iegūstam, ka

$$x(y^2+24)=y(x^2+24).$$

Pārnesot visus saskaitāmos uz vienu pusi, iegūstam, ka

$$xy^2-x^2y+24x-24y=0.$$

Sagrupējot iegūstam, ka

$$xy(y-x)-24(y-x)=0 \text{ jeb } (xy-24)(y-x)=0.$$

Tā kā $x \neq y$, tad $xy=24$. Šim vienādojumam naturālos skaitļos ir 8 atrisinājumi: $(1; 24)$, $(2; 12)$, $(3; 8)$, $(4; 6)$, $(6; 4)$, $(8; 4)$, $(12; 2)$, $(24; 1)$.

Veicam pārbaudi (simetrijas pēc var pārbaudīt tikai pirmos četrus atrisinājumus):

- $\frac{1}{1^2+24}+\frac{1}{24^2+24}=\frac{2}{24+24}$;

  $\frac{1}{25}+\frac{1}{24\cdot 25}=\frac{1}{24}$;

  $\frac{24+1}{24\cdot 25}=\frac{1}{24}$;

  $\frac{25}{24\cdot 25}=\frac{1}{24}$;

- $\frac{1}{2^2+24}+\frac{1}{12^2+24}=\frac{2}{24+24}$;

  $\frac{1}{28}+\frac{1}{12\cdot 14}=\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{6+1}{6\cdot 28}=\frac{1}{24}$;

  $\frac{7}{6\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{24}$;

- $\frac{1}{3^2+24}+\frac{1}{8^2+24}=\frac{2}{24+24}$;

  $\frac{1}{9+24}+\frac{1}{64+24}=\frac{1}{24}$;

  $\frac{88+33}{33\cdot 88}=\frac{121}{3\cdot 11\cdot 11\cdot 8}=\frac{1}{24}$;

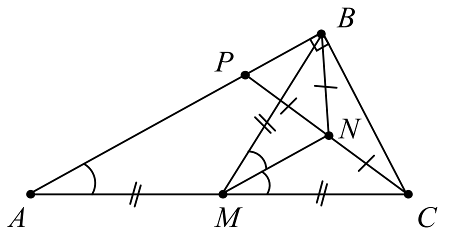
- $\frac{1}{4^2+24}+\frac{1}{6^2+24}=\frac{2}{24+24}$;

  $\frac{1}{16+24}+\frac{1}{36+24}=\frac{1}{24}$;

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{60}=\frac{3+2}{120}=\frac{1}{24}.$$

Pārbaude liecina, ka visi 8 atrisinājumi der.

A.A.9.2. Taisnleņķa trijstūrī mediānas, kas vilkta no taisnā leņķa virsotnes, garums ir puse no hipotenūzas garuma. Apskatot taisnleņķa trijstūrus *ABC* un *PBC*, iegūstam, ka $AM = BM = CM$ un $PN = BN = CN$ (skat. A31. zīm.). Tāpēc $\Delta MBN = \Delta MCN$ (pēc pazīmes „*mmm*”) un $\angle BMN = \angle CMN$ kā attiecīgie leņķi vienādos trijstūros.



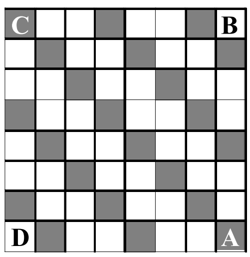
A31. zīm.

MN ir ΔAPC viduslīnija, tāpēc $AP \| MN$ un $\angle CMN = \angle CAP$ kā kāpšļu leņķi. Tātad $\angle BMN = \angle CMN = \angle CAP = \angle BAC$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.9.3. Aplūkosim vienādojumu $ax^2 - bx + c = 0$. Ievietojot $x = -1$ iegūstam, ka $a + b + c = 0$. Tātad, ja $a + b + c = 0$, tad $x = -1$ ir šī vienādojuma sakne.
Tātad pirmais rūķītis vienmēr var panākt prasīto, ja izvēlas tādus 3 skaitļus, kuru summa ir 0, jo tad, lai kā otrais rūķītis tos saliktu „#” vietās, vienādojumam noteikti būs vismaz viena racionāla sakne $x = -1$.

A.A.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka lielākais skaits pēc kārtas sekojošu naturālo skaitļu ar uzdevumā doto īpašību ir 3. Meklējam tādus naturālus skaitļus *N*, kuriem eksistē tādi naturāli skaitļi *x* un *y*, ka $x^2 - y^2 = N$. Lai kādi būtu *x* un *y*, skaitļiem $(x - y)$ un $(x + y)$ ir vienāda paritāte, t. i., abi skaitļi ir vai nu pāra, vai – nepāra. Apskatīsim, kādi pāra skaitļi ir izsakāmi kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpība. Ja $N = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ – pāra skaitlis, tad $(x - y)$ un $(x + y)$ ir pāra skaitļi un *N* jādalās ar 4. Esam ieguvuši, ka lielākais pēc kārtas sekojošu šādu skaitļu skaits var būt trīs: $4k - 1$, $4k$, $4k + 1$ (t. i., tikai viens no tiem var būt pāra skaitlis), jo $4k - 2$ un $4k + 2$ ir pāra skaitļi, kas ar 4 nedalās.
Otrkārt, parādām, ka eksistē 3 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, kurus var izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpību. Tie var būt, piemēram, 11, 12 un 13, jo $11 = 6^2 - 5^2$, $12 = 4^2 - 2^2$ un $13 = 7^2 - 6^2$.

A.A.9.5. Izkrāsojam dotajā taisnstūrī katru trešo diagonāli tā, kā parādīts A32. zīmējumā.



A32. zīm.

Ievērojam, ka *sienāzis*, izpildot atļautos gājienus, no melnas rūtiņas var nonākt tikai melnā rūtiņā. Tātad no rūtiņas **A** viņš nekad nenonāks rūtiņās **B** un **D**. Rūtiņā **C** *sienāzis* var nokļūt, piemēram, ejot uz augšu pa diagonāli **AC**.

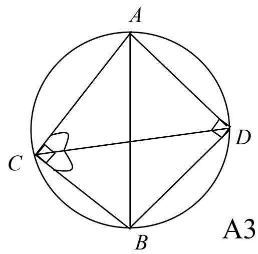
A.A.10. Desmitā klase

A.A.10.1. Izmantosim faktu, ka pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisko progresiju ar diferenci 1. Aritmētiskās progresijas n pēc kārtas ņemtu locekļu $a,\ a+1,\ \ldots,\ a+n-1$ summa ir $S_n = \dfrac{(a+a+n-1)\cdot n}{2} = \dfrac{(2a+n-1)\cdot n}{2}$. Tātad nepieciešams atrast visas tās n vērtības, kurām $n>1$ un $\dfrac{(2a+n-1)\cdot n}{2} = 2011$ jeb $(2a+n-1)\cdot n = 4022$.

Sadalām skaitli 4022 pirmreizinātājos: $4022 = 2\cdot 2011$. Tā kā $n < 2a+n-1$, tad iespējams tikai gadījums, kad $n=2$ un $2a+n-1=2011$. Tātad virknes pirmais loceklis $a=(2011-2+1):2=1005$.

Esam ieguvuši, ka skaitli 2011 kā vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt vienā vienīgā veidā: $2011=1005+1006$.

A.A.10.2. Tā kā trijstūri ABC un ABD ir taisnleņķa trijstūri, tad $ACBD$ pretējo leņķu summa ir $180°$, Tātad ap četrstūri $ACBD$ var apvilkt riņķa līniju (skat. A33. zīm.). Šī riņķa līnija sakrīt ar trijstūriem ABC un ABD apvilktajām riņķa līnijām, tātad AB ir šīs riņķa līnijas diametrs.



A33. zīm.

Tā kā CD ir $\angle ACB$ bisektrise, tad $\angle ACD$ un $\angle BCD$ ir divi vienādi ievilkti leņķi, tātad

$\cup AD = \cup BD$. Esam ieguvuši, ka $AD = BD$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus, tātad ΔABD ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, kura hipotenūzas garums ir 10 cm.

Izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam, ka $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=5\sqrt{2}$ cm, tātad

$$S_{ABD} = \frac{AB\cdot BD}{2} = \frac{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25\ \mathrm{cm}^2.$$

A.A.10.3. Vienādojumam $a^2=b^2$ vispārīgā gadījumā iespējami divi atrisinājumi: $a=b$ un $a=-b$.

Aplūkosim pirmo vienādojumu un apskatīsim abus iespējamos tā atrisinājuma variantus:

- $x-y=z-2 \Rightarrow z-x=2-y$ (*)

  Ievietojot (*) trešajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

  $$(2-y)^2=(y-6)^2;$$
  $$4-4y+y^2=y^2-12y+36;$$
  $$8y=32.$$

  Tātad $y=4$.

  Tad no (*) iegūstam, ka $z-x=2-4$ jeb $z=x-2$. Tātad varam izteikt: $y-z=6-x$. Ievietojot to otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$$(6-x)^2=(x-4)^2;$$
$$36-12x+x^2=x^2-8x+16;$$
$$-4x=-20.$$

Tātad $x=5$ un $z=5-2=3$.

- $x-y=2-z \Rightarrow y-z=x-2$ (**)

  Ievietojot (**) otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu
  $$(x-2)^2=(x-4)^2;$$
  $$x^2-4x+4=x^2-8x+16;$$
  $$4x=12.$$
  Tātad $x=3$.

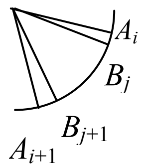
  Tad no (**) iegūstam, ka $y-z=3-2$ jeb $y=z+1$. Tātad varam izteikt: $y-6=z-5$. Ievietojot to trešajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu
  $$(z-3)^2=(z-5)^2;$$
  $$z^2-6z+9=z^2-10z+25;$$
  $$4z=16.$$
  Tātad $z=4$ un $y=4+1=5$.

  Esam ieguvuši, ka dotajai vienādojuma sistēmai ir iespējami divi atrisinājumi:
  $$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases} \text{un} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}.$$

Veicam pārbaudi, kas parāda, ka abi atrisinājumi der:

- $\begin{cases} (5-4)^2=(3-2)^2 \\ (4-3)^2=(5-4)^2 \\ (3-5)^2=(4-6)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1=1 \\ 4=4 \end{cases};$
- $\begin{cases} (3-5)^2=(4-2)^2 \\ (5-4)^2=(3-4)^2 \\ (4-3)^2=(5-6)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 1=1 \\ 1=1 \end{cases}.$

A.A.10.4. Tā kā riņķa līnija sadalīta 19 lokos, tad nav tādu 9-stūra un 10-stūra virsotņu, kas sakristu. Tāpēc, izmantojot Dirihlē principu, iegūstam, ka noteikti ir divas tādas 10-stūra virsotnes B_j un B_{j+1}, kas pieder lokam A_iA_{i+1}, ko veido divas 9-stūra virsotnes (skat. A34. zīm.).



A34. zīm.

Regulāra 9-stūra virsotnes sadala riņķa līniju $360°:9=40°$ lielos lokos, bet 10-stūra virsotnes riņķa līniju sadala $360°:10=36°$ lielos lokos. Tātad $\cup A_iB_j+\cup B_{j+1}A_{i+1}=\cup A_iA_{i+1}-\cup B_jB_{j+1}=40°-36°=4°$. Ja divu loku leņķisko lielumu summa ir $4°$, tad vismaz viens no šo loku leņķiskajiem lielumiem nepārsniedz $2°$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.10.5. a) Izkrāsojot vienības kubiņus pamīšu melnā un baltā krāsā (tā, ka kubiņi, kam ir kopīga skaldne, nokrāsoti dažādās krāsās), augšējo kubiņu – melnu, iegūstam, ka melnie kubiņi ir 16, bet baltie – 14.

Klucītis satur tieši vienu melnu un 1 baltu kubiņu, tātad no *klucīšiem* nevar izveidot figūru, kas satur dažāda skaita melnos un baltos kubiņus, un uzdevumā prasītais nav iespējams.

b) *Torni* var salikt, izmantojot *stūrīšus*. Piemēru skatīt A35. zīmējumā (zīmējumā pa slāņiem attēlots, kurš vienības kubiņš pieder kuram *stūrītim*).

8	8	4	7
6	8	7	7
6	9	5	10
9	9	10	10

3	3	4
2	3	4
6	5	5

1	1
2	2

1

A35. zīm.

A.A.11. Vienpadsmitā klase

A.A.11.1. Uzrakstām katrai virknei vispārīgā locekļa formulu:

(1) $1+14k$,

(2) $2+15l$,

(3) $3+16m$,

kur k, l, m – veseli, nenegatīvi skaitļi.

Atradīsim skaitļus, kas vienlaicīgi pieder aritmētiskajām progresijām (1) un (2). Tie ir skaitļi, kas vienlaicīgi izsakāmi gan formā $1+14k$, gan formā $2+15l$, tātad jāizpildās vienādībai $1+14k=2+15l$. Varam izteikt

$$14k=1+15l=14l+l+1.$$

Vienādības $14k=14l+l+1$ kreisā puse dalās ar 14, tāpēc arī vienādības labajai pusei jādalās ar 14. Tā kā skaitlis $14l$ dalās ar 14, tad arī skaitlim $l+1$ jādalās ar 14. Mazākā derīgā l vērtība ir $l=13$. Tātad mazākais skaitlis, kas pieder pirmajām divām virknēm ir $2+15l=2+15\cdot 13=197$.

Tā kā $\text{MKD}(14;15)=210$, tad aritmētiskajām progresijām (1) un (2) vienlaicīgi pieder skaitļi, kas izsakāmi formā $197+210u$, kur u – vesels, nenegatīvs skaitlis.

Meklēsim skaitļus, kuri pieder visām trim aritmētiskajām progresijām. Tātad jāizpildās vienādībai $197+210u=3+16m$. Varam izteikt

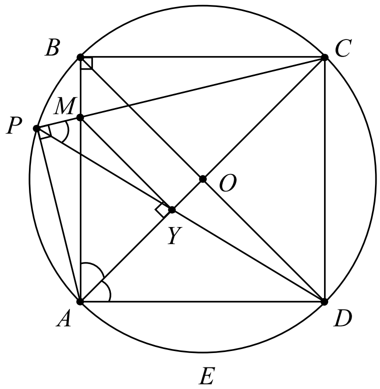
$$8m=(194+210u):2=97+105u=(8\cdot 12+1)+(8\cdot 13+1)u=8\cdot(12+13u)+1+u.$$

Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 8, tad arī vienādības labajai pusei jādalās ar 8. Tā kā skaitlis $8\cdot(12+13u)$ dalās ar 8, tad arī skaitlim $1+u$ jādalās ar 8. Mazākā derīgā u vērtība ir $u=7$. Tātad mazākais skaitlis, kas pieder visām trim aritmētiskajām progresijām ir $197+210u=197+210\cdot 7=1667$.

Tā kā $\text{MKD}(14;15;16)=1680$, tad visām trim aritmētiskajām progresijām vienlaicīgi pieder skaitļi, kas izsakāmi formā $1667+1680p$, kur p – vesels, nenegatīvs skaitlis.

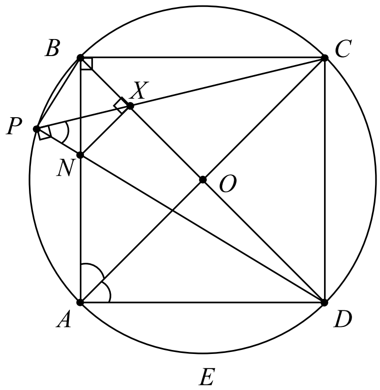
Tā kā ir bezgalīgi daudz veselu, nenegatīvu skaitļu, tad arī skaitļu, kas pieder visām trim uzdevumā dotajām aritmētiskajām progresijām ir bezgalīgi daudz.

A.A.11.2. Tā kā *ABCD* – kvadrāts, tad $\cup CD = \cup BC = 360° : 4 = 90°$ (skat. A36. zīm.). Tātad $\angle CPD = \angle BAC$ jeb $\angle MPY = \angle MAY = 90° : 2 = 45°$, kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma lokiem.



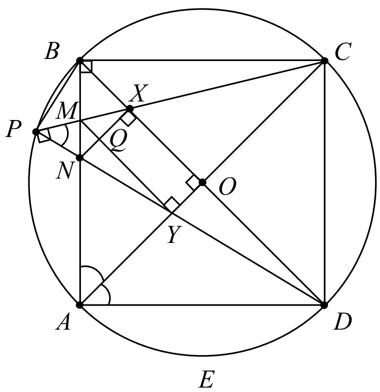
A36. zīm.

Tā kā $\angle MPY = \angle MAY$, tad caur punktiem *A*, *P*, *M* un *Y* var novilkt riņķa līniju.
Ja ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$. $\angle APC = \angle ABC = 90°$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz viena loka, tātad $\angle AYM = 180° - \angle APM = 180° - \angle APC = 90°$ jeb $MY \perp AC$.
Līdzīgi pierāda, ka $\angle BXN = 90°$ jeb $NX \perp BD$, vispirms iegūstot, ka caur punktiem *P*, *B*, *X* un *N* var novilkt riņķa līniju, un pēc tam pamatojot, kāpēc $\angle NPB = 90°$ (skat. A37. zīm.).



A37. zīm.

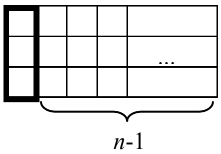
Apskatām četrstūri *QXOY* (skat. A38. zīm.). Tā kā $MY \perp AC$ un $NX \perp BD$, tad attiecīgi $\angle QYO = 90°$ un $\angle QXO = 90°$. $\angle XOY = \angle AOB = 90°$ kā leņķis starp kvadrāta diagonālēm.

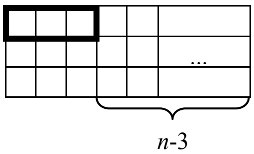


A38. zīm.

Esam ieguvuši, ka četrstūrim *QXOY* ir 3 taisni leņķi, tātad tas ir taisnstūris, kas arī bija jāpierāda.

A.A.11.3. Ar f_n apzīmēsim, cik veidos taisnstūri ar izmēriem $3 \times n$ var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3. Acīmredzams, ka $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$.





A39. zīm. A40. zīm.

Apskatām taisnstūri ar izmēriem $3 \times n$. Pirmo taisnstūrīti 1×3 varam novietot divos veidos:

- „vertikāli" (skat. A39. zīm.); tad nesadalīts paliek taisnstūris $3\times(n\text{-}1)$, ko var aizpildīt f_{n-1} veidos;
- „horizontāli" (skat. A40. zīm.); tad vēl divi taisnstūrīši 1×3 jānovieto „horizontāli" (zem jau ievietotā „horizontālā" taisnstūrīša nevienu taisnstūrīti „vertikāli" ievietot nav iespējams) un nesadalīts paliek taisnstūris $3 \times (n-3)$, ko var aizpildīt f_{n-3} veidos.

Esam ieguvuši, ka $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$. Izmantojot šo rekursīvo sakarību, f_{12} vērtību var aprēķināt divos veidos:

- $f_{12} = f_{11} + f_9 = f_{10} + f_8 + f_8 + f_6 =$
  $= f_9 + f_7 + 2f_7 + 2f_5 + f_5 + f_3 =$
  $= f_8 + f_6 + 3f_6 + 3f_4 + 3f_4 + 3f_2 + 2 =$
  $= f_7 + f_5 + 4f_5 + 4f_3 + 6f_3 + 6f_1 + 3\cdot 1 + 2 =$
  $= f_6 + f_4 + 5f_4 + 5f_2 + 10\cdot 2 + 6\cdot 1 + 5 =$
  $= f_5 + f_3 + 6f_3 + 6f_1 + 5\cdot 1 + 31 =$
  $= f_4 + f_2 + 7\cdot 2 + 6\cdot 1 + 36 =$
  $= f_3 + f_1 + 1 + 56 = 2 + 1 + 57 = 60$.
- $f_4 = f_3 + f_1 = 2 + 1 = 3$;
  $f_5 = f_4 + f_2 = 3 + 1 = 4$;
  $f_6 = f_5 + f_3 = 4 + 2 = 6$;
  $f_7 = f_6 + f_4 = 6 + 3 = 9$;
  $f_8 = f_7 + f_5 = 9 + 4 = 13$;
  $f_9 = f_8 + f_6 = 13 + 6 = 19$;
  $f_{10} = f_9 + f_7 = 19 + 9 = 28$;
  $f_{11} = f_{10} + f_8 = 28 + 13 = 41$;
  $f_{12} = f_{11} + f_9 = 41 + 19 = 60$.

Tātad taisnstūri ar izmēriem 3×12 rūtiņas var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3 rūtiņas 60 dažādos veidos.

A.A.11.4. Pareizinot vienādojuma kreisās puses katra saskaitāmā skaitītāju un saucēju ar tā saucējam saistīto izteiksmi (piemēram, izteiksmes $a+b$ saistītā izteiksme ir $a-b$), iegūstam

$$\frac{\sqrt{x-2011}-\sqrt{x-2009}}{-2}+\frac{\sqrt{x-2009}-\sqrt{x-2007}}{-2}+\ldots+$$

$$+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}+...+\frac{\sqrt{x+209}-\sqrt{x+2011}}{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pareizinot vienādojuma abas puses ar 2 un saīsinot vienādos locekļus, iegūstam:

$$\sqrt{x+2011}-\sqrt{x-2011}=\sqrt{2}.$$

Veicam identiskus pārveidojumus:

$$\sqrt{x+2011}=\sqrt{x-2011}+\sqrt{2};$$

$$x+2011=x-2011+2\sqrt{2(x-2011)}+2;$$

$$4020=2\sqrt{2(x-2011)};$$

$$2010^2=2(x-2011).$$

Esam ieguvuši, ka $x=\frac{2010^2}{2}+2011=2010\cdot 1005+2011=2022061$. Tā kā ir jāievēro definīcijas apgabals, pārliecināmies, vai zem kvadrātsaknes nav negatīvs lielums un vai kāds no saucējiem nav 0. Tā kā vērtība $x=2022061$ apmierina šīs prasības, tad tā ir uzdevumā dotā vienādojuma atrisinājums.

A.A.11.5. Pieņemsim, ka skaitļi pa apli uzrakstīti secībā a_1, a_2, ..., a_{2011}, pie tam a_1 kopējais pirmreizinātāju skaits ir pāra (nepāra) skaitlis.

Tā kā blakusesošo skaitļu dalījums ir pirmskaitlis, tad to kopējais pirmreizinātāju skaits atšķiras tieši par 1. Tātad skaitļiem a_1, a_3, a_5, ..., a_{2011} ir pāra (nepāra) skaits pirmreizinātāju, bet skaitļiem a_2, a_4, a_6 ..., a_{2010} – nepāra (pāra) skaits pirmreizinātāju.

Tā kā abiem skaitļiem a_1 un a_{2011} pirmreizinātāju skaits ir pāra (nepāra) skaitlis un tie ir dažādi skaitļi, tad to dalījums būs salikts skaitlis, kas satur pāra skaitu (vismaz divus) pirmreizinātājus.

Esam pierādījuši, ka uzdevumā prasītais nav iespējams.

A.A.12. Divpadsmitā klase

A.A.12.1. a) Jā, tā var būt, ja skaitļi sadalīti grupās, piemēram, šādi: $1+7+9=17$, $3+6+8=17$ un $2+4+5=11$ vai $1+3+7=11$, $2+4+5=11$ un $6+8+9=23$.

b) Katras grupas skaitļu summa noteikti nebūs mazāka par $1+2+3=6$ un lielāka par $7+8+9=24$. Intervālā no 6 līdz 24 ietilpst seši pirmskaitļi: 7, 11, 13, 17, 19 un 23.

Visu deviņu skaitļu summa ir vienāda ar skaitļu no 1 līdz 9 summu, t. i., 45.

Aplūkosim, kādas var būt grupu skaitļu summas, ja uzdevumā prasītais ir iespējams.

- Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 7, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt $45-7=38$. Vienīgais variants ir $19+19$, kas neatbilst uzdevuma prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 7 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.
- Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 11, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt $45-11=34$. Iespējamie varianti ir $11+23$ un $17+17$, kas neatbilst uzdevuma prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 11 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.
- Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 13, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt $45-13=32$. Vienīgais variants ir $13+19$, kas neatbilst uzdevuma prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 13 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.
- Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 17, tad visu grupu skaitļu summa ir $17+19+23=59$, kas ir vairāk nekā visu skaitļu summa.

Esam ieguvuši, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 9 nevar sadalīt trīs grupās pa trim skaitļiem tā, lai visas grupu skaitļu summas būtu atšķirīgi pirmskaitļi.

A.A.12.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādām, ka uzdevumā dotās izteiksmes vērtība var būt 1 un 2^{-18}:

- ja $x=0$, tad $\sin^{38}x+\cos^{38}x=0^{38}+1^{38}=1$;
- ja $x=\frac{\pi}{4}$, tad $\sin^{38}\frac{\pi}{4}+\cos^{38}\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{38}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{38}=2\cdot\frac{2^{19}}{2^{38}}=2^{-18}$.

Otrkārt, pierādīsim, ka šīs ir dotās izteiksmes lielākā un mazākā vērtība.

Atceramies, ka $0\le\sin^2 x\le 1$ un $0\le\cos^2 x\le 1$, tātad arī $0\le\sin^{36}x\le 1$ un $0\le\cos^{36}x\le 1$. Vislielākā dotās izteiksmes vērtība ir 1, jo

$$\sin^{38}x+\cos^{38}x\le\sin^2 x\sin^{36}x+\cos^2 x\cos^{36}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Pierādīsim, ka vismazākā dotās izteiksmes vērtība ir 2^{-18}.

Vispirms, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādīsim, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās nevienādība

$$\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\ge 2^{1-n}.$$

<u>Bāze.</u> Ievietojot pierādāmajā nevienādībā vērtību $n=1$, iegūstam, ka $\sin^2 x+\cos^2 x\ge 2^0$, kas ir patiesa nevienādība, jo nevienādības abu pušu vērtība ir 1.

<u>Induktīvais pieņēmums.</u> $\sin^{2k}x+\cos^{2k}x\ge 2^{1-k}$.

<u>Induktīvā pāreja.</u> Pierādīsim: ja izpildās nevienādība $\sin^{2k}x+\cos^{2k}x\ge 2^{1-k}$, tad izpildās arī nevienādība

$$\sin^{2(k+1)}x+\cos^{2(k+1)}x\ge 2^{1-(k+1)}.$$

Pierādījumā izmatosim nevienādību:

$$\sin^{2k+2}x+\cos^{2k+2}x\ge\frac{1}{2}(\sin^{2k}x+\cos^{2k}x). \qquad (*)$$

Izmatojot pieņēmumu un nevienādību (*), iegūstam vajadzīgo:

$$\sin^{2(k+1)}x+\cos^{2(k+1)}x=\sin^{2k+2}x+\cos^{2k+2}x\ge\frac{1}{2}(\sin^{2k}x+\cos^{2k}x)\ge\frac{1}{2}2^{1-k}=2^{1-(k+1)}.$$

<u>Secinājums.</u> Pēc matemātiskās indukcijas principa nevienādība $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\ge 2^{1-n}$ ir patiesa visām n vērtībām.

Varam secināt, ka pie vērtības $n=19$ augstāk pierādītā nevienādība dod uzdevumā dotās izteiksmes novērtējumu:

$$\sin^{38}x+\cos^{38}x\ge 2^{-18},$$

no kā seko, ka uzdevumā dotās izteiksmes vērtība nevar būt mazāka par 2^{-18}, tātad 2^{-18} ir dotās izteiksmes mazākā vērtība.

Lai uzdevums būtu pilnībā atrisināts, vēl jāpierāda, ka nevienādība (*) ir patiesa visiem k.

Lietojot formulu $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ un pareizinot nevienādības (*) kreiso pusi ar 2, bet labo – ar $2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$ iegūstam, ka

$$2\sin^{2k}x\cdot\sin^2 x+2\cos^{2k}x\cdot\cos^2 x\ge$$
$$\ge\sin^{2k}x(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^{2k}x(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Pārnesot visus saskaitāmos uz nevienādības kreiso pusi, iegūstam, ka

$$\sin^{2k}x\cdot\sin^2 x-\sin^{2k}x\cdot\cos^2 x-\cos^{2k}x\cdot\sin^2 x+\cos^{2k}x\cdot\cos^2 x\ge 0.$$

Sagrupējot iegūstam, ka

$$\sin^{2k}x(\sin^2 x-\cos^2 x)-\cos^{2k}x(\sin^2 x-\cos^2 x)\ge 0$$
$$(\sin^{2k}x-\cos^{2k}x)(\sin^2 x-\cos^2 x)\ge 0. \qquad (**)$$

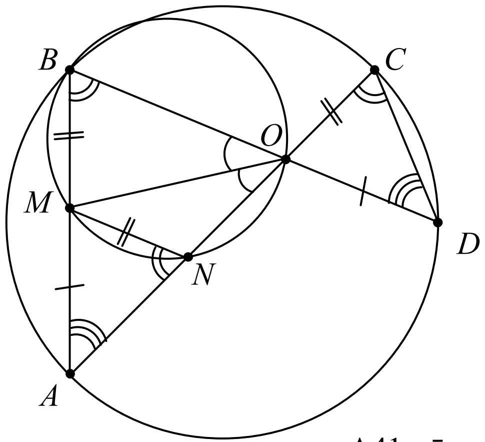
Ja $\sin^2 x < \cos^2 x$, tad arī $\sin^{2k} x < \cos^{2k} x$. Savukārt, ja $\sin^2 x \geq \cos^2 x$, tad arī $\sin^{2k} x \geq \cos^{2k} x$. Varam secināt, ka nevienādības (**) abu iekavu izteiksmju vērtības ir reizē vai nu abas negatīvas, vai abas nenegatīvas, tāpēc to reizinājums ir nenegatīvs. Esam pierādījuši, ka šī nevienādība ir patiesa, tātad tai ekvivalentā nevienādība (*) arī ir patiesa.

A.A.12.3. 1. risinājums. No bisektrises īpašības seko, ka $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AM}{BM}$.

No hordu īpašības seko $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ jeb $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{OD}{OC}$.

Esam ieguvuši, ka $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{OD}{OC}$. Tā kā pēc dotā $AM = OD$, tad $BM = OC$, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Apvilksim ap punktiem *M*, *B* un *O* riņķa līniju, kas krusto *AO* punktā *N* (skat. A41. zīm.).



A41. zīm.

$\angle ABD = \angle ACD$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku *AD*.

Ja ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$, tātad $\angle MBO = 180° - \angle ONM$. Ievērojam, ka arī $\angle ANM = 180° - \angle ONM$ kā blakusleņķi. Tātad $\angle MBO = 180° - \angle ONM = \angle ANM$.

Esam ieguvuši, ka $\angle ANM = \angle MBO = \angle ABD = \angle ACD$. (*)

Ievērojam, ka $\angle BAC = \angle BDC$, (**)

kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku *BC*.

Apskatām ΔAMN un ΔDOC. No (*) un (**) seko, ka

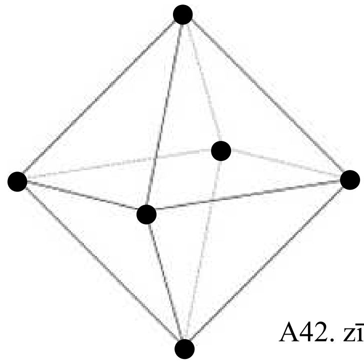
$\angle AMN = 180° - \angle ANM - \angle MAN = 180° - \angle DCO - \angle ODC = \angle DOC$. (***)

No (**), (***) un no tā, ka $AM = OD$, seko, ka $\Delta AMN = \Delta DOC$ (pēc pazīmes $\ell m \ell$). Tas nozīmē, ka $MN = OC$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.

Tā kā *OM* ir bisektrise, tad $MN = BM$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus.

Esam ieguvuši, ka $BM = MN = OC$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.12.4. Jā, tas ir iespējams, ja tos novieto, piemēram, oktaedra virsotnēs (skat. A42. zīm.). Tiešām, jebkuri trīs no punktiem atrodas vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrodas vienā plaknē.



A42. zīm.

A.A.12.5. Apskatām skaitļus $x=\dfrac{1}{N}$ un $y=\dfrac{1}{N^N}$, kur N – naturāls skaitlis, kas lielāks par 1:

$$x^y+y^x+x+y=\left(\frac{1}{N}\right)^y+\left(\frac{1}{N^N}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N^N}=$$

$$=\left(\frac{1}{N}\right)^y+\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N^N}<\left(\frac{1}{N}\right)^y+\frac{2}{N}+\frac{1}{N^N}.$$

Tā kā $\dfrac{1}{N}\in(0;1)$ un $y=\dfrac{1}{N^N}>0$, tad arī $\left(\dfrac{1}{N}\right)^y\in(0;1)\ \Rightarrow\ \left(\dfrac{1}{N}\right)^y<1$. Tātad

$$x^y+y^x+x+y<\left(\frac{1}{N}\right)^y+\frac{2}{N}+\frac{1}{N^N}<1+\frac{2}{N}+\frac{1}{N^N}.$$

Tā kā N – naturāls skaitlis, kas lielāks par 1, tad $N^N>N$, tāpēc $\dfrac{1}{N^N}<\dfrac{1}{N}$ un

$$x^y+y^x+x+y<1+\frac{2}{N}+\frac{1}{N^N}<1+\frac{2}{N}+\frac{1}{N}<1+\frac{3}{N}.$$

Ja izvēlamies, piemēram, $N=9000$, tad

$$x^y+y^x+x+y<1+\frac{3}{9000}=1+\frac{1}{3000}<1+\frac{1}{2011}.$$

Tātad eksistē tādi pozitīvi skaitļi, piemēram, $x=\dfrac{1}{9000}$ un $y=\dfrac{1}{9000^{9000}}$, ka uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa.

A.VP. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

A.VP.1. „Secīgi naturāli skaitļi" apzīmē aritmētisku progresiju ar diferenci 1. Šādas aritmētiskās progresijas, kuras pirmais loceklis ir a_1, pirmo n locekļu summa ir $S_n = \frac{(2a_1+n-1)n}{2}$. Apskatām divus gadījumus:

- Ja n ir pāra skaitlis, tad skaitlis $2a_1+n-1$ ir nepāra, jo $n-1$ ir nepāra skaitlis un $2a_1$ ir pāra skaitlis (pāra un nepāra skaitļa summa ir nepāra skaitlis).
- Līdzīgi iegūst, ka $2a_1+n-1$ ir pāra skaitlis, ja n ir nepāra skaitlis.

Tātad skaitītājā esošie reizinātāji ir ar atšķirīgu paritāti. Līdz ar to skaitlim S_n noteikti jāsatur kāds nepāra pirmreizinātājs, lai to varētu izteikt kā secīgu naturālu skaitļu summu. Neviena nepāra pirmreizinātāja nav tikai skaitļiem, kas ir divnieka pakāpes, tāpēc prasītajā veidā noteikti nav iespējams izteikt skaitļus: $2^{10}=1024$ un $2^{11}=2048$.

Pierādīsim, ka visus citus dotā intervāla skaitļus var izteikt kā secīgu naturālu skaitļu summu.

Jebkuru naturālu skaitli $2n+1$ (nepāra skaitlis) no šī intervāla ir iespējams izteikt kā divu secību skaitļu n un $n+1$ summu.

Ja skaitli N ir iespējams pārveidot formā $2^p(2m-1)$ – pāra skaitlis, kur p – naturāls skaitlis, tad, pielīdzinot to aritmētiskās progresijas locekļu summai, iegūstam

$$\frac{(2a_1+n-1)n}{2} = 2^p(2m-1); \quad \Big| \cdot 2$$

$$(2a_1+n-1)n = 2^{p+1}(2m-1).$$

Tā kā n un $2a_1+n-1$ ir ar dažādām paritātēm, tad iespējami 2 gadījumi:

- ja $n=2m-1$, tad $2a_1+n-1=2^{p+1}$. Izsakot a_1, iegūstam
$$2a_1+2m-1-1=2^{p+1};$$
$$2a_1=2^{p+1}-2m+2;$$
$$a_1=2^p-m+1;$$
- ja $n=2^{p+1}$, tad $2a_1+n-1=2m-1$. Izsakot a_1, iegūstam
$$2a_1+2^{p+1}-1=2m-1;$$
$$2a_1=2m-2^{p+1};$$
$$a_1=m-2^p.$$

Tātad, izvēloties $n=2m-1$ un $a_1=2^p-m+1$ (ja $2^p \ge m$) vai $n=2^{p+1}$ un $a_1=m-2^p$ (ja $2^p<m$), iegūsim aritmētisko progresiju (secīgus skaitļus) ar nepieciešamo summu (skaitli N).

Tātad ir divi naturāli skaitļi (1024 un 2048), kurus nav iespējams izteikt uzdevumā prasītajā veidā.

A.VP.2. Šķirojam divus gadījumus.

- Punkts P pieder lokam ABC. Pieņemsim, ka P pieder loka ABC apakšlokam AB (skat. A43. zīm.). Ja P pieder loka ABC apakšlokam BC, tad pierādījums ir simetrisks.

  Apzīmējam $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$ un $\angle ACB = \beta$.

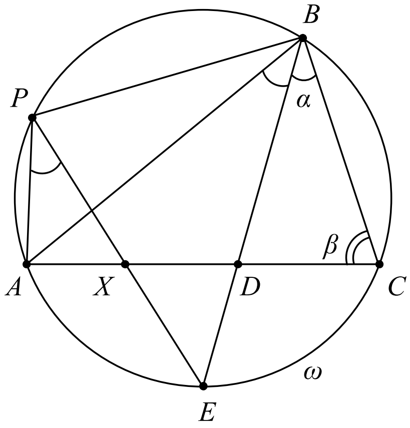
  Tā kā $\angle XDB$ ir ΔDBC ārējais leņķis, tad
$$\angle XDB = \angle DBC + \angle BCD = \alpha + \beta. \ (*)$$

No tā, ka punkti A, P, B un C atrodas uz vienas riņķa līnijas seko, ka $APBC$ ir ievilkts četrstūris, kura pretējo leņķu summa ir $180°$. Tātad $\angle APB + \angle ACB = 180°$ un $\angle APB = 180° - \beta$.

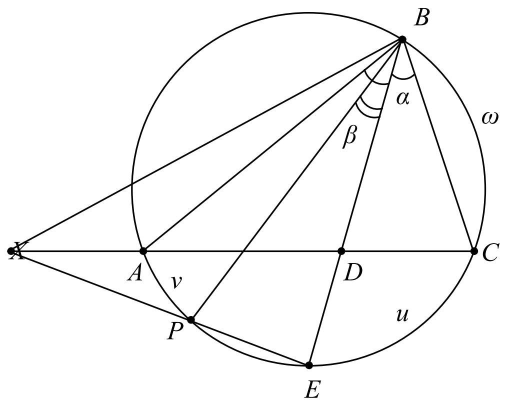
Tā kā $\angle APE = \angle ABE = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka AE, tad

$$\angle XPB = \angle EPB = \angle APB - \angle APE = 180° - \beta - \alpha. \quad (**)$$

No (*) un (**) iegūstam, ka $\angle XPB + \angle XDB = 180° - \beta - \alpha + \alpha + \beta = 180°$, tātad četrstūra BDXP pretējo leņķu summa ir $180°$, kas nozīmē, ka caur punktiem B, D, P un X var novilkt riņķa līniju.



A43. zīm.



A44. zīm.

- Punkts P pieder lokam AEC. Pieņemsim, ka P pieder loka ABC apakšlokam AE (skat. A44. zīm.). Ja P pieder loka AEC apakšlokam EC, tad pierādījums ir simetrisks.

  Apzīmējam $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$ un $\angle PBE = \beta$.

  Apzīmējam mazāko no lokiem EC ar EuC, mazāko no lokiem BC – ar $B\omega C$, un mazāko no lokiem AP – ar AvP.

  Tā kā leņķis EXC ir riņķa līnijas ārējais leņķis, tad $\angle EXC = \frac{1}{2}(E\breve{u}C - A\breve{v}P)$.

  Izmantojot sakarību starp ievilktā leņķa un loka, uz kura tas balstās, lielumiem, iegūstam, ka

  $$E\breve{u}C = 2\angle EBC = 2\alpha \text{ un } A\breve{v}P = 2\angle ABP = 2(\angle ABE - \angle PBE) = 2(\alpha - \beta).$$

  Tātad $\angle EXC = \frac{1}{2}(2\alpha - 2(\alpha - \beta)) = \frac{1}{2} \cdot 2\beta = \beta$. Bet tad $\angle PXD = \angle PBD = \beta$.

  Pēc teorēmas par četrstūrim apvilkto riņķa līniju, secinām, ka caur punktiem B, D, P, X var novilkt riņķa līniju.

Tā kā esam apskatījuši visus gadījumus un visos gadījumos caur punktiem B, D, P, X var novilkt riņķa līniju, tad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

A.VP.3. Apzīmējam $g(x) = 3f(x) - 2x$. (*)

Tā kā uzdevumā doto izteiksmi var pārrakstīt kā $f(g(x)) = x$, tad $g(x) > 0$, jo funkcija f ir definēta tikai pozitīvām argumenta vērtībām. No vienādības (*) izsakot izteiksmi $f(x)$, iegūstam $f(x) = \frac{g(x) + 2x}{3}$. (**)

Izmantojot iegūto sakarību, iegūstam $f(g(x)) = \frac{g(g(x)) + 2g(x)}{3} = x$ jeb

$$g(g(x)) + 2g(x) = 3x. \quad (***)$$

Ņemam patvaļīgu x un aplūkojam virkni

$$y_0 = x,\ y_1 = g(x),\ y_2 = g(g(x)),\ ...,\ y_n = g(y_{n-1}),\ ... .$$

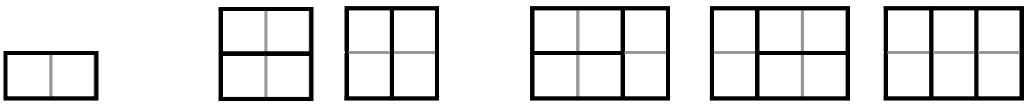
Šajā virknē izpildās sakarība $y_{n+2} + 2y_{n+1} = 3y_n$, jo ir spēkā (***). Tātad tā ir rekurenta virkne, kuras harakteriskais vienādojums ir $z^2 + 2z - 3 = 0$; tā saknes ir $z_1 = 1$ un $z_2 = -3$. Tātad rekurentā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir $y_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-3)^n = A + B \cdot (-3)^n$, kur A un B ir kaut kādas konstantes.

Ja konstante B nav 0, tad pie kādas pietiekami lielas n vērtības izteiksme y_n kļūs negatīva: $B \cdot (-3)^n + A < 0$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija g pieņem tikai pozitīvas vērtības. Tātad $B = 0$ un $y_n = A$, t. i., $A = y_0 = y_1 = ... = y_n = ...$. Tā kā pēc pieņēmuma $y_0 = x$ un $y_1 = g(x)$, tad $g(x) = x$. Ievietojot šo sakarību vienādojumā (**), iegūstam, ka

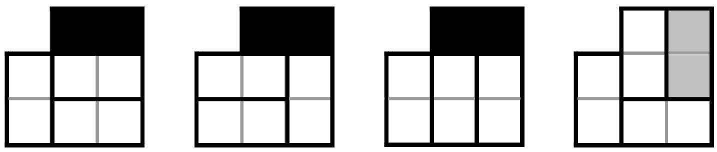
$$f(x) = \frac{x + 2x}{3} = x.$$

Pārbaudām, vai iegūtā funkcija $f(x) = x$ apmierina doto vienādību: $f(3x - 2x) = f(x) = x$. Tātad funkcija $f(x) = x$ ir meklētā funkcija.

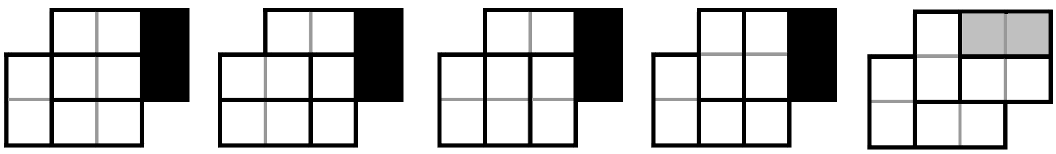
A.VP.4. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, izmantosim matemātiskās indukcijas metodi. Apskatām figūru sadalījumu dažādām n vērtībām.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



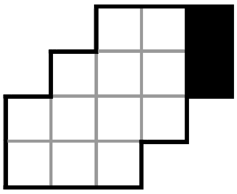
$n = 4$

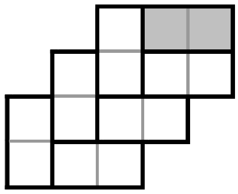


$n = 5$

5 sagriešanas veidi, jo figūras neiekrāsoto daļu var sagriezt 5 dažādos veidos (skat. $n = 5$).

$n = 6$





6 sagriešanas veidi

$n = 7$

Lai iegūtu *n* dažādus figūras sadalījumus, tad iepriekšējai figūrai (kuru varēja sadalīt $n-1$ dažādos veidos) attiecīgi virs vai blakus pelēkajām rūtiņām novietojam taisnstūri 1×2, kuru nokrāsojam melnu. Tātad iegūta figūra, kas sastāv no viena melna taisnstūra un neiekrāsotas figūras (tādas kā pirms melnā taisnstūra pievienošanas), kuru var sadalīt $n-1$ veidā. Vēl tieši vienu figūras sadalījumu iegūst, ja pirmo taisnstūri izgriež tā, ka tas satur augšējo labā stūra melno rūtiņu un šīs melnās rūtiņas balto blakus rūtiņu (šīs divas rūtiņas nokrāsojam pelēkas). Šādi turpinot, var iegūt figūru, kuru var sadalīt domino figūrās tieši *n* dažādos veidos, kur $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Tātad rūtiņu lapā var uzzīmēt figūru, kura atbilst uzdevuma nosacījumiem visām naturālām *n* vērtībām

A.VP.5. Apzīmēsim tabulas *i*-tās rindiņas un *j*-tā stabiņa krustojumā esošo elementu ar a_{ij}, visu tabulas elementu summu ar *S*, *i*-tās rindiņas elementu summu ar r_i.

Izmantosim nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko:

$$S = r_1 + r_2 + \ldots + r_n \le \sqrt{n\cdot\left(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2\right)} =$$

$$= \sqrt{n\cdot\left((a_{11}+a_{12}+...+a_{1n})^2 + (a_{21}+a_{22}+...+a_{2n})^2 + \ldots + (a_{n1}+a_{n2}+...+a_{nn})^2\right)} =$$

$$= \sqrt{n\cdot\left((a_{11}\cdot a_{11}+a_{11}\cdot a_{12}+...+a_{1n}\cdot a_{1n}) + \ldots + (a_{n1}\cdot a_{n1}+a_{n1}\cdot a_{n2}+...+a_{nn}\cdot a_{nn})\right)} =$$

$$= \sqrt{n\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + \ldots + a_{nj}a_{nk}\right)}.$$

Apzīmēsim pēdējo izteiksmi ar *X*.

Ja $j \ne k$, tad saskaitāmais $a_{ij}a_{ik}$ ir vienāds ar $+1$, ja *j*-tajā un *k*-tajā kolonnā *i*-tās pozīcijas vērtības sakrīt, un ar (-1), ja tās nesakrīt. Tā kā dots, ka pozīciju, kur rūtiņu vērtības sakrīt, ir tikpat, cik pozīciju, kur tās nesakrīt, tad

$$a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + \ldots + a_{nj}a_{nk} = (n/2)\cdot(+1) + (n/2)\cdot(-1) = 0.$$

Ja $j = k$, tad $a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + \ldots + a_{nj}a_{nk} = a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \ldots + a_{nj}^2 = 1+1+\ldots+1 = n$.

Tā kā pavisam ir *n* gadījumi, kad $j = k$, tad $S \le X = \sqrt{n\cdot n\cdot n} = n\sqrt{n}$, kas arī bija jāpierāda.

A.IMO. 52. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.IMO.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka p_A vērtība nevar būt lielāka kā 4.

Tā kā kopa A sastāv no dažādiem naturāliem skaitļiem, varam pieņemt, ka $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

Ievērojam, ka katram indeksu pārim (i, j), kam $1 \le i < j \le 4$, summa $a_i + a_j$ ir S_A dalītājs tad un tikai tad, ja $a_i + a_j$ ir arī $S_A - (a_i + a_j) = a_k + a_\ell$ dalītājs (k un ℓ – pārējie divi indeksi, kas nesakrīt ar i un j).

No 4 indeksiem pavisam var izveidot $C_6^4 = 6$ dažādus pārus. Pierādīsim, ka vismaz divi no tiem neapmierina augstāk minēto nosacījumu.

Apskatām pārus (a_2, a_4) un (a_3, a_4). Tā kā $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ un $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$, tad $a_2 + a_4$ nevar būt $a_1 + a_3$ dalītājs un $a_3 + a_4$ nevar būt $a_1 + a_2$ dalītājs. Tātad S_A nedalās ne ar $a_2 + a_4$, ne ar $a_3 + a_4$. Esam pierādījuši, ka $p_A \le 4$.

Otrkārt, atradīsim visas četru dažādu naturālu skaitļu kopas A, kam $p_A = 4$.

Ja $p_A = 4$, tad, balstoties uz iepriekš izdarītajiem spriedumiem, jābūt, ka

$a_2 + a_3$ dalās ar $a_1 + a_4$;

$a_3 + a_4$ dalās ar $a_1 + a_2$;

$a_2 + a_4$ dalās ar $a_1 + a_3$;

$a_1 + a_4$ dalās ar $a_2 + a_3$;

$a_1 + a_2$ nedalās ar $a_3 + a_4$;

$a_1 + a_3$ nedalās ar $a_2 + a_4$.

Tā kā $a_2 + a_3$ dalās ar $a_1 + a_4$ un $a_1 + a_4$ dalās ar $a_2 + a_3$, tad $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

Tā kā $a_3 + a_4$ dalās ar $a_1 + a_2$ un $a_2 + a_4$ dalās ar $a_1 + a_3$, bet $a_1 + a_2$ nedalās ar $a_3 + a_4$ un $a_1 + a_3$ nedalās ar $a_2 + a_4$, tad eksistē naturāli skaitļi m un n tādi, ka $m(a_1 + a_2) = a_3 + a_4$ un $n(a_1 + a_3) = a_2 + a_4$. ($m > n \ge 2$, jo $a_1 + a_2$ ir mazākā summa, bet $a_3 + a_4$ – lielākā). Varam izveidot vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \\ m(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 \\ n(a_1 + a_3) = a_2 + a_4 \end{cases}. \qquad (*)$$

Saskaitot vienādojumu sistēmas (*) pirmo un trešo vienādojumu, iegūstam, ka

$$n(a_1 + a_3) + a_1 + a_4 = 2a_2 + a_3 + a_4;$$

$$n(a_1 + a_3) = 2a_2 + a_3 - a_1. \qquad (1)$$

Ja $n \ge 3$, tad $n(a_1 + a_3) > 3a_3 = 2a_3 + a_3 > 2a_2 + a_3 - a_1$. Iegūstam pretrunu. Tātad $n = 2$ un no vienādojuma (1) iegūstam, ka

$$2a_1 + 2a_3 = 2a_2 + a_3 - a_1;$$

$$3a_1 + a_3 = 2a_2.$$

Pareizinot iegūto vienādojumu ar 2, iegūstam, ka

$$6a_1 + 2a_3 = 4a_2 \qquad (2)$$

Savukārt, saskaitot sistēmas (*) pirmo un otro vienādojumu, iegūstam, ka

$$ma_1 + ma_2 + a_1 + a_4 = a_2 + 2a_3 + a_4;$$

$$ma_1 + a_1 + ma_2 - a_2 = 2a_3;$$

$$(m+1)a_1 + (m-1)a_2 = 2a_3. \qquad (3)$$

Saskaitot vienādojumus (2) un (3), iegūstam, ka

$$6a_1 + (m+1)a_1 + (m-1)a_2 + 2a_3 = 4a_2 + 2a_3;$$

$$(6+m+1)a_1 + (m-1-4)a_2 = 0;$$

$$(m+7)a_1 = (5-m)a_2. \qquad (4)$$

Tā kā vienādojuma (4) kreisā puse, kā arī labās puses reizinātājs a_2 ir pozitīvi skaitļi, tad $5-m \geq 1$ jeb $m \leq 4$. Tā kā jau iepriekš secinājām, ka $m > n = 2$, tad m ir vai nu 3, vai 4.

Tātad vai nu $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$, vai $\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$.

Ievietojam vērtību $m = 3$ vienādojumā (4):

$$(3+7)a_1 = (5-3)a_2;$$

$$10a_1 = 2a_2;$$

$$a_2 = 5a_1.$$

Vienādojumā (3) ievietojam $a_2 = 5a_1$ un vērtību $m = 3$:

$$(3+1)a_1 + (3-1)5a_1 = 2a_3;$$

$$2a_3 = 4a_1 + 10a_1 = 14a_1;$$

$$a_3 = 7a_1.$$

Vienādojumu sistēmas (*) pirmajā vienādojumā ievietojam $a_2 = 5a_1$ un $a_3 = 7a_1$:

$$a_1 + a_4 = 5a_2 + 7a_3;$$

$$a_4 = 11a_1.$$

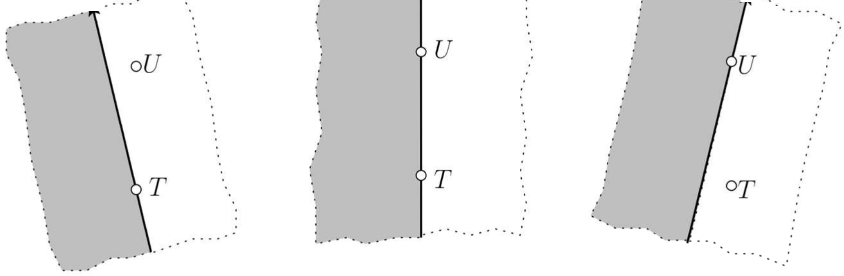
Esam ieguvuši atrisinājumu $(a_1; 5a_1; 7a_1; 11a_1)$.

Līdzīgi, izmantojot vērtību $m = 4$, iegūstam otru atrisinājumu: $(a_1; 11a_1; 19a_1; 29a_1)$.

Esam pierādījuši, ka visas četru dažādu naturālu skaitļu kopas *A*, kam p_A vērtība ir lielākā iespējamā, ir uzrakstāmas formā $\{d; 5d; 7d; 11d\}$ vai $\{d; 11d; 19d; 29d\}$, kur d – naturāls skaitlis.

A.IMO.2. Nosauksim pusplaknes, ko nosaka taisne *t*, par *balto pusplakni* un *pelēko pusplakni*.

Ievērosim šādu sakarību: ja *rotācijas centrs* mainās no kāda punkta *T* uz citu punktu *U*, tad pēc šīs maiņas punkts *T* atrodas tajā pašā pusplaknē, kurā bija punkts *U* pirms *rotācijas centra* maiņas (skat. A45.zīm.). Tādējādi kopas *S* elementu skaits, kas atrodas *pelēkajā pusplaknē*, kā arī elementu skaits, kas atrodas *baltajā pusplaknē*, visa procesa laikā paliek nemainīgs (izņemot tos brīžus, kad uz taisnes vienlaicīgi atrodas divi punkti).



A45. zīm.

Atkarībā no kopas *S* elementu skaita $|S|$, šķirojam divus gadījumus:

- S elementu skaits ir nepāra skaitlis, t. i., $|S| = 2n+1$, kur n – naturāls skaitlis.

  Caur katru punktu P, kas pieder kopai S, var novilkt taisni ℓ tā, ka katrā tās radītajā pusplaknē atrodas tieši n punkti. Lai atrastu šo taisni ℓ, jānovelk patvaļīga orientēta taisne t caur punktu P, kas nesatur nevienu citu kopas S punktu. Šīs taisnes *baltajā pusplaknē* atrodas $n+r$ punkti. Ir iespējami divi gadījumi:
  - ja $r = 0$, tad esam jau atraduši meklēto taisni ℓ;
  - ja $r \neq 0$, tad pakāpeniski griežam taisni t ap punktu P līdz pagrieziena leņķim 180°. Katru reizi, kad taisne šķērso kādu kopas S punktu, šīs kopas punktu, kas atrodas *baltajā pusplaknē*, skaits mainās par 1. Veicot pagriezienu par 180°, *baltajā pusplaknē* atradīsies $n-r$ kopas S punkti (jo taisnes t novietojums ir tāds pats kā sākumā, bet *pelēkā pusplakne* atrodas tur, kur sākumā bija *baltā pusplakne* un otrādi), tāpēc, veicot taisnes t pagriešanu, eksistē tāds taisnes t starpstāvoklis ℓ, kad *baltajā pusplaknē* (un tātad arī *pelēkajā pusplaknē*) ir tieši n punkti. Šis taisnes t starpstāvoklis ℓ arī ir meklētā taisne.

  Pierādīsim, ka *vējdzirnavas* ir periodisks process ar periodu 180° un, veicot taisnes pagriezienu par 180°, katrs kopas punkts ir bijis šīs taisnes *pagrieziena centrs*.

  Patvaļīgi izvēlamies punktu P un taisni ℓ, kas iet caur šo punktu tā, lai katrā tās pusplaknē ir tieši n kopas S punkti. Punkts P ir sākotnējais *pagrieziena centrs* un tas ir vienīgais kopas S punkts, caur kuru tieši šajā virzienā novilkta taisne sadala kopas S punktus divās vienādās daļās (paralēlā pārnese izjauktu šo līdzsvaru, jo tad viena no pusplaknēm papildus ietvertu vismaz punktu P, tātad tā saturētu vismaz $n+1$ punktu). Tā kā kopas S elementu skaits, kas atrodas *pelēkajā pusplaknē*, kā arī elementu skaits, kas atrodas *baltajā pusplaknē*, visa procesa laikā paliek nemainīgs, tad brīdī, kad taisne ir veikusi pagriezienu par 180°, tā atkal ir novietota sākotnējā virzienā, tāpēc satur punktu P. Tā kā *vējdzirnavu* process turpinās bezgalīgi, tad tas ir periodisks

  Tāpat katrs no kopas S punktiem *vējdzirnavu* procesa viena perioda ietvaros vienu reizi ir bijis taisnes ℓ *pagrieziena centrs*, kad taisne, veicot pagriezienu, atradās noteiktajā virzienā. Tātad *vējdzirnavām*, kas sāksies ar kādu no kopas S punktiem P un tam atbilstošo taisni ℓ (kas sadala kopas S punktus divās vienādās daļās), katrs kopas S punkts kalpos par *pagrieziena centru* bezgalīgi daudz reizes.

- Kopas S elementu skaits ir pāra skaitlis, t. i., $|S| = 2n$, kur n – naturāls skaitlis.

  Līdzīgi kā nepāra skaita punktu gadījumā, katram punktam $P \in S$ ir tāda taisne ℓ, kas iet caur punktu P tā, ka taisnes ℓ radītajā *baltajā pusplaknē* ir $n-1$ punkts, bet *pelēkajā pusplaknē* – n punkti.

  Pierādīsim, ka *vējdzirnavas* ir periodisks process ar periodu 360° un, veicot taisnes pagriezienu par 360°, katrs kopas punkts ir bijis šīs taisnes *pagrieziena centrs*.

  Izvēlamies patvaļīgu punktu P un taisni ℓ, kas iet caur šo punktu tā, lai tās *baltajā pusplaknē* atrodas $n-1$ punkts, bet *pelēkajā* – n punkti. Punkts P ir sākotnējais *pagrieziena centrs*.

  Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā paralēlā pārnese izmainītu punktu skaitu abās pusplaknēs, tāpēc tad, kad *vējdzirnavu* taisne ir paralēla taisnei ℓ, šī taisne satur punktu P, t. i., tā sakrīt ar taisni ℓ. Kad tā ir veikusi pagriezienu par 180°, tad tā sadala kopu S divās daļās, kur baltajā pusplaknē atrodas n punkti, bet pelēkajā – $n-1$ punkts. Kad tā ir veikusi pagriezienu par 360°, tad tā sadala kopu S divās daļās, kur baltajā pusplaknē atkal atrodas $n-1$ punkts, bet pelēkajā – n punkti. Pēc dotā *vējdzirnavu* process turpinās bezgalīgi, tāpēc varam secināt, ka tas ir periodisks.

Tā kā katram kopas S punktam ir tāda taisne, kas sadala šo kopu divās daļās, kur *baltajā pusplaknē* atrodas $n-1$ punkts, bet *pelēkajā – n* punkti, tad noteiktajā taisnes virzienā katrs kopas S punkts ir bijis *vējdzirnavu* taisnes pagrieziena centrs.

Tāpat katrs no kopas S punktiem *vējdzirnavu* procesa viena perioda ietvaros divas reizes ir bijis taisnes ℓ *pagrieziena centrs*, kad taisne, veicot pagriezienu, atradās noteiktajā virzienā. Tātad *vējdzirnavām*, kas sāksies ar kādu no kopas S punktiem P un tam atbilstošo taisni ℓ (kas sadala kopas S punktus divās daļās ar $n-1$ punktu *baltajā* un n punktiem – *pelēkajā pusplaknē*), katrs kopas S punkts kalpos par *pagrieziena centru* bezgalīgi daudz reizes.

Esam apskatījuši abus iespējamos gadījumus, tāpēc esam pierādījuši, ka jebkuram kopas S punktam vienmēr var atrast tādu taisni ℓ, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

A.IMO.3. Dotajā nevienādībā ievietojam $y=t-x$ un iegūstam, ka

$$f(x+t-x)\le (t-x)\cdot f(x)+f(f(x));$$

$$f(t)\le t\cdot f(x)-x\cdot f(x)+f(f(x)). \qquad (1)$$

Izvēlamies divus patvaļīgus reālus skaitļus a un b un nevienādībā (1) ievietojam $t=f(a)$ un $x=b$:

$$f(f(a))\le f(a)\cdot f(b)-b\cdot f(b)+f(f(b));$$

$$f(f(a))-f(f(b))\le f(a)f(b)-bf(b). \qquad (2)$$

Līdzīgi nevienādībā (1) ievietojam $t=f(b)$ un $x=a$:

$$f(f(b))\le f(b)\cdot f(a)-a\cdot f(a)+f(f(a));$$

$$f(f(b))-f(f(a))\le f(a)f(b)-af(a). \qquad (3)$$

Saskaitām abas nevienādības (2) un (3):

$$0\le 2f(a)f(b)-af(a)-bf(b);$$

$$2f(a)f(b)\ge af(a)+bf(b). \qquad (4)$$

Nevienādībā (4) ievietojot $b=2f(a)$, bet atstājot $f(b)=f(b)$, iegūstam, ka

$$2f(a)f(b)\ge af(a)+2f(a)f(b)$$

jeb $af(a)\le 0$. Tātad

$$f(a)\ge 0,\text{ ja } a<0. \qquad (*)$$

Pieņemsim, ka $f(x)>0$ visiem reāliem skaitļiem x. Tad, nevienādībā (1) ievietojot tādu skaitli t, kam ir spēkā nevienādība: $t<\dfrac{xf(x)-f(f(x))}{f(x)}$, iegūstam, ka $f(t)<(xf(x)-f(f(x)))-xf(x)+f(f(x))=0$. Esam ieguvuši pretrunu ar secinājumu (*), jo t pieņem arī negatīvas vērtības, tāpēc

$$f(x)\le 0 \text{ visiem reāliem skaitļiem } x. \qquad (**)$$

No secinājumiem (*) un (**) izriet, ka

$$f(x)=0 \text{ visiem } x<0. \qquad (***)$$

Atliek apskatīt gadījumu, kad $x=0$ jeb uzzināt $f(0)$ vērtību. Ievietojot $t=x<0$ nevienādībā (1), iegūstam, ka

$$f(x)\le xf(x)-xf(x)+f(f(x)).$$

No secinājuma (***) izriet, ka $0\le 0-0+f(0)$ jeb $f(0)\ge 0$. Savukārt no secinājuma (**) iegūstam, ka $f(0)\le 0$. Tātad

$$f(0)=0. \qquad (****)$$

No (***) un (****) iegūstam, ka $f(x)=0$ visiem $x \le 0$, kas arī bija jāpierāda.

A.IMO.4. Ar $f(n)$ apzīmējam dažādo virkņu skaitu, kādos iespējams atbilstoši uzdevuma nosacījumiem novietot uz svariem *n* atsvarus.

Ievērojam, ka $f(1)=1$, jo vienu atsvaru atbilstoši uzdevuma nosacījumiem var novietot uz svariem vienā vienīgā veidā: uz kreisā svaru kausa.

Pieņemsim, ka $n \ge 2$ un pierādīsim, ka

$$f(n)=f(n-1)\cdot(2n-1).$$

Ievērojam, ka katram naturālam skaitlim *k* ir spēkā nevienādība:

$$\sum_{i<k} 2^i = 2^0+2^1+2^2+...+2^{k-1} = \frac{2^{k-1}\cdot 2-2^0}{2-1} = 2^k-1<2^k,$$

kur $i=0, 1, 2, ...$, t. i., katrā brīdī lielākais uz svariem uzliktais atsvars noteikti ir uzlikts uz kreisā svaru kausa, bet pārējie var atrasties gan uz labā, gan kreisā svaru kausa; turklāt uz kreisā svaru kausa novietoto atsvaru kopsumma vienmēr būs vismaz par 1 vienību smagāka nekā uz labā svaru kausa novietoto atsvaru kopsumma.

Ja 1 vienību smagais atsvars vēl nav izmantots, tad starpība starp kausu svaru kopsummām ir vismaz 2 (jo $\sum_{i<k} 2^i = 2^k-2<2^k$, ja $i=1, 2, 3, ...$), tātad atsvara ar masu 1 izņemšana no dotā atsvaru komplekta būtiski nemaina atsvaru likšanas procesu uz svariem. Apskatām gadījumu, kad mums ir $n-1$ atsvars ar masām 2, 2^2, ..., 2^{n-1}. Tos var tāpat kā dotos *n* atsvarus novietot uz svariem atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Tā kā atsvaru skaits tagad ir $n-1$, tad tos uz svariem var nolikt $f(n-1)$ veidā.

Tagad apskatīsim atsvaru ar masu 1 vienība. Ja mēs uz svariem to būtu uzlikuši kā pirmo, tad tam noteikti būtu jāatrodas uz kreisā svaru kausa (tātad ir tikai 1 iespēja); ja atsvars ar masu 1 uz svariem netiek likts kā pirmais, to var likt vai nu uz labā, vai uz kreisā svaru kausa, tātad ir vēl $2(n-1)$ iespējas, kā to likt uz svariem (katrā no $n-1$ iespējamajiem likšanas brīžiem var izvēlēties vienu no 2 svaru kausiem). Esam pierādījuši, ka tiešām kopējais dažādo virkņu skaits ir $f(n)=\left(2(n-1)+1\right)f(n-1)=f(n-1)\cdot(2n-1)$.

Ievērojam, ka $2n-1$ ir vienāds ar nepāra naturālajiem skaitļiem $3, 5, 7, 9, ...$ pie naturālajām vērtībām $n=2, 3, 4, 5, ...$. Tā kā $f(1)=1$, kas ir pirmais nepāra naturālais skaitlis, tad varam secināt, ka $f(n)$ ir vienāds ar visu nepāra naturālo skaitļu reizinājumu līdz $2n-1$ (ieskaitot) jeb $f(n)=(2n-1)!!$. Tiešām:

$f(2)=f(1)\cdot(4-1)=1\cdot 3=3!!$;

$f(3)=f(2)\cdot(6-1)=(1\cdot 3)\cdot 5=5!!$;

$f(4)=f(3)\cdot(8-1)=(1\cdot 3\cdot 5)\cdot 7=7!!$;

...

$f(n)=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$.

Piezīme. Atbildi $f(n)=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$ var pierakstīt arī citos veidos, piemēram, $f(n)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}=\dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}=\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

A.IMO.5. Doto apgalvojumu, ka $f(m)-f(n)$ dalās ar $f(m-n)$, var pierakstīt kā

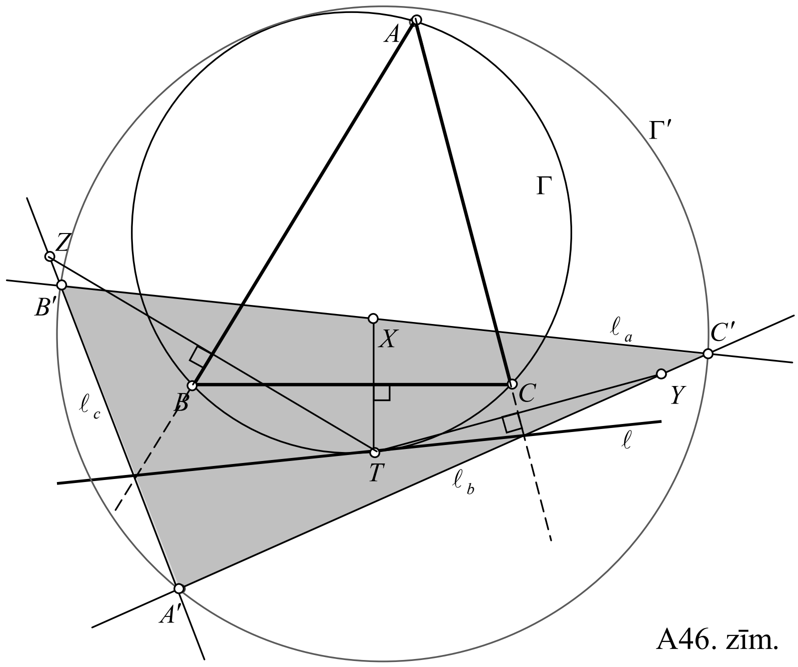
$$\left(f(m)-f(n)\right) \vdots f(m-n). \qquad (1)$$

Pēc dotā sakarība (1) funkcijai f ir spēkā visiem veseliem skaitļiem *m* un *n*.

Pieņemsim, ka x un y ir veseli skaitļi, kuriem $f(x) < f(y)$. Pierādīsim, ka $f(y) \vdots f(x)$.
Sakarībā (1) ievietojot $m = x$ un $n = y$, iegūstam, ka
$$\big(f(x) - f(y)\big) \vdots f(x-y), \qquad (2)$$
no kā seko, ka arī $-\big(f(x) - f(y)\big) = f(y) - f(x) > 0$ dalās ar $f(x-y)$. Tātad
$$f(x-y) \leq f(y) - f(x), \qquad (3)$$
Tā kā funkcija f pieņem tikai naturālas vērtības, tad
$$f(y) - f(x) < f(y) \qquad (4)$$
No nevienādībām (3) un (4) seko, ka $f(x-y) < f(y)$ jeb $-f(y) < -f(x-y)$.
Apzīmējam $d = f(x) - f(x-y)$; tātad
$$-f(x-y) < d < f(x) < f(y). \qquad (5)$$
Sakarībā (1) ievietojot $m = x$ un $n = x - y$, iegūstam, ka $f(x) - f(x-y) = d$ dalās ar $f\big(x-(x-y)\big) = f(y)$. No nevienādības (5) izriet, ka $d = 0$ (jo skaitlis d dalās ar skaitli $f(y)$, kas ir lielāks par pašu d). Tātad $f(x) - f(x-y) = 0$ jeb
$$f(x) = f(x-y).$$
No sakarības (2) iegūstam, ka $f(x) - f(y)$ dalās ar $f(x-y) = f(x)$.
Tā kā starpībā $f(x) - f(y)$ mazināmais $f(x)$ dalās ar $f(x)$, tad arī mazinātājam $f(y)$ jādalās ar $f(x)$. Esam ieguvuši, ka uzdevumā dotās funkcijas vērtība $f(y)$ dalās ar $f(x)$, ja $f(x) < f(y)$.
Ja $f(x) = f(y)$, tad $f(y)$ dalās ar $f(x)$.
Tātad $f(y)$ dalās ar $f(x)$, ja $f(x) < f(y)$ vai $f(x) = f(y)$, kur x un y ir veseli skaitļi.
Esam pierādījuši, ka jebkuriem veseliem skaitļiem m un n tādiem, ka $f(m) \leq f(n)$, skaitlis $f(n)$ dalās ar $f(m)$.

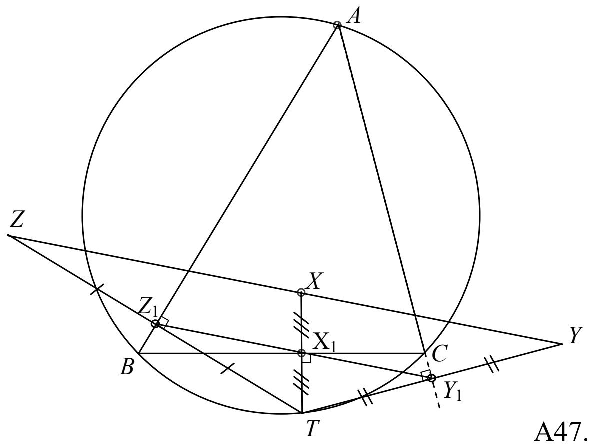
A.IMO.6. Vispirms veicam apzīmējumus (skat. A46. zīm.):

- taisnes ℓ un riņķa līnijas Γ kopīgo punktu apzīmējam ar *T*;
- ar A' apzīmējam taišņu ℓ_b un ℓ_c krustpunktu, ar B' – taišņu ℓ_a un ℓ_c krustpunktu, ar C' – taišņu l_a un l_b krustpunktu;
- ap trijstūri $A'B'C'$ apvilkto riņķa līniju apzīmējam ar Γ';
- ar *X*, *Y* un *Z* apzīmējam punkta *T* simetriskos attēlus attiecīgi pret taisnēm *BC*, *CA* un *AB*.



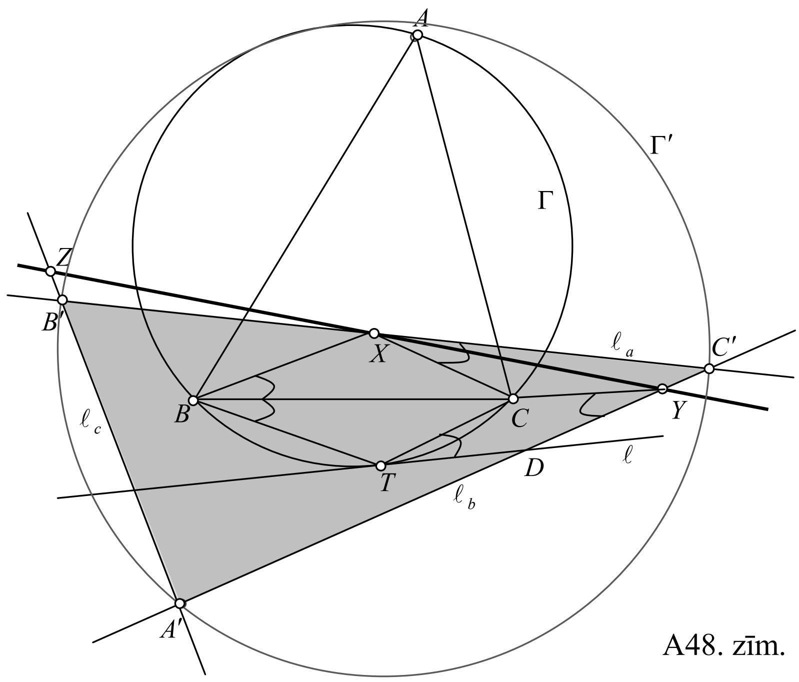
A46. zīm.

No simetrijas pret taisni seko, ka nogriežņi *TZ*, *TX* un *TY* ir perpendikuli, kas vilkti no punkta *T* pret trijstūra *ABC* malām vai to pagarinājumiem. Pagarinām taisni *AC* un taišņu *TZ*, *TX* un *TY* krustpunktus ar attiecīgajām trijstūra *ABC* malām *AB*, *BC* un *AC* aprīmējam attiecīgi ar Z_1, X_1 un Y_1 (skat. A.47. zīm.). Tā kā punkts *T* atrodas uz trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas, tad punkti Z_1, X_1 un Y_1 atrodas uz vienas taisnes – Simsona taisnes. Pierādīsim, ka arī punkti *Z*, *X* un *Y* atrodas uz vienas taisnes.



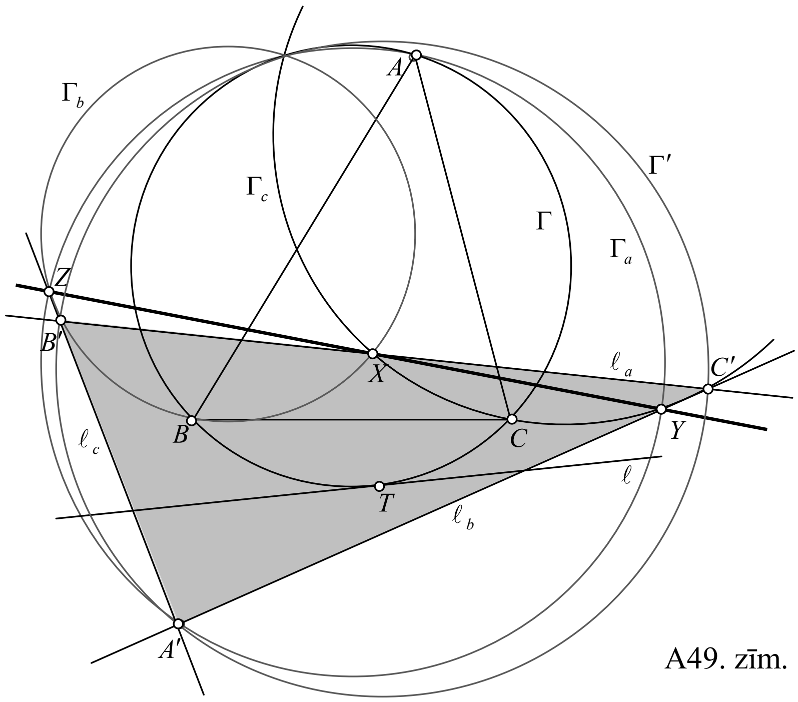
A47. zīm.

Punkti *Z* un *Y* ir punkta *T* simetriskie attēli pret attiecīgajām taisnēm *AB* un *AC*, tātad $TZ_1 = ZZ_1$ un $TY_1 = YY_1$ (skat. A47. zīm.). Varam secināt, ka Z_1Y_1 ir trijstūra *TZY* viduslīnija. Tātad $\Delta TZ_1Y_1 \sim \Delta TZY$ ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$. Tā kā $TX_1 = XX_1$, tad $\frac{TX_1}{TX} = \frac{1}{2}$, no kā seko, ka trijstūra TZ_1Y_1 nogriežņa TX_1 atbilstošais nogrieznis trijstūrī *TZY* ir nogrieznis *TX*. Esam ieguvuši, ka punkts *X* pieder taisnei *ZY* jeb punkti *Z*, *X* un *Y* atrodas uz vienas taisnes. Turklāt $X \in B'C'$, $Y \in C'A'$, $Z \in A'B'$, jo tie ir punkta *T* simetriskie punkti, tātad tie pieder taisnes ℓ attiecīgajām simetriskajām taisnēm. (skat. A.48. zīm.).



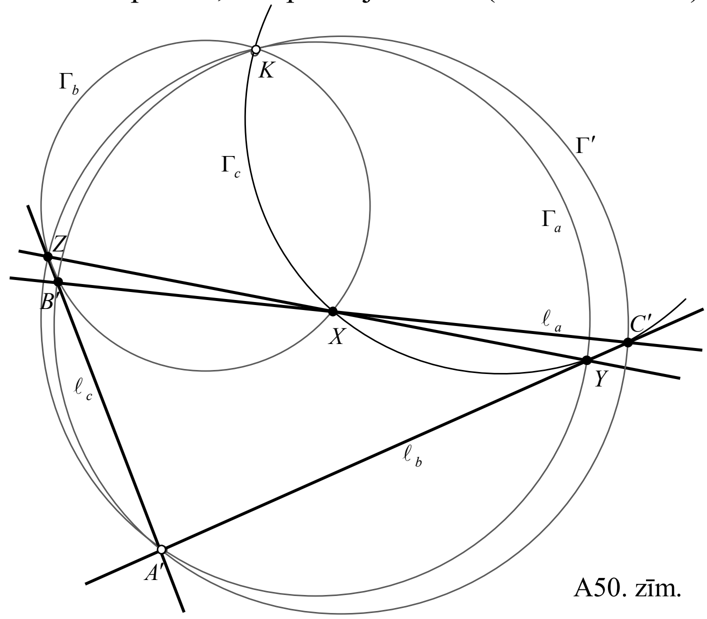
A48. zīm.

Ar D apzīmējam taisnes ℓ un $A'C'$ krustpunktu. Izmantojot simetriju attiecībā pret taisnēm *BC* un *AC*, iegūstam, ka $\angle CXC' = \angle DTC = \angle DYC = \alpha$. (skat. A.48. zīm.).
Izmantojot sakarību starp hordas - pieskares leņķi un ievilkto leņķi, secinām, ka $\angle DTC = \angle TBC = \alpha$. No simetrijas pret *BC* seko, ka $\angle CBX = \angle CBT = \alpha$.
Tā kā $\angle CXC' = \angle DYC$ un $\angle CYC' = 180° - \angle DYC$ (kā blakusleņķi), tad $\angle CXC' + \angle CYC' = 180°$ un punkti *X*, *C*, *Y* un C' atrodas uz vienas riņķa līnijas Γ_c (skat. A49. Zīm.).
Līdzīgi iegūstam, ka $\angle BXB' = \angle BZB'$, tātad caur punktiem *X*, *Z*, *B* un B' var novilkt riņķa līniju Γ_b (skat. A49. zīm.). Līdzīgi arī $\angle A'ZA + \angle A'YA = 180°$, tātad caur punktiem *Y*, *Z*, *A* un A' var novilkt riņķa līniju Γ_a (skat. A49. Zīm.).



A49. zīm.

Izmantojot Mikela teorēmas vispārinājumu četrām taisnēm – $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ un XY – iegūstam, ka riņķa līnijām Γ' (caur punktiem C', A' un B'), Γ_a (caur punktiem Y, A' un Z), Γ_b (caur punktiem X, B' un Z) un Γ_c (caur punktiem C', Y un X) ir kopīgs punkts – Mikela ceturtais punkts, ko apzīmējam ar K (skat. A50. zīm.).

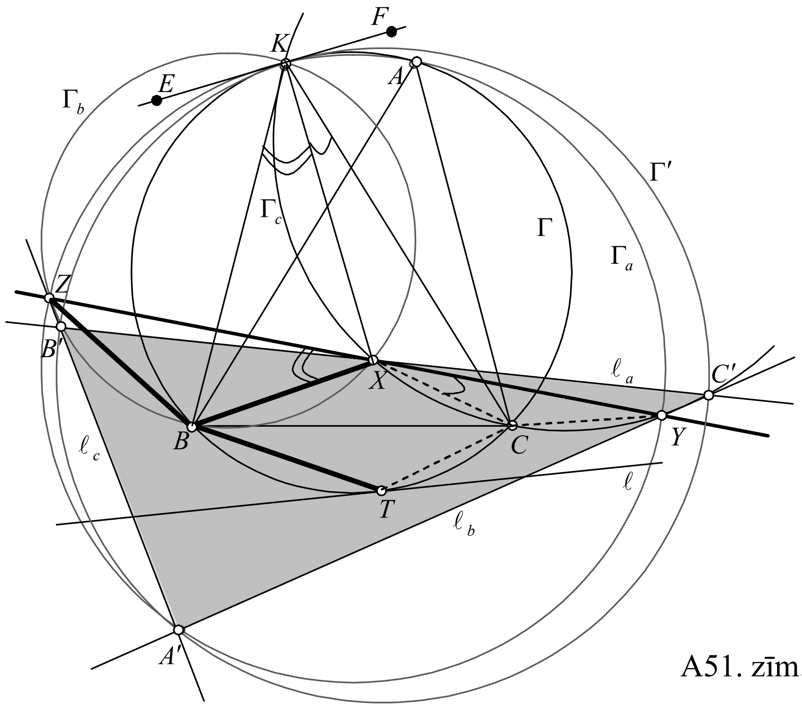


A50. zīm.

Pierādīsim, ka punkts K pieder arī riņķa līnijai Γ un ka šajā punktā riņķa līniju Γ un Γ' pieskares sakrīt.

Simetrijas (pret taisnēm BC un AB) dēļ $XB = TB = ZB$, tātad punkts B ir viduspunkts vienam no lokiem XZ uz riņķa līnijas Γ_b (skat. A51. zīm.) Tāpēc $\angle BKX = \angle ZXB$ (*).

Līdzīgi no vienādībām $XC = TC = YC$ seko, ka $\angle XKC = \angle CXY$ (**) (skat. A51. zīm.).



A51. zīm.

Saskaitām vienādības (*) un (**): $\angle BKX + \angle XKC = \angle CXY + \angle ZXB$;

$$\angle BKC = \angle CXY + \angle ZXB;$$

$$\angle BKC = 180° - \angle BXC.$$

Izmantojot simetriju pret taisni BC, iegūstam, ka $\angle BXC = \angle BTC$, tātad $\angle BKC = 180° - \angle BTC$.

Tātad $\angle BKC + \angle BTC = 180°$, no kā seko, ka punkti C, T, B un K atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tā kā caur trim punktiem var novilkt tieši vienu riņķa līniju un punkti C, T un B pieder riņķa līnijai Γ, tad varam secināt, ka arī punkts K pieder riņķa līnijai Γ.
Novelkam taisni EF, kas ir riņķa līnijas Γ pieskare punktā K (skat. A51. zīm.). Izmantojot sakarību starp pieskares - hordas leņķi un ievilkto leņķi un faktu, ka riņķa līnijas leņķiskais lielums ir $360°$, iegūstam, ka $\angle EKC = 180° - \angle KBC$ (1). Tā kā leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas viena un tā paša loka, ir vienādi, tad $\angle CKC' = \angle CXC'$ (2) un $\angle KBX = \angle KB'X$ (3).
Izmantojot vienādības (1), (2) un (3), iegūstam, ka

$$\angle EKC' = \angle EKC + \angle CKC' \overset{(1),(2)}{=} (180° - \angle KBC) + \angle CXC' =$$
$$= 180° - (\angle KBX + \angle XBC) + \alpha =$$
$$= 180° - \angle KBX - \alpha + \alpha \overset{(3)}{=} 180° - \angle KB'X = 180° - \angle KB'C'.$$

Tā kā $\angle EKC' = 180° - \angle KB'C'$, tad secinām, ka EF ir arī riņķa līnijas Γ' pieskare.
Tā kā riņķa līnijām Γ' un Γ kopīgajā punktā K ir kopīga pieskare EF, varam secināt, ka riņķa līnija Γ' šajā punktā K pieskaras riņķa līnijai Γ, kas arī bija jāpierāda.

A.AB. ATLASE KOMANDU OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

A.AB.A. Algebra

A.AB.A.1. Ja $n=2$, tad dotā nevienādība ir formā: $a^2+1+a^{-2} \geq \frac{3}{2}(a+a^{-1})$. (*)

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pierādīsim, ka šī nevienādība ir pareiza:

$$\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)-1 \geq \frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1 \geq \frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right). \quad (**)$$

Apzīmējam $a+\frac{1}{a}=x$. Lietojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam, ka $x=a+\frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}=2$.

Pārrakstot nevienādību (**), izmantojot apzīmējumu, iegūstam, ka

$$x^2-1 \geq \frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{3}{2}x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 0. \quad (***)$$

Tā kā ieguvām, ka $x \geq 2$, tad abi nevienādības (***) kreisās puses reizinātāji ir nenegatīvi, tātad arī reizinājums ir nenegatīvs. Esam ieguvuši, ka pie vērtības $n=2$, uzdevumā dotā nevienādība $a^2+1+a^{-2} \geq \frac{3}{2}(a+a^{-1})$ ir patiesa.

Lai pierādītu, ka dotā nevienādība ir pareiza visiem $n>2$, pietiek pierādīt nevienādību

$$a^n+1+a^{-n} \geq a^2+1+a^{-2} \text{ jeb } a^n+a^{-n} \geq a^2+a^{-2}.$$

Pareizinot abas nevienādības puses ar $a^n>0$ un veicot pārveidojumus, iegūstam, ka

$$a^{2n}+1 \geq a^{n+2}+a^{n-2};$$

$$a^{2n}-a^{n+2}-a^{n-2}+1 \geq 0;$$

$$a^{n+2}(a^{n-2}-1)-(a^{n-2}-1) \geq 0;$$

$$(a^{n+2}-1)(a^{n-2}-1) \geq 0.$$

Ja $a \geq 1$, tad abi reizinātāji ir nenegatīvi un arī reizinājums ir nenegatīvs; ja $0<a<1$, tad abi reizinātāji ir negatīvi un reizinājums ir pozitīvs. Līdz ar to esam pierādījuši, ka nevienādība $a^n+1+a^{-n} \geq a^2+1+a^{-2}$ ir patiesa.

Izmantojot šo nevienādību un nevienādību (*), iegūstam, ka

$$a^n+1+a^{-n} \geq a^2+1+a^{-2} \geq \frac{3}{2}(a+a^{-1}).$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $a^n+1+a^{-n} \geq \frac{3}{2}(a+a^{-1})$ katram naturālam skaitlim $n \geq 2$.

A.AB.A.2. Pārveidojam doto polinomu formā $x(x^2+a)-2(a+4)$. Ievērojam, ka vērtība $x=2$ ir šī polinoma sakne, jo $2(4+a)-2(a+4)=0$. Izdalām doto polinomu ar polinomu $x-2$:

$$\left(x^3+0x^2+ax-2(a+4)\right):(x-2)=x^2+2x+(a+4).$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3-2x^2\qquad\quad}\\
\quad 2x^2+ax-2(a+4)\\
\quad \underline{2x^2-4x\qquad\quad}\\
\qquad\quad (a+4)x-2(a+4)\\
\qquad\quad \underline{(a+4)x-2(a+4)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Tātad doto polinomu var sadalīt reizinātājos:

$$x^3+ax-2(a+4)=(x-2)(x^2+2x+(a+4)).$$

Tā kā vērtība $x=2$ vienmēr ir dotā polinoma sakne (neatkarīgi no a vērtības), tad iespējami divi gadījumi:

- ja $x=2$ ir vienkārša sakne, tad, lai uzdevumā dotajam polinomam būtu tieši 2 dažādas saknes, polinomam $x^2+2x+(a+4)$ ir jābūt tieši vienai saknei, t. i., diskriminantam jābūt vienādam ar 0. Tā kā $D=4-4(a+4)=-4a-12=0$, tad iegūstam, ka $a=-3$. Dotā polinoma otra sakne ir $x=\dfrac{-2}{2\cdot 1}=-1$;
- ja $x=2$ ir divkārša sakne, tad $x=2$ ir arī polinoma $x^2+2x+(a+4)$ sakne, t. i., $4+4+(a+4)=0$ jeb $a=-12$. Ievietojot iegūto a vērtību, iegūstam polinomu x^2+2x-8, kura saknes ir $x_1=2$ un $x_2=-4$.

Tātad iespējamas 2 dažādas a vērtības:

- $a=-3$; tad uzdevumā dotajam polinomam ir tieši 2 saknes $x_1=2$ un $x_2=-1$;
- $a=-12$; tad uzdevumā dotajam polinomam ir tieši 2 saknes $x_1=2$ un $x\ =-4$.

A.AB.A.3. Pierādīsim, ka izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $\sqrt{n+1}$.

Izmantojot nevienādību $0\le(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ jeb $2ab\le a^2+b^2$, kur $a=\sqrt{n+1}$ un $b=x_i,\ i=1,2,...,n$, iegūstam, ka $2\sqrt{n+1}\cdot x_i\le(\sqrt{n+1})^2+x_i^2$. Pie tam vienādība izpildīsies tikai tad, ja $b=a$ jeb $x_i=\sqrt{n+1}$.

Abas nevienādības puses izdalot ar $x_i^2-1>0$ (to var darīt, jo pēc dotā $x_i>1$), iegūstam, ka visiem $i=1,2,...,n$, ir spēkā nevienādība:

$$\frac{2\sqrt{n+1}\cdot x_i}{x_i^2-1}\le\frac{n+1+x_i^2}{x_i^2-1}=\frac{n+1+1-1+x_i^2}{x_i^2-1}=\frac{n+2}{x_i^2-1}+\frac{x_i^2-1}{x_i^2-1}=\frac{n+2}{x_i^2-1}+1.$$

Summējot visas iegūtās nevienādības $\dfrac{2\sqrt{n+1}\cdot x_i}{x_i^2-1}\le\dfrac{n+2}{x_i^2-1}+1,\quad i=1,2,...,n$, iegūstam, ka

$$2\sqrt{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i^2-1}\le(n+2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2-1}+n=(n+2)\cdot 1+2=2n+2=2(n+1).$$

Izdalot iegūtās nevienādības abas puses ar $2\sqrt{n+1}$, iegūstam, ka $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i^2-1}\le\sqrt{n+1}$ jeb $\dfrac{x_1}{x_1^2-1}+\dfrac{x_2}{x_2^2-1}+...+\dfrac{x_n}{x_n^2-1}\le\sqrt{n+1}$. Esam ieguvuši, ka izteiksmes $\dfrac{x_1}{x_1^2-1}+\dfrac{x_2}{x_2^2-1}+...+\dfrac{x_n}{x_n^2-1}$ vērtība nepārsniedz $\sqrt{n+1}$ un tā tiek sasniegta, ja $x_1=x_2=...=x_n=\sqrt{n+1}$.

A.AB.A.4. Ja $x=0$, tad $f(y)+0=f(f(0))+f(y)$ jeb $f(f(0))=0$.

Ja $x=f(0)$ un $y=0$, tad $f(f(0))+6f(0)=f(f(f(0)))+f(0)$. Ievērojot, ka $f(f(0))=0$, iegūstam, ka $0+6f(0)=f(0)+f(0)$ jeb $f(0)=0$.

Ja $y=0$, tad $f(x)+6x=f(f(x))$. (*)

Izmantojot vienādību (*), doto vienādojumu var pārrakstīt formā

$$f(x+y)=f(f(x))-6x+f(y)=f(x)+6x-6x+f(y)=f(x)+f(y).$$

Esam ieguvuši vienādojumu $f(x+y)=f(x)+f(y)$, kuru sauc par Košī vienādojumu. Visas funkcijas $f:Q\to Q$, kuras apmierina Košī vienādojumu ir formā $f(x)=f(1)x$.

Izmantojot iegūto sakarību, pārveidojam

$$f(f(x))=f(f(1)x)=f(1)f(1)x=(f(1))^2x.$$

Vienādībā (*) ievietojot vērtību $x=1$, iegūstam, ka

$$f(1)+6\cdot 1=f(f(1)).$$

Tā kā $f(f(x))=(f(1))^2x$, tad $f(1)+6=(f(1))^2\cdot 1=(f(1))^2$.

Apzīmējot $f(1)=t$, iegūstam kvadrātvienādojumu $t^2-t-6=0$, kura saknes ir $t=3$ un $t=-2$.

Tātad esam ieguvuši, ka $f(1)=3$ vai $f(1)=-2$.

Pārbaudīsim, vai abas funkcijas formā $f(x)=f(1)x$ apmierina doto vienādojumu:

- izmantojot funkciju $f(x)=3x$, iegūstam: $3(x+y)+6x=f(3x)+3y\Rightarrow$ $\Rightarrow 9x+3y=3\cdot 3x+3y\Rightarrow 9x+3y=9x+3y$. Tātad šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus;
- ja $f(x)=-2x$, tad iegūstam: $-2(x+y)+6x=f(-2x)-2y\Rightarrow$ $\Rightarrow 4x-2y=-2\cdot(-2x)-2y\Rightarrow 4x-2y=4x-2y$. Tātad arī šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad meklējamā funkcija f ir formā $f(x)=3x$ vai $f(x)=-2x$.

A.AB.A.5. Izmantojot formulas $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$ un $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, iegūstam, ka

$$\mathrm{tg}3\alpha=\mathrm{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}+\mathrm{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{tg}\alpha}=\frac{2\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Izdalot iegūtās vienādības $\mathrm{tg}3\alpha=\dfrac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$ abas puses ar $\mathrm{tg}\alpha\neq 0$, iegūstam, ka

$$\frac{\mathrm{tg}3\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3-\mathrm{tg}^2\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Apskatīsim funkciju $f(z)=\dfrac{3-z}{1-3z}$, kur $z=\mathrm{tg}^2\alpha>0$.

Pārveidojam funkciju $f(z)=\dfrac{3-z}{1-3z}=\dfrac{\frac{1}{3}-z+2\frac{2}{3}}{1-3z}=\dfrac{\frac{1}{3}(1-3z)+2\frac{2}{3}}{1-3z}=\dfrac{1}{3}+2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-3z}$.

Ja $z\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$, tad $\dfrac{1}{1-3z}>1$ un $f(z)=\dfrac{1}{3}+2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-3z}>3$.

Ja $z \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, tad $\frac{1}{1-3z} < 0$ un $f(z) = \frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-3z} < \frac{1}{3}$.

Esam pierādījuši, ka funkcija f nepieņem vērtības no intervāla $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Tātad arī uzdevumā dotā vienādojuma labās puses izteiksme nepieņem vērtības no intervāla $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, jo $\frac{\text{tg}201x}{\text{tg}67x} = \frac{\text{tg}(3 \cdot 67x)}{\text{tg}67x}$, kur $\alpha = 67x$ (tātad $\text{tg}\alpha \neq 0$).

Novērtēsim dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtību apgabalu. Izmantojot kosinusa funkcijas ierobežotību, t. i., $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, iegūsim, ka $0 \leq \cos^2 2010x \leq 1$.

Tā kā $\frac{2 + \text{tg}^4 x}{1 + \text{tg}^4 x} = \frac{1 + 1 + \text{tg}^4 x}{1 + \text{tg}^4 x} = 1 + \frac{1}{1 + \text{tg}^4 x}$ un $0 < \frac{1}{1 + \text{tg}^4 x} < 1$ (jo $\text{tg}^4 x > 0$), tad $1 < \frac{2 + \text{tg}^4 x}{1 + \text{tg}^4 x} < 2$. Tātad $\cos^2 2010x + \frac{2 + \text{tg}^4 x}{1 + \text{tg}^4 x} \in (1; 3)$.

Tā kā uzdevumā dotā vienādojuma kreisā puse var pieņemt vērtības tikai no intervāla $(1; 3)$, bet vienādojuma labā puse nepieņem vērtības no intervāla $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, tad vienādojuma abas puses nevar būt vienādas. Esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

A.AB.Ģ. Ģeometrija

A.AB.Ģ.1. Apzīmējam $\angle APB = \alpha$ un $\angle AYB = \beta$ (skat. A52. zīm.). No blakusleņķu īpašības seko, ka $\angle YPA = 180° - \angle APB = 180° - \alpha$.

Izmantojot trijstūra APY leņķus, izsakām $\angle XAY$:

$$\angle XAY = \angle PAY = 180° - \angle YPA - \angle AYP = 180° - (180° - \alpha) - \beta = \alpha - \beta.$$

Tātad arī $\angle XBY = \angle XAY = \alpha - \beta$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *XY*.

Tā kā punkti *A*, *Q*, *B*, *P* atrodas uz riņķa līnijas C_2, tad $\angle APB + \angle AQB = 180°$ jeb $\angle AQB = 180° - \angle APB = 180° - \alpha$.

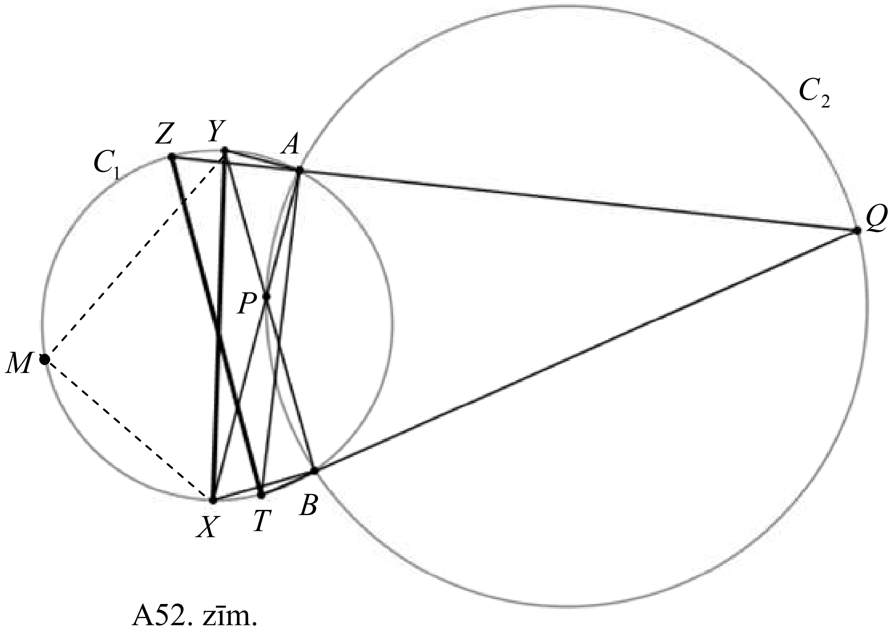
$\angle ATB = \angle AYB = \beta$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *AB*.

Tā kā $\angle ZAT$ ir trijstūra *ATQ* ārējais leņķis, tad

$$\angle ZAT = \angle AQT + \angle QTA = (180° - \alpha) + \beta = 180° - (\alpha - \beta).$$

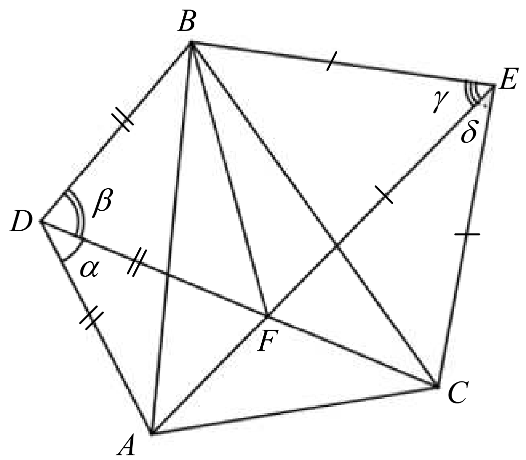
Uz riņķa līnijas C_1 atliekam punktu *M*. Tā kā punkti *M*, *X*, *B*,*Y* atrodas uz riņķa līnijas C_1, tad $\angle XMY = 180° - \angle XBY = 180° - (\alpha - \beta)$.

Esam ieguvuši, ka $\angle ZAT = \angle XMY = 180° - (\alpha - \beta)$, tātad $\cup ZT = \cup XY$. Tā kā uz vienādiem riņķa līnijas lokiem balstās vienādas hordas, tad $XY = ZT$, kas arī bija jāpierāda.



A52. zīm.

A.AB.Ģ.2. Apzīmējam $\angle ADF = \alpha$, $\angle FDB = \beta$, $\angle BEF = \gamma$, $\angle FEC = \delta$ (skat. A53. zīm.).



A53. zīm.

Tā kā vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi, tad

$$\angle AFD = \frac{180° - \angle ADF}{2} = 90° - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\angle DFB = \frac{180° - \angle FDB}{2} = 90° - \frac{1}{2}\beta,$$

$$\angle BFE = \frac{180° - \angle BEF}{2} = 90° - \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\angle EFC = \frac{180° - \angle FED}{2} = 90° - \frac{1}{2}\delta.$$

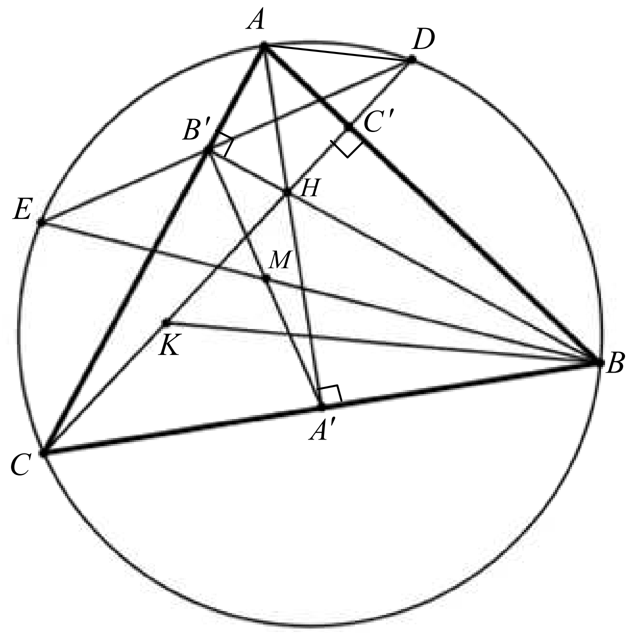
$\angle AFD + \angle DFB + \angle BFE = \angle DFB + \angle BFE + \angle EFC = 180°$ (jo izstiepta leņķa lielums ir $180°$).

Tātad $90° - \frac{1}{2}\alpha + 90° - \frac{1}{2}\beta + 90° - \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\beta + 90° - \frac{1}{2}\gamma + 90° - \frac{1}{2}\delta = 180°$

jeb $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \gamma + \delta = 180°$.

Četrstūra *AEBD* pretējo leņķu summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$, tātad punkti *A*, *E*, *B*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Četrstūra *CEBD* pretējo leņķu summa ir $\beta+\gamma+\delta=180°$, tātad punkti *C*, *E*, *B*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Tā kā caur šiem punktiem *D*, *B*, *E* var novilkt vienu vienīgu riņķa līniju, tad punkti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.Ģ.3. Ar *K* apzīmējam *CH* viduspunktu (skat. A54. zīm.). Tā kā trijstūra augstumi krustojas vienā punktā *H*, tad *CH* arī ir trijstūra augstums. Ar C' apzīmējam *CH* krustpunktu ar *AB*. Ar *M* apzīmējam $A'B'$ krustpunktu ar *BE*. Tā kā punkts *M* ir nogriežņa $A'B'$ iekšējs punkts, tad $\frac{B'M}{A'B'}=x$, kur $x\in(0;1)$.



A54. zīm.

Tā kā pēc augstuma definīcijas $\angle CB'B=\angle CC'B=90°$, tad punkti *C*, B', C' un *B* atrodas uz vienas riņķa līnijas. Izmantojot sakarību par hordu nogriežņu garumu reizinājumu, iegūstam $CH\cdot HC'=BH\cdot HB'$.
Pierādīsim, ka $HD=2\cdot HC'$.
$\Delta C'AD\sim\Delta A'AB$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$”), jo $\angle AC'D=\angle AA'B=90°$ un $\angle ADC'=\angle ABA'$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loka *AC*. Tātad $\angle C'AD=\angle A'AB$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros. Esam ieguvuši, ka AC' ir ΔHAD augstums un bisektrise, tātad AC' ir arī šī trijstūra mediāna, t. i., $HC'=C'D$ jeb $HD=2\cdot HC'$.
Izmantojot to, ka $HD=2\cdot HC'$, $CH\cdot HC'=BH\cdot HB'$ un ka pēc konstrukcijas $CH=2\cdot KH$, iegūstam

$$KH\cdot HD=\frac{1}{2}CH\cdot 2HC'=CH\cdot HC'=BH\cdot HB'.$$

Tātad arī punkti B', *D*, *B* un *K* atrodas uz vienas riņķa līnijas un $\angle B'DK=\angle B'BK$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loka $B'K$. Tā kā $\angle B'DK=\angle EDC=\angle EBC=\angle MBC$ kā ievilktie leņķi, kas baltās uz loka *EC* (pēc dotā punkti *E*, *D*, *B*, *C* atrodas uz vienas riņķa līnijas), tad $\angle B'BK=\angle B'DK=\angle MBC$. Tātad $\angle B'BM=\angle CBK$, jo $\angle B'BM=\angle B'BK-\angle KBM$ un $\angle CBK=\angle MBC-\angle KBM$.
$\Delta B'BM\sim\Delta CBK$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$”), jo $\angle B'BM=\angle CBK$ un $\angle BB'M=\angle HB'A'=\angle HCA'=\angle KCB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to

pašu riņķa līnijas loku HA' (punkti C, B', H, A' atrodas uz vienas riņķa līnijas, jo $\angle CB'H + \angle CA'H = 180°$). Uzrakstām atbilstošo malu attiecību: $\frac{CK}{B'M} = \frac{BC}{BB'}$ jeb

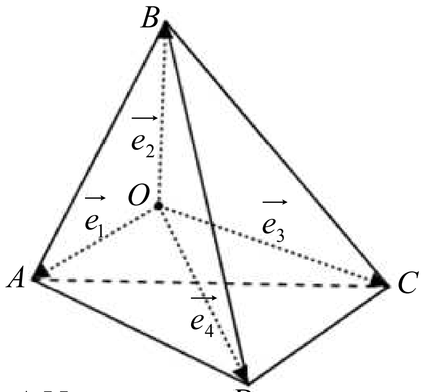
$$\frac{\frac{1}{2}CH}{xA'B'} = \frac{BC}{BB'}. \ (*)$$

$\Delta B'BA' \sim \Delta CBH$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$"), jo $\angle HBA'$ ir kopīgs un jau iepriekš secinājām, ka $\angle BB'A' = \angle HCB$. Uzrakstām atbilstošo malu attiecību: $\frac{BC}{BB'} = \frac{CH}{A'B'}$. (**)

Izmantojot (*) un (**), iegūstam, ka $\frac{\frac{1}{2}CH}{xA'B'} = \frac{CH}{A'B'} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$.

Tātad $B'M = \frac{1}{2}A'B'$ jeb punkts M ir $A'B'$ viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.Ç.4. Apzīmējam $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{e_4}$, kur O ir lodes centrs un A, B, C, D – piramīdas virsotnes (skat. A55. zīm.). Vektori $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$, ir vienības vektori, jo lodes rādiuss ir 1.



A55. zīm.

Izmantojot vienības vektorus, izsakām visas piramīdas šķautnes: $AB = \left|\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right|$, $AD = \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_1}\right|$, $AC = \left|\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right|$, $BC = \left|\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}\right|$, $BD = \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_2}\right|$, $CD = \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_3}\right|$.

Apskatām un pārveidojam summu $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$:

$$\left|\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_4} - \overrightarrow{e_3}\right|^2 =$$

$$= 3\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{e_3}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{e_4}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| - 2\left|\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| - 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| - 2\left|\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_2}\right| - 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_2}\right| - 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_3}\right| =$$

$$= 4\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_3}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_4}\right|^2 -$$

$$-\left(\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_3}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_4}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| + 2\left|\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| + 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_1}\right| + 2\left|\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_2}\right| + 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_2}\right| + 2\left|\overrightarrow{e_4}\cdot\overrightarrow{e_3}\right|\right) =$$

$$= 4 + 4 + 4 + 4 - \left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right|^2 = 16 - \left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right|^2.$$

Pierādīsim, ka $\left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right|^2 \le 4$.

Ja 3 dimensiju telpā izvēlas vairāk nekā 3 vektorus, tad noteikti var izveidot tādu lineāru kombināciju, t. i., atrast skaitļus $a_1, a_2, ..., a_n$ tādus, ka

$a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} + a_4\overrightarrow{e_4} = \vec{0}$. Tā kā vienības vektoru sākumpunkti atrodas piramīdas iekšpusē, tad var atrast skaitļus $a_1, ..., a_4 > 0$, kam izpildās minētā vienādība. Varam pieņemt, ka $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ (abas šīs vienādības puses vienmēr var izdalīt ar $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ un iegūt pozitīvus skaitļus a_1', a_2', a_3', a_4', kuriem izpildās sakarība $a_1' + a_2' + a_3' + a_4' = 1$).

Pierādīsim, ka $a_i \le \frac{1}{2}$, visiem $i = 1, 2, 3, 4$.

Pieņemam pretējo, ka, piemēram, $a_1 > \frac{1}{2}$, tad

$$\frac{1}{2} < a_1 = \left|a_1\overrightarrow{e_1}\right| = \left|-a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3} - a_4\overrightarrow{e_4}\right| \le \left|-a_2\overrightarrow{e_2}\right| + \left|-a_3\overrightarrow{e_3}\right| + \left|-a_4\overrightarrow{e_4}\right| =$$

$$= a_2 + a_3 + a_4 = 1 - a_1 < \frac{1}{2}.$$

Iegūta pretruna, ka $\frac{1}{2} < a_1 < \frac{1}{2}$, tātad $a_i \le \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Izmantojot iegūto novērtējumu un sakarību $a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} + a_4\overrightarrow{e_4} = \vec{0}$, iegūstam

$$\left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right| = \left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4} - 2(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} + a_4\overrightarrow{e_4})\right| =$$

$$= \left|(1-2a_1)\overrightarrow{e_1} + (1-2a_2)\overrightarrow{e_2} + (1-2a_3)\overrightarrow{e_3} + (1-2a_4)\overrightarrow{e_4}\right| \le$$

$$= \left|(1-2a_1)\overrightarrow{e_1}\right| + \left|(1-2a_2)\overrightarrow{e_2}\right| + \left|(1-2a_3)\overrightarrow{e_3}\right| + \left|(1-2a_4)\overrightarrow{e_4}\right| =$$

$$= |1-2a_1| + |1-2a_2| + |1-2a_3| + |1-2a_4| = 1-2a_1 + 1-2a_2 + 1-2a_3 + 1-2a_4 =$$

$$= 4 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4 - 2 = 2.$$

Tad $\left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right|^2 \le 4$ un pie $1 \le i, j \le 4$ iegūstam, ka

$$\sum_{i \ne j,\, i > j} \left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right|^2 = 16 - \left|\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right|^2 \ge 16 - 4 = 12.$$

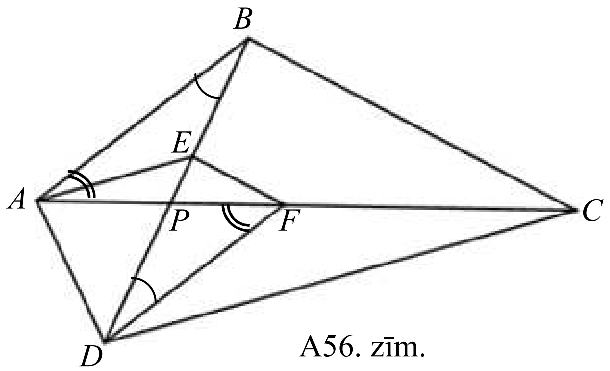
Tā kā $\left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right| < 2$, jo $\overrightarrow{e_i}$ un $\overrightarrow{e_j}$ ir neparalēli vienības vektori, tad

$$\left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right|^2 = \left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right| < 2\left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right|.$$

Tātad $2 \cdot \sum_{i \ne j,\, i > j} \left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right| > \sum_{i \ne j,\, i > j} \left|\overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}\right|^2 \ge 12$, kur $1 \le i, j \le 4$.

Ņemot vērā ieviestos apzīmējumus, iegūstam, ka
$2(AB + AC + AD + BC + BD + CD) > 12$ jeb $AB + AC + AD + BC + BD + CD > 6$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.Ģ.5. Ar P apzīmējam diagonāļu AC un BD krustpunktu (skat. A56. zīm.).



A56. zīm.

Tā kā $DF \| AB$, tad $\angle FDP = \angle ABP$ un $\angle DFP = \angle BAP$ kā iekšējie šķērsleņķi (skat. Axx. zīm.). Tātad $\Delta DPF \sim \Delta BPA$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$”). Uzrakstām atbilstošo malu attiecību:

$$\frac{DP}{BP} = \frac{PF}{PA}. \qquad (*)$$

Līdzīgi iegūstam, ka $\Delta APE \sim \Delta CPD$, jo $AE \| CD$. Uzrakstām atbilstošo malu attiecību:

$$\frac{EP}{DP} = \frac{PA}{PC}. \qquad (**)$$

Sareizinot (*) un (**), iegūstam, ka $\frac{EP}{BP} = \frac{PF}{PC}$.

Esam ieguvuši, ka trijstūriem CPB un FPE ir proporcionālas malas un kopīgs leņķis P. Tātad $\Delta CPB \sim \Delta FPE$ (pēc pazīmes „$m\ell m$”) un $\angle PEF = \angle PBC$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.

Tā kā $\angle PEF$ un $\angle PBC$ ir vienādi kāpšļu leņķi, tad $EF \| BC$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.K. Kombinatorika

A.AB.K.1. Intervālā [100; 200] ir 101 naturāls skaitlis. Pēc Dirihlē principa vismaz trīs no tiem atrodas vienā no 50 kopām. Divu mazāko no šiem skaitļiem summa ir lielāka nekā 200 un tātad lielākā arī nekā trešais skaitlis, kas atrodas kopā. Tātad šiem trīs skaitļiem izpildās trijstūra nevienādība un no tiem var izveidot trijstūri, kura malu garumi ir šie trīs skaitļi.

A.AB.K.2. Aplūkojam grupu A ar lielāko iespējamo cilvēku skaitu m tādu, ka katrā ričurača partijā spēlēja viens cilvēks, kurš nepieder grupai A. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, pietiek pierādīt, ka $m \geq 24$.

Pēc grupas A definīcijas katrai personai p, kura nav grupā A, ir grupa G_p, kurā ir persona p un trīs dalībnieki no grupas A. Atšķirīgiem cilvēkiem p_1 un p_2 atbilstošie trīs dalībnieki no grupas A nevar būt vieni un tie paši. (Pretējā gadījumā rodas pretruna ar doto, ka nekādi 3 spēlētāji nespēlēja kopā vairāk kā vienu partiju.) Tātad spēlētāju, kas neietilpst grupā A, skaits nevar pārsniegt grupas A trīs dalībnieku apakškopu skaitu. Līdz ar to iegūstam, ka

$$2010 - m \leq C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{6}m(m^2 - 3m + 2),$$

$$2010 \leq m + \frac{1}{6}m(m^2 - 3m + 2) = \frac{1}{6}m(m^2 - 3m + 8). \qquad (*)$$

Pierādīsim, ka funkcija $f(m) = \frac{1}{6}m(m^2 - 3m + 8)$ ir augoša, ja $m \geq \frac{3}{2}$.

Funkcija $f_1(m) = \frac{1}{6}m$ ir augoša kā taisne ar pozitīvu virziena koeficientu.

Funkcija $f_2(m) = m^2 - 3m + 8$ ir kvadrātfunkcija, kuras zari vērsti uz augšu, tātad tā ir augoša intervālā $[m_0, +\infty)$, kur $(m_0; f(m_0))$ ir parabolas virsotnes koordinātas, un tās vērtību apgabals ir intervāls $[f(m_0), +\infty)$. Tā kā $m_0 = \frac{3}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$ un $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} + 8 = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$, tad funkcija f_2 ir augoša, ja $m \geq \frac{3}{2}$ un tās vērtības ir pozitīvas. Tātad esam ieguvuši, ka funkcijas f_1 un f_2 ir augošas un pozitīvas, ja $m \geq \frac{3}{2}$. Līdz ar to arī funkcija f ir augoša, ja $m \geq \frac{3}{2}$, kā divu pozitīvu, augošu funkciju reizinājums.

Tā kā $f(23) = 1794 < 2010$ un $f(24) = 2048$, tad, lai izpildītos nevienādība (*), $m \geq 24$. Tātad grupā A ir vismaz 24 spēlētāji tādi, ka nekādi 4 no šiem dalībniekiem šajā festivālā nav kopā spēlējuši ričuraču. Paņemot tieši 24 spēlētājus no grupas A, būs izveidota uzdevumā prasītā grupa.

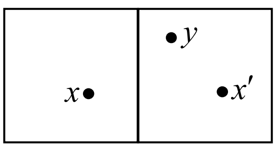
A.AB.K.3. Sadalām kvadrātu 1099×1099 blokos 21×21 ar 22×22 vabolēm katrā blokā. Projicējam katru no blokiem 21×21 uz vienu kopīgu bloku 42×42, palielinot visus attālumus 2 reizes. (Lai visas vaboles atrastos dažādos punktos, varam pieņemt, ka vaboli atzīmējam kā punktu, kas atrodas rūtiņu virsotnes ļoti tuvā apkārtnē.)

Pārbaudīsim, vai šī konstrukcija apmierina uzdevuma prasības.

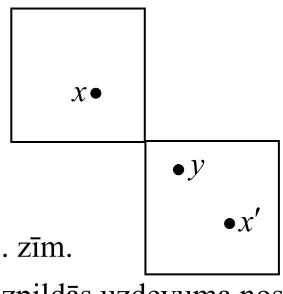
1. Vaboles, kas bija tālu viena no otras (t. i., attālums starp tām pirms lidošanas bija ne mazāks kā 150), tagad atrodas attālumā, kas nepārsniedz 75, jo kvadrātā 42×42 lielākais attālums starp vabolēm ir $42\sqrt{2} \approx 59{,}4$ (attālums starp 2 pretējām kvadrāta virsotnēm). Tātad attālums starp šīm vabolēm ir samazinājies vismaz 2 reizes.

2. Ja attālums starp divām vabolēm bija ne lielāks kā 10, tad iespējami 2 gadījumi:

- Vaboles atradās vienā blokā 21×21. Šajā gadījumā attālums starp tām ir palielinājies tieši 2 reizes, jo projicējām šo bloku uz 2 reizes lielāku bloku.
- Vaboles x un y neatradās vienā blokā 21×21, t. i., vaboles atrodas blakus blokos (skat. A57. zīm.) vai blokos, kas atrodas pa diagonāli (skat. A58. zīm.). Ar x' apzīmējam vaboles x pārvietojumu uz attiecīgā blakus bloka to pašu vietu. Tad $xx' = 21$ (ja vaboles atrodas blakus blokos) vai $xx' = 21\sqrt{2}$ (ja vaboles atrodas blokos pa diagonāli). Tā kā $xy \leq 10$, tad no trijstūra nevienādības seko, ka $yx' > 11 > 10$. Tā kā pēc konstrukcijas x un x' sakritīs un attālumi palielināsies 2 reizes, tad attālums starp vabolēm x un y būs $2\cdot yx' > 20$ jeb attālums būs palielinājies vismaz 2 reizes.



A57. zīm.



A58. zīm.

Tātad vaboles var pārlidot uz jaunām vietām tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi.

A.AB.K.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka var būt ne vairāk kā 12 neizšķirtas partijas.

Apskatīsim situāciju, kad tiek izspēlēts lielākais neizšķirto partiju skaits. Pieņemsim, ka spēlētāju A un B spēle beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Tā kā veidojam situāciju, kad izspēlēts ir lielākais neizšķirto partiju skaits, tad pārējie 5 spēlētāji spēlēja neizšķirti vai nu ar A, vai ar B. Nevar būt, ka kāds no šiem spēlētājiem spēlēja neizšķirti gan ar A, gan ar B, jo tad šie trīs spēlētāji veidotu spēlētāju trijnieku, kurā visas partijas beidzās neizšķirti, bet tā ir pretruna ar doto. Tātad ir ne vairāk kā 6 neizšķirtas partijas, kurās ir piedalījušies spēlētāji A un B.

Apskatām, kā savā starpā var spēlēt atlikušie 5 spēlētāji (bez A un B). Pieņemsim, ka spēlētāju C un D partija beidzās neizšķirti. Tad pārējie 3 spēlētāji spēlēja neizšķirti vai nu ar C , vai ar D. Tātad ir ne vairāk kā 4 neizšķirtas partijas, ja apskata spēles, kurās ir piedalījušies spēlētāji C un D, bet nav piedalījušies spēlētāji A un B.

Starp atlikušajiem trīs spēlētājiem E, F, G var būt ne vairāk kā 2 neizšķirtas partijas (pretējā gadījumā veidojas spēlētāju trijnieks, kurā visas partijas beidzās neizšķirti).

Tātad pavisam var būt ne vairāk kā $6+4+2=12$ neizšķirtas partijas.

Otrkārt, parādām, ka var būt 12 neizšķirtas partijas, ja spēlētāji spēlē, piemēram, šādi (skat. A59. zīm.): 4 spēlētāji (A, B, C, D) ar atlikušajiem 3 spēlētājiem (E, F, G) nospēlē neizšķirti. Pārējās partijas beidzas rezultatīvi. Ar *n* apzīmēts neizšķirts rezultāts, ar burtu – tas spēlētājs, kurš uzvar spēlē. Tātad ir $4 \cdot 3 = 12$ neizšķirtas partijas un tas arī ir lielākais iespējamais neizšķirto partiju skaits.

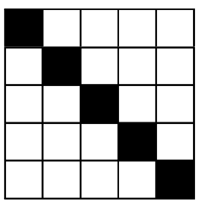
	A	B	C	D	E	F	G
A							
B	**A**						
C	**C**	**B**					
D	**A**	**D**	**D**				
E	***n***	***n***	***n***	***n***			
F	***n***	***n***	***n***	***n***	**E**		
G	***n***	***n***	***n***	***n***	**G**	**F**	

A59. zīm.

A.AB.K.5. Atrisinājumam ir divas daļas.

Pirmkārt, parādām, ka uzdevumā prasītais ir iespējams, ja $m=n$.

Ja rūtiņu lapas $n \times n$ vienas garākās diagonāles rūtiņas sākumā ir melnas (ja $m=n$), tad visas rūtiņas var nokrāsot melnas (skat. A60. zīm., kur $n=5$).



A60. zīm.

Otrkārt, pierādīsim, ka *m* nevar būt mazāks kā *n*. Tā kā rūtiņu lapa $n \times n$ ir sadalīta rūtiņās, kuru malu garumi ir 1, tad ir iegūti $2n(n+1)$ vienības nogriežņi, kas ir šo rūtiņu malas. Nogrieznis, kas atrodas uz rūtiņu lapas malas, ir tieši vienas rūtiņas mala; nogrieznis, kas neatrodas uz rūtiņu lapas malas, ir mala tieši divām rūtiņām. Apskatīsim to nogriežņu skaitu, kuri ir malas tieši vienai melnai rūtiņai (neatkarīgi no tā, vai šie nogriežņi atrodas uz rūtiņu lapas malas, vai nē). Šos nogriežņus sauksim par *robežnogriežņiem*.

Ja baltu rūtiņu, kurai ir tieši k melnas blakus rūtiņas, nokrāso melnu, tad k *robežnogriežņi* pazūd (nogriežņi, kas ir kopīgi pārkrāsotajai rūtiņai un melnajām blakus rūtiņām) un rodas $4-k$ jauni *robežnogriežņi* (pārkrāsotās rūtiņas malas, kas sākumā nebija *robežnogriežņi*). Tā kā pārkrāsot var rūtiņu tikai tad, ja $k \geq 2$ (rūtiņai ir vismaz divas melnas blakus rūtiņas), tad $4-k \leq k$. Tātad *robežnogriežņu* skaits nevar palielināties.

Tā kā sākumā ir tieši m melnas rūtiņas, tad ir ne vairāk kā $4m$ *robežnogriežņi*. Ja visas rūtiņu lapas rūtiņas ir nokrāsotas melnas, tad ir $4n$ *robežnogriežņi*. Tātad $4m \geq 4n$ no kā seko, ka $m \geq n$ jeb melno rūtiņu skaitam m sākumā jābūt ne mazākam kā n.

A.AB.S. Skaitļu teorija

A.AB.S.1. Apskatām, kādus atlikumus dod skaitļi $(1+2+...+n)+2$, ja tos dala ar 9:

- $n=1 \quad \Rightarrow \quad (1)+2 \equiv 3 \pmod 9$;
- $n=2 \quad \Rightarrow \quad (1+2)+2 \equiv 5 \pmod 9$;
- $n=3 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3)+2 \equiv 8 \pmod 9$;
- $n=4 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4)+2 \equiv 3 \pmod 9$;
- $n=5 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4+5)+2 \equiv 8 \pmod 9$;
- $n=6 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4+5+6)+2 \equiv 5 \pmod 9$;
- $n=7 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4+5+6+7)+2 \equiv 3 \pmod 9$;
- $n=8 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4+5+6+7+8)+2 \equiv 2 \pmod 9$;
- $n=9 \quad \Rightarrow \quad (1+2+3+4+5+6+7+8+9)+2 \equiv 2 \pmod 9$;
- $n=10 \quad \Rightarrow \quad (\underbrace{1+2+...+9}_{45}+10)+2 \equiv ((0+1)+2) \pmod 9 \equiv 3 \pmod 9$;
- $n=11 \quad \Rightarrow \quad (\underbrace{1+...+9}_{45}+10+11)+2 \equiv ((0+1+2)+2) \pmod 9 \equiv 5 \pmod 9$.

Šādi turpinot iegūsim, ka atlikumu virkne pēc moduļa 9 ir periodiska ar periodu 3, 5, 8, 3, 8, 5, 3, 2, 2.

Apskatīsim, kādus atlikumus, dalot ar 9, dod naturālu skaitļu kvadrāti:

- $(9k)^2 \equiv 0 \pmod 9$;
- $(9k+1)^2 = 81k^2+18k+1 = 9(9k^2+2k)+1 \equiv 1 \pmod 9$;
- $(9k+2)^2 = 81k^2+36k+4 = 9(9n^2+4k)+4 \equiv 4 \pmod 9$;
- $(9k+3)^2 = 81k^2+54k+9 = 9(9n^2+6k+1) \equiv 0 \pmod 9$;
- $(9k+4)^2 = 81k^2+72k+16 = 9(9n^2+8k)+16 \equiv 7 \pmod 9$;
- $(9k+5)^2 = 81k^2+90k+25 = 9(9n^2+10k)+25 \equiv 7 \pmod 9$;
- $(9k+6)^2 = 81k^2+108k+36 = 9(9n^2+12k+4) \equiv 0 \pmod 9$,
- $(9k+7)^2 = 81k^2+126k+49 = 9(9n^2+14k)+49 \equiv 4 \pmod 9$;
- $(9k+8)^2 = 81k^2+144k+64 = 9(9n^2+16k)+64 \equiv 1 \pmod 9$.

Tātad naturālo skaitļu kvadrāti, dalot tos ar 9, dod atlikumus 0, 1, 4 vai 7.

Tā kā abām atlikumu virknēm nav kopīgu elementu, tad neviens no skaitļiem $(1+2+...+n)+2$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

A.AB.S.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, ievērojam: ja $p(x)=x$ (pirmās pakāpes polinoms), tad $p(\pm 2)=\pm 2$ jeb $|p(\pm 2)|=2^1$, un ja $p(x)=(x+1)(x-1)-2^2$ (otrās pakāpes polinoms), tad $p(\pm 1)=-2^2$ un $p(\pm 3)=2^2$. Tātad *n* var pieņemt vērtības 1 un 2.

Otrkārt, pierādīsim, ka *n* nevar pieņemt vērtības, kas ir atšķirīgas no 1 un 2.

Pieņemsim, ka $n>2$ un eksistē tāds polinoms $p(x)$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tā kā $p(x)$ ir *n*-tās pakāpes polinoms, tad eksistē ne vairāk kā *n* veseli skaitļi *a* tādi, ka $p(a)=2^n$, jo *n*-tās pakāpes polinomam ir ne vairāk kā *n* reālas saknes. Tātad skaitļus $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ var apzīmēt ar $b_1, b_2, ..., b_n$, $c_1, c_2, ..., c_n$ tā, ka $b_1<b_2<...<b_n$ un $p(b_i)=2^n$ un arī $c_1<c_2<...<c_n$ un $p(c_i)=-2^n$.

Tā kā ir jāpierāda, ka eksistē polinoms ar uzdevumā dotajām īpašībām, tad varam veikt grafika transformācijas (paralēlo pārnesi, simetriju pret *x* asi) un, nezaudējot vispārīgumu, pieņemt, ka $0=b_1<c_1$.

Tā kā $p(x)-p(y)$ dalās ar $x-y$ (skat. A.V.10.4.), tad $p(b_i)-p(c_j)=2^n-(-2^n)=2\cdot 2^n=2^{n+1}$ dalās ar $b_i-c_j, i, j\in\{1, 2, ..., n\}$. Tātad c_j var pieņemt $n+2$ dažādas vērtības, t. i., $c_j\in\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n+1}\}$, $j=1, 2, ..., n$.

Iespējami trīs gadījumi: 1) $c_1=1$, 2) $c_1=2$, 3) $c_1=2^2$.

Ņemot vērā, ka katram *i* izteiksmei 2^{n+1} jādalās ar b_i-c_1, aprēķinām iespējamās b_i vērtības katrā gadījumā:

1) $b_i\in\{1+1, 1+2, 1+2^2, ..., 1+2^{n+1}\}$, $i=2, 3, ..., n$;

2) $b_i\in\{2-1, 2+1, 2+2, 2+2^2, ..., 2+2^{n+1}\}$, $i=2, 3, ..., n$;

3) $b_i\in\{4-2, 4-1, 4+1, 4+2, 4+2^2, ..., 4+2^{n+1}\}$, $i=2, 3, ..., n$.

Tā kā $n>2$, tad gadījumā 1) starp skaitļiem $c_1, c_2, ..., c_n$ ir skaitlis 1 un vismaz divi pāra skaitļi. Ja starp b_i ir divi nepāra skaitļi, tad, atņemot no šiem nepāra skaitļiem pāra skaitļus c_2 un c_3, iegūstam četrus nepāra skaitļus, kur vismaz 3 no tiem ir dažādi, tātad vismaz viens no tiem ir atšķirīgs no ± 1. Tā kā 2^{n+1} jādalās ar b_i-c_j, $i, j\in\{1, 2, ..., n\}$, bet 2^{n+1} nedalās ar nepāra skaitļiem, kas ir atšķirīgi no ± 1, tad starp b_i nevar būt divi nepāra skaitļi. Tātad $n<4$ (šajā gadījumā $n=3$, jo $n>2$) un $b_2=2$. Iegūta pretruna, jo 2^{n+1} nedalās ar $2-2^m$, ja $m>2$.

2) un 3) gadījumā visi skaitļi $c_1, c_2, ..., c_n$ ir pāra skaitļi. Tā kā $n>2$ un 2^{n+1} dalās ar b_i-c_j, $i, j\in\{1, 2, ..., n\}$, tad skaitļi $b_1, b_2, ..., b_n$ arī ir pāra skaitļi. Dalot skaitļus $c_1, c_2, ..., c_n$ un $b_1, b_2, ..., b_n$ ar 2, reducējam šos gadījumus attiecīgi uz gadījumiem 1) un 2). Tātad 2) un arī 3) gadījumā nav iespējams atrast prasīto polinomu.

Tātad uzdevumā meklētais naturālais skaitlis *n* ir 1 vai 2.

A.AB.S.3. Pierādīsim, ka Profesors Cipariņš vienmēr var pateikt, kāds bija skaitlis, ko iedomājās skolēns.

Aprēķinām visu sešu skaitļu summu:

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba} &= (100a+10b+c)+(100a+10c+b)+\\ +(100b+10a+c)+(100b+10c+a)&+(100c+10a+b)+(100c+10b+c)=\\ &=222a+222b+222c=222(a+b+c).\end{aligned}$$

Iedomāsimies, ka divi skolēni katrs iedomājas citu trīsciparu skaitli $m = \overline{abc}$ un $n = \overline{def}$ (pieņemsim, ka $n > m$). Pieņemsim, ka viņi var iegūt vienādas pārējo piecu skaitļu summas, t. i.,

$$222(a+b+c) - m = 222(d+e+f) - n .$$

Tā kā $n - m = 222(d+e+f) - 222(a+b+c)$, tad abām vienādības pusēm jādalās ar 222, t. i., starpība $n - m$ dalās ar 222. Tā kā n un m abi ir trīsciparu skaitļi, tad $n - m$ var būt 222, 444, 666 vai 888, t. i., $n - m = 222k$, kur $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Tātad $222k = 222(d+e+f) - 222(a+b+c)$ jeb $k = (d+e+f) - (a+b+c)$.

Paskatīsimies, kas notiek ar trīsciparu skaitļa ciparu summu, ja šim skaitlim pieskaita 222:

- Ja saskaitīšanā nav pārnesuma, tad ciparu summa palielinās par $2+2+2=6$.
- Ja saskaitīšanā ir viens pārnesums, tad ciparu summa izmainās par $6-9=-3$.
- Ja saskaitīšanā ir divi pārnesumi, tad ciparu summa izmainās par $6-9-9=-12$.

Tātad skaitļa ciparu summa vienmēr izmainās par skaitļa 3 daudzkārtni.

Tā kā $n - m$ dalās ar 222, tad $n - m$ dalās arī ar 3 un skaitļa $n - m$ ciparu summa $k = (d+e+f) - (a+b+c)$ arī dalās ar 3, tātad $k = 3$. Tā kā $n - m = 222 \cdot 3$ dalās ar 9, tad arī skaitļa $n - m$ ciparu summai $k = (d+e+f) - (a+b+c)$ jādalās ar 9. Bet tas var būt tikai tad, ja $k = 0$ un $n = m$. Tātad vienīgā iespēja, kad pārējo piecu skaitļu summas ir vienādas, ir tad, kad abu skolēnu iedomātie skaitļi sakrīt. Līdz ar to esam pierādījuši, ka profesors Cipariņš vienmēr var pateikt, kādu skaitli ir iedomājies skolēns.

A.AB.S.4. Tā kā $t! = x! + 2y! + 3z!$ un $x \geq y \geq z > 0$, tad $t > x$ un $(x+1)! \leq t! \leq x! + 2x! + 3x! = 6x!$ jeb $(x+1) \cdot x! \leq 6x!$. Tātad $x + 1 \leq 6$ un $x \leq 5$.

Apskatīsim visas iespējamās x vērtības.

- Ja $x = 1$, tad $x = y = z = 1$, $t! = 6$ un $t = 3$. Tātad $(1, 1, 1, 3)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
- Ja $x = 2$, tad $3! \leq t! \leq 6 \cdot 2! = 2 \cdot 3 \cdot 2! = 2 \cdot 3! < 4!$. Tātad $t = 3$ un iegūstam vienādojumu $6 = 2 + 2y! + 3z!$. Tā kā $2 + 2y! + 3z! \geq 7$, tad šajā gadījumā vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 3$, tad $4! \leq t! \leq 6 \cdot 3! < 5!$. Tātad $t = 4$ un iegūstam vienādojumu $24 = 6 + 2y! + 3z!$. Tā kā vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis, tad arī labajai pusei jābūt pāra skaitlim. Labās puses saskaitāmie 6 un $2y!$ ir pāra skaitļi, tāpēc arī $3z!$ ir jābūt pāra skaitlim. Tātad $2 \leq z \leq 3$. Ja $z = 2$, tad $2y! = 24 - 6 - 3 \cdot 2! = 18 - 6 = 12$, $y! = 6$ un $y = 3$, tātad $(3, 3, 2, 4)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums. Ja $z = 3$, tad $2y! = 24 - 6 - 3 \cdot 3! = 18 - 18 = 0$, šajā gadījumā y nav naturāls skaitlis un dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 4$, tad $5! \leq t! \leq 6 \cdot 4! < 6!$. Tātad $t = 5$ un iegūstam vienādojumu $120 = 24 + 2y! + 3z!$ jeb $96 = 2y! + 3z!$. Ja $z = 4$, tad $2y! = 96 - 3 \cdot 4! = 96 - 72 = 24$, $y! = 12$ un y nav naturāls skaitlis. Ja $z < 4$, tad $2y! + 3z! \leq 2 \cdot 4! + 3 \cdot 3! = 48 + 18 < 96$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
- Ja $x = 5$, tad $6! \leq t! \leq 6 \cdot 5! = 6!$. Tātad $t = 6$. Ja $x = y = z = 5$, tad $5! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 5! = 6 \cdot 5! = 6!$ un $(5, 5, 5, 6)$ ir dotā vienādojuma atrisinājums. Ja $z < 5$, tad $2y! < 6! - 5! - 3 \cdot 5! = 6 \cdot 5! - 4 \cdot 5! = 2 \cdot 5!$, $y! > 5!$ jeb $y > 5$, kas ir pretrunā ar to, ka $x \geq y$. Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma atrisinājumi ir $(1; 1; 1; 3)$, $(3; 3; 2; 4)$ un $(5; 5; 5; 6)$.

A.AB.S.5. Izpētīsim virknes uzvedību vispārīgā gadījumā. Ievērojam, ka pietiek apskatīt virknes uzvedību katram pirmreizinātājam p atsevišķi.

Tā kā $MKD(p^b, p^{b'}) = p^{\max(b, b')}$ un $LKD(p^b, p^{b'}) = p^{\min(b, b')}$, tad $\frac{MKD(p^b, p^{b'})}{LKD(p^b, p^{b'})} = p^{|b-b'|}$. Tāpēc varam apskatīt kāpinātāju virkni (b_n), kura definēta ar formulu $b_n = |b_{n-1} - b_{n-2}|$ visiem $n > 2$ katram pirmreizinātājam atsevišķi. Iespējami 2 gadījumi:

- šīs virknes visi locekļi ir pāra skaitļi, jo divu pāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis;
- šī virkne ir periodiska ar periodu (p, n, n), kur p ir pāra skaitlis un n ir nepāra skaitlis, jo pāra un nepāra skaitļa starpība ir nepāra skaitlis un divu nepāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis.

Tātad locekļi b_n un b_{n+3} abi ir vai nu pāra skaitļi, vai nepāra skaitļi.

Ja $b_n \le b_{n+1}$ ($b_n = x$, $b_{n+1} = x + y$, kur x un y ir veseli nenegatīvi skaitļi), tad iegūstam virkni x, $x + y$, y, x. Tātad $b_n = b_{n+3}$.

Ja $b_n > b_{n+1}$ ($b_n = x + y$, $b_{n+1} = x$, kur x un y ir veseli nenegatīvi skaitļi), tad iegūstam virkni $x + y$, x, y, $|x - y|$. Tā kā $x + y \ge |x - y|$, tad $b_n \ge b_{n+3}$.

Tātad $b_n \ge b_{n+3}$ visiem n.

Ievērojam, ka $119 = 7 \cdot 17$ un $289 = 17^2$.

Apskatām pirmreizinātāju 7. Šajā gadījumā $b_{119} = 1$ un $b_{289} = 0$. Tā kā $290 - 119 = 171$ dalās ar 3 (kas ir perioda garums), tad $b_{290} = 1$, jo $b_n \ge b_{n+3}$ un skaitļi b_n un b_{n+3} ir ar vienu paritāti. Tātad $b_{291} = |b_{289} - b_{290}| = |0 - 1| = 1$. Tā kā $2010 - 291 = 1719$ dalās ar 3, tad $b_{2010} = 1$. Tātad a_{2010} satur pirmreizinātāju 7 pirmajā pakāpē.

Līdzīgi apskatām pirmreizinātāju 17. Šajā gadījumā $b_{119} = 1$ un $b_{289} = 2$. Tad $b_{290} = 1$ un $b_{291} = |b_{289} - b_{290}| = |2 - 1| = 1$, no kā seko, ka $b_{2010} = 1$. Tātad a_{2010} satur pirmreizinātāju 17 pirmajā pakāpē.

Tā kā a_{119} un a_{289} nesatur citus pirmreizinātājus, citiem pirmreizinātājiem $b_{119} = 0$ un $b_{289} = 0$. Tad $b_{290} = 0$ un $b_{291} = |0 - 0| = 0$. Tātad citiem pirmreizinātājiem $b_{2010} = 0$. Esam ieguvuši, ka vienīgā a_{2010} vērtība ir $a_{2010} = 7^1 \cdot 17^1 = 119$.

A.BW. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2010”

A.BW.A. Algebra

A.BW.A.1. Uzdevumā doto vienādojumu kreisā puse ir nenegatīvs lielums, jo reāla skaitļa 2010. pakāpe nevar būt negatīvs skaitlis, tātad arī vienādojumu labajā pusē ir nenegatīvs skaitlis jeb skaitļi a, b, c un d ir nenegatīvi. Pieņemam, ka $d \geq c \geq b \geq a \geq 0$. Tātad

$$b+c+d \geq a+c+d \geq a+b+d \geq a+b+c \geq 0.$$

Tā kā visas izteiksmes, kas ietilpst iegūtajās nevienādības ir nenegatīvas, tad, kāpinot visas izteiksmes 2010. pakāpē, nevienādību zīmes saglabājas:

$$(b+c+d)^{2010} \geq (a+c+d)^{2010} \geq (a+b+d)^{2010} \geq (a+b+c)^{2010},$$

jo funkcija $f(x)=x^{2010}$ ir augoša visiem $x \geq 0$.

No iegūtajām nevienādībām un uzdevumā dotās nevienādību sistēmas iegūstam, ka

$$3a \geq 3b \geq 3c \geq 3d \geq 0;$$

$$a \geq b \geq c \geq d \geq 0.$$

Esam ieguvuši, ka $d \geq c \geq b \geq a \geq 0$ un $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, no kā seko, ka

$$a=b=c=d.$$

Apzīmējam $a=b=c=d=x \Rightarrow (3x)^{2010}=3x \Rightarrow 3x=0$ vai $3x=1$. Tātad $a=b=c=d=0$ vai $a=b=c=d=\dfrac{1}{3}$.

Esam ieguvuši abus skaitļu komplektus: (0; 0; 0; 0) un $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, kas apmierina uzdevumā doto vienādojumu sistēmu.

A.BW.A.2. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\cos^2 x\frac{\cos x}{\sin x}+\sin^2 x\frac{\sin x}{\cos x} \geq 1.$$

Tā kā $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, tad $\sin x>0$ un $\cos x>0$, tāpēc varam iegūtās nevienādības abas puses pareizināt ar $\sin x\cos x>0$:

$$\cos^4 x+\sin^4 x \geq \cos x\sin x.$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x \geq \cos x\sin x;$$

$$(\cos^2 x+\sin^2 x) \geq 2\sin^2 x\cos^2 x+\cos x\sin x;$$

$$1 \geq \sin x\cos x(2\sin x\cos x+1).$$

Pareizinot abas nevienādības puses ar 2 un izmantojot formulu $2\sin x\cos x=\sin 2x$, iegūstam, ka

$$2 \geq \sin 2x(\sin 2x+1) \quad \text{jeb} \quad \sin 2x(\sin 2x+1) \leq 2. \quad (*)$$

Tā kā $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, tad $0<2x<\pi$. Varam secināt, ka $\sin 2x \in (0;1]$ un $\sin 2x+1 \in (1;2]$, tāpēc nevienādība (*) ir patiesa. Tā kā nevienādība (*) tika iegūta no uzdevumā dotās nevienādības, veicot ekvivalentus pārveidojumus, tad arī uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.A.3. Uzdevuma atrisināšanai izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Bāze. Uzdevumā dots, ka $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $|x_1 - x_2| < 1$. Pieņemam, ka $x_1 \le x_2$ (līdzīgi spriedumi seko arī pretējā gadījumā). Tad

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \le 1 + \frac{x_2}{x_1} < 1 + \frac{x_1 + 1}{x_1} = 2 + \frac{1}{x_1} < 2 + 1 = 2 \cdot 2 - 1.$$

Tātad prasītais izpildās pie $n = 2$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemam, ka $S < 2k - 1$, kur

$$S = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1}.$$

Induktīvā pāreja. Veiksim induktīvo pāreju, pierādot, ka $S' < 2(k+1) - 1 = 2k + 1$, kur

$$S' = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{x_1},$$

ja ir spēkā nevienādība $S < 2k - 1$.

Ievērojam, ka skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} > 1$, pie kam $|x_i - x_{i+1}| < 1$ visiem $i = 1, 2, \ldots, k-1, k$.

No S un S' izteiksmēm redzam, ka pietiek pierādīt, ka ir spēkā nevienādība:

$$S' - S = \frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{x_1} - \frac{x_k}{x_1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} \le 2.$$

Apskatām divus gadījumus:

- ja $x_k \le x_{k+1}$, tad, izmantojot nosacījumus $0 \le x_{k+1} - x_k < 1$ un $x_1 > 1$, iegūstam:

$$\frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} \le 1 + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} < 1 + \frac{1}{x_1} < 2;$$

- ja $x_k > x_{k+1}$, tad, izmantojot nosacījumus $0 < x_k - x_{k+1} < 1$ jeb $x_k < x_{k+1} + 1$ un $x_{k+1} > 1$, iegūtam:

$$\frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} < \frac{x_k}{x_{k+1}} < \frac{x_{k+1} + 1}{x_{k+1}} = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} < 1 + 1 = 2.$$

Tātad abos iespējamajos gadījumos izpildās nevienādība $\frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_1} \le 2$, no kā seko: ja izpildās nevienādība $S < 2k - 1$, tad izpildās arī nevienādība $S' < 2k + 1$.

Secinājums. Tā kā uzdevumā dotā nevienādība pie dotajiem nosacījumiem izpildās, ja $k = 2$, tad pēc matemātiskās indukcijas principa nevienādība $S' < 2k - 1$ ir patiesa visiem $k \ge 2$, t. i. uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa visām $n \ge 2$ vērtībām, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.A.4. Izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādīsim, ka $P(i \cdot 67) = 0$ visiem $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Bāze. Izvēloties $x = 0$, iegūstam, ka $-2010 \cdot P(67) = 0$, tātad $P(67) = 0$.

Induktīvais pieņēmums. $P(k \cdot 67) = 0$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka $P((k+1) \cdot 67) = 0$ ir spēkā, ja ir spēkā vienādība $P(k \cdot 67) = 0$.

Uzdevumā dotajā vienādībā ievietojot $x = k \cdot 67$, iegūstam, ka

$$(k \cdot 67 - 2010)P((k \cdot 67 + 67) = k \cdot 67 P(k \cdot 67);$$

$$(k \cdot 67 - 2010)P((k+1) \cdot 67) = 0.$$

Ja $k = 1, 2, \ldots, 29$, tad izteiksmes $k \cdot 67 - 2010$ vērtība nav vienāda ar 0, jo $k \cdot 67 < 2010$. Varam secināt, ka $P((k+1) \cdot 67) = 0$, ja $k = 1, 2, \ldots, 29$.

Secinājums. Tā kā induktīvā pāreja izpildās līdz $k = 29$, un $P(1 \cdot 67) = 0$, pēc matemātiskās indukcijas principa varam spriest, ka $P(i \cdot 67) = 0$ visiem $i = 1, 2, ..., 30$.

Tā kā $x = i \cdot 67$ ir polinoma $P(x)$ sakne, tad $P(x)$ satur reizinātāju $(x - i \cdot 67)$, tāpēc

$$P(x) \equiv (x-67)(x-2\cdot 67)...(x-30\cdot 67)Q(x),$$

kur $Q(x)$ ir cits polinoms.

Ievietojot iegūto izteiksmi uzdevumā dotajā vienādojumā, iegūstam, ka

$$(x-2010)\cdot(x-67)...(x-29\cdot 67)Q(x+67) = x(x-67)...(x-30\cdot 67)Q(x);$$

$$(x-30\cdot 67)\cdot(x-67)...(x-29\cdot 67)Q(x+67) - x(x-67)...(x-30\cdot 67)Q(x) = 0;$$

$$(x-67)(x-2\cdot 67)...(x-30\cdot 67)\big(Q(x+67)-Q(x)\big) = 0. \qquad (*)$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem vienādībai (*) ir jāizpildās visiem veseliem skaitļiem x. Tā kā ir tikai 30 x vērtība, pie kuras kāds no pirmajiem 30 vienādības (*) kreisās puses izteiksmes reizinātājiem ir vienāds ar 0, tad pie pārējām veselām x vērtībām reizinātāja $Q(x+67)-Q(x)$ vērtībai ir jābūt vienādai ar 0. Tātad polinomam $Q(x+67)-Q(x)$ ir bezgalīgi daudz saknes. Tātad

$$Q(x+67)-Q(x) \equiv 0. \qquad (**)$$

Vienādojumā (**) ievietojot vērtību $x = 0$, iegūstam, ka $Q(67)-Q(0) = 0$.

Ņemam $c = Q(0)$, tātad $Q(67) = c$.

Vienādojumā (**) ievietojam $x = 67$. Tad $Q(2\cdot 67)-Q(67) = 0$ jeb $Q(2\cdot 67) = c$. Līdzīgi, izvēloties vērtības $x = k\cdot 67$, kur $k = 3; 4; ...$, iegūstam, ka $Q(k\cdot 67) = c$ visiem veseliem skaitļiem k. Tātad polinomam $Q(x)-c$ ir bezgalīgi daudz saknes, no kā seko, ka $Q(x) \equiv c$.

Esam ieguvuši, ka $P(x) = (x-67)(x-2\cdot 67)...(x-30\cdot 67)c$, kur c – reāls skaitlis. Veicam pārbaudi, ievietojot iegūto polinoma $P(x)$ izteiksmi dotajā vienādībā:

$$(x-2010)x(x-67)...(x-29\cdot 67)c = x(x-67)(x-2\cdot 67)...(x-30\cdot 67)c.$$

Redzam, ka abās vienādības pusēs atšķiras tikai reizinātāju secība. Tātad visi uzdevumā prasītie polinomi ir formā $P(x) = (x-67)(x-2\cdot 67)...(x-30\cdot 67)c$, kur c – reāls skaitlis.

A.BW.A.5. Ievietojot uzdevumā dotajā vienādojumā $x = 0$, iegūstam, ka

$$f(0)+f(0) = f(0)f(y)+yf(0)+0 \text{ jeb } f(0)f(y) = (2-y)f(0).$$

- Ja $f(0) \neq 0$, tad $f(y) = 2-y$ un tas ir viens no uzdevuma atrisinājumiem. Tiešām, $f(x^2)+f(xy) = 2-x^2+2-xy = 4-x^2-xy$ un arī
$$f(x)f(y)+yf(x)+xf(x+y) = (2-x)(2-y)+y(2-x)+x(2-x-y) =$$
$$= 4-2y-2x+xy+2y-xy+2x-x^2-xy = 4-x^2-xy.$$
- Ja $f(0) = 0$, tad, ievietojot uzdevumā dotajā vienādojumā $y = 0$, iegūstam, ka
$$f(x^2)+f(0) = f(x)f(0)+xf(x);$$
$$f(x^2) = xf(x). \qquad (*)$$
Tātad no uzdevumā dotā vienādojuma varam izteikt
$$xf(x) = -f(xy)+f(x)f(y)+yf(x)+xf(x+y).$$
Apmainot x un y vietām, iegūstam, ka
$$yf(y) = -f(xy)+f(x)f(y)+xf(y)+yf(x+y).$$
Atņemot vienu vienādojumu no otra, iegūstam, ka
$$xf(x)-yf(y) = yf(x)-xf(y)+(x-y)f(x+y);$$
$$xf(x)-yf(y)-yf(x)+xf(y) = (x-y)f(x+y);$$
$$(x-y)\big(f(x)+f(y)\big) = (x-y)f(x+y).$$

Ja $x \neq y$, tad varam izdalīt abas vienādojuma puses ar $x - y \neq 0$:

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Ja $x = 0$, tad nerodas pretruna ar pieņēmumu, ka $f(0) = 0$, jo

$$f(0) + f(y) = f(0+y);$$
$$f(y) = f(y).$$

Ja $x \neq y \neq 0$, tad:

$$f(2x) = f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{5x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{2x}{3}\right) + f(x) = f(x) + f(x) = 2f(x). \quad (**)$$

Ievietojam $y = x$ uzdevumā dotajā vienādībā:

$$f(x^2) + f(x^2) = f(x)f(x) + xf(x) + xf(x+x);$$
$$2f(x^2) = (f(x) + x)f(x) + xf(2x).$$

Izmantojot vienādības (*) un (**), iegūstam, ka

$$2xf(x) = (f(x) + x)f(x) + x \cdot 2f(x);$$
$$0 = f(x)\big(f(x) + x\big).$$

Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $f(x) = 0$, tad $f(x) + f(y) = f(x+y) = 0$.
  Secinām, ka $f(x) = 0$ tad un tikai tad, ja $f(y) = 0$ pie $x, y \neq 0$. No pieņēmuma, ka $f(0) = 0$, iegūstam, ka $f(x) = 0$ visiem *x*.
  Pārliecināmies, ka funkcija $f(x) = 0$ der par uzdevumā dotā vienādojuma atrisinājumu:
  $$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y);$$
  $$0 + 0 = 0 \cdot 0 + y \cdot 0 + x \cdot 0;$$
  $$0 = 0;$$
- ja $f(x) = -x$, tad $f(x) + f(y) = f(x+y) = -(x+y)$.
  Secinām, ka $f(x) = -x$ tad un tikai tad, ja $f(y) = -y$ pie $x, y \neq 0$. No pieņēmuma, ka $f(0) = 0$, iegūstam, ka $f(x) = -x$ visiem *x*.
  Pārliecināmies, ka funkcija $f(x) = -x$ der par uzdevumā dotā vienādojuma atrisinājumu:
  $$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y);$$
  $$-x^2 - xy = -x(-y) + y(-x) + x(-x-y);$$
  $$-x^2 - xy = xy - xy - x^2 - xy;$$
  $$-x^2 - xy = -x^2 - xy.$$

Esam ieguvuši, ka uzdevumā dotajam funkcionālvienādojumam ir trīs atrisinājumi: $f(y) = 2 - y$, $f(x) = 0$ un $f(x) = -x$.

Piezīme. Var pierādīt, ka funkcionālvienādojuma $f(x) + f(y) = f(x+y)$ atrisinājums ir formā $f(x) = Cx$, kur $C \in R$.

A.BW.K. Kombinatorika

A.BW.K.1. Ieviesīsim Dekarta koordinātu sistēmu, kur galvenās diagonāles rūtiņas ir ar koordinātām $(k;\, k)$, kur $k = 1, ..., n$. Ar $(k;\, f(k))$ apzīmēsim k-tā torņa koordinātas.

Ievērojam, ka katras krāsas visām rūtiņām abu koordinātu starpības moduļi ir vienādi un dažādu krāsu rūtiņām tie ir atšķirīgi. Tā kā katrs tornis stāv uz citas krāsas lauciņa, tad

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k)-k)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Tā kā torņi viens otru neapdraud, tad tie katrs atrodas citā rindā un citā kolonnā jeb

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k))^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tā kā $\sum_{k=1}^{n}(f(k)-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left((f(k))^2 - 2kf(k) + k^2\right)$, tad iegūstam, ka

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(f(k))^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(f(k)-k)^2}{2} = \frac{2n(n+1)(2n+1) - n(n-1)(2n-1)}{12} =$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - n(n-1)(2n-1)}{12} = \frac{n(4n^2+6n+2) - n(2n^2-3n+1)}{12} =$$

$$= \frac{n(2n^2+9n+1)}{12}.$$

Tā kā $\sum_{k=1}^{n} kf(k)$ ir jābūt veselam skaitlim, jo k un $f(k)$ – veseli, tad arī $\frac{n(2n^2+9n+1)}{12}$ ir jābūt veselam skaitlim, t. i., $n(2n^2+9n+1) = 2n^3+9n^2+n$ jādalās ar $12 = 2\cdot 2\cdot 3$.

Izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādīsim, ka $2n^3+9n^2+n$ dalās ar 3 visām n vērtībām.

Bāze. Ja $n=1$, tad $2\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 + 1 = 12$ dalās ar 3.

Induktīvais pieņēmums. $2k^3+9k^2+k$ dalās ar 3.

Induktīvā pāreja. $2(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + (k+1) =$

$$= 2(k^3+3k^2+3k+1) + 9(k^2+2k+1) + k + 1 =$$
$$= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 9k^2 + 18k + 9 + k + 1 =$$
$$= 2k^3 + 15k^2 + 25k + 12 =$$
$$= (2k^3+9k^2+k) + (6k^2+24k+12) =$$
$$= (2k^3+9k^2+k) + 3(2k^2+8k+4).$$

Pirmās iekavas izteiksmes $2k^3+9k^2+k$ vērtība pēc induktīvā pieņēmuma dalās ar 3, otrs saskaitāmais arī dalās ar 3, jo viens no tā reizinātājiem ir 3, tātad $2(k+1)^3+9(k+1)^2+(k+1)$ dalās ar 3.

Secinājums. Pēc matemātiskās indukcijas principa izteiksmes $2n^3+9n^2+n$ vērtība dalās ar 3 visām naturālām n vērtībām.

Apskatām, kādām n vērtībām $n(2n^2+9n+1) = 2n^3+9n^2+n$ dalās ar $2\cdot 2 = 4$:

- ja $n \equiv 0 \pmod 4$ jeb $n = 4k$, tad $4k(32k^2+36k+1)$ dalās ar 4;
- ja $n \equiv 1 \pmod 4$ jeb $n = 4k+1$, tad $(4k+1)\left(2(4k+1)^2 + 9(4k+1) + 1\right) =$

$$= (4k+1)\left((32k^2+16k+2) + 36k + 9 + 1\right) =$$

$$= (4k+1)(32k^2+52k+12) =$$
$$= (4k+1)(8k^2+13k+4)\cdot 4$$

dalās ar 4.

- ja $n \equiv 2 \pmod 4$ jeb $n = 4k+2$, tad $(4k+2)\left(2(4k+2)^2+9(4k+2)+1\right)=$
$$= 2\cdot(2k+1)\left((32k^2+32k+8)+36k+18+1\right)=$$
$$= 2\cdot(2k+1)(32k^2+68k+27).$$
Katra no iekavās esošo izteiksmju vērtībām ir nepāra skaitlis, tāpēc to vērtība nesatur pirmreizinātāju 2. Tātad šajā gadījumā $n(2n^2+9n+1)$ nedalās ar 4.
- ja $n \equiv 3 \pmod 4$ jeb $n = 4k+3$, tad $(4k+3)\left(2(4k+3)^2+9(4k+3)+1\right)=$
$$= (4k+3)\left((32k^2+48k+18)+36k+27+1\right)=$$
$$= (4k+1)(32k^2+84k+46) =$$
$$= (4k+1)(16k^2+42k+23)\cdot 2.$$
Katra no iekavās esošo izteiksmju vērtībām ir nepāra skaitlis, tāpēc to vērtība nesatur pirmreizinātāju 2. Tātad šajā gadījumā $n(2n^2+9n+1)$ nedalās ar 4.

Esam pārliecinājušies, ka $\sum_{k=1}^{n} kf(k) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{12}$ ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja $n \equiv 0 \pmod 4$ vai $n \equiv 1 \pmod 4$, tātad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

A.BW.K.2. Apzīmējam galvaspilsētu ar C un pārējās pilsētas ar $C_1, C_2, ..., C_n$. Ar $d(x;y)$ apzīmējam cenu reisam starp pilsētām x un y (pēc dotā $d(x;y) = d(y;x)$), bet ar σ apzīmējam cenu slēgtam maršrutam, kas iet caur katru pilsētu tieši vienu reizi.

Apskatīsim slēgtu maršrutu, kas iet caur katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, tieši vienu reizi. Ar s apzīmējam šī maršruta cenu. Pieņemam, ka C_i un C_j divas viena otrai sekojošas pilsētas šajā maršrutā.

Aizvietosim lidojumu $C_i \to C_j$ ar diviem citiem lidojumiem: no C_i uz galvaspilsētu un no galvaspilsētas uz C_j. Mēs iegūstam slēgtu maršrutu, kas iet caur visām pilsētām, ar cenu σ. Tātad $\sigma = s + d(C_i;C) + d(C;C_j) - d(C_i;C_j)$ jeb
$$s = \sigma - \left(d(C_i;C) + d(C;C_j) - d(C_i;C_j)\right).$$
Lai būtu pierādīts uzdevumā prasītais, pietiek pierādīt, ka vērtība $\alpha(i;j) = d(C;C_i) + d(C;C_j) - d(C_i;C_j)$ ir vienāda visām divu elementu apakškopām $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Sākumā pierādīsim, ka $\alpha(i;j) = \alpha(i;k)$ jeb
$$d(C_i;C) + d(C;C_j) - d(C_i;C_j) = d(C_i;C) + d(C;C_k) - d(C_i;C_k)$$
visiem atšķirīgiem *i*, *j*, *k*. Šī vienādība ir ekvivalenta ar vienādību
$$d(C;C_j) + d(C_i;C) + d(C_i;C_k) = d(C_i;C_j) + d(C_i;C) + d(C;C_k),$$
kas ir patiesa, jo varam apskatīt slēgtus maršrutus, kas iet no pilsētas C_k uz pilsētu C_j caur visām citām pilsētām, izņemot C un C_i, tieši vienu reizi, un papildināt šo maršrutu, pievienojot maršrutam pilsētas C un C_i, divos dažādos veidos: $C_j \to C \to C_i \to C_k$ un $C_j \to C_i \to C \to C_k$. Tā kā maršrutiem, kas iet caur visām pilsētām tieši vienu reizi cena ir vienāda, tad cena par pievienotajiem maršrutiem abos gadījumos būs vienāda.

Esam pierādījuši, ka vērtība $\alpha(i;\, j)$ sakrīt visām 2-elementu kopām, kurām ir viens kopīgs elements, bet tad $\alpha(i; j) = \alpha(i;k) = \alpha(k;l)$ visiem *i*, *j*, *k*, *l* kur $i \neq j$, $k \neq l$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.K.3. Apzīmējam doto 30 kora dalībnieku grupu ar *S*. Apskatām visas tādas kopas *S* apakškopas, kurās neviens dalībnieks nav saņēmis cepuri no kāda cita šīs apakškopas dalībnieka. Apakškopu, kurai ir vislielākais elementu skaits apzīmējam ar *T*. Tātad mums jāpierāda, ka $|T| \geq 10$.

Ar $U \subset S$ apzīmējam kopu, kas sastāv no visiem dalībniekiem, kas saņēmuši cepuri no dalībnieka, kas pieder kopai *T*. (neviens no kopas *U* dalībniekiem nepieder kopai *T*, jo ir saņēmis cepuri no kopas *T* dalībnieka). Tā kā dalībnieki no kopas *U* nav saņēmuši cepuri no kāda cita šīs kopas *U* dalībnieka (jo visi ir saņēmuši cepuri no kāda kopas *T* dalībnieka), bet *T* ir lielākā šāda veida kopa, tad $|U| \leq |T|$.

Apskatām tos kora dalībniekus *x*, kur $x \in S \setminus (T \cup U)$. Tā kā $x \notin U$, neviens dalībnieks no kopas *T* neuzdāvināja cepuri dalībniekam *x*. Tātad neviens dalībnieks no kopas *T* neuzdāvināja cepuri dalībniekam no kopas $T \cup \{x\}$. Bet tā kā *T* ir maksimālā dalībnieku kopa, kurā neviens dalībnieks nav saņēmis cepuri no kāda cita šīs kopas dalībnieka, tad kāds dalībnieks no kopas $T \cup \{x\}$ ir uzdāvinājis cepuri dalībniekam no šīs kopas. Tas nozīmē, ka *x* uzdāvināja cepuri dalībniekam no kopas *T*. Esam ieguvuši, ka visi dalībnieki no kopas $S \setminus (T \cup U)$ uzdāvināja savas cepures dalībniekiem no kopas *T*. Tātad arī kopa $S \setminus (T \cup U)$ sastāv no dalībniekiem, kas nav saņēmuši cepuri no kāda cita šīs kopas dalībnieka. Tā kā *T* ir vislielākā šāda veida apakškopa, tad $|S \setminus (T \cup U)| \leq |T|$.

Kopām *T* un *U* nav kopīgu elementu, tāpēc

$$|T| \geq |S \setminus (T \cup U)| = |S| - |T| - |U| \geq |S| - 2|T|,$$

no kā seko, ka $|T| \geq \frac{1}{3}|S| = 10$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.K.4. Ar *r* apzīmējam atlikušo īpašo gājienu skaitu konkrētajā pozīcijā (spēles sākumā $r = 10$ un spēles gaitā *r* nepalielinās, t. i., samazinās vai nemainās).

Pamatosim to, ka uzvarēs tas spēlētājs, pēc kura gājiena atlikušo sērkociņu skaits ir izsakāms kā $6n + r$, kur $n > r$, vai 7*n*, kur $n \leq r$ (ja $n = r$, tad $6n + r = 7n$).

Ja sērkociņu skaits apmierina šos nosacījumus, sauksim to par „labu". Pieņemsim, ka kādā brīdī kaudzē ir „labs" skaits sērkociņu.

Apskatīsim, kas notiek divos viens otram pēc kārtas sekojošos gājienos. Par *pirmo* sauksim to spēlētāju, kuram šajā situācijā jāizdara pirmais no abiem gājieniem. Ir iespējami divi gadījumi.

- Pirms gājiena $n > r$;
  - ja *pirmais* spēlētājs paņem $k = 1, 2, ..., 5$ sērkociņus (tādējādi *r* pēc šī gājiena nav mainījies), tad *otrais* spēlētājs paņem $6 - k$ sērkociņus. Tātad spēlētāji kopā ir paņēmuši 6 sērkociņus un kaudzē paliek $6n + r - 6 = 6(n-1) + r$ sērkociņi. Tā kā $n > r$, tad $n - 1 > r$ vai $n - 1 = r$, tātad joprojām paliek „labs" skaits sērkociņu.
  - Ja *pirmais* spēlētājs paņem 6 sērkociņus, tad *r* samazinās par 1; *otrais* spēlētājs paņem 1 sērkociņu. Pēc šī gājiena kaudzē paliek $6n + r - 6 - 1 = 6(n-1) + (r-1)$ sērkociņi. Tā kā $n > r$, tad $n - 1 > r - 1$ un atlikušo sērkociņu skaits ir „labs".
- Pirms gājiena $n \leq r$; šajā situācijā mums ir pietiekami daudz īpašo gājienu, ka mēs varam pieņemt, ka tagad katrs spēlētājs var ņemt līdz pat 6 sērkociņiem. Ja *pirmais* spēlētājs ņem *k* sērkociņus, tad *otrais* spēlētājs ņem $7 - k$ sērkociņus.

Tātad pēc *otrā* spēlētāja gājiena paliek $7n-7=7(n-1)$ sērkociņi. Tā kā $n \le r$, tad arī $n-1 \le r-1$ un atlikušo sērkociņu skaits ir „labs”.

Spēles sākumā sākotnējais sērkociņu daudzums ir $1000 = 6 \cdot 165 + 10$, kas ir „labs” skaits sērkociņu. Tātad otrais spēlētājs var panākt, ka pēc katra viņa gājiena vienmēr uz galda paliek, „labs” skaits sērkociņu.

Ja uz galda atrodas „labs” skaits sērkociņu, tad spēlētājs, kuram jāizdara kārtējais gājiens, pēc šī gājiena nevar atstāt uz galda „labu” skaitu sērkociņu; šis spēlētājs uz galda var atstāt:

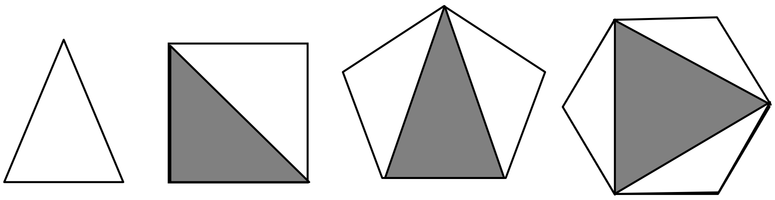
- $6n+r-k=(6n-k)+r$, kur $k=1, 2, ..., 5$, sērkociņus, bet $6n-k$ nedalās ar 6;
- $6n+r-6=6(n-1)+(r-1)+1$ sērkociņus, kas nav „labs” skaits sērkociņu;
- $7n-k$, kur $k=1, 2, ..., 6$, sērkociņus, bet $7n-k$ nedalās ar 7.

Spēles sākumā uz galda ir $1000 = 6 \cdot 165 + 10$ sērkociņi, tātad $n = 165 > 10 = r$. Ja otrais spēlētājs pēc katra sava gājiena atstāj „labu” skaitu sērkociņu, tad spēles gaitā, kamēr $n > r$, pēc katra otrā spēlētāja gājiena vai nu n un r katrs samazinās par 1, vai arī tikai n samazinās par 1. Tā kā r var samazināties par 1 tikai 10 reizes, tad noteikti pienāks tāds brīdi, kad $n = r$, t. i., uz galda pēc otrā spēlētāja gājiena atradīsies $6n + n = 7n$ sērkociņi. Pēc katra otrā spēlētāja gājiena n skaits samazinās par 1, tātad būs mirklis, kad $n = 0$ jeb pēc otrā spēlētāja gājiena uz galda paliek 0 sērkociņu, t. i., pēdējo sērkociņu ir paņēmis otrais spēlētājs.

Esam pierādījuši, ka otrajam spēlētājam ir uzvarošā stratēģija: pēc katra sava gājiena atstāt uz galda „labu” skaitu sērkociņu.

A.BW.K.5. Ar $f(n)$ apzīmējam mazāko iespējamo melno trijstūru skaitu n-stūrī.

Acīmredzams, ka $f(3)=0$ un $f(n)$ ir vismaz 1, ja $n = 4; 5; 6$ (skat. A61. zīm.). Pie vērtībām $n = 4; 5; 6$ ir iespējams n-stūri sadalīt un trijstūrus izkrāsot tā, ka ir tikai viens melns trijstūris, tātad $f(n)=1$, ja $n = 4; 5; 6$.



A61. zīm.

Pirmkārt, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādīsim, ka $f(n) \le \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

Bāze. Redzam, ka vērtībām $n = 3; 4; 5$ šī nevienādība ir spēkā: $f(3) \le \left[\frac{2}{3}\right] = 0$; $f(4) \le \left[\frac{4}{3}\right] = \left[1\frac{1}{3}\right] = 1$; $f(5) \le \left[\frac{5}{3}\right] = \left[1\frac{2}{3}\right] = 1$.

Induktīvais pieņēmums. $f(k) \le \left[\frac{k-1}{3}\right]$.

Induktīvā pāreja. Apskatām $(k+3)$-stūri. Novelkam diagonāli, kas sadala šo daudzstūri k-sturī un 5-stūrī. Pēc induktīvā pieņēmuma k-stūri var nokrāsot melnos un baltos trijstūros tā, ka melno trijstūru skaits ir mazāks vai vienāds ar $\left[\frac{k-1}{3}\right]$.

Atlikušo 5-stūri mēs varam sadalīt un nokrāsot tā, ka melnu trijstūru skaits tajā ir 1 (skat. A61. zīm.). Tātad $f(k+3) \le \left[\frac{k-1}{3}\right] + 1 = \left[\frac{k+3-1}{3}\right]$.

<u>Secinājums.</u> Izmantojot matemātiskās indukcijas principu, ka visiem naturāliem $n \ge 3$ ir spēkā: $f(n) \le \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

Otrkārt, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādīsim, ka $f(n) \ge \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

<u>Bāze.</u> Redzam, ka vērtībām $n = 3; 4; 5$ šī nevienādība ir spēkā: $f(3) \ge 0$; $f(4) \ge 1$; $f(5) \ge 1$.

<u>Induktīvais pieņēmums.</u> $f(k) \ge \left[\frac{k-1}{3}\right]$.

<u>Induktīvā pāreja.</u> Apskatām $(k+3)$-stūri. Nokrāsojam tajā $f(k+3)$ melnus trijstūrus un izvēlamies vienu no melnajiem trijstūriem. Tas no $(k+3)$-stūra atdala trīs daudzstūrus, apzīmēsim tos kā $(a+1)$-stūri, $(b+1)$-stūri un $(c+1)$-stūri. Ievērojam, ka $k+3 = a+b+c$.

Ar r_m apzīmēsim atlikumu, kas rodas veselo skaitli m dalot ar 3. Tad

$$f(k+3) \ge f(a+1) + f(b+1) + f(c+1) + 1 \ge$$
$$\ge \left[\frac{a}{3}\right] + \left[\frac{b}{3}\right] + \left[\frac{c}{3}\right] + 1 =$$
$$= \frac{a-r_a}{3} + \frac{b-r_b}{3} + \frac{c-r_c}{3} + 1 =$$
$$= \frac{(a+b+c) - r_a - r_b - r_c + 3}{3} =$$
$$= \frac{(k+3) - 1 - r_{k+2} + r_{k+2} - r_a - r_b - r_c + 4}{3} =$$
$$= \frac{(k+2) - r_{k+2}}{3} + \frac{r_{k+2} - r_a - r_b - r_c + 4}{3} =$$
$$= \left[\frac{k+2}{3}\right] + \frac{r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4}{3}.$$

Tā kā $0 \le r_{k+2}, r_a, r_b, r_c \le 2$, tad $r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4 \ge 0 - 6 + 4 = -2$. Ievērojam, ka $f(k+3) \ge \left[\frac{k+2}{3}\right] + \frac{r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4}{3}$ ir vesels skaitlis (jo ir vienāds ar skaitli $\left[\frac{a}{3}\right] + \left[\frac{b}{3}\right] + \left[\frac{c}{3}\right] + 1$, kas ir vesels skaitlis), no kā seko, ka skaitlim $r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4$ jādalās ar 3. Tā kā ieguvām, ka $r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4 \ge -2$, tad $r_{k+2} - (r_a + r_b + r_c) + 4 \ge 0$.

Esam ieguvuši, ka $f(k+3) \ge \left[\frac{k+2}{3}\right] = \left[\frac{k+3-1}{3}\right]$.

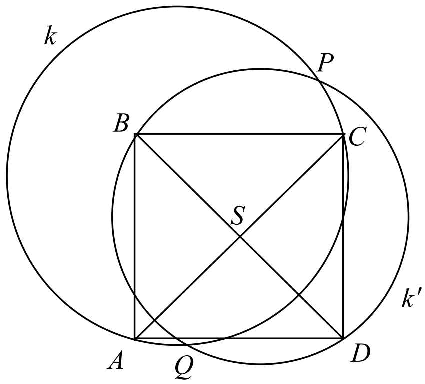
<u>Secinājums.</u> Izmantojot matemātiskās indukcijas principu, esam pierādījuši, ka visiem naturāliem $n \ge 3$ ir spēkā: $f(n) \ge \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

Esam pierādījuši, ka visiem n-stūriem $f(n) \le \left[\frac{n-1}{3}\right]$ un $f(n) \ge \left[\frac{n-1}{3}\right]$, no kā seko, ka $f(n) = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ jeb mazākais iespējamais melno trijstūru skaits n-stūrī ir $\left[\frac{n-1}{3}\right]$.

A.BW.Ģ. Ģeometrija

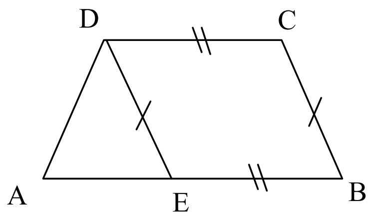
A.BW.Ģ.1. Tā kā PQ ir kopīga horda abām riņķa līnijām k un k', tad PQ ir šo riņķa līniju radikālā ass (skat. A62. zīm).

Punkta S pakāpe attiecībā pret riņķa līniju k ir $AS \cdot CS$, savukārt, S pakāpe attiecībā pret riņķa līniju k' ir $BS \cdot DS$. Tā kā $ABCD$ ir kvadrāts, tad $AS = CS = BS = DS$, no kā seko, ka $AS \cdot CS = BS \cdot DS$ jeb punktam S ir viena un tā pati pakāpe attiecībā pret riņķa līnijām k un k'. Tas nozīmē, ka punkts S atrodas uz riņķa līniju k un k' radikālās ass PQ, kas arī bija jāpierāda.



A62. zīm.

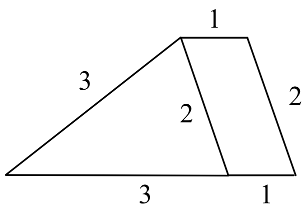
A.BW.Ģ.2. a) Pieņemam, ka trapeces malu garumi veido aritmētisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir a un diference ir d. Pieņemam, ka trapeces paralēlās malas ir apzīmētas ar AB un CD, kur $AB > CD$. Uz malas AB atliekam punktu E tādu, ka $BE = CD$. $DEBC$ ir paralelograms, jo tā divas pretējās malas ir vienādas un paralēlas, tātad arī $DE = CB$ (skat. A63. zīm.).



A63. zīm.

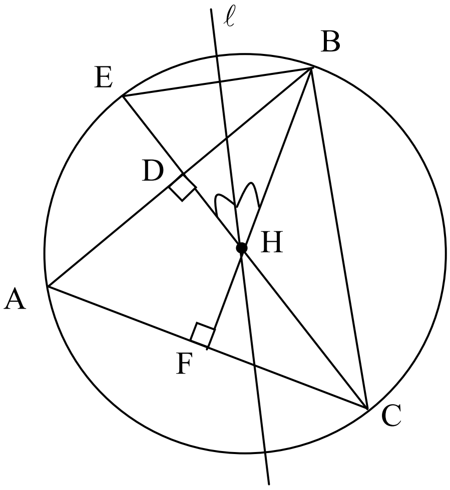
Aplūkojam trijstūri EDA. Tā malu garumi AD un $DE = CB$ ir divi aritmētiskās progresijas locekļi, kur $AD - DE = \pm 2d$. Malas AE garums ir $AE = AB - EB = AB - DC = 2d$. Esam ieguvuši pretrunu ar trijstūra nevienādību $2d = AE > |AD - DE| = 2d$. Tātad mūsu pieņēmums ir nepatiess jeb trapeces malu AB, BC, CD, DA garumi (šādā secībā) nevar veidot aritmētisko progresiju.

b) Lai iegūtu trapeci, kuras malu AB, BC, CD, DA garumi, samainot to secību, veido aritmētisko progresiju, trijstūrim ar malu garumiem 3, 3 un 2 pie īsākās malas pievienojam paralelogramu ar malu garumiem 1 un 2 tā, lai iegūtu trapeci (skat. A64. zīm.). Esam ieguvuši trapeci ar malu garumiem 1, 2, 4 un 3, no kurām var izveidot aritmētisku progresiju 1, 2, 3, 4.



A64. zīm.

A.BW.Ģ.3. Ar ℓ apzīmējam taisni, uz kuras atrodas $\angle DHB$ bisektrise. Ar E apzīmējam punktu, kurā stars CD krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Trijstūra ABC augstumu no virsotnes B apzīmējam ar F. (skat. A65. zīm.).



A65. zīm.

Stari HD un HB ir simetriski attiecībā pret taisni ℓ, jo $\angle DHB$ bisektrise atrodas uz šīs taisnes. Tā kā apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes ℓ, tātad arī riņķa līnija ir simetriska attiecībā pret taisni ℓ. No tā seko, ka staru HD un HB krustpunkti ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju, kas ir attiecīgi E un B, ir simetriski attiecībā pret taisni ℓ. Tā kā $H \in \ell$, tad varam secināt, ka $HE = HB$.

Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku, ir vienādi, tad

$$\angle ABE = \angle ACE = 180° - \angle ADC - \angle CAB = 90° - \angle CAB =$$
$$= 90° - (180° - \angle ABF - \angle BFA) = 90° - (90° - \angle ABF) = \angle ABF.$$

Tā kā $\angle ABE = \angle ABF$ un $EH \perp AB$, tad varam secināt, ka BD ir ΔEBH bisektrise un augstums, tad ΔEBH ir vienādsānu un $HB = EB$ kā sānu malas.

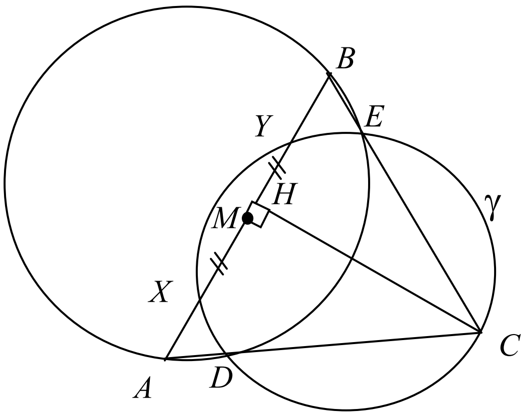
Esam ieguvuši, ka $HE = HB = EB$. Tas nozīmē, ka ΔBHE ir vienādmalu jeb $\angle EBH = \angle BHE = \angle HEB = 60°$. Tā kā $\angle CAB = \angle CEB = \angle HEB = 60°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku BC, tad esam ieguvuši, ka $\angle CAB = 60°$, ir vienīgā iespējamā $\angle CAB$ vērtība.

A.BW.Ģ.4. Ar γ apzīmējam riņķa līniju, kas iet caur punktiem D, E un C (skat. A66. zīm.). Apskatām punkta A pakāpi attiecībā pret riņķa līniju γ:

$$AX \cdot AY = AD \cdot AC = (AC - CD) \cdot AC = AC^2 - AC \cdot CD. \qquad (*)$$

Līdzīgi izrēķinām punkta B pakāpi attiecībā pret riņķa līniju γ:

$$BX \cdot BY = BC^2 - BC \cdot CE. \qquad (*)$$



A66. zīm.

Tā kā punkta C pakāpe pret riņķa līniju caur punktiem A, B, D un E nav atkarīga no izvēlētās sekantes, tad iegūstam, ka $AC \cdot CD = BC \cdot CE$.

Ar M apzīmējam nogriežņa XY viduspunktu. Tad

$$AX \cdot AY = AX \cdot AX + 2XM = AX^2 + 2AX \cdot XM =$$
$$= AX^2 + 2AX \cdot XM + XM^2 - XM^2 =$$
$$= (AX + XM)^2 - XM^2 = AM^2 - XM^2. \qquad (*)$$

Līdzīgi iegūstam, ka $BX \cdot BY = BM^2 - XM^2$. (*)

Izmantojot visas četras iegūtās vienādības (*), secinām, ka $AC^2 - AC \cdot CD = AM^2 - XM^2$ un $BC^2 - BC \cdot CE = BM^2 - XM^2$.

No pirmās vienādības atņemot otro, iegūstam, ka

$$AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2.$$

Trijstūra ABC augstumu no virsotnes C apzīmējam ar CH. Izmantojot Pitagora teorēmu ΔCHA un ΔCHB, iegūstam, ka

$$AC^2 - AH^2 = CH^2 = BC^2 - BH^2;$$
$$AC^2 - BC^2 = CH^2 = AH^2 - BH^2$$

Tātad $AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2 = AH^2 - BH^2$.

Tā kā punkti M un H atrodas uz malas AB, tad $AB = AM + MB$ un $AB = AH + HB$.

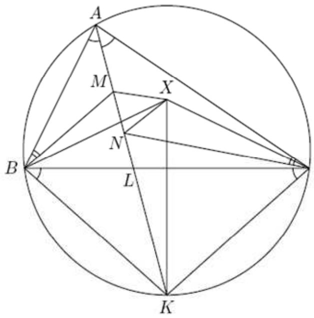
Apskatām starpību:

$$AB(AM - BM) = (AM + BM)(AM - BM) = AM^2 - BM^2 =$$
$$= AH^2 - BH^2 = (AH + BH)(AH - BH) = AB(AH - BH).$$

Varam secināt, ka $AM - BM = AH - BH$ jeb $AM + HB = AH + MB$.

Iegūtā vienādībā izpildās tikai tad, ja $M = H$ jeb H ir XY viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.Ģ.5. Pieņemam, ka $\angle BAC = 2\alpha$ (skat. A.67. zīm.). Tātad $\angle BAM = \angle NAC = \alpha$ (pēc bisektrises definīcijas). $\Delta ABM \sim \Delta ACN$ (pēc pazīmes $\ell\ell$), tāpēc $\angle AMB = \angle ANC$. $\angle CNL = \angle BML = \alpha + 23°$ kā līdzīgu trijstūru attiecīgie ārējie leņķi. Ar K apzīmējam trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas loka BC viduspunktu. Tā kā leņķis $\angle BAC$ balstās uz šo loku BC, tad punkts K atrodas uz $\angle BAC$ bisektrises AL. $\angle KBC = \angle KAC = \alpha$ kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku KC.



A67. zīm.

Ievērojam, ka gan punkts *X*, gan punkts *K* pieder nogriežņa *BC* vidusperpendikulam (tātad $XK \perp BC$), tāpēc, izmantojot doto, ka $\angle BXC = 2\angle BML$, iegūstam: $\angle BXK = \frac{1}{2}\angle BXC = \angle BML$. No šo leņķu vienādības varam secināt, ka ap četrstūri *BMXK* var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku, ir vienādi, tad

$$\angle XMN = \angle XMK = \angle XBK = \angle XBC + \angle KBC = (90° - \angle BXK) + \alpha =$$
$$= (90° - \angle BML) + \alpha = 90° - (\angle BML - \alpha) = 90° - (\alpha + 23° - \alpha) = 67°.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $\angle CXK = \frac{1}{2}\angle BXC = \angle CNL$, tāpēc ap četrstūri *CXNK* var apvilkt riņķa līniju un $\angle XNM = \angle XCK = 67°$.

Esam ieguvuši, ka $\angle XMN = \angle XNM = 67°$, tātad $\angle MXN = 180° - 2 \cdot 67° = 46°$.

A.BW.S. Skaitļu teorija

A.BW.S.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka nepāra skaitļi, kas mazāki par 9, nav *burvīgi*. Lai to pierādītu, izmatosim faktu, ka visiem *k* ir spēkā sakarība: $s(k) \equiv k \pmod 9$. Tiešām, varam apzīmēt $s(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ un $k = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10^i$. No $x \equiv a \pmod n$ un $y \equiv b \pmod n$ seko, ka $xy \equiv ab \pmod n$. Tā kā $10^i \equiv 1 \pmod 9$, tad $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \pmod 9$ jeb $s(k) \equiv k \pmod 9$.

Izveidojam tabulu, kur norādīti atlikumi, kas rodas, skaitļus m^2 un m^6 dalot ar 9, pie visām iespējamām atlikumu vērtībām, kas rodas, skaitli *m* dalot ar 9:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
m^6	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Ja $d(k) = 3$, tad skaitlim *k* ir 3 dalītāji. Tā kā 1 ir jebkura skaitļa dalītājs, varam pieņemt, ka $k = 1 \cdot a \cdot b$, kur *a*, *b* – pirmskaitļi. Ja $a \neq b$, tad skaitļa *k* dalītāji ir skaitļi 1, *a*, *b* un $a \cdot b$. Tad skaitlim *k* ir 4 dalītāji jeb $d(k) = 4$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $d(k) = 3$, tāpēc varam apzīmēt $k = p^2$, kur *p* ir pirmskaitlis (skaitlim *k* ir trīs dalītāji: 1, p, p^2). Lai skaitlis 3 būtu *burvīgs*, mums vajadzīgs, lai $s(p^2) = d(p^2) = 3$. Izmantojot iepriekš iegūto sakarību $s(k) \equiv k \pmod 9$ tātad jābūt: $3 \equiv p^2 \pmod 9$. Tabulā redzams, ka $p^2 \equiv 3 \pmod 9$ nav iespējams, tāpēc skaitlis 3 nevar būt *burvīgs*.

Ja $d(k)=5$, tad $k=1\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d$, kur *a*, *b*, *c*, *d* – pirmskaitļi. Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā secinām, ka $a=b=c=d$, tāpēc $k=p^4$, kur *p* ir pirmskaitlis. Lai skaitlis 5 būtu burvīgs, mums vajadzīgs, lai $s(k)=d(k)=5$, tātad $5\equiv k\ (\text{mod}\ 9)$. Tabulā redzams, ka $(p^2)^2\equiv 5\ (\text{mod}\ 9)$ nav iespējams, tāpēc skaitlis 5 nevar būt *burvīgs*.

Ja $d(k)=7$, tad līdzīgi kā iepriekšējos gadījumos secinām, ka $k=p^6$, kur *p* ir pirmskaitlis. Lai skaitlis 7 būtu burvīgs, mums vajadzīgs, lai $s(k)=d(k)=7$, tātad $7\equiv k\ (\text{mod}\ 9)$. Tabulā redzams, ka $p^6\equiv 7\ (\text{mod}\ 9)$ nav iespējams, tāpēc skaitlis 5 nevar būt *burvīgs*.

Otrkārt, parādām, ka skaitlis 9 ir *burvīgs* skaitlis. Tiešām, eksistē naturāls skaitlis $k=36$, kuram $d(36)=s(36)=9$.

Tātad esam pierādījuši, ka 9 ir mazākais *burvīgais* naturālais nepāra skaitlis, kas lielāks par 1.

A.BW.S.2. Ja *n* ir pāra skaitlis, tad arī skaitļa n^2 pēdējais cipars ir pāra skaitlis. Tāpēc meklētie *n* noteikti būs nepāra skaitļi.

Ja *n* ir nepāra skaitlis, kas dalās ar 5, tad varam to uzrakstīt formā: $n=10k+5$, kur $k\geq 0$ un k – vesels skaitlis. Tā kā $n^2=(10k+5)^2=100k^2+100k+25$, tad n^2 pirmspēdējais cipars ir 2. Tātad meklētie *n* noteikti nedalīsies ar 5.

Esam ieguvuši, ka meklētie *n* ir formā $n=10k\pm m$, kur $m\in\{1;3\}$ jeb *n* ir nepāra skaitļi, kas beidzas ar ciparu 1, 3, 7 vai 9, tāpēc

$$n^2=(10k\pm m)^2=100k^2\pm 20km+m^2=2(5k^2\pm 2km)\cdot 10+m^2,$$

kur $m^2\in\{1;9\}$. Tātad, ja skaitlis $5k^2\pm 2km$ nav vienāds ar nulli, tad skaitļa $2(5k^2\pm 2km)\cdot 10$ pēdējais cipars ir 0 un pirmspēdējais cipars ir pāra. Pieskaitot šim skaitlim m^2, t. i., 1 vai 9, iegūstam, ka šajā gadījumā skaitļa n^2 pirmspēdējais cipars ir pāra skaitlis. Līdz ar to skaitlis *n* nav meklētais skaitlis.

Tātad, lai atrastu uzdevumā prasītos skaitļus, izteiksmei $5k^2\pm 2km$ noteikti jābūt vienādai ar 0 (tas iespējams tikai tad, ja $5k^2-2km=0$, jo $k,m\geq 0$). Tādā gadījumā $n^2=0+m^2=m^2$, no kā seko, ka iespējamās *n* vērtības ir $n=1$ un $n=3$.

A.BW.S.3. Vispirms apskatīsim piemēru, kur $p=7$. Ievērojam, ka

$1^{-1}=1$, jo $1\cdot 1^{-1}=1\cdot 1\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$;

$2^{-1}=4$, jo $2\cdot 2^{-1}=2\cdot 4=8\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$;

$3^{-1}=5$, jo $3\cdot 3^{-1}=3\cdot 5=15\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$;

$4^{-1}=2$, jo $4\cdot 4^{-1}=4\cdot 2=8\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$;

$5^{-1}=3$, jo $5\cdot 5^{-1}=5\cdot 3=15\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$;

$6^{-1}=6$, jo $6\cdot 6^{-1}=6\cdot 6=36\equiv 1\ (\text{mod}\ 7)$.

Izveidojam tabulu:

	1	2	3	4	5	6
Virknes *i*-tais loceklis	1	$1+4=5$	$1+4+5=10$	$1+4+5+$ $+2=12$	$1+4+5+$ $+2+3=15$	$1+4+5+$ $2+3+6=21$
i-tā locekļa atlikums, dalot to ar $p=7$	1	5	3	5	1	0

Redzam, ka ir iegūti 4 dažādi atlikumi, kas apmierina uzdevuma prasības, t. i., atlikumu virkne satur ne vairāk kā $\frac{7+1}{2}=4$ dažādus locekļus.

Tagad pierādīsim, ka šī sakarība ir spēkā arī vispārīgā gadījumā, t. i., jebkuram pirmskaitlim p dotā virkne satur ne vairāk kā $\frac{p+1}{2}$ dažādus locekļus, skaitot pēc moduļa p.

Tā kā $1 \le k \le p-1$, tad arī $1 \le p-k \le p-1$ un no dotā seko, ka arī

$$(p-k)(p-k)^{-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Pārveidojam iegūto kongruenci:

$$1 \equiv p(p-k)^{-1} - k(p-k)^{-1} \equiv -k(p-k)^{-1} \pmod p;$$

$$-k^{-1} \equiv -(-k^{-1}) \cdot k(p-k)^{-1} \equiv (p-k)^{-1} \pmod p. \qquad (1)$$

Tātad $(p-k)^{-1} - (-k^{-1}) = (p-k)^{-1} + k^{-1} \equiv 0 \pmod p$. (2)

Ja p ir pāra skaitlis (vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2), tad virkne satur tieši 1 locekli un uzdevuma nosacījumi izpildās, jo $1 < \frac{2+1}{2}$.

Ja p ir nepāra skaitlis, tad apzīmējam $m = \frac{p-1}{2}$ un no (2) iegūstam, ka

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \left((p-k)^{-1} + k^{-1}\right) \equiv 0 \pmod p. \qquad (3)$$

Aprēķinām (pēc moduļa p) virknes ℓ-to locekli, kur $m < \ell < p-1$:

$$\sum_{k=1}^{\ell} k^{-1} \overset{\text{no (3)}}{\equiv} \sum_{k=1}^{\ell} k^{-1} - \sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = -\sum_{k=\ell+1}^{p-1} k^{-1} = -\sum_{k=1}^{p-\ell-1} (p-k)^{-1} \overset{\text{no (1)}}{\equiv} \sum_{k=1}^{p-\ell-1} k^{-1} \pmod p.$$

Esam ieguvuši, ka ℓ-tais virknes loceklis ($m < \ell < p-1$) pēc moduļa p ir vienāds ar kādu no virknes pirmajiem $m-1$ locekļiem pēc moduļa p.

Tātad, ņemot vērā m-tā un $(p-1)$-ā locekļa vērtības pēc moduļa p, esam ieguvuši, ka dotā virkne (ņemot pēc moduļa p) satur ne vairāk kā $m-1+2 = m+1 = \frac{p-1}{2}+1 = \frac{p-1+2}{2} = \frac{p+1}{2}$ dažādus locekļus, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.S.4. Apskatām 15 mazākos pirmskaitļu kvadrātus:

4; 9; 25; 49; 121; 169; 289; 361; 529; 841; 961; 1369; 1681; 1849; 2209.

Tā kā $2209 > 2010$, varam secināt, ka $k \le 14$.

Apskatām gadījumu, kad $p_1, p_2, ..., p_k$ ir nepāra pirmskaitļi.

Ja p ir nepāra pirmskaitlis, tas nozīmē, ka varam to izteikt formā: $p = 2x+1$, kur x – pozitīvs vesels skaitlis. Tādā gadījumā $p^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 4x(x+1)+1$. Ievērojam, ka $4x(x+1)$ dalās ar $4 \cdot 2 = 8$, jo vai nu x, vai $x+1$ dalās ar 2, tāpēc $p^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Ievērojam, ka $2010 \equiv 2 \pmod 8$. Tā kā vienādības abas puses dod vienādus atlikumus, dalot tos ar vienu un to pašu skaitli, tad no uzdevumā dotā vienādojuma iegūstam, ka

$$k \cdot 1 \equiv 2 \pmod 8.$$

Tā kā $k \le 14$, tad ir iespējami 2 gadījumi:

- $k = 2$; ievērojam, ka $2010 \equiv 0 \pmod 3$. Pieņemam, ka skaitlis a dalās ar 3, un apskatām skaitļu a, $a+1$ un $a+2$ kvadrātus:
  - Ja skaitlis a dalās ar 3, tad arī a^2 dalās ar 3;

- Ievērojam, ka $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a(a+2) + 1$. Tā kā a dalās ar 3, tad $a(a+2)$ dalās ar 3 un $(a+1)^2 \equiv 1 \pmod 3$.
- Ievērojam, ka $(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4 = a(a+4) + 4$. Tā kā a dalās ar 3, tad $a(a+4)$ dalās ar 3 un $(a+2)^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Varam secināt, ka visiem naturāliem skaitļiem m: $m^2 \equiv 0 \pmod 3$ vai $m^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Ja $p_1^2 \equiv 1 \pmod 3$ vai/un $p_2^2 \equiv 1 \pmod 3$, tad $p_1^2 + p_2^2 \equiv 1 + 0 = 1 \pmod 3$ vai $p_1^2 + p_2^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$. Tā kā $2010 \equiv 0 \pmod 3$, tad atliek gadījums, kad $p_1^2 \equiv p_2^2 \equiv 0 \pmod 3$ jeb $p_1 \equiv p_2 \equiv 0 \pmod 3$. Tas nav iespējams, jo nav divu dažādu pirmskaitļu, kas dalītos ar 3.

Esam ieguvuši, ka k nevar būt 2 gadījumā, ja p_1 un p_2 ir nepāra pirmskaitļi.

- $k = 10$; ievērojam, ka 10 mazāko nepāra pirmskaitļu kvadrātu summa jau ir lielāka nekā 2010 (Tiešām, $4 + ... + 529 + 841 + 961 > 2010$.), tāpēc nav iespējams atrast 10 nepāra pirmskaitļus, kuru kvadrātu summa būtu tieši 2010.

Varam secināt, ka nevaram izpildīt uzdevuma nosacījumus, ja uzdevumā dotajā vienādībā summa sastāv no nepāra pirmskaitļu kvadrātiem.

Apskatām gadījumu, kad kāds no pirmskaitļiem $p_1, p_2, ..., p_k$ ir pāra pirmskaitlis, tas ir, viens no pirmskaitļiem ir 2.

Tā kā $2^2 \equiv 4 \pmod 8$ un $p^2 \equiv 1 \pmod 8$, ja p – nepāra pirmskaitlis, tad no uzdevumā dotā vienādojuma iegūstam, ka

$$4 + (k-1) \cdot 1 \equiv 2 \pmod 8;$$

$$3 + k \equiv 2 \pmod 8.$$

Tā kā $k \le 14$, tad vienīgais k, kas apmierina šo prasību ir $k = 7$. Atradīsim 7 dažādus pirmskaitļus $p_1, p_2, ..., p_k$, tādus, ka $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_k^2 = 2010$.

Mēs jau pieņēmām, ka pirmskaitļa 2 kvadrāts būs viens no saskaitāmajiem, tāpēc ir jāatrod 6 atlikušie pirmskaitļu kvadrāti.

Jau iepriekš secinājām, ka $m^2 \equiv 0 \pmod 3$ vai $m^2 \equiv 1 \pmod 3$. Tā kā vienīgais pirmskaitļa kvadrāts, kas dalās ar 3 bez atlikuma, ir $3^2 = 9$, tad ir iespējami divi gadījumi:

- 9 nav viens no saskaitāmajiem. Tad $p_1^2 \equiv p_2^2 \equiv ... \equiv p_7^2 \equiv 1 \pmod 3$ un $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_7^2 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 1 \pmod 3$. Tā kā $2010 \equiv 0 \pmod 3$, tad šis gadījums neatbilst uzdevuma nosacījumiem;
- 9 ir viens no saskaitāmajiem. Tad $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_7^2 \equiv 1 \cdot 6 + 0 \equiv 0 \pmod 3$. Tā kā $2010 \equiv 0 \pmod 3$, tad šis gadījums atbilst uzdevuma nosacījumiem.

Esam ieguvuši, ka $p_1 = 2$ un $p_2 = 3$, kas ir mazākie pirmskaitļi. Ja tiktu izmantoti sešu mazāko pirmskaitļu kvadrāti, tad summa jau būtu

$$4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 = 377.$$

Tātad šajā summā noteikti neietilpst pirmskaitļu kvadrāti, kas lielāki par $2010 - 377 = 1633$. Secinām, ka varam izmantot pirmskaitļu kvadrātus, kas nepārsniedz $37^2 = 1369$.

Ievērojam, ka, visi pirmskaitļu kvadrāti, ko varam izmantot, (izņemot 4 un 25), dalot tos ar 10, dod atlikumu 1 vai 9.

Šķirojam divus gadījumus:

- Uzdevumā dotajā summā viens no saskaitāmajiem ir skaitlis 25. Tad

$$p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=2010-4-9-25=1972.$$

Tā kā $1972\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,10)$, tad jāizpildās arī

$$p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,10).$$

Apskatām, kādu atlikumu dod summa $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2$, ja to dala ar 10, atkarībā no tā, cik daudz no izvēlēto pirmskaitļu kvadrātiem, dalot tos ar 10, atlikumā dod 1 (pārējie atlikumā dod 9):

- Ja tādu nav, tad $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 1\cdot 0+9\cdot 4\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tāds ir viens tad $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 1\cdot 1+9\cdot 3\equiv 8\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir divi, tad $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 1\cdot 2+9\cdot 2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir trīs, tad $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 1\cdot 3+9\cdot 1\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir visi četri, tad $p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 1\cdot 4+9\cdot 0\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,10)$;

Varam secināt, ka jāizmanto trīs no pirmskaitļu kvadrātiem $\{121;361;841;961\}$. Apskatot visus četrus gadījumus, iegūstam 2 iespējamās pirmskaitļu $p_1,p_2,\ldots,p_k$ vērtības, ja $k=7$:

- $4+9+25+121+361+529+961=2010$;
- $4+9+25+49+121+841+961=2010$.

- Skaitlis 25 nav viens no saskaitāmajiem uzdevumā dotajā summā. Tad

$$p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=2010-4-9=1997.$$

Tā kā $1997\equiv 7\ (\mathrm{mod}\,10)$, tātad jāizpildās arī:

$$p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 7\ (\mathrm{mod}\,10).$$

Apskatām, kādu atlikumu dod summa $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2$, ja to dala ar 10, atkarībā no tā, cik daudz no izvēlēto pirmskaitļu kvadrātiem, dalot tos ar 10, atlikumā dod 9 (pārējie atlikumā dod 1):

- Ja tādu nav, tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 0+1\cdot 5\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tāds ir viens tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 1+1\cdot 4\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir divi, tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 2+1\cdot 3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir trīs, tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 3+1\cdot 2\equiv 9\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir četri, tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 4+1\cdot 1\equiv 7\ (\mathrm{mod}\,10)$;
- Ja tādi ir visi pieci, tad $p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\equiv 9\cdot 5+1\cdot 0\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,10)$.

Varam secināt, ka jāizmanto četri no pirmskaitļu kvadrātiem $\{49;169;289;529;1369\}$. Apskatot visus piecus gadījumus, iegūstam vēl 2 iespējamās pirmskaitļu $p_1,p_2,\ldots,p_k$ vērtības, ja $k=7$:

- $4+9+49+169+289+529+961=2010$;
- $4+9+49+121+169+289+1369=2010$.

Esam pierādījuši, ka vienīgais *k*, kam izpildās uzdevuma dotie nosacījumi, ir $k=7$.

Piezīme: Lai pierādītu, ka pie $k=7$ tiešām var atrast tādus pirmskaitļus $p_1,p_2,\ldots,p_k$, lai uzdevumā dotā vienādība būtu patiesa, pietiek atrast vienu no četrām iespējamām pirmskaitļu $p_1,p_2,\ldots,p_7$ izvēlēm.

A.BW.S.5. Acīmredzams, ka pie $n=1$ uzdevumā prasītais neizpildās, jo divi vienādi skaitļi nav savstarpēji pirmskaitļi

Pierādīsim, ka uzdevumā prasītais izpildās pie visiem $n>1$.

Apskatām naturālu skaitļu virkni $x_0,x_1,\ldots$, kas ir rekursīvi definēta ar sakarību:

$$x_0=n \text{ un } x_{k+1}=(x_0+\ldots+x_k)!+1 \text{ visiem } k\ge 0.$$

Pierādīsim, ka bezgalīgā naturālo skaitļu apakškopā $A=\{x_k \mid k \geq 1\}$ izpildās uzdevumā prasītais.

Pieņemsim pretējo: eksistē $1 \leq i_1 < \ldots < i_n$ tādi, ka skaitļiem $x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}$ un $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_n}$ ir kopīgs pirmreizinātājs *p*. Tādā gadījumā eksistē $j \in \{1,\ldots,n\}$ tāds, ka skaitlis x_{i_j} dalās ar p.

No virknes $(x_1, x_2, \ldots)$ definīcijas iegūstam, ka $x_k \equiv 1 \pmod p$ visiem naturāliem skaitļiem $k > i_j$, jo $x_{i_j+1}=(x_0+\ldots+x_{i_j})!+1$, kur $(x_0+\ldots+x_{i_j})!$ dalās ar x_{i_j}, jo $(x_0+\ldots+x_{i_j})$ ir lielāks nekā x_{i_j} un pēc *n*! definīcijas satur reizinātāju x_{i_j}. Tā kā katram nākamajam *k* $(x_0+\ldots+x_k)!$ ir lielāks, tad tas arī dalās ar *p*.

Tā kā $x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}$ dalās ar *p* un $x_k \equiv 1 \pmod p$, visiem $k > i_j$ (tādu indeksu *k* skaits ir $n-j$), tad

$$x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_{j-1}}+x_{i_j}+x_{i_{j+1}}+\ldots+x_{i_n} \equiv x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_{j-1}}+0+1\cdot(n-j) \equiv$$

$$\equiv x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_{j-1}}+n-j \equiv 0 \pmod p.$$

Apzīmējam: $S = x_{i_1}+\ldots+x_{i_{j-1}}+n-j$ jeb $x_{i_1}+\ldots+x_{i_{j-1}}=S-n+j$.

Tā kā naturāli skaitļi ir pozitīvi un $n-j \geq 0$, tad $S>0$ un

$$x_0+\ldots+x_{i_j-1}=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{i_1-1}+(S-n+j)+x_{i_{j-1}+1}+\ldots+x_{i_j-1}=$$

$$=x_1+x_2+\ldots+x_{i_1-1}+S+j+x_{i_{j-1}+1}+\ldots+x_{i_j-1} \geq S.$$

Ja *S* dalās ar *p*, tad skaitļa, kas lielāks nekā *S*, faktoriāls arī dalās ar *p*, tāpēc $(x_0+\ldots+x_{i_j-1})!$ dalās ar *p*. Izmantojot virknes $(x_1, x_2, \ldots)$ definīciju, iegūstam, ka $x_{i_j}-1=(x_0+\ldots+x_{i_j-1})!$, tātad arī $x_{i_j}-1$ dalās ar *p*. Tas nav iespējams, jo divi viens otram sekojoši skaitļi (x_{i_j} un $x_{i_j}-1$) nevar saturēt vienu un to pašu pirmreizinātāju.

Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc mūsu pieņēmums, ka eksistē $1 \leq i_1 < \ldots < i_n$ tādi, ka skaitļiem $x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}$ un $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_n}$ ir kopīgs pirmreizinātājs *p*, ir nepatiess.

Tātad visiem pa pāriem atšķirīgiem $a_1, \ldots, a_n \in A$, skaitļi $a_1+\ldots+a_n$ un $a_1\cdot\ldots\cdot a_n$ ir savstarpēji pirmskaitļi visiem $n>1$.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: S.10.1, S.11.3., N.9.1., V.10.1., V.12.4., V.12.5., A.10.1., A.11.1., A.11.3., VP.1., VP.3., IMO.4., IMO.5., AB.K.2., AB.S.5., BW.G.2., BW.S.3., BW.S.5.
Nevienādības, nevienādību sistēmas: S.9.1., S.10.1., N.9.4., N.10.1., N.11.1., V.11.1., V.12.1., VP.5., AB.A.1., AB.A.3., AB.G.4., BW.A.1., BW.A.2., BW.A.3., BW.K.5.
Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: AB.A.1., AB.A.3.
Funkcionālvienādojumi, funkcionālnevienādības: V.12.4., VP.3., IMO.3., IMO.5., AB.A.4., BW.A.5.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.12.1., N.10.3., N.11.3., N.12.1., V.9.2., V.10.1., V.11.4., A.10.3., A.11.4., IMO.1., AB.A.5., BW.A.1., BW.A.4.
Pārveidojumi: S.9.1., S.11.3., N.10.1., N.11.1., N.11.3., N.12.1., V.9.2., V.10.4., V.12.1., V.12.3., A.9.1., A.10.3., A.11.4., A.12.2., A.12.5., IMO.1., IMO.3., AB.A.1., AB.A.3., AB.A.4., AB.A.5., AB.G.4., BW.A.2., BW.A.3., BW.A.4., BW.A.5., BW.K.1., BW.G.4., BW.S.3.
Matemātiskā indukcija: V.12.5., A.12.2., BW.A.3., BW.A.4., BW.K.1.
Polinomi: V.10.4., AB.A.2., AB.S.2., BW.A.4.
Ekstrēmu uzdevumi: A.12.2., AB.A.3.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.11.2., V.9.2., V.10.2., A.10.2., A.11.2., A.12.3., VP.2., IMO.6., AB.G.1., AB.G.2., AB.G.3., BW.G.3., BW.G.5.
Ar riņķa līniju saistītas līnijas: S.11.2., N.9.2., V.9.2., V.11.2., A.10.2., A.10.4., A.11.2., A.12.3., VP.2., IMO.6., AB.G.3., BW.G.1., BW.G.4.
Vienādi trijstūri: N.9.2., N.11.2., V.11.2., V.12.2., A.9.2., A.12.3.
Sakarības trijstūros: S.9.2., S.11.2., S.11.5., S.12.3., N.9.2., N.10.2., N.10.4., N.11.2., N.12.2., V.9.2., V.10.2., V.10.5., V.11.2., V.12.2., A.9.2., A.10.2., A.12.3., VP.2., IMO.6., AB.G.1., AB.G.2., AB.G.3., AB.K.1., BW.G.2., BW.G.3., BW.G.4., BW.G.5.
Laukumi: N.10.4., N.11.2., N.12.2., V.11.5., A.10.2.
Līdzība: V.9.2., V.10.2., IMO.6., AB.G.3., AB.G.5., BW.G.5.
Koordinātu metode:.
Figūru sistēmas, piemēri: S.9.4., A.10.5., A.11.3., A.12.4., VP.4.
Invariantu metode:
Ekstremālie elementi: V.10.5.
Vektori: S.10.4., S.12.2., V.11.1., AB.G.4.

SKAITĻU TEORIJA

Atlikumi, kongruences: S.9.3., AB.S.1., BW.K.1., BW.K.5., BW.S.1., BW.S.3., BW.S.4.
Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.10.3., S.11.1., S.12.4., V.11.3., A.10.1., A.11.5., A.12.1., VP.1., AB.S.5., BW.K.1., BW.S.1., BW.S.4.
Dalāmības īpašības un pazīmes: S.10.3., S.11.1., N.11.4., V.9.1., V.10.4., A.9.4., A.11.1., A.11.5., IMO.1., IMO.5., AB.S.1., AB.S.2., AB.S.3., AB.S.5., BW.K.1., BW.K.4., BW.S.2., BW.S.4.
Vienādojumi veselos skaitļos: S.11.1., N.9.4., V.12.3., A.9.1., AB.S.4., BW.S.4.
Skaitļa pieraksts: S.9.3., N.12.3., V.9.3., AB.S.1., AB.S.3., BW.S.2.
Ekstrēmu uzdevumi: A.9.4., N.11.4., IMO.1., BW.S.1.

KOMBINATORIKA

Dirihlē princips: A.10.4., AB.K.1.
Invariantu metode, krāsošana: S.9.5., V.10.3., A.10.5., AB.K.5.
Kombinatorikas struktūras: N.9.3., N.9.5., N.10.5., AB.K.2., AB.K.4., BW.K.1.
Skaitīšana: N.12.5., VP.5., BW.K.2.
Gadījumu pārlase:
Matemātiskā indukcija: VP.4., BW.K.5.
Ekstrēmu uzdevumi: N.12.4., BW.K.5.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde: S.9.5., S.10.2., S.11.5., V.10.3., BW.K.4.
Algoritma analīze: S.10.5., S.11.4., S.12.5., N.9.3., N.11.5., N.12.4., V.9.3., V.9.4., V.9.5., V.11.4., A.9.3., A.9.5., IMO.2., IMO.4., AB.K.3., AB.K.5., AB.S.3., BW.K.2., BW.K.3.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.
48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.