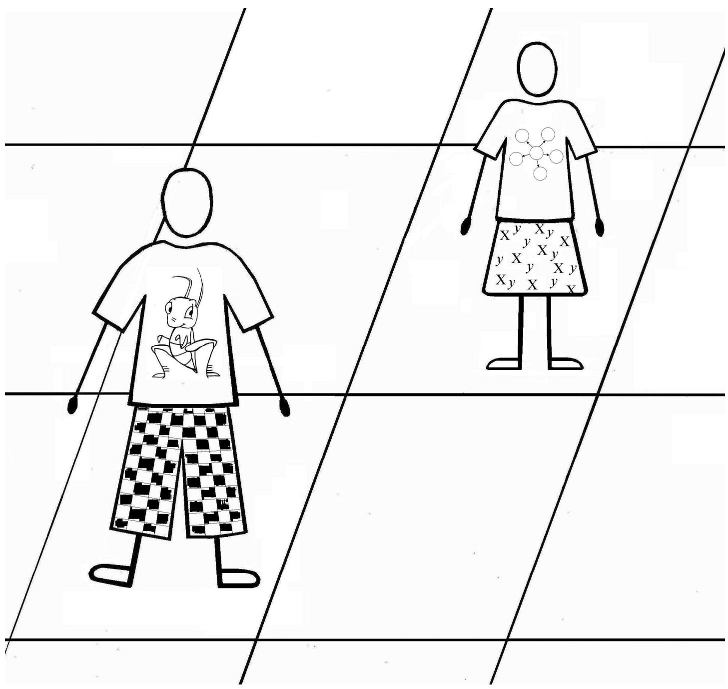
AGNIS ANDŽĀNS, MARUTA AVOTIŅA,

LAURA FREIJA

Matemātikas sacensības 9.–12. klasēm 2009./2010. mācību gadā



RĪGA 2011

A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2011. – 125 lpp.

Grāmatā apkopoti 2009./2010. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. – 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Izsakām pateicību 2009./2010. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotājiem: A. Ambainim, A. Belovam, D. Bonkai, A. Cibulim, M. Kokainim, M. Opmanim, R. Opmanim, R. Ozolam, J. Smotrovam, M. Valdatam, J.Vihrovam.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-357-6

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības pagājušā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā olimpiādes, kuras norisinās pašlaik. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko pasaules daļu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Līdz ar to olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām arī pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.).

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs vidusskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm, un skolotājiem, lai veiksmīgi organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas tās matemātikas olimpiādes, kurās var piedalīties Latvijas 9. – 12. klašu skolēni. Šāda veida mācību līdzeklis tiek izdots katru gadu, un pašlaik ir pieejami uzdevumu krājumi sākot ar 2005./2006. mācību gadu. Šajā grāmatā apskatītas tās olimpiādes, kuras norisinājās 2009./2010. mācību gadā:

- *Sagatavošanās matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1987./1988. mācību gada, to rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Sagatavošanās olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu, tāpēc katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tas ir atkarīgs no matemātikas skolotājiem, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Rajona olimpiādē.

- *Rajona matemātikas olimpiāde* notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.

- *Valsts matemātikas olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Rajona olimpiāde, notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek 2 dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas veiksmīgākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, kā arī citu valstu izglītības organizatori. Atklāto olimpiādi matemātikā rīko LU A.Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.
- *Starptautiskā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai Austrumu bloka valstis. Pēdējos gados tajā piedalās ap 100 valstīm no visas pasaules. Katra dalībvalsts izvirza ne vairāk kā 6 skolēnu komandu dalībai. Olimpiādē tiek vērtēts katrs skolēns atsevišķi. 2009./2010. mācību gadā Latvijas komandas dalībnieki ieguva 2 bronzas medaļas un 2 atzinības. Katru gadu neoficiāli tiek vērtēts arī komandas sniegums.
- *Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš”* tiek organizētas, lai izvēlētos skolēnus starptautiskajai komandu olimpiādei, kas norisinās mācību gada sākumā, tāpēc tā notiek jau septembra vidū. Uz atlasi tiek aicināti skolēni, kuri iepriekšējā mācību gadā uzrādījuši labus rezultātus valsts un atklātajā olimpiādē.
- *Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš”* savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šī olimpiāde pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis. Tagad „Baltijas Ceļā” piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande. Katra valsts šim sacensībām izvirza 5 skolēnu komandu, kurai olimpiādē 4,5 stundu laikā kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi. 2009./2010. mācību gadā Latvijas komanda 11 valstu konkurencē izcīnīja 6 vietu.

Šajā uzdevumu krājumā ne tikai apkopoti un izvērsti aprakstīti 2009./2010. mācību gada matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi, bet iekļauta arī sadaļa – „Ieteikumi”. Šajā sadaļā skolēni var smelties idejas, ja neizdodas atrisināt uzdevumus patstāvīgi. Skolotāji „Ieteikumus” var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumus uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatas piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām sameklēt un apgūt šos paņēmienus, lai varētu turpmāk tos izmanot. Grāmatā piedāvājam mums zināmos racionālākos risinājumus un risinājumus, kas satur vērtīgas idejas, taču tie nav vienīgie šo uzdevumu atrisinājumi

Lai darbs ar grāmatu attīsta radošumu, un ceram, ka risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Autori

UZDEVUMI

S. LATVIJAS 22. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

S.9. Devītā klase

S.9.1. Dots, ka x un y – reāli skaitļi. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y)$.

S.9.2. Dots, ka $x < y < z < t < v$. Andris aprēķināja šo piecu skaitļu summas pa pāriem. Trīs mazākās summas bija 32, 36, 37, bet divas lielākās bija 48 un 51.
Kādas ir iespējamās x, y, z, t, v vērtības?

S.9.3. Kvadrāta $ABCD$ centrs ir O. Ārpus kvadrāta konstruēti divi vienādi vienādsānu trijstūri BCJ un CDK ($BJ = CJ$ un $CK = DK$). Ar M apzīmējam CJ viduspunktu. Pierādīt, ka $OM \perp BK$.

S.9.4. Uz galda atrodas 7 kartītes; uz tām uzrakstīti cipari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (uz katras kartītes cits cipars). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienai kartītei. Tas, kurš pirmais no savām kartītēm var izveidot veselu pozitīvu skaitli, kas dalās ar 17, uzvar. Kurš uzvar, pareizi spēlējot, – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu, vai arī spēle beidzas neizšķirti?

S.9.5. Kuri naturālie skaitļi x vienlaicīgi apmierina visas sekojošās prasības:

- $x \leq 2009$,
- x dalās ar 5,
- $x + 1$ dalās ar 7,
- $x + 2$ dalās ar 9,
- $x + 3$ dalās ar 11?

S.10. Desmitā klase

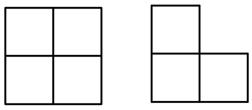
S.10.1. Vai eksistē naturāls skaitlis n, kura visus naturālos dalītājus (ieskaitot 1 un n) var sadalīt 4 grupās tā, lai dalītāju reizinājumi visās grupās būtu vienādi savā starpā? Bet ja dalītājus būtu jādala 13 grupās?

S.10.2. Četrstūrī $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju ar centru O. Taisne t, kas iet caur O, dala $ABCD$ perimetru uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī $ABCD$ laukumu.

S.10.3. Dots, ka x un y – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $xy^2 + x + y + x^2y \geq 4xy$.

S.10.4. Ir 100 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 51 svēršanu noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

S.10.5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 1. zīm., pie tam abu veidu gabali ir vienādā skaitā. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.



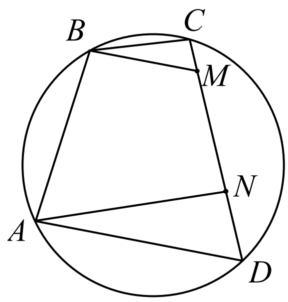
1. zīm.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + 15x = 2^y$.

S.11.2. Dots, ka x un y – pozitīvi skaitļi un pastāv sakarības $x + y \geq 4$ un $y - x \geq -2$. Atrast izteiksmes $\frac{y}{x}$ mazāko iespējamo vērtību.

S.11.3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Uz malas CD atlikti punkti M un N tādi, ka $BM \parallel AD$ un $AN \parallel BC$ (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka punkti A, B, M, N atrodas uz vienas riņķa līnijas.



2. zīm.

S.11.4. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt:

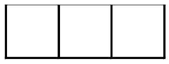
a) ja $x + y > n$, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram;

b) ja $x + y \leq n$, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

S.11.5. Kvadrāts ar izmēriem 1×1 sadalīts dažos izliektos četrstūros. Pierādīt, ka visu četrstūru visu malu kvadrātu summa nav mazāka par 4.

S.12. Divpadsmitā klase

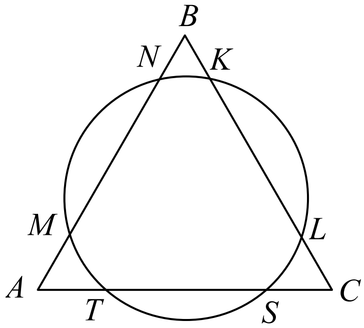
S.12.1. Kādu mazāko daudzumu rūtiņu jāatzīmē kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, lai katra 3. zīm. attēlotā figūra (tās var būt novietotas arī citādi) saturētu vismaz vienu atzīmētu rūtiņu?



3. zīm.

S.12.2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x+y+xy=2010$.

S.12.3. Dots, ka ΔABC ir regulārs; riņķa līnija krusto tā malas, kā parādīts 4. zīm. Pierādīt, ka $AM+BK+CS=AT+CL+BN$.



4. zīm.

S.12.4. Dots, ka a, b, $c > 1$ un $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. Pierādīt, ka

$$\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}.$$

S.12.5. Izstrādāt paņēmienu, kā no patvaļīgiem reāliem skaitļiem a, b, c, d iegūt izteiksmju $ac-bd$ un $ad+bc$ skaitliskās vērtības, izmantojot tikai trīs reizināšanas operācijas. Saskaitīšanu un atņemšanu daudzums var būt patvaļīgs; dalīšana nav pieļauta.

R. LATVIJAS 60. RAJONA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

R.9. Devītā klase

R.9.1. Atrast kaut vienu kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir

a) $\sqrt{2}+1$;

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Piezīme. Katrā uzdevuma daļā runā par citu kvadrātvienādojumu.

R.9.2. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2+r^2=d^2$.

R.9.3. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē dots punkts P. Pierādīt: attālumu, kas vilkti no punkta P līdz ΔABC malām, summa nav garāka par ΔABC garāko augstumu.

R.9.4. Ap apaļu galdu sēž zēni un meitenes, zēnu ir trīs reizes vairāk nekā meiteņu. Tādu vietu, kur blakus sēž zēns un meitene, ir divreiz mazāk nekā pārējo vietu (t. i., tādu, kur blakus sēž vai nu zēns un zēns, vai meitene un meitene). Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits?

R.9.5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2+y=z^2 \\ y^2+x=z^2 \end{cases}$.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. a) Dots, ka $x+y=n$. Pierādīt, ka $x^2+y^2\geq\frac{n^2}{2}$.

b) Dots, ka $x+y+z=n$. Pierādīt, ka $x^2+y^2+z^2\geq\frac{n^2}{3}$.

R.10.2. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a. Pierādīt, ka $(a-b)^3$ dalās ar $a\cdot b$. Vai noteikti $(a-b)^2$ dalās ar $a\cdot b$?

R.10.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC augstums no taisnā leņķa B virsotnes ir BD. Trijstūros ABD un BCD ievilkto riņķu centri ir O_1 un O_2. Pierādīt, ka ΔABC un ΔO_1DO_2 ir līdzīgi savā starpā.

R.10.4. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3=y!+2$.

R.10.5. Turnīrā piedalās 6 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās trīs pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Dots, ka p un q ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka

a) $x_1^2+x_2^2$;

b) $x_1^8+x_2^8$;

c) $x_1^5+x_2^5$

ir vesels skaitlis.

R.11.2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{y}=7$.

R.11.3. Dots, ka $a>b>c>d$. Pierādīt, ka $a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}\geq 6$.

Kad pastāv vienādība?

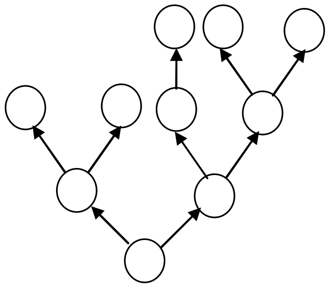
R.11.4. Dots, ka *ABCD* ir izliekts četrstūris, kas nav paralelograms. Taisne, kas novilkta caur diagonāļu viduspunktiem, krusto malas *AB* un *CD* attiecīgi iekšējos punktos *M* un *N*. Pierādīt, ka trijstūru *ABN* un *CDM* laukumi ir vienādi savā starpā.

R.11.5. Turnīrā piedalās 8 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās četros pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 5. Kāda ir mazākā iespējamā skaitļa $(n^2-1)(n^2-4)+7$ ciparu summa? Pie kādām n vērtībām tā tiek sasniegta?

R.12.2. Aplīšos 5. zīm jāizvieto pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 10 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katra bultiņa ietu no mazāka skaitļa uz lielāku skaitli. Cik dažādus izvietojumus var izveidot?



5. zīm.

R.12.3. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=2-x^2-y^2$.

R.12.4. Riņķī ievilkta sešstūra *ABCDEF* diagonāles *AD*, *BE* un *CF* krustojas vienā punktā. Pierādīt: sešstūra malas var sadalīt 2 grupās pa 3 malām katrā tā, ka abās grupās iekļauto malu garumu reizinājumi ir vienādi savā starpā.

R.12.5. Regulārā 20-stūrī katrā virsotnē ir pa vienai monētai. Ar vienu gājienu var izvēlēties 2 monētas un tās pārbīdīt: vienu uz blakus virsotni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, otru uz blakus virsotni pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var savākt visas monētas

a) 4 kaudzēs pa 5 monētām katrā;

b) 5 kaudzēs pa 4 monētām katrā?

V. LATVIJAS 60. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

V.9. Devītā klase

V.9.1. Vai iespējams, ka kvadrātvienādojuma $x^2 - a^2x + b^2 = 0$, a un b – naturāli skaitļi, saknes ir divu dažādu naturālu skaitļu kvadrāti?

V.9.2. Trijstūrī ABC nogriežņi AM un CN ir bisektrises un punkts O ir CN viduspunkts. Zināms, ka $\angle ABC = 90°$ un caur punktiem B, M, O un N var novilkt riņķa līniju. Atrast $\angle BAC$ vērtību.

V.9.3. Par *skaistu* sauksim tādu naturālu skaitli, kas nedalās ne ar vienu no cipariem savā decimālajā pierakstā (neviens skaitlis nedalās ar 0). Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu visi var būt *skaisti*?

V.9.4. Rūtiņu lapā novietoti divi taisnstūri (var būt sakrītoši) tā, ka to malas iet pa rūtiņu malām. Teiksim, ka punkts pieder taisnstūrim, ja tas atrodas taisnstūra iekšpusē vai uz tā kontūra. Cik no astoņām šo divu taisnstūru virsotnēm var vienlaicīgi piederēt arī otram taisnstūrim?

V.9.5. Taisnstūris ar izmēriem $5 \times n$ rūtiņas izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Vienā gājienā drīkst mainīt trīs blakus rūtiņu, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā, krāsojumu uz pretējo. Vai, veicot šādus gājienus vairākkārt, var panākt, ka visas rūtiņas ir vienā krāsā, ja

a) $n = 5$;
b) $n = 3$?

V.10. Desmitā klase

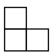
V.10.1. Trijstūra malu garumi ir a, b un c. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

V.10.2. Dots, ka $|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = ... = 20|a_{20} - a_1|$. Pierādīt, ka $a_1 = a_2 = ... = a_{20}$.

V.10.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC leņķa BAC bisektrise krusto malu BC punktā D. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un AC viduspunkti. Pierādīt, ka $\angle MDN \geq \angle BAC$.

V.10.4. Mūzikas festivālā piedalās 7 mūziķi. Katru dienu uzstājas tieši 4 no viņiem. Kāds ir mazākais iespējamais dienu skaits festivālā, pēc kura katriem diviem mūziķiem būs tāda diena, kurā viņi abi ir uzstājušies?

V.10.5. Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var sadalīt 13 taisnstūros ar izmēriem 2×3 rūtiņas un vienā *stūrītī*  ?

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 8.$$

V.11.2. Atrast visas tādas pozitīvu skaitļu virknes $a_1, a_2, ..., a_n$, kurām katram $k \geq 1$ izpildās nosacījums: $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_k^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_k)^2$.

V.11.3. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* nogriežņi *BQ* un *CP* ir augstumi. Caur punktiem *A*, *P* un *Q* ir novilkta riņķa līnija ω. No punkta *Q* pret taisni *AB* vilktais perpendikuls *QM* krusto riņķa līniju ω punktā *T*. Zināms, ka *TB* ir riņķa līnijas ω pieskare un $AT = TB$. Pierādīt, ka $AB = AC$.

V.11.4. Par Fibonači skaitļu virkni sauc virkni $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$ pie $i \geq 1$. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim *n* Fibonači skaitļu virknē ir tāds virknes loceklis, kas dalās ar *n*.

V.11.5. Starp 10 pilsētām ir uzbūvēti 24 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas un starp katrām 2 pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas. Zināms, ka no katras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz katru citu, braucot tikai pa ceļiem (iespējams, caur citām pilsētām).

a) Pierādīt, ka no katras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz katru citu, izbraucot caur ne vairāk kā 3 pilsētām.

b) Pierādīt, ka a) punkta apgalvojums nav spēkā, ja ir tikai 23 ceļi.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Doti *n* skaitļi $-2 \leq x_1, x_2, ..., x_n \leq 2$, kuru summa ir 0. Pierādīt, ka

$$\left|x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3\right| \leq 2n.$$

V.12.2. Dota skaitļu virkne $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_i = p \cdot a_{i-1} + q \cdot a_{i-2}$ pie $i \geq 3$ (*p*, *q* – doti naturāli skaitļi). Zināms, ka katram naturālam skaitlim *n* eksistē tāds virknes loceklis a_k, ka a_k dalās ar *n*. Pierādīt, ka $p = q = 1$.

V.12.3. Trijstūrī *ABC* mediānas *AK*, *BG* un *CF* krustojas punktā *O*. Uz malas *CB* atzīmēti punkti *P* un *Q* tā, ka $CP = BQ < CK$. Taisne *AP* krusto *BG* punktā *D*, bet *CF* – punktā *H*. *AQ* krusto *BG* punktā *J*, bet *CF* – punktā *E*. Pierādīt, ka trijstūru *OHD* un *OEJ* laukumi ir vienādi.

V.12.4. Naturāli skaitļi no 1 līdz *k* kaut kādā secībā ir uzrakstīti pa apli (katrs tieši vienu reizi). Zināms, ka katram *d*, $2 \leq d \leq k-1$, izpildās šāda īpašība: dalot ar *k* visas iespējamās *d* pēc kārtas sekojošu skaitļu summas, iegūst visus iespējamos atlikumus. Vai ir iespējams, ka

a) $k = 7$;

b) $k = 8$?

V.12.5. Dotas 100 kredītkartes, katrā no kurām atrodas dažādas naudas summas. Ir pieejama tāda ierīce, kurā ieliekot 4 kredītkartes, tā paziņo, kurā no šīm četrām kredītkartēm ir otra lielākā naudas summa. Pierādīt, ka var noskaidrot, kurā no visām kredītkartēm ir lielākā naudas summa, lietojot šo ierīci

a) 100 reizes;

b) 99 reizes.

A. LATVIJAS 37. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.9. Devītā klase

A.9.1. Naturālus skaitļus no 1 līdz 2*N* jāsadala *N* pāros tā, lai katra pāra skaitļu summa būtu pirmskaitlis, pie tam šīm *N* summām jābūt dažādām. Vai to iespējams izdarīt, ja

a) $N = 5$;

b) $N = 10$?

A.9.2. Četri atšķirīgi punkti *A*, *B*, *C* un *D* atrodas uz parabolas $y = x^2$. Nogriežņi *AB* un *CD* krustojas punktā *E*. Pierādīt, ka *E* nevar būt vienlaicīgi gan *AB*, gan *CD* viduspunkts!

A.9.3. Naturāla skaitļa *n* pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar $d(n)$. Piemēram, $d(1) = 1$, $d(6) = 4$ utt. Sauksim skaitli *n* par *apaļīgu*, ja tas dalās ar $d(n)$.

a) Atrast piecus *apaļīgus* pāra skaitļus.

b) Pierādīt, ka *apaļīgu* pāra skaitļu ir bezgalīgi daudz.

A.9.4. Kvadrātā ar izmēriem 2010×2010 rūtiņas, sākot ar apakšējo kreiso rūtiņu, pēc kārtas tiek ierakstīti naturālie skaitļi kā parādīts 6. zīm. (katrā rūtiņā ierakstīts viens skaitlis).

Piemēram, skaitlis 19 ierakstīts ceturtajā rindā, trešajā kolonnā.

a) Kurš skaitlis ierakstīts 20. rindā, 10. kolonnā?

b) Kurā rindā un kurā kolonnā atrodas rūtiņa, kurā ierakstīts skaitlis 2010?

...	…						
7.	22	…					
6.	21	…					
5.	11	20	…				
4.	10	12	19	…			
3.	4	9	13	18	…		
2.	3	5	8	14	17	…	
1.	1	2	6	7	15	16	…
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**...**

6. zīm.

A.9.5. Dota tabula ar izmēriem 7×8 rūtiņas (7 rindiņas, 8 kolonnas), tabulas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. 7. zīm. attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek tabulas iekšpusē.

Kurās no pārējām trijām tabulas stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

X			
		X	
	A		
X			X

7. zīm.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Dots, ka x_1, x_2, x_3, x_4 – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_2+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_4}+\frac{x_4+x_2}{x_4+x_1}\geq 4.$$

A.10.2. Kāds ir lielākais punktu skaits, ko var izvēlēties uz riņķa līnijas ar rādiusu 1 tā, lai nebūtu trīs tādu izvēlētu punktu *A*, *B*, *C*, ka visi attālumi *AB*, *AC* un *BC* ir mazāki par 1?

A.10.3. Paralelograma *ABCD* leņķis *ABC* ir plats. Ja no virsotnēm *B* un *D* velk perpendikulus pret paralelograma savstarpēji paralēlajām malām (*AD* un *BC* vai *CD* un *AB*), tad, neatkarīgi no tā, kurš malu pāris izvēlēts, attālums starp šo perpendikulu krustpunktiem ar diagonāli *AC* ir 2 centimetri. Aprēķināt *ABCD* laukumu, ja zināms, ka diagonāļu *AC* un *BD* garumu attiecība ir $7:4$.

A.10.4. Cik dažādos veidos skaitli 2010 var izteikt kā vismaz divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Saskaitāmo secība nav svarīga.

A.10.5. Sētnieka Bernharda pienākumos ietilpst notīrīt sniegu apkārt privātmājas žogam. Žogs veido izliektu daudzstūri un tā kopgarums ir 2010 metri. Sniegam jābūt notīrītam visos tajos un tikai tajos punktos, kas atrodas ne tālāk kā 1 metru uz ārpusi no žoga.

a) Pierādīt, ka teritorijas, kas Bernhardam jānotīra, laukums nav atkarīgs no žoga veidotā izliektā daudzstūra formas!

b) Cik m^2 liela ir teritorija, kas sētniekam jānotīra?

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Dotas trīs aritmētiskas progresijas:

(1) 8, 19, 30, 41, 52, …;
(2) 8, 21, 34, 47, 60, …;
(3) 4, 21, 38, 55, 72, … .

a) Atrast mazāko skaitli, kas pieder visām trim dotajām virknēm!

b) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm!

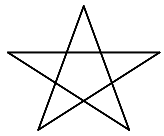
A.11.2. Atrisināt reālos skaitļos nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} a^2b^2+3\leq 4c \\ b^2c^2+3\leq 4a \\ c^2a^2+3\leq 4b \end{cases}.$$

A.11.3. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles *AC* un *BD* vienlaikus ir attiecīgi leņķu *BAD* un *CDA* bisektrises. *BC* garums ir *a*, bet *AD* garums ir 2*a*. Noteikt *ABCD* laukumu!

A.11.4. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2010. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Vienā gājienā jāizvēlas vienu no pašlaik uz tāfeles uzrakstītā skaitļa *N* dalītājiem $d>1$, jāatņem to no *N*, jānodzēš no tāfeles *N* un tā vietā jāuzraksta iegūtā starpība $N-d$. Gājienus izdara pēc kārtas. Zaudē tas, kurš iegūst 0. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvarēs – tas, kurš sāk, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

A.11.5. Naturālu skaitli n sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē slēgta lauzta līnija ar n posmiem, kura katru savu posmu krusto tieši 2 reizes. Tā piemēram, 5 ir *sakarīgs* skaitlis, skat. 8. zīm. Noskaidrot, kādiem naturāliem k skaitlis 2^k ir *sakarīgs*!



8. zīm.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Atrast izteiksmes $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x$ vislielāko un vismazāko vērtību!

A.12.2. Trijstūrī ABC uz malas BC atlikts punkts K, uz malas AC – punkts M. Caur šiem punktiem novilktas taisnes paralēli trijstūra malām: $KL \| AC$ un $ML \| BC$. KL krusto malu AB punktā P, ML krusto malu AB punktā Q. Zināms, ka $AQ^2 + PB^2 = PQ^2$. Pierādīt, ka $AC \cdot BC = 2MC \cdot KC$!

A.12.3. Atrast visus tādus naturālus skaitļus n, ka skaitļi n, $d(n)$ un $d(d(n))$ veido dilstošu aritmētisko progresiju. ($d(x)$ ir skaitļa x naturālo dalītāju skaits.)

A.12.4. Trijstūra malu garumi ir a, b, c; augstumi atbilstoši pret malām a, b, c šajā trijstūrī ir h_a, h_b, h_c. Pierādīt:

$$2(ah_a + bh_b + ch_c) \le (ah_b + ah_c + bh_a + bh_c + ch_a + ch_b)!$$

A.12.5. Uz galda atrodas n cepumi, kur n – naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pēc kārtas ēd pa x^3 cepumiem, kur x – naturāls skaitlis (dažādiem gājieniem x var būt atšķirīgs). Tas, kam nav ko ēst, zaudē. Pierādīt: ir bezgalīgi daudz tādu n, ka, pareizi spēlējot, uzvar otrais spēlētājs!

VP. LATVIJAS 60. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

VP.1. Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām $n \ge 10$ ir spēkā nevienādība:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} \ge 1{,}8 .$$

VP.2. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris, kura visi malu garumi ir atšķirīgi. Pierādīt, ka no katras malas viduspunkta pret pretējo malu vilktie perpendikuli krustojas vienā punktā.

VP.3. Atrast visas veselās x vērtības, kurām izteiksmes $|\,4x^3 - 20x^2 - 21x - 5\,|$ vērtība ir pirmskaitļa pakāpe.

VP.4. Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusu apzīmēsim ar r, bet apvilktās riņķa līnijas rādiusu – ar R. Pierādīt, ka patvaļīgā trijstūrī ir spēkā sakarība $2r \le R$.

VP.5. Laflandijā ir 200 pilsētas, starp kurām ir uzbūvēti 1500 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas, starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš. Pierādīt, ka var atrast tādas 4 dažādas pilsētas A, B, C, D, starp kurām ir uzbūvēti ceļi AB, BC, CD un DA.

IMO. 51. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE (51ST INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD)

IMO uzdevumi 2010. gada 7. jūlijā

IMO.1. Atrast visas funkcijas $f: R \to R$, tādas, ka vienādība

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

izpildās visiem $x, y \in R$.

<u>Piezīme.</u> Ar $[z]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz z.

IMO.2. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, un ap šo trijstūri apvilktā riņķa līnija ir Γ. Taisne AI krusto Γ punktos A un D. Punkts E ir izvēlēts uz loka BDC un punkts F uz malas BC tā, ka $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Punkts G ir IF viduspunkts. Pierādīt, ka taišņu DG un EI krustpunkts atrodas uz riņķa līnijas Γ.

IMO.3. Atrast visas funkcijas $f: N \to N$ tādas, ka $(f(m)+n)(m+f(n))$ ir naturāla skaitļa kvadrāts visiem $m, n \in N$, kur N ir naturālo skaitļu kopa.

IMO uzdevumi 2010. gada 8. jūlijā

IMO.4. Punkts P atrodas trijstūra ABC iekšpusē. Taisnes AP, BP un CP vēlreiz krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju Γ attiecīgi punktos K, L un M. Pieskare, kas novilkta riņķa līnijai Γ punktā C, krusto taisni AB punktā S. Zināms, ka $SC = SP$. Pierādīt, ka $MK = ML$.

IMO.5. Katrā no sešām kastēm $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ sākotnēji atrodas pa vienai monētai. Ar tām iespējams veikt divu veidu darbības:

- Izvēlas jebkuru netukšu kasti B_j, $1 \le j \le 5$, no tās izņem vienu monētu un kastē B_{j+1} ieliek divas monētas.
- Izvēlas jebkuru netukšu kasti B_k, $1 \le k \le 4$, no tās izņem vienu monētu un kastes B_{k+1} (iespējams tukšas) saturu samaina vietām ar kastes B_{k+2} (iespējams tukšas) saturu.

Noskaidrojiet, vai eksistē kāda galīga šādu darbību virkne, kuras rezultātā B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 būs tukšas, bet kastē B_6 būs tieši $2010^{2010^{2010}}$ monētas. (Atcerieties, ka $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

IMO.6. Dota reālu pozitīvu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un naturāls skaitlis r, tādi, ka visiem $n > r$ izpildās $a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$. Pierādīt, ka eksistē naturāli skaitļi l un N, tādi, ka $l \le r$ un visiem $n \ge N$ izpildās $a_n = a_l + a_{n-l}$.

AB. ATLASES SACENSĪBAS OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2009”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Apzīmēsim $f(x)=x^2+2009x+1$. Dots, ka n – pozitīvs vesels skaitlis. Pierādīt, ka vienādojumam $\underbrace{f(f(...(f}_{n \text{ reizes}}(x))...)=0$ ir vismaz viena reāla sakne.

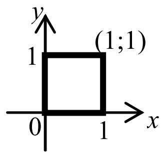
AB.A.2. Dots, ka a un b ir reāli skaitļi, $a>1$ un $b>1$. Pierādīt, ka $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8$.

AB.A.3. Dots, ka c un d ir pozitīvi reāli skaitļi un $c+d=1$; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ir pozitīvi reāli skaitļi un $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=1$. Pierādīt, ka

$$(cx_1+d)(cx_2+d)(cx_3+d)(cx_4+d)(cx_5+d)\geq 1.$$

AB.A.4. Funkcijas $f(t)$ un $g(t)$ definētas visiem reāliem t un pieņem reālas vērtības. Vai iespējams, ka visiem reāliem x vienlaicīgi pastāv vienādības $g\big(f(x)\big)=x^3$ un $f\big(g(x)\big)=x^2$?

AB.A.5. Vai eksistē divu argumentu polinoms $P(x,y)$ ar īpašību: $P(x,y)=0$ tad un tikai tad, ja punkts ar koordinātām (x; y) pieder 9. zīm. parādītā kvadrāta robežai?



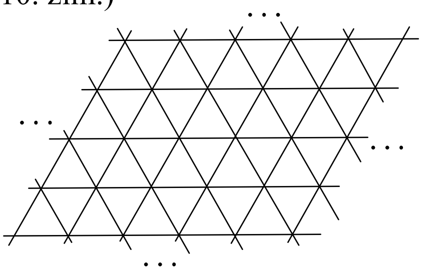
9. zīm.

AB.K. Kombinatorika

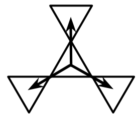
AB.K.1. Šaha turnīrā piedalījās divu dažādu cilšu rūķīši: votivapas un šillišallas. Katrs dalībnieks ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Par uzvaru partijā spēlētājs iegūst 1 punktu, par neizšķirtu ½ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Katrs dalībnieks, spēlējot pret votivapām, ieguva tikpat punktu, cik spēlējot pret šillišallām. Pierādīt, ka kopējais dalībnieku skaits ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

AB.K.2. Kvadrāts sastāv no 9×9 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu rūtiņu centru pietiek nokrāsot melnus, lai uz katras taisnes, kas iet kaut caur vienas rūtiņas centru un paralēla vai nu kvadrāta malai, vai diagonālei, atrastos kaut viens melns punkts?

AB.K.3. Novelkot trīs paralēlu taišņu saimes, plakne sadalīta vienādos regulāros trijstūros (skat. 10. zīm.)



10. zīm.



11. zīm.

Sprīdītis atrodas vienā no šiem trijstūriem (apzīmēsim to ar Δ). Viņš dodas pastaigā pa plakni. Ar vienu gājienu Sprīdītis var pāriet no trijstūra *T*, kurā viņš atrodas, uz jebkuru no tiem trijstūriem, kas simetriski *T* attiecībā pret kādu no *T* virsotnēm (skat. 11. zīm.).

Vai, izdarot šādus gājienus vairākkārt, Sprīdītis var nonākt trijstūrī, kam ar Δ ir tieši viena kopīga mala?

AB.K.4. Sākumā dots trijstūris *T* ar malu garumiem a, b, c; apzīmēsim tā pusperimetru ar p. Cenšamies izveidot jaunu trijstūri ar malu garumiem $p-a$, $p-b$, $p-c$. Ja tas izdodas, ar jauno trijstūri mēģinām darīt to pašu, utt.

Kuriem sākotnējiem trijstūriem šis process turpināsies bezgalīgi?

AB.K.5. Desmit skolēni piedalījās dažādās olimpiādēs; katrs piedalījās tieši trijās. Katriem diviem skolēniem ir vismaz viena olimpiāde, kurā viņi abi ir piedalījušies.

a) Vai var būt, ka nevienā olimpiādē nepiedalījās vairāk kā 5 skolēni?

b) Vai var būt, ka nevienā olimpiādē nepiedalījās vairāk kā 4 skolēni?

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Perpendikulāri katram nogrieznim, kas savieno divas kuba virsotnes, caur šī nogriežņa viduspunktu novilkta plakne. Cik daļās šīs plaknes sadala kubu?

AB.Ģ.2. Dots, ka trijstūrī *ABC* pastāv vienādība $AC = BC$. Ievilktā riņķa līnija pieskaras malām *AB* un *BC* atbilstoši punktos *D* un *E*. Taisne *t*, kas nesakrīt ar taisni *AE*, iet caur *A* un krusto ievilkto riņķa līniju punktos *F* un *G*. Taisnes *EF* un *EG* krusto taisni *AB* atbilstoši punktos *K* un *L*. Pierādīt, ka $DK = DL$.

AB.Ģ.3. Vairāki (vismaz 3) plaknes punkti nokrāsoti sarkani; nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Ir zināms: katru triju sarkano punktu veidotā trijstūra apvilktās riņķa līnijas centrs ir sarkans. Vai var gadīties, ka sarkano punktu ir galīgs skaits?

AB.Ģ.4. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris *ABCD*; tā diagonāles krustojas punktā *S*. Malu *BC* un *AD* viduspunkti ir atbilstoši *M* un *N*. No punkta *S* pret taisnēm *AB* un *CD* novilkti perpendikuli; to pamati ir atbilstoši *E* un *F*. Pierādīt, ka $MN \perp EF$.

AB.Ģ.5. Regulāra trijstūra *ABC* iekšpusē atrodas punkts *M*. Pierādīt, ka

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 < 2AB^2.$$

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3$.

AB.S.2. Kāds ir mazākais pirmskaitlis, ar kuru dalās kaut viens no skaitļiem $n^2+5n+23$, kur n – naturāls?

AB.S.3. Dots, ka n – nepāra naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $2^{n!}-1$ dalās ar n.

AB.S.4. Pieņemsim, ka naturālam n piemīt īpašība: ja n dalās ar p (p – jebkurš pirmskaitlis), tad n dalās ar p^2. Šādu naturālu skaitli n sauksim par piesātinātu. Piemēram, skaitlis $200=2^3\cdot 5^2$ ir piesātināts, bet skaitlis $20=2^2\cdot 5$ nav.
Skaitli n sauksim par superpiesātinātu, ja gan n, gan $n+1$ abi ir piesātināti.
Vai superpiesātinātu skaitļu ir bezgalīgi daudz?

AB.S.5. Naturāli skaitļi no 1 līdz 2009 ieskaitot izrakstīti rindā bez atstarpēm kaut kādā secībā katrs tieši vienu reizi. Iegūto ciparu virkni uzskatām par skaitļa x decimālo pierakstu. Vai var gadīties, ka $x=2^y$, kur y – kaut kāds naturāls skaitlis?

BW. MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2009”

BW.A. Algebra

BW.A.1. n-tās ($n \geq 2$) pakāpes polinomam $p(x)$ ir tieši n reālas saknes (skaitot arī atkārtojumus). Zināms, ka koeficients pie x^n ir 1, ka neviena sakne nav lielāka par 1 un ka $p(2) = 3^n$. Kādas ir iespējamās $p(1)$ vērtības?

BW.A.2. Doti nenegatīvi veseli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, kas apmierina nevienādību

$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq$
$\leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$

Pierādīt, ka $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

BW.A.3. Dots naturāls skaitlis n. Pierādiet, ka skaitļus $c_k \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq k \leq n$) var izvēlēties tā, ka $0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4$.

BW.A.4. Atrast visus naturālos skaitļus $n > 1$, kuriem visām reālām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vērtībām izpildās nevienādība

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n.$$

BW.A.5. Dots, ka $f_0 = f_1 = 1$ un $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ ($i \geq 0$). Atrast visas reālās saknes vienādojumam $x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}$.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. a un b ir tādi veseli skaitļi, ka vienādojuma $x^3 - ax^2 - b = 0$ trīs saknes ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka $b = dk^2$, kur d un k ir veseli skaitļi un a dalās ar d.

BW.S.2. Dots, ka pirmskaitlim p un veseliem skaitļiem a, b, c izpildās:

$$6 \mid p+1, \qquad p \mid a+b+c, \qquad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Pierādīt, ka $p \mid a, b, c$.

BW.S.3. Atrast visus naturālos n, kuriem eksistē kopas $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$ sadalījums divās apakškopās, tāds, ka vienas apakškopas visu elementu reizinājums ir vienāds ar otras apakškopas visu elementu reizinājumu.

BW.S.4. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem $2^{n+1} - n^2$ ir pirmskaitlis.

BW.S.5. Ar $d(k)$ apzīmē naturāla skaitļa k pozitīvo dalītāju skaitu. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu M, kurus nevar izteikt formā $M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$ ne pie kāda naturāla n.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. *M* ir trijstūra *ABC* malas *AC* viduspunkts, un *K* atrodas uz stara *BA* aiz punkta *A*. Taisne *KM* krusto malu *BC* punktā *L*. *P* ir punkts uz nogriežņa *BM*, tāds, ka *PM* ir leņķa *LPK* bisektrise. Taisne ℓ iet caur punktu *A* un ir paralēla *BM*. Pierādīt, ka punkta *M* projekcija uz taisnes ℓ atrodas uz taisnes *PK*.

BW.Ģ.2. Četrstūrī *ABCD* $AB \parallel CD$ un $AB = 2CD$. Taisne ℓ iet caur punktu *C* un ir perpendikulāra *CD*. Riņķa līnija ar centru punktā *D* un rādiusu *DA* krusto taisni ℓ punktos *P* un *Q*. Pierādīt, ka $AP \perp BQ$.

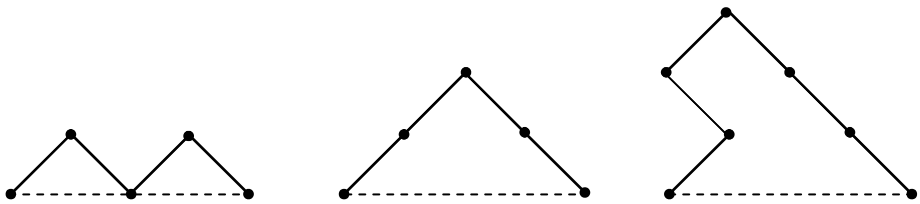
BW.Ģ.3. Nogriežņi *AD*, *BE* un *CF* ir trijstūra *ABC* augstumi, *H* – augstumu krustpunkts. Punkti I_1, I_2, I_3 ir attiecīgi trijstūros *EHF*, *FHD*, *DHE* ievilkto riņķa līniju centri. Pierādīt, ka taisnes AI_1, BI_2, CI_3 krustojas vienā punktā.

BW.Ģ.4. Kādiem $n \geq 2$ var atrast *n* trijstūrus $A_1, A_2, ..., A_n$, tādus, ka starp tiem nav divu līdzīgu un katru no tiem var sagriezt *n* trijstūros, pirmais no kuriem ir līdzīgs A_1, otrais līdzīgs A_2, ..., *n*-tais līdzīgs A_n?

BW.Ģ.5. Kvadrāts ar malas garumu 1 ir sagriezts *m* četrstūros $Q_1, ..., Q_m$. Katram $i = 1, ..., m$ ar S_i apzīmēsim četrstūra Q_i visu malu garumu kvadrātu summu. Pierādīt, ka $S_1 + ... + S_m \geq 4$.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. *n-tronder* ceļš ir sevi nekrustojoša lauzta līnija, kas sākas punktā $(0,0)$, beidzas punktā $(2n,0)$, neiziet ārpus pirmā kvadranta un kuras katrs posms ir viens no vektoriem $(1,1)$, $(1,-1)$ vai $(-1,1)$. (12. zīm. ir attēloti iespējamie 2-*tronder* ceļi.) Nosakiet *n-tronder* ceļu skaitu katram *n*.



12. zīm.

BW.K.2. Atrast lielāko naturālo *n*, tādu, ka eksistē *n* dažādi veseli skaitļi, kas nedalās ne ar vienu no skaitļiem 7, 11, 13, bet jebkuru divu šo skaitļu summa dalās vismaz ar vienu no skaitļiem 7, 11, 13.

BW.K.3. Dots, ka $n > 2$ ir naturāls skaitlis. Kādā valstī ir *n* pilsētas un starp katrām divām no tām ir uzbūvēts tieši viens ceļš. Katram ceļam kā numuru piešķir skaitli no kopas $\{1, 2, ..., m\}$ (dažādiem ceļiem var būt viens un tas pats numurs). Pilsētas kods ir to ceļu numuru summa, kas iziet no šīs pilsētas. Atrast mazāko *m*, pie kura ir iespējams, ka visām *n* pilsētām ir dažādi kodi.

BW.K.4. Pasākumā piedalās 8 dalībnieki. Katri divi dalībnieki vai nu ir, vai nu nav savstarpēji pazīstami. Zināms, ka katrs dalībnieks ir pazīstams ar tieši trīs citiem. Noskaidrojiet, vai šādi divi nosacījumi var izpildīties vienlaicīgi:

- starp katriem trijiem dalībniekiem var atrast divus, kuri nav pazīstami;
- starp katriem četriem dalībniekiem var atrast divus, kuri ir pazīstami.

BW.K.5. Baltijas ceļa galvaspilsētā ir 16 slimnīcas. Katru nakti dežūrē tieši 4 no tām. Vai ir iespējams dežūru sarakstu sastādīt tā, ka pēc 20 naktīm katras divas slimnīcas vienlaicīgi ir dežūrējušas tieši vienu reizi?

IETEIKUMI

I.S. LATVIJAS 22. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.S.9. Devītā klase

I.S.9.1. Izmantojiet formulu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ un atcerieties, ka $m^2 \geq 0$.

I.S.9.2. Ievērojiet, ka, saskaitot mazākos skaitļus, iegūst mazākās summas un saskaitot lielākos skaitļus iegūst lielākās summas.

I.S.9.3. Pierādiet, ka $\Delta ABJ = \Delta BCK$. Atcerieties trijstūra viduslīnijas definīciju un īpašību.

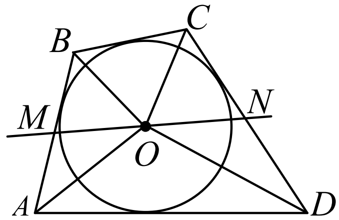
I.S.9.4. Parādiet, ka pirmais spēlētājs vienmēr var panākt uzvaru.

I.S.9.5. Ievērojiet, ka $2x - 5$ dalās ar 5, 7, 9 un 11, ja izpildās uzdevuma pēdējās 4 prasības.

I.S.10. Desmitā klase

I.S.10.1. Parādiet, ka eksistē skaitlis, kura visus naturālos dalītājus var sadalīt 4 grupās tā, lai dalītāju reizinājumi visās grupās būtu vienādi savā starpā. Apskatiet skaitli p^{2n-1}, kur p ir pirmskaitlis, lai pierādītu, ka eksistē skaitlis, kura dalītājus var sadalīt 13 grupās.

I.S.10.2. Ievērojiet, ka ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir I.1. zīm. redzamo trijstūru augstumi, un izmantojiet formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} h_a \cdot a$.



I.1. zīm.

I.S.10.3. Izmantojiet formulu $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ un ievērojiet, ka nevienādība ir simetriska pret x un y, tāpēc izdevīgi pārveidot $4xy = 2xy + 2xy$.

I.S.10.4. Pirmajā svēršanā salīdziniet 2 monētas un pēc tam šķirojiet 2 gadījumus.

I.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka n nevar būt mazāks kā 14, un 2) jāparāda piemērs pie $n = 14$.
Ievērojiet, ka

- katra veida figūru ir k, tātad kopējais rūtiņu skaits tajās ir $4k + 3k = 7k$;
- kvadrātā, kura malas garums ir n, pavisam ir $n \cdot n = n^2$ kvadrātiskas rūtiņas.

I.S.11. Vienpadsmitā klase

I.S.11.1. Sadaliet vienādojuma kreiso pusi reizinātajos. Ko var secināt par katru no iegūtajiem reizinātājiem?

I.S.11.2. Uzzīmējiet attiecīgo $(x;\, y)$ punktu apgabalu koordinātu plaknē un atcerieties taisnes virziena koeficienta ģeometrisko jēgu.

I.S.11.3. Izmantojiet šādus faktus:

- leņķi ar savstarpēji paralēlām un vienādi vērstām malām ir vienādi;
- hordas, starp kurām esošie loki ir vienādi, ir paralēlas;
- ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.S.11.4. a) Pieņemiet, ka tāda pāra nav. Palūdziet katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu palūdziet izdarīt meitenēm. Dažādos veidos apskatiet, cik kartītes ir uzrakstītas.
b) Nostādiet zēnus un meitenes pa pāriem aplī un parādiet situāciju, kad nevar atrast zēnu un meiteni, kas patīk viens otram.

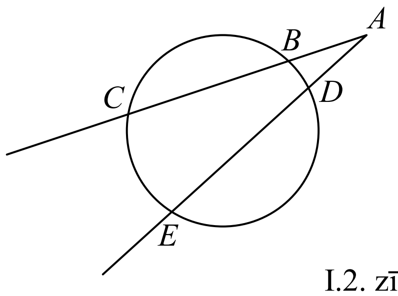
I.S.11.5. Sadaliet katru no četrstūriem divos trijstūros un izmantojiet formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, novērtējumu $|\sin\alpha| \le 1$ un sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: $A \ge G$, lai salīdzinātu dotā kvadrāta laukumu ar trijstūru laukumiem.

I.S.12. Divpadsmitā klase

I.S.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs, ka pietiek ar 8 atzīmētām rūtiņām; 2) jāpierāda, ka ar mazāk nekā 8 rūtiņām nepietiek, apskatot, cik uzdevumā dotās figūras var izvietot kvadrātā ar malas garumu 5.

I.S.12.2. Pārveidojiet $2010 = 2011 - 1$ un izmantojiet to, ka 2011 ir pirmskaitlis.

I.S.12.3. Izmantojiet teorēmu par sekanšu nogriežņu reizinājumiem (skat. I.2. zīm.).



$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

I.2. zīm.

I.S.12.4. Izmantojiet Koši – Bunjakovska nevienādību: katriem diviem skaitļu trijniekiem $(x_1;\, x_2;\, x_3)$ un $(y_1;\, y_2;\, y_3)$ ir spēkā

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) \ge (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 .$$

I.S.12.5. Izmantojiet reizinājumus $(a+b)(c+d)$, ac un bd.

I.R. LATVIJAS 60. RAJONA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.R.9. Devītā klase

I.R.9.1. Abos gadījumos izvēlieties atbilstošu otru sakni un atcerieties, ka katru kvadrāttrinomu var sadalīt reizinātājos: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, kur x_1 un x_2 – saknes.

I.R.9.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, ja $R^2+r^2=d^2$; 2) jāpierāda: ja abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad $R^2+r^2=d^2$. Atcerieties, ka pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta.

I.R.9.3. Sadaliet doto trijstūri trīs mazākos trijstūros tā, ka tiem ir kopīga virsotne punktā *P*. Izsakiet ΔABC laukumu divos dažādos veidos. Atcerieties, ka garākais augstums trijstūrī novilkts pret īsāko malu.

I.R.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka ap galdu nevar sēdēt mazāk kā 12 bērni; 2) jāparāda, kā ap galdu var sasēsties 12 bērni.

I.R.9.5. Pierādiet, ka sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos, pamatojot, ka x^2+y vai y^2+x atrodas starp divu blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem.

I.R.10. Desmitā klase

I.R.10.1. Pierādiet uzdevumā dotās nevienādības:

a) izsakot $y=n-x$;

b) apzīmējot $x=\frac{n}{3}+a$, $y=\frac{n}{3}+b$ un $z=\frac{n}{3}+c$.

I.R.10.2. Lai pierādītu, ka $(a-b)^3$ dalās ar $a\cdot b$, izsakiet $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ un pierādiet, ka katrs saskaitāmais dalās ar $a\cdot b$.

Lai parādītu, ka $(a-b)^2$ ne vienmēr dalās ar $a\cdot b$, atrodiet tādas a un b vērtības, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, bet to starpības kvadrāts nedalītos ar $a\cdot b$.

I.R.10.3. Atcerieties, ka trijstūrī ievilktas riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra bisektrišu krustpunktā. Lai pierādītu, ka trijstūri ir līdzīgi, izmantojiet pazīmi *mlm*.

I.R.10.4. Pierādiet, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos, ja $y\geq 4$. Pārbaudiet vērtības $y=1;2;3$.

I.R.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka turnīra uzvarētāju nevar noteikt jau pēc 3. dienas, atceroties, ka pēc 3 dienām ir palikušas vēl pēdējās 2 kārtas; 2) jāparāda, ka var rasties situācija, kad pēc 4. dienas jau var noteikt turnīra uzvarētāju un zaudētāju.

I.R.11. Vienpadsmitā klase

I.R.11.1. Izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas un Vjeta teorēmu, pārveidojiet dotās summas par izteiksmēm, kas satur p un q.

I.R.11.2. No dotā vienādojuma izsakiet y un novērtējiet pie kādām x vērtībām y ir vesels nenulles skaitlis.

I.R.11.3. Pārveidojiet doto nevienādību lai varētu izmantot faktu, ka $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

I.R.11.4. Sadaliet katru no trijstūriem ABN un CDM divos citos trijstūros tā, lai katram iegūtajam trijstūrim viena no malām būtu MN. Laukumu izteikšanai, izmantojiet formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

I.R.11.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka turnīra uzvarētāju nevar noteikt jau pēc 5. dienas, atceroties, ka pēc 5 dienām ir palikušas vēl pēdējās 2 kārtas; 2) jāparāda, ka var rasties situācija, kad pēc 6. dienas jau var noteikt turnīra uzvarētāju un zaudētāju.

I.R.12. Divpadsmitā klase

I.R.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka skaitļa $(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 7$ ciparu summa nevar būt mazāka kā 7, pierādot, ka visām n vērtībām skaitļa pēdējais cipars būs 7; 2) jāparāda, ka skaitļa ciparu summa var būt 7 un jāatrod visas n vērtības, pie kurām tā tiek sasniegta.

I.R.12.2. Ievērojiet, ka apakšā atradīsies skaitlis 1. Izmantojiet kombinācijas, lai uzzinātu, cik veidos no atlikušajiem 9 skaitļiem var izvēlēties 3 skaitļus „kreisajā" zarā un cik dažādos veidos tos var izkārtot. Līdzīgi apskatiet, cik veidos atlikušos 6 skaitļus var izkārtot „labajā" zarā.

I.R.12.3. Simetrijas pēc pārrakstiet doto vienādojumu kā

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1 - x^2 + 1 - y^2.$$

Pierādiet, ka $\sqrt{1-x^2} = 1 - x^2$ un $\sqrt{1-y^2} = 1 - y^2$, izmantojot to, ka $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ un $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$.

I.R.12.4. Ievērojiet, ka diagonāles sadala sešstūri 3 līdzīgu trijstūru pāros. Izmantojiet malu proporcionalitāti līdzīgajos trijstūros, lai pierādītu uzdevumā prasīto.

I.R.12.5. a) Parādiet piemēru, kā ar 20 gājieniem ir iespējams savākt visas monētas 4 kaudzītēs pa 5 monētām.

b) Pierādiet, ka nav iespējams savākt visas monētas 5 kaudzītēs pa 4 monētām katrā. Izmantojiet invariantu metodi, sanumurējot visas virsotnes no 1 līdz 20 un apskatot monētu aizņemto virsotņu numuru summu (katras virsotnes numuru ieskaitot tik reižu, cik tajā ir monētu).

I.V. LATVIJAS 60. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

I.V.9. Devītā klase

I.V.9.1. Izmantojiet Vjeta teorēmu par vienādojuma sakņu summu un reizinājumu.

I.V.9.2. Ievērojiet: ja četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

I.V.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka nevar būt vairāk kā 5 pēc kārtas sekojoši skaitļi, apskatot tādus 11 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus no k līdz $k+10$ (ieskaitot); 2) jāparāda piemērs, ka eksistē 5 pēc kārtas sekojoši skaisti skaitļi.

I.V.9.4. Ar piemēriem parādiet, ka no astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi otram taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes. Pierādiet, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši 1 un tieši 7 virsotnes.

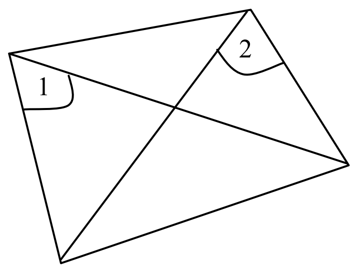
I.V.9.5. a) Parādiet piemēru, kā uzdevuma prasības var izpildīt.
b) Pierādiet, ka šajā gadījumā visas rūtiņas nevar nokrāsot vienā krāsā.

I.V.10. Desmitā klase

I.V.10.1. Apzīmējiet $b+c-a=2x$, $a+c-b=2y$, $a+b-c=2z$ un izsakiet a, b, c ar x, y, z. Pierādiet un izmantojiet nevienādību $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

I.V.10.2. Apzīmējiet vērtības $|a_1-a_2|=2|a_2-a_3|=3|a_3-a_4|=...=20|a_{20}-a_1|$ ar x.

I.V.10.3. Ar E apzīmējiet no virsotnes A vilktā augstuma pamatu, ar F – malas BC viduspunktu. Pierādiet, ka D atrodas starp E un F (vai ar tiem sakrīt, ja ABC ir vienādsānu trijstūris).
Atcerieties: Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad ja $\angle 1=\angle 2$ (skat. I.3.zīm.).



I.3. zīm.

I.V.10.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) parādiet piemēru, ka pietiek ar 5 festivāla dienām, 2) pierādiet, ka ar mazāk dienām nepietiek.

I.V.10.5. Izdomājiet, kā jāizkrāso kvadrāta rūtiņas 3 krāsās (katra rūtiņa citā krāsā), lai varētu viegli secināt, ka kvadrātu nevar sadalīt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

I.V.11. Vienpadsmitā klase

I.V.11.1. Atdaliet pilno kvadrātu $(a+b+c+d)^2$.

I.V.11.2. Izmantojiet indukciju, lai pierādītu, ka $a_i = i,\ i = 1, 2, ..., n$ ir vienīgā virkne, kam izpildās uzdevuma nosacījumi.

I.V.11.3. Izmantojiet hordas-pieskares un ievilktā leņķa īpašības, vienādsānu trijstūra īpašības un pazīmes.

I.V.11.4. Katram naturālam *n* aplūkojiet virkni $\{G_i\}, i \geq 1$, kur G_i ir atlikums, ko iegūst F_i dalot ar *n*. Pierādiet, ka

- virkne $\{G_i\}$ ir periodiska;
- virknei $\{G_i\}$ nav priekšperioda.

I.V.11.5. a) Pieņemiet, ka ir 2 pilsētas, īsākais ceļš starp kurām iet caur vismaz četrām citām pilsētām. Tad šajā ceļā noteikti ir 2 tādas pilsētas, starp kurām īsākais ceļš iet tieši caur 4 citām pilsētām. Apzīmējiet šīs 2 pilsētas ar A_1 un A_6, bet četras pilsētas starp tām – ar A_2, A_3, A_4 un A_5. Ar cik pilsētām no $A_1, A_2, ..., A_6$ var būt savienota katra cita pilsēta *B*, lai pieņēmums būtu spēkā?
b) Parādiet, kā var būt savienotas pilsētas ar ceļiem 23 ceļu gadījumā, lai būtu pilsēta, no kuras uz kādu citu nebūtu iespējams aizbraukt caur mazāk kā 4 citām pilsētām.

I.V.12. Divpadsmitā klase

I.V.12.1. Apzīmējiet $x_i = 2\cos\alpha_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$. Izmantojot tikai $\cos\alpha$, izsakiet $2\cos 3\alpha$. Izmantojiet iegūto vienādību, lai izteiktu $(2\cos 3\alpha)^3$.

I.V.12.2. Apskatiet virknes, kurām vismaz viens no koeficientiem *p* vai *q* ir lielāks nekā 1 jeb $p+q>2$. Ar matemātisko indukciju pierādiet, ka visi virknes $\{a_i\}$ locekļi dod atlikumu 1, dalot tos ar $p+q-1$.

I.V.12.3. Izmantojiet īpašību: ja diviem trijstūriem ir vienādi augstumi, tad pamatu garumu attiecība ir vienāda ar trijstūru laukumu attiecību. No trijstūru mediānu attiecībām iegūstiet, ka

$$S_{OAG} = S_{OGC} = S_{OAF} = S_{OFB} = S_{OBK} = S_{OCK} = S^*.$$

I.V.12.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) parādiet, ka uzdevuma prasības var izpildīt pie $k=7$, ja skaitļus izvieto pa apli pēc kārtas, 2) pierādiet, ka uzdevuma prasības nevar izpildīt pie $k=8$, apskatot 2 blakus esošu skaitļu summas.

I.V.12.5. Ievērojiet: ja uzdevuma prasības var izpildīt ar 99 ierīces lietojumiem, tad ar 100 lietojumiem to arī var izdarīt.
Ar matemātisko indukciju pierādiet: ja ir *n* kredītkartes, ($n \geq 5$), tad ar $n-1$ ierīces lietojumiem pietiek, lai atrastu gan kredītkarti ar vislielāko naudas summu, gan kredītkarti ar otro lielāko naudas summu.
Induktīvā bāze. Pierādiet, ka starp 5 kredītkartēm ar 4 ierīces lietojumiem var atrast kredītkarti ar lielāko naudas summu.

I.A. LATVIJAS 37. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

I.A.9. Devītā klase

I.A.9.1. a) Atrodiet, kā jāsadala pāros skaitļi no 1 līdz 10, lai katrā pārī esošo skaitļu summa būtu pirmskaitlis, pie kam šiem pirmskaitļiem jābūt dažādiem.
b) Apskatiet, kādus pirmskaitļus var iegūt, saskaitot 2 skaitļus no 1 līdz 20. Divos dažādos veidos aprēķiniet visu skaitļu no 1 līdz 20 summu, lai pierādītu, ka nav iespējams izpildīt uzdevuma nosacījumus pie $N=10$.

I.A.9.2. Pieņemiet pretējo – ka punkts E ir abu nogriežņu viduspunkts un apskatiet četrstūri $ACBD$. Izmantojiet taišņu, kas ietver četrstūra malas, vienādojumus un izsakiet to virzienu koeficientus. Atcerieties, ka punkts $(x;x^2)$ pieder funkcijas $y=x^2$ grafikam.

I.A.9.3. a) Pārbaudiet pirmos pāra skaitļus, līdz atrodat 5 *apaļīgus* skaitļus.
b) Apskatiet, kādi dalītāji ir skaitlim p^{n-1}, kur p – pirmskaitlis, n – vesels pozitīvs skaitlis. Pierādiet un izmantojiet to, ka p^{p^n-1} ir *apaļīgs* skaitlis.

I.A.9.4. Ievērojiet, ka uz vienas diagonāles esošām rūtiņām rindas un kolonnas numuru summa ir nemainīgs lielums, sauksim to par diagonāles *invariantu*. Izmantojiet, ka:

- katras diagonāles *invariants* ir par 1 lielāks nekā iepriekšējās diagonāles *invariants*;
- skaitļu skaits, kas ierakstīts katrā nākamajā diagonālē, pieaug par 1.

I.A.9.5. Ievērojiet, ka ir tādas diagonāles, uz kuru rūtiņām sienāzis var nonākt, un tādas, uz kuru nevienu rūtiņu sienāzis nonākt nevar.

I.A.10. Desmitā klase

I.A.10.1. Pierādiet un izmantojiet nevienādību $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$, kas ir spēkā pozitīviem skaitļiem a un b.

I.A.10.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka var izvēlēties 12 punktus uz riņķa līnijas ar rādiusu 1, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, izvēloties regulāra 12-stūra, kas ievilkts riņķa līnijā, virsotnes; 2) jāpierāda, ka nevar izvēlēties vairāk kā 12 šādus punktus.

I.A.10.3. Ievērojiet, ka neatkarīgi no tā, pret kuru malu pāri (AD un BC, vai CD un AB) perpendikuli tiek vilkti, to krustpunkti ar AC ir simetriski attiecībā pret $ABCD$ diagonāļu krustpunktu O. Pierādiet, ka $ABCD$ – rombs un aprēķiniet tā diagonāļu garumus, lai aprēķinātu romba laukumu. Atcerieties, ka trijstūrī visi augstumi krustojās vienā punktā.

I.A.10.4. Ievērojiet, ka pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisku progresiju (ar diferenci 1), kuras pēc kārtas ņemtu n locekļu $a,\ a+1,\ldots,\ a+n-1$ summa ir

$$\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}.$$

I.A.10.5. **a)** Ievērojiet, ka teritorija, kas sētniekam jānotīra sastāv no taisnstūriem un riņķa sektoriem. Pierādiet, ka neatkarīgi no žoga formas taisnstūru laukumu summa būs vienāda un tīrāmo riņķa sektoru laukumu summa būs vienāda ar riņķa, kura rādiuss ir 1, laukumu.
b) Izmantojiet a) daļā pierādīto, aprēķinot tīrāmās teritorijas platību.

I.A.11. Vienpadsmitā klase

I.A.11.1. **a)** Izmantojiet pirmo divu progresiju vispārīgo locekļu formulas, lai izteiktu vispārīgo formulu skaitļiem, kas pieder pirmajām divām progresijām. Ievērojiet, ka trešās progresijas locekļi, dalot tos ar 17, dod atlikumā 4.
b) Pierādi, ka skaitļi, kas izsakāmi formā $2010+11\cdot 13\cdot 17s$, pieder visām trim dotajām virknēm.

I.A.11.2. Pierādiet, ka ir spēkā $a^4b^4c^4 \le (4a-3)(4b-3)(4c-3) \le a^4b^4c^4$, un seciniet, ka $a=b=c=1$.

I.A.11.3. Atcerieties, ka riņķa līnijā ievilkti vienādi leņķi balstās uz vienādiem lokiem, kurus savelk vienādas hordas. Pierādiet un izmantojiet to, ka *ABCD* – vienādsānu trapece.

I.A.11.4. Pierādiet: ja uz tāfeles uzrakstīts pāra skaitlis, kas nav divnieka nepāra pakāpe, tad pirmais spēlētājs vienmēr uzvarēs, savā gājienā uz tāfeles uzrakstot $N-d$, kas ir nepāra skaitlis vai divnieka nepāra pakāpe.

I.A.11.5. Pierādiet, ka 2^k nav *sakarīgs*, ja $k=1$ vai 2. Parādiet, ka eksistē slēgta lauzta līnija ar $2^3=8$ posmiem, kura katru savu posmu krusto tieši 2 reizes. Ievērojiet, ka divas uzdevuma nosacījumiem atbilstošas slēgtas lauztas līnijas var apvienot, iegūstot slēgtu lauztu līniju, kas arī atbilst uzdevuma nosacījumiem.

I.A.12. Divpadsmitā klase

I.A.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka izteiksme var pieņemt vērtības 1 un 2^{-1004}; 2) jāpierāda, ka šīs vērtības ir dotās izteiksmes lielākā un mazākā iespējamā vērtība.

I.A.12.2. Pierādiet, ka 3 trijstūri, kas satur malas *AQ*, *PB* un *PQ* ir līdzīgi. Izmantojiet uzdevumā doto vienādojumu un faktu, ka līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu garumu attiecības kvadrātu, lai pierādītu, ka $S_{ABC}=S_{MCKL}$. Ievērojiet, ka *MCKL* – paralelograms.

I.A.12.3. Pierādiet, ka karam naturālam skaitlim n $d(n)<2\sqrt{n}$. Pamatojiet, ka $d(n)>\frac{n}{2}$, ja n, $d(n)$ un $d(d(n))$ veido aritmētisku progresiju. Izmantojiet šos novērtējumus, lai izteiktu n un pārbaudītu visas virknes n, $d(n)$, $d(d(n))$.

I.A.12.4. Pārveidojiet doto nevienādību par
$$(a-b)(h_a-h_b)+(a-c)(h_a-h_c)+(b-c)(h_b-h_c)\le 0\,.$$
Novērtējiet šo nevienādību, atceroties, ka trijstūrī pret garāku malu ir īsāks augstums.

I.A.12.5. Pieņemiet, ka n ir lielākais cepumu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija, un pierādiet, ka otrais spēlētājs var uzvarēt arī situācijā, kad uz galda atrodas n^3+n+1 cepums.

I.VP. LATVIJAS 60. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

I.VP.1. Izmantojiet matemātisko indukciju, izvēloties bāzi $n=10$.

I.VP.2. Atcerieties, ka četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs ir šī četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts. Ievērojiet, ka četrstūris, kura virsotnes ir dotā četrstūra malu viduspunkti, ir paralelograms. Pierādiet, ka meklētais krustpunkts ir punkts, kas simetrisks riņķa līnijas centram attiecībā pret iepriekšminētā paralelograma diagonāļu krustpunktu.

I.VP.3. Atrodiet dotā polinoma sakni $-\frac{1}{2}$ un sadaliet polinomu reizinātājos. Pierādiet, ka iegūtie reizinātāji ir savstarpēji pirmskaitļi.

I.VP.4. Ievērojiet, ka pierādāmo sakarību var pārveidot kā $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$, un veiciet $\frac{r}{R}$ novērtējumu, izmantojot formulas $R=\frac{abc}{4S}$ un $r=\frac{2S}{a+b+c}$.

Atcerieties, ka

- Hērona formulu var pierakstīt arī kā
$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4};$$
- sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko ir $A \geq G$.

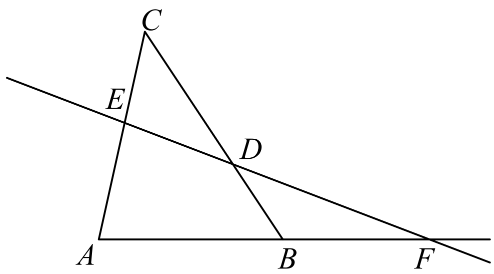
I.VP.5. Apskatiet tādus pilsētu trijniekus, kur viena no pilsētām ir savienota ar abām pārējām. Pierādiet, ka šādu trijnieku ir vairāk nekā tādu pilsētu pāru, kur abas pilsētas savienotas ar vienu un to pašu trešo pilsētu.

I.IMO. 51. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE (51ST INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD)

I.IMO uzdevumi 2010. gada 7. jūlijā

I.IMO.1. Pierādiet, ka der visas funkcijas formā $f(x) = const = C$, kur $C = 0$ vai $1 \le C < 2$, un citas funkcijas neder.

I.IMO.2. Novelciet un apzīmējiet $EI \cap \Gamma = X$ un $DX \cap FI = G'$. Pierādiet, ka $FG' = G'I$.
Izmantojiet Menelāja teorēmu:
Dots trijstūris *ABC*, punkti *D*, *E*, *F* atrodas attiecīgi uz taisnēm *BC*, *AC*, *AB*. Punkti *D*, *E*, *F* atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ (skat. I.4. zīm.).



I.4. zīm.

I.IMO.3. Pierādiet, ka meklējamās funkcijas ir formā $f(n) = n + c$, kur *c* ir vesels, pozitīvs skaitlis. Pierādiet, ka citas funkcijas neder, pierādot un izmantojot lemmu: Ja $p \mid f(k) - f(l)$ kādam pirmskaitlim *p* un veseliem, pozitīviem skaitļiem *k* un *l*, tad $p \mid k - l$. Pieraksts $a \mid b$ nozīmē, ka *a* ir *b* dalītājs.

I.IMO uzdevumi 2010. gada 8. jūlijā

I.IMO.4. Atcerieties šādas īpašības:

- iekšējā leņķa lielums jeb leņķa lielums starp divām hordām ir vienāds ar divu loku, no kuriem viens ir starp leņķa malām, bet otrs – starp leņķa malu pagarinājumiem, leņķisko lielumu summas pusi;
- vienādām hordām atbilst vienādi loki (un otrādi).

I.IMO.5. Ar pierakstu $(a_1, a_2, ..., a_n) \to (a_1', a_2', ..., a_n')$ sapratīsim: ja sekojošas kastes satur $a_1, a_2, ..., a_n$ monētas, tad ir iespējams izpildīt vairākas atļautās darbības, lai kastēs būtu attiecīgi $a_1', a_2', ..., a_n'$ monētas, bet pārējās kastēs monētu skaits paliektu nemainīgs.
Pierādiet un izmantojiet šādas divas lemmas:

- $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ katram $a \ge 1$.
- $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$ katram $a \ge 1$, kur $P_a = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{a}$, kur *a* – naturāls skaitlis.

I.IMO.6. Ievērojiet: ja $n > r$, tad $a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k}$, kur $1 \le i_j \le r$ un $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$.

I.AB. ATLASES SACENSĪBAS OLIMPIĀDEI „BALTIJAS CEĻŠ 2009”

I.AB.A. Algebra

I.AB.A.1. Ievērojiet, ka dotās funkcijas grafiks ir parabola un šīs funkcijas vērtību apgabals (*V*) iekļaujas funkcijas definīcijas apgabalā. Pierādiet, ka $f(V)=V$, no kā viegli secināt vajadzīgo.

I.AB.A.2. Izmantojiet Čebiševa nevienādību divām nedilstošām skaitļu virknēm $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ un $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

lai pierādītu, ka $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \ge \frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1}$.

Pierādiet, ka $\frac{x^2}{x-1} \ge 4$ pie $x > 1$, lai iegūtu prasīto.

I.AB.A.3. Atveriet iekavas nevienādības kreisajā pusē un sagrupējiet saskaitāmos, iznesot pirms iekavām *c* un *d* dažādu pakāpju reizinājumus. Izmantojiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: $A \ge G$.

I.AB.A.4. Pierādiet, ka tas nav iespējams, pieņemot pretējo – ka šādas funkcijas eksistē. Pierādiet, ka tādā gadījumā funkcija *f* dažādas vērtības attēlo par dažādām vērtībām.

I.AB.A.5. Pierādiet, ka tas nav iespējams, pieņemot pretējo – ka šāds polinoms eksistē. Apskatiet $f(x) = P(x, 0)$, lai pierādītu, ka $f(x)$ ir nulles polinoms.

I.AB.K. Kombinatorika

I.AB.K.1. Divos veidos apskatiet, cik punkti tika sadalīti rūķīšu starpā:

- ņemot vērā to, ka katrs dalībnieks ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi;
- apskatot, cik punkti tika sadalīti atsevišķi votivapu un sillišallu starpā, un ņemot vērā to, ka katrs dalībnieks, spēlējot pret votivapām ieguva tikpat punktu, cik spēlējot pret šillišallām.

I.AB.K.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka ir nepieciešams nokrāsot vismaz 19 rūtiņu centrus, lai izpildītos uzdevumā dotais nosacījums; 2) jāparāda, ka var nokrāsot tieši 19 rūtiņu centrus, lai tiktu izpildītas uzdevuma prasības.

I.AB.K.3. Izkrāsojiet trijstūrus 4 krāsās tā, ka Sprīdītis, veicot atļautos gājienus, var nokļūt tikai vienas krāsas lauciņos un katram trijstūrim blakus esošie trijstūri nokrāsoti no dotā trijstūra atšķirīgās krāsās.

I.AB.K.4. Pierādiet, ka process turpināsies bezgalīgi tad un tikai tad, ja *T* ir regulārs trijstūris.

I.AB.K.5. a) Parādiet, ka tā var būt, piemēram, ja ir 7 olimpiādes.

b) Pierādiet, ka tā nevar būt, apskatot kopējo apmeklējumu skaitu.

I.AB.Ģ. Ģeometrija

I.AB.Ģ.1. Ievērojiet, ka ir trīs tipu plaknes (perpendikulāras šķautnēm, perpendikulāras skaldņu diagonālēm, perpendikulāras kuba diagonālēm) un tās sadala kubu trijstūra piramīdās, kurām kuba centrs ir kopīga virsotne.

I.AB.Ģ.2. Apskatiet divus gadījumus: kad taisne *t* krusto nogriezni *EB* un kad taisne *t* krusto nogriezni *CE*. Abos gadījumos risinājumi ir līdzīgi. Pierādiet, ka $\Delta AJK = \Delta BEL$, izmantojiet šādus faktus:

- hordas-pieskares leņķa lielums ir vienāds ar pusi no loka, ko savelk attiecīgā horda;
- riņķa līnijā ievilkta leņķa lielums ir vienāds ar pusi no loka, uz kura leņķis balstās;
- ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$;
- skat. I.V.10.3.

I.AB.Ģ.3. Pierādiet, ka nevar būt galīgs skaits sarkano punktu, pieņemot pretējo. Apskatiet ΔABC, kas ir viens no sarkanajiem trijstūriem, kam apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir vismazākais, un seciniet, ka tādā gadījumā var atrast 3 sarkanus punktus, kas atrodas uz vienas taisnes.

I.AB.Ģ.4. Atrisiniet uzdevumu, izmantojot vektorus. Atcerieties, ka divu perpendikulāru vektoru skalārais reizinājums ir 0.

I.AB.Ģ.5. Novelciet nogriežņus $MK \parallel AC$, $ML \parallel AB$, $MN \parallel BC$ un seciniet, ka ΔABC tiek sadalīts vienādsānu trapecēs. Atcerieties, ka vienādsānu trapeces diagonāles ir vienādas un izmantojiet kosinusu teorēmu, lai izteiktu to garumu kvadrātu summu ar garumiem *MK*, *ML* un *MN*.

I.AB.S. Skaitļu teorija

I.AB.S.1. Ievērojiet, ka $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Pieņemiet, ka $|x| \geq |y| \geq |z|$, un novērtējiet $3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: $A \geq G$.

I.AB.S.2. Ievērojiet, ka $f(n) = n^2 + 5n + 23 = n(n+5) + 23$. Tātad $f(n)$ dalās ar pirmskaitli *p* tad un tikai tad, ja atlikumu, kas rodas skaitli $n(n+5)$ dalot ar *p* un skaitli 23 dalot ar *p*, summa ir vienāda ar *p* vai 0. Apskatiet pirmos pirmskaitļus un atlikumus, ko var iegūt, skaitļus $n(n+5)$ un 23 dalot ar *p*.

I.AB.S.3. Apskatiet skaitļu virkni 2^1; 2^2; ...; 2^{n+1} un ievērojiet, ka noteikti divi no šīs virknes skaitļiem dod vienādus atlikumus, dalot tos ar *n*. Pieņemiet, ka tie ir 2^i un 2^j, kur $i > j$. Pierādiet, ka $2^{n!} - 1$ dalās ar $2^{i-j} - 1$, kur $2^{i-j} - 1$ dalās ar *n*.

I.AB.S.4. Ievērojiet, ka piesātināti skaitļi ir tie skaitļi, kuriem katrs pirmreizinātājs ir vismaz otrajā pakāpē. Atrodiet vienu *superpiesātinātu* skaitli un pierādiet: ja *n* ir *superpiesātināts*, tad tāds ir arī $4n(n+1)$.

I.AB.S.5. Pierādiet, ka izveidotais skaitlis *x* vienmēr dalīsies ar 3, tātad tas nevar būt vienāds ar 2^y.

I.BW. MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2009"

I.BW.A. Algebra

I.BW.A.1. Ievērojiet: ja n-tās pakāpes polinomam $p(x)$ ir tieši n reālas saknes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ un koeficients pie x^n ir 1, tad polinomu var sadalīt reizinātājos

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i).$$

I.BW.A.2. Apskatiet funkciju $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 20] \\ x(x-1)\cdot...\cdot(x-20), & x \geq 20 \end{cases}$.

Izmantojiet Jensena nevienādību: $f\left(\frac{a_1 + ... + a_{100}}{100}\right) \leq \frac{f(a_1) + ... + f(a_{100})}{100}$, kur f – izliekta funkcija.

I.BW.A.3. Aprēķiniet izteiksmes $(n+2)^2 - (n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2$ vērtību.

I.BW.A.4. Apskatiet gadījumu, kad $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 1$ un $x_n = 2$, un iegūstiet, ka $n \leq 5$. Izmantojiet Košī nevienādību:

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \geq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2),$$

lai pierādītu, ka der vērtības $n = 2, 3, 4, 5$.

I.BW.A.5. Izmantojot matemātisko indukciju, pierādiet apgalvojumu: ja kāds x apmierina vienādojumu $x^2 = x + 1$, tad visiem $n \geq 2$ šis x apmierina arī vienādojumu $x^n = f_{n-1}x + f_{n-2}$.

Atcerieties: atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visas tā saknes un pierādīt, ka citu sakņu nav. Izmantojiet vienādojumu risināšanas grafisko paņēmienu.

I.BW.S. Skaitļu teorija

I.BW.S.1. Ievērojiet, ka pietiek pierādīt šādu apgalvojumu: ja katram pirmskaitlim p skaitlis b dalās ar p^{2k-1}, bet nedalās ar p^{2k} (k – vesels, pozitīvs skaitlis), tad a dalās ar p.

I.BW.S.2. Izmantojiet šādus faktus:

- tā kā $6 \mid p+1$, tad $p \geq 5$;
- Fermā mazā teorēma: ja p ir pirmskaitlis, tad $a^p \equiv a \pmod{p}$ jeb $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$;
- $a^4 + b^4 + (-a-b)^4 = 2\cdot(a^2 + ab + b^2)^2$.

I.BW.S.3. Pierādiet, ka neeksistē tāda n vērtība, kurai izpildās uzdevuma nosacījumi. Ievērojiet, ka doto skaitļu visiem pirmreizinātājiem jābūt mazākiem vai vienādiem ar 7.

I.BW.S.4. Apskatiet 2 gadījumus: n – pāra skaitlis un n – nepāra skaitlis.

I.BW.S.5. Apskatiet patvaļīgu nepāra skaitli k un vienādību $\left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2 = k^2$, lai pierādītu, ka nepāra skaitļu kvadrātus nevar izteikt prasītajā formā. Neaizmirstiet pamatot, kāpēc eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu M, kurus nevar izteikt prasītajā formā.

I.BW.Ģ. Ģeometrija

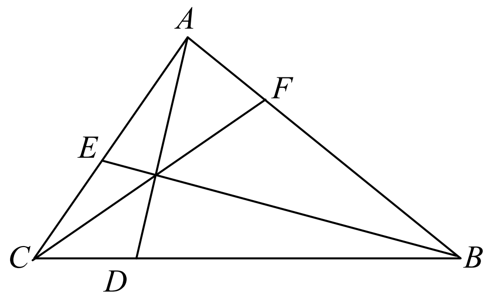
I.BW.Ģ.1. Novelciet caur punktu C taisni, kas paralēla BM un izmantojiet simetriju pret punktu M, lai pierādītu, ka PM ir ne tikai bisektrise, bet arī mediāna un augstums, kas dod prasīto.

I.BW.Ģ.2. Izmantojiet šādus faktus:

- mediānas krustojas vienā punktā un krustpunktā dalās attiecībā $2:1$ skaitot no virsotnes;
- Eilera taisne ir taisne, kas iet caur trijstūra augstumu krustpunktu, mediānu krustpunktu un apvilktās riņķa līnijas centru;
- Eilera taisnes īpašība: $OM : MH = 1:2$, kur O ir trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs, H – augstumu krustpunkts, M – mediānu krustpunkts, pie tam M atrodas starp O un H.

I.BW.Ģ.3. Izmantojiet šādas sakarības:

- četrstūrim var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$;
- ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku, ir vienādi;
- Čevas teorēmas trigonometriskā forma: dots trijstūris ABC, punkti D, E, F atrodas attiecīgi uz taisnēm BC, AC, AB. Taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā (krustpunkts var atrasties arī ārpus trijstūra) tad un tikai tad, ja izpildās vienādība
$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}=1 \text{ (skat. I.5. zīm.).}$$



I.5. zīm.

I.BW.Ģ.4. Pierādiet, ka visiem $n \ge 2$ var atrast n trijstūrus $A_1, A_2, ..., A_n$, kam izpildās uzdevuma nosacījumi. Izmantojiet trijstūrus A_i, kuru leņķi ir α, $i\alpha$, $(2n-i)\alpha$, kur $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$.

I.BW.Ģ.5. Skat. I.S.11.5.

I.BW.K. Kombinatorika

I.BW.K.1. Pierādiet, ka *n-tronder* ceļu skaits katram n ir $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, aprēķinot, cik lauztās līnijas posmi ir formā (1; 1).

I.BW.K.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) parādiet, ka var atrast 8 skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, 2) pierādiet, ka nevar izvēlēties vairāk nekā 8 skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

I.BW.K.3. Pierādiet, ka $m \neq 1$ un $m \neq 2$. Izveidojiet algoritmu, kā katram ceļam piekārtot skaitli no kopas $\{1, 2, 3\}$ (tātad $m = 3$), lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

I.BW.K.4. Izdomājiet piemēru, kurā abi uzdevuma nosacījumi izpildās vienlaicīgi. Ievērojiet, ka kopējais pazīšanos skaits ir $(8 \cdot 3) : 2 = 12$.

I.BW.K.5. Parādiet ar piemēru, ka uzdevuma prasības var izpildīt.

ATRISINĀJUMI

A.S. LATVIJAS 22. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.S.9. Devītā klase

A.S.9.1. Veiksim identiskus pārveidojumus un izmantosim saīsinātās reizināšanas formulas $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 \geq 0$$
$$(x-y)^2 + 2(x-y) + 1 \geq 0$$
$$(x-y+1)^2 \geq 0.$$

Tā kā izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad iegūtā nevienādība ir patiesa un arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

A.S.9.2. Tā kā mazāku (lielāku) summu veido mazāki (lielāki) saskaitāmie, tad $x+y=32$ (1), $x+z=36$ (2), $z+v=48$ (3), $t+v=51$ (4). No (2) atņemot (1), iegūstam $z-y=4$ un no (4) atņemot (3), iegūstam $t-z=3$. No šīm abām sakarībām $t-y=7$. Tāpēc $x+t=(x+y)+(t-y)=32+7=39$. Tāpēc trešā mazākā summa nevar būt $x+t$. Tātad $37=y+z$.

Izteiksim $2x=(x+y)+(x+z)-(y+z)=32+36-37=31$.

No šejienes $x=15\frac{1}{2}$, $y=16\frac{1}{2}$, $z=20\frac{1}{2}$, $v=27\frac{1}{2}$, $t=23\frac{1}{2}$.

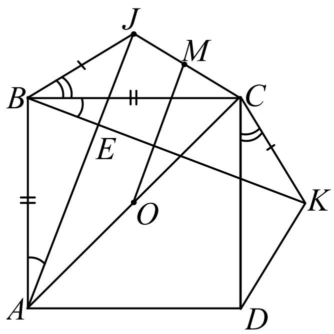
Pārbaudīsim, vai uzdevuma nosacījumi izpildās:

$x+y=15\frac{1}{2}+16\frac{1}{2}=32$, $x+z=15\frac{1}{2}+20\frac{1}{2}=36$, $y+z=16\frac{1}{2}+20\frac{1}{2}=37$,

$z+v=20\frac{1}{2}+27\frac{1}{2}=48$, $t+v=23\frac{1}{2}+27\frac{1}{2}=51$.

Tātad vienīgās iespējamās vērtības ir atrastās.

A.S.9.3. Tā kā $AB=BC$, $\angle ABJ = 90° + \angle CBJ = 90° + \angle DCK = \angle BCK$ un $BJ=CK$, tad $\Delta ABJ = \Delta BCK$ (pēc pazīmes $m\ell m$).



A1. zīm.

Apskatīsim ΔBEJ un ΔBCK iekšējo leņķu summas:

$$180° = \angle BJE + \angle BEJ + \angle EBC + \angle CBJ$$
$$180° = \angle CKB + \angle EBC + \angle BCD + \angle DCK.$$

Tā kā $\angle BJE = \angle CKB$ (vienādu trijstūru atbilstošie leņķi), $\angle CBJ = \angle DCK$ (vienādu vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata) un $\angle BCD = 90°$ (jo $ABCD$ ir kvadrāts), tad $\angle BEJ = 90°$. Tāpēc $AJ \perp BK$.

$OM \parallel AJ$ kā viduslīnija ($JM = MC$ pēc dotā un $OA = OC$, jo kvadrāta diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm) trijstūrī ACJ. Tāpēc arī $OM \perp BK$, kas arī bija jāpierāda.

A.S.9.4. Uzvar pirmais spēlētājs „p”. Viņš ņem 3; otrajam spēlētājam „o” jāņem 4, jo pretējā gadījumā „p” paņems 4, izveidos skaitli 34 un uzvarēs. Tagad jau skaidrs, ka „o” ar otro gājienu neuzvarēs, jo uz atlikušajām kartiņām nav tāda cipara, kas kopā ar 4 veidotu divciparu skaitli, kas dalās ar 17.

Tālāk „p” ņem 1; tādējādi „p” panāk, ka trešajā gājienā viņš varēs uzvarēt, paņemot kartiņu 5 (un izveidojot skaitli 51 vai 153) vai kartiņu 6 (un izveidojot skaitli 136). Tātad neatkarīgi no „o” otrā gājiena, „p” pēc trešā gājiena uzvarēs.

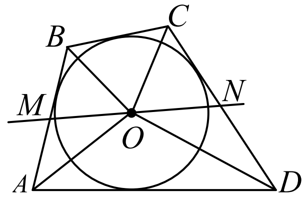
A.S.9.5. Ievērosim, ka $2x-5 = 2(x+1)-7 = 2(x+2)-9 = 2(x+3)-11$. Tā kā x dalās ar 5, tad $2x$ dalās ar 5 un arī starpība $2x-5$ dalās ar 5, jo gan mazināmais, gan mazinātājs dalās ar 5. Līdzīgi pierāda, ka $2x-5$ dalās ar 7, ar 9, ar 11. Tā kā 5, 7, 9, 11 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad $2x-5$ dalās ar $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 = 3465$. Tā kā $1 \le x \le 2009$, tad $2 \le 2x \le 4018$ un $-3 \le 2x-5 \le 4013$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet $2x-5=0$ naturālam x nav iespējams, tāpēc $2x-5 = 3465$ un vienīgais naturālais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 1735.

A.S.10. Desmitā klase

A.S.10.1. Šāds naturāls skaitlis eksistē, piemēram, 3^7. Šī skaitļa naturālie dalītāji ir $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7$ un tos var sadalīt 4 grupās: $1\cdot 3^7 = 3\cdot 3^6 = 3^2\cdot 3^5 = 3^3\cdot 3^4$.

Risinājumu var vispārināt un iegūt dalītāju sadalījumu jebkura skaita grupās. Ja naturālam skaitlim ir $2n$ dalītāji (tāds ir, piemēram, jebkurš skaitlis p^{2n-1}, p – pirmskaitlis) $d_1 < d_2 < \ldots < d_{2n}$, tad $d_1\cdot d_{2n} = d_2\cdot d_{2n-1} = \ldots = d_n\cdot d_{n+1}$. Tātad var izveidot n prasītā tipa grupas. Varam secināt, ka eksistē skaitlis (piemēram, jebkurš $p^{2\cdot 13-1} = p^{25}$, kur p – pirmskaitlis), kura visus naturālos dalītājus var sadalīt 13 grupās, kurām izpildās uzdevumā prasītais nosacījums.

A.S.10.2. No dotā seko, ka $MB+BC+CN = MA+AD+DN$ (*). Ievērosim, ka ievilktās riņķa līnijas rādiusi ir trijstūru MOB, BOC, CON, NOD, DOA un AOM augstumi (skat. A2. zīm.).



A2. zīm.

Vienādības (*) abas puses pareizinot ar $\frac{1}{2}r$, kur r ir ievilktās riņķa līnijas rādiuss, iegūsim $\frac{1}{2}r\cdot MB + \frac{1}{2}r\cdot BC + \frac{1}{2}r\cdot CN = \frac{1}{2}r\cdot MA + \frac{1}{2}r\cdot AD + \frac{1}{2}r\cdot DN$.

Izmantojot formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} h_a \cdot a$, iegūstam, ka

$$S_{MOB} + S_{BOC} + S_{CON} = S_{MOA} + S_{AOD} + S_{NOD}.$$

Tātad $S_{MBCN} = S_{MADN}$, kas arī bija jāpierāda.

A.S.10.3. Tā kā nevienādība ir simetriska pret *x* un *y*, tad $4xy$ ir izdevīgi rakstīt kā $2xy + 2xy$. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus un izmantosim formulu $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

$$xy^2 - 2xy + x + x^2 y - 2xy + y \geq 0$$
$$x(y^2 - 2y + 1) + y(x^2 - 2x + 1) \geq 0$$
$$x(y-1)^2 + y(x-1)^2 \geq 0.$$

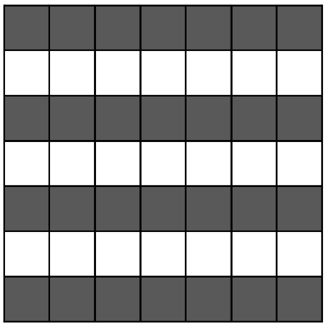
Tā kā *x* un *y* ir pozitīvi skaitļi un izteiksmes kvadrāti ir nenegatīvi skaitļi, tad abi iegūtās nevienādības kreisās puses saskaitāmie ir nenegatīvi, tātad arī to summa ir nenegatīva, kas arī bija jāpierāda.
Tā kā iegūtā nevienādība ir patiesa, tad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

A.S.10.4. Salīdzinām divas monētas A un B. Pastāv divas iespējas.
1. A un B ir dažādas masas. Tad viena no tām ir viltota, otra – īsta. Sadalām atlikušās 98 monētas 49 pāros un katru no tiem salīdzinām ar pāri (A, B). Iespējami 3 gadījumi:

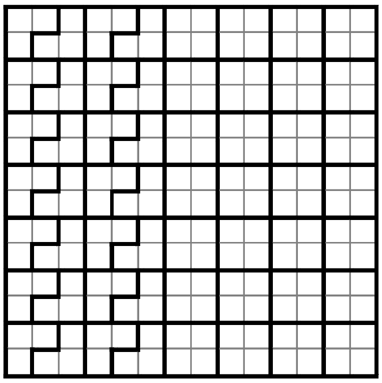
- Ja svari ir līdzsvarā, tad pārī ir viena īsta un viena viltota monēta.
- Ja pāris (A, B) ir smagāks, tad abas otrā pāra monētas ir viltotas.
- Ja pāris (A, B) ir vieglāks, tad abas otrā pāra monētas ir īstas.

Tātad katrā svēršanā mēs noskaidrosim, cik viltoto monētu ir konkrētajā pārī. Pavisam tiks izmantotas $1 + 49 = 50$ (viena A un B salīdzināšana un 49 pāru salīdzināšanas) svēršanas.
2. A un B ir vienādas masas. Kā 1. gadījumā salīdzinām pāri (A, B) ar citiem monētu pāriem, kamēr atrodam pāri (C, D), kura masa atšķiras no (A, B) masas. Šādu pāri (C, D) mēs noteikti atradīsim, jo ir vismaz viena īsta un vismaz 1 viltota monēta. Pieņemsim, ka (C, D) kopējā masa ir mazāka nekā (A, B) kopējā masa (otrs gadījums ir „simetrisks”). Tad A un B, kā arī visas citas līdz šim svērtās monētas ir īstas. Salīdzinām C un D. Rezultātā mēs atrodam vismaz vienu monētu no pāra (C, D), kura ir viltota. Tagad izveidojam pāri (īsta monēta, viltota monēta) un turpinām kā 1. gadījumā. Pavisam tiks izmantota $1 + 1 + 49 = 51$ (viena A un B salīdzināšana, viena C un D salīdzināšana un 49 pāru salīdzināšanas) svēršana.

A.S.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, jānoskaidro un jāpamato, kāda varētu būt mazākā *n* vērtība. Otrkārt, jāparāda piemērs, ka atrastā vērtība tiešām der. Ja katra veida figūru ir *k*, tad kopējais rūtiņu skaits tajās ir $4k + 3k = 7k$. Kvadrātā, kura malas garums ir *n*, pavisam ir $n \cdot n = n^2$ kvadrātiskas rūtiņas. Tātad $n^2 = 7k$ un *n* jādalās ar 7. Mazākās iespējamās *n* vērtības ir $n = 7$ un $n = 14$.
Pie $n = 7$ uzdevuma prasības nav izpildāmas. Pieņemsim, ka tas izdevies. Tad izkrāsosim rūtiņas, kā parādīts A3. zīm. Katrs no 7 kvadrātiem satur 2 melnas rūtiņas, tāpēc 7 „stūrīši” kopā satur $28 - 14 = 14$ melnas rūtiņas. Tāpēc katrs „stūrītis” satur tieši 2 melnas un 1 baltu rūtiņu (jo katrs stūrītis noteikti satur ne vairāk kā 2 melnas rūtiņas). Bet melnās rūtiņas nevar sadalīties pa pāriem, kas ietilpst kvadrātos un stūrīšos, jo katrā rindiņā, kurā tās vispār ir, tās ir nepāra skaitā.



A3. zīm.



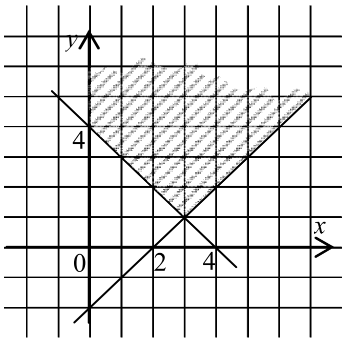
A4. zīm.

A4. zīm. parādīts piemērs, ka $n = 14$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

A.S.11. Vienpadsmitā klase

A.S.11.1. Vienādības kreiso pusi sadalām reizinātājos un iegūstam $x(x+15) = 2^y$. Tā kā vienādības labā puse ir divnieka pakāpe, tad katrs no skaitļiem x un $x+15$ ir vai nu vieninieks, vai divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Virknē, kas sastāv no divnieka pakāpēm (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), vienīgie skaitļi, kuru starpība ir 15, ir 1 un 16, tāpēc $x = 1$ un $y = 4$.

A.S.11.2. Koordinātu plaknē attēlojam apgabalu, kura punktu koordinātas $(x; y)$ apmierina dotās nevienādības, to ierobežo taisnes $y = 4 - x$ un $y = x - 2$ (skat. A5. zīm.).

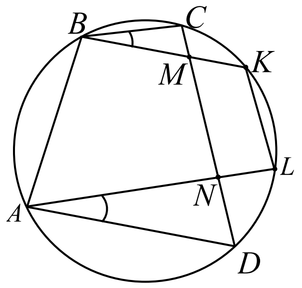


A5. zīm.

Pieņemam, ka $\frac{y}{x} = k$ un apskatām taisni $y = kx$; tā iet caur punktu $(0; 0)$. Atceroties taisnes $y = k \cdot x$ virziena koeficienta k ģeometrisko jēgu ($k = \frac{\text{funkcijas pieaugums}}{\text{argumenta pieaugums}}$), redzam, ka $\frac{y}{x} \geq \frac{1}{3}$. Tātad izteiksmes $\frac{y}{x}$ mazākā vērtība ir $\frac{1}{3}$, kas tiek sasniegta tad un tikai tad, ja $x = 3$ un $y = 1$.

A.S.11.3. 1. risinājums. Pagarinām nogriežņus *BM* un *AN*, to krustpunktus ar riņķa līniju apzīmējam attiecīgi ar *K* un *L* (skat. A6. zīm.). Ievērojam, ka $\angle CBM = \angle NAD$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām un vienādi vērstām malām. Tāpēc loki *CK* un *LD*, uz kuriem tie balstās, ir vienādi. Tātad $KL \parallel CD$ kā hordas, starp kurām ir vienādi loki. Punkti *A*, *B*, *K*, *L* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\angle BAL + \angle BKL = 180°$.

Tā kā $\angle BMN = \angle BKL$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm KL un MN $\angle BAN = \angle BAL$, tad $\angle BAN + \angle BMN = 180°$. Tā kā četrstūra $ABMN$ pretējo leņķu summa ir $180°$, tad punkti A, B, M, N atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.



A6. zīm.

2. risinājums. Ja ap četrstūri ir apvilkta riņķa līnija, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$.Tātad

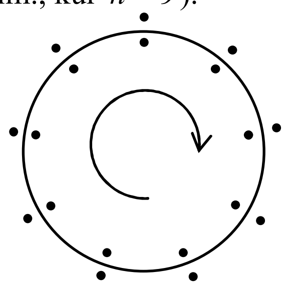
$$\angle DAB + \angle BCD = 180°$$
$$\angle BAN + \angle NAD + \angle BCD = 180°.$$

Ievērojam, ka $\angle NAD = \angle CBM$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām un vienādi vērstām malām. Tāpēc $\angle BAN + \angle CBM + \angle BCD = 180°$.

Tā kā $\angle CBM + \angle BCD = 180° - \angle BMC = \angle BMN$, tad $\angle BAN + \angle BMN = 180°$. Tā kā četrstūra $ABMN$ pretējo leņķu summa ir $180°$, tad punkti A, B, M, N atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

A.S.11.4. a) Pieņemsim, ka tāda pāra nav. Lūgsim katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu lūgsim izdarīt meitenēm. Tā kā savstarpēju simpātiju nav, tad nav divu kartīšu, uz kurām būtu vienādi uzraksti; tāpēc kartīšu nav vairāk par $n \cdot n = n^2$. No otras puses, kartīšu ir $x \cdot n + y \cdot n = (x + y) \cdot n > n \cdot n = n^2$ – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepatiess un noteikti var atrast tādu zēnu un meiteni, kas patīk viens otram.

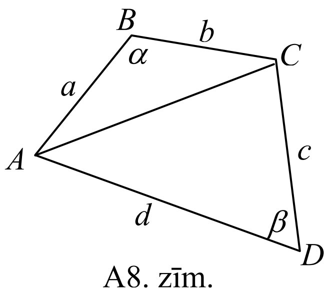
b) Attēlosim meitenes ar punktiem riņķa līnijas iekšpusē, bet zēnus – ar punktiem riņķa līnijas ārpusē (skat. A7. zīm., kur $n = 9$).



A7. zīm.

Ja katrai meitenei patīk x zēni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kurš stāv viņai blakus, bet katram zēnam – y meitenes pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kura stāv viņam vienu pozīciju priekšā, tad savstarpēju simpātiju nav, jo $x + y \leq n$.

A.S.11.5. Apskatīsim patvaļīgu izliektu četrstūri *ABCD* ar malu garumiem *a*, *b*, *c*, *d* (skat. A8. zīm.).



A8. zīm.

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta\overset{(*)}{\le}\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd\overset{(**)}{\le}\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{c^2+d^2}{4}=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

Lai iegūtu novērtējumu (*), tika izmantots, ka sinusa funkcija ir ierobežota, t. i., $|\sin x|\le 1$.

Lai iegūtu novērtējumu (**), tika izmantota sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: $A\ge G\ \Leftrightarrow\ \frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$. Šajā gadījumā $x=a^2$, $y=b^2$ un $\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab$.

Iegūtā sakarība ir spēkā katram sadalījumā iegūtā četrstūra laukumam. Saskaitot visas šīs nevienādības, iegūstam, ka

$$S_1+S_2+\ldots+S_n\le\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}{4}+\ldots+\frac{a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2}{4},$$

kur $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \ldots, c_n, d_n$ ir iegūto četrstūru malas.

Tā kā dotais kvadrāts ir sadalīts vairākos četrstūros, tad $S_1+S_2+\ldots+S_n=S=1\cdot 1=1$.

Abas nevienādības puses pareizinot ar 4, iegūsim vajadzīgo:

$$4\le a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+a_2^2+\ldots+c_n^2+d_n^2.$$

A.S.12. Divpadsmitā klase

A.S.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, jāparāda, ka pietiek ar 8 rūtiņām (skat. A9. zīm.).

X			X	
		X		
	X			X
X			X	
		X		

A9. zīm.

Otrkārt, jāpierāda, ka ar mazāk rūtiņām nepietiek. Tā kā $5\cdot 5=25=3\cdot 8+1$, tad kvadrāts noteikti satur 8 dotā veida figūras, kas nepārklājas. Katrā šādā figūrā jābūt atzīmētam vismaz vienam krustiņam, tātad nepieciešami vismaz 8 krustiņi.

A.S.12.2. Ievērojam, ka vienādojums ir simetrisks attiecībā pret x un y. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$1+x+xy+y=2011$$
$$(1+x)+y(1+x)=2011$$
$$(1+x)(1+y)=2011.$$

Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, tad $1+x$ var būt tikai viens no skaitļiem 1, –1, 2011, -2011. No tā iegūstam visus atrisinājumus $(x;y)=(0;2010)$, $(-2;-2012)$, $(2010;0)$, $(-2012;-2)$.

A.S.12.3. Apzīmēsim ΔABC malas garumu ar a, tas ir, $AB=BC=AC=a$. No teorēmas par sekanšu nogriežņu reizinājumiem iegūstam:

$$AM\cdot(a-BN)=AT\cdot(a-CS)$$
$$BK\cdot(a-CL)=BN\cdot(a-AM)$$
$$CS\cdot(a-AT)=CL\cdot(a-BK).$$

Atverot iekavas un saskaitot šīs vienādības, iegūstam, ka

$$AM\cdot a-AM\cdot BN+BK\cdot a-BK\cdot CL+CS\cdot a-CS\cdot AT=$$
$$=AT\cdot a-AT\cdot CS+BN\cdot a-BN\cdot AM+CL\cdot a-CL\cdot BK.$$

Saīsinot vienādos saskaitāmos un izdalot abas puses ar $a\neq 0$, iegūstam vajadzīgo:

$$AM+BK+CS=AT+BN+CL.$$

A.S.12.4. Izmantosim Košī – Bunjakovska nevienādību: katriem diviem skaitļu trijniekiem $(x_1;x_2;x_3)$ un $(y_1;y_2;y_3)$ ir spēkā

$$\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}\right)\left(y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2}\right)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2.$$

Pielietosim to skaitļu trijniekiem $(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$ un $\left(\sqrt{\frac{a-1}{a}};\sqrt{\frac{b-1}{b}};\sqrt{\frac{c-1}{c}}\right)$.

Iegūstam $(a+b+c)\left(\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}\right)\geq\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2$.

Tā kā $\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}=1-\frac{1}{a}+1-\frac{1}{b}+1-\frac{1}{c}=3-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3-2=1$, tad seko, ka $a+b+c\geq\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2$. Tā kā abas nevienādības puses ir pozitīvas, tad, no katras puses velkot kvadrātsakni, iegūstam pierādāmo nevienādību:

$$\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}.$$

A.S.12.5. Aprēķinām $x=(a+b)(c+d)$, $y=ac$, $z=bd$; jau ir izmantotas 3 reizināšanas. Dotās izteiksmes uzrakstīsim izmantojot x, y, z un neizmantojot reizināšanas operāciju.

Tātad $ac-bd=y-z$ un $ad+bc=(a+b)(c+d)-ac-bd=x-y-z$.

A.R. LATVIJAS 60. RAJONA OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

A.R.9. Devītā klase

A.R.9.1. a) 1. risinājums. Dots, ka viena no saknēm ir $x_1=\sqrt{2}+1=1+\sqrt{2}$. Tā kā kvadrātvienādojuma saknes aprēķina pēc formulas $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, tad izdevīgi izvēlēties otru sakni $x_2=1-\sqrt{2}$.

Tātad varam rakstīt, ka $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}$. Tad varam izvēlēties $b=-2$ un $a=1$. Tā kā $D=b^2-4ac$, tad $8=(-2)^2-4\cdot1\cdot c$ jeb $c=-1$.

Esam ieguvuši prasīto kvadrātvienādojumu $x^2-2x-1=0$, kura koeficienti ir veseli skaitļi un viena sakne ir $\sqrt{2}+1$.

2. risinājums. Ja kvadrātvienādojumam ar veseliem koeficientiem viena sakne ir iracionāla, tad otra sakne ir šīs saknes „saistītais" skaitlis (piemēram, $a+\sqrt{b}$ un $a-\sqrt{b}$). Tātad meklētā vienādojuma otra sakne ir $1-\sqrt{2}$. Meklēto vienādojumu iegūstam, atceroties kvadrāttrinoma sadalījumu reizinātājos $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, kur x_1 un x_2 – kvadrāttrinoma saknes.

Izveidojam kvadrātvienādojumu:

$$\left(x-(1+\sqrt{2})\right)\left(x-(1-\sqrt{2})\right)=0$$
$$x^2-x(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=0$$
$$x^2-x+\sqrt{2}x-x-\sqrt{2}x+(1-2)=0$$
$$x^2-2x-1=0.$$

b) Ievērojam, ka

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3+4\sqrt{3}+4}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}=\sqrt{3}+2.$$

Līdzīgi kā a) gadījumā izvēlamies otru sakni $x_2=2-\sqrt{3}$.

Izveidojam prasīto kvadrātvienādojumu, izmantojot faktu, ka kvadrātvienādojumu var sadalīt reizinātājos $(x-x_1)(x-x_2)=0$, kur x_1 un x_2 ir kvadrātvienādojuma saknes:

$$\left(x-(2+\sqrt{3})\right)\left(x-(2-\sqrt{3})\right)=0$$
$$x^2-x(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$$
$$x^2-2x+\sqrt{3}x-2x-\sqrt{3}x+(4-3)=0$$
$$x^2-4x+1=0.$$

A.R.9.2. Uzdevumā izmantosim šādas īpašības:

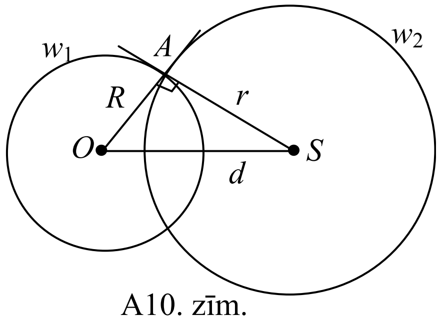
I pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta;

II taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

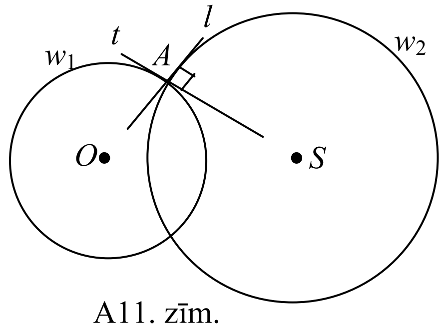
Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim: ja $R^2+r^2=d^2$, tad abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras.

Abās riņķa līnijās novelkam rādiusus, kuru galapunkts ir abu riņķa līniju krustpunkts A (skat. A10. zīm.). Tad pēc dotā $OA^2+SA^2=OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas ΔOAS ir taisnleņķa jeb $OA\perp AS$.

Tā kā $SA \perp R$, tad taisne SA ir riņķa līnijas w_1 pieskare (pēc II). Līdzīgi taisne OA ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares, kas vilktas punktā A, ir savstarpēji perpendikulāras.



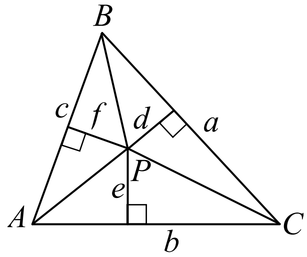
A10. zīm.



A11. zīm.

Otrkārt, pierādīsim apgriezto apgalvojumu: ja ir dots, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad varam secināt, ka $R^2 + r^2 = d^2$.
Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (skat. A11. zīm.).
Tā kā $t \perp l$, tad t satur w_2 rādiusu (no I), tātad iet caur S. Līdzīgi l iet caur O. Tātad pieskares veido ΔOAS, kas ir taisnleņķa. Taisnleņķa trijstūrī izpildās sakarība $OA^2 + SA^2 = OS^2$ (Pitagora teorēma), tātad $R^2 + r^2 = d^2$.

A.R.9.3. Varam pieņemt, ka garākais augstums h ir pret malu c. Tātad $S_{ABC} = \frac{1}{2}hc$.



A12. zīm.

Sadalām doto trijstūri trīs mazākos trijstūros – APB, BPC, CPA (skat. A12. zīm.). Apzīmējam šo trijstūru augstumus pret malām c, a un b attiecīgi ar f, d un e. Trijstūra ABC laukumu varam uzrakstīt kā trīs trijstūru laukumu summu:

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{CAP} = \frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}be.$$

Esam izteikuši ΔABC laukumu divos veidos, tātad $\frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}be$.

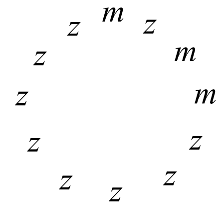
Izdalām vienādības abas puses ar $\frac{c}{2}$ un iegūstam, ka $h = f + \frac{a}{c} \cdot d + \frac{b}{c} \cdot e$.

Tā kā garākais augstums ir pret malu c, tad tā ir īsākā no trijstūra malām. Gadījumā, ja ΔABC ir vienādsānu vai vienādmalu, c ir viena no īsākajām malām. Tāpēc $\frac{a}{c} \geq 1$ un $\frac{b}{c} \geq 1$.

Esam ieguvuši, ka $h \geq f + d + e$, kas arī bija jāpierāda.

A.R.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādām, ka ap galdu nevar sēdēt mazāk kā 12 bērnu. Apzīmējam meiteņu un zēnu daudzumus attiecīgi ar m un z. Tad $z = 3m$, un pavisam bērnu ir $m + z = 4m$.

Ja ir a pāri „zēns-meitene”, tad citi pāri ir skaitā $2a$, tāpēc ir pavisam $3a$ pāru.
Tā kā aplī pāru skaits ir vienāds ar cilvēku skaitu, tad $3a = 4m$. Lai vienādība izpildītos, m jādalās ar 3. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3 ir 3, tātad pie galda ir vismaz $4 \cdot 3 = 12$ bērni.
Otrkārt, izveidojam piemēru, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ar 12 bērniem (skat. A13. zīm.).



A13. zīm.

A.R.9.5. <u>1. risinājums.</u> Varam pieņemt, ka $x \geq y$. Tādā gadījumā $x^2 < x^2 + y < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Ievērojam, ka $x^2 + y$ atrodas starp diviem blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad tas nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Tāpēc dotajai sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

<u>Piezīme.</u> Ja $x < y$, līdzīgi iegūstam, ka $y^2 < y^2 + x < (y+1)^2$.

<u>2. risinājums.</u> Atņemam no pirmā vienādojuma otro, izmantojam saīsinātās reizināšanas formulu un sadalām vienādojuma kreiso pusi reizinātājos:

$$x^2 - y^2 + y - x = 0$$
$$(x-y)(x+y) + (x-y) \cdot (-1) = 0$$
$$(x-y)(x+y-1) = 0.$$

Lai reizinājums būtu nulle, vienam no reizinātājiem jābūt vienādam ar nulli. Apskatām abus gadījumus:

- ja $x - y = 0$, tad $y = x$. Ievietojot šo vērtību pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $x^2 + x = z^2$. Tātad $z^2 = x(x+1)$. Tā kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, tad x un z nevar vienlaicīgi piederēt naturālo skaitļu kopai. Tātad šajā gadījumā uzdevumā dotajai vienādību sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos;
- ja $x + y - 1 = 0$, tad $y = 1 - x$. Ja x ir naturāls skaitlis, tad y ir vesels skaitlis, kas mazāks par 1, tātad nav naturāls skaitlis. Tātad x un y nevar vienlaicīgi piederēt naturālo skaitļu kopai, tāpēc arī šajā gadījumā uzdevumā dotajai vienādību sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Esam pierādījuši, ka sistēmai atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

A.R.10. Desmitā klase

A.R.10.1. a) Izsakot $y = n - x$, varam pierādīt uzdevumā doto nevienādību, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas un faktu, ka kvadrāts nekad nav negatīvs lielums:

$$x^2 + y^2 = x^2 + (n-x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2 = 2x^2 - 2xn + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} =$$
$$= 2\left(x^2 - xn + \frac{n^2}{4}\right) + \frac{n^2}{2} = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}.$$

b) Apzīmējam $x=\dfrac{n}{3}+a$, $y=\dfrac{n}{3}+b$, $z=\dfrac{n}{3}+c$.

Tā kā $a+b+c=(x+y+z)-3\cdot\dfrac{n}{3}=n-n=0$ un kvadrātu summa nekad nav negatīva, tad varam pierādīt uzdevumā prasīto:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{n}{3}+a\right)^2+\left(\frac{n}{3}+b\right)^2+\left(\frac{n}{3}+c\right)^2=$$

$$=3\cdot\frac{n^2}{9}+\frac{2}{3}n(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)=\frac{n^2}{3}+(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{n^2}{3}.$$

A.R.10.2. Izsakām $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Tā kā pēc dotā a^2 dalās ar b un a dalās ar a, tad $a^3=a\cdot a^2$ dalās ar $a\cdot b$.

Līdzīgi no dotās b^2 dalāmības ar a un b dalāmības ar b seko, ka arī $b^3=b^2\cdot b$ dalās ar $a\cdot b$.

Ievērojam, ka saskaitāmie $-3a^2b$ un $3ab^2$ satur reizinātāju ab, tātad dalās ar $a\cdot b$.

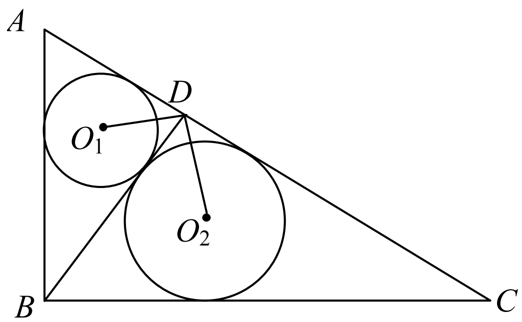
Esam pierādījuši, ka visi saskaitāmie dalās ar $a\cdot b$, tātad arī to summa $(a-b)^3$ dalās ar $a\cdot b$, kas arī bija jāpierāda.

Parādīsim, ka $(a-b)^2$ ne vienmēr dalās ar $a\cdot b$. Izvēlamies $a=4$ un $b=2$. Uzdevuma nosacījumi izdpildās: $a^2=16$ dalās ar $b=2$ un $b^2=4$ dalās ar $a=4$. Šajā gadījumā $(a-b)^2=2^2=4$ nedalās ar $a\cdot b=8$.

A.R.10.3. Tā kā O_1 ir ΔABD ievilktās riņķa līnijas centrs, tad DO_1 ir $\angle ADB$ bisektrise (jo trijstūrī ievilktas riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra bisektrišu krustpunktā). Tātad $\angle O_1DB=\dfrac{1}{2}\angle ADB=45°$. Līdzīgi $\angle O_2DB=\dfrac{1}{2}\angle CDB=45°$. Iegūstam, ka ΔO_1DO_2 – taisnleņķa, jo $\angle O_1DO_2=\angle O_1DB+\angle O_2DB=90°$ (skat. A14. zīm.).

Atceramies, ka ΔADB un ΔBDC ir līdzīgi (piemēram, pēc pazīmes $\ell\ell$). Līdzīgos trijstūros visi atbilstošie nogriežņi ir proporcionāli, tāpēc $O_1D:AB=O_2D:BC$ (atbilstošie nogriežņi –attālumi no ievilktās riņķa līnijas centra līdz taisnā leņķa virsotnei un hipotenūzas).

Ievērojam, ka O_1D un O_2D ir ΔO_1DO_2 katetes, bet AB un BC – ΔABC katetes. Tāpēc $\Delta O_1DO_2\sim\Delta ABC$ (pēc pazīmes $m\ell m$).



A14. zīm.

A.R.10.4. Ja $y \geq 4$, tad $y! \geq 24$ un satur reizinātājus 2 un 4. Tātad dotā vienādojuma labo pusi var sadalīt reizinātājos: $x^3 = 2\left(\frac{y!}{2}+1\right)$, kur $\frac{y!}{2}$ ir pāra skaitlis, jo satur reizinātāju 4. Tādā gadījumā Skaitlis $\frac{y!}{2}+1$ ir nepāra skaitlis.

Vienādojuma labā puse $2\left(\frac{y!}{2}+1\right)$ dalās ar 2, tātad arī vienādojuma kreisajai pusei x^3 jādalās ar 2. Lai kreisā puse dalītos ar 2, tai 2 jāsatur kā reizinātāju 3., 6., 9., ... pakāpē. Tādā gadījumā tā dalīsies arī ar 8.

Ja vienādojuma kreisā puse dalīsies ar 8, tad arī vienādojuma labajai pusei jādalās ar 8, tātad $\frac{y!}{2}+1$ jādalās ar 4 – pretruna ar to, ka $\frac{y!}{2}+1$ ir nepāra skaitlis.

Esam ieguvuši, ka vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos, ja $y \geq 4$. Atliek pārbaudīt vērtības $y = 1; 2; 3$:

- ja $y = 1$, tad $x^3 = 3$, nav atrisinājuma naturālos skaitļos;
- ja $y = 2$, tad $x^3 = 4$, nav atrisinājuma naturālos skaitļos;
- ja $y = 3$, tad $x^3 = 8$, tātad $x = 2$.

Esam ieguvuši, ka vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums naturālos skaitļos: $x = 2;\ y = 3$.

A.R.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, jāpierāda, ka ar 3 dienām nepietiek, lai noskaidrotu komandas ar visvairāk un vismazāk uzvarām pēc turnīra. Pieņemam pretējo, ka pietiek ar 3 dienām. Tā kā katrai komandai jāspēlē ar katru citu tieši vienu reizi, tad pavisam ir $6 \cdot 5 : 2 = 15$ spēles. Tā kā katru dienu norisinās 3 spēles, tad turnīrā spēles tiek spēlētas $15 : 3 = 5$ dienas. Tātad pēc 3 dienām ir palikušas vēl pēdējās 2 kārtas. Pirms tām uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat, lai būtu skaidrs, kurš turnīra beigās būs uzvarētājs un kurš – zaudētājs. Tātad starpībai starp uzvarētāja uzvaru skaitu un zaudētāja uzvaru skaitu jābūt vismaz $3 + 3 = 6$. Starpība starp uzvarētāja uzvaru skaitu un zaudētāja uzvaru skaitu pēc 3. dienas var būt augstākais $3 - 0 = 3$, tātad nevar skaidri noteikt uzvarētāju un zaudētāju jau pēc trijām dienām.

Otrkārt, jāparāda, ka pēc 4 dienām var rasties situācija, kad ir skaidrs, kurš ir turnīra uzvarētājs un zaudētājs. Pēc 4 spēlēm uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 2 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat, lai būtu skaidrs, kurš turnīra beigās būs uzvarētājs un kurš – zaudētājs.

Izveidojam tabulu, kur rindās redzamas katra spēlētāja uzvaras un zaudējumi. Ar 1 apzīmēta uzvara, ar 0 – zaudējums (skat. A15. zīm.). Redzam, ka uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – F, jo viņu pārsvars/atpalicība pirms pēdējās kārtas jeb pēc 4. dienas ir 2 uzvaras.

	A	B	C	D	E	F
A		1		1	1	1
B	0		1	0	1	
C		0		1	0	1
D	0	1	0			1
E	0	0	1			1
F	0		0	0	0	

A15. zīm.

A.R.11. Vienpadsmitā klase

A.R.11.1. a) Pēc Vjeta teorēmas $x_1 + x_2 = -p$ un $x_1 \cdot x_2 = q$, tāpēc

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2) = p^2 - 2q.$$

Naturālu skaitļu reizinājums, summa, starpība un pakāpe ar naturālu kāpinātāju ir vesels skaitlis. Tā kā p un q ir naturāli skaitļi, tad $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ ir vesels skaitlis.

b) Izmantojot a) gadījuma rezultātu un Vjeta teorēmu, pierādām, ka $x_1^4 + x_2^4 = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2$ ir vesels skaitlis.

Līdzīgi arī $x_1^8 + x_2^8 = (x_1^4 + x_2^4)^2 - 2x_1^4x_2^4 = \left((p^2 - 2q)^2 - 2q^2\right)^2 - 2q^4$ ir vesels skaitlis.

c) Izmantojot a) gadījuma rezultātu un Vjeta teorēmu, izsakām

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left((x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2\right) =$$
$$= (-p)\left((p^2 - 2q) - q\right) = (-p)(p^2 - 3q).$$

Tā kā iegūtā izteiksme sastāv no naturālu skaitļu reizinājuma, starpības un pakāpes ar naturālu kāpinātāju, tad tās vērtība ir vesels skaitlis.

Tālāk, atkal lietojot Vjeta teorēmu un izmantojot iepriekš iegūtos rezultātus, pierādām, ka $x_1^5 + x_2^5$ ir vesels skaitlis:

$$x_1^5 + x_2^5 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2) - (x_1x_2)(x_1^3 + x_2^3) =$$
$$= \left((p^2 - 2q)^2 - 2q^2\right)(-p) - q(-p)(p^2 - 3q) =$$
$$= (-p)\left(p^4 - 5p^2q + 5q^2\right).$$

A.R.11.2. Vienādojot saucējus, pārveidojam doto vienādojumu par $x^2y + 10 = 14y$.

Izsakām y: $14y - x^2y = 10 \Rightarrow y(14 - x^2) = 10 \Rightarrow y = \dfrac{10}{14 - x^2}$.

Tā kā y jābūt veselam skaitlim un $y \neq 0$ (jo dotajā izteiksmē saucējs nedrīkst būt 0), tad varam apskatīt gadījumus, kad izteiksmes $14 - x^2$ vērtība ir skaitļa 10 dalītājs:

- $14 - x^2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 13 \\ x^2 = 15 \end{matrix} \Rightarrow$ nav atrisinājumu veselos skaitļos;
- $14 - x^2 = \pm 2 \Rightarrow x^2 = 12$ – nav atrisinājuma veselos skaitļos;
  $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$, $y = \dfrac{10}{14 - 16} = -5$;
- $14 - x^2 = \pm 5 \Rightarrow x^2 = 19$ – nav atrisinājuma veselos skaitļos;
  $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$, $y = \dfrac{10}{14 - 9} = 2$;
- $14 - x^2 = \pm 10 \Rightarrow x^2 = 24$ – nav atrisinājuma veselos skaitļos;
  $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, $y = \dfrac{10}{14 - 4} = 1$.

Esam ieguvuši atrisinājumus $(2; 1)$, $(-2; 1)$, $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(4; -5)$, $(-4; -5)$.

Piezīme. Šajā uzdevumā varēja izmantot arī simetriju pret y: ja $(x; y)$ ir atrisinājums, tad arī $(-x; y)$ ir atrisinājums. Tāpēc varēja apskatīt tikai gadījumu, kad $x \geq 0$, un no iegūtajiem atrisinājumiem iegūt simetriskos.

A.R.11.3. Pārveidojam doto nevienādību, pieskaitot un atņemot nevienādības kreisajai pusei vienus un tos pašus lielumus:

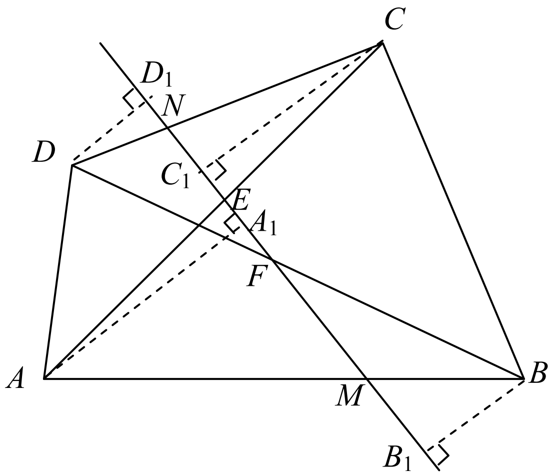
$$(a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}\geq 6.$$

Mainām kreisās puses saskaitāmo secību un lietojam nevienādību $x+\frac{1}{x}\geq 2$ (tā seko no sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko lielumiem x un $\frac{1}{x}$: $A\geq G$) pie $x=a-b$, $b-c$, $c-d$, lai novērtētu nevienādības kreiso pusi un iegūtu prasīto:

$$(a-b)+\frac{1}{a-b}+(b-c)+\frac{1}{b-c}+(c-d)+\frac{1}{c-d}\geq 2+2+2=6.$$

Tā kā $x+\frac{1}{x}=2$ tad un tikai tad, kad $x=1$, tad vienādība $a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}=6$ pastāv tad un tikai tad, kad $a-b=b-c=c-d=1$.

A.R.11.4. Apzīmējam diagonāļu *AC* un *BD* viduspunktus attiecīgi ar *E* un *F*. Projicējam virsotnes *A*, *B*, *C*, *D* uz taisnes *EF* un apzīmējam projekcijas attiecīgi ar A_1, B_1, C_1, D_1 (skat. A16. zīm.).



A16. zīm.

$$S_{ABN}=S_{AMN}+S_{BMN}=\frac{1}{2}AA_1\cdot MN+\frac{1}{2}BB_1\cdot MN=\frac{1}{2}MN(AA_1+BB_1).$$

Līdzīgi $S_{CDM}=S_{CMN}+S_{DMN}=\frac{1}{2}CC_1\cdot MN+\frac{1}{2}DD_1\cdot MN=\frac{1}{2}MN(CC_1+DD_1)$.

Lai pierādītu, ka $S_{ABN}=S_{CDM}$, pietiek pierādīt, ka $AA_1+BB_1=CC_1+DD_1$.

Tā kā $BF=DF$ (jo F – BD viduspunkts) un $\angle BFB_1=\angle DFD_1$ (kā krustleņķi), tad $\Delta BFB_1=\Delta DFD_1$ (pēc taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes $h\ell$). Tātad $BB_1=DD_1$ kā attiecīgās malas vienādos trijstūros.

Līdzīgi $\Delta AEA_1=\Delta CEC_1$ (pēc taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes $h\ell$). Tātad $AA_1=CC_1$ kā attiecīgās malas vienādos trijstūros.

Tātad $AA_1+BB_1=CC_1+DD_1$, no kā seko, ka $S_{ABN}=S_{CDM}$, kas arī bija jāpierāda.

A.R.11.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, jāpierāda, ka ar 5 dienām nepietiek, lai noskaidrotu komandas, kurām būs visvairāk un vismazāk uzvaru turnīra beigās. Pieņemam pretējo, ka pietiek ar 5 dienām. Tā kā katrai komandai jāspēlē ar katru citu tieši vienu reizi, tad pavisam ir $8 \cdot 7 : 2 = 28$ spēles. Tā kā katru dienu norisinās 4 spēles, tad turnīrā spēles tiek spēlētas $28 : 4 = 7$ dienas. Tātad pēc 5 dienām ir palikušas vēl pēdējās 2 kārtas. Pirms tām uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat, lai būtu skaidrs, kurš turnīra beigās būs uzvarētājs un kurš – zaudētājs. Tātad starpībai starp uzvarētāja uzvaru skaitu un zaudētāja uzvaru skaitu jābūt vismaz $3 + 3 = 6$. Taču starpība starp uzvarētāja uzvaru skaitu un zaudētāja uzvaru skaitu pēc 5. dienas var būt augstākais $5 - 0 = 5$, tātad nevar skaidri noteikt uzvarētāju un zaudētāju jau pēc 5 dienām.

Otrkārt, jāparāda, ka pēc 6 dienām var rasties situācija, kad ir skaidrs, kurš ir turnīra uzvarētājs un kurš – zaudētājs. Pēc 6 spēlēm uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 2 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat, lai būtu skaidrs, kurš turnīra beigās būs uzvarētājs un kurš – zaudētājs.

Izveidojam tabulu, kur rindās redzamas katra spēlētāja uzvaras un zaudējumi. Ar 1 apzīmēta uzvara, ar 0 – zaudējums (skat. A17. zīm.). Redzam, ka uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – H, jo viņu pārsvars/atpalicība pirms pēdējās kārtas jeb pēc 6. dienas ir 2 uzvaras.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A			1	1	1	1	1	1
B			0	1	0	1	1	1
C	0	1		0	0	1		1
D	0	0	1		1		0	1
E	0	1	1	0		0	0	
F	0	0	0		1		1	1
G	0	0		1	1	0		1
H	0	0	0	0		0	0	

A17. zīm.

A.R.12. Divpadsmitā klase

A.R.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka $(n^2-1)(n^2-4)+7$ ciparu summa nevar būt mazāka kā 7.

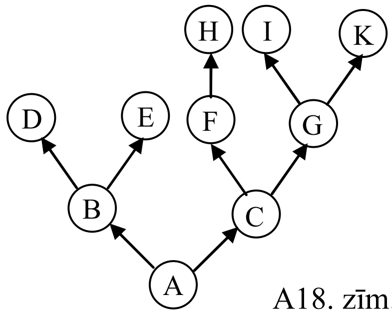
Varam doto skaitli izteikt kā

$$(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+7 = (n-2)(n-1)(n+1)(n+2)+7.$$

Tā kā n – naturāls skaitlis, tad skaitļi $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ir 5 pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 5. Tā kā pēc dotā tas nav n, tad $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)$ dalās ar 5. Tā kā viens no reizinātājiem ir pāra, tad $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)$ dalās arī ar 2. Tā kā 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)$ dalās ar $2 \cdot 5 = 10$. Tāpēc $(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ pēdējais cipars ir 0. Tādā gadījumā arī $(n-1)(n+1)n(n-2)(n+2)$ pēdējais cipars ir 0. Tātad $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+7$ pēdējais cipars ir 7. Līdz ar to $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+7$ ciparu summa nevar būt mazāka par 7.

Otrkārt, parādīsim, ka $(n^2-1)(n^2-4)+7$ ciparu summa var būt 7. Tas ir iespējams tikai tad, ja $(n^2-1)(n^2-4)+7=7$, tātad $(n^2-1)(n^2-4)=0$. Tas iespējams, ja $n=\pm 1$ un $n=\pm 2$. Tā kā n – naturāls skaitlis, tad uzdevumā dotā skaitļa mazākā iespējamā ciparu summa ir 7 un tā tiek sasniegta pie $n=1$ un $n=2$.

A.R.12.2. Apzīmējam aplīšus ar burtiem (skat. A18. zīm.). Tā kā A – vismazākais no skaitļiem, tad $\mathrm{A} = 1$.



A18. zīm.

Ievērojam, ka atlikušos skaitļus varam sadalīt „kreisajā” zarā ar B, D, E un „labajā” zarā ar C, F, G, H, I, K.

Tā kā „kreisajā” zarā atrodas 3 no atlikušajiem 9 skaitļiem, tad skaitļus starp „kreiso” un „labo” zaru var sadalīt $C_9^3 \cdot C_6^6 = 84$ veidos.

„Kreisā” zara iekšpusē B būs mazākais no trim skaitļiem, bet D un E var divējādi izvēlēties no abiem atlikušajiem skaitļiem. Tātad „kreisā” zara iekšpusē iespējami divi izvietojumi.

„Labajā” zarā C būs mazākais no sešiem skaitļiem. No atlikušajiem 5 skaitļiem jāizvēlas divi (F un H). F būs mazākais no izvēlētajiem skaitļiem, H – lielākais. Divus skaitļus no pieciem var izvēlēties $C_5^2 = 10$ veidos. Atlikušie 3 skaitļi būs zarā, kas satur G, I un K. G būs mazākais no trim skaitļiem, bet I un K var divējādi izvēlēties no abiem atlikušajiem skaitļiem. Tātad „labā” zara iekšpusē iespējami $10 \cdot 2 = 20$ izvietojumi.

Tā kā A vietā varam ievietot 1 skaitli, skaitļus starp „kreiso” un „labo” zaru varam sadalīt 84 veidos, kur „kreisajā” zarā skaitļus varam izvietot 2 veidos, bet „labajā” zarā – 20 veidos, tad pavisam ir $1 \cdot 84 \cdot 2 \cdot 20 = 3360$ dažādi izvietojumi.

A.R.12.3. Doto vienādību varam pārrakstīt kā $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1-x^2+1-y^2$.

Apzīmējam $1-x^2 = a$ un $1-y^2 = b$. Tad dotā izteiksme ir $\sqrt{a}+\sqrt{b} = a+b$.

Skaitlis zem kvadrātsaknes nedrīkst būt negatīvs. Arī skaitļa kvadrāts nav negatīvs skaitlis. Tātad skaitļi $1-x^2$ un $1-y^2$ nav negatīvi un nav lielāki kā 1 jeb $0 \le a \le 1$ un $0 \le b \le 1$.

Ja $0 \le z \le 1$, tad $z \ge z^2 \Rightarrow \sqrt{z} \ge z$. Tātad $\sqrt{a} \ge a$ un $\sqrt{b} \ge b$. Apskatot vienādojumu $\sqrt{a}+\sqrt{b} = a+b$, redzam: ja $\sqrt{a} > a$, tad $\sqrt{b} < b$, kas ir pretrunā ar tikko pierādīto. Tātad $\sqrt{a} = a$, no kā seko, ka $\sqrt{b} = b$.

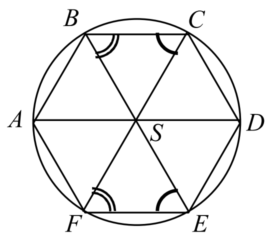
$\sqrt{z} = z$ tad un tikai tad, ja $z = 0$ vai $z = 1$.

Ja $a = \sqrt{1-x^2} = 0$, tad $x = \pm 1$. Ja $a = \sqrt{1-x^2} = 1$, tad $x = 0$.

Tāpat, ja $b = \sqrt{1-y^2} = 0$, tad $y = \pm 1$. Ja $b = \sqrt{1-y^2} = 1$, tad $y = 0$.

Tātad esam ieguvuši atrisinājumus: $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(0;0)$.

A.R.12.4. Ievērojam, ka $\angle EBC$ un $\angle EFC$ balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku *CE*, tātad ir vienādi (skat. A19. zīm.). Tāpat $\angle FCB$ un $\angle FEB$ balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku *BF*, tātad arī ir vienādi. No tā seko, ka $\Delta BSC \sim \Delta FSE$ (pēc pazīmes $\ell\ell$). Tāpēc $\frac{BC}{EF} = \frac{SB}{SF}$.



A19. zīm.

Līdzīgi pierāda, ka $\Delta ASF \sim \Delta CSD \Rightarrow \frac{AF}{CD} = \frac{SF}{SD}$. Tāpat $\Delta ESD \sim \Delta ASB \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{SD}{SB}$. Sareizinot šo vienādību kreisās un labās puses iegūst vienādību:

$$\frac{BC}{EF} \cdot \frac{AF}{CD} \cdot \frac{ED}{AB} = \frac{SB}{SF} \cdot \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SD}{SB} \text{ jeb } \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AF}{CD} \cdot \frac{ED}{AB} = 1.$$

Tātad $BC \cdot AF \cdot ED = EF \cdot CD \cdot AB$, kas arī bija jāpierāda.

A.R.12.5. a) Sanumurējam virsotnes pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz 20. Monētu pārvietošanu apzīmēsim ar $i \to j$, kur monēta tiek pārvietota no virsotnes *i* uz virsotni *j*. Uzdevumā prasīto var paveikt, piemēram, šādi: izmantojam pirmos gājienus, lai savāktu monētas no 1., 2., 3., 4., 5. virsotnes 3. virsotnē, bet monētas no 6., 7., 8., 9., 10. virsotnes – 8. virsotnē:

- pirmajā gājienā $1 \to 2$ un $10 \to 9$;
- nākamajos divos gājienos $2 \to 3$ un $9 \to 8$;
- ceturtajā gājienā $5 \to 4$ un $6 \to 7$;
- nākamajos divos gājienos $4 \to 3$ un $7 \to 8$.

Esam izveidojuši jau 2 kaudzītes pa 5 monētām tajās. Līdzīgi izmantojam nākamos gājienus, lai savāktu monētas no 11., 12., 13., 14., 15. virsotnes 13. virsotnē, bet monētas no 16., 17., 18., 19., 20. virsotnes – 18. virsotnē.

b) Atkal sanumurējam virsotnes tāpat kā a) gadījumā un starp 1. un 20. virsotni atzīmējam zaļu punktu Z.

Ar *S* apzīmējam monētu aizņemto virsotņu numuru summu (katras virsotnes numuru ieskaitām tik reižu, cik tajā ir monētu). Sākumā $S = 1 + 2 + ... + 19 + 20 = 10 \cdot 21$. Apskatām, kā mainās *S*, veicot vienu gājienu:

- Ja kārtējā gājienā Z šķērso divas monētas vai nešķērso neviena, *S* nemainās jeb mainās par $0 \cdot 10$ (viena pārbīde *S* palielina attiecīgi par 19 vai 1, otra – samazina attiecīgi par 19 vai 1);
- Ja kārtējā gājienā punktu Z šķērso viena monēta, *S* mainās par 20 jeb par $2 \cdot 10$ (viena pārbīde *S* palielina par 19 un otra *S* palielina par 1 vai viena pārbīde *S* samazina par 19 un otra *S* samazina par 1).

Tātad *S* vienmēr ir $10 \cdot n$. Tā kā sākumā *n* bija 21 un pēc viena gājiena *n* mainās par 0 vai 2, tad pēc patvaļīga gājienu skaita *n* joprojām būs nepāra skaitlis.

Ja visas monētas savāktu pa 4 monētām kaudzē, *S* dalītos ar 4, taču $10 \cdot n$, kur *n* – nepāra skaitlis nedalās ar 4. Tātad nav iespējams savākt visas monētas 5 kaudzēs pa 4 monētām katrā.

A.V. LATVIJAS 60. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

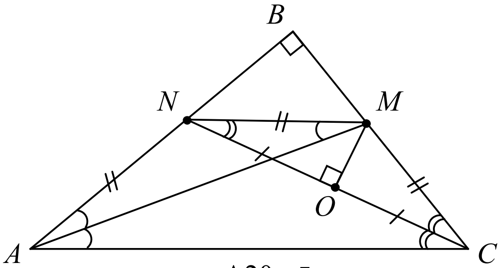
A.V.9. Devītā klase

A.V.9.1. Ja x_1 un x_2 ir dotā vienādojuma saknes, tad saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1+x_2=a^2$ un $x_1x_2=b^2$.

Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi naturāli skaitļi y_1 un y_2, kuriem būtu spēkā $x_1=y_1^2$ un $x_2=y_2^2$. Tad $b^2=y_1^2y_2^2=(y_1y_2)^2$, tātad $b=y_1y_2$ ir naturāls skaitlis pie visām naturālām y_1 un y_2 vērtībām. Tā kā $y_1^2+y_2^2=a^2$, varam izvēlēties, piemēram, $y_1=3$ un $y_2=4$, kad $a=5$. Esam ieguvuši vienādojumu $x^2-5^2x+12^2=0$, kura saknes ir 3^2 un 4^2, tātad ir iespējama uzdevumā dotā situācija.

A.V.9.2. Ja caur punktiem *B*, *M*, *O* un *N* var novilkt riņķa līniju, tad $\angle NBM+\angle NOM=180°$, tātad $\angle NOM=90°$ (skat. A20. zīm.). Tā kā *OM* ir ΔNMC augstums un mediāna, tad ΔNMC ir vienādsānu trijstūris. Tā kā *CN* ir bisektrise un vienādsānu ΔNMC leņķi pie pamata ir vienādi, tad $\angle ACN=\angle NCM=\angle CNM$. No tā seko, ka $AC||MN$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi. Tā kā AM ir bisektrise un $AC \parallel MN$, tad $\angle NAM=\angle CAM=\angle AMN$. Tātad ΔMNA ir vienādsānu trijstūris, jo leņķi pie pamata ir vienādi.

Esam ieguvuši, ka $AN=MN=MC$, tātad *ANMC* ir vienādsānu trapece. $\angle NAC=\angle MCA$ kā leņķi pie vienādsānu trapeces pamata, tāpēc ΔABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un $\angle BAC=\angle NAC=45°$.



A20. zīm.

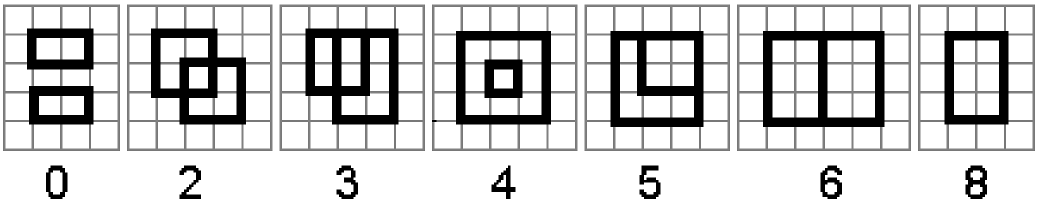
A.V.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

Aplūkosim tādus 11 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus no k līdz $k+10$ (ieskaitot), ka skaitļa k pēdējais cipars ir 1. Skaitlis k beidzas ar 1 un dalās ar 1; $k+4$ beidzas ar 5 – tātad dalās ar 5; skaitlis $k+10$ arī beidzas ar 1. Tātad skaitļi k, $k+4$ un $k+10$ nav *skaisti*.

Starp k un $k+4$ ir 3 skaitļi; starp $k+4$ un $k+10$ ir 5 skaitļi. Tāpēc nevar būt vairāk kā 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

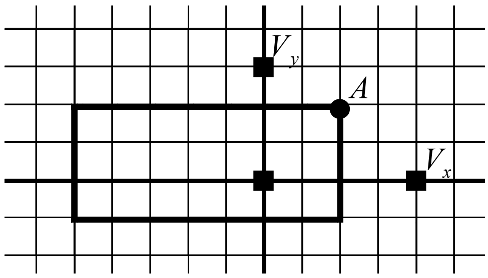
Otrkārt, parādām, ka var būt 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi. Piemēram, 866, 867, 868, 869, 870.

A.V.9.4. No astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi otram taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes, skat., piem., A21. zīm.



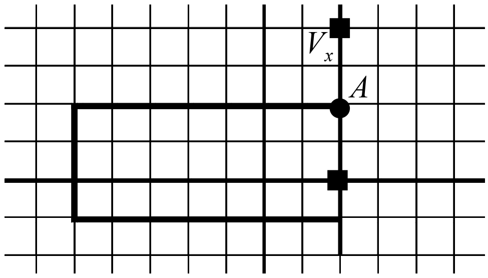
A21. zīm.

1. Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši viena virsotne.
Pieņemsim pretējo, ka šāda (*īpašā*) virsotne tomēr atrodas – tā ir vienīgā no astoņām virsotnēm, kas vienlaicīgi pieder abiem taisnstūriem.
Apskatīsim gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas otra taisnstūra iekšpusē (skat. A22. zīm.).



A22. zīm.

Aplūkosim, kur var atrasties tās divas virsotnes, kurām ar *īpašo* virsotni ir kopīga mala. Vienai virsotnei V_x jāatrodas uz tās pašas horizontāles, uz kuras atrodas *īpašā* virsotne. V_x nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_x būtu ar meklēto īpašību. Citai virsotnei V_y jāatrodas uz tās pašas vertikāles, uz kuras atrodas *īpašā* virsotne. V_y nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_y būtu ar minēto īpašību. Tātad gan V_x, gan V_y atrodas ārpus otra taisnstūra. Bet tādā gadījumā pirmā taisnstūra (kura trīs virsotnes ir *īpašā* virsotne, V_x un V_y) iekšpusē atrodas kāda no otrā taisnstūra virsotnēm (A). Tātad šajā gadījumā otram taisnstūrim nevar piederēt tieši viena virsotne.
Apskatām otru gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas uz otra taisnstūra kontūra. Šī virsotne nevar sakrist ar kādu no otra taisnstūra virsotnēm, jo tad arī otra taisnstūra virsotnei, ar kuru sakrīt *īpašā* virsotne, būtu spēkā šī īpašība, t. i., būtu vismaz divas virsotnes ar minēto īpašību. Tātad atliek apskatīt gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas uz otra taisnstūra kontūra, bet nesakrīt ar kādu no tā virsotnēm. Varam pieņemt, ka tā atrodas uz otra taisnstūra vertikālās malas (otrs gadījums, kad *īpašā* virsotne atrodas uz horizontālās malas – līdzīgs). Aplūkosim to virsotni V_x, kurai ar *īpašo* virsotni ir kopīga mala un šī virsotne atrodas uz tās pašas vertikāles, uz kuras atrodas īpašā virsotne(skat. A23. zīm.). Ja virsotne V_x arī atrodas uz otra taisnstūra kontūra, tad abiem taisnstūriem ir divas kopīgas virsotnes. Tātad virsotnei V_x jāatrodas ārpus otra taisnstūra kontūra. Bet tādā gadījumā uz pirmā taisnstūra kontūra (kura divas virsotnes ir *īpašā* virsotne un V_x) atrodas kāda no otrā taisnstūra virsotnēm (A).

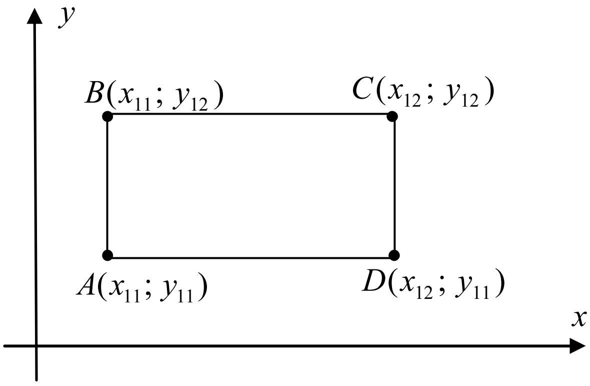


A23. zīm.

Tātad arī šajā gadījumā nevar būt tieši viena virsotne, kas pieder otram taisnstūrim. Esam pierādījuši, ka abiem taisnstūriem vienlaicīgi nevar piederēt tieši viena virsotne.

2. Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši septiņas virsotnes.

Ieviesīsim koordinātu sistēmu un apskatīsim doto taisnstūru virsotņu koordinātas. Pieņemsim, ka viena taisnstūra *ABCD* virsotnes ir ar koordinātām $A(x_{11}; y_{11})$, $B(x_{11}; y_{12})$, $C(x_{12}; y_{12})$ un $D(x_{12}; y_{11})$ un ir spēkā sakarības $x_{11} < x_{12}$ un $y_{11} < y_{12}$ (skat. A24. zīm.), bet otra taisnstūra *KLMN* virsotnes ir ar koordinātām $K(x_{21}; y_{21})$, $L(x_{21}; y_{22})$, $M(x_{22}; y_{22})$ un $N(x_{22}; y_{21})$.



A24. zīm.

Pieņemsim pretējo – ir iespējams divus taisnstūrus novietot tā, ka tieši septiņas no astoņām virsotnēm vienlaikus pieder arī otram taisnstūrim. Šis apgalvojums ir līdzvērtīgs apgalvojumam, ka var novietot divus taisnstūrus tā, ka tieši viena no astoņām virsotnēm nepieder otram taisnstūrim. Varam pieņemt, ka šī vienīgā „nepiederošā" virsotne ir virsotne $M(x_{22}; y_{22})$.

Tātad virsotņu koordinātas vienlaicīgi saista šādas sakarības:

$x_{11} \le x_{21} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{21} \le y_{12}$ (jo $K(x_{21}; y_{21})$ pieder taisnstūrim *ABCD*) (1)

$x_{11} \le x_{21} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{22} \le y_{12}$ (jo $L(x_{21}; y_{22})$ pieder taisnstūrim *ABCD*) (2)

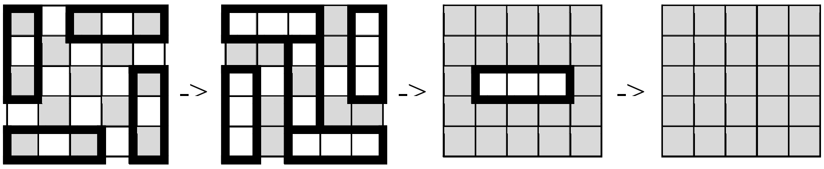
$x_{11} \le x_{22} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{21} \le y_{12}$ (jo $N(x_{22}; y_{21})$ pieder taisnstūrim *ABCD*) (3)

No (2) un (3) nosacījumiem seko, ka vienlaicīgi

$$x_{11} \le x_{22} \le x_{12} \text{ un } y_{11} \le y_{22} \le y_{12},$$

tātad arī virsotne $M(x_{22}; y_{22})$ pieder taisnstūrim *ABCD*. Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums, ka tieši viena virsotne nepieder otram taisnstūrim, ir aplams, tāpēc tieši septiņas no astoņām abu taisnstūru virsotnēm nevar vienlaikus piederēt arī otram taisnstūrim.

A.V.9.5. a) Ja $n = 5$, tad var panākt, ka visas rūtiņas ir vienā krāsā. A25. zīm. parādīts piemērs, kurā ar treknāku līniju apvilktas rūtiņas, kurām tiek mainīta krāsa vienā gājienā, lai nokrāsotu visas rūtiņas vienā krāsā.



A25. zīm.

Piezīme. Galarezultātu nosaka tikai tas, cik reizes katrai rūtiņai ir mainīta krāsa, nav svarīgi, kādā secībā gājieni tiek izdarīti.

b) Ja $n = 3$, tad nav iespējams, ka visas rūtiņas nokrāsotas vienā krāsā. Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1 vai 2 kā redzams A26. zīm.:

1	1	2	1	1
2	1	1	2	1
1	2	1	1	2

A26. zīm.

Sākumā skaitļu summa melnajās rūtiņās ir 11. Pilnībā baltam laukumam (nav nevienas pelēkās rūtiņas) šī summa ir 0, bet pilnībā melnam laukumam tā ir vienāda ar visus ierakstīto skaitļu summu, t. i., 20.
Mainot krāsojumu jebkurās trīs secīgās rūtiņās, skaitļu kopsumma iekrāsotajās rūtiņās mainās (palielinās, samazinās vai nemainās, t. i., izmainās par 0) par pāra skaitli: $(1+1)-2=0$ vai $(1+2)-1=2$. Tā kā no nepāra skaitļa 11, tam pieskaitot vai atņemot pāra skaitļus, nevar iegūt pāra skaitli, tad uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

A.V.10. Desmitā klase

A.V.10.1. Apzīmēsim $b+c-a=2x$, $a+c-b=2y$ un $a+b-c=2z$, tātad $a=y+z$, $b=x+z$ un $c=x+y$.

Tā kā *a*, *b*, *c* ir trijstūra malu garumi, tad *x*, *y*, *z* ir pozitīvi skaitļi. Lietojot ieviestos apzīmējumus un katru daļu pārveidojot par divu daļu summu, doto nevienādību var pārrakstīt:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq 3 \quad (*)$$

Pierādīsim, ka patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem *x* un *y* ir spēkā nevienādība

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2. \quad (**)$$

Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis, tad:

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2xy+y^2 \geq 0,$$

$$x^2+y^2 \geq 2xy \qquad \Big| : xy > 0$$

$$\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}\geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \ .$$

Pielietojot katrai izteiksmei, kas pierādāmajā nevienādībā (*) ir iekavās, nevienādību (**), iegūstam

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3.$$

Nevienādība (*) ir patiesa, tātad patiesa ir arī uzdevumā dotā nevienādība.

A.V.10.2. Apzīmējam dotās vērtības ar x, tad

$$a_1-a_2=\pm x,\ a_2-a_3=\pm\frac{x}{2},\ a_3-a_4=\pm\frac{x}{3},\ \ldots,\ a_{20}-a_1=\pm\frac{x}{20}.$$

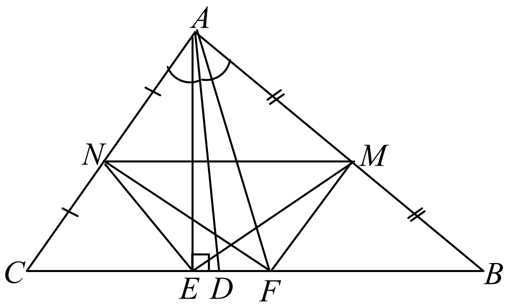
Saskaitām šo vienādību labās un kreisās puses:

$$a_1-a_2+a_2-a_3+a_3-a_4+\ldots+a_{20}-a_1=\pm x\pm\frac{x}{2}\pm\ldots\pm\frac{x}{20}.$$

Ievērojam, ka vienādības kreisajā pusē visi saskaitāmie saīsinās, bet vienādības labajā pusē visiem saskaitāmajiem ir kopīgs reizinātājs x. Iegūstam $x\left(\pm1\pm\frac{1}{2}\pm\ldots\pm\frac{1}{20}\right)=0$.

Ja $x\neq0$, tad izteiksmei, kas ir iekavās, ir jābūt vienādai ar 0. Izsakot izteiksmi, kas ir iekavās, kā racionālu skaitli ar mazāko iespējamo saucēju, saskaitāmajā $\pm\frac{1}{19}$ skaitītājs nedalīsies ar 19, jo 19 ir pirmskaitlis un skaitītājā nav reizinātāja 19, bet visos citos – dalīsies, jo pārējiem saskaitāmajiem jābūt papildreizinātājam 19, lai varētu summu uzrakstīt kā vienu daļu. Tāpēc kopējais skaitītājs ar 19 nedalīsies, un daļa būs nesaīsināma. Tātad tā nav vesels skaitlis, tāpēc nav arī 0. Atliek iespēja, ka $x=0$ un $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{20}$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.10.3. Ar E apzīmēsim no virsotnes A vilktā augstuma pamatu, ar F – malas BC viduspunktu (skat. A27. zīm.). Pierādīsim, ka D atrodas starp E un F (vai ar tiem sakrīt, ja ABC ir vienādsānu trijstūris).



A27. zīm.

Ja $AC=AB$, tad punkti E, D un F sakrīt.

Ja malas ir dažādas, tad varam pieņemt, ka $AC<AB$ (otru gadījumu analizē līdzīgi).

Tā kā AD ir bisektrise, tad no bisektrišu īpašības seko, ka $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}<1=\frac{CF}{FB}$, tātad D ir pa kreisi (skat. A27. zīm.) no punkta F.

Lietojot Pitagora teorēmu trijstūriem CAE un BAE, iegūstam $\frac{CE^2}{EB^2}=\frac{AC^2-AE^2}{AB^2-AE^2}$. (*)

Parādīsim, ka ir spēkā novērtējums $\frac{AC^2-AE^2}{AB^2-AE^2}<\frac{AC^2}{AB^2}$. (**)

Tā kā abi saucēji ir lielāki par 0, tad nevienādības abas puses reizinām ar $(AB^2 - AE^2)\cdot AB^2$:

$$(AC^2 - AE^2)\cdot AB^2 < AC^2\cdot(AB^2 - AE^2).$$

Veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$AC^2\cdot AB^2 - AE^2\cdot AB^2 < AC^2\cdot AB^2 - AC^2\cdot AE^2$$

$$-AE^2\cdot AB^2 < -AC^2\cdot AE^2 \quad \Big| : AE^2 > 0$$

$$-AB^2 < -AC^2 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$AB^2 > AC^2$$

Pēc pieņēmuma $AB > AC$, tātad iegūtā nevienādība ir patiesa un arī sākotnējais novērtējums $\frac{AC^2 - AE^2}{AB^2 - AE^2} < \frac{AC^2}{AB^2}$ ir pareizs.

No (*) un (**) iegūstam, ka $\frac{CE^2}{EB^2} < \frac{AC^2}{AB^2}$.

Tā kā $\frac{CE^2}{EB^2} < \frac{AC^2}{AB^2}$ un $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$, iegūstam, ka $\frac{CE}{EB} < \frac{CD}{DB}$. Tātad punkts *E* atrodas pa kreisi no punkta *D*.

EM ir taisnleņķa trijstūra *AEB* mediāna, tāpēc $EM = AM = MB$. Līdzīgi *EN* ir taisnleņķa trijstūra *AEC* mediāna, tāpēc $EN = AN = NC$. Tātad $\Delta ANM = \Delta ENM$ (pēc pazīmes *mmm*), no kurienes seko, ka $\angle NAM = \angle NEM$.

Tā kā *N*, *M* un *F* ir attiecīgi malu *AC*, *AB* un *BC* viduspunkti, tad pēc trijstūra viduslīnijas īpašības seko, ka $AN = FM$ un $AM = FN$. Tātad $\Delta ANM = \Delta FMN$ (pēc pazīmes *mmm*), tāpēc $\angle NAM = \angle NFM$.

Tātad $\angle NEM = \angle NAM = \angle NFM$, tāpēc caur punktiem *E*, *N*, *M* un *F* var novilkt riņķa līniju (skat. I.V.10.3.).

Ja punkti *E*, *F* un *D* sakrīt (ΔABC – vienādsānu), tad $\angle NAM = \angle NDM$.

Ja *E* un *F* ir dažādi punkti, tad *D* atrodas riņķa iekšpusē uz hordas *EF*, tātad $\angle NDM > \angle NEM = \angle NAM$.

Tātad ir pierādīts, ka $\angle MDN \geq NAM = \angle BAC$.

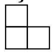
A.V.10.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām piemēru, ka ar 5 dienām pietiek, lai izpildītos uzdevuma prasības. Apzīmējam mūziķus ar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, tad viens no iespējamiem uzstāšanos grafikiem ir, piemēram,

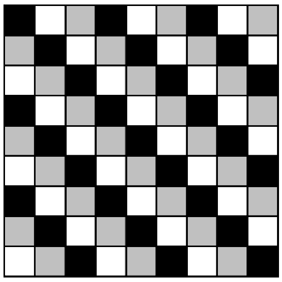
1. diena: 1, 2, 3, 4
2. diena: 1, 5, 6, 7
3. diena: 2, 5, 6, 7
4. diena: 3, 5, 6, 7
5. diena: 4, 5, 6, 7.

Otrkārt, pierādīsim, ka ar 4 dienām nepietiek. Ja festivālā ir 4 dienas, tad kopā ir $4\cdot 4 = 16$ uzstāšanās. Tā kā ir 7 mūziķi, tad noteikti ir kāds mūziķis, kas uzstājies ne vairāk kā 2 dienās. Pieņemsim, ka tas ir mūziķis 1. Lai 1 būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai viņš vienā dienā muzicē kopā ar vieniem trīs mūziķiem un otrā dienā – kopā ar trim pārējiem mūziķiem. Piemēram, pirmajā dienā viņš uzstājas ar 2, 3 un 4 un otrajā dienā – ar 5, 6 un 7.

Ir vēl 2 dienas, kad uzstājušies 2, 3, 4, 5, 6, 7 (kaut kādās kombinācijās). Vismaz viens no viņiem ir uzstājies tikai vienā no šīm divām dienām. Pieņemsim, ka tas ir 2. Lai viņš būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai šajā dienā viņš muzicētu kopā ar 5, 6 un 7.

Ja atlikušajā ceturtajā dienā neuzstājas kāds no mūziķiem 3 vai 4, tad viņš nebūs muzicējis kopā ar 5, 6 un 7. Savukārt, ja atlikušajā dienā uzstājas gan 3, gan 4, tad noteikti neuzstājas viens no mūziķiem 5, 6, 7, tad šis mūziķis nav uzstājies kopā ar 3 un 4. Tāpēc ar 4 dienām nepietiek.

V.10.5. Pieņemsim, ka ir izdevies kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas sagriezt uzdevumā prasītajās figūrās. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka šajā sadalījumā *stūrītis* ir orientēts tieši tā kā redzams zīmējumā: . (Ja tā nav, varam kvadrātu pagriezt ap centru tā, lai *stūrītis* nonāk šādā stāvoklī.) Izkrāsosim kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas trīs krāsās, kā parādīts A28. zīm.



A28. zīm.

Tā kā kvadrātā ir 81 rūtiņa, tad katrā krāsā ir iekrāsots vienāds rūtiņu daudzums – pa 27 katrā krāsā. Katrs taisnstūris ar izmēriem 2×3 rūtiņas pārklāj tieši divas katras krāsas rūtiņas, tātad 13 šādi taisnstūri kopā pārklāj pa 26 katras krāsas rūtiņām. Tātad *stūrītim* jāpārklāj atlikušās visu trīs krāsu rūtiņas. Tā kā *stūrītis* pārklāj divas vienas krāsas rūtiņas, tad prasītais sadalījums neeksistē.

A.V.11. Vienpadsmitā klase

A.V.11.1. 1. risinājums. Pārveidosim doto izteiksmi:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{8}-$$

$$-3\frac{3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd}{8}=$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{8}-3\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2}{8}\overset{(*)}{\le}$$

$$\overset{(*)}{\le}\frac{(a+b+c+d)^2}{8}=\frac{8^2}{8}=8\text{, kas arī bija jāpierāda.}$$

Nevienādībā (*) tika izmantots fakts: ja tiek atmests negatīvs saskaitāmais, tad izteiksmes vērtība palielinās.

2. risinājums. Pārveidosim doto izteiksmi:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{2}-\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{2}-3\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=\frac{(a+b+c+d)^2}{2}-3\cdot 2\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\overset{(**)}{\le}$$

$\overset{(**)}{\leq} \dfrac{(a+b+c+d)^2}{2} - 3\cdot 2\cdot\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = \dfrac{8^2}{2} - \dfrac{3\cdot 2\cdot 8^2}{16} = 32-24=8$, kas arī bija jāpierāda.

Lai iegūtu nevienādību (**), tika izmantota nevienādība starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko ($Q \geq A$): $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$.

A.V.11.2. Izmantosim matemātisko indukciju, lai pierādītu, ka $a_i = i,\ i=1, 2, ..., n$.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad iegūstam $a_1^3 = a_1^2$, no kurienes $a_1 = 1$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemam, ka jau pierādīts, ka $a_i = i$ pie $i = 1, 2, ..., k$.

Pierādīsim, ka ir spēkā induktīvā pāreja:

$$a_1^3+...+a_k^3+a_{k+1}^3 = (a_1+...+a_k+a_{k+1})^2. \qquad (*)$$

Atverot iekavas, iegūstam

$$(a_1^3+...+a_k^3)+a_{k+1}^3 = (a_1+...+a_k)^2 + 2a_{k+1}(a_1+...+a_k)+a_{k+1}^2.$$

Izmantojam vienādību (*), iegūstam: $a_{k+1}^3 = 2a_{k+1}(a_1+...+a_k)+a_{k+1}^2$. (**)

Izmantojam induktīvo pieņēmumu un pārveidojam izteiksmi:

$$a_1+a_2+...+a_k = 1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ievietojot iegūto sakarību izteiksmē (**) un izdalot vienādības abas puses ar a_{k+1}, iegūstam $a_{k+1}^2 = k(k+1)+a_{k+1}$.

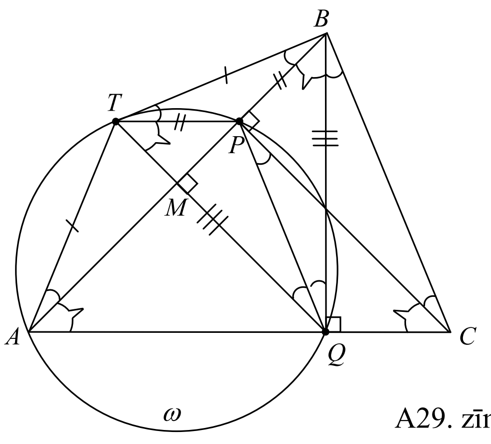
Pārnesam visus saskaitāmos uz vienu pusi un apskatām kvadrātvienādojumu attiecībā pret mainīgo a_{k+1}:

$$a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0.$$

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $a_{k+1} = -k$ vai $a_{k+1} = k+1$. Tā kā virkne sastāv no pozitīviem skaitļiem, der tikai otrā iespēja. Tātad ar matemātisko indukciju esam pierādījuši, ka $a_i = i,\ i = 1, 2, ..., n$.

Tātad uzdevumā meklētā skaitļu virkne ir 1, 2, 3, 4, ... un tā ir vienīgā virkne, kurai izpildās uzdevuma nosacījumi.

A.V.11.3. No dotā seko, ka ΔATB ir vienādsānu un $\angle TAB = \angle TBA$ (skat. A29. zīm.).



A29. zīm.

$\angle BTP = \angle TAP$ (pēc hordas – pieskares un ievilktā leņķa īpašībām), tāpēc $\angle BTP = \angle TBP$ un ΔBPT ir vienādsānu, t. i., $TP = BP$. (1)

No tā, ka ΔATB ir vienādsānu un TM – augstums, kas vienādsānu trijstūrī ir arī mediāna, seko, ka $AM = MB$. No tā un no $MQ \perp AB$ savukārt seko, ka ΔBQA ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo mediāna ir arī augstums. Tāpēc $\angle BAQ = \angle ABQ = 45°$. Tā kā $\angle PTQ = \angle PAQ$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku *PQ*), tad $\angle PTQ = \angle PBQ$.

No tā, ka $\angle BTP = \angle TBP$ un $\angle PTQ = \angle PBQ$, seko, ka $\angle BTQ = \angle TBQ$. Tāpēc ΔTBQ ir vienādsānu un $TQ = BQ$. (2)

No (1) un (2) seko, ka $\Delta TPQ = \Delta BPQ$ (pēc pazīmes mmm). Tāpēc $\angle TQP = \angle BQP$ (3).

No $\angle BMQ = \angle BPC = 90°$ izriet, ka $PC || TQ$. Tāpēc $\angle QPC = \angle TQP$ kā iekšējie šķērsleņķi. Savukārt ap *Q*, *P*, *B* un *C* var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle BQC = \angle BPC = 90°$ (skat. I.V.10.3.). Tādēļ šajā riņķa līnijā $\angle QPC = \angle QBC$ (4) un $\angle PQB = \angle PCB$ (5) abos gadījumos kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. No (3), (4) un (5) iegūstam, ka $\angle QBC = \angle PCB$.

Tālāk $\angle ACP = 180° - \angle PAC - \angle CPA = 180° - 45° - 90° = 45° = \angle ABQ$, jo trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.

Iegūstam, ka $\angle QBC + \angle ABQ = \angle PCB + \angle ACP$ jeb $\angle ABC = \angle ACB$ (trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas), no kā seko $AB = AC$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.11.4. Katram naturālam *n* aplūkosim virkni $\{G_i\}, i \geq 1$, kur G_i ir atlikums, ko iegūst F_i dalot ar *n*.

Ja $n = 1$, tad katrs Fibonači virknes loceklis dalās ar *n*.

Ja $n > 1$, tad F_1 un F_2 atlikums, dalot ar *n*, ir 1, tātad $G_1 = G_2 = 1$.

Aplūkosim virknes G īpašības:

I Virkne $\{G_i\}$ ir periodiska. Pamatojums: Katrai fiksētai *n* vērtībai virknes $\{G_i\}$ elementi var pieņemt vērtības no 0 līdz $n-1$, tātad divu secīgu elementu pāris var pieņemt n^2 dažādas vērtības. Tā kā virkne ir bezgalīga, tad kāds no pāriem atkārtosies, un tā kā divi secīgi virknes $\{G_i\}$ elementi viennozīmīgi nosaka visus tālākos virknes elementus, tad virkne $\{G_i\}$ būs periodiska.

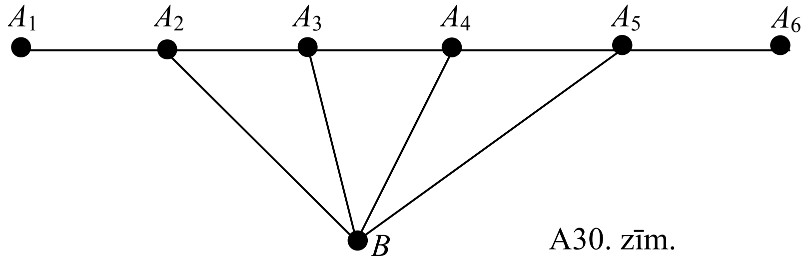
II Virknei $\{G_i\}$ nav priekšperioda. Pamatojums: Tā kā no katriem diviem Fibonači virknes locekļiem viennozīmīgi var iegūt visus iepriekšējos ($F_{i-2} = F_i - F_{i-1},\ i \geq 3$), arī no katriem diviem secīgiem virknes $\{G_i\}$ elementiem viennozīmīgi var atjaunot iepriekšējos elementus, tāpēc virknei $\{G_i\}$ nav priekšperioda.

No I un II seko, ka virknē $\{G_i\}$ noteikti ir tāds *k*, ka $G_k = G_{k+1} = 1,\ k > 2$, tad $G_{k-1} = G_{k+1} - G_k = 0$. Tātad noteikti eksistē tāds Fibonači virknes loceklis F_{k-1}, kas dalās ar *n*.

A.V.11.5. a) Pieņemsim pretējo, ka ir 2 pilsētas, īsākais ceļš starp kurām iet caur vismaz četrām citām pilsētām. Tad šajā ceļā noteikti ir 2 tādas pilsētas, starp kurām īsākais ceļš iet tieši caur 4 citām pilsētām.

Apzīmēsim šīs 2 pilsētas ar A_1 un A_6, bet četras pilsētas starp tām – ar A_2, A_3, A_4 un A_5 (skat. A30. zīm.). Ja kāda cita pilsēta *B* ir savienota ar 4 vai vairāk no $A_1, A_2, ..., A_6$, tad šo pilsētu var izmantot, lai „saīsinātu" īsāko ceļu starp A_1 un A_6.

Piemēram, A30. zīm. redzamajā gadījumā posmu $A_2 - A_3 - A_4 - A_5$ var aizstāt ar $A_2 - B - A_5$. Tāpēc šāda situācija nav iespējama.



A30. zīm.

Tāpēc katra cita pilsēta B var būt savienota ne vairāk kā ar 3 no $A_1, A_2, ..., A_6$. Līdz ar to, ceļu skaits ir ne vairāk kā:

- 5 ceļi ceļā no A_1 uz A_6;
- pa 3 ceļiem no katras citas pilsētas $B_i, i = 1, 2, 3, 4$, uz $A_1, A_2, ..., A_6$ (kopā, tas var dot $4 \cdot 3 = 12$ ceļus, jo ir 4 citas pilsētas B).
- 6 ceļi starp pārējām 4 pilsētām B_1, B_2, B_3, B_4, jo no 4 pilsētām var izveidot $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ pilsētu pārus.

Tātad ir ne vairāk kā $5 + 12 + 6 = 23$ ceļi. Iegūta pretruna ar doto, ka ir 24 ceļi. Tātad ir iespējams aizbraukt uz katru citu pilsētu, izbraucot caur ne vairāk kā 3 pilsētām.

b) Ja $A_1, A_2, ..., A_6$ savieno, kā parādīts A30. zīm., katru citu pilsētu B_i, $i = 1, 2, 3, 4$, savieno ar A_4, A_5 un A_6 un katras 2 pilsētas B_i un B_j savieno savā starpā, tad izveidojas 23 ceļi un īsākajā ceļā starp A_1 un A_6 ir 4 pilsētas (tajā noteikti jābūt A_2, A_3, A_4 un vēl vienai pilsētai starp A_4 un A_6). Tātad 23 ceļu gadījumā ne vienmēr no katras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz katru citu caur ne vairāk kā 3 pilsētām.

A.V.12. Divpadsmitā klase

A.V.12.1. Varam apzīmēt $x_i = 2\cos\alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$, jo $-1 \le \cos\alpha \le 1$, tātad $-2 \le 2\cos\alpha \le 2$.

Ievērojam, ka

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = (2\cos\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ ,$$

no kurienes $2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$, tātad $2\cos 3\alpha + 6\cos\alpha = 8\cos^3\alpha = (2\cos\alpha)^3 = x^3$.

Tāpēc $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = (2\cos 3\alpha_1 + ... + 2\cos 3\alpha_n) + 3(2\cos\alpha_1 + ... + 2\cos\alpha_n)$.

Tā kā otrās iekavas izteiksme ir 0, jo pēc dotā $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$, tad $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 2\cos 3\alpha_1 + ... + 2\cos 3\alpha_n$.

Izmantojam moduļu īpašību $|a + b| \le |a| + |b|$ un kosinusa funkcijas ierobežotību:

$$\left|x_1^3 + ... + x_n^3\right| = \left|2\cos 3\alpha_1 + ... + 2\cos 3\alpha_n\right| \le \left|2\cos 3\alpha_1\right| + ... + \left|2\cos 3\alpha_n\right| \le 2n\ ,$$

kas arī bija jāpierāda.

A.V.12.2. Apskatām virknes, kurām vismaz viens no koeficientiem p vai q ir lielāks nekā 1 jeb $p + q > 2$. Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim, ka visi virknes $\{a_i\}$ locekļi dod atlikumu 1, dalot ar $p + q - 1$ (tā kā $p + q > 2$, tad $p + q - 1 > 1$).

Indukcijas bāze. $a_1 = a_2 = 1$, tātad atlikums, dalot tos ar $p+q-1$, arī ir 1.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemam, ka katram $i \le k$ dotās virknes loceklis a_i dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Induktīvā pāreja. Apskatām virknes locekli a_{k+1} pēc moduļa $p+q-1$:

Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, a_k un a_{k-1} dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Tātad $a_{k+1} = p \cdot a_k + q \cdot a_{k-1} \equiv_{(p+q-1)} p \cdot 1 + q \cdot 1 = p+q = (p+q-1)+1$, t. i., a_{k+1} arī dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Tātad, ja $p+q>2$, ir tāda *n* vērtība $n = p+q-1$, kurai neviens virknes $\{a_i\}$ loceklis nedalās ar *n*.

Tā kā zināms, ka katram naturālam skaitlim *n* eksistē tāds virknes loceklis a_k, ka a_k dalās ar *n*, tad nevar būt $p+q>2$. Bet *p* un *q* ir naturāli skaitļi, tātad $p=q=1$.

Piezīme. Pie $p=q=1$ tiek iegūta Fibonači skaitļu virkne, kurai minētās īpašības pierādījums dots uzdevuma V.11.4. risinājumā.

A.V.12.3. 1) Izmantosim šādas īpašības:

- ja diviem trijstūriem ir vienādi augstumi, tad pamatu garumu attiecība ir vienāda ar trijstūru laukumu attiecību, jo $S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$;
- trijstūra mediānas krustojas vienā punktā un krustpunktā dalās attiecībā $2:1$ skaitot no virsotnes (mediānu īpašība).

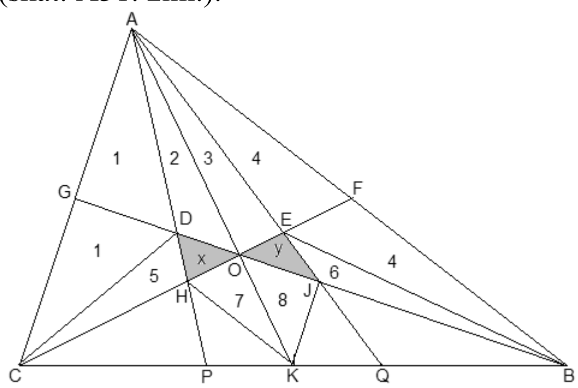
2) Tā kā $OC : OF = 2:1$, tad $S_{OAF} = S_{OAC} = 2:1$, tātad $S_{OAF} = \frac{1}{2} S_{OAC}$.

Tā kā $AG = CG = \frac{1}{2} AC$, tad $S_{OAG} = S_{OGC} = \frac{1}{2} S_{AOC}$.

Tāpēc $S_{OAF} = S_{OAG} = S_{OGC}$.

Līdzīgi iegūstam, ka $S_{OAF} = S_{OAG} = S_{OGC} = S_{OBK} = S_{OFB} = S_{OCK} = S^*$.

3) Vienlielus trijstūrus apzīmēsim ar vienādiem cipariem, mūs interesējošos trijstūrus atzīmēsim ar *x* un *y* (skat. A31. zīm.).



A31. zīm.

4) Tā kā $S_{ADO} = S_{OAG} - S_{ADG} = S^* - S_1 = S_{OGC} - S_{CDG} = S_{ODC}$, tad $S_{ADO} = S_{ODC}$, tātad $S_2 = S_x + S_5$. (1)

Līdzīgi $S_{AOE} = S_{OEB}$, tātad $S_3 = S_y + S_6$. (2)

5) Izmantojam īpašību par trijstūra laukumu attiecībām:

$$\frac{S_{APC}}{S_{APB}} = \frac{CP}{PB} = \frac{S_{DPC}}{S_{DPB}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{S_{APC} - S_{DPC}}{S_{APB} - S_{DPB}} = \frac{CP}{PB} = \frac{CP}{CB - CP}.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $\frac{S_{ABE}}{S_{ACE}} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{BQ}{CB - BQ}$.

6) Tā kā $CP = BQ$, tad $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{CP}{CB - CP} = \frac{S_{ABE}}{S_{ACE}}$ jeb $\frac{2S_1}{S_2 + 2S^*} = \frac{2S_4}{S_3 + 2S^*}$.

Ievērojot, ka $S_2 = S_{AOG} - S_{AOD} = S^* - S_1$ un $S_3 = S_{AOF} - S_{AEF} = S^* - S_4$, iegūstam, ka $\frac{2S_1}{3S^* - S_1} = \frac{2S_4}{3S^* - S_4}$.

Tātad $S_1 = S_4 \Rightarrow S_2 = S_3$. (3)

7) No mediānu īpašības seko, ka $S_{AOJ} = 2S_{OJK}$ un $S_{OHA} = 2S_{OHK}$, tad

$$S_3 + S_y = 2S_8, \quad (4)$$

$$S_2 + S_x = 2S_7. \quad (5)$$

8) Līdzīgi kā 5) un 6) punktā iegūstam $\frac{S_{ABJ}}{S_{AKJ}} = \frac{S_{ACH}}{S_{AHK}}$.

$$\frac{2S_4 + S_6}{S_3 + S_y + S_8} = \frac{2S_1 + S_5}{S_2 + S_x + S_7}$$

Izmantojot vienādības (4) un (5), iegūstam:

$$\frac{2S_4 + S_6}{S_3 + S_y + \frac{1}{2}(S_3 + S_y)} = \frac{2S_1 + S_5}{S_2 + S_x + \frac{3}{2}(S_2 + S_x)} \quad \text{jeb} \quad \frac{2S_4 + S_6}{\frac{3}{2}(S_3 + S_y)} = \frac{2S_1 + S_5}{\frac{3}{2}(S_2 + S_x)}.$$

Pareizinām abas puses ar $\frac{3}{2}$ un ievietojam $S_5 = S_2 - S_x$ no (1) un $S_6 = S_3 - S_y$ no (2):

$$\frac{2S_4 + S_3 - S_y}{S_3 + S_y} = \frac{2S_1 + S_2 - S_x}{S_2 + S_x}.$$

No (3) ievietojam $S_4 = S_1$ un $S_3 = S_2$:

$$\frac{2S_1 + S_2 - S_y}{S_2 + S_y} = \frac{2S_1 + S_2 - S_x}{S_2 + S_x}.$$

9) Izmantojam proporcijas pamatīpašību ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$) un atveram iekavas:

$$2S_1S_2 + S_2^2 - S_2S_y + 2S_1S_x + S_2S_x - S_yS_x = 2S_1S_2 + S_2^2 - S_xS_2 + 2S_1S_y + S_2S_y - S_xS_y$$

$$2S_2S_x + 2S_2S_x - 2S_1S_y - 2S_2S_y = 0.$$

Izdalām abas vienādības puses ar 2 un sadalām vienādības kreiso pusi reizinātājos:

$$S_x(S_1 + S_2) - S_y(S_1 + S_2) = 0,$$

$$(S_1 + S_2)(S_x - S_y) = 0.$$

Lai reizinājums būtu 0, kādam no reizinātājiem jābūt 0.

Tā kā $S_1 + S_2 \neq 0$, jo tie ir trijstūru laukumi, tad jābūt $S_x - S_y = 0$ jeb $S_x = S_y$, kas arī bija jāpierāda.

A.V.12.4. a) To var izdarīt, piemēram, izvietojot skaitļus $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ pa apli pēc kārtas.

Tā kā mums svarīgs tikai atlikums, dalot ar 7, tad vajadzības gadījumā pēc 7 sekojošos skaitļus 1, 2, 3, ... varam aizvietot ar 8, 9, 10, ... un uzskatīt, ka visas blakusesošo skaitļu summas ir secīgu naturālu skaitļu summas:

$$m + (m+1) + ... + (m+d-1) = \frac{(2m+d-1)d}{2} = md + \frac{(d-1)d}{2}.$$

Pie fiksēta d, paņemot divus dažādus m: $m_1 < m_2$, šo vērtību atlikumi nevar sakrist, jo to starpība $(m_2 - m_1)d$ ar 7 nedalās (d ir skaitlis no 2 līdz 6, un $(m_2 - m_1)$ – skaitlis no 1 līdz 6). Tāpēc visām dažādām m vērtībām no 1 līdz 7 visi atlikumi ir dažādi, tātad katrs no tiem parādās tieši vienu reizi.

b) To nevar izdarīt. Nevar pat panākt, lai aprakstītā īpašība izpildītos pie $d = 2$, jo visu dažādo divu blakusesošo elementu summu summa ir $2 \cdot (1 + 2 + ... + 8) = 72$, kas dalās ar 8, bet visu iespējamo atlikumu, dalot ar 8, summa ir $0 + 1 + 2 + ... + 7 = 28$, kas ar 8 nedalās.

A.V.12.5. Ievērojiet: ja uzdevuma prasības var izpildīt ar 99 ierīces lietojumiem, tad ar 100 lietojumiem to arī var izdarīt, tāpēc dosim risinājumu **b)** gadījumam.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim: ja ir n kredītkartes, ($n \geq 5$), tad ar $n-1$ ierīces lietojumiem pietiek, lai atrastu gan kredītkarti ar vislielāko naudas summu, gan kredītkarti ar otro lielāko naudas summu.

Induktīvā bāze: pierādīsim, ka starp 5 kredītkartēm ar 4 ierīces lietojumiem var atrast kredītkarti ar lielāko naudas summu.

Apzīmēsim kredītkartes ar 1, 2, 3, 4, 5. Pieņemsim, ka kredītkartē 1 ir vislielākā naudas summa, kredītkartē 2 – otra lielākā, utt., kredītkartē 5 – starp šīm piecām ir vismazākā naudas summa.

Iespējami 5 veidi, kā lietot ierīci:

- ievieto 1, 2, 3, 4. Ierīce paziņo – 2;
- ievieto 1, 2, 3, 5. Ierīce paziņo – 2;
- ievieto 1, 2, 4, 5. Ierīce paziņo – 2;
- ievieto 1, 3, 4, 5. Ierīce paziņo – 3;
- ievieto 2, 3, 4, 5. Ierīce paziņo – 3.

Tātad ierīce vienmēr paziņos 2 vai 3. Tāpēc iespējams šāds algoritms kredītkaršu 1 un 2 identificēšanai:

- ievietosim ierīcē jebkuras 4 kredītkartes. Pieņemsim, ka ierīce paziņo A. Tad $A = 2$ vai $A = 3$;
- izmēģināsim visas četru kredītkaršu kombinācijas, kas satur A (tādu pavisam ir 4, un viena no tām jau ir izmēģināta).

Ir iespējami 2 gadījumi:

  - ja trijos no četriem gadījumiem ierīce paziņo A, tad $A = 2$. 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē vienīgajā gadījumā, kad ierīce neziņoja 2 (tad bija ievietotas kredītkartes 2, 3, 4, 5);
  - ja divos no četriem gadījumiem ierīce paziņo A, tad $A = 3$. 2 ir kredītkarte, ko ierīce paziņo pārējos divos gadījumos. 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē tajā reizē, kad ierīcē bija gan 2, gan arī $A = 3$, un ierīce paziņoja $A = 3$.

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka starp $5 \le k \le n$ kredītkartēm, lietojot ierīci $k-1$ reizi, var noteikt kartes ar vislielāko un otru lielāko naudas summu.
Induktīvā pāreja: ja mums ir $n+1$ kredītkarte, tad:

- izvēlēsimies n kredītkartes (visas, atskaitot karti X). Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, starp tām ar $n-1$ ierīces lietojumu var atrast kredītkartes A un B, kas satur lielāko un otro lielāko naudas summu starp šīm n kredītkartēm;
- n-tajā ierīces lietošanas reizē ievietosim ierīcē kredītkartes X, A, B un jebkuru citu kredītkarti. Iespējami šādi varianti:
  - ierīce paziņo, ka otra lielākā naudas summa ir kartē B. Tad kredītkartē X ir mazāk naudas nekā kredītkartēs A un B, tātad A un B joprojām paliek kartes ar vislielākajām naudas summām;
  - ierīce paziņo, ka otra lielākā naudas summa ir kartē A. Tad kredītkartē X ir visvairāk naudas, kartē A ir otra lielākā naudas summa;
  - ierīce paziņo, ka otra lielākā naudas summa ir kartē X. Tad kartē A ir visvairāk naudas, bet kartē X – otra lielākā naudas summa.

A.A. LATVIJAS 37. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

A.A.9. Devītā klase

A.A.9.1. **a)** Jā, skaitļus no 1 līdz 10 ir iespējams sadalīt piecos pāros tā, lai katra pāra skaitļu summa ir atšķirīgs pirmskaitlis. To var izdarīt šādi: $1+6=7$, $2+3=5$, $4+7=11$, $5+8=13$ un $9+10=19$.

b) Aplūkosim, kādus pirmskaitļus var iegūt no dotajiem 20 skaitļiem, summējot tos pa pāriem. Mazākais pirmskaitlis, ko iespējams izveidot, ir $1+2=3$, bet lielākais – $20+17=19+18=37$. Tātad, izmantojot skaitļus no 1 līdz 20, var izveidot 11 pirmskaitļus: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Tā kā katram skaitļu pārim jāveido atšķirīgs pirmskaitlis, tad visu 20 doto skaitļu summai jābūt vienādai ar 10 iespējamo pirmskaitļu summu. Skaitļu no 1 līdz 20 summa ir $21\cdot 10=210$. Lielākā summa, ko var izveidot no 10 iespējamajiem pirmskaitļiem, ja neviens no tiem neatkārtojas, ir 192 (neizmantojam mazāko iespējamo pirmskaitli, t. i., 3), tātad tā nevar būt 210. Varam secināt, ka skaitļus no 1 līdz 20 nav iespējams sadalīt pa pāriem uzdevumā prasītajā veidā.

A.A.9.2. Pieņemsim, ka *E* ir gan *AB*, gan *CD* viduspunkts. Apskatīsim četrstūri *ACBD*, kura diagonāles ir *AB* un *CD*. Tā kā šī četrstūra diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad *ACBD* – paralelograms. Paralelograma pretējās malas pa pāriem ir paralēlas, tātad jābūt $AC\|BD$ un $AD\|BC$.

Ievērosim, ka funkcijas $y=x^2$ grafikam pieder punkti $(x;x^2)$, tāpēc doto punktu koordinātas apzīmēsim: $A(x_A;x_A^2)$, $B(x_B;x_B^2)$, $C(x_C;x_C^2)$ un $D(x_D;x_D^2)$.

Atceramies, ka taisnes vispārīgais vienādojums ir $y=kx+b$. Apskatām taisni, kas iet caur punktiem *A* un *C*. Apzīmēsim šīs taisnes virziena koeficientu ar k_1 un brīvo locekli ar b_1, tad šīs taisnes vienādojums ir $y=k_1x+b_1$. Ievietojot *x* un *y* vietā punktu *A* un *C* koordinātas, iegūstam, ka

$$\begin{cases} x_A^2 = k_1\cdot x_A + b_1 \\ x_C^2 = k_1\cdot x_C + b_1 \end{cases}.$$

Atņemot, vienu vienādojumu no otra, iegūstam, ka

$$x_A^2 - x_C^2 = k_1x_A - k_1x_C + b_1 - b_1$$
$$(x_A - x_C)(x_A + x_C) = k_1(x_A - x_C).$$

Tā kā punkti *A* un *C* ir dažādi un katram punktam uz funkcijas grafika atbilst atšķirīga *x* koordinātas vērtība, tad $x_A \neq x_C$, tāpēc jābūt $k_1 = x_A + x_C$.

Līdzīgi apskatām taisni, kas iet caur punktiem *B* un *D*, apzīmējot virziena koeficientu ar k_2 un brīvo locekli ar b_2. Iegūstam, ka $\begin{cases} x_B^2 = k_2\cdot x_B + b_2 \\ x_D^2 = k_2\cdot x_D + b_2 \end{cases}$, tātad $(x_B^2 - x_D^2) = k_2(x_B - x_D)$. Esam ieguvuši, ka taisnes, kas iet caur punktiem *B* un *D* virziena koeficients $k_2 = x_B + x_D$.

Līdzīgi iegūstam arī taišņu *AD* un *BC* virziena koeficientus, kas ir attiecīgi $k_3 = x_A + x_D$ un $k_4 = x_B + x_C$.

Tā kā paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi un $AC\|BD$, tad $k_1 = k_2$ jeb

$$x_A + x_C = x_B + x_D. \qquad (1)$$

Tā kā taisnes *AD* un *BC* arī ir paralēlas, tad $k_3 = k_4$ jeb

$$x_A + x_D = x_B + x_C . \qquad (2)$$

Atņemot vienādību (2) no (1), iegūstam, ka $x_C - x_D = x_D - x_C$ jeb $x_C = x_D$, tātad punkti *C* un *D* sakrīt, kas ir pretrunā ar doto.

Tātad sākotnējais pieņēmums ir aplams, un nevar gadīties, ka *E* ir gan *AB*, gan *CD* viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

A.A.9.3. **a)** Apskatot pirmos pāra skaitļus, atrodam 5 *apaļīgus* pāra skaitļus, kas ir atšķirīgi no uzdevumā dotajiem:

- $n = 2$; 2 dalās tikai ar 1 un 2, tātad $d(2) = 2$; $n = 2$ dalās ar $d(2) = 2$;
- $n = 8$; 8 dalās tikai ar 1, 2, 4 un 8, tātad $d(8) = 4$; $n = 8$ dalās ar $d(8) = 4$;
- $n = 12$; 12 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6 un 12, tātad $d(12) = 6$; $n = 12$ dalās ar $d(12) = 6$;
- $n = 18$; 18 dalās tikai ar 1, 2, 3, 6, 9 un 18, tātad $d(18) = 6$; $n = 18$ dalās ar $d(18) = 6$;
- $n = 24$; 24 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 un 24, tātad $d(24) = 8$; $n = 24$ dalās ar $d(24) = 8$.

b) Ja *p* ir pirmskaitlis, *z* – naturāls skaitlis, tad skaitlim p^{z-1} ir tieši z dalītāji – tie ir $1, p, p^2, \ldots, p^{z-1}$.

Tātad, izvēloties $z = p^n$, iegūstam, ka p^{p^n-1} ir tieši p^n dalītāji jeb $d(p^{p^n-1}) = p^n$.

p^{p^n-1} ir apaļīgs skaitlis, ja p^{p^n-1} dalās ar p^n. Tas iespējams tad un tikai tad, ja $p^n - 1 \geq n$. Tā kā jebkurš pirmskaitlis vienāds vai lielāks par 2, ir acīmredzamas nevienādības: $p \geq 2$, $p \geq \frac{3}{2}$, $p \geq \frac{4}{3}$, …, $p \geq \frac{n+1}{n}$. Šajās *n* nevienādībās tiek salīdzināti pozitīvi skaitļi, tādēļ varam tās sareizināt; iegūstam, ka $p^n \geq n+1$. Pārnesot 1 uz nevienādības kreiso pusi, iegūstam $p^n - 1 \geq n$. Tātad p^{p^n-1} ir *apaļīgs* skaitlis.

Izvēloties $p = 2$ un dažādas n vērtības, varam iegūt dažādus *apaļīgus* skaitļus, kas ir divnieka pakāpes, tāpēc ir pāra skaitļi. Tā kā *n* – naturāls skaitlis un naturālu skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī *apaļīgu* pāra skaitļu ir bezgalīgi daudz.

A.A.9.4. Ievērosim, ka skaitļi tabulā ir izvietoti pa diagonālēm un uz vienas diagonāles esošām rūtiņām rindas un kolonnas numuru summa ir konstanta, sauksim to par diagonāles *invariantu*. Piemēram, pirmās diagonāles (kas satur tikai skaitli 1) *invariants* ir $1+1=2$, otrās diagonāles (kur ierakstīti skaitļi 2 un 3) *invariants* ir $1+2=2+1=3$, utt.

Diagonālēs, kam *invariants* ir nepāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir rindu augšanas virzienā (2., 4., ... diagonāle), bet diagonālēs, kam *invariants* ir pāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir kolonnu augšanas virzienā (1, 3, ... diagonāle).

Katrā nākamajā diagonālē gan rūtiņu kopskaits, gan *invariants* ir par 1 lielāks nekā iepriekšējā diagonālē. Tātad rūtiņu skaits diagonālē ar *invariantu n* ir $n-1$.

a) 20. rindas 10. kolonnas rūtiņa atrodas uz diagonāles ar *invariantu* $20+10=30$. Tātad tā atrodas 29. diagonālē. Kopējais skaitļu skaits, kāds ierakstīts diagonālēs ar mazāku *invariantu*, ir $1+2+...+28=\frac{29\cdot 28}{2}=406$.

Tā kā *invariants* ir pāra skaitlis, tad skaitļi 29. diagonālē ir ierakstīti kolonnu augšanas secībā un 10. kolonnā būs ierakstīts skaitlis $406+10=416$.

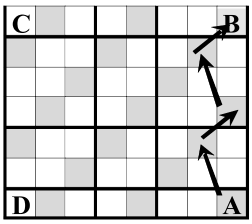
b) Lai noteiktu, kurā rūtiņā ierakstīts skaitlis 2010, nepieciešams noteikt, kurā diagonālē tas atrodas. Tātad jāatrod tāds *k*, ka

$$1+2+....+k-1<2010\leq 1+2+...+k.$$

Apskatot dažādas *k* vērtības, iegūstam, ka šāds $k=63$. Tātad 2010 atrodas 63. diagonālē, kuras *invariants* ir 64.

Iepriekšējās diagonālēs kopā atrodas $1+2+...+62=\frac{62\cdot 63}{2}=1953$ skaitļi. Tā kā diagonāle ir ar *invariantu* – pāra skaitli, tajā skaitļi ierakstīti kolonnu augšanas secībā. Tātad 2010 atrodas $2010-1953=57$. kolonnā. Rindas un kolonnas numuru summa ir 64, tātad 2010 atrodas $64-57=7$. rindā. Esam atraduši, ka skaitlis 2010 atrodas tabulas 7. rindas 57. kolonnā.

A.A.9.5. Izkrāsojam dotajā taisnstūrī katru trešo diagonāli kā parādīts A32. zīm.



A32. zīm.

Ievērojam, ka *sienāzis*, izpildot atļautos gājienus, no melnas rūtiņas var nonākt tikai melnā rūtiņā. Tātad no rūtiņas A *sienāzis* nekad nenonāks rūtiņās C un D.

Piemērs, kā nokļūt rūtiņā B, parādīts A32. zīm.

A.A.10. Desmitā klase

A.A.10.1. Apskatām pozitīvus skaitļus *a* un *b*. Tā kā $(a-b)^2\geq 0$ jeb $a^2-2ab+b^2\geq 0$, tad $a^2+b^2\geq 2ab$. Pārveidojam šo nevienādību, abas puses izdalot ar $ab>0$ un tām pieskaitot skaitli 2:

$$\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Rightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\geq 4 \Rightarrow a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4.$$ Tātad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

Tā kā x_1, x_2, x_3, x_4 – pozitīvi skaitļi, tad x_1+x_2 un x_3+x_4 arī ir pozitīvi skaitļi un varam izmantot tikko pierādīto nevienādību, ievietojot $a=x_1+x_2$ un $b=x_3+x_4$:

$$\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3+x_4}\geq\frac{4}{(x_1+x_2)+(x_3+x_4)}$$

$$\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_4}\geq 4\cdot\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}.$$

Tā kā arī $\dfrac{1}{x_2+x_3}$ un $\dfrac{1}{x_4+x_1}$ ir pozitīvi skaitļi, līdzīgi iegūstam:

$$\frac{x_2+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_4+x_2}{x_4+x_1}\geq 4\cdot\frac{x_2+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}.$$

Saskaitām abas iegūtās nevienādības un esam pierādījuši uzdevumā prasīto:

$$\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_4+x_2}{x_4+x_1}\geq 4\cdot\frac{x_1+x_3+x_2+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}=4.$$

A.A.10.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka var atlikt 12 punktus, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Izvēlamies regulāra 12-stūra, kas ievilkts riņķa līnijā, virsotnes $A_1, A_2, ..., A_{12}$.

Starp katrām 2 blakus virsotnēm A_i un A_{i+1} loks ir 30° liels, tātad pēc kosinusu teorēmas attālums

$$A_iA_{i+1}^2=OA_i^2+OA_{i+1}^2-2\cdot OA_i\cdot OA_{i+1}\cdot\cos 30°=2-\frac{2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}<1.$$

Starp virsotnēm A_i un A_{i+2} loks ir 60° liels, tātad ΔOA_iA_{i+1} – vienādmalu un attālums $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}=OA_i=1$.

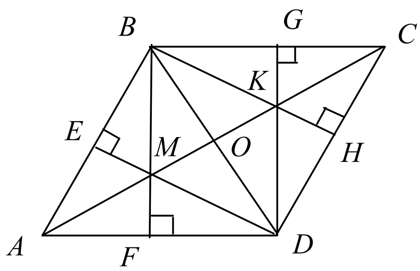
Tas nozīmē, ka vienīgie punkti, starp kuriem attālums ir mazāks nekā 1, ir blakus esošās virsotnes: A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{11}A_{12}$, $A_{12}A_1$. Tātad nevar izvēlēties 3 tādus punktus, starp kuriem visi trīs attālumi ir mazāki par 1.

Otrkārt, pierādīsim, ka uz riņķa līnijas ar rādiusu 1 nevar izvēlēties vairāk kā 12 punktus, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Apskatām gadījumu, kad uz riņķa līnijas ir atlikti $n\geq 13$ punkti $A_1, A_2, ..., A_n$.

Sadalām riņķa līniju sešos 60° lielos lokos B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, B_5B_6, B_6B_1 tā, lai neviens no punktiem B_i nesakristu ne ar vienu no A_j. Tā kā uz riņķa līnijas ir izvēlēti vismaz 13 punkti un 6 loki, tad pēc Dirihlē principa uz kāda no lokiem būs vismaz 3 punkti (jo $13>6\cdot 2$). Apzīmēsim tos ar *X*, *Y*, *Z*. Tā kā *X*, *Y*, *Z* atrodas uz 60° loka un nesakrīt ar tā galapunktiem, tad katrs no lokiem *XY*, *YZ*, *XZ* ir mazāks nekā 60°. Tātad visi trīs attālumi *XY*, *YZ* un *XZ* ir mazāki par 1, kas arī bija jāpierāda.

A.A.10.3. Neatkarīgi no tā, pret kuru malu pāri (*AD* un *BC*, vai *CD* un *AB*) perpendikuli tiek vilkti, to krustpunkti ar *AC* ir simetriski attiecībā pret *ABCD* diagonāļu krustpunktu *O*.

Tā kā abos gadījumos attālums starp krustpunktiem uz *AC* ir vienāds, tad tas nozīmē, ka abos gadījumos krustpunkti ir vieni un tie paši, tātad atrodas uz *AC* 1 cm attālumā no *O* (skat. A33. zīm.).



A33. zīm.

Apzīmējam punktu, kurā krustojas perpendikuli *DE* un *BF*, ar *M*, bet perpendikulu *DG* un *BH* krustpunktu – ar *K* (skat. A33. zīm.).

Aplūkojam ΔABD. DE un BF ir šī trijstūra augstumi, kuri krustojas punktā M. Tā kā jebkurā trijstūrī visi trīs augstumi krustojas vienā punktā un AO vilkts no trešās virsotnes un iet caur punktu M, tad AO ir augstums $\Rightarrow$ $AC \perp BD$.
Tā kā paralelograma $ABCD$ diagonāles ir perpendikulāras, tad $ABCD$ ir rombs. Romba visas malas ir vienāda garuma, līdz ar to $AB = AD$ un ΔABD – vienādsānu trijstūris.
Trijstūri AOD un DOM ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo

- abi ir taisnleņķa trijstūri ($\angle MOD = 90°$);
- AO ir ne tikai ΔDAB augstums, bet arī bisektrise, jo ΔDAB – vienādsānu, tāpēc $\angle FAO = \angle MAE$. Savukārt $\angle MAE = \angle ODE$ (kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām). Tātad $\angle DAO = \angle MDO$.

Līdzīgo trijstūru malu garumus saista attiecība: $\frac{OD}{OM} = \frac{OA}{OD}$. Tā kā romba diagonāles krustpunktā dalās pusēm, tad $\frac{OA}{OD} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BD} = \frac{AC}{BD} = \frac{7}{4}$; $OM = 1$ cm. Ievietojot šos lielumus attiecībā $\frac{OD}{OM} = \frac{OA}{OD}$, iegūstam, ka $OD = \frac{7}{4}$ cm, tātad $BD = 2OD = \frac{7}{2}$ cm.
Tā kā $\frac{OA}{OD} = \frac{7}{4}$ un $OD = \frac{7}{4}$ cm, varam aprēķināt $OA = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{16}$ cm, tātad $AC = 2OA = \frac{49}{8}$ cm.

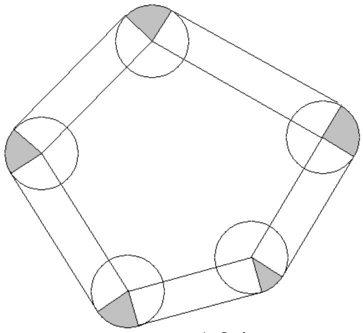
Romba $ABCD$ laukums $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{49 \cdot 7}{2 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{343}{32}$ cm^2.

A.A.10.4. Izmantosim faktu, ka pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisku progresiju ar diferenci 1. Aritmētiskās progresijas pēc kārtas ņemtu n locekļu a, $a+1, \ldots$, $a+n-1$ summa ir $\frac{(a+(a+n-1)) \cdot n}{2} = \frac{(2a+n-1) \cdot n}{2}$. Tātad nepieciešams atrast visas tādas n vērtības, kurām $n > 1$ un $\frac{(2a+n-1) \cdot n}{2} = 2010$ jeb $(2a+n-1) \cdot n = 4020$.
Ievērojam, ka pirmais reizinātājs $2a+n-1$ vienmēr ir lielāks par otro reizinātāju n un tiem ir atšķirīga paritāte.
Sadalām skaitli 4020 pirmreizinātājos: $4020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ un izveidojam tabulu, kurā attēlojam visas iespējamās reizinātāju n un $2a+n-1$ vērtības, kurām izpildās uzdevuma nosacījumi, kā arī virknes pirmā locekļa a vērtības.

n	$2a + n - 1$	a
3	1340	669
4	1005	501
5	804	400
12	335	162
15	268	127
20	201	91
60	67	4

Tātad skaitli 2010 var izteikt kā vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu septiņos dažādos veidos.

A.A.10.5. a) Pieņemsim, ka privātmājas žogs veido patvaļīgu izliektu daudzstūri. Ērtai uzskatāmībai uzzīmējam piecstūri (skat. A34. zīm.).



A34. zīm.

Platība, kas sētniekam jānotīra, sastāv no taisnstūriem, kuru viena mala sakrīt ar daudzstūra malu, bet otra mala ir 1 m gara, un no riņķa sektoriem, kuru rādiuss ir 1 m. Tā kā žoga garums, neatkarīgi no formas, vienmēr ir 2010 m, tad taisnstūru laukumu summa vienmēr būs vienāda. Lai pierādītu, ka teritorijas, kas jānotīra, laukums nav atkarīgs no žoga formas, jāpierāda, ka riņķa sektoru, kas jānotīra, laukumu summa vienmēr būs vienāda.

Izliektam daudzstūrim katras virsotnes iekšējā leņķa lielums nepārsniedz $180°$, tāpēc ārējā leņķa lielums ir lielāks nekā $180°$, tātad pie katras daudzstūra virsotnes būs šāds riņķa sektors, kas jānotīra.

Daudzstūra iekšējo leņķu summa ir $180° \cdot (n-2)$, kur n – daudzstūra virsotņu skaits. Pie katras no n daudzstūra virsotnēm pilnais leņķis tiek sadalīts četros leņķos: daudzstūra iekšējā leņķī, divos taisnajos leņķos un riņķa sektora leņķī. Tātad visiem riņķa sektoriem piederošo leņķu summa ir $360° \cdot n - 2 \cdot 90° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 360°$. Varam secināt, ka neatkarīgi no daudzstūra malu skaita un iekšējo leņķu lielumiem, visu sektoru leņķu summa ir $360°$, t. i., šie sektori kopā veido pilnu riņķi, un to laukumu summa vienāda ar pilna riņķa laukumu πR^2.

b) Visu taisnstūru laukumu summa ir $2010\text{m} \cdot 1\text{m} = 2010\text{m}^2$. Sektoru laukumu summa ir $\pi R^2 = \pi \cdot (1\text{ m})^2 = \pi \text{ m}^2$. Tātad kopējā teritorija, kas sētniekam jānotīra, ir $2010 + \pi \text{ m}^2$ liela.

A.A.11. Vienpadsmitā klase

A.A.11.1. a) Noskaidrosim, kādi skaitļi vienlaicīgi pieder pirmajām divām progresijām (1) un (2).

Tie ir skaitļi, kas vienlaicīgi izsakāmi gan formā $8+11k$, gan $8+13m$ (k, m – veseli nenegatīvi skaitļi), tātad jābūt $11k = 13m$. Tā kā 11 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $k = 13p$ un $m = 11p$ un virknēm (1) un (2) vienlaicīgi piederēs tie un tikai skaitļi, kas izsakāmi formā $8 + 11 \cdot 13p = 8 + 143p$ (p – vesels nenegatīvs skaitlis).

Atliek noskaidrot, kuri no šiem skaitļiem vienlaicīgi pieder arī virknei (3). Progresijas (3) vispārīgā locekļa formula ir $4+17r$. Tātad skaitļi, kas pieder virknei (3), dalot ar 17, atlikumā iegūst 4.

Ja skaitlis pieder visām trim dotajām virknēm, tad, $8+143p$ dalot ar 17, atlikums ir 4. Tā kā $136p$ dalās ar 17, tad atlikums, $8+143p$ dalot ar 17, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst $(8+143p) - 136p = 8 + 7p$, dalot ar 17.

Aplūkosim šos atlikumus atkarībā no tā, kādu atlikumu, dalot ar 17, dod p.

atlikums, p dalot ar 17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16
atlikums, 8+7p dalot ar 17	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10	0	7	14	**4**	11	1

Redzam, ka vienīgā derīgā p atlikuma, dalot ar 17, vērtība ir 14. Tātad mazākais skaitlis, kas pieder visām trim dotajām virknēm, ir $8+143\cdot 14=2010$. Tiešām $2010=8+11\cdot 182=8+13\cdot 154=4+17\cdot 118$.

b) Aplūkosim skaitļus, kas izsakāmi formā $2010+11\cdot 13\cdot 17s$ (s – vesels nenegatīvs skaitlis). Šos skaitļus var izteikt gan kā $8+11\cdot(182+13\cdot 17s)$, gan $8+13\cdot(154+11\cdot 17s)$, gan $4+17\cdot(118+11\cdot 13s)$, tātad visām veselām nenegatīvām s vērtībām tie vienlaicīgi pieder visām trim dotajām virknēm.

Tā kā s – vesels nenegatīvs skaitlis un veselu nenegatīvu skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad s var pieņemt bezgalīgi daudz dažādas vērtības. Tātad tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm vienlaicīgi, ir bezgalīgi daudz, kas arī bija jāpierāda.

A.A.11.2. Pārveidosim uzdevumā dotās nevienādības:

$$\begin{cases} a^2b^2 \le 4c-3 \\ b^2c^2 \le 4a-3 \\ c^2a^2 \le 4b-3 \end{cases}.$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts nekad nav negatīvs skaitlis, tad $4a-3\ge b^2c^2\ge 0$, $4b-3\ge c^2a^2\ge 0$, $4c-3\ge b^2c^2\ge 0$.

Nevienādībās ir salīdzināti pozitīvi lielumi, tāpēc varam šīs nevienādības reizināt:

$$a^4b^4c^4 \le (4a-3)(4b-3)(4c-3). \quad (1)$$

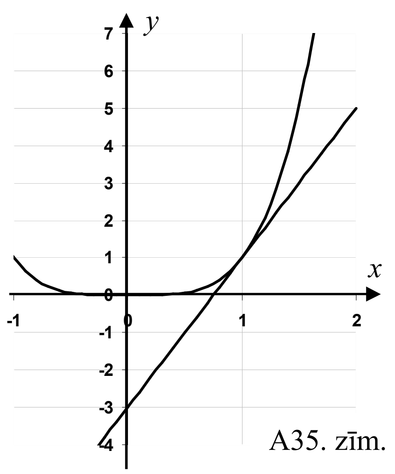
Ja k, l – reāli skaitļi, tad $(k-l)^2\ge 0$ jeb $k^2+l^2\ge 2kl$. Tātad katram x ir spēkā $x^4+3=(x^4+1)+2=\left((x^2)^2+1^2\right)+2\ge 2x^2+2=2(x^2+1^2)\ge 2\cdot 2x=4x$ jeb $x^4+3\ge 4x$.

Izmantojot šo nevienādību, iegūstam:

$$a^4b^4c^4 \ge (4a-3)(4b-3)(4c-3). \quad (2)$$

No nevienādībām (1) un (2) seko, ka $a^4b^4c^4=(4a-3)(4b-3)(4c-3)$. (3)

Tā kā $x^4+3\ge 4x$ jeb $x^4\ge 4x-3$, tad vienādība (3) izpildās tad un tikai tad, ja $a^4=(4a-3)$, $b^4=(4b-3)$, $c^4=(4c-3)$. Vienādība $x^4=4x-3$ izpildās tad un tikai tad, ja $x=1$ (skat. A35. zīm.). Tātad $a=b=c=1$, kas arī ir nevienādību sistēmas atrisinājums.

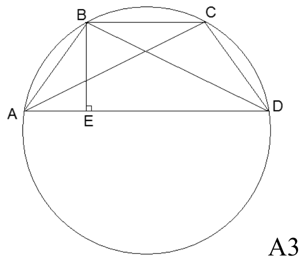


A35. zīm.

A.A.11.3. Tā kā $\angle BAC = \angle CAD$, tad loki, uz kuriem šie ievilktie leņķi balstās, ir vienādi; tātad $\cup BC = \cup CD$. Varam secināt, ka $BC = CD$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus (skat. A36. zīm.).

Līdzīgi, no $\angle ADB$ un $\angle CDB$ vienādības seko, ka $\cup AB = \cup BC$ un $AB = BC$.

Tātad $\cup AB = \cup BC = \cup CD$ un $AB = BC = CD$.



A36. zīm.

Tā kā $\cup AB = \cup CD$, tad $BC \| AD$ kā hordas, starp kurām ir vienādi loki.

Varam secināt, ka $ABCD$ ir vienādsānu trapece, jo $BC \| AD$ un $AB = CD$.

Novelkam augstumu BE (skat. A35. zīm.). Tā kā $ABCD$ – vienādsānu trapece, kuras pamati $BC = a$ un $AD = 2a$, tad $AE = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$.

Izmantojot Pitagora teorēmu, aprēķinām augstumu:

$$BE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

Tātad $S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)}{2} \cdot BE = \frac{(a + 2a)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$.

A.A.11.4. Nosauksim skaitli N par *sliktu*, ja N ir nepāra skaitlis vai $N = 2^{2i+1}$, kur i – vesels nenegatīvs skaitlis. Nosauksim visus pārējos naturālos skaitļus par *labiem*.

Pierādīsim šādus apgalvojumus:

I ja uz tāfeles uzrakstīts *labs* skaitlis N, tad var izvēlēties tādu $d > 1$, ka $d < N$, d ir N dalītājs un $N - d$ ir *slikts* skaitlis;

II ja uz tāfeles uzrakstīts *slikts* skaitlis N, tad izvēloties tādu $d > 1$, ka d ir N dalītājs, vai nu $d = N$ vai arī $N - d$ ir *labs* skaitlis.

Lai pierādītu I, apskatīsim 2 gadījumus:

- ja *labam* skaitlim N (pāra skaitlis, kas nav izsakāms formā 2^{2i+1}) ir nepāra dalītājs $d > 1$, tad varam izvēlēties d – šo nepāra dalītāju. Ja no pāra skaitļa atņem nepāra skaitli, tad vienmēr iegūst nepāra skaitli; tāpēc $N - d$ ir nepāra skaitlis, tātad – *slikts* skaitlis;
- ja skaitlim N nav nepāra dalītāju $d > 1$, tad $N = 2^{2k}$, (jo divnieka nepāra pakāpes ir *slikti* skaitļi), kur k – vesels pozitīvs skaitlis. Varam izvēlēties $d = 2^{2k-1}$, tādējādi iegūt $N - d = 2^{2k} - 2^{2k-1} = 2^{2k-1}(2-1) = 2^{2k-1}$, kas ir *slikts* skaitlis.

Pierādīsim apgalvojumu II. Skaidrs, ka vienmēr var izvēlēties $d = N$. Pierādīsim apgalvojumu: ja uz tāfeles uzrakstīts *slikts* skaitlis N, tad izvēloties tādu $d > 1$, ka d ir N dalītājs un $d \neq N$, tad $N - d$ ir *labs* skaitlis. Apskatīsim 2 gadījumus:

- ja N ir nepāra skaitlis, tad visi N dalītāji d arī ir nepāra skaitļi. Tā kā divu nepāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis, tad $N - d$ – pāra skaitlis. Vienīgie *sliktie* pāra skaitļi ir divnieka pakāpes 2^{2i+1}. $N - d$ nevar būt divnieka pakāpe, jo $N - d = \left(\frac{N}{d} - 1\right) d$, kur d – nepāra skaitlis, tāpēc $N - d$ dalās ar nepāra skaitli

$d > 1$, taču 2^{2i+1} ar nepāra skaitli nedalās. Tātad šajā gadījumā $N-d$ vienmēr būs *labs* skaitlis;

- ja $N = 2^{2i+1}$, tad visi *N* dalītāji $d > 1$ ir divnieka pakāpes, tātad pāra skaitļi. Tā kā divu pāra skaitļu starpība vienmēr ir pāra skaitlis, tad $N-d$ noteikti ir pāra skaitlis. Ja $d < N$, tad $d \le 2^{2i}$ un $N-d \ge 2^{2i}$. Tādējādi, $2^{2i} \le N-d < N = 2^{2i+1}$, t. i., $N-d$ atrodas starp divām blakus esošām divnieka pakāpēm, tāpēc nevar būt divnieka pakāpe. Tātad šajā gadījumā $N-d$ nevar būt *slikts* skaitlis.

No apgalvojumiem I un II seko: ja uz tāfeles sākotnēji uzrakstīts *labs* skaitlis, tad pirmais spēlētājs vienmēr var izdarīt gājienu tā, lai pēc viņa gājiena uz tāfeles būtu *slikts* skaitlis, bet pēc otrā spēlētāja atbildes gājiena uz tāfeles noteikti būs *labs* skaitlis vai 0.

Tā kā *labiem* skaitļiem *N* vienmēr ir tāds dalītājs *d*, ka $1 < d < N$, tad 1. spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu, kura rezultātā uz tāfeles nebūs uzrakstīta 0. Tātad, ja uz tāfeles sākumā uzrakstīts *labs* skaitlis, pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.

Skaitlis 2010 ir *labs* skaitlis, tātad, pareizi spēlējot, pirmais spēlētājs uzvarēs.

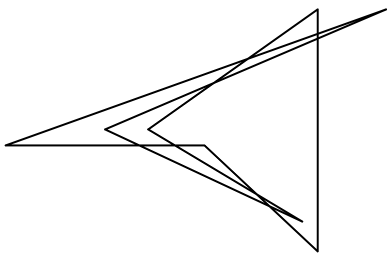
A.A.11.5. Acīmredzot skaitlis $2^1 = 2$ nav *sakarīgs*, jo 2 nogriežņi nevar veidot slēgtu lauztu līniju.

Tālāk apskatīsim slēgtu lauztu līniju ar $2^2 = 4$ posmiem. Apskatīsim kādu tās posmu P_1. Tam ir kopīgi galapunkti ar diviem citiem posmiem P_2 un P_3, kas P_1 nekrusto; P_1 krustot var tikai atlikušais posms P_4. Tātad posmu P_1 krusto ne vairāk kā viens cits šīs lauztās līnijas posms , tāpēc skaitlis $2^2 = 4$ nav *sakarīgs*.

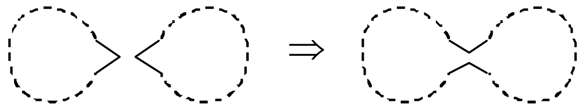
Skaitlis $2^3 = 8$ ir *sakarīgs*, skat., piem., A37. zīm.

Ja skaitlis *a* ir *sakarīgs*, tad arī 2*a* ir sakarīgs, jo uzzīmējot divas slēgtas lauztas līnijas ar *a* posmiem un "sabīdot" tās kopā, kā parādīts A38. zīm., veidosies lauzta līnija ar 2*a* posmiem, kas katru savu posmu krusto 2 reizes. Tātad, ja 2^3 ir *sakarīgs*, tad $2 \cdot 2^3 = 2^4$ ir *sakarīgs*. Tāpat $2 \cdot 2^4 = 2^5$ ir *sakarīgs* utt.

Tādējādi, ja *k* ir naturāls skaitlis, skaitlis 2^k ir sakarīgs tad un tikai tad, ja $k \ge 3$.



A37. zīm.



A38. zīm.

A.A.12. Divpadsmitā klase

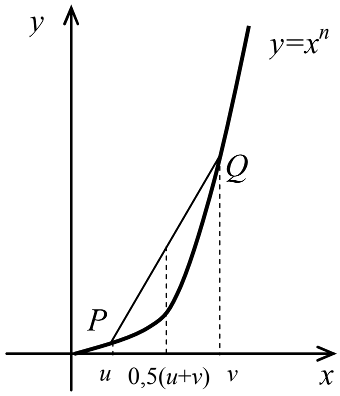
A.A.12.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka izteiksmes vērtība var būt 1 un 2^{-1004}:

- ja $x = 0$, tad $\sin^{2010} 0 + \cos^{2010} 0 = 0^{2010} + 1^{2010} = 1$;
- ja $x = \frac{\pi}{4}$, tad $\sin^{2010}\frac{\pi}{4} + \cos^{2010}\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2010} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2010} = 2 \cdot \frac{2^{1005}}{2^{2010}} = 2^{-1004}$.

Otrkārt, pierādām, ka šīs ir dotās izteiksmes vislielākā un vismazākā vērtība.

Vislielākā dotās izteiksmes vērtība ir 1, jo $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Pierādīsim, ka vismazākā dotās izteiksmes vērtība ir 2^{-1004}. Pamatosim nevienādību $\left(\frac{u+v}{2}\right)^n \le \frac{1}{2}(u^n+v^n)$, $n \in N$ un $u, v \in [0, +\infty)$.



A39. zīm.

Apskatīsim funkcijas $y = x^n$ grafiku un nogriezni PQ, kas savieno divus grafika punktus $P(u; u^n)$ un $Q(v; v^n)$ (pieņemsim, ka $u \le v$) (skat. A39. zīm.). Tad $\left(\frac{u+v}{2}\right)^n$ izsaka ordinātu funkcijas $y = x^n$ grafika punktam, kura abscisa sakrīt ar hordas viduspunkta abscisu, savukārt $\frac{1}{2}(u^n+v^n)$ izsaka hordas PQ viduspunkta ordinātu. Tā kā funkcija $y = x^n$ pie $x \in [0; +\infty)$ ir izliekta, visiem x, kur $u < x < v$, funkcijas grafiks atrodas zem hordas PQ, tātad tiešām $\left(\frac{u+v}{2}\right)^n \le \frac{1}{2}(u^n+v^n)$, pie tam vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $u = v$.

Ņemot $u = \sin^2 x$, $v = \cos^2 x$, $n = 1005$ iegūstam:

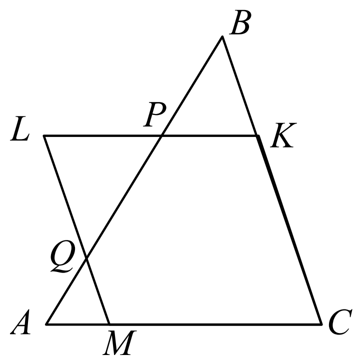
$$\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}\right)^{1005} \le \frac{1}{2}\left((\sin^2 x)^{1005} + (\cos^2 x)^{1005}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1005} \le \frac{1}{2}\left(\sin^{2010} x + \cos^{2010} x\right).$$

Tātad $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{1004} = 2^{-1004}$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.12.2. $\Delta AQM \sim \Delta PQL \sim \Delta PBK$ (pēc pazīmes $\ell\ell$) (skat. A40. zīm.), jo

- $\angle QAM = \angle LPQ$ – kā iekšējie šķērsleņķi taisnei AB krustojot paralēlas taisnes AC un LK,
  $\angle QAM = \angle BPK$ – kā kāpšļu leņķi taisnei AB krustojot paralēlas taisnes AC un LK;
- $\angle AQM = \angle PQL$ – kā krustleņķi,
  $\angle AQM = \angle PBK$ – kā kāpšļu leņķi taisnei AB krustojot paralēlas taisnas LM un BC.



A40. zīm.

Līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu garumu attiecības kvadrātu. AQ, PQ un PB ir atbilstošās malas šajos līdzīgajos trijstūros, tāpēc no dotās vienādības $AQ^2 + PB^2 = PQ^2$, seko, ka $S_{AQM} + S_{PBK} = S_{PQL}$.

$S_{ABC} = S_{MCKL}$, jo daļa $CKPQM$ tiem ir kopēja un $S_{AQM} + S_{PBK} = S_{PQL}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB$.

$MCKL$ – paralelograms, jo $MC \| LK$ un $LM \| KC$, tātad

$$S_{MCKL} = MC \cdot KC \cdot \sin \angle ACB.$$

Tā kā $\angle ACB \neq 0°$ un $\angle ACB \neq 180°$, tad $\sin \angle ACB \neq 0$, tātad jābūt $\frac{1}{2} AC \cdot BC = MC \cdot KC$ jeb $AC \cdot BC = 2MC \cdot KC$, kas arī bija jāpierāda.

A.A.12.3. Naturālam skaitlim n intervālā $(1; \sqrt{n})$ ir ne vairāk kā $\sqrt{n} - 1$ dalītāji. Intervālā $(\sqrt{n} + 1; n)$ šim skaitlim ir tikpat dalītāju kā intervālā $(1; \sqrt{n})$. Ja arī skaitlis $\sqrt{n}$ ir skaitļa n dalītājs, tad n dalītāju skaits $d(n) \leq 2(\sqrt{n} - 1) + 1 = 2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n}$. Tātad katram naturālam n dalītājus skaits $d(n) < 2\sqrt{n}$.

Tad, ja n, $d(n)$ un $d(d(n))$ veido aritmētisko progresiju, tad $d(n) = \frac{n + d(d(n))}{2} > \frac{n}{2}$.

Tāpēc $\frac{n}{2} < d(n) < 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{n}{2} < 2\sqrt{n}$. Izdalot abas puses ar $\frac{\sqrt{n}}{2} \neq 0$, iegūstam, ka $\sqrt{n} < 4$ jeb $n < 16$.

Skaitlis n nevar būt 1, jo tad $n = d(n) = d(d(n)) = 1$; trīs vieninieki neveido dilstošu aritmētisko progresiju.

Skaitlis n nevar būt pirmskaitlis, jo tad naturālo dalītāju skaits $d(n) = 2$ un $d(d(n)) = d(2) = 2$; virkne n, 2, 2 neveido dilstošu aritmētisko progresiju.

Pārbaudot visus saliktos skaitļus, kas nepārsniedz 15, atrodam, ka der tikai vērtība $n = 4$.

Ja $n = 4$, tad $d(n) = 3$ un $d(d(n)) = 2$, kas ir dilstoša aritmētiska progresija ar diferenci 1.

A.A.12.4. Mums jāpierāda nevienādība

$$2(ah_a + bh_b + ch_c) \le ah_b + ah_c + bh_a + bh_c + ch_a + ch_b .$$

Pārveidojam šo nevienādību:

$$ah_a + ah_a + bh_b + bh_b + ch_c + ch_c - ah_b - ah_c - bh_a - bh_c - ch_a - ch_b \le 0$$
$$a(h_a - h_b) + a(h_a - h_c) + b(h_b - h_a) + b(h_b - h_c) + c(h_c - h_a) + c(h_c - h_b) \le 0$$
$$a(h_a - h_b) + a(h_a - h_c) - b(h_a - h_b) + b(h_b - h_c) - c(h_a - h_c) - c(h_b - h_c) \le 0$$
$$(a-b)(h_a - h_b) + (a-c)(h_a - h_c) + (b-c)(h_b - h_c) \le 0 .$$

Trijstūrī pret garāku malu ir novilkts īsāks augstums (tas seko no trijstūra laukuma formulas $S_\Delta = \frac{1}{2} ah_a$), tāpēc apskatām 3 iespējamos gadījumus:

- ja dots dažādmalu trijstūris, tad nevienādībā katrā no saskaitāmajiem viens reizinātājs ir pozitīvs, otrs – negatīvs, tātad visi trīs saskaitāmie ir negatīvi skaitļi, tāpēc to summa ir negatīvs skaitlis; nevienādība ir patiesa;
- ja dots vienādsānu trijstūris, tad nevienādībā viens no saskaitāmajiem ir 0 (piem., pirmais, ja $a = b$), bet abi pārējie – negatīvi skaitļi (līdzīgi kā pirmajā gadījumā), tāpēc summa – negatīvs skaitlis; nevienādība ir patiesa;
- ja dots vienādmalu trijstūris, tad $a = b = c$, tātad nevienādībā visi saskaitāmie vienādi ar 0, tāpēc summa ir 0; nevienādība ir patiesa.

Tātad dotā nevienādība ir patiesa visiem trijstūru veidiem, kas arī bija jāpierāda.

A.A.12.5. Pieņemsim no pretējā, ka n ir lielākais cepumu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija. (Tādi n vispār eksistē, piem., $n = 2$.)

Pieņemsim, ka uz galda atrodas $n^3 + n + 1$ cepums. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs var uzvarēt. Tā būs pretruna ar pieņēmumu, un uzdevums būs atrisināts.

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu nevar apēst vairāk par n^3 cepumiem, jo $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > n^3 + n + 1$. Tāpēc pēc pirmā gājiena uz galda noteikti paliek vismaz $n + 1$ cepums. Tā kā $n + 1 > n$, tad saskaņā ar pieņēmumu šajā situācijā uzvar tas, kas sāk, t. i., otrais spēlētājs. Vajadzīgā pretruna iegūta.

A.VP. LATVIJAS 60. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4. KĀRTA

A.VP.1. Izmantosim matemātisko indukciju pēc n. Par indukcijas bāzi izvēlamies $n=10$, t. i., novērtējam izteiksmi $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}$.

Tā kā ir spēkā nevienādības $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{20}\geq 10\cdot\frac{1}{20}$,

$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{30}\geq 10\cdot\frac{1}{30}$, ... , $\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\ldots+\frac{1}{100}\geq 10\cdot\frac{1}{100}$, tad

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}\geq 10\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{70}+\frac{1}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{100}\right)\approx 1{,}93>1{,}8.$$

Redzam, ka šajā gadījumā uzdevumā dotā nevienādība izpildās.

Pieņemam, ka dotā nevienādība izpildās pie $n=k-1$, un apskatām doto nevienādību pie $n=k$, respektīvi, pieņemam, ka ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{(k-1)^2-1}+\frac{1}{(k-1)^2}=C\geq 1{,}8.$$

Apskatām

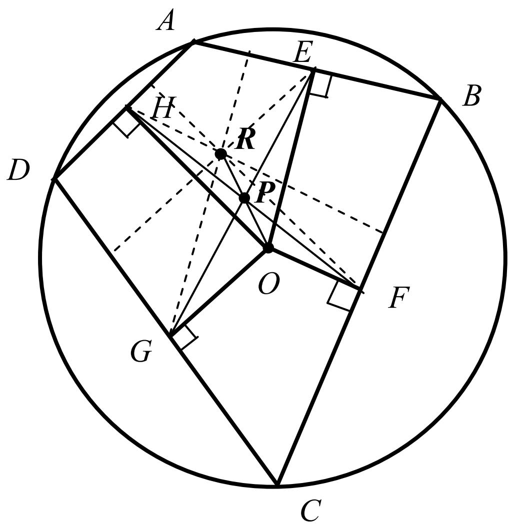
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2}=C-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k-1)^2+1}+\frac{1}{(k-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{k^2}.$$

Izteiksmē $\frac{1}{(k-1)^2+1}+\frac{1}{(k-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{k^2}$ kopā ir $2k-1$ saskaitāmais. Tātad izteiksmē kopā ir vismaz k saskaitāmie, kur katrs nav mazāks kā $\frac{1}{k^2}$. Tad varam novērtēt doto izteiksmi: $\frac{1}{(k-1)^2+1}+\frac{1}{(k-1)^2+2}+\ldots+\frac{1}{k^2}\geq k\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$.

Tātad $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2}\geq C-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=C\geq 1{,}8$.

Izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, esam pierādījuši, ka uzdevumā dotā nevienādība ir spēkā visiem $n\geq 10$.

A.VP.2. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Atzīmēsim tā malu AB, BC, CD un AD viduspunktus attiecīgi ar E, F, G un H (skat. A41. zīm.).



A41. zīm.

Četrstūrim *ABCD* apvilktās riņķa līnijas centrs *O* ir malu *AB*, *BC*, *CD* un *AD* vidusperpendikulu krustpunkts. Tāpēc $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OG\perp CD$ un $OH\perp AD$.
Apskatām nogriežņus *HE* un *GF*. Tie ir attiecīgi trijstūru *DAB* un *BCD* viduslīnijas, tātad $HE=\frac{1}{2}DB$, $HE\parallel DB$ un $GF=\frac{1}{2}DB$, $GF\parallel DB$. Varam secināt, ka $HE=GF$ un $HE\parallel GF$. Tātad četrstūris *HEFG* – paralelograms, jo tā pretējās malas ir vienādas un paralēlas.
Novelkam *EFGH* diagonāles *EG* un *FH*; to krustpunktu apzīmējam ar *P*. Tā kā paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tad $GP=EP$ un $HP=FP$. Atliekam punktu *R*, kas ir simetrisks punktam *O* attiecībā pret *P*; tātad $OP=PR$.
Aplūkosim četrstūri *FOHR*. Jau iepriekš secinājām, ka tā diagonāles *OR* un *FH* punktā *P* dalās uz pusēm. Tā kā tas ir šo diagonāļu krustpunkts, tad *FOHR* ir paralelograms.
F ir *BC* viduspunkts un $FR\parallel OH$, tātad $FR\perp AD$ (jo $OH\perp AD$), t. i., *FR* ir perpendikuls, kas no malas *BC* viduspunkta vilkts pret četrstūra pretējo malu *AD*. Līdzīgi, $HR\parallel OF$, tāpēc $HR\perp BC$ (jo $OF\perp BC$). Tātad, *HR* – perpendikuls, kas no malas *AD* viduspunkta vilkts pret pretējo malu *BC*. Ievērojam, ka abi šie perpendikuli iet caur punktu *R*.
Līdzīgi apskatot četrstūri *ERGO*, varam secināt, ka tas ir paralelograms un iegūt, ka interesējošie perpendikuli pret malām *CD* un *AB* ir attiecīgi *ER* un *GR*, jo $ER\parallel OG\perp CD$ un $GR\parallel OE\perp AB$. Ievērojam, ka arī šie abi perpendikuli iet caur punktu *R*.
Tātad visi četri apskatāmie perpendikuli iet caur punktu *R*, kas arī bija jāpierāda.

A.VP.3. Sadalām doto polinomu reizinātājos:

$$4x^3-20x^2-21x-5=4x^3-22x^2-10x+x^2-11x-5=$$
$$=2x(2x^2-11x-5)+1\cdot(2x^2-11x-5)=(2x+1)(2x^2-11x-5).$$

Ievērojam, ka $2x^2-11x-5=(2x+1)(x-6)+1$.

Tas nozīmē, ka visām veselām *x* vērtībām izteiksmju $(2x^2-11x-5)$ un $(2x+1)$ vērtības ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad izteiksmes

$$\left|4x^3-20x^2-21x-5\right|=\left|2x+1\right|\cdot\left|2x^2-11x-5\right|$$

vērtība var būt pirmskaitļa pakāpe tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar 1. Pārbaudām visas iespējas:

- ja $2x+1=1$, tad $x=0$ un $\left|2x^2-11x-5\right|=5$, kas ir pirmskaitļa 5 pirmā pakāpe;
- ja $2x+1=-1$, tad $x=-1$, $\left|2x^2-11x-5\right|=8$, kas ir pirmskaitļa 2 trešā pakāpe;
- ja $2x^2-11x-5=1$, tad šim vienādojumam ir divas saknes: $-\frac{1}{2}$ un 6. Pirmā vērtība nav vesels skaitlis, otrajai $\left|2x+1\right|=13$ |, kas ir pirmskaitļa 13 pirmā pakāpe;
- ja $2x^2-11x-5=-1$, tad šim vienādojumam nav racionālu sakņu.

Tātad visas veselās *x* vērtības, kurām dotās izteiksmes vērtība ir pirmskaitļa pakāpe ir -1, 0 un 6.

A.VP.4. Apzīmējam trijstūra malu garumus ar *a*, *b*, *c* un trijstūra laukumu ar *S*.

Ir zināms, ka $R = \frac{abc}{4S}$ (1) un $r = \frac{S}{p}$ jeb $r = \frac{2S}{a+b+c}$ (2).

Pēc Hērona formulas $S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}$ (3)

Izmantojam formulas (1), (2), (3) un novērtējam lielumu

$$\frac{r}{R} = \frac{2S}{a+b+c} \cdot \frac{4S}{abc} = \frac{8S^2}{(a+b+c)abc} = \frac{8(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16(a+b+c)abc} =$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc}.$$

Pierādīsim nevienādību $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \le abc$ (4).

Apzīmējam: $a+b-c = x$, $a-b+c = y$, $-a+b+c = z$, $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x+z}{2}$, $c = \frac{y+z}{2}$.

Tā kā *a*, *b*, *c* ir trijstūra malu garumi un trijstūrī divu malu garumu summa vienmēr ir lielāka nekā trešās malas garums, tad $x > 0$, $y > 0$ un $z > 0$.

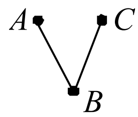
Pēc apzīmējumu ieviešanas mums jāpierāda, ka $xyz \le \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{8}$ jeb $xyz \le \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + xyz + xyz}{8}$. Ievērojam, ka šī ir sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko astoņiem elementiem, tātad šī nevienādība ir patiesa un esam pierādījuši, ka izpildās nevienādība (4).

Izmantojot iepriekš veikto novērtējumu un nevienādību (4), iegūstam, ka

$$\frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc} \le \frac{1}{2}$$

jeb $2r \le R$, kas arī bija jāpierāda.

A.VP.5. Par „V burtiņu” sauksim pilsētu trijnieku *A*, *B*, *C*, ja ir uzbūvēti ceļi *AB* un *BC* (skat. A42. zīm.). Pilsētas (*A*, *C*) sauksim par šāda „V burtiņa” *raksturīgo pāri*, pilsētu *B* – par *vidējo pilsētu*. Ja diviem dažādiem „V burtiņiem” sakrīt *raksturīgie pāri*, veidojas meklētā struktūra.



A42. zīm.

Pavisam dažādu *raksturīgo pāru* var būt ne vairāk kā $C_{200}^2 = 19900$.

Pilsētas apzīmēsim ar A_1, A_2, ..., A_{200}, ceļu skaitu, kas iziet no pilsētas A_I, apzīmēsim ar d_i. Pilsēta A_i piedalās $C_{d_i}^2$ „V burtiņos” kā *vidējā pilsēta*, tātad rada $C_{d_i}^2$ raksturīgos pārus.

Novērtēsim kopējo „V burtiņu” skaitu:

$$\sum_i C_{d_i}^2 = \sum_i \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_i \left(d_i^2 - d_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_i d_i^2 - \sum_i d_i\right).$$

$\sum_i d_i = 1500 \cdot 2 = 3000$, jo katrs ceļš iziet tieši no 2 pilsētām, tātad

$$\sum_i C_{d_i}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i d_i^2 - 3000\right).$$

Lietojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko ($A \le Q$), iegūstam, ka

$$\sum_i d_i^2 \ge \frac{\left(\sum_i d_i\right)^2}{n} = \frac{3000^2}{200} = 45000.$$

Tātad „V burtiņu" kopskaits ir vismaz $\frac{1}{2}(45000 - 3000) = 21000$.

Tā kā $21000 > 19900$, tad eksistē tādi divi „V burtiņi", kuriem raksturīgie pāri sakrīt – tie arī veido mūsu meklētās četras pilsētas.

A.IMO. 51. STARPTAUTISKĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE (51ST INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD)

A.IMO. Uzdevumi 2010. gada 7. jūlijā

A.IMO.1. Ja $x = 0$, tad $f(0) = f(0)[f(y)]$ visiem $y \in R$.

Apskatām 2 gadījumus:

- pieņemam, ka $f(0) \neq 0$. No vienādības $f(0) = f(0)[f(y)]$ seko, ka $[f(y)] = 1$ visiem $y \in R$. Tātad doto vienādību varam pārrakstīt formā $f([x]y) = f(x)$. Ievietojot $y = 0$, iegūstam $f(x) = f(0) = C \neq 0$. No sakarības $[f(y)] = 1$ seko, ka $1 \leq C < 2$. Tātad der $f(x) = C$, kur $1 \leq C < 2$;
- apskatām gadījumu, kad $f(0) = 0$. Šeit iespējami 2 apakšgadījumi:
  - pieņemam, ka eksistē $0 < \alpha < 1$ tāds, ka $f(\alpha) \neq 0$. Ievietojot $x = \alpha$ dotajā vienādībā, iegūstam $f([\alpha]y) = f(\alpha)[f(y)]$. Tā kā $[\alpha] = 0$, tad $f(\alpha)[f(y)] = f(0) = 0$ visiem $y \in R$. Tātad $[f(y)] = 0$ visiem $y \in R$.
  Ievietojot dotajā vienādībā $x = 1$, iegūstam $f(y) = f(1)[f(y)] = f(1) \cdot 0 = 0$ visiem $y \in R$. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka eksistē α tāds, ka $f(\alpha) \neq 0$;
  - pieņemam, ka $f(\alpha) = 0$ visiem $0 \leq \alpha < 1$. Katram reālam z eksistē vesels skaitlis N tāds, ka $\alpha = \frac{z}{N} \in [0; 1)$. (Piemēram, $N = [z] + 1$, ja $z \geq 0$, un $N = [z] - 1$, ja $z < 0$.) Tad no dotās vienādības iegūstam $f(z) = f([N]\alpha) = f(N)[f(\alpha)] = 0$ visiem $z \in R$. Tātad der $f(x) = 0$.

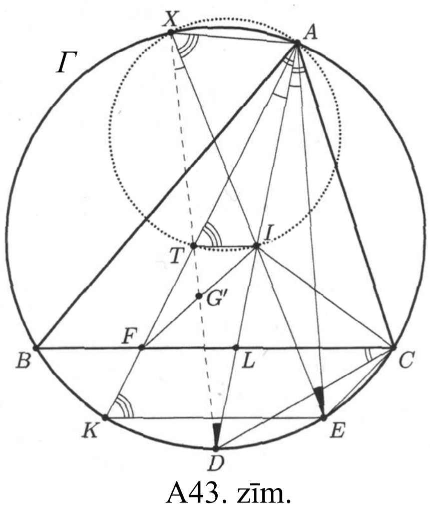
Pārbaudām, vai iegūtās funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus:

- ja $f(x) = 0$, tad $0 = 0$ (izpildās);
- ja $f(x) = C$, kur $1 \leq C < 2$, tad $C = C \cdot [C] = C \cdot 1 = C$ (izpildās).

Tātad der tikai funkcijas $f(x) = const = C$, kur $C = 0$ vai $1 \leq C < 2$.

A.IMO.2. 1) Ar $X \neq E$ apzīmējam taisnes EI krustpunktu ar riņķa līniju Γ; ar L apzīmējam trijstūra ABC leņķa BAC bisektrises krustpunktu ar malu BC. Nogriežņa DX krustpunktus ar IF un AF apzīmējam attiecīgi ar G' un T (skat. A43. zīm.).

Atceramies, ka trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra bisektrišu krustpunktā.



A43. zīm.

2) Pēc Menelāja teorēmas ΔAIF un taisnei DX, iegūstam vienādību:

$$1=\frac{G'F}{IG'}\cdot\frac{TF}{AT}\cdot\frac{AD}{ID}. \qquad (*)$$

Pierādīsim, ka $\frac{TF}{AT}\cdot\frac{AD}{ID}=1$. No tā sekos, ka $G'F=IG'$, tātad $G=G'$.

3) Taisne AF krusto riņķa līniju Γ punktā $K\neq A$. Tā kā pēc dotā $\angle BAK=\angle CAE$, tad $\cup BK=\cup CE$. Tātad $KE\| BC$, jo loki starp paralēlām hordām ir vienādi.

4) Ievērojam, ka $\angle IAT=\angle DAK$ un $\angle IXT=\angle EXD$.
$\angle DAK=\angle EAD$, jo AD ir bisektrise un pēc dotā $\angle BAF=\angle CAE$.
$\angle EAD=\angle EXD$ kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku ED.
Tātad $\angle DAK=\angle EXD$ no kā seko, ka $\angle IAT=\angle IXT$ un punkti I, A, X, T atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. I.V.10.3.).

<u>Piezīme</u>. Vienādību $\angle IAT=\angle IXT$ var pierādīt arī, pamatojot vienādības: $\cup DK=\cup BD-\cup BK=\cup DC-\cup CE=\cup DE$.

5) Tad $\angle ITA=\angle IXA=\angle EXA=\angle EKA$ (izmantojam leņķus, kas balstās uz vieniem un tiem pašiem lokiem abās riņķa līnijās). No šejienes seko, ka kāpšļu leņķi $\angle ITA$ un $\angle EKA$ ir vienādi, tātad $IT\parallel KE$.

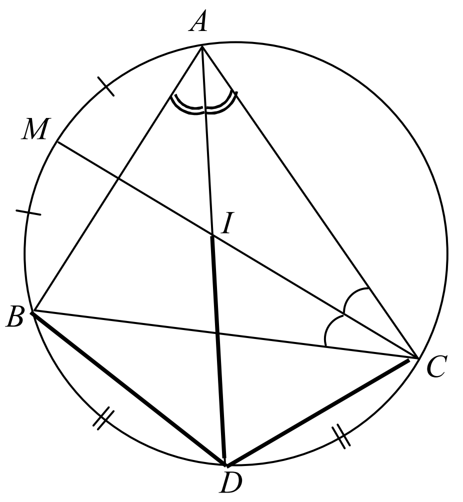
Tā kā $KE\parallel BC$, tad $IT\parallel KE\parallel BC$.

Pēc Talesa teorēmas $\frac{TF}{AT}=\frac{IL}{AI}$.

6) Tā kā CI ir ΔACL bisektrise, tad no bisektrises īpašības seko, ka $\frac{IL}{AI}=\frac{CL}{AC}$.

7) Trijstūri DCL un DAC ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\angle ADC=\angle LDC$ un $\angle DCL=\angle DAB=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle ABC$. Tātad var rakstīt atbilstošo malu attiecību $\frac{CL}{AC}=\frac{DC}{AD}$.

8) Pierādīsim, ka loka BC viduspunkts D atrodas vienādā attālumā no punktiem I, B, C (skat. A44. zīm.).



A44. zīm.

Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs I atrodas bisektrišu krustpunktā, tāpēc $\angle BAD = \angle DAC$ un $\angle BMC = \angle MCA$. Tā kā vienādiem ievilktiem leņķiem atbilst vienādi loki, tad $\cup BD = \cup DC$ un $\cup BM = \cup MA$.

Izmantojot ievilktā leņķa īpašību, iegūstam $\angle DCM = \frac{1}{2} \cup MD = \frac{1}{2}(\cup MB + \cup BD)$.

Izmantojot iekšējā leņķa īpašību, iegūstam $\angle CID = \frac{1}{2}(\cup MA + \cup CD)$.

Tā kā atbilstošie loki ir vienādi, tad $\angle DCM = \angle CID$. Tātad trijstūris IDC ir vienādsānu trijstūris un $ID = CD$ kā attiecīgās malas pret vienādiem leņķiem.
$BD = CD$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus BD un DC.
Tātad esam pierādījuši, ka $ID = CD = BD$

9) Tātad varam rakstīt $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$.

10) Apkopojot iegūtās vienādības, iegūsim $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$.

11) Tātad $\frac{TF}{AT} = \frac{ID}{AD}$ jeb $\frac{TF}{AT} \cdot \frac{AD}{ID} = 1$. Tad no (*) seko, ka $\frac{G'F}{IG'} = 1$ jeb $G'F = IG'$.

12) Punkts G' ir nogriežņa IF viduspunkts, tātad sakrīt ar punktu G.
Esam pierādījuši, ka taisnes DG un EI krustojas punktā X, kas atrodas uz riņķa līnijas Γ.

A.IMO.3. Visas funkcijas formā $f(n) = n + c$, kur $c \in N \cup \{0\}$, apmierina uzdevuma nosacījumus:

$$(f(m)+n)(f(n)+m) = (n+m+c)^2.$$

Pierādīsim, ka nav citu funkciju, kas apmierinātu uzdevumu nosacījumus.

Izmantosim šādu <u>lemmu</u>: Ja $p \mid f(k) - f(l)$ kādam pirmskaitlim p un veseliem, pozitīviem skaitļiem k un l, tad $p \mid k - l$. (Ar pierakstu $a \mid b$ sapratīsim, ka a ir b dalītājs.)

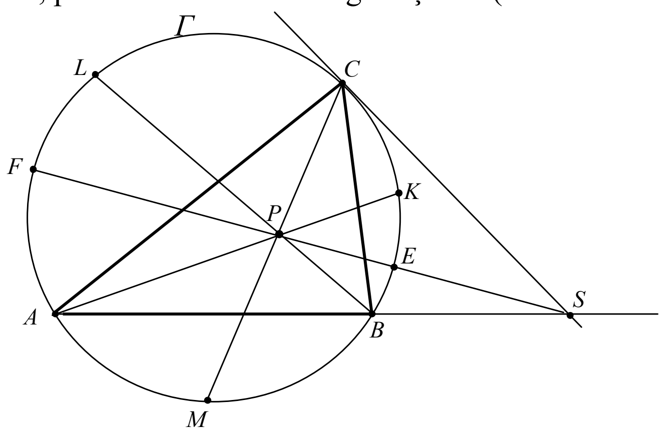
<u>Lemmas pierādījums.</u> Pirmkārt, pieņemam, ka $p^2 \mid f(k) - f(l)$, tad $f(l) = f(k) + p^2 a$, kur $a \in Z$. Izvēlamies veselu, pozitīvu skaitli D tādu, ka $D > \max\{f(k), f(l)\}$ un kurš nedalās ar p. Apskatām skaitli $n = pD - f(k)$. Tad pozitīvi skaitļi $n + f(k) = pD$ un $n + f(l) = pD + (f(l) - f(k)) = pD + p^2 a =$ $= p(D + pa)$ dalās ar p, bet nedalās ar p^2. Izmantojot uzdevuma nosacījumus, iegūstam, ka skaitļi $(f(k)+n)(f(n)+k)$ un $(f(l)+n)(f(n)+l)$ ir kvadrāti, kas dalās ar p (tātad dalās arī ar p^2). Tā kā reizinātāji $f(k)+n$ un $f(l)+n$ nedalās ar p^2, tad reizinātājiem $f(n)+k$ un $f(n)+l$ jādalās ar p. Tātad esam ieguvuši, ka $p \mid (f(n)+k)) - (f(n)+l)) = k - l$.

Otrkārt, ja $f(k) - f(l)$ dalās ar p, bet nedalās ar p^2, tad izvēlamies to pašu skaitli D un apskatām skaitli $n = p^3 D - f(k)$. Tad pozitīvais skaitlis $f(k) + n = p^3 D$ dalās ar p^3, bet nedalās ar p^4, un $f(l) + n = p^3 D + (f(l) - f(k))$ dalās ar p, bet nedalās ar p^2. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka skaitļi $f(n)+k$ un $f(n)+l$ dalās ar p, tātad $p \mid (f(n)+k) - (f(n)+l) = k - l$. Līdz ar to esam pierādījuši lemmu.

Pieņemam, ka $f(k) = f(l)$ kādiem naturāliem skaitļiem *k* un *l*. No lemmas seko, ka $k - l$ dalās ar visiem pirmskaitļiem, tātad $k - l = 0$ jeb $k = l$. Tātad funkcija f dažādos definīcijas apgabala punktos pieņem dažādas vērtības (šādu funkciju sauc par injekciju).
Apskatām skaitļus $f(k)$ un $f(k+1)$. Tā kā skaitlis $(k+1) - k = 1$ nedalās ne ar vienu pirmskaitli, tad pēc lemmas seko, ka $f(k+1) - f(k)$ nedalās ar pirmskaitļiem, tātad $|f(k+1) - f(k)| = 1$.
Pieņemam, ka $f(2) - f(1) = q$, $|q| = 1$. Ar indukciju pierādīsim, ka $f(n) = f(1) + q(n-1)$.
Indukcijas bāze $n = 1, 2$ $f(2) = f(1) + q$, kas ir spēkā pēc *q* definīcijas.
Ja $n > 1$, tad $f(n+1) = f(n) \pm q = f(1) + q(n-1) \pm q$. Tā kā $f(n) \neq f(n-2) = f(1) + q(n-2)$, tad iegūstam $f(n+1) = f(1) + qn$.
Tātad, izmantojot matemātisko indukciju, esam pierādījuši, ka $f(n) = f(1) + q(n-1)$.
Tad *q* nedrīkst būt -1, jo pretējā gadījumā $n \geq f(1) + 1$ un iegūstam, ka $f(n) \leq 0$, kas ir pretrunā ar doto. Tātad $q = 1$ un $f(n) = (f(1) - 1) + n$ visiem $n \in N$, un $f(1) - 1 \geq 0$.
Tātad esam ieguvuši, ka uzdevuma prasības apmierina funkcijas formā $f(n) = (f(1) - 1) + n$ jeb $f(n) = c + n$, kur $c = f(1) - 1$, kas arī bija jāpierāda.

A.IMO. Uzdevumi 2010. gada 8. jūlijā

A.IMO.4. Pieņemsim, ka $CA > CB$ (otrs gadījums apskatāms līdzīgi). Tad punkts *S* atrodas uz stara *AB*. Punkts *P* ir patvaļīgs punkts, kas atrodas gan trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas Γ iekšpusē, gan leņķa *ASC* iekšpusē. Ar *E* un *F* apzīmēsim *SP* krustpunktus ar Γ, punkts *E* atrodas uz nogriežņa *SP* (skat. A45. zīm.).



A45. zīm.

Izmantojot doto un hordas – pieskares īpašību, iegūstam $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$.
Tātad $\dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SA}{SP}$.
Tā kā $\angle PSA = \angle BSP$ un $\dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SA}{SP}$, tad $\Delta PSA \sim \Delta BSP$ (pēc pazīmes $m\ell m$).
Tātad $\angle BPS = \angle SAP$ kā līdzīgu trijstūru atbilstošie leņķi.

Tā kā $\angle BPS = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{BE} + \overset{\cup}{LF})$ kā riņķa līnijas ω iekšējs leņķis un $\angle SAP = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{BE} + \overset{\cup}{EK})$ kā ievilktais leņķis, tad $\overset{\cup}{LF} = \overset{\cup}{EK}$.

Izmantojot iekšējā leņķa īpašību, iegūstam, ka $\angle SPC = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{EC} + \overset{\cup}{MF})$.

Izmantojot hordas – pieskares leņķa īpašību, iegūstam, ka $\angle SCP = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{EC} + \overset{\cup}{EM})$.

Trijstūris SCP ir vienādsānu trijstūris ($SC = SP$ – pēc dotā), tāpēc $\angle SPC = \angle SCP$ kā leņķi pie pamata.

Tātad $\overset{\cup}{EC} + \overset{\cup}{MF} = \overset{\cup}{EC} + \overset{\cup}{EM}$ jeb $\overset{\cup}{MF} = \overset{\cup}{EM}$.

Tā kā $\overset{\cup}{MFL} = \overset{\cup}{MF} + \overset{\cup}{FL} = \overset{\cup}{ME} + \overset{\cup}{EK} = \overset{\cup}{MEK}$, tad $MK = ML$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus, kas arī bija jāpierāda.

A.IMO.5. Ar pierakstu $(a_1, a_2, ..., a_n) \to (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ sapratīsim: ja sekojošas kastes satur $a_1, a_2, ..., a_n$ monētas, tad ir iespējams izpildīt vairākas atļautās darbības, lai kastēs būtu attiecīgi $a'_1, a'_2, ..., a'_n$ monētas, bet pārējās kastēs monētu skaits paliektu nemainīgs.

Apzīmējam $A = 2010^{2010^{2010}}$.

Tātad jāpierāda, ka $(1,1,1,1,1,1) \to (0,0,0,0,0,A)$.

Pierādīsim 2 lemmas.

<u>Lemma 1.</u> $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ katram $a \geq 1$.

<u>Pierādījums.</u>

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0)$ katram $1 \leq k \leq a$.

Indukcijas bāze: $k = 1$. Kastei B_1 lietojam „darbību 1”:

$$(a, 0, 0) \to (a-1, 2, 0) = (a-1, 2^1, 0).$$

Pieņemam, ka pieņēmums ir spēkā, ja $k < a$.

Parādīsim, ka ir spēkā induktīvā pāreja. Sākot ar situāciju $(a-k, 2^k, 0)$ izpildām „darbību 1” vidējai kastei 2^k reizes, kamēr tā kļūs tukša. Tad lietojam „darbību 2” pirmajai kastei:

$$(a-k, 2^k, 0) \to (a-k, 2^k - 1, 2) \to ... \to (a-k, 0, 2^{k+1}) \to (a-k-1, 2^{k+1}, 0).$$

Tātad $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0) \to (a-(k+1), 2^{k+1}, 0)$ un „Lemma 1” ir pierādīta.

<u>Lemma 2.</u> $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$ katram $a \geq 1$.

Apzīmējam $P_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n}$, kur n – naturāls skaitlis (piemēram, $P_3 = 2^{2^2} = 16$).

<u>Pierādījums.</u>

Līdzīgi kā „Lemmai 1” pierādīsim, ka $(a, 0, 0, 0) \to (a-k, P_k, 0, 0)$ katram $1 \leq k \leq a$.

Ja $k = 1$, tad lietojam „darbību 1” pirmajai kastei:

$$(a, 0, 0, 0) \to (a-1, 2, 0, 0) = (a-1, P_1, 0, 0).$$

Pieņemam, ka lemma ir spēkā, ja $k < a$.

Sākot ar $(a-k, P_k, 0, 0)$ izmantojam „Lemmu 1” otrajai kastei un tad „darbību 1” pirmajai kastei:

$$(a-k, P_k, 0, 0) \to (a-k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a-k, 0, P_{k+1}, 0) \to (a-k-1, P_{k+1}, 0, 0).$$

Tātad $(a, 0, 0, 0) \to (a-k, P_k, 0, 0) \to (a-(k+1), P_{k+1}, 0, 0)$ un „Lemma 2” ir pierādīta.

Tagad pierādīsim uzdevumā prasīto. Vispirms lietojam „darbību 1” kastei B_5, tad darbību 2 kastēm B_4, B_3, B_2 un B_1 šādā secībā. Pēc tam lietojam „Lemmu 2” kastēm B_2 un B_3:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \to (1, 1, 1, 1, 0, 3) \to (1, 1, 1, 0, 3, 0) \to (1, 1, 0, 3, 0, 0) \to$$
$$\to (1, 0, 3, 0, 0, 0) \to (0, 3, 0, 0, 0, 0) \to (0, 0, P_3, 0, 0, 0) = (0, 0, 16, 0, 0, 0) \to$$
$$\to (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0).$$

Kastē B_4 jau ir vairāk kā A monētas, jo

$$A = 2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11\cdot 2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}.$$

Lai samazinātu monētu daudzumu kastē B_4, lietojam „darbību 2” līdz monētu daudzums ir $\frac{A}{4}$ (katrā darbībā izņem vienu monētu no B_4 un apmaina vietām tukšās kastes B_5 un B_6):

$$(0, 0, 0, P_{16}, 0, 0) \to (0, 0, 0, P_{16}-1, 0, 0) \to (0, 0, 0, P_{16}-2, 0, 0) \to \ldots \to$$
$$\to (0, 0, 0, \frac{A}{4}, 0, 0).$$

Pēc tam lietojam „darbību 1” kastei B_4 līdz tā ir tukša, tad lietojam „darbību 1” kastei B_5 līdz tā ir tukša:

$$(0, 0, 0, \frac{A}{4}, 0, 0) \to \ldots \to (0, 0, 0, 0, \frac{A}{2}, 0) \to \ldots \to (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

Esam pierādījuši, ka eksistē tāda darbību virkne, kuras rezultātā izpildās uzdevuma nosacījumi.

A.IMO.6. Pēc dotā visiem $n > r$ izpildās $a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$. (1)

Tātad, ja $n > r$, tad $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$, kur $j_1, j_2 < n$ un $j_1 + j_2 = n$.

Ja, piemēram, $j_1 > r$, tad līdzīgi var pārveidot a_{j_1}. Veicot šādus pārveidojumus, iegūstam

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}, \qquad (2)$$
$$\text{kur } 1 \le i_j \le r \text{ un } i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n. \qquad (3)$$

Ja a_{i_1} un a_{i_2} ir skaitļi, kas iegūti no (2) pēdējā solī, tad $i_1 + i_2 > r$.

Tātad nosacījumus (3) varam pārrakstīt formā:

$$1 \le i_j \le r,\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n,\ i_1 + i_2 > r. \ (4)$$

No otras puses, pieņemam, ka indeksi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ apmierina nosacījumus (4). Apzīmēsim $s_j = i_1 + i_2 + \ldots + i_j$ un no (1) iegūstam, ka

$$a_n = a_{s_k} \ge a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \ge a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \ge \ldots \ge a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}.$$

Tātad, apkopojot šīs sakarības, iegūsim nosacījumus:

Katram $n > r$ izpildās $a_n = \max\{a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}\}$, kur $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ apmierina (4). (*)

Apzīmējam $s = \max_{1 \le i \le r} \frac{a_i}{i}$ un fiksējam kādu indeksu $l \le r$ tā, ka $s = \frac{a_l}{l}$.

Apskatām skaitli $n \ge r^2 l + 2r$ un izvēlamies a_n izvērsumu formā (2) ar nosacījumiem (4):

$$n = i_1 + ... + i_k \le rk \text{, tātad } k \ge \frac{n}{r} \ge rl + 2 .$$

Pieņemam, ka neviens no $i_3, ..., i_k$ nav vienāds ar l. Tad pēc Dirihlē principa seko, ka eksistē indekss $1 \le j \le r$, kurš starp indeksiem $i_3, ..., i_k$ parādās vismaz l reizes, un noteikti $j \ne l$.

Izdzēšam šos l indeksus j no $i_3, ..., i_k$ un to vietā ierakstām j indeksus l, iegūstot virkni $(i_1, i_2, i'_3, ..., i'_{k'})$, kas apmierina (4).

Izmantojot (*), iegūstam, ka $a_{i_1} + ... + a_{i_k} = a_n \ge a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + ... + a_{i'_{k'}}$.

Vienkāršojot iegūstam $la_j \ge ja_l$, tātad $\frac{a_l}{l} \le \frac{a_j}{j}$.

Pēc l definīcijas seko, ka $la_j = ja_l$, tātad $a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + ... + a_{i'_{k'}}$.

Tādējādi katram $n \ge r^2 l + 2r$ esam ieguvuši attēlojumu formā (2) ar nosacījumiem (4), kur $i_j = l$, $j \ge 3$.

Pārkārtojot indeksus, iegūstam $i_k = l$.

Ievērojam, ka šajā attēlojumā indeksi $(i_1, i_2, ..., i_{k-1})$ apmierina nosacījumus (4), kur n aizstāts ar $n - l$.

Tādā veidā no (*) iegūstam $a_{n-l} + a_l \ge (a_{i_1} + ... + a_{i_{k-1}}) + a_l = a_n$.

Izmantojot (1), iegūstam $a_n = a_{n-l} + a_l$ katram $n \ge r^2 l + 2r$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2009”

A.AB.A. Algebra

A.AB.A.1. Ievērojam, ka $f(x)=\left(x+\frac{2009}{2}\right)^2-\frac{2009^2}{4}+1$. Tā kā izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs skaitlis, tad *f* vērtību apgabals $V=\left[-\frac{2009^2}{2}+1;+\infty\right)$.

Ievērojam, ka $f(D)=V\subset D$. Apskatīsim, kāds ir funkcijas $f(V)$ vērtību apgabals. Tā kā funkcijas $f(x)$ grafiks ir parabola ar virsotni punktā $x_0=-\frac{2009}{2}$ un uz augšu vērstiem zariem (t. i., $f(x_0)=\min f(x), x\in R$), tad $f(x)$ pie $x\in\left[-\frac{2009}{2};+\infty\right)$ pieņem visas iespējamās vērtības no kopas *V*. Intervāls $\left[-\frac{2009}{2};+\infty\right)\subset V$, tātad $f(V)=V$. Varam secināt, ka arī $f\left(f(...(f(R))...\right)=V$.

Tā kā $V=\left[-\frac{2009^2}{2}+1;+\infty\right)$, tad $0\in V$. $f\left(f(...(f(R))...\right)$ pieņem visas vērtības no intervāla *V*, tad eksistē tāds reāls skaitlis *r*, kur $f\left(f(...(f(r))...\right)=0$, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.A.2. Varam pieņemt, ka $a\geq b$. Tā kā $a>1$ un $b>1$, tad $a^2\geq b^2$ un $\frac{1}{a-1}\leq\frac{1}{b-1}$. Izmantojam Čebiševa nevienādību pie $n=2$, kur $a_1=b^2$, $a_2=a^2$, $b_1=\frac{1}{a-1}$, $b_2=\frac{1}{b-1}$ (skat. I.AB.A.2.):

$$2\left(\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}\right)\geq(b^2+a^2)\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}\right)=\frac{b^2}{a-1}+\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}$$

Atņemam abām nevienādības pusēm $\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}$ un iegūstam, ka

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq\frac{a^2}{a-1}+\frac{b^2}{b-1}. \quad (1)$$

Ir skaidrs, ka ir spēkā nevienādība $(x-2)^2\geq0$, jo izteiksmes kvadrāts nekad nav negatīvs skaitlis. No šīs nevienādības iegūstam, ka $x^2-4x+4\geq0$ jeb $x^2\geq4x-4$. Tā kā $x>1$, tad $\frac{x^2}{x-1}\geq4$. (2)

Izmantojot nevienādības (1) un (2), iegūstam vajadzīgo:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq\frac{a^2}{a-1}+\frac{b^2}{b-1}\geq4+4=8.$$

A.AB.A.3. Atveram iekavas nevienādības kreisajā pusē un sagrupējam mainīgos, iznesot pirms iekavām *c* un *d* dažādu pakāpju reizinājumus:

$$c^5 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + c^4 d(x_1 x_2 x_3 x_4 + ... + x_2 x_3 x_4 x_5) + c^3 d^2 (x_1 x_2 x_3 + ... + x_3 x_4 x_5) +$$
$$+ c^2 d^3 (x_1 x_2 + ... + x_4 x_5) + cd^4 (x_1 + ... + x_5) + d^5 . \quad (1)$$

Pielietojam otrajam līdz pirmspēdējajam saskaitāmajam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko ($A \geq G$) iekavās esošajai skaitļu summai un izmantojam doto vienādību $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1$:

- $\dfrac{x_1 x_2 x_3 x_4 + ... + x_2 x_3 x_4 x_5}{5} \geq \sqrt[5]{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^4} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 + ... + x_2 x_3 x_4 x_5 \geq 5$;
- $\dfrac{x_1 x_2 x_3 + ... + x_3 x_4 x_5}{10} \geq \sqrt[10]{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^6} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 + ... + x_3 x_4 x_5 \geq 10$;
- $\dfrac{x_1 x_2 + ... + x_4 x_5}{10} \geq \sqrt[10]{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^4} \Rightarrow x_1 x_2 + ... + x_4 x_5 \geq 10$;
- $\dfrac{x_1 + ... + x_5}{5} \geq \sqrt[5]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \Rightarrow x_1 + ... + x_5 \geq 5$.

Ievietojot šos novērtējumus izteiksmē (1) un pielietojot doto vienādību $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1$, iegūstam, ka izteiksmes (1) vērtība ir lielāka vai vienāda ar

$$c^5 + 5c^4 d + 10c^3 d^2 + 10c^2 d^3 + 5cd^4 + d^5 = (c+d)^5 = 1,$$

tātad arī uzdevumā dotās nevienādības kreisā puse ir lielāka vai vienāda ar 1, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.A.4. Nē, tas nav iespējams. Pieņemsim no pretējā, ka tādas funkcijas eksistē. Tādā gadījumā, ja $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$; tātad f attēlo dažādas vērtības par dažādām jeb *f* – injekcija.

No $f(g(x)) = x^2$ iegūstam, ka $f(g(f(x))) = (f(x))^2$; tātad $f(x^3) = (f(x))^2$. No šejienes seko:

- pie $x = 0$: $f(0) = (f(0))^2$;
- pie $x = 1$: $f(1) = (f(1))^2$;
- pie $x = -1$: $f(-1) = (f(-1))^2$.

Redzam, ka $f(0)$, $f(1)$ un $f(-1)$ ir vienādojuma $t = t^2$ saknes, t. i., pieņem tikai 2 dažādas vērtības 0 un 1. Tā ir pretruna ar to, ka f – injekcija.

Tātad mūsu pieņēmums, ka uzdevumā dotās funkcijas eksistē, ir nepatiess. Esam pierādījuši, ka uzdevumā dotie nosacījumi nav iespējami.

A.AB.A.5. Pieņemsim, ka eksistē tāds polinoms $P(x, y)$ ar uzdevumā doto īpašību. Pie $y = 0$ $P(x, 0) = f(x)$ ir viena argumenta *x* polinoms. Tam ir bezgalīgi daudz sakņu (visi *x* no $[0; 1]$). Tāpēc $f(x)$ ir nulles polinoms jeb $f(x) = 0$. Tādā gadījumā visa taisne $y = 0$ sastāv no punktiem, kas attēlo *P* „saknes”. Bet tā nedrīkst būt. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepatiess un esam pierādījuši, ka šāds polinoms neeksistē.

A.AB.K. Kombinatorika

A.AB.K.1. Pieņemsim, ka turnīrā piedalījās v votivapas un s šillišallas. Votivapas savā starpā un šillišallas savā starpā sadalīja attiecīgi C_v^2 un C_s^2 punktus. Tā kā katrs dalībnieks, spēlējot pret votivapām, ieguva tikpat punktu, cik spēlējot pret šillišallām, tad pavisam tika sadalīti $2(C_v^2 + C_s^2)$ punkti.

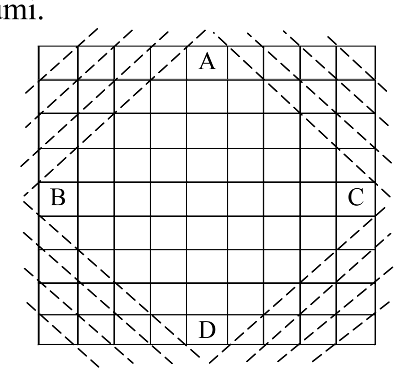
Tā kā katrs no $s+v$ rūķīšiem spēlēja cits ar citu tieši vienu reizi, pavisam tika sadalīti C_{s+v}^2 punkti.

Tātad $2(C_v^2 + C_s^2) = C_{s+v}^2$, no kurienes

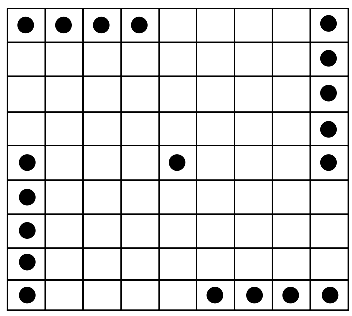
$$v(v-1) + s(s-1) = \frac{(s+v)(s+v-1)}{2}$$
$$2v^2 - 2v + 2s^2 - 2s = s^2 + 2sv + v^2 - s - v$$
$$v^2 - v + s^2 - s = 2sv$$
$$(v-s)^2 = s+v\,.$$

Esam pierādījuši, ka $s+v$, kas ir kopējais dalībnieku skaits, ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

A.AB.K.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādām, ka nokrāsoto rūtiņu centru nevar būt mazāk kā 19, lai izpildītos uzdevumā dotais nosacījums. Uz katras no A46. zīm. parādītajām 16 pārtrauktajām līnijām vajag vismaz vienu punktu. Bez tam vismaz 3 punktus vajag rūtiņās A, B, C, D, lai „apkalpotu" 6 taisnes, kas savieno šo rūtiņu centrus. Tātad vajag vismaz 19 punktus, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.



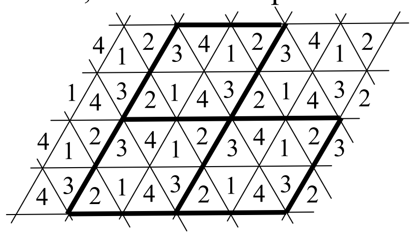
A46. zīm.



A47. zīm.

Otrkārt, ar piemēru parādām, ka var nokrāsot melnus tieši 19 rūtiņu centrus, lai izpildītos uzdevumā dotais nosacījums (skat. A47. zīm.).

A.AB.K.3. Sanumurējam trijstūrus ar skaitļiem 1, 2, 3, 4 kā parādīts A48. zīm.; numurējums ir periodisks, tātad varam apskatīt tikai fragmentu no plaknes.



A48. zīm.

Ievērojam, ka Sprīdītis, veicot atļautos gājienus, visu laiku pārvietojas pa vienas krāsas trijstūriem. Katram trijstūrim eksistē trīs tādi trijstūri, kam ar to ir viena kopēja mala, un šie trīs trijstūri vienmēr nokrāsoti no dotā trijstūra atšķirīgās krāsās. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

A.AB.K.4. Apskatām jauniegūtā trijstūra perimetru:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-2p=p,$$

tātad trijstūru perimetrs samazinās.

Tā kā $|(p-a)-(p-b)|=|a-b|$, tad malu garumu starpības jaunizveidotajiem trijstūriem paliek nemainīgas.

Tātad, ja trijstūrus varētu iegūt bezgalīgi ilgi, tad to perimetri tiektos uz 0, bet malu garumu starpības nemainītos.

Apskatām divu trijstūra *T* malu garumus *a* un *b*. Varam pieņemt, ka $a \geq b$. Apzīmējam $a-b=G$. Trijstūra divu malu garumu starpība vienmēr ir mazāka nekā trijstūra trešās malas garums, tāpēc $c>G$. Izmantojot šo novērtējumu un izsakot $a=b+G$, iegūstam, ka

$$2p=P=a+b+c=b+G+b+c>2b+2G>2G \text{ jeb } p>G.$$

Tātad jaunizveidotā trijstūra laukums *p* nebūs mazāks par *G*. Tā kā trijstūra malu garumu starpība nemainās, tad arī turpmāko jaunizveidoto trijstūru perimetri nebūs mazāki par *G*. Lai trijstūru perimetri tiektos uz 0, *G* ir jābūt nullei jeb $a=b$.

Līdzīgi iegūstam, ka $b=c \Rightarrow a=b=c$ jeb *T* – regulārs trijstūris.

Tātad process var turpināties bezgalīgi tad un tikai tad, ja *T* ir regulārs trijstūris.

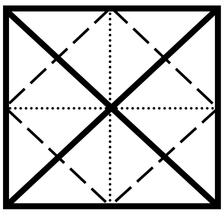
A.AB.K.5. a) Jā, tā var būt, piemēram, ja pavisam ir 7 olimpiādes un 10 skolēni apmeklē attiecīgi olimpiādes 1,2,3; 1,4,5; 1,6,7; 2,4,6; 2,5,7; 2,5,7; 3,4,7; 3,4,7; 3,5,6; 3,5,6. Tiešām, katrā no 7 olimpiādēm piedalījušies attiecīgi 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5 skolēni.

b) Ja *A* ir kāds skolēns, tad katrs no 9 pārējiem piedalījās vismaz vienā no trim *A* apmeklētajām olimpiādēm. Lai nevienu no šīm olimpiādēm neapmeklētu 5 vai vairāk skolēni (kopā ar *A*), katru no *A* apmeklētajām olimpiādēm apmeklē tieši 3 no pārējiem skolēniem. Tas nozīmē, ka katru olimpiādi apmeklēja 4 cilvēki, tātad kopējam apmeklējumu skaitam ir jādalās ar 4.

Pavisam ir 10 skolēni un katrs no tiem piedalījās 3 olimpiādēs, tāpēc apmeklējumu skaits ir $10 \cdot 3 = 30$. Tā kā 30 ar 4 nedalās, tad nav iespējams, ka nevienā olimpiādē nepiedalījās vairāk kā 4 skolēni.

A.AB.Ģ. Ģeometrija

A.AB.Ģ.1. Ir trīs tipu plaknes: perpendikulāras šķautnēm (tādas ir 3, A49. zīm. to šķēlumu nogriežņi attēloti ar punktotu līniju), perpendikulāras skaldņu diagonālēm (tādas ir 6, A49. zīm. to šķēlumu nogriežņi attēloti ar nepārtrauktu līniju) un perpendikulāras kuba diagonālēm (tādas ir 4, A49. zīm. to šķēlumu nogriežņi attēloti ar pārtrauktu līniju). Tās sadala kubu trijstūra piramīdās, kurām kuba centrs ir kopīga virsotne.



← skaldnes sadalījums

A49. zīm.

Tās sadala arī katru kuba skaldni 16 trijstūros, kas ir piramīdu skaldnes. Neviena piramīda „neiziet” uz divām skaldnēm, tāpēc to skaits ir $16 \cdot 6 = 96$.

A.AB.Ģ.2. Apzīmējam riņķa līnijas pieskāršanās punktu malai AC ar J un novelkam nogriezni JE (skat. A50. zīm.). Pierādīsim, ka $JE \parallel AB$.

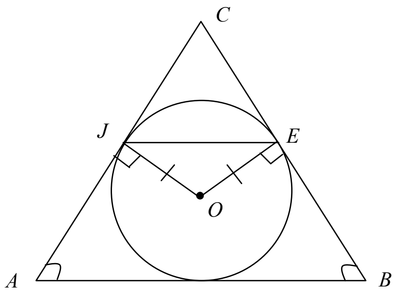
Tā kā ΔABC ir vienādsānu, tad $\angle BAC = \angle CBA$. No riņķa centra O novelkam rādiusus OJ un OE. Tā kā J un E ir pieskāršanās punkti, tad $\angle OJA = \angle OEB = 90°$. Apskatām vienādsānu ΔEOJ ($OJ = OE$ kā rādiusi); $\angle OJE = \angle OEJ$ kā leņķi pie pamata. Tātad $\angle BAC + \angle OJA + \angle OJE = \angle CBA + \angle OEB + \angle OEJ$.

Esam ieguvuši, ka $\angle BAJ + \angle AJE = \angle EBA + \angle BEJ = 360° : 2 = 180°$, jo četrstūra iekšējo leņķu summa ir $360°$. Tā kā iekšējo vienpusleņķu summa, kas rodas, taisnei AC krustojot taisnes JE un AB, ir $180°$, tad $JE \parallel AB$.

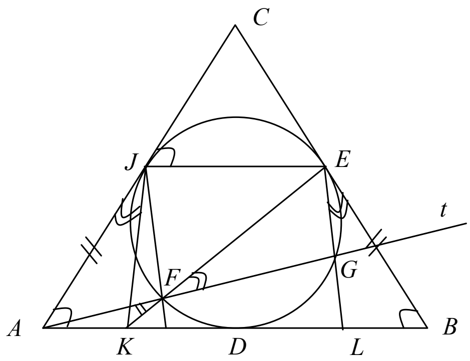
Varam secināt, ka $\angle CAB = \angle CJE$ kā kāpšļu leņķi.

$\angle CJE = \frac{1}{2}\overset{\cup}{JE}$ kā hordas – pieskares leņķis, kas atšķeļ $\cup JE$. Savukārt $\angle JFE = \frac{1}{2}\overset{\cup}{JE}$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz loka JE. (skat. A51. zīm.) Tātad $\angle CJE = \angle JFE$.

Esam ieguvuši, ka $\angle CAB = \angle CJE = \angle JFE$. Tā kā blakusleņķu summa ir $180°$, iegūstam, ka $\angle JFK = 180° - \angle JFE = 180° - \angle CAB$ jeb $\angle JFK + \angle CAB = 180°$. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$, tātad ap četrstūri $AJFK$ var apvilkt riņķa līniju.



A50. zīm.



A51. zīm.

$\angle AJK = \angle AFK$, jo balstās uz viena un tā paša riņķa līnijas loka AK.
$\angle AFK = \angle EFG$ kā krustleņķi.

$\angle EFG$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loka EG, tātad $\angle EFG = \frac{1}{2}\overset{\cup}{EG}$, savukārt, $\angle LEB$ ir hordas – pieskares leņķis, kas atšķeļ loku EG, tāpēc arī $\angle LEB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{EG}$.

Tātad $\angle EFG = \angle LEB$.

Varam secināt, ka $\angle AJK = \angle AFK = \angle EFG = \angle LEB$.

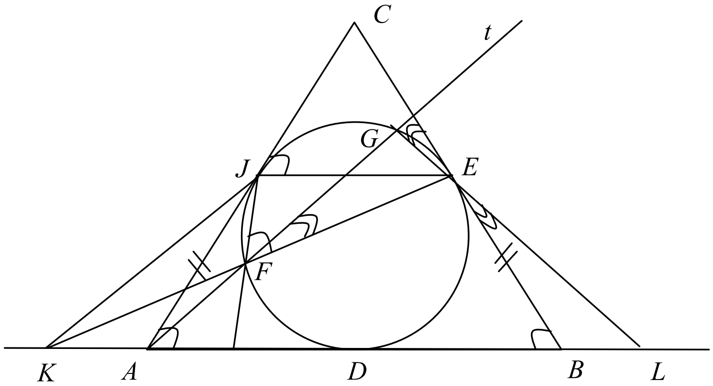
$\Delta AJK = \Delta BEL$ (pēc pazīmes $\ell m \ell$), jo

- $\angle AJK = \angle LEB$ pēc tikko pierādītā;
- $AJ = BE$, jo $AJEB$ – vienādsānu trapece;
- $\angle JAK = \angle EBL$ kā vienādsānu trijstūra pamata pieleņķi.

No tā seko, ka $AK = BL$ kā attiecīgās malas vienādos trijstūros.

Tā kā D ir AB viduspunkts un $AK = BL$, tad $AD - AK = BD - BL$ jeb $DK = DL$, kas arī bija jāpierāda.

Ja taisne t krusto nogriezni CE (skat. A52. zīm.), tad risinājums ir līdzīgs. Jāpierāda, ka ap četrstūri $AFJK$ var apvilkt riņķa līniju (skat. I.V.10.3.) un jāveic gandrīz identiski spriedumi kā pirmajā gadījumā, lai pierādītu, ka $\Delta AJK = \Delta BEL$, kas arī dod prasīto.



A52. zīm.

A.AB.Ģ.3. Pieņemam, ka sarkano punktu ir galīgs skaits. Tad eksistē ΔABC, kas ir viens no sarkanajiem trijstūriem (ar apvilktās riņķa līnijas centru *O*), kam apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir vismazākais.

Ja ΔABC nav šaurleņķu, tad tā divas virsotnes ar apvilktās riņķa līnijas centru veido šaurleņķu trijstūri ar sarkanām virsotnēm. Šim šaurleņķu trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir mazāks par ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu, tātad ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiuss nav vismazākais. Varam secināt, ka ΔABC – šaurleņķu, un *O* atrodas ΔABC iekšpusē.

Ja, piemēram, $\angle AOB < 120°$, tad $\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB < 60°$, tāpēc no formulas $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ seko, ka ΔAOB apvilktās riņķa līnijas rādiuss $\frac{AB}{2\sin\angle AOB} = \frac{AB}{2\sin(2\angle C)} = \frac{AB}{2\cdot 2\sin\angle C\cos\angle C} < \frac{AB}{2\sin\angle C}$ jeb ΔAOB apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir mazāks par ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu. Tā ir pretruna ar ΔABC minimalitāti, tātad $\angle AOB \geq 120°$

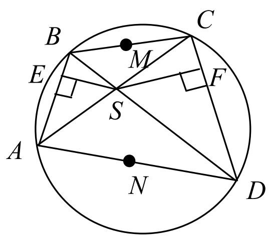
Līdzīgi secinām, ka $\angle BOC \geq 120°$ un $\angle COA \geq 120°$.

Tāpēc jābūt $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120° \Rightarrow \Delta ABC$ – regulārs.

Tad punkti *C* un *O* atrodas uz ΔABC malas *AB* vidusperpendikula un arī ΔAOB apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz *AB* vidusperpendikula, – pretruna ar to, ka nekādi trīs sarkanie punkti neatrodas uz vienas taisnes.

Esam pierādījuši, ka nevar atrast tādus 3 punktus, kuru veidotajam trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir vismazākais, ja nekādi 3 sarkanie punkti neatrodas uz vienas taisnes, tātad ir bezgalīgi daudz sarkano punktu.

A.AB.Ģ.4. Atrisināsim šo uzdevumu, izmantojot vektorus. Tā kā 2 perpendikulāru vektoru skalārais reizinājums ir 0, tad mums ir jāpierāda, ka $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{NM} = 0$ (skat. A53. zīm.).



A53. zīm.

Izmantojam vektorus ar sākumu punktā *S*. Tātad mums jāpierāda, ka

$$\vec{FE}\cdot\vec{NM} = (\vec{SE}-\vec{SF})(\vec{SM}-\vec{SN}) = 0 .$$

$\vec{SM} = \dfrac{\vec{SB}+\vec{SC}}{2}$ un $\vec{SN} = \dfrac{\vec{SA}+\vec{SD}}{2}$, tāpēc mums jāpierāda, ka

$$(\vec{SE}-\vec{SF})(\vec{SM}-\vec{SN}) = (\vec{SE}-\vec{SF})\left(\frac{\vec{SB}+\vec{SC}-\vec{SA}-\vec{SD}}{2}\right) = 0$$

Izmantojot vektoru skalārā reizinājuma īpašības, iegūstam, ka

$$(\vec{SE}-\vec{SF})\left(\frac{\vec{SB}+\vec{SC}-\vec{SA}-\vec{SD}}{2}\right) = (\vec{SE}-\vec{SF})\left(\frac{\vec{SB}-\vec{SA}}{2}+\frac{\vec{SC}-\vec{SD}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{SE}(\vec{SB}-\vec{SA}) - \vec{SF}(\vec{SC}-\vec{SD}) + \vec{SE}(\vec{SC}-\vec{SD}) - \vec{SF}(\vec{SB}-\vec{SA})\right).$$

Tātad jāpierāda, ka

$$\vec{SE}(\vec{SB}-\vec{SA}) - \vec{SF}(\vec{SC}-\vec{SD}) + \vec{SE}(\vec{SC}-\vec{SD}) - \vec{SF}(\vec{SB}-\vec{SA}) = 0 .$$

$$\vec{SE}\cdot\vec{AB} - \vec{SF}\cdot\vec{DC} + \vec{SE}\cdot\vec{DC} - \vec{SF}\cdot\vec{AB} = 0$$

Tā kā $SE \perp AB$, tad $\vec{SE}\cdot\vec{AB} = 0$. Līdzīgi no dotā $SF \perp DC$ iegūstam, ka $\vec{SF}\cdot\vec{DC} = 0$. Tātad jāpierāda, ka

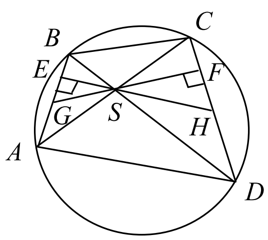
$$-\vec{SE}\cdot\vec{DC} - \vec{SF}\cdot\vec{AB} = 0 .$$

Ievērojam, ka $\Delta ASB \sim \Delta DSC$ (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo

- $\angle ASB = \angle DSC$ kā krustleņķi;
- $\angle SAB = \angle CAB = \angle BDC = \angle SDC$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku *BC*.

Tātad šajos trijstūros augstumi proporcionāli malām jeb $|\vec{SE}|\cdot|\vec{DC}| = |\vec{SF}|\cdot|\vec{AB}|$.

Tā kā $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, tad vēl ir jāpierāda, ka leņķi starp atbilstošajiem vektoriem ir vienādi jeb $\angle SGE = \angle SHF$ (skat. A54. zīm.)



A54. zīm.

Apskatām ΔGSE un ΔHSF :

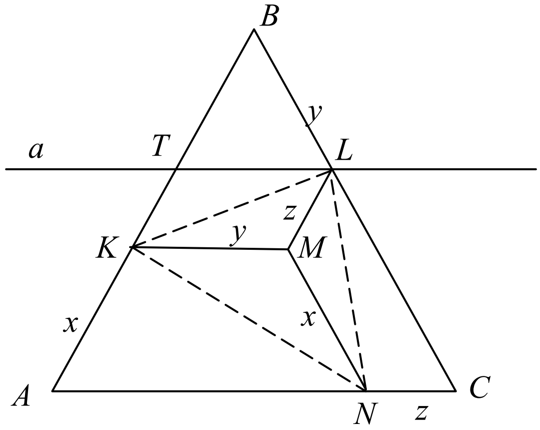
- $\angle GSE = \angle HSF$ kā krustleņķi;
- $\angle GES = \angle HFS$ pēc dotā,

tātad $\angle SGE = \angle SHF$, un esam pierādījuši uzdevumā prasīto.

A.AB.Ģ.5. Novelkam $MK \parallel AC$, $ML \parallel AB$ un $MN \parallel BC$ (skat. A55. zīm.).

$\angle A = \angle C$ kā regulāra ΔABC leņķi. $\angle ANM = \angle C$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm *MN* un *BC*. Tātad $\angle A = \angle C = \angle ANM \Rightarrow$ trapece *AKMN* – vienādsānu, jo leņķi pie pamata – vienādi.

Līdzīgi iegūstam, ka arī trapeces *BLMK* un *CNML* – vienādsānu.



A55. zīm.

Tātad ΔABC sadalās vienādsānu trapecēs. Tā kā visām trim vienādsānu trapecēm leņķi pie garākā pamata ir $60°$, tad pie īsākā pamata tie būs $180° - 60° = 120°$ jeb $\angle KMN = \angle LMK = \angle NML = 120°$.

Apzīmējam $MN = KA = x$, $MK = LB = y$ un $ML = NC = z$ un izmantojam kosinusu teorēmu:

$$KN^2 = y^2 + x^2 - 2yx \cdot \cos 120° = y^2 + x^2 - 2yx \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = y^2 + x^2 + yx.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $LK^2 = (y^2 + z^2 + zy)$ un $NL^2 = (x^2 + z^2 + xz)$.

Tā kā vienādsānu trapecei diagonāles ir vienādas, tad

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = KN^2 + LK^2 + NL^2 =$$
$$= (y^2 + x^2 + yx) + (y^2 + z^2 + yz) + (x^2 + z^2 + xz) =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + xz + yz =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3(xy + xz + yz) =$$
$$= 2(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + zx)$$

Tā kā nogriežņu garumi x, y, z – pozitīvi, tad $3(xy + xz + zx)$ ir pozitīvs lielums, tāpēc

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + zx) < 2(x + y + z)^2.$$

Caur punktu *L* novelkam taisni *a*, kas paralēla *MK* un tās krustpunktu ar *AB* apzīmējam ar *T* (skat. A55. zīm.). Tā kā $LT \parallel MK$ un $ML \parallel KT$ (jo $ML \parallel AB$), tad $KTLM$ – paralelograms $\Rightarrow$ $KT = ML = z$.

$\Delta TBL \sim \Delta ABC$ (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle BTL = \angle A$ un $\angle BLT = \angle C$ (kā kāpšļu leņķi) $\Rightarrow$ ΔTBL – regulārs. Tātad $TB = BL = y$.

Esam ieguvuši, ka $x + y + z = AK + TB + KT = AB$, kas arī pierāda prasīto:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 < 2(x + y + z)^2 = 2AB^2.$$

A.AB.S. Skaitļu teorija

A.AB.S.1. Ievērojam, ka $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0,$ jo nedrīkst dalīt ar nulli. Visi trīs saskaitāmie sastāv no vienu un to pašu nenulles skaitļu reizinājuma un dalījuma, tad tie visi trīs ir vienlaicīgi pozitīvi vai negatīvi. To summa ir 3, kas ir pozitīvs skaitlis, tātad tie visi ir pozitīvi.

Varam pieņemt, ka $|x| \geq |y| \geq |z|$. Izmantojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko ($A \geq G$) vienādojumā dotās summas pēdējiem diviem saskaitāmajiem: $3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \frac{xy}{z} + 2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} \geq |x| + 2|z|$.

Atrisinājums jāmeklē veselos skaitļos, tātad nevienādības $3 \geq |x| + 2|z|$ vienīgais atrisinājums būs $|x| = |z| = 1$. No pieņēmuma, ka $|x| \geq |y| \geq |z|$ secinām, ka arī $|y| = 1$.

Tā kā katram uzdevumā dotajam saskaitāmajam jābūt pozitīvam, tad vai nu visi trīs lielumi x, y, z ir pozitīvi vai tieši divi no tiem ir negatīvi. Tātad esam ieguvuši 4 atrisinājumus: $(1; 1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$.

A.AB.S.2. Apzīmējam $f(n) = n^2 + 5n + 23.$ Izsakām

$$f(n) = n^2 + 5n + 23 = n(n+5) + 23.$$

Ja $f(n)$ dalās ar pirmskaitli *p*, tad atlikumu, kas rodas skaitli $n(n+5)$ dalot ar *p* un skaitli 23 dalot ar *p*, summai ir jābūt vienādai ar 0 (ja 23 dalās ar šo pirmskaitli) vai *p*.

Izveidojam tabulu, kurā meklējam šādu *p*, apskatot visus pirmos pirmskaitļus un pirmās *n* vērtības.

Pirmajā tabulas kolonnā rakstām visas $n(n+5)$ vērtības.

Pirmajā tabulas rindā:

- rakstām pirmos pirmskaitļus;
- izrēķinām, kādu atlikumu iegūstam, izdalot skaitli 23 ar katru pirmskaitli;
- aprēķinām, kādu atlikumu nepieciešams iegūt, skaitli $n(n+5)$ izdalot ar katru no pirmskaitļiem.

Aizpildām pārējās tabulas rindas, rakstot atlikumu, ko iegūst attiecīgo $n(n+5)$ vērtību dalot ar attiecīgo pirmskaitli *p*:

$n(n+5)$	p=3 23:3=7;A2 3 – 2 = 1	p=5 23:5=4;A3 5 – 3 = 2	p=7 23:7=3;A2 7 – 2 = 5	p=11 23:11=2;A1 11 – 1 = 10	p=13 23:13=1;A10 13 – 10 = 3	p=17 23:17=1;A6 17 – 6 = 11	
0·5	0	0	0	0	0	0	
1·6	0	1	6	6	6	6	
2·7	2	4	0	3	1	14	
3·8	0	4	3	2	11	7	
4·9	0	1	1	3	10	2	
5·10	2	0	1	6	11	16	
6·11	0	1	3	0	1	15	
7·12	0	4	0	7	6	16	
8·13	2	4	6	5	0	2	
9·14	0	1	0	5	9	7	
10·15	0	0	3	7	7	14	
11·16	2	1	1	0	7	6	
12·17	0	4	1	6	9	0	
13·18	0	4	3	3	0	13	
14·19	2	1	0	2	6	11	
15·20	0	0	6	3	1	11	
16·21	0	1	0	6	11	13	
17·22	2	4	3	0	10	0	

Tabulā redzam, ka $f(n)$ nedalās ar pirmskaitļiem 3, 5, 7, 11 un 13, jo atlikumu summa nav vienāda ar vajadzīgo. $f(n)$ dalās ar 17, piemēram, pie vērtības $n = 14$, tātad mazākais pirmskaitlis, ar ko dalās kaut viens no $f(n)$ ir 17.

Piezīme. Skaitli $n(n+5)$ izdalot ar pirmskaitli p, iegūstam tādu pašu atlikumu kā, izdalot skaitli $(n+p)((n+p)+5)$ ar pirmskaitli p, jo

$$(n+p)((n+p)+5) = n^2 + np + 5n + pn + p^2 + 5p = n^2 + 5n + p(2n+p+5),$$

kur $p(2n+p+5)$ dalās ar p, tātad atlikumu dos $n^2 + 5n = n(n+5)$.

Tātad katram pirmskaitlim p varam apskatīt tikai tos atlikumus, ko iegūst, dalot $n(n+5)$ ar p, kad $n = 0, 1, ..., p-1$.

A.AB.S.3. Apskatām skaitļu virkni 2^1; 2^2; ...; 2^{n+1}. Dalot skaitli ar n, ir iespējami n atlikumi. Virknē atrodas $n+1$ skaitlis, tāpēc noteikti ir divi no tiem, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar n. Ja tie ir 2^i un 2^j, kur $i > j$, tad to starpība dalās ar n jeb $2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j} - 1) \vdots n$.

Tā kā n – nepāra, tad 2^j nedalās ar n, tāpēc $2^{i-j} - 1 \vdots n$; turklāt $1 \le i - j \le n$.

Skaitlis $n!$ dalās ar $(i-j)$, jo $(i-j) \in \{1; 2; ...; n\}$ un $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, tāpēc varam izteikt $n! = (i-j) \cdot k$, kur k – naturāls skaitlis. Tad

$$2^{n!} - 1 = 2^{(i-j)k} - 1 = (2^{i-j})^k - 1^k = (2^{i-j} - 1) \cdot \left((2^{i-j})^{k-1} + (2^{i-j})^{k-2} + ... + 2^{i-j} + 1\right),$$

no kā seko, ka $2^{n!} - 1$ dalās ar $2^{i-j} - 1$.

Tā kā jau iepriekš ieguvām, ka $2^{i-j} - 1$ dalās ar n, tad arī $2^{n!} - 1$ dalās ar n, kas arī bija jāpierāda.

A.AB.S.4. Ievērojam, ka piesātināti skaitļi ir tie skaitļi, kuriem katrs pirmreizinātājs ir vismaz otrajā pakāpē.

Viens *superpiesātināts* skaitlis ir 8, jo $8 = 2^3$ un $9 = 3^2$.

Ja n un $n+1$ abi ir *piesātināti*, tad *piesātināti* ir arī divi pēc kārtas sekojoši skaitļi:

- $4n(n+1)$, jo katrs no trim reizinātājiem 4, n un $n+1$ ir *piesātināts*, tātad arī reizinājums sastāvēs no pirmreizinātājiem otrajā vai augstākā pakāpē;
- $4n(n+1)+1 = (2n+1)^2$, jo skaitļa $2n+1$ pirmreizinātāji skaitlī $(2n+1)^2$ būs otrajā pakāpē, tātad katrs no pirmreizinātājiem būs vismaz otrajā pakāpē.

Tātad, ja n ir *superpiesātināts*, tad tāds ir arī $4n(n+1)$. Tā kā esam atraduši vienu *superpiesātinātu* skaitli $n = 8$, tad varam secināt, ka *superpiesātinātu* skaitļu ir bezgalīgi daudz.

A.AB.S.5. Apskatām summu: $1 + 2 + ... + 2009 = 2009 \cdot 1005$.

Tā kā skaitlis 1005 dalās ar 3, tad arī $1 + 2 + ... + 2009$ dalās ar 3. Varam secināt, ka atlikumu, kurus iegūst, skaitļus 1, 2, ..., 2009 dalot ar 3, summa dalās ar 3.

No īpašības: skaitli dalot ar 3, iegūst tādu pašu atlikumu, kādu iegūst, šī skaitļa ciparu summu dalot ar 3, iegūstam, ka arī skaitļu 1, 2, ..., 2009 ciparu summa dalās ar 3. Tādā gadījumā arī pats skaitlis x vienmēr dalīsies ar 3.

Skaitļa 2^y dalītāji ir tikai un vienīgi skaitļi, kas ir divnieka pakāpes. 3 nav divnieka pakāpe, tātad nevar gadīties, ka $x = 2^y$.

A.BW. MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE „BALTIJAS CEĻŠ 2009”

A.BW.A. Algebra

A.BW.A.1. Tā kā polinomam $p(x)$ ir tieši n reālas saknes un koeficients pie x^n ir 1, tad $f(x)$ var sadalīt reizinātājos:

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i),\ \text{kur } \alpha_i,\ i=1,2,...,n - \text{ polinoma saknes.}$$

Tā kā pēc dotā $\alpha_i \le 1$, tad $p(1)\ge 0$, jo visi reizinātāji ir nenegatīvi.

Pārveidojam izteiksmi 3^n:

$$3^n = p(2)=\prod_{i=1}^{n}(2-\alpha_i)=\prod_{i=1}^{n}(1+(1-\alpha_i))=(1+(1-\alpha_1))\cdot...\cdot(1+(1-\alpha_n)).$$

Apzīmējam $1-\alpha_i=b_i$ un iegūstam

$$(1+b_1)(1+b_2)\cdot...\cdot(1+b_n)\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\underbrace{1}_{1=C_n^0}+\underbrace{(b_1+b_2+...+b_n)}_{n=C_n^1}+\underbrace{(b_1b_2+b_1b_3+...+b_{n-1}b_n)}_{\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2}+...+\underbrace{b_1b_2...b_n}_{1=C_n^n}\overset{(2)}{\ge}$$

$$\overset{(2)}{\ge}C_n^0+C_n^1\cdot\sqrt[C_n^1]{b_1b_2...b_n}+C_n^2\cdot\sqrt[C_n^2]{b_1b_2\cdot b_1b_3\cdot...\cdot b_{n-1}b_n}+...+C_n^n\cdot b_1b_2...b_n\overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}C_n^0+C_n^1\cdot(b_1b_2...b_n)^{\frac{1}{C_n^1}}+C_n^2\cdot(b_1b_2b_3...b_n)^{\frac{n-1}{C_n^2}}+...+C_n^n\cdot b_1b_2...b_n\overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=}C_n^0+C_n^1\cdot(b_1b_2...b_n)^{\frac{1}{n}}+C_n^2\cdot(b_1b_2b_3...b_n)^{\frac{2}{n}}+...+C_n^n\cdot(b_1b_2...b_n)^{\frac{n}{n}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot(b_1b_2...b_n)^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\left((1-\alpha_1)(1-\alpha_2)...(1-\alpha_n)\right)^{\frac{k}{n}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_n)\right)^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p(1)^{\frac{k}{n}}\overset{(5)}{=}\left(1+p(1)^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Pārveidojumos izmantojām šādas sakarības:
(1) – atveram iekavas un sagrupējam saskaitāmos,
(2) – katrai iekavai izmantojam sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko $A\ge G$,

(3) – izmantojam pakāpju īpašību $\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$,

(4) – izmantojam formulu $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ un pārveidojam kāpinātājus,

(5) – izmantojam Ņūtona binoma formulu.

Tātad $3^n\ge\left(1+p(1)^{\frac{1}{n}}\right)^n$, $\quad 3\ge 1+p(1)^{\frac{1}{n}}$, $\quad p(1)^{\frac{1}{n}}\le 2$, $\quad p(1)\le 2^n$.

Pierādīsim, ka $p(1)$ var pieņemt visas vērtības no intervāla $[0;2^n]$. Pieņemsim, ka $\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_n=\alpha$.

Katram α tādam, ka $-1 \le \alpha \le 1$, vienādojumam $p(2) = (2-\alpha_1)(2-\alpha)^{n-1} = 3^n$ attiecībā pret nezināmo α_1 ir viens vienīgs atrisinājums.

Šis α_1 ir nepārtraukta mainīgā α funkcija.

Tā kā $2-\alpha \le 3$, tad $2-\alpha_1 \ge 3$ jeb $\alpha_1 \le -1 \le 1$.

Speciālgadījumā, ja $\alpha = -1$, tad $\alpha_1 = -1$.

Ja α nepārtraukti mainās no -1 līdz 1, tad izteiksmes $p(1) = (1-\alpha_1)(1-\alpha)^{n-1}$ vērtības nepārtraukti mainās no 2^n līdz 0. Tātad $p(1)$ var pieņemt jebkuru vērtību no intervāla $[0; 2^n]$, t. i., $0 \le p(1) \le 2^n$.

A.BW.A.2. Apskatīsim funkciju $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 20] \\ x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-20), & x \ge 20 \end{cases}$.

Tad katram nenegatīvam veselam skaitlim a izpildās $f(a) = a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-20)$ un doto nevienādību varam pārrakstīt formā $f(a_1) + \ldots + f(a_{100}) \le 100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 79$.

Pierādīsim, ka funkcija f ir izliekta.

Izmantosim šādu teorēmu: ja funkcijai f intervālā $(a; b)$ eksistē otrās kārtas atvasinājums un visos intervāla punktos $f''(x) > 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir izliekts.

Atvasinot funkciju f, izmantojot formulu $(ab)' = a'b + ab'$, iegūstam funkcijas f pirmās kārtas atvasinājumu f', kurš satur vairākus pozitīvus saskaitāmos, kuri satur tikai reizinātājus $x,\ x-1, x-2, \ldots x-20$. Ja $x > 20$, tad visi reizinātāju un arī to reizinājumi ir pozitīvi. Tātad $f' > 0$. Līdzīgi iegūstam, ka $f'' > 0$ un esam pierādījuši, ka funkcija f ir izliekta.

Tā kā funkcija f ir izliekta, tad varam lietot Jensena nevienādību:

$$f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100}\right) \le \frac{f(a_1) + \ldots + f(a_{100})}{100}.$$

Tātad doto nevienādību var pārveidot formā:

$$100\cdot f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100}\right) \le 100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 79.$$

Abas nevienādības puses izdalīsim ar 100 un ievērosim, ka nevienādības labā puse nepārsniedz $99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 79 = f(99)$. Tātad $f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100}\right) \le f(99)$. Tā kā $f(x)$ ir nedilstoša funkcija visiem $x \ge 0$, tad $\frac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100} \le 99 \Rightarrow a_1 + \ldots + a_{100} \le 9900$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.A.3. Apzīmēsim 4 pēc kārtas sekojošus skaitļus ar $n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$ un aprēķināsim izteiksmes vērtību:

$$(n+2)^2 - (n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - n^2 + n^2 - 2n + 1 = 4.$$

Tātad mēs vienmēr varam izvēlēties tādus indeksus $c_k = \{-1; 1\}$, ka 8 pēc kārtas ņemtu skaitļu kvadrātu summa ir 0. (Zīmes starp pirmajiem četriem saskaitāmajiem saliek tā, lai to summa būtu 4 un zīmes starp pēdējiem četriem saskaitāmajiem saliek tā, lai to summa arī būtu 4. No pirmajiem četriem saskaitāmajiem atņemot pēdējos četrus, iegūstam $4-4=0$.)

Vēl jāpārbauda, vai uzdevuma nosacījums izpildās, ja n nedalās ar 8 (sagrupējot skaitļu kvadrātus grupās pa 8, daži skaitļi paliek pāri):

- ja $n=1$, tad $1^2=1$;
- ja $n=2$, tad $2^2-1^2=3$;
- ja $n=3$, tad $3^2-2^2-1^2=4$;
- ja $n=4$, tad $4^2-3^2-2^2-1^2=2$;
- ja $n=5$, tad $5^2-4^2-3^2+2^2-1^2=3$;
- ja $n=6$, tad $6^2-5^2-4^2+3^2-2^2+1^2=1$;
- ja $n=7$, tad $7^2-6^2-5^2+4^2-3^2+2^2+1^2=0$.

Tā kā pēdējos $8m$ (m – vesels, pozitīvs skaitlis) saskaitāmos var sagrupēt tā, ka to summa ir 0, bet pirmo r ($r=1, 2, ..., 7$) saskaitāmo kvadrātu summa ir robežās no 0 līdz 4, tad $0 \le \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \le 4$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.A.4. Pieņemam, ka $x_1=x_2=...=x_{n-1}=1$ un $x_n=2$. Ievietojot šos skaitļus dotajā nevienādībā, iegūstam

$$\underbrace{1^2+1^2+...+1^2}_{n-1}+2^2 \ge (\underbrace{1+1+...+1}_{n-1})\cdot 2$$
$$n-1+4 \ge (n-1)\cdot 2$$
$$n+3 \ge 2n-2$$
$$n \le 5.$$

Tātad visām reālām $x_1, x_2, ..., x_n$ vērtībām dotā nevienādība nevar izpildīties, ja $n>5$.

Apskatām gadījumu, kad $n \le 5$, un pārrakstām doto nevienādību formā

$$x_n^2-(x_1+x_2+...+x_{n-1})x_n+(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2) \ge 0. \qquad (*)$$

Izteiksmei $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2$ lietosim Košī nevienādību:

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \ge (x_1^2+\ \ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2).$$

Šajā piemērā $y_1=y_2=...=y_{n-1}=1$ un katrā iekavā ir $n-1$ saskaitāmais. Tātad $(x_1+\ldots+x_{n-1})^2 \ge x_1^2+\ \ldots+x_{n-1}^2$.

Tā kā $n \le 5$, tad $n-1 \le 4$.

$4(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2) \ge (n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2) \ge (x_1+x_2+...+x_{n-1})^2$ jeb

$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2 \ge \frac{1}{4}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2$.

Izmantosim iegūto novērtējumu un pārveidosim nevienādību (*):

$$x_n^2-(x_1+x_2+...+x_{n-1})\,x_n+(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2) \ge$$
$$\ge x_n^2-(x_1+x_2+...+x_{n-1})x_n+\frac{1}{4}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2 =$$
$$=\left(x_n-\frac{1}{2}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})\right)^2 \ge 0.$$

Tā kā izteiksmes kvadrāts vienmēr ir lielāks vai vienāds ar 0, tad dotā nevienādība izpildās visiem $n \le 5$, tas ir $n=2, 3, 4, 5$.

A.BW.A.5. Vispirms pierādīsim: ja kāds x apmierina vienādojumu $x^2 = x+1$, tad visiem $n \geq 2$ šis x apmierina arī vienādojumu $x^n = f_{n-1}x + f_{n-2}$.

Lai pierādītu šo apgalvojumu, izmantosim matemātisko indukciju.

Ja $n = 2$, tad $x^2 = x+1 = f_1 x + f_0$.

Ja $n = 3$, tad $x^3 = x \cdot x^2 = x(x+1) = x^2 + x = (x+1) + x = 2x+1$. Tā kā $f_2 = f_1 + f_0 = 1+1 = 2$, tad $x^3 = f_2 x + f_1$.

Ja $n \geq 4$, tad iegūsim $x^n = x^{n-2} \cdot x^2 = x^{n-2}(x+1) = x^{n-1} + x^{n-2}$.

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, varam rakstīt

$$x^n = (f_{n-2}x + f_{n-3}) + (f_{n-3}x + f_{n-4}) = (f_{n-2} + f_{n-3}) \cdot x + (f_{n-3} + f_{n-4}) = f_{n-1}x + f_{n-2}.$$

Tātad esam pierādījuši, ka vienādojuma $x^2 = x+1$ saknes $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ apmierina arī vienādojumu $x^{2010} = f_{2009}x + f_{2008}$.

Vēl jāpierāda, ka vienādojumam $x^{2010} = f_{2009}x + f_{2008}$ nav citu sakņu. Tā kā funkcijas $y = x^{2010}$ grafiks ir parabola un funkcijas $y = f_{2009}x + f_{2008}$ grafiks ir taisne, tad tiem nevar būt vairāk par 2 krustpunktiem, līdz ar to vienādojumam $x^{2010} = f_{2009}x + f_{2008}$ nav vairāk par 2 saknēm.

Tātad dotā vienādojuma saknes ir $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ un $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A.BW.S. Skaitļu teorija

A.BW.S.1. Ja skaitlis b dalās ar pirmskaitļiem r_1, r_2, ..., r_t pāra pakāpēs, tad skaitli b var uzrakstīt formā $b = (r_1^{c_1} \cdot r_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot r_s^{c_s})^2 = 1 \cdot k^2$. Šajā gadījumā $d = 1$ un jebkurš skaitlis (arī a) dalās ar 1.

Ja b dalās ar pirmskaitļiem p_1, p_2, ..., p_s nepāra pakāpēs, tad skaitli b var uzrakstīt formā $b = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot (p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s})^2 = dk^2$. Tātad pietiek pierādīt šādu apgalvojumu katram pirmskaitlim p: ja skaitlis b dalās ar p^{2m-1}, bet nedalās ar p^{2m} (m – vesels, pozitīvs skaitlis), tad a dalās ar p.

Ar u, v, w apzīmēsim dotā vienādojuma saknes. Pēc vispārīgās Vjeta teorēmas iegūstam:

$$\begin{cases} u+v+w = a \\ uv+uw+vw = 0 \\ uvw = b \end{cases}.$$

Pieņemsim, ka b dalās ar pirmskaitli p. Tad no trešās vienādības seko, ka reizinājums uvw arī dalās ar šo pirmskaitli p. Tātad kāds no reizinātājiem u, v, w dalās ar p. Pieņemsim, ka u dalās ar p.

No otrās vienādības seko $vw = -u(v+w)$. Tātad v vai w dalās ar p. Pieņemsim, ka v dalās ar p.

Ja w nedalās ar p, tad u un v dalās ar vienu un to pašu p pakāpi un tātad, ja b dalās ar p^{2m-1} kādam pozitīvam veselam skaitlim m, tad b ir jādalās arī ar p^{2m}, kas ir pretrunā ar sākotnējo pieņēmumu par p.

Tātad w dalās ar p un arī $a = u + v + w$ dalās ar p, jo katrs saskaitāmais dalās ar p. Tā kā katram pirmskaitlim p skaitlis a dalās ar p, tad skaitlis d dalīsies ar a un līdz ar to skaitli b vienmēr var izteikt formā $b = dk^2$, kur d un k ir veseli skaitļi un a dalās ar p, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.S.2. Lai izpildītos nosacījums $6 \mid p+1$, tad $p \ge 5$.

Tā kā $p+1$ dalās ar 6, tad $p+1 = 6n$ jeb $p = 6n-1$, kur $n \ge 1$.
Ievērojam, ka
$p \mid a^4 + b^4 + (-a-b)^4 = a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$
$= 2 \cdot (a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = 2 \cdot (a^2 + ab + b^2)^2$.
Tā kā $p \ne 2$, tad $p \mid a^2 + ab + b^2 \Rightarrow p \mid (a^2 + ab + b^2) \cdot (a-b) = a^3 - b^3$.
Tātad $a^3 \equiv b^3 \pmod p$.
Izmantojam Fermā mazo teorēmu: ja p ir pirmskaitlis, tad $a^p \equiv a \pmod p$ jeb $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$:
$$b \equiv b^p \equiv b^p b^{p-1} = b^{6n-1} \cdot b^{6n-2} = b^{3\cdot(4n-1)} = \left(b^{4n-1}\right)^3 \equiv \left(a^{4n-1}\right)^3 = a^p a^{p-1} \equiv a \pmod p.$$
Tātad $a \equiv b \pmod p$.
Līdzīgi iegūstam, ka $a \equiv c \pmod p$.
Tāpēc $0 \equiv a + b + c \equiv 3a \equiv 3b \equiv 3c \pmod p$.
Tā kā $p \ne 3$, tad $p \mid a, b, c$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.S.3. Pierādīsim, ka uzdevumā prasītais n neeksistē.

Acīmredzami, ka skaitļu n, $n+1$, ..., $n+8$ visi pirmreizinātāji $p \le 7$. Pretējā gadījumā tikai viens no dotās kopas skaitļiem un tikai viens no reizinājumiem dalīsies ar šo pirmreizinātāju, tātad abi reizinājumi noteikti nebūs vienādi.
Starp 9 pēc kārtas sekojošiem skaitļiem ir tieši 5 nepāra skaitļi, ja n ir nepāra skaitlis, vai tieši 4 nepāra skaitļi, ja n ir pāra skaitlis. Tātad dotajā kopā vienmēr ir 4 nepāra skaitļi, kas ir lielāki par 1. Šie 4 nepāra skaitļi var saturēt tikai pirmreizinātājus 3, 5 un 7.
Divi nepāra skaitļi, kas dalās ar 5 vai 7, atšķiras attiecīgi vismaz par $2 \cdot 5 = 10$ vai $2 \cdot 7 = 14$. Tāpēc tieši viens no 4 nepāra skaitļiem dalās ar 5 un tieši viens ar 7. Tātad atlikušie 2 nepāra skaitļi satur tikai pirmreizinātāju 3. Šie skaitļi varētu būt skaitļa 3 pakāpes, piemēram, 3, 9, 27, ... Starp 9 secīgiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 9, tātad otram nepāra skaitlim ir jābūt 3. Esam ieguvuši, ka skaitlis 3 pieder kopai $\{n, n+1, n+2, ..., n+8\}$.
Tad šī kopa ir $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, $\{2, 3, 4, ..., 10\}$ vai $\{3, 4, 5, ..., 11\}$. Tā kā katrā kopā ir tieši viens skaitlis, kas dalās ar 7, tad kopas elementus nevar sadalīt divās apakškopās tā, lai to elementu reizinājumi būtu vienādi.

A.BW.S.4. Ja n ir pāra skaitlis, tad $2^{n+1}-n^2$ dalās ar 4, tātad tas nav pirmskaitlis. Ja n ir nepāra skaitlis, tad to var pierakstīt kā $n=2m-1,$ kur m ir pozitīvs, vesels skaitlis. Ievietojam to dotajā izteiksmē:

$$2^{n+1}-n^2=2^{2m-1+1}-(2m-1)^2=2^{2m}-(2m-1)^2=(2^m)^2-(2m-1)^2\overset{(*)}{=}$$
$$=\left(2^m+(2m-1)\right)\cdot\left(2^m-(2m-1)\right). \qquad (**)$$

Solī (*) izmantojām formulu $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Izmantojam Bernulli nevienādību: visiem naturāliem skaitļiem k un visiem $x\geq -1$ izpildās nevienādība $(1+x)^k\geq 1+kx$.

Ja $x=1$ un $k=m-1$, tad $2^{m-1}\geq 1+(m-1)$ jeb $2^{m-1}\geq m.$

Ievērojam: ja $m\geq 3,$ tad ir spēkā stingrā nevienādība $2^{m-1}>m.$ Pārveidojam iegūto nevienādību:

$$\frac{2^m}{2}>m,\quad 2^m>2m,\quad 2^m+1>2m+1,\quad 2^m-2m+1>1,\quad 2^m-(2m-1)>1.$$

Esam ieguvuši, ka izteiksmes (**) viens no reizinātājiem ir lielāks kā 1. Tātad, ja $m\geq 3$ jeb $n\geq 5$ (n – nepāra skaitlis), tad $2^{n+1}-n^2$ nav pirmskaitlis, jo dalās ar skaitli $2^m-(2m-1)>1$.

Vēl jāpārbauda $n=1$ un $n=3$. Ja $n=1,$ tad $2^2-1=3$ – pirmskaitlis. Ja $n=3,$ tad $2^4-3^2=16-9=7$ – pirmskaitlis.

Esam ieguvuši, ka $2^{n+1}-n^2$ ir pirmskaitlis tad un tikai tad, ja $n=1$ vai $n=3$.

A.BW.S.5. Pieņemsim, ka k ir patvaļīgs nepāra skaitlis tāds, ka $\left(\dfrac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2=k^2$.

Velkot no abām vienādības pusēm kvadrātsaknes, iegūsim $\dfrac{2\sqrt{n}}{d(n)}=k.$

Izsakot izteiksmi $\sqrt{n}$, iegūsim $\sqrt{n}=\dfrac{k\cdot d(n)}{2}.$ (*)

Tā kā vienādības labā puse ir racionāls skaitlis, tad arī $\sqrt{n}$ ir jābūt racionālam skaitlim. Tātad n ir kāda skaitļa kvadrāts $\Rightarrow$ $n=s^2,$ kur $s>0.$

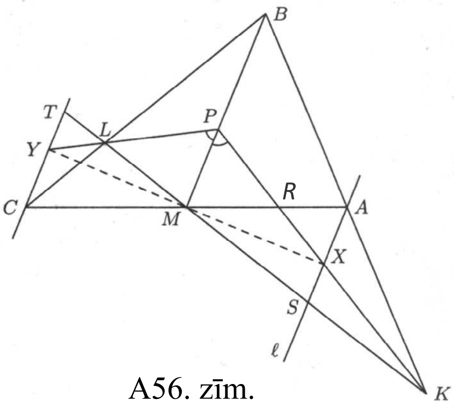
Ievietojot apzīmējumu vienādībā (*) un pareizinot vienādības abas puses ar 2, iegūsim $2s=k\cdot d(s^2)$.

Reizinātājs $d(s^2)$ ir nepāra skaitlis, jo visus pozitīvos skaitļa s^2 dalītājus, izņemot pašu s, var sagrupēt pāros $\left(a,\dfrac{s^2}{a}\right)$.

Tā kā k ir nepāra skaitlis pēc pieņēmuma un $d(s^2)$ – nepāra skaitlis, tad vienādības $2s=k\cdot d(s^2)$ labā puse ir nepāra skaitlis, bet kreisā puse ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad nepāra skaitļu kvadrātus nevar izteikt prasītajā formā. Tā kā nepāra skaitļu ir bezgalīgi daudz un to kvadrāti ir dažādi, tad eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu $M=k^2$, kurus nevar izteikt formā $M=\left(\dfrac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$.

A.BW.Ģ. Ģeometrija

A.BW.Ģ.1. Ar X un S apzīmēsim taisnes ℓ krustpunktus attiecīgi ar PK un MK. Novilksim taisni caur punktu C, kas ir paralēla BM. Ar Y un T apzīmēsim šīs taisnes krustpunktus attiecīgi ar PL un ML (skat. A56. zīm.).



A56. zīm.

$\Delta AMS = \Delta CMT$ (pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo $\angle SMA = \angle TMC$ kā krustleņķi, $AM = CM$, jo M ir AC viduspunkts, un $\angle SAM = \angle TCM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AS un CT, kuras krusto taisne AC) un tie ir simetriski attiecībā pret punktu M.

$\Delta CYL \sim \Delta BPL$ un $\Delta TYL \sim \Delta MPL$ pēc pazīmes $\ell\ell$ (vienādi atbilstošie krustleņķi un iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm CT un BM).

Uzrakstām atbilstošo malu attiecības: $\dfrac{YC}{BP} = \dfrac{YL}{LP}$ un $\dfrac{YT}{PM} = \dfrac{YL}{LP}$. Apvienojot abas vienādības, iegūstam $\dfrac{YC}{BP} = \dfrac{YT}{PM}$ jeb $\dfrac{YC}{YT} = \dfrac{BP}{PM}$. (*)

$\Delta XKA \sim \Delta PKB$ un $\Delta SKX \sim \Delta MKP$ pēc pazīmes $\ell\ell$ (vienādi atbilstošie kāpšļleņķi pie paralēlām taisnēm AS un BM).

Uzrakstām atbilstošo malu attiecības: $\dfrac{AX}{BP} = \dfrac{KX}{KP}$ un $\dfrac{XS}{PM} = \dfrac{KX}{KP}$. Apvienojot abas vienādības, iegūstam $\dfrac{AX}{BP} = \dfrac{XS}{PM}$ jeb $\dfrac{AX}{XS} = \dfrac{BP}{PM}$. (**)

No (*) un (**) punkta seko, ka $\dfrac{YC}{YT} = \dfrac{BP}{PM} = \dfrac{AX}{XS}$ jeb punkti X un Y atlikti vienādā attiecībā uz ΔAMS un ΔCMT atbilstošajām malām AS un CT. Tā kā ΔAMS un ΔCMT ir simetriski pret punktu M, tad arī atbilstošie punkti ir simetriski, t. i., $YM = MX$. Tātad PM ir ΔPXY mediāna. Bet PM ir arī šī trijstūra bisektrise (pēc dotā), tātad PM ir arī trijstūra augstums un $MX \perp BM$. Tā kā $BM \parallel \ell$, tad $MX \perp \ell$. Tātad punkts X ir punkta M projekcija uz taisnes ℓ.

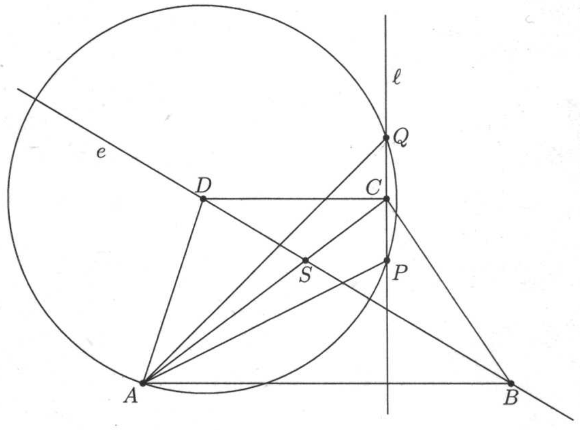
A.BW.Ģ.2. Ar S apzīmēsim četrstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu (skat. A57. zīm.).

Nogrieznis AC ir ΔAPQ mediāna, jo $QC = CP$ (rādiuss, kas perpendikulārs hordai, dala to uz pusēm).

Trijstūri DSC un BSA ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\angle DSC = \angle BSA$ kā krustleņķi un $\angle SDC = \angle SBA$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlēm taisnēm CD un AB, kuras krusto taisne BD.

Tātad $\frac{SD}{BS}=\frac{SC}{AS}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow AS=2SC$ un $BS=2DS$.

Punkts S sadala mediānu AC attiecībā $2:1$, tātad S ir ΔAPQ mediānu krustpunkts.

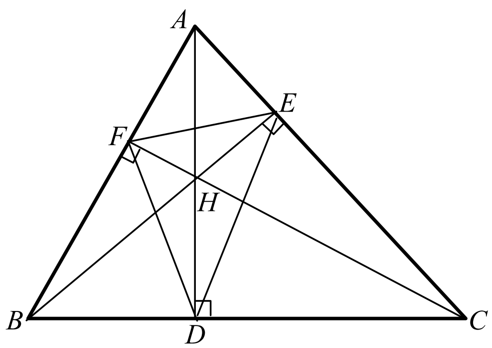


A57. zīm.

Punkts D ir ΔAPQ apvilktās riņķa līnijas centrs un $S - \Delta APQ$ mediānu krustpunkts, tātad taisne $e=DS$ ir ΔAPQ Eilera taisne (skat. I.BW.Ģ.2).

No $BS=2DS$ seko, ka $DS=\frac{1}{3}BD.$ Tā kā $B\in e$ un $DS=\frac{1}{3}DB,$ tad pēc Eilera taisnes īpašības B ir ΔAPQ (augstumu krustpunkts), tātad $AP\perp BQ$, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.Ģ.3. Apzīmēsim $\angle BAC=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle ACB=\gamma$.



A58. zīm.

Punkti A, E, H, F atrodas uz vienas riņķa līnijas, jo $\angle HFA+\angle HEA=90°+90°=180°$ (ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$) (skat. A58. zīm.).

Apskatām ΔBDA: $\angle BAD=180°-\angle ADB-\angle ABC=90°-\beta$,

ΔCDA: $\angle CAD=180°-\angle ADC-\angle ACB=90°-\gamma$,

ΔHEA: $\angle AHE=180°-\angle HEA-\angle EAH=180°-90°-(90°-\gamma)=\gamma$,

ΔHFA: $\angle FHA=180°-\angle HFA-\angle FAM=180°-90°-(90°-\beta)=\beta$.

Tā kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku, ir vienādi, tad

$\angle HEF=\angle HAF=90°-\beta$ (balstās uz loka HF),

$\angle HFE=\angle HAE=90°-\gamma$ (balstās uz loka HE),

$\angle AEF=\angle AHF=\beta$ (balstās uz loka AF),

$\angle AFE=\angle AHE=\gamma$ (balstās uz loka AE).

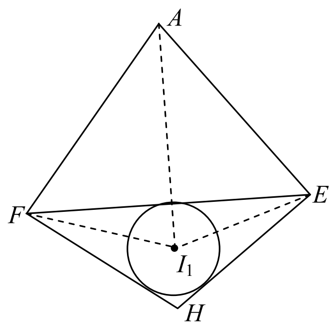
Tā kā taisnes AI_1, EI_1 un FI_1 krustojas vienā punktā I_1, tad ΔAEF (skat. A59. zīm.) izmantosim Čevas teorēmu trigonometriskajā formā (skat. I.BW.Ģ.3.) un faktu, ka ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā (bisektrise dala leņķi divās vienādās daļās):

$$\frac{\sin\angle CAI_1}{\sin\angle BAI_1}\cdot\frac{\sin\angle AFI_1}{\sin\angle EFI_1}\cdot\frac{\sin\angle FEI_1}{\sin\angle AEI_1}=1.$$

$\angle EAI_1=\angle CAI_1$ un $\angle FAI_1=\angle BAI_1$, tātad

$$\frac{\sin\angle EAI_1}{\sin\angle FAI_1}\cdot\frac{\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}(90°-\gamma)\right)}{\sin\frac{1}{2}(90°-\gamma)}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(90°-\beta)}{\sin\left(\beta+\frac{1}{2}(90°-\beta)\right)}=1$$

$$\frac{\sin\angle EAI_1}{\sin\angle FAI_1}\cdot\frac{\sin\left(45°+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(45°-\frac{\gamma}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(45°+\frac{\beta}{2}\right)}=1.$$



A59. zīm.

Uzrakstām līdzīgas attiecības

ΔBDF:
$$\frac{\sin\angle ABI_2}{\sin\angle CBI_2}\cdot\frac{\sin\angle BDI_2}{\sin\angle FDI_2}\cdot\frac{\sin\angle DFI_2}{\sin\angle BFI_2}=1$$

$$\frac{\sin\angle ABI_2}{\sin\angle CBI_2}\cdot\frac{\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(45°-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(45°+\frac{\gamma}{2}\right)}=1$$

ΔCDE:
$$\frac{\sin\angle BCI_3}{\sin\angle ACI_3}\cdot\frac{\sin\angle CEI_3}{\sin\angle DEI_3}\cdot\frac{\sin\angle EDI_3}{\sin\angle CDI_3}=1$$

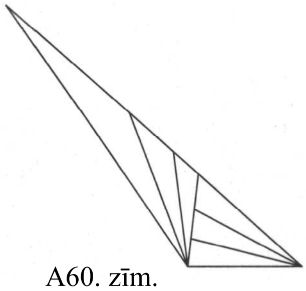
$$\frac{\sin\angle BCI_3}{\sin\angle ACI_3}\cdot\frac{\sin\left(45°+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}=1.$$

Sareizinot visas trīs iegūtās vienādības, iegūstam:

$$\frac{\sin\angle CAI_1}{\sin\angle BAI_1}\cdot\frac{\sin\angle ABI_2}{\sin\angle CBI_2}\cdot\frac{\sin\angle BCI_3}{\sin\angle ACI_3}=1.$$

No Čevas teorēmas secinām, ka taisnes AI_1, BI_2 un CI_3 krustojas vienā punktā, kas arī bija jāpierāda.

A.BW.Ģ.4. Pierādīsim, ka visiem $n \geq 2$ var atrast n trijstūrus $A_1, A_2, ..., A_n$, kam izpildās uzdevuma nosacījumi. Varam konstruēt šādus trijstūrus A_i, kuru leņķi ir α, $i\alpha$, $(2n-i)\alpha$, kur $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$. Visi šie trijstūri ir tādi, ka to starpā nav divu līdzīgu, jo trijstūru lielākie leņķi ir atšķirīgi. Trijstūrus A_i un A_{i+1} var savienot un izveidot vienu lielāku trijstūri, jo trijstūra A_i lielākā leņķa un trijstūra A_{i+1} otra lielākā leņķa summa ir π jeb $180°$. A60. zīm. parādīts, kā trijstūri A_i var sadalīt n trijstūros, kas ir attiecīgi līdzīgi trijstūriem $A_1, A_2, ..., A_n$.



A60. zīm.

Vēl jāparāda, kā izveidot trijstūrus $A_1, A_2, ..., A_n$.

Apskatām regulāru $(2n+1)$-stūri, kura virsotnes apzīmējam ar burtiem $X_1, X_2, ..., X_{2n+1}$. Fiksējam vienu daudzstūra malu, piemēram, $X_{2n}X_{2n+1}$ (šī mala būs kopīga visiem trijstūriem $A_1, A_2, ..., A_n$). Par trijstūru $A_i, i = 1, 2, ..., n$ trešo virsotni izvēlamies attiecīgi daudzstūra virsotni $X_i, i = 1, 2, ..., n$. Tātad esam ieguvuši trijstūrus $A_1, A_2, ..., A_n$. Pārbaudām, vai šie trijstūri apmierina uzdevuma prasības, tas ir, vai tie ir tādi, ka to starpā nav divu līdzīgu trijstūru. Visiem šiem trijstūriem A_i leņķa $X_{2n+1}X_iX_{2n}$ lielums ir $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{2n+1} = \dfrac{\pi}{2n+1} = \alpha$ (kā ievilktais leņķis, kas balstās uz loka $X_{2n}X_{2n+1}$) un leņķa $X_{2n+1}X_nX_i$ lielums ir $i \cdot \dfrac{\pi}{2n+1} = i\alpha$ (kā ievilktais leņķis, kas balstās uz loka $X_{2n+1}X_i$). Attiecīgi trešais leņķis trijstūros A_i ir $(2n-i)\alpha$. Jau iepriekš pierādījām, ka trijstūri, kuru leņķi ir α, $i\alpha$, $(2n-i)\alpha$, kur $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$, ir tādi, ka to starpā nav divu līdzīgu trijstūru.

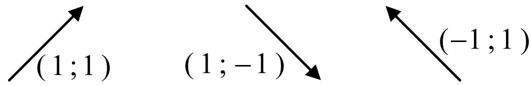
A60. zīm. parādīts gadījums, ja $n = 4$.

A61. zīm.

A.BW.Ģ.5. Skat. uzdevumu S.11.5.

A.BW.K. Kombinatorika

A.BW.K.1. Pieņemsim, ka lauztā līnija satur a posmus formā $(1;1)$, b posmus formā $(-1;1)$ un c posmus formā $(1;-1)$ (skat. A.62. zīm.).



A62. zīm.

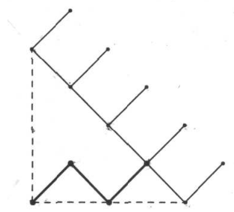
Tā kā lauztajai līnijai jābeidzas punktā $(0;2n)$, tad vertikālā pārbīde ir 0 un horizontālā pārbīde ir $2n$. Tātad $a+b-c=0$ un $a-b+c=2n$.

Saskaitot abas vienādības, iegūstam $2a=2n$ jeb $a=n$.

Pieņemam, ka punkti $(x_1;y_1),...,(x_n;y_n)$ ir posmu formā (1;1) galapunkti, kas uzskaitīti ejot pa lauzto līniju.

Punkts $(x_i;y_i)$ atrodas uz taisnes $x+y=2i$.

Tā kā vektori (1; –1) un (–1;1) atrodas uz šīs taisnes, tad ir $2i+1$ iespēja, kur var atrasties punkts $(x_{i+1};y_{i+1})$ (skat. A63. zīm.).



A63. zīm.

Tātad $y_1\in\{1\}$, $y_2\in\{1;2;3\}$, ..., $y_n\in\{1;2;3;...,2n-1\}$.

Katrai y_i vērtībai var konstruēt vienu vienīgu lauztu līniju, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Koordinātai y_1 var piekārtot 3 dažādas y_2 vērtības, katrai y_2 vērtībai var piekārtot 5 dažādas y_3 vērtības, utt.

Tātad kopējais prasīto lauzto līniju jeb *n-tronder* ceļu skaits ir $1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$.

A.BW.K.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka var atrast 8 skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Izvēlamies tādus dažādus skaitļus a, ka $a\equiv\pm1\pmod 7$, $a\equiv\pm1\pmod{11}$, $a\equiv\pm1\pmod{13}$. Ir tieši 8 šādi skaitļi intervālā no 1 līdz 1001. Šie skaitļi ir 1, 155, 274, 428, 573, 727, 846, 1000. Pārliecināsimies, ka šie 8 skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus. Tabulā redzami atlikumi, ko dod šie 8 skaitļi, dalot tos ar 7, 11 un 13.

	Atlikums, dalot ar 7	Atlikums, dalot ar 11	Atlikums, dalot ar 13
1	+1	+1	+1
155	+1	+1	–1
274	+1	–1	+1
428	+1	–1	–1
573	–1	+1	+1
727	–1	+1	–1
846	–1	–1	+1
1000	–1	–1	–1

Viegli pārbaudīt (piemēram, apskatām skaitļus 155 un 274; to atlikumi, dalot tos ar 11, ir attiecīgi +1 un –1, tātad skaitļu summa dalās ar 11, jo atlikums ir $+1-1=0$), ka katru divu skaitļu summa dalās ar 7, 11 vai 13, tātad izpildās uzdevuma nosacījumi.

Otrkārt, pierādām, ka nevar izvēlēties vairāk nekā 8 skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Pierādījumā izmantosim grafus. Uzzīmēsim grafu, kura virsotnes ir meklētie skaitļi. Starp divām virsotnēm novilksim sarkanu šķautni, ja attiecīgo skaitļu summa dalās ar 7, zaļu šķautni – ja dalās ar 11, zilu šķautni – ja dalās ar 13. Ievērosim, ka sarkanais grafs ir divdaļīgs grafs. Pretējā gadījumā tas saturētu nepāra ciklu un visiem skaitļiem, kas ir šajā ciklā, būtu jādalās ar 7. Arī zaļais un zilais grafs ir divdaļīgi.

Tā kā $n>8$, tad ir vismaz 5 virsotnes, kas savā starpā nav savienotas ar sarkanām šķautnēm. Tātad šīm virsotnēm ir jābūt savienotām ar zaļas vai zilas krāsas šķautnēm. Tā kā arī zaļais grafs ir divdaļīgs, tad vismaz 3 virsotnes nebūs savienotas ar zaļas krāsas šķautnēm. Tātad šīm visām virsotnēm ir jābūt savienotām ar zilām šķautnēm. Iegūta pretruna, jo zilais grafs arī ir divdaļīgs. Tātad, ja $n>8$, var atrast divas virsotnes, kas savā starpā nav savienotas ne ar sarkanu, ne zaļu, ne zilu šķautni. Tātad esam pierādījuši, ka ir divi skaitļi, kuru summa nedalās ne ar 7, ne 11, ne 13. Līdz ar to n vērtība nevar būt lielāka kā 8.

Esam pierādījuši, ka lielākā naturālā n vērtība ar uzdevumā minēto īpašību ir 8.

<u>Piezīme.</u> Divdaļīgs grafs ir tāds grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

A.BW.K.3. Ja $m=1$, tad visām pilsētām kodi ir vienādi un tie ir $n-1$, jo no katras pilsētas iziet ceļš uz katru citu no $n-1$ pilsētām.

Apskatīsim gadījumu, kad $m=2$.

Pilsētu iespējamie kodi ir $n-1, n, n+1, ..., 2n-2$ (mazākais iespējamais kods ir $1+1+...+1=n-1$ un lielākais kods ir $2+2+...+2=2\cdot(n-1)=2n-2$).

Tā kā dažādo summu no $n-1$ līdz $2n-2$ skaits ir tieši n, tad katra summa ir kādas pilsētas kods. Tātad ir pilsēta, kuras katra ceļa numurs ir 1, un ir pilsēta, kurai katra ceļa numurs ir 2. Iegūta pretruna, jo pēc dotā starp katrām 2 pilsētām ir uzbūvēts ceļš un tas nevar būt vienlaicīgi apzīmēts ar 1 un 2.

Apskatīsim gadījumu, kad $m=3$.

Pierādīsim, ka ceļiem var piekārtot skaitļus 1, 2, 3 tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi, t. i., lai visām n pilsētām būtu dažādi kodi.

Iespējami 2 gadījumi:

- Pieņemsim, ka ir pāra skaits pilsētu $\Rightarrow$ $n=2k$.

  Pakāpeniski sāksim numurēt ceļus. Visiem ceļiem, kas iziet no pirmās pilsētas, piešķirsim numuru 1. To pašu darīsim arī 2. pilsētai, tikai ceļam, kas savieno to ar ($2k-1$)-o pilsētu, piešķirsim numuru 2. Trešajai pilsētai darām to pašu, tikai ceļiem, kas savieno 3. pilsētu ar pilsētām $2k-1$ un $2k-2$, piešķirsim numuru 2. Tā turpināsim līdz k-tajai pilsētai (ieskaitot).

  Ir izveidojusies šāda situācija:

  - Visiem ceļiem, kas iziet no pilsētām 1, 2, ..., k, ir piešķirti numuri, tātad pilsētu kodi ir attiecīgi $2k-1, 2k, 2k+1, ..., 3k-2$.
  - Pilsētu $2k, k+1, k+2, ..., 2k-2, 2k-1$ kodi pašlaik jau ir attiecīgi $k, k+1, k+2, ..., 2k-2, 2k-1$.

  Visiem pārējiem ceļiem, kas pa pāriem savieno pilsētas $2k, k+1, k+2, ..., 2k-1$ piešķirsim numuru 3 (šādu ceļu skaits no katras pilsētas ir $k-1$). Tātad katram šo pilsētu pašreiz iegūtajam kodam ir jāpieskaita vēl skaitlis $(k-1)\cdot 3 = 3k-3$. Esam ieguvuši, ka pilsētu $2k, k+1, k+2, ..., 2k-1$ kodi ir attiecīgi $4k-3, 4k-2, 4k-1, ..., 5k-4$. Vēl jāpārbauda, vai visi pilsētu kodi ir dažādi. Gan pirmajām k pilsētām, gan pēdējām k pilsētām kodi ir augošā secībā. Lai visi pilsētu kodi būtu dažādi, tad jābūt $3k-2 < 4k-3$ jeb $k > 1$. Tātad pēc šī algoritma var piešķirt ceļiem numurus tā, lai visi pilsētu kodi ir dažādi, ja pilsētu skaits $n = 4, 6, 8, ...$.

- Līdzīgi ceļus numurē, ja n ir nepāra skaitlis, t. i., $n = 2k+1$.
  Visiem ceļiem, kas iziet no pirmās pilsētas, piešķirsim numuru 1. To pašu darīsim arī 2. pilsētai, tikai ceļam, kas savieno to ar ($2k+1$)-o pilsētu, piešķirsim numuru 2. Trešajai pilsētai darām to pašu, tikai ceļiem, kas savieno 3. pilsētu ar pilsētām $2k+1$ un $2k$, piešķirsim numuru 2. Tā turpināsim līdz ($k+1$)-majai pilsētai (ieskaitot).
  Ir izveidojusies šāda situācija:
  - Visiem ceļiem, kas iziet no pilsētām 1, 2, ..., k, $k+1$ ir piešķirti numuri, tātad pilsētu kodi ir attiecīgi $2k, 2k+1, 2k+2, ..., 3k$.
  - Pilsētu $k+2, k+3, ..., 2k, 2k+1$ kodi pašlaik jau ir attiecīgi $k+2, k+3, ..., 2k, 2k+1$.

  Visiem pārējiem ceļiem, kas pa pāriem savieno pilsētas $k+2, k+3, ..., 2k+1$ piešķirsim numuru 3 (šādu ceļu skaits no katras pilsētas ir $k-1$). Tātad katram šo pilsētu pašreiz iegūtajam kodam ir jāpieskaita vēl skaitlis $(k-1)\cdot 3 = 3k-3$. Esam ieguvuši, ka pilsētu $k+2, k+3, ..., 2k+1$ kodi ir attiecīgi $4k-1, 4k, ..., 5k-2$.
  Tātad esam ieguvuši, ka pilsētu kodi ir $2k, 2k+1, 2k+2, ..., 3k$ (pirmajām $k+1$ pilsētām) un $4k-1, 4k, ..., 5k-2$ (pēdējām k pilsētām). Vēl jāpārbauda, vai visi pilsētu kodi ir dažādi. Gan pirmajām $k+1$ pilsētām, gan pēdējām k pilsētām kodi ir augošā secībā. Lai visi pilsētu kodi būtu dažādi, tad jābūt $3k < 4k-1$ jeb $k > 1$. Tātad pēc šī algoritma var piešķirt ceļiem numurus tā, lai visi pilsētu kodi ir dažādi, ja pilsētu skaits $n = 5, 7, 9, ...$.

Ja $n = 3$, tad ir 3 pilsētas un 3 ceļi. Katram ceļam piešķiram citu numuru un iegūstam, ka visām pilsētām ir dažādi kodi.
Tātad mazākā m vērtība ir 3.

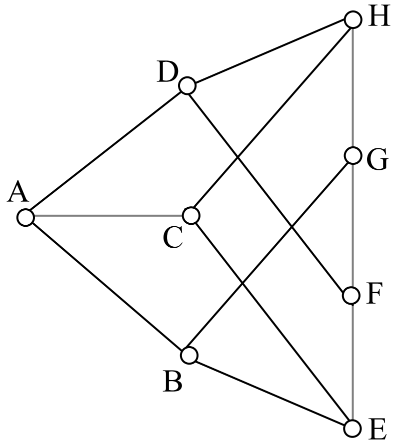
A.BW.K.4. Mēģinām izveidot uzdevumā doto situāciju, kad izpildās abi nosacījumi. Tā kā katrs dalībnieks pazīst tieši 3 citus dalībniekus, tad pazīšanos kopējais skaits ir $(8 \cdot 3) : 2 = 12$. Pieņemsim, ka A ir viens no pasākuma dalībniekiem. Ar B, C un D apzīmēsim tos 3 dalībniekus, kurus pazīst A. Lai izpildītos uzdevuma 1. nosacījums, B, C un D nedrīkst būt pazīstami cits ar citu. Tātad katram no tiem jāpazīst 2 citi dalībnieki no atlikušajiem, kurus apzīmēsim ar E, F, G, H. Jau ir izveidotas 9 pazīšanās un palikušas 3 pazīšanās starp E, F, G un H. Ievērosim, ka nedrīkst būt situācija, ka, piemēram E, F un G visi pazīst viens otru (neizpildās 1. nosacījums). Ja, piemēram, E nepazīst F, G un H, tad dalībniekiem A, F, G, H neizpildās 2. nosacījums (starp katriem četriem dalībniekiem var atrast divus, kuri ir pazīstami). Tātad vienīgā iespēja, kā iegūt uzdevumā prasīto situāciju ir E pazīst F, F pazīst G, G pazīst H.

Dalībnieks E pašlaik pazīst tikai F, tāpēc E ir jāpazīst 2 dalībnieki no B, C, D. Pieņemsim, ka tie ir B un C. Dalībnieks F pašlaik pazīst E un G, tāpēc F jāpazīst tieši viens no B, C, D un tam ir jābūt D, lai kopā ar E nepazītu B vai C, jo citādi neizpildās 1. nosacījums.

Arī dalībniekam G jāpazīst kāds no B, C, D, jo pašlaik viņš pazīst F un H. G nedrīkst būt pazīstams ar D (lai G, F, D neveidotu pretrunu ar 1. nosacījumu), tātad viņš pazīst B vai C. Ja G pazīst B, tad C un D var būt H paziņas; ja G pazīst C, tad H pazīst B un D. Pieņemsim, ka G pazīst B (otra situācija līdzīga), tad izveidojas A61. zīm. dotā situācija (ja divi dalībnieki, piemēram, A un D ir pazīstami, tad attiecīgie burti ir savienoti ar līniju). Esam ieguvuši situāciju, kad izpildās uzdevuma pirmais nosacījums, jo nekādi 3 punkti neveido trijstūri (skat. A64. zīm.). Vēl jāpārbauda, vai izpildās otrais nosacījums.

Tā kā 2. nosacījumā ir svarīgi. Lai pastāvētu vismaz viena pazīšanās starp katriem četriem dalībniekiem, tad pietiek parādīt, ka katram dalībniekam starp tiem 4 dalībniekiem, kurus tas nepazīst, ir vismaz viena pazīšanās. Dalībniekam A tas ir pāris E un F, B – C un H, C – D un F, D – C un E, E – A un D, F – A un C, G – A un D, H – A un B.

Tātad uzdevumā dotā situācija ir iespējama, jo abi nosacījumi var izpildīties vienlaicīgi.



A64. zīm.

<u>Piezīme.</u> Šim uzdevumam būtībā ir viens atrisinājums, var atšķirties tikai dalībnieki, kuri ir pazīstami savā starpā.

A.BW.K.5. Sanumurēsim slimnīcas ar 1, 2, ..., 16. Uzdevumā prasītais ir iespējams, ja dežūras organizē šādi (katrā tabulas rindiņā ir to slimnīcu numuri, kuras dežurē vienā naktī) (skat.65. zīm.).

1. nakts	1	2	3	4
2. nakts	5	6	7	8
3. nakts	9	10	11	12
4. nakts	13	14	15	16

5. nakts	1	5	9	13
6. nakts	2	8	10	15
7. nakts	3	6	11	16
8. nakts	4	7	12	14

9. nakts	1	6	10	14
10. nakts	2	7	9	16
11. nakts	3	5	12	15
12. nakts	4	8	11	13

13. nakts	1	7	11	15
14. nakts	2	6	12	13
15. nakts	3	8	9	14
16. nakts	4	5	10	16

17. nakts	1	8	12	16
18. nakts	2	5	11	14
19. nakts	3	7	10	13
20. nakts	4	6	9	15

A65. zīm.

Katrs skaitlis katrā tabulā ierakstīts tieši vienu reizi, tātad katra slimnīca ir dežūrējusi tieši 5 reizes. Katra slimnīca tajā naktī, kad tai ir dežūra, dežūrē kopā ar 3 citām slimnīcām, tātad kopā ar $3 \cdot 5 = 15$ slimnīcām. Piemērā redzams, ka ar katru slimnīcu rindās atrodas visas citas 15 slimnīcas.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes: V.11.2., V.11.4., V.12.1., V.12.2., V.12.4., A.9.2., A.10.4., A.11.1., A.12.1., A.12.3., IMO.1., IMO.3., IMO.6., AB.S.3., BW.A.1., BW.A.2., BW.A.5.
Nevienādības, nevienādību sistēmas: S.9.1., S.10.3., S.11.2., S.12.4., R.10.1., R.11.3., V.10.1., V.11.1., V.12.1., A.10.1., A.11.2., A.12.1., A.12.4., VP.1., VP.4., VP.5., IMO.5., AB.A.2., AB.A.3., AB.S.1., BW.A.1., BW.A.2., BW.A.4., BW.S.4.
Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: S.11.5., R.11.3., V.10.1., VP.4., AB.A.3., AB.S.1., BW.A.1., BW.Ģ.5.
Funkcionālvienādojumi: IMO.1., AB.A.1., AB.A.4., AB.A.5., AB.S.2.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.9.2., R.9.1., R.9.5., R.11.1., R.11.2., R.12.3., V.9.1., V.10.2., V.11.2., A.9.2., BW.A.1., BW.A.5., BW.S.1.
Pārveidojumi: S.9.1., S.10.3., S.11.5., S.12.4., R.9.1., R.10.1., R.11.1., R.11.2., R.11.3., V.10.1., V.10.3., V.11.1., V.12.1., V.12.3., A.10.1., A.11.2., A.12.4., VP.3., IMO.6., AB.A.2., AB.Ģ.4., AB.Ģ.5., AB.S.3., BW.A.1., BW.A.4., BW.S.2., BW.S.4., BW.S.5., BW.Ģ.5.
Matemātiskā indukcija: V.11.2., V.12.2., VP.1., IMO.3., BW.A.5.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.11.3., R.12.4., V.9.2., V.10.3., V.11.3., A.10.2., A.10.5., A.11.3., IMO.2., IMO.4., AB.Ģ.2., AB.Ģ.4., BW.Ģ.3., BW.Ģ.4.
Ar riņķa līniju saistītas līnijas: S.11.3., S.12.3., R.9.2., V.11.3., A.11.3., IMO.2., IMO.4., BW.Ģ.2.
Vienādi trijstūri: S.9.3., R.11.4., V.10.3., V.11.3., AB.Ģ.2., BW.Ģ.1.
Sakarības trijstūros: S.9.3., S.10.2., S.11.5., R.9.2., R.9.3., R.10.3., V.9.2., V.10.1., V.10.3., V.11.3., V.12.3., A.10.2., A.10.3., A.11.3., A.12.2., A.12.4., VP.2., VP.4., IMO.2., IMO.4., AB.K.4., AB.Ģ.2., AB.Ģ.3., AB.Ģ.4., AB.Ģ.5., BW.Ģ.1., BW.Ģ.2., BW.Ģ.3., BW.Ģ.4., BW.Ģ.5.
Laukumi: S.10.2., S.11.5., R.9.3., R.11.4., V.12.3., A.10.3., A.10.5., A.11.3., A.12.2., VP.4., BW.Ģ.5.
Līdzība: R.10.3., R.12.4., A.10.3., A.12.2., IMO.2., IMO.4., AB.Ģ.4., AB.Ģ.5., BW.Ģ.1., BW.Ģ.2., BW.Ģ.4.
Koordinātu metode: A.9.2.
Figūru sistēmas, piemēri: S.10.5., S.12.1., V.9.4., AB.Ģ.1.,
Invariantu metode: A.10.5.
Ekstremālie elementi: S.10.5., S.12.1., A.10.2.,
Vektori: AB.Ģ.4.

SKAITĻU TEORIJA

Atlikumi, kongruences: V.11.4., V.12.2., V.12.4., A.11.1., AB.S.2., BW.S.2., BW.K.2.
Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.9.5., S.10.1., S.12.2., R.12.1., A.9.3., A.10.4., A.11.1., VP.3., AB.S.2., AB.S.4., BW.S.1., BW.S.2., BW.S.3., BW.S.4.
Dalāmības īpašības un pazīmes: S.9.5., R.10.2., R.12.1., V.9.3., A.11.4., IMO.3., AB.S.3., AB.S.5., BW.S.1., BW.S.3., BW.S.5.
Vienādojumi veselos skaitļos: S.11.1., S.12.2., R.10.4., AB.S.1., BW.S.1., BW.S.5.,
Skaitļa pieraksts: AB.S.5.

KOMBINATORIKA

Dirihlē princips: A.10.2., IMO.6., AB.S.3
Invariantu metode, krāsošana: S.10.5., R.12.5., V.9.5., V.10.5., A.9.4., A.9.5., BA.K.3.
Kombinatorikas struktūras: R.12.2., AB.K.2., AB.K.4., BW.K.1., BW.K.2., BW.K.4
Skaitīšana: S.11.4., R.9.4., R.12.2., A.9.1., VP.5., AB.K.1., AB.K.5.
Gadījumu pārlase: V.9.4.
Matemātiskā indukcija: V.12.5., A.11.5., IMO.5.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde: S.9.4., S.10.4., S.11.4, S.12.5., R.12.5., V.12.5., IMO.5., AB.S.4., BW.A.3., BW.Ģ.4., BW.K.3., BW.K.5.
Algoritma analīze: R.10.5., R.11.5., R.12.5., V.10.4., V.11.5., A.11.4., A.12.5., IMO.5., AB.K.5., BW.K.1., BW.K.4.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2.daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1.daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M.Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12.klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.