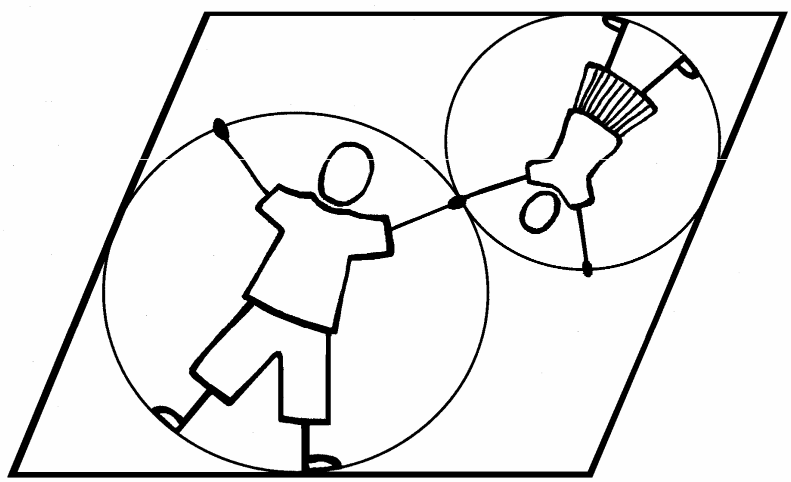
AGNIS ANDŽĀNS, LAURA FREIJA,
BENEDIKTS JOHANNESSONS

Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2008./2009. mācību gadā



RĪGA 2009

UDK 51(075.3)
An 318

A. Andžāns, L.Freija, B. Johannessons. ***Matemātikas sacensības 9.-12.klasēm 2008./2009. mācību gadā.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2009. - 99 lpp.

Grāmatā apkopoti 2008./2009. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. - 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Darbs izdots ar Latvijas Izglītības un Zinātnes ministrijas atbalstu.

Vāka zīmējuma autore – L.Freija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-147-3

Saturs

Ievads

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības pagājušā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija savādākas nekā olimpiādes, kuras norisinās pašlaik. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko pasaules daļu.

Sākotnēji olimpiāžu uzdevumi bija līdzīgi skolā apskatītajiem uzdevumiem, taču ar augstāku grūtības pakāpi. Mainoties mācību programmām Latvijā, matemātikas olimpiāžu uzdevumi tomēr saglabāja olimpiāžu standartu, līdz ar to tie ir atšķirīgi no skolā apgūtajiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi vairāk attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Līdz ar to šīs olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Matemātikas olimpiādes arī paplašina skolēnu redzesloku un vedina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Taču, lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām arī pienācīgi sagatavoties.

Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs gatavošanās procesā vidusskolas skolēniem. Grāmatā ir apkopoti 2008./2009. m. g. matemātikas olimpiāžu 9.-12. klašu uzdevumi un atrisinājumi. Bez uzdevumiem un atrisinājumiem grāmatā iekļauta arī sadaļa – ieteikumi, kur var smelties idejas, ja neizdodas atrisināt uzdevumus patstāvīgi. Tomēr iesakām lasītājam vispirms censties atrisināt uzdevumu paša spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos.

Grāmatā apskatītas tādas matemātikas sacensības kā 21. sagatavošanās olimpiāde, 59. rajona olimpiāde, 59. valsts olimpiāde, 36. atklātā olimpiāde, papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 50. starptautiskajā olimpiādē, 50. starptautiskā olimpiāde, atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2008" un olimpiāde „Baltijas ceļš 2008".

- Sagatavošanās olimpiāde notiek kopš 1987./ 88. mācību gada, to rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Sagatavošanās olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu. Katrai skolai tiek nosūtīti uzdevumu komplekti, tomēr tas ir atkarīgs no matemātikas skolotājiem, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi.
- Rajona un valsts olimpiādes 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1977./ 88. mācību gada tās tiek rīkotas, sadarbojoties LR IZM/ LR IZM IS(E)C un LU A.Liepas NMS.
- Atklātās matemātikas olimpiādes notiek kopš 1974. gada. Tās rīko LU A.Liepas NMS. Katru gadu tās pulcina nu jau ap 3000 skolēnu no visas Latvijas.
- Starptautiskā matemātikas olimpiāde notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai Austrumu bloka valstis. 2008./2009. mācību gadā šajā olimpiādē piedalījās dalībnieki no nu jau 103 valstīm.

- Starptautiskā olimpiāde „Baltijas Ceļš” savu nosaukumu ieguvusi no masu demonstrācijas, kas notika 1989. gada augustā. Šī olimpiāde pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā un tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis, bet nu tajā piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande. Atšķirībā no lielākās daļas matemātikas sacensību „Baltijas Ceļš” ir komandu sacensības, kurās komandai kopīgi jāatrisina 20 uzdevumi. Latviju šajās sacensībās katru gadu pārstāv pieci 9. - 12. klašu skolēni, kas iepriekšējos gados olimpiādēs uzrādījuši labāko rezultātus un uzvarējuši atlases sacensībās.

Grāmatā apskatīto sacensību uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatas piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām sameklēt un apgūt šos paņēmienus, lai varētu turpmāk tos izmanot.

Protams, daudzus uzdevumus var atrisināt arī citādi, nekā grāmatā norādīts. Ja esat atrisinājis uzdevumu, pielietojot citu metodi, iesakām iepazīties arī ar grāmatā piedāvāto risinājumu, jo centāmies Jums piedāvāt mums zināmos racionālākos risinājumus un risinājumus, kas satur vērtīgas idejas.

Novēlam iegūt jaunas zināšanas, prast pielietot jau zināmās metodes un ceram, ka grāmata Jums palīdzēs sasniegt savus mērķus.

Autori

Uzdevumi

S. Latvijas 21. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

S.9. Devītā klase

S.9.1. Dots, ka $a<b<c<d<e$, $a+b=10$, $d+e=18$; visi skaitļi *a*; *b*; *c*; *d*; *e* ir naturāli. Aprēķināt $a+b+c+d+e$.

S.9.2. Uz trijstūra ABC malas BC atzīmēts punkts M, bet uz malas AC – punkts N. Dots, ka $\angle BCA=20°$ un $CM=MN=NB=BA$. Pierādīt, ka $AN=BN$.

S.9.3. Skaitļa *n* decimālais pieraksts sastāv no 11 vieniniekiem, 11 divniekiem, 11 trijniekiem un 11 četriniekiem. Vai skaitlis $n+4$ var būt pirmskaitlis?

S.9.4. Profesoram Cipariņam uzdāvinātas 5 pēc ārējā izskata vienādas zelta monētas; tām visām ir dažādas masas. Ja Cipariņš norāda uz jebkurām 3 monētām, dāvinātājs pasaka, kura no tām ir pēc masas vidējā.

Kā Cipariņš var noskaidrot, kura ir pēc masas vidējā no visām 5 monētām, izmantojot tikai šādus jautājumus un atbildes?

S.9.5. Katrs vesels skaitlis nokrāsots vai nu balts, vai sarkans, pie tam skaitļi 5 un 6 nokrāsoti dažādi. Pierādīt, ka var atrast tādus trīs vienādi nokrāsotus skaitļus, kuru summa ir nulle.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Kādām a vērtībām vienādojumam $x^3+ax-2(a+4)=0$ ir tieši 2 dažādas saknes?

S.10.2. Izliektā četrstūrī $ABCD$ diagonāles AC vidusperpendikuls krusto diagonāli BD (nevis tās pagarinājumu!) Vai var gadīties, ka četrstūrī $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju?

S.10.3. Pierādīt, ka skaitļi $2n^3+4n$ un n^3+5n dalās ar 3 pie vienām un tām pašām naturālām n vērtībām.

S.10.4. Visa plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Divi spēlētāji pamīšus krāso pa vienam vēl nenokrāsotam kvadrātiņam: viens – zaļā krāsā, otrs – sarkanā krāsā. Uzvar tas, kurš pirmais nokrāso savā krāsā kādu no 4 rūtiņām sastāvošu kvadrātu. Vai pirmais spēlētājs var garantēt sev uzvaru?

S.10.5. Vai kubiskā kastē ar izmēriem $6\times6\times6$ var ievietot 53 klucīšus ar izmēriem $1\times1\times4$ tā, lai klucīšu šķautnes būtu paralēlas kastes šķautnēm un kasti varētu aizvērt?

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $3a^8+5b^8\geq 8a^3b^5$.

S.11.2. Trijstūra ABC virsotnes leņķa A bisektrise krusto apvilkto riņķa līniju punktā M. Ar I apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru. Pierādīt, ka $MB=MC=MI$.

S.11.3. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi, bet reizinājumi ab, bc un ca ir naturālu skaitļu kubi. Pierādīt, ka arī paši skaitļi a, b un c ir naturālu skaitļu kubi.

S.11.4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Sākumā visās rūtiņās ierakstīti vieninieki. Ar vienu gājienu drīkst izvēlēties divas rūtiņas ar kopēju malu un abiem tajās ierakstītajiem skaitļiem pieskaitīt pa vieniniekam vai arī no tiem abiem atņemt pa vieniniekam. Pēc kāda laika skaitļi visās rūtiņās bija vienādi. Pierādīt, ka šajā brīdī bija izdarīts pāra skaits gājienu.

S.11.5. Katrā kuba skaldnē novilkta viena diagonāle. Ja divām novilktajām diagonālēm ir kopīgs galapunkts, teiksim, ka šīs divas diagonāles draudzējas. Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits?

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

S.12.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. Uz malām AB un CB attiecīgi ņemti tādi punkti M un N, ka $DM \perp AB$ un $DN \perp CB$. Pierādīt, ka punkti A; M; N; C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

S.12.3. Dots, ka n ir naturāls skaitlis un skaitļa $A = n^2 + 2008n$ pēdējais cipars ir 4. Atrast skaitļa A priekšpēdējo ciparu.

S.12.4. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Tajā novietoti bezgalīgi daudzi taisnstūri tā, ka katrs taisnstūris pārklāj tieši divus kvadrātiņus. Nekādi divi taisnstūri ne pārklājas, ne saskaras.

Vai atlikušo plaknes daļu noteikti var pārklāt ar tādiem pašiem taisnstūriem tā, lai nekādi divi taisnstūri nepārklātos, bet **visas** plaknes rūtiņas būtu pārklātas?

S.12.5. Klasē ir z zēni un m meitenes. Katriem diviem zēniem var atrast meiteni, kas vienam no viņiem patīk, bet otram nepatīk. Pierādīt, ka $2^m \geq z$.

R. Latvijas 59. rajona olimpiāde matemātikā

R.9. Devītā klase

R.9.1. Trijstūrī ABC ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 5$, $h_b \geq 12$, $h_c \geq 13$.

Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

R.9.2. Kuri četrciparu naturāli skaitļi vienādi ar savu divu pēdējo ciparu veidotā naturālā skaitļa kvadrātu?

R.9.3. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

R.9.4. Kvadrātvienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes, kas abas pieder intervālam $[-1;1]$. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv nevienādība $x^2 + px + q \geq -1$.

R.9.5. Pieņemsim, ka $n \geq 3$, n – naturāls skaitlis. Aplūkosim patvaļīgu n cilvēku grupu.

a) pierādīt, ka šajā grupā var atrast divus tādus cilvēkus A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi,

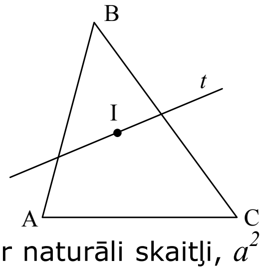
b) rūķītis Muriburis apgalvo: katriem diviem šīs grupas cilvēkiem A un B, kam šajā grupā paziņu daudzumi ir vienādi, var atrast vai nu tādu cilvēku C, kas pazīst gan A, gan B, vai arī tādu cilvēku D, kas nepazīst ne A, ne B. Vai Muriburis runā patiesību, ja $n = 4$? Bet ja $n = 2009$?

<u>Piezīme</u>: uzskatām, ka neviens nepazīst pats sevi un, ja X pazīst Y, tad arī Y pazīst X.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Atrodiet mazāko naturālo skaitli, kuru var izsacīt gan kā 11, gan kā 12, gan kā 13 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

R.10.2. Caur trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru I novilkta taisne t tā, kā parādīts 1.zīm. Tā dala trijstūra laukumu uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī trijstūra perimetru.



1. zīm.

R.10.3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a. Pierādīt, ka $(a+b)^3$ dalās ar $a \cdot b$. Vai noteikti $(a+b)^2$ dalās ar $a \cdot b$?

R.10.4. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ reālos skaitļos.

R.10.5. Kvadrātiska režģa formā ar izmēriem 10×10 izvietotas 100 spuldzes. Katra spuldze var būt vai nu ieslēgta, vai izslēgta. Pieskaroties jebkurai spuldzei (apzīmēsim to ar A), tā maina savu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu vai otrādi). Vienlaicīgi savu stāvokli maina arī visas tās spuldzes, kuras ar A ir vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā.

Sākumā visas spuldzes ir izslēgtas. Ar kādu mazāko pieskārienu skaitu var panākt, lai tās vienlaicīgi visas būtu ieslēgtas?

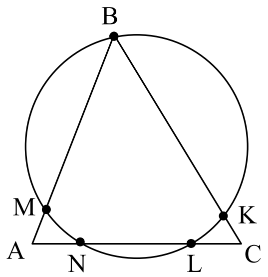
R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Regulāra n-stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n (katrā virsotnē cits skaitlis) ar īpašību: ja A, B, C – trīs n-stūra virsotnes un $AB = AC$, tad virsotnē A ierakstītais skaitlis vai nu lielāks par **abiem** skaitļiem, kas ierakstīti virsotnēs B un C, vai arī mazāks par tiem abiem.
Vai var būt, ka a) $n = 8$, b) $n = 7$, c) $n = 10$, d) $n = 16$?

R.11.2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$.

R.11.3. Atrisināt nevienādību $\left|\left|\left|2 - x\right| - x\right| - 9\right| \le 2009$.

R.11.4. Riņķa līnija iet caur regulāra trijstūra ABC virsotni B un krusto tā malas, kā parādīts 2.zīm. Pierādīt, ka $AM + CL = AN + CK$.



2. zīm.

R.11.5. Telpā doti 7 punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādi 4 neatrodas vienā plaknē. Katri divi punkti savienoti ar baltu vai sarkanu nogriezni. Pierādīt: ir vismaz divi trijstūri, katram no kuriem visas 3 malas ir nokrāsotas vienādi (varbūt vienam trijstūrim tās visas ir baltas, bet otram – sarkanas).

R.12. Divpadsmitā klase

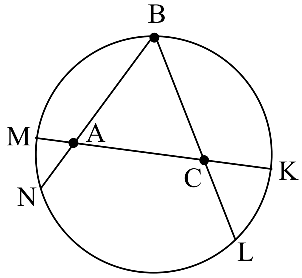
R.12.1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3 .$$

R.12.2. Dots, ka p ir pirmskaitlis un $n = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 9$. Kāda ir mazākā iespējamā n ciparu summa? Kuriem p tā tiek sasniegta?

R.12.3. Atrisināt vienādojumu $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$ pozitīvos reālos skaitļos.

R.12.4. Regulāra trijstūra ABC virsotne B atrodas uz riņķa līnijas; tā malu pagarinājumi krusto riņķa līniju, kā parādīts 3.zīm. Pierādīt, ka $AM + CL = AN + CK$.



3. zīm.

R.12.5. Telpā doti 4 punkti, kas visi neatrodas vienā plaknē. Cik ir paralēlskaldņu, kam visi šie punkti ir virsotnes?

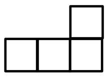
V. Latvijas 59. republikas olimpiāde matemātikā

V.9. Devītā klase

V.9.1. Dots, ka a ir tāds reāls skaitlis, ka kvadrātvienādojumam $x^2 - x + a = 0$ ir divas dažādas reālas saknes x_1 un x_2. Pierādīt: $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1$ tad un tikai tad, ja $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 1$.

V.9.2. Naturālu skaitli sauc par vienkāršu, ja tas ir divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Piemēram, $9 = 3 \cdot 3$ ir vienkāršs, bet $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ – nav. Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var visi būt vienkārši?

V.9.3. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrs kvadrātiņš nokrāsots vienā no k krāsām. Ir zināms: katrā tādā figūrā, kāda redzama 4.zīm. (šī figūra var būt arī pagriezta vai apgriezta „uz mutes"), visas rūtiņas nokrāsotas dažādās krāsās. Kāda ir mazākā iespējamā k vērtība?



4. zīm.

V.9.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi AA_1 un BB_1 ir augstumi, H ir augstumu krustpunkts, punkti M, N un K ir attiecīgi nogriežņu AB, AH un BH viduspunkti. Pierādīt, ka $\Delta MKA_1 = \Delta B_1NM$.

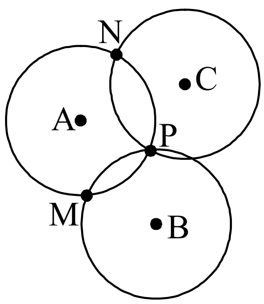
V.9.5. Turnīrā piedalās 12 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi; katrā spēlē viens no tās dalībniekiem uzvar, bet otrs – zaudē. Teiksim, ka tenisists A ir spēcīgāks par tenisistu B, ja vai nu A uzvarējis pret B, vai arī var atrast tādu trešo tenisistu C, ka A uzvarējis pret C, bet C uzvarējis pret B. Par čempionu sauc jebkuru tādu tenisistu, kurš turnīra noslēgumā izrādās spēcīgāks par jebkuru citu. Pierādīt:

a) katrs tenisists, kam turnīra noslēgumā ir vislielākais uzvaru skaits, ir čempions,

b) nevar būt, ka turnīra noslēgumā ir tieši divi (ne vairāk un ne mazāk) čempioni.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas punktā P. Apzīmējam riņķa līniju centrus un divus no pārējiem krustpunktiem, kā parādīts 5.zīm. Pierādīt, ka $MNCB$ ir paralelograms.



5. zīm.

V.10.2. Apskatām virkni, kas augošā secībā satur visus naturālos skaitļus, kuri nedalās ar 3. Virknes sākums tātad ir 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; ...

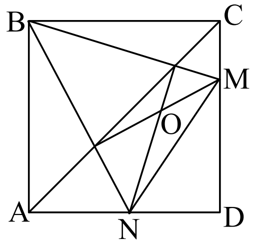
Dots, ka $2n$ pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa ir 300 (n – kaut kāds naturāls skaitlis). Kādas ir iespējamās n vērtības?

V.10.3. Maija uz katras no 16 kartītēm uzrakstījusi „$+1$" vai „-1". Kartītes novietotas uz galda tā, ka Andris pašas kartītes gan redz, bet uz tām uzrakstītos skaitļus neredz. Andris ar vienu jautājumu var norādīt uz jebkurām trim kartītēm un uzzināt no Maijas uz tām uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Andrim pietiek, lai noskaidrotu visu 16 skaitļu reizinājumu?

Vai 17 kartīšu gadījumā Andrim pietiek ar 7 jautājumiem?

V.10.4. Kādas vērtības var pieņemt izteiksme $S = \frac{|x+y|}{|x|+|y|} + \frac{|x+z|}{|x|+|z|} + \frac{|y+z|}{|y|+|z|}$, ja x, y, z – no nulles atšķirīgi reāli skaitļi?

V.10.5. Dots, ka $ABCD$ – kvadrāts un $\angle MBN = 45°$ (skat. 6.zīm.). Pierādīt, ka $BO \perp MN$.



6. zīm.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Apskatām Fibonači skaitļu virkni: $F_1 = 1$; $F_2 = 2$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pie $n \geq 1$. Kāds lielākais šīs virknes elementu daudzums var veidot vienu aritmētisku progresiju?

V.11.2. Atrast skaitļu $3^3 - 3$, $5^5 - 5$, $7^7 - 7$, ..., $2009^{2009} - 2009$ lielāko kopīgo dalītāju.

V.11.3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + y^2 = y^3 \\ y + x^2 = x^3 \end{cases}$$

V.11.4. Andris uzrakstījis 10 dažādus veselus pozitīvus skaitļus; neviens no tiem nepārsniedz 37. Pierādīt, ka Maija var izvēlēties četrus no Andra uzrakstītajiem skaitļiem tā, ka divu Maijas izvēlēto skaitļu summa vienāda ar abu pārējo Maijas izvēlēto skaitļu summu.

V.11.5. Dots, ka četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt: trijstūros ABC, BCD, CDA, DAB ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Turnīrā piedalījās 12 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi; katrā spēlē viens no tās dalībniekiem uzvarēja, bet otrs – zaudēja. Dalībnieku uzvaru un zaudējumu daudzumus apzīmēsim attiecīgi ar x_1 un y_1; x_2 un y_2; ...; x_{12} un y_{12}. Pierādīt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{12}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{12}^2.$$

V.12.2. Katrīna uzrakstīja trīsciparu skaitli n, kura visi cipari ir dažādi un visi atšķiras no 0. Maija uzrakstīja visus piecus citus trīsciparu skaitļus, kas izveidoti no tiem pašiem cipariem, no kā sastāv n. Maijas uzrakstīto skaitļu summa ir 3434. Kāds var būt skaitlis n?

V.12.3. Dots, ka $ABCD$ ir kvadrāts un E ir malas AB iekšējs punkts. Nogriežņi AC un DE krustojas punktā P. Perpendikuls, kas no P vilkts pret DE, krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka $EF = AE + FC$.

V.12.4. Uz kādas planētas izmanto 2009 valodas. Vai var izveidot vārdnīcu sistēmu tā, lai vienlaicīgi izpildītos 3 īpašības:

a) katra vārdnīca ļauj tulkot no vienas valodas uz kādu citu, bet ne pretējā virzienā,

b) ja ir vārdnīca, kas ļauj tulkot no kādas valodas A uz kādu citu valodu B, tad nav vārdnīcas, kas ļauj tulkot no B uz A,

c) no katras valodas uz katru citu var pārtulkot, izmantojot vai nu vienu, vai divas vārdnīcas? (Pieļaujamas vairākkārtīgas tulkošanas, piemēram, no A uz B un tālāk no B uz C.)

V.12.5. Atrisināt vienādojumu

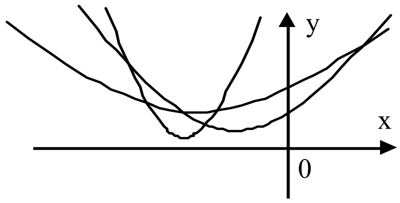
$$x^3(x+1)=2(x+a)(x+2a)$$

reālos skaitļos, kur a – reāla konstante.

A. Latvijas 36. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Pieņemsim, ka 7.zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



7. zīm.

A.9.2. Dots, ka $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ un $|c| \geq |a + b|$. Pierādīt, ka $a + b + c = 0$.

A.9.3. Uz taisnes t novietots stienītis ar garumu 1. Sākumā tā gali atrodas punktos A un B. Stienīti bīda pa plakni tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei t un beigās atkal nonāk uz t; šai brīdī tā gali atrodas punktos C un D. Turklāt ceļiem, pa kuriem kustas stienīša gali, nav kopīgu punktu. Vai var gadīties, ka $AC > 2009$?

Piezīme: uzskatām, ka stienītis ir paralēls t arī tad, ja tas atrodas uz t.

A.9.4. Naturāla skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar d(n). Piemēram, d(1)=1; d(6)=4 utt. Sauksim skaitli n par apaļīgu, ja tas dalās ar d(n).

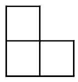
a) atrodiet piecus apaļīgus skaitļus,

b) pierādiet, ka apaļīgu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

A.9.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra no tām izkrāsota vai nu balta, vai melna. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 3 rūtiņas, kas veido 8.zīm. parādīto figūru (tā var būt novietota arī citādi), un mainīt krāsu uz pretējo visās šīs figūras rūtiņās. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai viss kvadrāts kļūtu balts, ja

a) sākotnējais krāsojums ir šaha galdiņa izskatā,

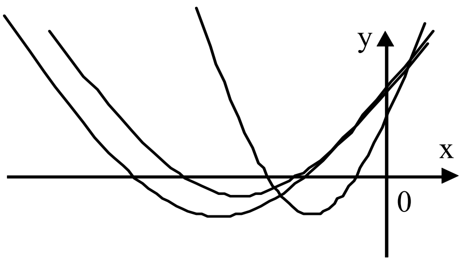
b) sākotnējais krāsojums ir patvaļīgs?



8. zīm.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Pieņemsim, ka 9.zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + 2bx + c$, $y = bx^2 + 2cx + a$ un $y = cx^2 + 2ax + b$ grafiki?



9. zīm.

A.10.2. Dots, ka p un q ir divi viens otram sekojoši nepāra pirmskaitļi (piemēram, 13 un 17). Pierādīt: skaitli $p + q$ var sadalīt triju tādu naturālu skaitļu reizinājumā, kas visi lielāki par 1 (starp šiem trim skaitļiem var būt arī vienādi).

A.10.3. Dots, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris un I ir tajā ievilktās riņķa līnijas centrs. Riņķa līnija ω_1 iet caur B un I un pieskaras $\angle ACB$ bisektrisei. Riņķa līnija ω_2 iet caur C un I un pieskaras $\angle ABC$ bisektrisei. Pierādīt, ka viens no ω_1 un ω_2 krustpunktiem atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas.

A.10.4. Dots, ka a, b, c, d – pozitīvi skaitļi. Pierādīt nevienādību:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

A.10.5. Dots daudzstūris ar $2n+1$ virsotnēm, n – naturāls skaitlis. Tā virsotnēs un malu viduspunktos jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz $4n+2$ (katrā punktā cits skaitlis) tā, lai to trīs skaitļu summas, kas uzrakstīti uz vienas malas, visas būtu savā starpā vienādas. Vai to var izdarīt, ja

a) $n=2$,

b) patvaļīgam naturālam n?

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{2009}{2009^4+2009^2+1}<\frac{1}{2}.$$

A.11.2. Spēlē OP! piedalās n spēlētāji ($n\geq 2$). Spēle notiek vairākas dienas. Katru dienu viens spēlētājs uzvar, bet pārējie zaudē. Sakaņā ar noteikumiem i-tajā dienā ($i=1,2,\ldots$) uzvarētājs saņem $i(n-1)$ punktus, bet katrs zaudētājs zaudē pa i punktiem. Spēles sākumā visiem ir pa 0 punktiem. Pēc kāda mazākā dienu skaita var gadīties, ka visiem atkal ir pa 0 punktiem?

A.11.3. Dots, ka a un b – naturāli skaitļi un skaitļa $S=a^2+ab+b^2$ pēdējais cipars ir 0. Kāds ir skaitļa S priekšpēdējais cipars?

A.11.4. Dots, ka sešstūris $ABCDEF$ ir izliekts un tā pretējās malas ir pa pāriem vienādas. Nekādas divas tā malas un diagonāles nav paralēlas viena otrai. Ar A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 apzīmējam attiecīgi diagonāļu AC, BD, CE, DF, EA, FB viduspunktus. Pierādīt, ka taisnes A_1D_1, B_1E_1 un C_1F_1 krustojas vienā punktā.

A.11.5. Atrisināt pozitīvos skaitļos nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} x^3y+3\leq 4z \\ y^3z+3\leq 4x \\ z^3x+3\leq 4y \end{cases}.$$

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$ un $b_1, b_2, \ldots, b_{2009}$ ir attiecīgi aritmētiska progresija un ģeometriska progresija, kas abas sastāv no pozitīviem skaitļiem. Dots arī, ka $a_1=b_1\neq a_{2009}=b_{2009}$. Kas lielāks: visu aritmētiskās vai visu ģeometriskās progresijas locekļu summa?

A.12.2. Dots, ka x, y, z – pozitīvi skaitļi un $xy+yz+zx>x+y+z$. Pierādīt, ka $x+y+z>3$.

A.12.3. Dots, ka n - naturāls pāra skaitlis. Apskatām reizinājumu $R=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

a) vai var būt, ka ir R kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

b) vai var būt, ka R ir kāda naturāla skaitļa kubs?

A.12.4. Četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā. Zināms, ka $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Diagonāles AC viduspunkts ir M. Pierādīt, ka $\angle ABM = \angle DBC$.

A.12.5. Uz galda atrodas n konfektes, n – naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pamīšus ēd pa x^2 konfektēm, kur x – naturāls skaitlis (x var mainīties no gājiena uz gājienu). Tas, kam nav ko ēst, zaudē. Pierādīt: ir bezgalīgi daudz tādu n, ka, pareizi spēlējot, otrais spēlētājs var uzvarēt.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 50.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 59.matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Kādiem naturāliem skaitļiem m un n, kas abi lielāki par 1, skaitlis $n^3 - 1$ dalās ar $m \cdot n - 1$?

VP.1.2. Dots, ka $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \geq a + b + c .$$

VP.1.3. Tabula sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts nenegatīvs skaitlis. Gan katrā rindiņā, gan katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 1. Pierādīt: tabulā var atrast n rūtiņas, kurās visās ierakstīti pozitīvi skaitļi un no kurām nekādas divas neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā.

VP.1.4. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu; AA_1, BB_1, CC_1 ir tā augstumi, bet H – augstumu krustpunkts. Punkts P ir AH viduspunkts. Taisnes B_1P un AB krustojas punktā Q, bet taisnes A_1C_1 un BB_1 - punktā R. Pierādīt, ka taisnes QR un BC ir perpendikulāras viena otrai.

VP.1.5. Trijstūri atļauts sagriezt galīgā daudzumā daudzstūru un griežot iegūtās daļas katru pārbīdīt par kaut kādu vektoru (šie vektori var būt arī atšķirīgi). Daļas nedrīkst pagriezt vai apgriezt „uz mutes". Pieņemsim, ka pēc šīm pārbīdēm daļas atkal veido trijstūri (bez pārklāšanās un bez iekšpusē palikušiem caurumiem). Pierādīt, ka šis trijstūris vienāds ar sākotnējo.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 2.maijā

VP.2.1. Dots, ka a, b un c ir dažādi pozitīvi skaitļi, $abc = 1$, k – naturāls skaitlis, $k \geq 3$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} > \frac{k(k-1)}{2} .$$

VP.2.2. Riņķī ievilkts sešstūris $ABCDEF$, pie tam $AB = CD = EF$.
Pierādīt: tā trijstūra augstumu krustpunkts, kura virsotnes ir attiecīgi AC un BD, CE un DF, EA un BF krustpunkti, sakrīt ar riņķa centru.

VP.2.3. Sniegbaltīte uzdāvināja 7 rūķīšiem n dažādas grāmatas. Pēc kāda laika izrādījās: katrām divām grāmatām var atrast vismaz 4 rūķīšus, no kuriem katrs izlasījis **tieši vienu** no šīm abām grāmatām.
Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 3.maijā

VP.3.1. Pierādīt: ja n – pozitīvs vesels skaitlis un x_1, x_2, ..., x_n - reāli skaitļi, tad pastāv nevienādība

$$\sqrt{x_1^2+1}+2\sqrt{x_2^2+1}+\ldots+n\sqrt{x_n^2+1}\geq\sqrt{\left(x_1+2x_2+\ldots+nx_n\right)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\,.$$

VP.3.2. Riņķa līnijas w_1 un w_2 ārēji pieskaras viena otrai punktā P. Uz w_1 ņemts punkts A, kas atšķiras no P. Riņķa līnijai w_2 novilktas pieskares AM un AM_1 (M un M_1 ir pieskāršanās punkti). Taisnēm AM un AM_1 bez punkta A ar riņķa līniju w_1 ir vēl attiecīgi krustpunkti N un N_1. Pierādīt, ka $PN\cdot M_1N_1=PN_1\cdot MN$.

VP.3.3. Kāda ir izteiksmes $\left|5^{4m+3}-n^2\right|$ mazākā iespējamā vērtība, ja m un n ir veseli skaitļi un $m\geq 0$, $n\geq 0$?

IMO. 50. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (50th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2009. gada 15. jūlijā.

IMO.1. Dots, ka n ir pozitīvs vesels skaitlis. Skaitļi $a_1, a_2, ..., a_k$ ($k \geq 2$) ir kopas $\{1, 2, ..., n\}$ elementi. Nekādi divi no tiem nav savā starpā vienādi. Dots, ka $a_i(a_{i+1} - 1)$ dalās ar n visiem $i = 1$, 2, ..., k - 1. Pierādiet, ka $a_k(a_1 - 1)$ nedalās ar n.

IMO.2. Trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Punkti P un Q ir atbilstoši malu CA un AB iekšēji punkti. Punkti K, L un M ir atbilstoši nogriežņu BP, CQ un PQ viduspunkti. Riņķa līnija Γ iet caur K, L un M. Taisne PQ ir riņķa līnijas Γ pieskare. Pierādiet, ka $OP = OQ$.

IMO.3. Dots, ka $s_1, s_2, s_3, ...$ ir stingri augoša virkne, kas sastāv no pozitīviem veseliem skaitļiem. Katra no apakšvirknēm $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ un $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ ir aritmētiska progresija. Pierādiet, ka virkne $s_1, s_2, s_3, ...$ pati ir aritmētiska progresija.

IMO. Uzdevumi 2009. gada 16. jūlijā.

IMO.4. Trijstūrī ABC pastāv vienādība $AB = AC$. Leņķu $\angle CAB$ un $\angle ABC$ bisektrises krusto malas BC un CA atbilstoši punktos D un E. Punkts K ir trijstūrī ADC ievilktās riņķa līnijas centrs. Dots, ka $\angle BEK = 45°$. Noskaidrojiet visas iespējamās $\angle CAB$ vērtības.

IMO.5. Noskaidrojiet, kurām funkcijām f, kas definētas visiem veseliem pozitīviem skaitļiem un kas pieņem veselas pozitīvas vērtības, piemīt īpašība: katriem veseliem pozitīviem skaitļiem a un b eksistē nedeģenerēts trijstūris ar malu garumiem a, $f(b)$ un $f(b + f(a) - 1)$.

Piezīme: Trijstūri sauc par nedeģenerētu, ja tā visas virsotnes neatrodas uz vienas taisnes.

IMO.6. Doti pozitīvi veseli skaitļi $a_1, a_2, ..., a_n$. Nekādi divi no tiem nav savā starpā vienādi. Dota arī kopa M, kas sastāv no n - 1 pozitīva vesela skaitļa, bet nesatur skaitli $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Sākot no punkta ar koordinātu 0, sienāzim jāveic n lēcieni pa skaitļu asi virzienā pa labi. Lēcienu garumiem jābūt $a_1, a_2, ..., a_n$ kaut kādā secībā. Pierādiet, ka sienāzis var izvēlēties tādu secību, ka viņš nekad nenonāk nevienā punktā ar koordinātu no kopas M.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2008”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Dots, ka $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}$. Kāda vērtība var būt izteiksmei

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}?$$

AB.A.2. Dots, ka x, y un z ir pozitīvi skaitļi un $x^2+y^2+z^2=3$. Pierādīt, ka

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{x+y^2+z}}+\frac{z}{\sqrt{x+y+z^2}}\le\sqrt{3}\ .$$

AB.A.3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^3=2y-1 \\ y^3=2z-1 \\ z^3=2x-1 \end{cases}.$$

AB.A.4. Sākotnēji dotas funkcijas $x+\frac{1}{x}$, x^2-2x un visas konstantās funkcijas. Vai ar atņemšanas, saskaitīšanas un reizināšanas operāciju palīdzību var no šīm funkcijām iegūt funkciju $3x^2-5x$? (Reizināšanas operācija ietver arī funkcijas kāpināšanu kvadrātā.)

AB.A.5. Vai eksistē funkcija $f(t)$, kas definēta visiem reāliem t, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem x un y apmierina nosacījumu

$$f(x+f(y))=f(x)+\sin y\ ?$$

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. No šiem kvadrātiņiem n nokrāsoti melni; pārējie ir balti. Pierādīt: var atrast kvadrātu, kura malas iet pa rūtiņu līnijām un kurā melnā krāsa nosedz ne mazāk par vienu piektdaļu un ne vairāk par četrām piektdaļām laukuma.

AB.K.2. Ar x_n ($n=1$; 2; ...) apzīmēsim tādu n-ciparu skaitļu skaitu, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3 un kuru pierakstā cipari 1 un 3 nevienā vietā neatrodas blakus. Piemēram, $x_1=3$ un $x_2=7$.

Pierādīt, ka katram naturālam n pastāv sakarība

$$x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n\ .$$

AB.K.3. Katrā no trim galda tenisa komandām ir pa 10 spēlētājiem. Katrā spēlē sacenšas divi spēlētāji no dažādām komandām; katri divi spēlētāji savā starpā spēlē augstākais vienu reizi. Pieņemsim, ka jau izspēlēta 201 spēle. Pierādīt: var atrast tādus 3 spēlētājus, katrs no kuriem jau spēlējis ar abiem pārējiem.

AB.K.4. Mūsu rīcībā ir $2n$ pēc ārējā izskata vienādas monētas; zināms, ka n no tām ir ar masu a, bet pārējās n – ar masu b, $a<b$. Ar vienu soli var izvēlēties jebkuras n monētas un uzzināt to kopējo masu. Vai $n+1$ soļos noteikti var noskaidrot a un b vērtības?

Uzskatām, ka ar mērījumu rezultātiem spējam veikt aritmētiskas darbības.

AB.K.5. Vienā rindā uzrakstīti 17 veseli pozitīvi skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 43, bet otrā – 43 veseli pozitīvi skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 17 (starp skaitļiem var būt arī vienādi). Pierādīt: katrā rindā var pasvītrot vienu vai vairākus pēc kārtas uzrakstītus skaitļus tā, lai abās rindās pasvītroto skaitļu summas būtu vienādas.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkta bisektrise AV, mediāna BM un augstums CN. Pierādīt: ja $NA = NV$, tad AV, BM un CN krustojas vienā punktā.

AB.Ģ.2. Dots, ka $ABCD$ – paralelograms. Riņķa līnijas w_1 un w_2 atrodas tā iekšpusē un ārēji pieskaras viena otrai punktā M; bez tam w_1 pieskaras AB un AD, bet w_2 pieskaras CB un CD. Pierādīt, ka punkti A, M un C atrodas uz vienas taisnes.

AB.Ģ.3. Dots, ka α, β un γ ir trijstūra leņķi. Pierādīt, ka

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

AB.Ģ.4. Trijstūris ABC ir taisnleņķa, $\angle A = 90°$. Malas BC viduspunkts ir M. Uz malas AC atzīmēts tāds punkts D, ka $AD = AM$. Trijstūriem AMC un BDC apvilktās riņķa līnijas bez punkta C krustojas vēl punktā P. Pierādīt, ka P atrodas uz taisnes, kas satur $\angle ACB$ bisektrisi.

AB.Ģ.5. Kvadrāts sastāv no 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Rūtiņas malas garums ir 1. Desmit rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Kāds ir lielākais iespējamais laukums taisnstūrim, kura malas iet pa rūtiņu malām un kura iekšpusē nav nevienas melnas rūtiņas?

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Doti 756 dažādi veseli pozitīvi skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 2008. Pierādīt: no šiem skaitļiem var atrast divus, kuru summa dalās ar 8.

AB.S.2. Vai eksistē tādas 2008 bezgalīgas ģeometriskas progresijas, kas sastāv no naturāliem skaitļiem, ka katrs naturāls skaitlis pieder vismaz vienai no tām?

AB.S.3. Kādam lielākajam naturālam n skaitlis $2^{182} + 8^{700} + 4^n$ ir vesela skaitļa kvadrāts?

AB.S.4. Dots, ka $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, m un n – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka n ir divu veselu skaitļu kvadrātu summa.

AB.S.5. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu veselu pozitīvu skaitļu pāru $(x; y)$, ka $x \ne y$ un $x^2 + y^3$ dalās ar $x^3 + y^2$.

BW. Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2008”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Atrodiet visus polinomus $p(x)$ ar reāliem koeficientiem, kuriem $p(0)=0$ un katram reālam x ir spēkā $p\left((x+1)^3\right)=\left(p(x)+1\right)^3$.

BW.A.2. Pierādiet: ja reāli skaitļi *a*, *b* un *c* apmierina sakarību $a^2+b^2+c^2=3$, tad $\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$. Kad izpildās vienādība?

BW.A.3. Vai eksistē tāds leņķis $\alpha\in(0,\pi/2)$, ka $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ un $ctg\alpha$, ņemti kaut kādā kārtībā, ir četri pēc kārtas sekojoši aritmētiskas progresijas locekļi?

BW.A.4. Polinoma P koeficienti ir veseli skaitļi, un pieciem dažādiem veseliem skaitļiem x izpildās $P(x)=5$. Pierādiet, ka neeksistē vesels skaitlis x, kuram $-6\leq P(x)\leq 4$ vai $6\leq P(x)\leq 16$.

BW.A.5. Romeo un Džuljetai katram ir regulārs tetraedrs, kura virsotnēs ir ierakstīti pozitīvi, reāli skaitļi. Viņi katrai šķautnei piekārto to skaitļu reizinājumu, kas ir ierakstīts tās galapunktos. Tad katrā skaldnē ieraksta to triju skaitļu summu, kas piekārtoti tās malām. Izrādās, ka četri skaitļi, kas ierakstīti Romeo tetraedra skaldnēs, sakrīt ar tie četriem skaitļiem, kas ierakstīti Džuljetas tetraedra skaldnēs. Vai no tā izriet, ka četri skaitļi, kas ierakstīti Romeo tetraedra virsotnēs, sakrīt ar četriem skaitļiem, kas ierakstīti Džuljetas tetraedra virsotnēs?

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Kopa A satur 84 elementus un ir kopas $\{1, 2, ..., 169\}$ apakškopa. Zināms, ka nekādu divu A elementu summa nav 169. Pierādīt, ka kāds no A elementiem ir naturāla skaitļa kvadrāts.

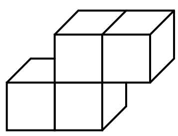
BW.K.2. Klasē ir $3n$ bērni. Katri divi bērni uzdāvina kopīgu dāvanu tieši vienam citam bērnam. Visiem nepāra n pierādiet, ka to var izdarīt tā, ka katriem trim bērniem A, B un C izpildās sekojoša īpašība: ja A un B uzdāvina dāvanu C, tad A un C uzdāvina dāvanu B.

BW.K.3. Starptautiska matemātikas konkursa dalībvalstīm bija jāizvēlas starp 9 kombinatorikas uzdevumiem. Parasti ir grūti nonākt pie kopēja viedokļa, tāpēc nebija pārsteigums, ka notika sekojošais:

- Katra valsts nobalsoja par tieši 3 uzdevumiem.
- Katras divas valstis nobalsoja par dažādām uzdevumu kopām.
- Jebkurām trim valstīm bija uzdevums, par kuru nenobalsoja neviena no tām.

Atrast maksimālo dalībvalstu skaitu, kam iespējama šāda situācija.

BW.K.4. Vai iespējams salikt $4\times4\times4$ kubu no 10.zīm. parādītās formas blokiem, kas sastāv no četriem $1\times1\times1$ kubiņiem?



10. zīm.

BW.K.5. Uz $n \times n$ lauciņu šaha galdiņa uzlikti vairāki 1×2 domino kauliņi, katrs no kuriem nosedz divas blakus rūtiņas. Zināms, ka nekādi divi kauliņi nesaskaras (pat ar stūriem nē). Atrast mazāko iespējamo n vērtību, pie kuras kopējais laukums, kuru nosedz domino kauliņi, ir 2008.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. $ABCD$ ir paralelograms. Riņķa līnija ar diametru AC krusto taisni BD punktos P un Q. Taisnes AC perpendikuls, kas iet caur punktu C, krusto taisnes AB un AD punktos X un Y. Pierādīt, ka punkti P, Q, X un Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

BW.Ģ.2. Dota riņķa līnija. Tajā ievilkta četrstūra malu garumi ir a, b, c un d. Pierādīt, ka reizinājuma $(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$ maksimālā vērtība tiek sasniegta, ja četrstūris ir kvadrāts.

BW.Ģ.3. AB ir riņķa līnijas S diametrs, un L ir šīs riņķa līnijas pieskare punktā A. Pieņemsim, ka c ir fiksēts pozitīvs reāls skaitlis, un apskatīsim visus punktu pārus (X,Y), kam X un Y atrodas uz taisnes L dažādās pusēs no A un $|AX| \cdot |AY| = c$. Taisnes BX un BY krusto S punktos P un Q. Pierādīt, ka visas taisnes PQ krustojas vienā punktā.

BW.Ģ.4. Riņķa līnijā ar diametru 1 novilktas vairākas hordas. To garumu summa ir lielāka par 19. Pierādīt, ka eksistē diametrs, kas krusto vismaz 7 hordas.

BW.Ģ.5. Dots, ka ABC ir trijstūris, M ir punkts uz malas BC un N ir punkts uz malas AB, kas izvēlēti tā, lai AM un CN būtu trijstūra ABC leņķu bisektrises. Pierādīt, ka no vienādības

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}$$

seko, ka trijstūris ABC ir vienādsānu.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Atrast visas galīgas naturālu skaitļu kopas X, kurās ir vismaz divi elementi un kurām piemīt īpašība: ja a un b $(a > b)$ pieder kopai X, tad $\dfrac{b^2}{a-b}$ arī pieder kopai X.

BW.S.2. Cik naturālu skaitļu pāru (m,n), kuriem $m < n$, apmierina vienādību

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}?$$

BW.S.3. Aplūkosim naturālu skaitļu kopu A, kuras mazākais elements ir 1001 un visu elementu reizinājums ir pilns kvadrāts. Kāda ir kopas A maksimālā elementa mazākā iespējamā vērtība?

BW.S.4. Naturāli skaitļi a un b apmierina sakarību

$$a^b - b^a = 1008.$$

Pierādīt, ka a un b ir kongruenti pēc moduļa 1008.

BW.S.5. Naturālam skaitlim n ar $S(n)$ apzīmēsim tā ciparu summu. Atrodiet izteiksmes $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$ maksimālo iespējamo vērtību.

Ieteikumi

S. Latvijas 21. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

S.9. Devītā klase

S.9.1. Apskatiet, kādas ir iespējamās c vērtības, lai izpildītos visi uzdevuma nosacījumi.

S.9.2. Ievērojiet, ka ir izveidojušies 3 vienādsānu trijstūri, un apskatiet to leņķu lielumus.

S.9.3. Izmantojiet skaitļu dalāmības pazīmes, apskatot skaitli $n+4$.

S.9.4. Vispirms atrodiet 2 monētas, kuras ir vieglākā un smagākā, lai no atlikušajām 3 atrastu vidējo.

S.9.5. Pieņemiet pretējo – ka nevar atrast šādus 3 skaitļus, apskatot 2 gadījumus: kad 0 ir vienā krāsā ar 5 un kad 0 ir vienā krāsā ar 6.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Ievērojiet, ka ir dots trešās pakāpes vienādojums, tātad viena no 2 saknēm būs divkārtīga sakne. Uzdevumu ērti atrisināt, doto vienādojumu pārveidojot par $(x-2)(x^2+2x+(a+4))=0$.

S.10.2. Atcerieties, ka četrstūrī var ievilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra divu pretējo malu summa ir vienāda ar pārējo divu malu summu.

S.10.3. Apskatiet, vai doto izteiksmju starpība dalās ar 3.

S.10.4. Atrodiet, kā jāspēlē 2. spēlētājam, lai tas neļautu 1. spēlētājam uzvarēt.

S.10.5. Sadaliet kasti 27 kubos ar izmēriem $2\times2\times2$ un iedomājieties, ka tie ir iekrāsoti „šaha galdiņa kārtībā”. Apskatiet, kā šajā iekrāsotajā kubā var novietoties klucīši ar izmēriem $1\times1\times4$.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Izmantojiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, lai pierādītu uzdevumā doto nevienādību.

S.11.2. Atcerieties, ka vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas un uz tiem balstās vienādi ievilkti leņķi. Uzdevumu ērti atrisināt, novelkot $\angle B$ bisektrisi.

S.11.3. Apzīmējiet $ab=\alpha^3$, $bc=\beta^3$, $ca=\gamma^3$, kur α,β,γ - naturāli skaitļi, un izsakiet a^2 ar šiem mainīgajiem.

S.11.4. Pierādiet, ka izdarīts pāra skaits vertikālu gājienu un pāra skaits horizontālu gājienu.

S.11.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, ka draudzību skaits var būt 4; $2)$ jāpierāda, ka draudzību skaits nevar būt mazāks.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Izsakiet y no 2. vienādojuma un ievietojiet to 1. vienādojumā.

S.12.2. Atcerieties, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

S.12.3. Sameklējiet skaitļa $B=n^2+8n^2$ priekšpēdējo ciparu un seciniet, ka tas būs arī skaitļa A priekšpēdējais cipars.

S.12.4. Sadaliet plakni 2×2 rūtiņu lielos kvadrātos un ievērojiet, ka katrs šāds kvadrāts sākumā satur 0, 1 vai 2 jau pārklātus kvadrātiņus.

S.12.5. Atcerieties, ka kopai ar m elementiem ir 2^m apakškopu.

R. Latvijas 59. rajona olimpiāde matemātikā

R.9. Devītā klase

R.9.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka $S(ABC) \geq 78$;
2) jāparāda, ka var atrast tādu trijstūri ABC, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi un $S(ABC) = 78$.

R.9.2. Apzīmējiet četrciparu skaitļa n pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar a, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli ar b un sastādiet vienādojumu.

R.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, ja $R^2 + r^2 = d^2$;
2) jāpierāda: ja abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad $R^2 + r^2 = d^2$.
Atcerieties, ka pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta.

R.9.4. Apzīmējiet dotā kvadrātvienādojuma saknes ar x_1 un x_2, kur $x_1 < x_2$, un apskatiet $x^2 + px + q$ vērtību, kad $x \notin (x_1; x_2)$ un $x \in (x_1; x_2)$.

R.9.5. a) Apskatiet, kāds ir iespējamais paziņu skaits vienam cilvēkam, un pieņemiet, ka katram no n cilvēkiem paziņu skaits ir citāds.
b) Pie $n = 4$ atrodiet tādu pazīšanās iespēju, kas parāda, ka rūķīša Muribura apgalvojums ir nepatiess.
Pie $n = 2009$ apskatiet divu tādu cilvēku, kam šajā grupā paziņu daudzumi ir vienādi, iespējamās draudzības ar pārējiem n-2 cilvēkiem.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka meklētais skaitlis nav mazāks kā 858; 2) jāparāda, ka skaitli 858 var izteikt gan kā 11, gan kā 12, gan kā 13 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

R.10.2. Izsakiet dotā trijstūra un taisnes t „atšķeltā” trijstūra laukumus, izmantojot ievilktās riņķa līnijas rādiusus, un izveidojiet vienādību.

R.10.3. Lai pierādītu, ka $(a+b)^3$ dalās ar $a \cdot b$, atcerieties, ka $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, un pierādiet, ka katrs saskaitāmais dalās ar $a \cdot b$.
Lai pierādītu, ka $(a+b)^2$ ne vienmēr dalās ar $a \cdot b$, atrodiet tādas a un b vērtības, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, taču neatbilst šim apgalvojumam.

R.10.4. Pārveidojiet šo vienādojumu, iegūstot vienādojumu, kur triju kvadrātu summa pielīdzināta nullei.

R.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka ar 100 pieskāršanās reizēm var ieslēgt visas spuldzītes; 2) jāpierāda, ka nevar ieslēgt visas spuldzītes ar mazāk kā 100 pieskāršanās reizēm. Var pieņemt, ka eksistē spuldzīte, kurai nepieskaras, un atcerēties, ka katrai spuldzītei savu stāvokli jāmaina nepāra skaitu reižu.

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. a) parādiet piemēru, kurš apmierina uzdevuma prasības.

b) pierādiet, ka nevar atrast tādu septiņstūri, kurš apmierina uzdevuma prasības, salīdzinot pēc lieluma blakus virsotnēs ierakstītos skaitļus.

c) pierādiet, ka nevar atrast tādu desmitstūri, kurš apmierina uzdevuma prasības, apskatot tās piecas virsotnes, kas veido regulāru piecstūri.

d) parādiet piemēru, kas apmierina uzdevuma prasības.

R.11.2. No dotā vienādojuma izsakiet y un novērtējiet, kādas var būt x vērtības, lai y būtu vesels nenulles skaitlis.

R.11.3. Apskatiet 2 gadījumus:

- $x \geq 2$,
- $x < 2$.

R.11.4. Izmantojiet teorēmu par sekanšu nogriežņu garumu reizinājumiem.

R.11.5. Apskatiet 2 gadījumus:

- No viena punkta iziet 3 balti un 3 sarkani nogriežņi.
- No viena punkta iziet vismaz 4 vienas krāsas nogriežņi.

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Atcerieties, ka $|\cos t| \leq 1$, un ievērojiet, ka tādā gadījumā jāpierāda:

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) \neq 3 .$$

R.12.2. Apskatiet pirmās iespējamās p vērtības un gadījumu, kad $p > 5$, lai pierādītu, ka n ciparu summa nevar būt mazāka kā 9.

R.12.3. Veiciet ekvivalentus pārveidojumus un iegūstiet, ka $x = y = 1 + \sqrt{2}$.

R.12.4. Izmatojiet teorēmu par hordu nogriežņu garumu reizinājumiem.

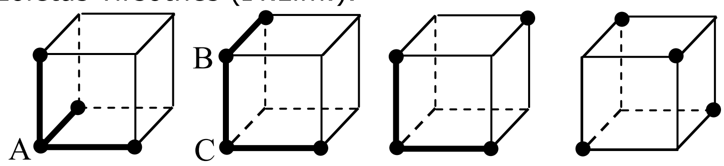
R.12.5. Ievērojiet, ka četras paralēlskaldņa virsotnes, kas neatrodas vienā plaknē, var izvēlēties četros būtiski dažādos veidos atkarībā no tā, kā tās savienotas vai nav savienotas ar šķautnēm:

a) viena virsotne un trīs ar to savienotās (I1.zīm.),

b) četras virsotnes „ķēdītē” (I2.zīm.),

c) trīs virsotnes „ķēdītē” un viena virsotne pretējā skaldnē (I3.zīm.),

d) četras izolētas virsotnes (I4.zīm.).



I1. zīm. I2. zīm. I3. zīm. I4. zīm.

V. 59. Latvijas 59. republikas olimpiāde matemātikā

V.9. Devītā klase

V.9.1. Atrodiet dotā vienādojuma saknes un pierādiet, ka gan $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1$, gan $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 1$ izpildās tad un tikai tad, ja $a = 0$.

V.9.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, ka var atrast 3 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kas visi ir vienkārši; $2)$ jāpierāda, ka nevar atrast vairāk kā 3 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kas visi ir vienkārši.

V.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, kā plaknes kvadrātiņus nokrāsot 8 krāsās; $2)$ jāpierāda, ka plaknes kvadrātiņus nevar nokrāsot mazāk kā 8 krāsās.

V.9.4. Atcerieties, ka taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu ir puse no hipotenūzas.

V.9.5. Pieņemiet, ka tenisistam A noslēgumā ir visvairāk uzvaru, un ņemiet jebkuru citu tenisistu B. Ievērojiet: ja A zaudējis B, tad jābūt tādam tenisistam C, ka $A \to C \to B$.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Ievērojiet, ka $ANCP$ un $BMAP$ ir rombi.

V.10.2. Ievērojiet, ka $2n$ pēc kārtas ņemti virknes locekļi var būt vai nu $3k+1; 3k+2; 3k+4; 3k+5; \ldots; 3k+3n-2; 3k+3n-1$, vai $3k+2; 3k+4; 3k+5; 3k+5; ...; 3k+3n-2; 3k+3n-1; 3k+3n+1$.

V.10.3. 16 kartīšu gadījumā atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāpierāda, ka ar 5 jautājumiem nepietiek; $2)$ jāpierāda, ka ar 6 jautājumiem Andris var iegūt 16 skaitļu reizinājumu, izmantojot to, ka jebkurš nenulles skaitlis un šī skaitļa trešā pakāpe ir vienādzīmju skaitļi.

17 kartīšu gadījumā jāparāda, ka ar 7 jautājumiem pietiek, līdzīgi kā 16 kartīšu gadījumā.

V.10.4. Atcerieties, ka $|a+b| \le |a| + |b|$.

V.10.5. Pierādiet un izmantojiet to, ka gan B, C, M, X, gan B, Y, N, A atrodas uz vienas riņķa līnijas, lai pierādītu, ka O ir ΔNBM augstumu krustpunkts.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, ka var izveidot aritmētisku progresiju ar 3 locekļiem; $2)$ jāpierāda, ka 4 skaitļi nevar veidot vienu aritmētisku progresiju.

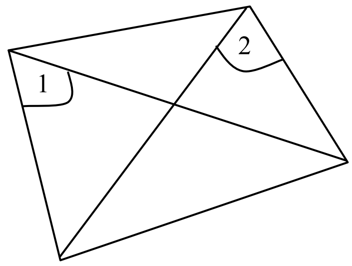
V.11.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāpierāda, ka lielākais kopīgais dalītājs nevar būt lielāks kā 24; $2)$ jāpierāda, ka visi apskatāmie skaitļi dalās ar 24.

V.11.3. Iegūstiet, ka $x = y$, no otrā vienādojuma atņemot pirmo un veicot identiskus pārveidojumus.

V.11.4. Apskatiet divu izvēlēto skaitļu iespējamās starpības, lai pierādītu, ka no 10 Andra uzrakstītajiem skaitļiem var izvēlēties tādus, kuriem $a-b=c-d$, un seciniet prasīto. Ievērojiet, ka jāapskata arī gadījums, kad $b=c$.

V.11.5. Izmantojiet šajā risinājumā divus faktus:

- Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad ja $\angle 1 = \angle 2$ (skat. I5.zīm.).



I5. zīm.

- II. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Ievērojiet, ka $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \ldots = x_{12} + y_{12} = 11$ un $x_1 + \ldots + x_{12} = y_1 + \ldots + y_{12}$.

V.12.2. Izsakiet Katrīnas uzrakstīto skaitli kā $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ un izmantojiet to, lai izteiktu Maijas uzrakstīto skaitļu summu.

V.12.3. Atlieciet uz *BC* pagarinājuma $CG = AE$, lai pierādītu, ka $EF = GF$, kas ļautu viegli pierādīt prasīto.

V.12.4. Pierādiet, ka uzdevuma nosacījumiem atbilstoša vārdnīcu sistēma iespējama jebkuram nepāra skaitam valodu n, $n \geq 3$, izmantojot matemātisko indukciju.

V.12.5. Apskatiet doto vienādojumu kā vienādojumu attiecībā uz a ar parametru x un atrodiet šī vienādojuma saknes. Tad apskatiet vienādojumu $(a-a_1)(a-a_2)=0$.

A. Latvijas 36. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Atrodiet x vērtību, pie kuras visiem dotajiem funkciju grafikiem jāiet caur vienu punktu.

A.9.2. Celiet dotās nevienādības kvadrātā un pēc saskaitīšanas savelciet līdzīgos locekļus.

A.9.3. Atbilde: jā.

A.9.4. a) šādus skaitļus viegli atrast, pat neizmantojot kādu īpašu meklēšanas paņēmienu;

b) Apskatiet, kādi dalītāji ir skaitlim p^{n-1}, kur p – pirmskaitlis, n – vesels pozitīvs skaitlis.

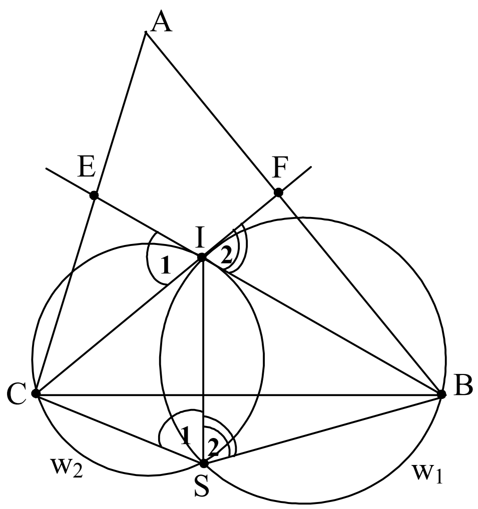
A.9.5. Atrodiet, kā 2×2 rūtiņu kvadrātā ar 3 krāsu maiņām var mainīt vienas rūtiņas krāsojumu.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Ievērojiet, ka visām parabolām zari vērsti uz augšu un tās krusto abscisu asi 2 punktos.

A.10.2. Apzīmējiet $p = 2k+1, \quad q = 2n+1$, kur k, n – naturāli skaitļi, un apskatiet skaitli $p+q$.

A.10.3. Novelciet uzdevumā minētās bisektrises (skat. I6.zīm.) un pierādiet, ka vienādi atzīmētie leņķi ($\angle 1$ un $\angle 2$) ir vienādi. Tad izmantojiet ievilkto leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašības, lai pierādītu, ka $\angle A + \angle CSB = 180°$.



I6. zīm.

A.10.4. Izmantojiet nevienādību $x+y \geq \dfrac{4}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$, kas ir spēkā pozitīviem x un y.

A.10.5. Atbilde: jā, var.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Veicot identiskus pārveidojumus, iegūstiet, ka katram $n > 0$ pastāv vienādība $\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right]$, un izmantojiet to, lai pierādītu uzdevumā doto nevienādību.

A.11.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāpierāda, ka pēc $2n-2$ vai mazāk spēlēm visiem spēlētajiem nevar būt 0 punkti; $2)$ jāparāda gadījums, kad pēc $2n-1$ spēlēm visiem spēlētājiem atkal ir 0 punkti.

A.11.3. Pierādiet, ka S priekšpēdējais cipars ir 0, pierādot, ka S dalās gan ar 4, gan ar 25.

A.11.4. Izmantojiet faktu, ka izliektā četrstūrī $XYZT$, kam nav paralēlu malu, nogriežņu XZ, YZ, YT un XT viduspunkti ir paralelograma virsotnes. Turklāt, ja $XY = ZT$, tad šis paralelograms ir rombs. Izmantojiet četrstūrus, kuriem pretējās malas vienādas.

A.11.5. Pierādiet, ka iz spēkā gan nevienādība $x^4y^4z^4 \le (4x-3)(4y-3)(4z-3)$, gan nevienādība $x^4y^4z^4 \ge (4x-3)(4y-3)(4z-3)$, un seciniet, ka $x = y = z = 1$.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Atcerieties, ka aritmētiskās progresijas locekļi koordinātu plaknē izvietojas uz taisnes, bet ģeometriskās progresijas locekļi – uz eksponentfunkcijas grafika.

A.12.2. Pierādiet, ka $(x+y+z)^2 > 3(x+y+z)$.

A.12.3. **a)** Izsakiet R kā polinomu un seciniet, ka R nevar būt kāda naturāla skaitļa kvadrāts.
b) Pierādiet, ka $n+1$ nav kopīgu dalītāju ar $n(n+2)(n+3)$ un tādā gadījumā, lai R būtu kubs, arī skaitļiem $n+1$ un $n(n+2)(n+3)$ ir jābūt kāda naturāla skaitļa kubiem.

A.12.4. Izvēlieties K uz stara DC tā, ka $\angle BKC = \angle BDA$, lai pierādītu, ka $\Delta BCK \sim \Delta BAD$ un secinātu, ka $CD = CK$. Izmantojiet līdzību $\Delta ABC \sim \Delta DBK$, lai pierādītu uzdevumā prasīto.

A.12.5. Pieņemiet, ka n ir lielākais konfekšu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija, un pierādiet, ka otrais spēlētājs var uzvarēt arī situācijā, kad uz galda atrodas n^2+n+1 konfekte.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 50.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 4. kārta

VP.1.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, ka par atbildi der $(m,n)=(k,k^2)$ un $(m,n)=(k^2,k)$, kur $k \in N$, $k>1$; $2)$ jāpierāda, ka nevar atrast citus m un n, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

VP.1.2. Izmantojiet Košī – Bunjakovska nevienādību vektoriem $\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}},...,\frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)$ un $\left(\sqrt{x_1},...,\sqrt{x_n}\right)$.

VP.1.3. Izmantojiet Holla teorēmas „precību variantu": ja ir n puiši, n meitenes un ir zināms, ka visiem k, $1 \le k \le n$, katri k puiši kopumā pazīst vismaz k meitenes, tad jauniešus var sadalīt pa pāriem tā, ka katrā pārī ir puisis un meitene, kas viens otru pazīst.

VP.1.4. Ievērojiet, ka eksistē riņķa līnijas caur punktiem A, B_1, H, C_1; H, A_1, B, C_1; B_1, Q, C_1, R. Izmantojot faktu, ka mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, un šīs riņķa līnijas, pierādiet, ka $\angle QRB_1 = \angle AHB_1$.

VP.1.5. Visām griešanas/pārvietošanas procesā piedalošamies daļām uz malām atlieciet bultiņas tā, ka iegūtie vektori veido pozitīvā virzienā orientētu ciklu.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 2.maijā

VP.2.1. Pārveidojiet dotās nevienādības kreiso pusi, līdz variet iegūto izteiksmi izteikt kā summu $\sum\limits_{i+j+l=k-2} a^i b^j c^l$, un izmantojiet sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

VP.2.2. Atrodiet zīmējumā vairākas vienādsānu trapeces. Pierādiet, ka apskatāmā trijstūra malas paralēlas šo trapeču pamatiem.

VP.2.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāpierāda, ka n vērtība nebūs lielāka kā n; $2)$ jāparāda, ka n vērtība var būt 8.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 3.maijā

VP.3.1. Uzdevuma atrisinājumam piedāvājam divus variantus. Pierādiet uzdevumā doto nevienādību: 1) izmantojot matemātisko indukciju; 2) apskatot funkciju $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Pierādiet, ka tā ir izliekta uz leju, un izmantojiet Jensena nevienādību.

VP.3.2. Izdariet homotētiju ar centru P un koeficientu $k=-\frac{R_2}{R_1}$, kurā $w_1 \to w_2$.

VP.3.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: $1)$ jāparāda, ka dotās izteiksmes vērtība var būt 4; $2)$ jāpierāda, ka dotās izteiksmes vērtība nevar būt 0, 1, 2 un 3.

IMO. 50. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (50th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2009. gada 15. jūlijā.

IMO.1. Izsakiet doto kongruenču formā: $a_i a_{i+1} \equiv a_i$ (mod n) visiem $i = 1$, 2, ..., $k-1$, un pieņemiet pretējo pierādāmajam: $a_k a_1 \equiv a_k$ (mod n).

IMO.2. Izmantojiet trijstūra viduslīnijas, ievilktu leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašības, lai secinātu, ka $AP \cdot CP = AQ \cdot BQ$. No šī fakta un teorēmas par hordu nogriežņu reizinājumiem iegūstiet vajadzīgo.

IMO.3. Pierādiet prasīto, apskatot $d_n = S_{n+1} - S_n$, $n = 1$; 2; ... un pierādot, ka visi skaitļi d_n ir vienādi. Pierādiet, ka visi skaitļi d_n ir ierobežoti, lai no ierobežotības iegūtu, ka eksistē $\min\{d_n | n \in N\}$ un $\max\{d_n | n \in N\}$. Pierādiet, ka $\min\{d_n | n \in N\} = \max\{d_n | n \in N\}$, pieņemot pretējo.

IMO. Uzdevumi 2009. gada 16. jūlijā.

IMO.4. Apskatiet punktu, kas simetrisks punktam E attiecībā pret leņķa C bisektrisi, un šķirojiet gadījumus atkarībā no tā, kā šis punkts novietojas uz taisnes BC.

IMO.5. Pierādiet, ka der tikai funkcija $f(x) \equiv x$.

IMO.6. Izmantojiet matemātisko indukciju pēc parametra n, ievērojot, ka $n \geq 1$. Šķirojiet divus gadījumus: kad kopas M minimālais elements d mazāks nekā a_n un kad $d \geq a_n$.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2008”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Celiet doto vienādību kvadrātā un iegūtajā vienādībā ievietojiet doto izteiksmi.

AB.A.2. Lietojiet Košī – Bunjakovska nevienādību.

AB.A.3. Apskatiet gadījumus, kad $x > y$ un $x < y$. Iegūstiet pretrunas un seciniet, ka $x = y = z$.

AB.A.4. Apskatiet sākotnējo un iegūstamo funkciju atvasinājumus punktā $x = 1$.

AB.A.5. Pieņemiet, ka šāda funkcija eksistē, un iegūstiet pretrunu, apskatot, kādas vērtības pieņem vienādības labā un kreisā puse.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Sāciet ar lielu kvadrātu, kurā melno rūtiņu daļa ir maza, un pakāpeniski šo kvadrātu samaziniet.

AB.K.2. Apskatiet, kā no $(n+1)$-ciparu skaitļiem var iegūt $(n+2)$-ciparu skaitļus.

AB.K.3. Attēlojiet doto situāciju ar grafu, kur spēlētāji – virsotnes, savukārt notikušās spēles – šķautnes.

AB.K.4. Apzīmējiet monētas ar m_1, m_2, ... , m_{2n} un izdariet $n+1$ mērījumus: $(m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}) + m_{2n-i}$, $i = 0$; 1; 2; ... ; n. Pierādiet, ka, veicot aprēķinus, var uzzināt a un b vērtības.

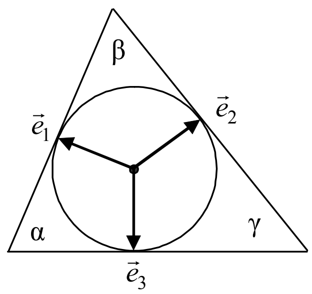
AB.K.5. Lietojiet Dirihlē principu.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Pierādiet, ka $NV \parallel AC$, un izmantojiet Čevas teorēmu, lai pierādītu uzdevumā prasīto.

AB.Ģ.2. Apskatiet homotētiju ar centru punktā M, kurā $\omega_1 \to \omega_2$.

AB.Ģ.3. Apskatiet vektorus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (skat. I7.zīm.), izvēloties mērogu tā, ka tie ir vienības vektori. Izmantojiet faktu, ka $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$.



I7.zīm.

AB.Ģ.4. Atcerieties, ka četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$, ja tā virsotnes atrodas uz vienas riņķa līnijas.

AB.Ģ.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda piemērs, kurā „ tukšā” taisnstūra laukums ir 25; 2) jāpierāda, ka „tukšā” taisnstūra laukums nevar būt lielāks. To var darīt, pieņemot pretējo.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Izmantojiet faktu: sadalot $\{1;2;...;2008\}$ grupās G_0, G_1, ..., G_7 atkarībā no tā, kādu atlikumu dod skaitļi, dalot ar 8, katrā grupā ir tieši 251 skaitlis.

AB.S.2. Ievērojiet, ka no naturāliem skaitļiem sastāvošas ģeometriskas progresijas elementi dalās tikai ar tiem pirmskaitļiem, ar ko dalās tās pirmais loceklis vai kvocients.

AB.S.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka dotais skaitlis ir vesela skaitļa kvadrāts pie $n = 2008$; 2) jāpierāda, ka n nevar būt lielāks par 2008.

AB.S.4. Veiciet identiskus pārveidojumus ar doto vienādojumu, līdz iegūstiet, ka $3(2m+1)^2 = (2n+1)(2n-1)$. Seciniet un izmantojiet to, ka viens no skaitļiem $2n+1$ un $2n-1$ ir vesela skaitļa kvadrāts.

AB.S.5. Meklējiet risinājumus formā $y = k \cdot x$, kur $k \in N, k \geq 2$.

BW. Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2008”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Apskatiet skaitļu virkni a_n, $n = 0;1;2;...$, kuru definē ar nosacījumiem $a_0 = 0$; $a_{n+1} = (a_n + 1)^3$ pie $n \geq 0$. Ievērojiet: ja visiem $n = 0;1;2;...$ pastāv vienādība $p(a_n) = a_n$, tad polinomam $p(x) - x$ būs bezgalīgi daudz sakņu.

BW.A.2. Izmantojiet Košī-Bunjakovska nevienādību, lai pierādītu, ka dotās nevienādības kreisā puse ir lielāka vai vienāda ar $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+9}$. Izmantojiet arī nevienādību: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

BW.A.3. Pierādiet, ka šāds leņķis neeksistē, pieņemot pretējo un secinot, ka pie $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ progresijas mazākais loceklis ir $\sin\alpha$, bet $ctg\alpha$ - tās lielākais loceklis.

BW.A.4. Pierādiet prasīto, pieņemot pretējo: eksistē tāds vesels skaitlis x, ka $1 \leq |P(x) - 5| \leq 11$.

BW.A.5. Pierādiet, ka augstākais viens Romeo skaitlis ir lielāks par atbilstošo Džuljetas skaitli un augstākais viens Romeo skaitlis ir mazāks par atbilstošo Džuljetas skaitli, un seciniet, ka Romeo un Džuljetas tetraedru virsotnēs ierakstītie skaitļi sakrīt.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Ievērojiet, ka kopa A var saturēt tikai vienu elementu no kopas $\{x; 169 - x\}$, kur $x = 1;2;...;84$.

BW.K.2. Nodibiniet vairākus klubus tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

- katrā klubā ir tieši 3 bērni,
- katri divi bērni kopā ir tieši vienā klubā.

Līdz ar to dāvanas varēs pasniegt sekojoši: katri divi bērni, kas ir vienā klubā, pasniedz kopīgu dāvanu trešajam šī kluba loceklim.

BW.K.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka uzdevumā dotā situācija iespējama, ja ir 56 dalībvalstis; 2) jāpierāda, ka dalībvalstu skaits nevar būt lielāks kā 56.

BW.K.4. Atrodiet veidu, kā ir iespējams salikt $4 \times 4 \times 4$ kubu no uzdevumā dotās formas blokiem.

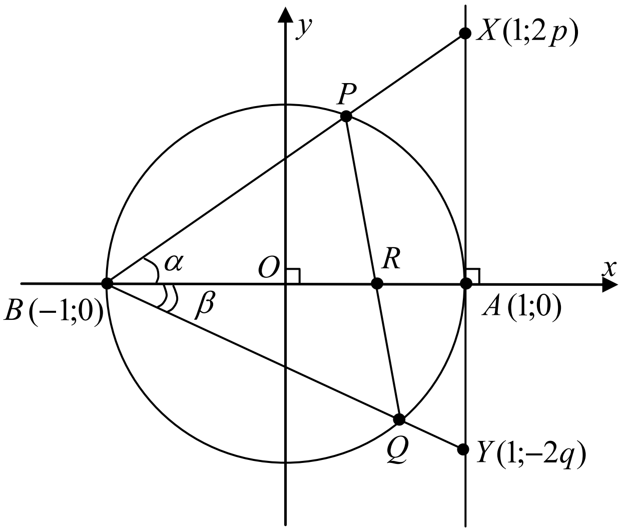
BW.K.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja $n = 77$; 2) jāpierāda, ka kvadrātā 76×76 nosegt laukumu 2008 neizdosies, pieņemot pretējo.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Apskatiet divus gadījumus: kad $BD \| XY$ (tad $ABCD$ - rombs) un kad BD un XY krustojas punktā M (tad MC ir pieskare un var izmantot teorēmu par sekanti un pieskari).

BW.Ģ.2. Izmantojiet Ptolomeja teorēmu un trijstūra laukuma formulu $L = \frac{xyz}{4R}$.

BW.Ģ.3. Ieviesiet koordinātu sistēmu, kā parādīts I8.zīm., un pierādiet, ka visas taisnes PQ krusto Ox asi vienā un tai pašā punktā.



I8. zīm.

BW.Ģ.4. Ievērojiet, ka riņķa līnijas garums ir $\pi \cdot 1$, un apskatiet hordu mazākos savilktos lokus.

BW.Ģ.5. Pierādiet, ka NM perpendikulārs leņķa B bisektrisei.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka kopa $\{n; 2n\}$, kur n - patvaļīgs naturāls skaitlis, atbilst uzdevuma prasībām.; 2) jāpierāda, ka citu kopu ar šo īpašību nav, pieņemot pretējo.

BW.S.2. Apzīmējiet $m = dx$ un $n = dy$, kur $d = LKD(m,n)$ un pārveidojiet doto vienādojumu par $3dxy = 2008(x+y)$, kur $LKD(x,y) = 1$.

BW.S.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, ka kopas A maksimālā elementa mazākā iespējamā vērtība var būt 1040; 2) jāpierāda, ka maksimālais A elements nevar būt mazāks par 1040, ievērojot, ka A jāsatur skaitļa 13 daudzkārtnis, kas ir lielāks par $1001 = 13 \cdot 77$, un apskatot trīs iespējas: $13 \cdot 78 \in A$; $13 \cdot 79 \in A$ un $13 \cdot n \in A$, $n \geq 80$.

BW.S.4. Pierādiet, ka $LKD(a, 1008) = LKD(b, 1008) = 1$ un izmantojiet Eilera teorēmu. Turpmākajā risinājumā izmantojiet lemmu: ja 1008 dalās ar n, $LKD(a, \varphi(n)) = 1$ un $LKD(b, \varphi(n)) = 1$, kā arī $a \equiv b \bmod \varphi(n)$, tad $a \equiv b \bmod n$.

BW.S.5. Izmantojiet faktu, ka naturāliem skaitļiem a un b ir spēkā nevienādība: $S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$.

Atrisinājumi

S. Latvijas 21. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

S.9. Devītā klase

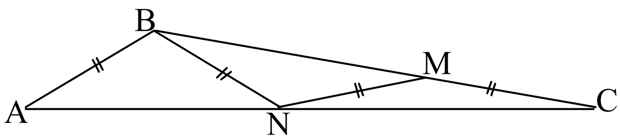
S.9.1. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad $c \le 6$. Tā kā $a<b<c$ un *a, b, c* – naturāli skaitļi, tad $a+b \le 4+5=9$, kas ir pretrunā ar uzdevumā doto nosacījumu: $a+b=10$.

Apskatīsim gadījumu, kad $c \ge 8$. Tā kā $c<d<e$ un *c, d, e* – naturāli skaitļi, tad $d+e \ge 9+10=19$, kas ir pretrunā ar uzdevumā doto nosacījumu: $d+e=18$.

Tā kā $6<c<8$, tad $c=7$.

Izmantojot uzdevumā dotos nosacījumus, aprēķinām uzdevumā prasīto: $a+b+c+d+e=(a+b)+c+(d+e)=10+7+18=35$.

S.9.2. Apskatām ΔNMC (skat. A1.zīm.). Tā kā $CM=MN$, tad ΔNMC - vienādsānu. Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata vienādi, tāpēc $\angle MNC=\angle MCN=\angle BCA=20°$. Tā kā trijstūra leņķu summa ir $180°$, tad $\angle NMC=180°-\angle MNC-\angle MCN=140°$.



A1.zīm.

Tā kā blakusleņķu summa ir $180°$, tad $\angle BMN=180°-\angle NMC=40°$.

Līdzīgi apskatām ΔMNB. Tā kā $MN=NB$, tad $\angle NMB=\angle BMN=40°$. Tādā gadījumā $\angle BNM=180°-\angle NMB-\angle MBN=100°$.

Ievērojam, ka $\angle BNA=180°-\angle BNM-\angle MNC=60°$.

Apskatot ΔABN, secinām, ka arī tas ir vienādsānu, jo $NB=BA$, tātad $\angle BAN=\angle BNA=60°$. Tādā gadījumā arī $\angle ABN=180°-\angle BAN-\angle BNA=60°$. Varam secināt, ka ΔABN ir regulārs, no kā seko, ka $AN=BN$, kas arī bija jāpierāda.

S.9.3. Skaitļa n ciparu summa ir $11(1+2+3+4)=110$. Ja mēs skaitlim *n* pieskaitām 4, pārnesumi nerodas, tāpēc $n+4$ ciparu summa ir $11(1+2+3+4+4)=114$. Tā kā skaitļa *n*+4 ciparu summa dalās ar 3, tad arī pats skaitlis $n+4$ dalās ar 3. Tā kā $n+4>3$, tad tas nevar būt pirmskaitlis.

S.9.4. Vispirms atradīsim vieglāko un smagāko monētu. Uzdodam jautājumu par jebkurām 3 monētām un vidējo no šīm monētām noliekam malā. Otro jautājumu uzdodam par jebkurām 3 no atlikušajām 4 monētām un vidējo noliekam malā. Pašlaik mums ir atlikušas 3 monētas, no kurām atkal vidējo noliekam malā. Līdz ar to ir palikušas 2 malā nenoliktas monētas, kuras arī ir smagākā un vieglākā no visām (mēs nezinām, „kura ir kura", bet šajā uzdevumā to uzzināt nav nepieciešams).

Tagad uzdodam jautājumu par „malā noliktajām" monētām. Atrodam vidējo no šīm 3 monētām, kas ir arī vidējā no visām 5 monētām.

S.9.5. To, ka skaitlis *n* ir nokrāsots balts/sarkans, pierakstīsim kā *n*~b/*n*~s; varam uzskatīt, ka 5~b un 6~s.

Tagad pieņemsim no pretējā, ka uzdevuma apgalvojums nav spēkā un tātad nevar atrast 3 vienādi nokrāsotus skaitļu, kuru summa ir 0. Šķirojam divus gadījumus:

A: 0 ~ s

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-6) + 0 + 6	(-6) ~ b
1 + 5 + (-6)	1 ~ s
(-1) + 0 + 1	(-1) ~ b
(-4) + (-1) + 5	(-4) ~ s
(-2) + (-4) + 6	(-2) ~ b
4 + 0 + (-4)	4 ~ b
2 + 4 + (-6)	2 ~ s
(-2) + 0 + 2	(-2) ~ b
3 + (-1) + (-2)	3 ~ s
(-3) + 0 + 3	(-3) ~ b

Iegūta pretruna, jo (-3) + (-2) + 5 = 0, tātad var atrast 3 balti nokrāsotus skaitļus, kuru summa ir 0.

B: 0 ~ b

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-5) + 0 + 5	(-5) ~ s
(-1) + (-5) + 6	(-1) ~ b
1 + 0 + (-1)	1 ~ s
4 + 1 + (-5)	4 ~ b
(-4) + 0 + 4	(-4) ~ s
3 + (-4) + 1	3 ~ b
(-3) + 0 + 3	(-3) ~ s
2 + (-3) + 1	2 ~ b
(-2) + 0 + 2	(-2) ~ s

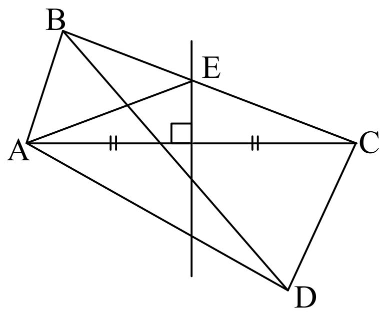
Iegūta pretruna, jo (-2) + (-4) + 6 = 0, tātad var atrast 3 sarkani nokrāsotus skaitļus, kuru summa ir 0.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Atbilde: $a=-3$ un $a=-12$.

Risinājums. Vienādojumu var pārveidot par $(x-2)(x^2+2x+(a+4))=0$.
Ievērojam, ka viena no saknēm ir $x=2$. Šķirojam 2 iespējas:
a) $x=2$ ir vienkārtīga sakne. Apskatām vienādojumu $x^2+2x+(a+4)=0$.
Šim vienādojumam ir viena divkārtīga sakne, tātad $D=4-4(a+4)=0 \Rightarrow$ $-4a=12 \Rightarrow a=-3$. Ievietojot šo vērtību vienādojumā, iegūstam vienādojumu $x^2+2x+1=0$, kuram ir divkārtīga sakne $x=-1$. Tātad atrastā vērtība $a=-3$ der.
b) $x=2$ ir divkārtīga sakne. Tad šī ir arī kvadrātvienādojuma $x^2+2x+(a+4)=0$ sakne $\Rightarrow$ $4+4+(a+4)=0$ $\Rightarrow$ $a=-12$. Ievietojot šo vērtību vienādojumā, iegūstam vienādojumu $x^2+2x-8=0$, kuram ir 2 saknes: $x=2$ un $x=-4$. Tātad der arī vērtība $a=-12$.

S.10.2. Saskaņā ar doto B un D atrodas dažādās pusēs vidusperpendikulam. Pierādīsim, ka tādā gadījumā $BA<BC$. Apzīmējam perpendikula un četrstūra malas BC krustpunktu ar E (skat. A2.zīm.).



A2.zīm.

Apskatām trijstūri ΔAEC. Tas ir vienādsānu, jo trijstūrī augstums pret pamatu ir arī mediāna, tātad $AE=EC$. Tādā gadījumā $BE+AE=BE+EC$

jeb $BE + AE = BC$. Tā kā jebkurā trijstūri vienas malas garums ir mazāks kā divu pārējo malu summa, tad $AB < BE + AE = BC$

Līdzīgi pierādām, ka ir spēkā nevienādība: $DC < DA$.

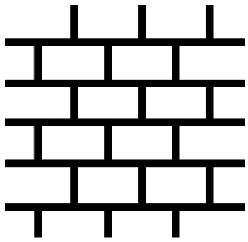
Varam secināt, ka $AB + DC < BC + DA$.

Bet, ja $ABCD$ varētu ievilkt riņķa līniju, tad būtu $BA + DC = BC + DA$ - tātad esam ieguvuši pretrunu un varam secināt, ka šajā četrstūrī nevar ievilkt riņķa līniju.

S.10.3. Ja $2n^3 + 4n$ dalās ar 3, bet $n^3 + 5n$ nedalās ar 3 pie kādas naturālas n vērtības vai otrādi, tad šo izteiksmju starpība arī nedalās ar 3. Tā kā $(2n^3 + 4n) - (n^3 + 5n) = n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$ dalās ar 3 kā triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums, tad dotās izteiksmes dalīsies ar 3 pie vienām un tām pašām naturālām n vērtībām.

S.10.4. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Otrais spēlētājs var domās sadalīt rūtiņas pāros „ķieģeļu sienas" formā (skat. A3.zīm.) un uz katru pirmā spēlētāja gājienu atbildēt ar gājienu tai pašā „ķieģelī". Tā kā katrs četru rūtiņu kvadrāts vienu „ķieģeli" satur pilnībā, tad tas saturēs arī vismaz vienu otrā spēlētāja nokrāsoto rūtiņu.



A3.zīm.

S.10.5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Ievērojam, ka kastes tilpums $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ ir lielāks nekā klucīšu tilpums $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 53 = 212$. Līdz ar to mēs uzreiz nevaram secināt, ka klucīšus nevar savietot kastē. Apskatīsim, kā šie klucīši var izvietoties kastē.

Sadalīsim kasti 27 kubos ar izmēriem $2 \times 2 \times 2$ un izkrāsosim šos kubus „šaha galdiņa kārtībā". Varam uzskatīt, ka ir 13 melni kubi (varam pieņemt arī, ka ir 13 balti kubi, tas neietekmē atrisinājumu), tātad pavisam kopā ir $13 \cdot 8 = 104$ melni kubiņi.

Ievērojam, ka katrs klucītis ar izmēriem $1 \times 1 \times 4$ satur tieši 2 melnus kubiņus, tātad kopā jābūt vismaz $53 \cdot 2 = 106$ melniem kubiņiem. Esam ieguvuši pretrunu.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Ievērojam, ka $3a^8 + 5b^8 = a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8$.

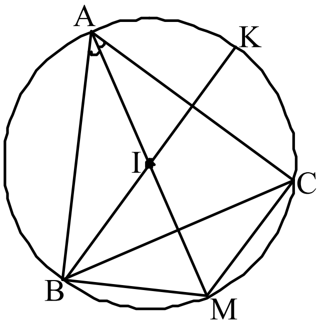
Izmantojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8}{8} \geq \sqrt[8]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8}$$

$$a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 \geq 8 \cdot \sqrt[8]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8}$$

Tātad $3a^8 + 5b^8 \geq 8a^3b^5$, kas arī bija jāpierāda.

S.11.2. Tā kā $\angle BAM = \angle CAM$, tad $\cup BM = \cup CM$ (skat. A4.zīm.). Vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas, tāpēc $MB = MC$. Atliek pierādīt, ka $MB = MI$.



A4. zīm.

Novelkam $\angle B$ bisektrisi. Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad vienādību $MB = MI$ pierādījumā varam aizstāt ar $\angle IBM = \angle BIM$. Ši vienādība ir patiesa, jo:

a) $\angle IBM = \frac{1}{2}(\cup KC + \cup CM)$,

b) $\angle BIM = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup BM)$ (iekšējā leņķa īpašība),

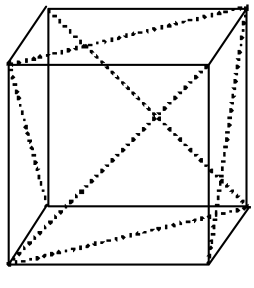
c) $\cup KC = \cup AK$ un $\cup CM = \cup BM$.

S.11.3. Apzīmēsim $ab = \alpha^3$, $bc = \beta^3$, $ca = \gamma^3$, kur α, β, γ - naturāli skaitļi.

Varam izteikt $a^2 = \frac{(ab)\cdot(ac)}{bc} = \frac{\alpha^3 \cdot \gamma^3}{\beta^3} = \left(\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}\right)^3$. Tātad a^2 ir racionāla skaitļa kubs. Tā kā a^2 pats ir naturāls skaitlis, tad $k = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}$ arī ir naturāls skaitlis (ja *k* būtu nesaīsināma daļa ar saucēju >1, tad arī k^3 būtu nesaīsināma daļa ar saucēju >1). Tātad $a^2 = k^3, k \in N$. Varam secināt, ka a^2 katru savu pirmreizinātāju satur ar kāpinātāju, kas dalās ar 3. Tā kā šis kāpinātājs ir 2 reizes lielāks par kāpinātāju, ar kuru attiecīgo pirmreizinātāju satur *a*, tad attiecīgais kāpinātājs skaitlī *a* dalās ar 3. No tā seko vajadzīgais par *a*.
Apgalvojumu skaitļiem *b* un *c* pierāda līdzīgi.

S.11.4. Dabīgā veidā ieviešam jēdzienus „horizontāls gājiens" (*hg*) un „vertikāls gājiens" (*vg*). Katrs *vg* pirmās un trešās kolonnas summu maina par 0 vai par 2, katrs *hg* – par 1. Procesa beigās šī summa mainījusies par pāra skaitli (no pāra skaitļa uz pāra skaitli). Tāpēc izdarīts pāra skaits *hg*.
Līdzīgi pierāda, ka izdarīts pāra skaits *vg*, apskatot pirmās un trešās rindas summu.

S.11.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām piemēru ar 4 draudzībām (skat. A5.zīm.).



A5.zīm.

Otrkārt, pierādīsim, ka draudzību skaits nevar būt mazāks kā 4. Pieņemsim pretējo, ka draudzību skaits ir ≤ 3. Šķirojam divus gadījumus:

- Ja ir virsotne, no kuras iziet 3 diagonāles, tad tajā ir 3 draudzības; tāpēc, lai draudzību skaits būtu ≤ 3, no pārējām 7 virsotnēm iziet ≤ 1 diagonāle no katras. Tad novilkto diagonāļu galapunktu skaits ir $\le 7\cdot 1+1\cdot 3=10$ - pretruna, jo 6 novilktajām diagonālēm ir $6\cdot 2=12$ galapunkti.
- Ja virsotnes, no kuras iziet 3 diagonāles, nav, tad, lai draudzību skaits būtu ≤ 3, ir ≤ 3 virsotnes ar 2 diagonālēm katrā. Galapunktu skaits nepārsniedz $3\cdot 2+5\cdot 1=11$ - pretruna, jo iznāk, ka novilkto diagonāļu galapunktu skaits ir mazāks nekā 12.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. No otrā vienādojuma izsakām $y=x^{-2}$ un ievietojam to pirmajā vienādojumā: $x^{x+x^{-2}}=x^{-2\left(x-x^{-2}\right)}$.

Pastāv 2 iespējas:

a) $x=1$; tad $y=x^{-2}=1^{-2}=1$. Veicam pārbaudi, ievietojot atrastās vērtības 1. vienādojumā: $1^2=1^0$; $1=1$.

b) $x\ne 1$; tad $x+x^{-2}=-2\left(x-x^{-2}\right) \Rightarrow 3x=x^{-2} \Rightarrow 3x^3=1$.

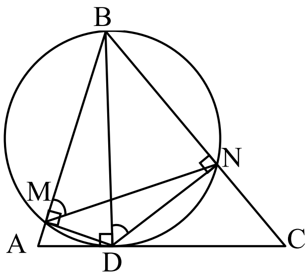
Tātad $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ un $y=x^{-2}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-2}=\sqrt[3]{9}$. Veicam pārbaudi, ievietojot atrastās vērtības 1. vienādojumā:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{9}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{9}};\quad \sqrt[3]{3}^{-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{3}^{2(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{9})};\quad -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{9}=2(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{9}),$$

$$-\frac{1+\sqrt[3]{3\cdot 9}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2-2\cdot\sqrt[3]{3\cdot 9}}{\sqrt[3]{3}},\quad -\frac{1+3}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2-6}{\sqrt[3]{3}},\quad -\frac{4}{\sqrt[3]{3}}=-\frac{4}{\sqrt[3]{3}}.$$

Tātad esam atraduši abus atrisinājumus: $(1;1),\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\sqrt[3]{9}\right)$.

S.12.2. Tā kā $\angle BMD+\angle BND=180°$, ap $MBND$ var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle BMN=\angle BDN$, jo balstās uz vienu un to pašu loku (skat. A6.zīm.).



A6. zīm.

Apskatām četrstūra $AMNC$ pretējo leņķu summu:

$$\angle AMN+\angle ACN=\left(180°-\angle BMN\right)+\left(90°-\angle NDC\right)=$$
$$=180°-\angle BMN+\angle BDN=180°.$$

Tātad punkti A, M, N un C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

S.12.3. Ievērojam, ka $A=n^2+2008n=n^2+8n+2000n$. Lai atrastu skaitļa A priekšpēdējo ciparu, varam apskatīt $B=n^2+8n=(n+4)^2-16$, jo skaitļu A un B pēdējie trīs cipari ir vienādi ($A=B+2000n$ un $2000n$ pēdējie 3 cipari ir nulles).

Tā kā skaitļa A pēdējais cipars ir 4, tad arī B beidzas ar 4. Tādā gadījumā $(n+4)^2$ beidzas ar 0. Ja skaitlis beidzas ar 0, tad tas noteikti dalās ar 10. Tātad $(n+4)^2$ dalās ar 10 un tādējādi dalās gan ar 2, gan ar 5.

Jebkuru naturālu skaitli, kas lielāks par 1, var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu. Ja mēs izsakām skaitļa kvadrātu kā pirmskaitļu reizinājumu, tad visi pirmskaitļi šajā reizinājumā ir pāra skaitā. Tātad $(n+4)^2$ dalās gan ar $2\cdot 2=4$, gan ar $5\cdot 5=25$. Tā kā LKD(4;25)=1, tad $(n+4)^2$ dalās ar $4\cdot 25=100$ un tādējādi beidzas ar 00. Varam secināt, ka $B=(n+4)^2-16$ beidzas ar 84.

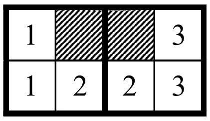
Tā kā $A=B+2000n$, tad arī A priekšpēdējais cipars ir 8.

S.12.4. Atbilde: Jā, var.

Risinājums. Sauksim jau novietotos taisnstūrus par melniem. Sadalām plakni 2×2 rūtiņu lielos kvadrātos. Tad sākumā katrs kvadrāts satur 0, 1 vai 2 melnas rūtiņas.

Lai pārklātu atlikušo plaknes daļu, jārīkojas sekojoši:

- Ja kvadrātā nav melnu rūtiņu, tajā ievieto 2 taisnstūrus.
- Ja kvadrātā ir 2 melnas rūtiņas, tad tās atrodas blakus; kvadrātā var ievietot vēl 1 taisnstūri.
- Ja kvadrātā jau ir tieši 1 melna rūtiņa, apskatām šo kvadrātu un to blakus esošo, kurā ir atbilstošā taisnstūra otrā melnā rūtiņa; tad tā arī ir vienīgā šajā otrajā kvadrātā. Balto daļu šajos abos kvadrātos pārklājam, kā parādīts A7.zīm.



A7. zīm.

S.12.5. Katram zēnam piekārtosim to meiteņu kopu, kas viņam patīk. Visas šīs kopas ir dažādas, jo katriem 2 zēniem var atrast meiteni, kas vienam no viņiem patīk, bet otram nepatīk. Tātad meiteņu kopas apakškopu nevar būt mazāk kā zēnu. Kopai ar m elementiem ir 2^m apakškopu. Tāpēc $2^m \geq z$, kas arī bija jāierāda.

R. Latvijas 59. rajona olimpiāde matemātikā

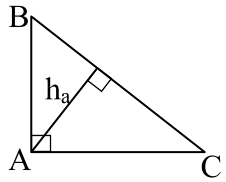
R.9. Devītā klase

R.9.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt pierādīsim ,ka ΔABC laukums nevar būt mazāks kā 78: saskaņā ar teorēmu par slīpnes un perpendikula garumu $CA \geq h_c \geq 13$. Tāpēc:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_b \geq \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78.$$

Otrkārt parādīsim, ka eksistē tāds trijstūris, kura laukums ir 78 un kura augstumi atbilst uzdevuma prasībām. Apskatām taisnleņķa trijstūri ABC, kur $AB = 12$; $AC = 13$; $\angle A = 90°$ (skat. A8.zīm.). Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus:

- $h_b = AB = 12$,
- $h_c = AC = 13$,
- $h_a = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{12 \cdot 13}{\sqrt{313}} > \dfrac{12 \cdot 13}{18} > 5$.



A8. zīm.

R.9.2. Apzīmējam četrciparu skaitļa n pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar a, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli ar b. Tad $n = 100a + b$, tāpēc iegūstam vienādojumu: $100a + b = b^2$, kas ekvivalents vienādojumam: $25 \cdot 4 \cdot a = b(b-1)$. Vienādojuma kreisā puse dalās ar 25, tātad arī labajai pusei jādalās ar 25. Tā kā b un b-1 ir divi pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tad LKD(b,b-1)=1 un varam secināt, ka vai nu b, vai b-1 dalās ar 25. Tādā gadījumā b iespējamās vērtības ir 00; 01; 25; 26; 50; 51; 75; 76. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā, redzam, ka atbilstoši a vērtība iznāk divciparu naturāls skaitlis tikai pie $b = 76$; tad $a = 57$. Tāpēc ir tikai viens meklējamais skaitlis $n = 5776$.

R.9.3. Atceramies, ka

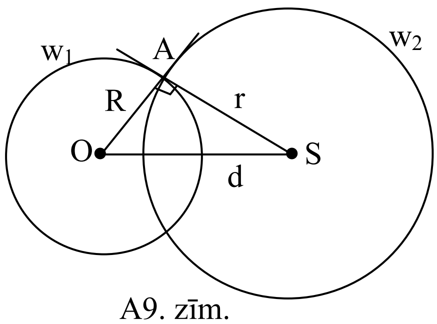
I pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta,

II <u>tātad</u> taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

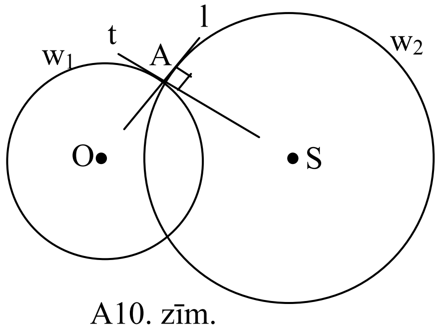
Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt pierādīsim, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

Pieņemam, ka $R^2 + r^2 = d^2$.

Novelkam rādiusus uz r.l. krustpunktu A (skat. A9.zīm.). Tad $OA^2 + SA^2 = OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas ΔOAS ir taisnleņķa. Tāpēc taisne SA ir r.l. w_1 pieskare (pēc II), un tāpat taisne OA ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares punktā A ir savstarpēji perpendikulāras.



A9. zīm.



A10. zīm.

Otrkārt, pierādīsim doto apgalvojumu no otras puses: ja mums ir dots, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad varam secināt, ka $R^2 + r^2 = d^2$.

Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (A10.zīm.).

Tā kā $t \perp l$, tad t satur w_2 rādiusu (no I), tātad iet caur S. Līdzīgi l iet caur O. Tāpēc pieskares veido ΔOAS, kas ir taisnleņķa. No Pitagora teorēmas mēs secinām, ka $OA^2 + SA^2 = OS^2$, tātad $R^2 + r^2 = d^2$.

R.9.4. Apzīmēsim dotā kvadrātvienādojuma saknes ar x_1 un x_2, kur $x_1 < x_2$.

Šķirojam divus gadījumus:

- $x \notin (x_1; x_2)$: $\quad x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \geq 0 > -1$, no kā seko vajadzīgais.
- $x \in (x_1; x_2)$:

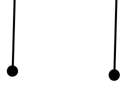
$$\left|x^2 + px + q\right| = \left|(x - x_1)(x_2 - x)\right| = (x - x_1) \cdot (x_2 - x) \leq$$

$$\leq \left(\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1.$$

Tātad $-1 \leq x^2 + px + q \leq 1$, no kā seko vajadzīgais.

R.9.5. a) Pieņemsim pretējo, ka tādu divu cilvēku nav. Tā kā cilvēku ir tieši n un paziņu daudzums vienam cilvēkam var būt 0; 1; 2; ...; n-1 (t.i., tieši n dažādas vērtības), tad katrai šai vērtībai „jārealizējas"; t.sk. jārealizējas arī paziņu daudzumiem 0 un n-1. Bet tas nav iespējams: ja ir kāds, kam nav neviena paziņas, tad nevar būt neviena, kas pazīst visus n-1 citus. Iegūta pretruna, tātad eksistē divi tādi cilvēki A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi.

b) Pie $n = 4$ var gadīties, ka nevar atrast tādu cilvēku C vai tādu cilvēku D: skat, piem., A11.zīm., kur punkti attēlo cilvēkus, bet līnijas – pazīšanās. Šajā gadījumā rūķīša Muribura apgalvojums ir nepatiess.



A11. zīm.

Pie $n = 2009$ tādi cilvēki noteikti atradīsies. Pieņemsim pretējo: nekādiem diviem cilvēkiem ar vienādiem paziņu daudzumiem minētā trešā cilvēka nav. Ņemsim divus cilvēkus A un B ar vienādiem paziņu daudzumiem (tādi eksistē saskaņā ar a) punktu). Katru no pārējiem n-2 cilvēkiem pazīst **tieši viens** no A un B, tāpēc n-2 jādalās ar 2 (citādi A un B paziņu daudzumi neiznāktu vienādi). Tāpēc arī n jābūt pāra skaitlim. Bet 2009 ir nepāra. Iegūta pretruna un varam secināt, ka var atrast tādu trešo cilvēku, kurš vai nu pazīst gan A, gan B, vai arī nepazīst ne A, ne B.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, atradīsim naturālu skaitli, par kuru meklētais skaitlis noteikti nebūs mazāks. Meklētajam skaitlim jādalās gan ar 11 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+10)+(n+11)=11(n+6)$), gan ar 13 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+12)+(n+13)=13(n+7)$), gan ar 6 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+12)=6\big((n+1)+(n+12)\big)$).

Tā kā 11, 13 un 6 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad tam jādalās ar $6\cdot 11\cdot 13=858$. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 858, ir 858.

Otrkārt, parādīsim, ka 858 tiešām atbilst uzdevuma prasībām:

$858=73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83$;

$858=66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77$;

$858=60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72$.

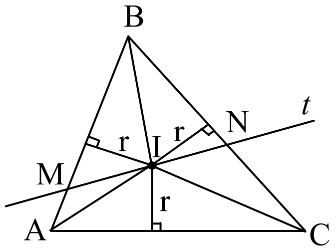
R.10.2. Taisnes t krustpunktus ar ΔABC apzīmējam ar M un N (skat. A12.zīm.). Tādā gadījumā:

$S(MBN)=S(MIB)+S(NIB)=\frac{1}{2}r\cdot MB+\frac{1}{2}r\cdot BN=\frac{1}{2}r\cdot(MB+BN)$ un

$S(ABC)=\frac{1}{2}r\cdot(AB+BC+CA)$.

Tā kā $S(MBN)=\frac{1}{2}S(ABC)$, tad $\frac{1}{2}r(MB+BN)=\frac{1}{4}r(AB+BC+CA)$.

Esam ieguvuši, ka $MB+BN=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$, kas arī bija jāpierāda.



A12. zīm.

R.10.3. Tā kā a^2 dalās ar b un a dalās ar a, tad $a^3=a\cdot a^2$ dalās ar $a\cdot b$.

Tā kā b^2 dalās ar a un b dalās ar b, tad $b^3=b^2\cdot b$ dalās ar $a\cdot b$.

Varam secināt, ka arī $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ dalās ar $a\cdot b$, kas arī bija jāpierāda.

Pierādīsim, ka ne vienmēr $(a+b)^2$ dalās ar $a\cdot b$. Ja $a=2$ un $b=4$, tad $a^2=4$ dalās ar $b=4$ un $b^2=16$ dalās ar $a=2$, taču $(a+b)^2=36$ nedalās ar $a\cdot b=8$.

R.10.4. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{1}{2}(x+y+z),$$

$$x+y+z=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}+6\sqrt{z-9},$$

$$\left(x-2\sqrt{x-1}\right)+\left(y-4\sqrt{y-4}\right)+\left(z-6\sqrt{z-9}\right)=0,$$

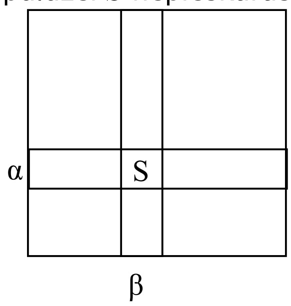
$$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-9}-3\right)^2=0.$$

Tā kā kvadrāti ir nenegatīvi, tad katrs no tiem ir 0. No šejienes iegūstam: $x=2$, $y=8$, $z=18$.

R.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, kādā veidā ar 100 pieskāršanās reizēm varam ieslēgt visas spuldzītes.

To var izdarīt, pieskaroties katrai spuldzei 1 reizi. Tādā gadījumā katra spuldze maina savu stāvokli 19 (nepāra skaitu) reižu un gala rezultātā no izslēgtas kļūst par ieslēgtu.

Otrkārt, pierādīsim, ka 100 ir meklētais minimums. Skaidrs, ka varam apskatīt situāciju, kad katrai spuldzei vai nu nepieskaras nemaz, vai pieskaras vienu reizi, jo divas pieskāršanās vienai spuldzei savstarpēji anulējas. Pieņemsim no pretējā, ka kādai spuldzei S nepieskaras (skat. A13.zīm.).



A13. zīm.

Tad rindā α un kolonnā β kopā jābūt nepāra skaitam pieskāršanos, lai mainītu spuldzes S stāvokli uz ieslēgtu; varam pieņemt, ka **rindā α ir nepāra skaits pieskāršanos**. Šo pieskāršanos dēļ katra spuldze rindā α mainījusi savu stāvokli nepāra skaitu reižu, tāpēc **katrā kolonnā jābūt pāra skaitam pieskāršanos ārpus α**. Tāpēc kopīgais pieskāršanos skaits ārpus α ir pāra skaitlis. Pieskaitot vēl pieskāršanās rindā α, **kopējais pieskāršanos skaits ir nepāra skaitlis**. Katra pieskāršanās izsauc izmaiņas 19 spuldzēs, tāpēc **kopējais izmaiņu skaits ir nepāra skaitlis**.

Ievērojam, ka katra no 100 spuldzēm maina savu stāvokli nepāra skaitu reižu, lai mainītu savu stāvokli uz ieslēgtu, tāpēc **kopējais izmaiņu skaits kā 100 nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis**. Iegūta pretruna, tādēļ 100 ir meklētais minimums.

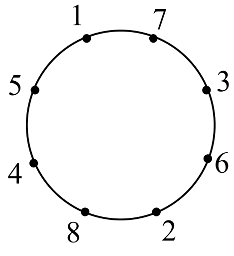
R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. a) jā, var, skat. A14.zīm.

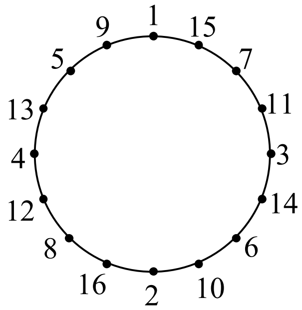
b) nē, nevar. Pieņemam, ka tas izdevies. Apzīmējam skaitļus rakstīšanas secībā ar a_1; a_2; ...; a_7; varam pieņemt, ka $\boldsymbol{a_1 < a_2}$. Tad jābūt $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4$, $a_4 > a_5$, $a_5 < a_6$, $a_6 > a_7$, $a_7 < a_1$, $\boldsymbol{a_1 > a_2}$ - pretruna. (Izšķirošais bija tas, ka 7 – nepāra skaitlis.)

c) nē, nevar. Apskatām piecas desmitstūra virsotnes, kas veido regulāru piecstūri, un spriežam par tām kā b) gadījumā: $a_1 < a_3$, $a_3 > a_5$, $a_5 < a7$, $a_6 > a_7$, $a_7 < a_9$, $a_9 > a_1$, $a_1 > a_3$ - pretruna.

d) jā, var. Skat. A15.zīm.

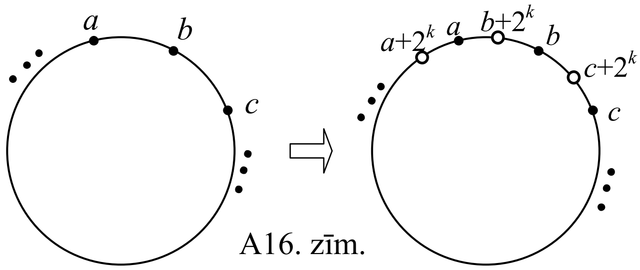


A14. zīm.

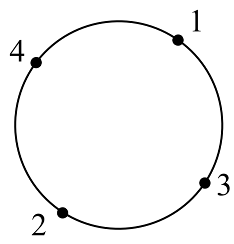


A15. zīm.

Komentārs. Uzdevuma prasības ir izpildāmas tad un tikai tad, ja n ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Induktīvā pāreja no $n=2^k$ uz $n=2^{k+1}$ shematiski attēlota A16.zīm.; ar tās palīdzību no A17.zīm. iegūts A14.zīm. un no A14.zīm. – A15.zīm.



A16. zīm.



A17. zīm.

Ja n dalās ar kādu nepāra pirmskaitli p, tad apskatām regulāru p-stūri ar virsotnēm n-stūra virsotnēs un spriežam kā b) gadījumā, lai pierādītu, ka nevar izpildīt uzdevumā dotās prasības.

R.11.2. Ja $(x;y)$ ir atrisinājums, tad arī $(-x;y)$ ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu $x \geq 0$. Vienādojumu var pārveidot par $x^2y+10=14y$ un tālāk par $y=\dfrac{10}{14-x^2}$.

Tā kā y jābūt veselam un $y \neq 0$, tad jābūt $\left|14-x^2\right| \leq 10$, no kurienes $4 \leq x^2 \leq 24$. Tā kā apskatām $x \geq 0$, tad $2 \leq x \leq 4$. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus $(2;1)$, $(3;2)$, $(4;-5)$. Tātad par atrisinājumiem der arī: $(-2;1)$, $(-3;2)$, $(-4;-5)$.

R.11.3. Šķirojam divus gadījumus:

- $x \geq 2$. Tad nevienādība kļūst par $\left||x-2-x|-9\right| \leq 2009$ jeb $7 \leq 2009$. Tātad visas šīs x vērtības der.
- $x<2$. Tad nevienādība kļūst par $\left||-x+2-x|-9\right| \leq 2009$ jeb $\left||2-2x|-9\right| \leq 2009$ un tālāk par $9-2009 \leq |2x-2| \leq 9+2009$. Tā kā skaitļa modulis vienmēr ir nenegatīvs lielums, tad $|2x-2| \leq 2018$ jeb $|x-1| \leq 1009$. Tāpēc $1-1009 \leq x \leq 1+1009$ jeb $-1008 \leq x \leq 1010$. Tā kā apskatām gadījumu, kad $x<2$, tad der visi x, kur $-1008 \leq x < 2$.

Apvienojot abas atbildes, iegūstam $x \geq -1008$.

R.11.4. Apzīmējam ΔABC malas garumu ar a. No teorēmas par sekanšu nogriežņu garumu reizinājumiem iegūstam divas vienādības:

$$AM \cdot a = AN(a-CL),$$
$$CL(a-AN) = CK \cdot a.$$

Saskaitot abas vienādības un veicot elementārus algebriskus pārveidojumus, iegūstam vajadzīgo:

$$AM \cdot a + CL \cdot a - CL \cdot AN = AN \cdot a - AN \cdot CL + CK \cdot a$$
$$AM \cdot a + CL \cdot a = AN \cdot a + CK \cdot a$$
$$AM + CL = AN + CK$$

R.11.5. Ņemam vienu no punktiem P un šķirojam divas iespējas:

- No P iziet 3 balti un 3 sarkani nogriežņi. Ja kaut divus šo 3 balto nogriežņu galapunktus arī savieno balts nogrieznis, esam ieguvuši baltu trijstūri. Ja

tos visus savieno sarkani nogriežņi, iegūstam sarkanu trijstūri. Tātad esam ieguvuši vienu vienkrāsainu trijstūri.
Līdzīgi iegūstam otru vienkrāsainu trijstūri, apskatot triju sarkano nogriežņu galapunktus.

- No P iziet vismaz 4 vienas krāsas nogriežņi (varam pieņemt, ka balti). Apskatām to galapunktus M, N, K, L. Šos galapunktus savieno 6 nogriežņi. Šķirojam divas iespējas:
    - Starp šiem 6 nogriežņiem ir vismaz 2 balti. Iegūstam vismaz 2 baltus trijstūrus, izmantojot šos baltos nogriežņus un tos baltos nogriežņus, kas iziet no P.
    - Starp šiem 6 nogriežņiem ir mazāk kā 2 balti nogriežņi. Tātad vismaz 5 no tiem ir sarkani – varam pieņemt, ka visi, izņemot varbūt MN – iegūstam sarkanus trijstūrus KLM un KLN.

Komentārs 1. To, ka iegūtās konfigurācijas tiešām ir trijstūri, nevis „divkārši nogriežņi", un to, ka nogriežņi nekrustojas (kas radītu neskaidrības par to, kā nokrāsots krustpunkts), garantē uzdevumā dotais par punktu izvietojumu telpā.
Starp citu, pirmais nosacījums seko no otrā.
Komentārs 2. Vairāk papūloties, var pierādīt, ka ir vismaz 4 vienkrāsaini trijstūri.

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Tā kā $|\cos t| \le 1$, tad $\cos(x^2)+\cos(y^2)-\cos(xy) \le 1+1-(-1)=3$.

Lai pierādītu stingro nevienādību, jāpierāda, ka nevar vienlaicīgi būt $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$, $\cos(xy) = -1$. Pieņemsim pretējo. Tad $x^2 = 2\pi n$, $y^2 = 2\pi k$, $xy = \pi + 2\pi l = \pi(2l+1)$, $n,k,l \in Z$. No pirmajām divām vienādībām seko, ka $x^2 y^2 = 4\pi^2 nk$, un no trešās vienādības seko, ka $(xy)^2 = \pi^2 \cdot (2l+1)^2$. Tātad $4\pi^2 nk = \pi^2 \cdot (2l+1)^2$ jeb $4nk = (2l+1)^2$, bet pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli – pretruna. Tātad esam pierādījuši, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv uzdevumā dotā nevienādība.

R.12.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka n ciparu summa var būt 9. Tiešām, apskatot pirmās iespējamās p vērtības, redzam:

- ja $p=2$, tad $n=9$ un n ciparu summa ir 9;
- ja $p=3$, tad $n=49$ un n ciparu summa ir 13;
- ja $p=5$, tad $n=513$ un n ciparu summa ir 9.

Otrkārt, pierādīsim, ka n ciparu summa nevar būt mazāka kā 9. Pieņemsim pretējo, ka n ciparu summa var būt mazāka nekā 9. Tādā gadījumā $p>5$.
$\mathrm{n} = (\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}-2)(\mathrm{p}+2)+9 = (\mathrm{p}-2)(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}+2)+9$ un $p-2$; $p-1$; p; $p+1$; $p+2$ ir 5 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 5. Tā kā $p>5$ un p - pirmskaitlis, tad tas nav p. Tātad $(p^2-1)(p^2-4)$ dalās ar 5. Skaitlis p^2-1 ir pāra, tāpēc $(p^2-1)(p^2-4)$ dalās arī ar 2. Tā kā 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(p^2-1)(p^2-4)$ dalās ar $2\cdot 5=10$. Varam secināt, ka $(p^2-1)(p^2-4)$ pēdējais cipars ir 0, tātad $(p^2-1)(p^2-4)+9$ pēdējais cipars ir 9. Tā kā pie $p>5$ iznāk $n>10$, tad skaitlim n ir vēl citi cipari bez pēdējā un n ciparu summa iznāk lielāka par 9, kas ir pretruna ar pieņemto.

R.12.3. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$$

$$\left(x-2\sqrt{2x+1}+2+\frac{1}{x}\right)+\left(y-2\sqrt{2y+1}+2+\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\frac{1}{x}\left(x^2-2x\sqrt{2x+1}+2x+1\right)+\frac{1}{y}\left(y^2-2y\sqrt{2y+1}+2y+1\right)=0$$

$$\frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-\sqrt{2y+1}\right)^2=0.$$

Tā kā $x>0$, $y>0$, tad $x-\sqrt{2x+1}=0$ un $y-\sqrt{2y+1}=0$, no kurienes iegūstam, ka $x^2-2x-1=0$ un $y^2-2y-1=0$, tātad $x=y=1+\sqrt{2}$.

R.12.4. Apzīmējam ΔABC malas garumu ar a. No teorēmas par hordu nogriežņu garumu reizinājumiem iegūstam divas vienādības:

$$AM\left(a+CK\right)=AN\cdot a,$$

$$CL\cdot a=CK\cdot\left(AM+a\right).$$

Saskaitot šīs vienādības un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam vajadzīgo:

$$AM\cdot a+AM\cdot CK+CL\cdot a=AN\cdot a+CK\cdot AM+CK\cdot a$$

$$AM\cdot a+CL\cdot a=AN\cdot a+CK\cdot a$$

$$AM+CL=AN+CK.$$

R.12.5. Atbilde: 29.

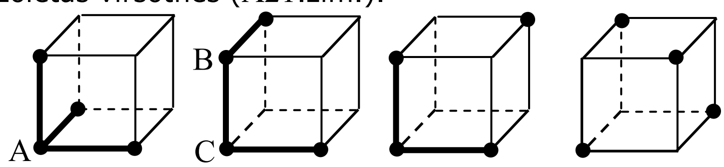
Risinājums. Četras paralēlskaldņa virsotnes, kas neatrodas vienā plaknē, var izvēlēties četros būtiski dažādos veidos atkarībā no tā, kā tās savienotas vai nav savienotas ar šķautnēm:

a) viena virsotne un trīs ar to savienotās (A18.zīm.),

b) četras virsotnes „ķēdītē” (A19.zīm.),

c) trīs virsotnes „ķēdītē” un viena virsotne pretējā skaldnē (A20.zīm.),

d) četras izolētas virsotnes (A21.zīm.).



A18. zīm. A19. zīm. A20. zīm. A21. zīm.

a) Atkarībā no tā, kurš no 4 dotajiem punktiem ir A, iegūstam 4 paralēlskaldņus.

b) Atkarībā no tā, kuri 2 no dotajiem punktiem ir B un C un kurš no abiem atlikušajiem savienots ar šķautni ar B, bet kurš – ar C, iegūstam $C_4^2\cdot 2=12$ paralēlskaldņus.

c) Atkarībā no tā, kuri 3 no dotajiem punktiem ir vienā skaldnē un kurš no tiem ir „vidējais ķēdītē”, iegūstam $C_4^3\cdot 3=12$ paralēlskaldņus.

d) Patvaļīgā veidā sadalot punktus pāros, šie pāri nosaka divas šķērsas taisnes. Caur tām jāvelk savstarpēji paralēlas skaldņu plaknes; to var izdarīt vienā vienīgā veidā. Tāpēc tāds paralēlskaldnis ir tikai viens.

Atliek ievērot, ka $4+12+12+1=29$.

V. Latvijas 59. republikas olimpiāde matemātikā

V.9. Devītā klase

V.9.1. Atrodam dotā vienādojuma saknes: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$. Tātad $x_1=0{,}5+\sqrt{0{,}25-a}$ un $x_2=0{,}5-\sqrt{0{,}25-a}$.

Apskatām $\left|x_1^2-x_2^2\right|=1$ jeb $\left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right|=1$. Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1+x_2=1$, tāpēc $\left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right|=1$ izpildās tad un tikai tad, ja arī $\left|x_1-x_2\right|=1$. Ievietojot šajā vienādojumā atrastās saknes, secinām, ka $\left|2\sqrt{0{,}25-a}\right|=2\sqrt{0{,}25-a}=1$ tad un tikai tad, ja $a=0$. Varam secināt, ka arī $\left|x_1^2-x_2^2\right|=1$ izpildās tad un tikai tad, ja $a=0$.

Apskatām $\left|x_1^3-x_2^3\right|=1$ jeb $\left|(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right|=1$. Ievietojam pirmā reizinātāja vietā atrastās saknes un veicam pārveidojumus otrajā reizinātājā: $\left|\sqrt{1-4a}\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)\right|=1$. Ievietojam šajā vienādojumā atrastās saknes: $\sqrt{1-4a}\left|1-a\right|=1$. Iegūstam: $4a^3-9a^2+6a=0$ tad un tikai tad, ja $a=0$.

Varam secināt, ka arī $\left|x_1^3-x_2^3\right|=1$ izpildās tad un tikai tad, ja $a=0$.

Tātad $\left|x_1^2-x_2^2\right|=1\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow\left|x_1^3-x_2^3\right|=1$, kas arī bija jāpierāda.

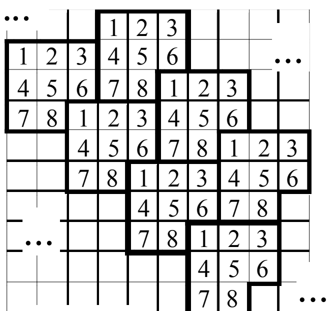
V.9.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka var atrast 3 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kas visi ir vienkārši. Tie ir: $33=3\cdot 11$, $34=2\cdot 17$ un $35=5\cdot 7$.

Otrkārt, pierādīsim, ka nevar atrast vairāk kā trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kas visi ir vienkārši. No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 4. Ja tas pats nav 4, tad tas nav vienkāršs. Pārbaudīsim četru pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur „4”:

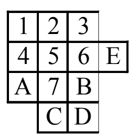
- 1, 2, 3, 4. Neder, jo 1, 2 un 3 nav vienkārši.
- 2, 3, 4, 5. Neder, jo 2, 3 un 5 nav vienkārši.
- 3, 4, 5, 6. Neder, jo 3 un 5 nav vienkārši.
- 4, 5, 6, 7. Neder, jo 5 un 7 nav vienkārši.

Redzam, ka nevar atrast četrus vai vairāk pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kas visi ir vienkārši.

V.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim krāsojumu ar 8 krāsām (skat. A22.zīm.).



A22. zīm.

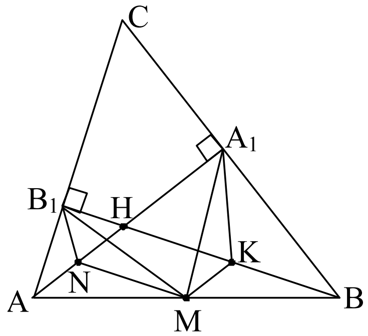


A23. zīm.

Otrkārt, pierādīsim, ka ar 7 krāsām nepietiek.

Viegli saprast, ka A23.zīm. rūtiņās $1 \div 7$ visām krāsām jābūt dažādām, un izvairīties no 8. krāsas var tikai, krāsojot A krāsā 3 un B – krāsā 1. Cenšoties tālāk izvairīties no 8. krāsas, pakāpeniski iegūstam $C = 2$ un $D = 4$. Bet tad rūtiņai E nav piemērotas krāsas.

V.9.4. No viduslīniju īpašībām trijstūrī AHB iegūstam $MN = \frac{1}{2}HB$ un $MK = \frac{1}{2}AH$; tā kā taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu ir puse no hipotenūzas, tad $B_1N = \frac{1}{2}AH = MK$ (ΔAB_1H) un $A_1K = \frac{1}{2}HB = MN$ (ΔBA_1H), kā arī $A_1M = \frac{1}{2}AB = B_1M$ (ΔAA_1B un ΔAB_1B). Pielietojam pazīmi mmm un iegūstam, ka $\Delta MKA_1 = \Delta B_1NM$



A24. zīm.

V.9.5. a) pieņemsim, ka tenisistam A noslēgumā ir visvairāk uzvaru. Ņemsim jebkuru citu tenisistu B. Šķirojam divus gadījumus:

- A uzvarējis B. Tātad A ir spēcīgāks par tenisistu B.
- A zaudējis B. Nevar būt, ka nav tāda C, ka $A \to C \to B$; ja tāda C nebūtu, tad B būtu vairāk uzvaru nekā A (uzvaras pret visiem tiem, pret ko uzvarējis A, un vēl uzvara savstarpējā spēlē ar A) – pretruna, tādēļ A ir spēcīgāks par B.

b) pieņemsim, ka turnīra noslēgumā ir 2 čempioni A un B un to savstarpējā spēlē uzvarējis tenisists A.

Tā kā A un B uzvaru skaitiem ir jābūt vienādiem, tad ir jābūt spēlētajiem, pret kuriem A ir zaudējis. Apskatām šo spēlētāju „apakšturnīra" čempionu C:

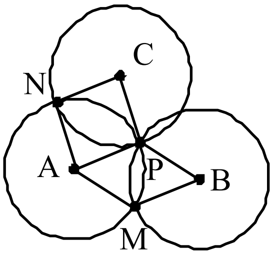
- C ir spēcīgāks par visiem apakšturnīra spēlētājiem;
- C ir spēcīgāks par A;
- A ir uzvarējis visus pārējos spēlētājus, līdz ar to C ir spēcīgāks arī par šiem spēlētājiem.

Tātad C ir spēcīgāks par visiem turnīra dalībniekiem un ir arī visa turnīra čempions.

Esam pierādījuši: ja turnīrā ir 2 čempioni, tad ir arī trešais, un tātad nevar būt tieši 2 čempioni.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Tā kā riņķa līnijas vienādas, tad to rādiusi arī ir vienādi. Secinām, ka $ANCP$ un $BMAP$ ir rombi (skat A.25.zīm.), tāpēc nogriežņi NC un MB ir vienādi un paralēli. Tā kā četrstūrim $MNCB$ divas malas ir vienādas un paralēlas, tad tas ir paralelograms.



A25. zīm.

V.10.2. Atbilde: iespējamās n vērtības ir 1, 2, 4, 5, 10.

Risinājums. Pastāv divas iespējas:

a) apskatāmie skaitļi ir

$$3k+1; 3k+2; 3k+4; 3k+5; \ldots; 3k+3n-2; 3k+3n-1.$$

To summa ir

$$(6k+3)+(6k+9)+\ldots+(6k+6n-3)=\frac{n}{2}(6k+3+6k+6n-3)=3n(2k+n),$$

tātad jābūt $n(2k+n)=100$. Abi reizinātāji ir ar vienādu paritāti, tātad pāra skaitļi. Apskatot, kā 100 var sadalīt reizinātājos, iegūstam iespējas $n=2$, $k=24$ un $n=10$, $k=0$.

b) apskatāmie skaitļi ir

$$3k+2; 3k+4; 3k+5; 3k+5; \ldots; 3k+3n-2; 3k+3n-1; 3k+3n+1.$$

To summa pārsniedz a) summu par $(3k+3n+1)-(3k+1)=3n$, tātad ir $3n(2k+n)+3n=3n(2k+n+1)$. Iegūstam $n(n+2k+1)=100$. Šoreiz n un $(n+2k+1)$ ir dažādas paritātes, un otrais reizinātājs ir lielāks. Iegūstam iespējas $n=1, k=49;\quad n=4, k=10;\quad n=5, k=7$.

V.10.3. 16 skaitļu gadījumā atrisinājumam ir 2 daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka Andris ar 5 jautājumiem nevar aptvert visus skaitļus: 5 jautājumu gadījumā izdotos apskatīt tikai $3\cdot 5=15$ kartītes, līdz ar to varētu uzzināt tikai 15 skaitļu reizinājumu. Vismaz viens skaitlis nemaz netiktu apskatīts, līdz ar to nevarētu zināt, kā tas ietekmē visu skaitļu reizinājumu, jo tas var būt gan pozitīvs, gan negatīvs.

Otrkārt, parādīsim, ka ar 6 jautājumiem pietiek. Andris var jautāt šādus reizinājumus: $a_1a_2a_3$; $a_1a_4a_5$; $a_1a_6a_7$; $a_8a_9a_{10}$; $a_{11}a_{12}a_{13}$; $a_{14}a_{15}a_{16}$. Sareizinot iegūtās atbildes, Andris sasniedz mērķi, jo a_1 un a_1^3 vienlaikus ir vai nu pozitīvi, vai negatīvi.

17 skaitļu gadījumā Andris var sasniegt mērķi ar 7 jautājumiem: $a_1a_2a_3$; $a_1a_2a_4$; $a_1a_2a_5$; $a_6a_7a_8$; $a_9a_{10}a_{11}$; $a_{12}a_{13}a_{14}$; $a_{15}a_{16}a_{17}$, sareizinot iegūtās atbildes.

V.10.4. Atbilde: S vērtību apgabals ir $[1; 3]$.

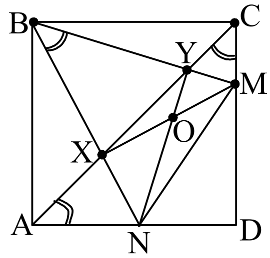
Risinājums. Tā kā $|a+b|\le|a|+|b|$, tad neviens saskaitāmais nepārsniedz 1, un $S\le 3$. Divi no skaitļiem $x; y; z$ noteikti ir ar vienādu zīmi, tātad attiecīgais saskaitāmais, kas satur abus šos skaitļus, ir 1. Varam secināt, ka $S\ge 1$.

Pārbaudīsim, vai S var pieņemt visas vērības apgabalā $[1; 3]$:

- Ja $x=y=z=1$, tad $S=3$
- Ja $x=y=1, z=-1$, tad $S=1$.
- Ja $1<a<3$ un izvēlamies vērtības: $x=1$ un $y=z=\dfrac{a-3}{a+1}$, tad:

$$S=\frac{\left|1+\frac{a-3}{a+1}\right|}{|1|+\left|\frac{a-3}{a+1}\right|}+\frac{\left|1+\frac{a-3}{a+1}\right|}{|1|+\left|\frac{a-3}{a+1}\right|}+\frac{\left|\frac{a-3}{a+1}+\frac{a-3}{a+1}\right|}{\left|\frac{a-3}{a+1}\right|+\left|\frac{a-3}{a+1}\right|}=2\frac{\frac{2a-2}{a+1}}{1+\frac{3-a}{a+1}}+1=4\frac{a-1}{4}+1=a\,.$$

V.10.5. Tā kā $\angle MBX=45°=\angle MCX$ (skat. A26.zīm.), tad punkti B, C, M, X atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tā kā $\angle BCM=90°$, tad $\angle BXM=180°-90°=90°$. Tātad MX ir ΔNBM augstums. Līdzīgi pierāda, ka NY arī ir ΔNBM augstums, izmantojot to, ka punkti B, Y, N, A atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tātad O ir ΔNBM augstumu krustpunkts, no kā seko vajadzīgais.



A26. zīm.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka ir iespējams iegūt progresijas ar 3 locekļiem, piemēram, 1; 2; 3 vai 2; 5; 8.

Otrkārt, pierādīsim, ka nevar iegūt progresiju ar vairāk kā 3 locekļiem. Pieņemsim, ka progresijas pirmie divi locekļi ir $f_k=a$ un $f_m=f_k+d=a+d>d$. Ievērosim, ka $f_{m+1}>f_m$ un $f_{m+2}=f_m+f_{m+1}>f_m+d$. Tātad trešais progresijas loceklis **var būt** tikai f_{m+1}. Taču jau nākošais Fibonači skaitlis $f_{m+2}=f_{m+1}+f_m>f_{m+1}+d$ ir pārāk liels, lai ietilptu mūsu progresijā, tāpēc pat 4 Fibonači skaitļi nevar veidot vienu aritmētisku progresiju.

V.11.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, noskaidrojam, ka meklējamais d nevar būt lielāks par 24, jo $3^3-3=24$.

Otrkārt, pierādīsim, ka visi apskatāmie skaitļi dalās ar 24. Tā kā apskatām skaitļus n^n-n, kur n - nepāra skaitlis, tad varam pieņemt, ka $n=2k+1$, kur $k\geq 1$ un k – vesels skaitlis. Tādā gadījumā:

$$n^n-n=n(n^{2k}-1)=n(n^2-1)(n^{2k-2}+\ldots+n^2+1)=(n-1)n(n+1)\cdot Q\,,$$

kur Q – vesels skaitlis. Skaitļi $n-1$ un $n+1$ ir viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc to reizinājums noteikti dalās ar 8. Viens no skaitļiem $n-1$, n, $n+1$ noteikti dalās ar 3. Tā kā $LKD(3;8)=1$, tad $(n-1)n(n+1)$ dalās ar $8\cdot 3=24$.

V.11.3. Atņemot pirmo vienādojumu no otrā un veicot identiskus pārveidojumus, iegūstam:

$$(x^3-y^3)-(x^2-y^2)+(x-y)=0$$

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-(x-y)(x+y)+(x-y)=0$$

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y+1\right)=0$$

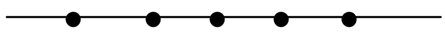
$$\frac{1}{2}(x-y)\left[(x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]=0\,.$$

Ievērojam, ka kvadrātiekava ir 0 tikai tad, ja katrs no trim saskaitāmajiem ir 0, taču tā nevar būt, tāpēc iegūstam, ka $x = y$. Izmantojam uzdevumā doto vienādojumu: $x^3 - x^2 - x = 0$, no kurienes $x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = y_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

V.11.4. Apskatīsim visas Andra izvēlēto skaitļu starpības, no lielāka skaitļa atņemot mazāku. Šādu starpību pavisam ir 45. Tā kā tās ir robežās no 1 līdz 36, starp tām ir divas vienādas. Pieņemsim, ka tās ir $a-b$ un $c-d$, kur $a > c$. Ja visi skaitļi *a, b, c, d* ir dažādi, tad no $a-b=c-d$ seko $a+d=c+b$, un Maija var izvēlēties *a, b, c, d.*

Atliek gadījums, kad $b = c$. Analizēsim sīkāk apskatāmo 45 starpību sistēmu. Pastāv divas iespējas.

- Starp tām ir 3 vienādas. Varam pieņemt, ka $a-b=c-d=e-f$, kur $a > c > e$. Ja $b \neq c$ **vai** $d \neq e$, rīkojamies kā iepriekš.
  Ja būtu $b = c$ **un** $d = e$, tad nevar būt, ka $b = e$, jo tādā gadījumā iznāktu $c = b = e = d$ un $c - d = 0$ – pretruna. Tāpēc vajadzīgos skaitļus iegūstam no vienādības $a-b=e-f$, jo tad $a+f=b+e$.
- Starp 45 starpībām nav triju vienādu. Tā kā tās ir robežās no 1 līdz 36, tad ir vismaz 9 pāri vienādu starpību. Ja divi no šiem pāriem ir $a-b=b-c$ un $e-b=b-f$ (ar vienu un to pašu *b*; skat A27.zīm.), tad $a-e=f-c$, un mēs iegūstam $a+c=e+f$.



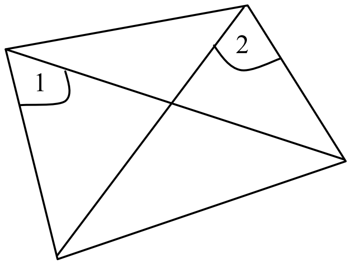
A27. zīm.

  Ja katram vienādo starpību pārim ir cits *b*, tad iznāk 9 dažādi *b*. Tā kā Andris izvēlējās 10 skaitļus, tad tas nevar būt iespējams, jo *b* nevar būt ne mazākais, ne lielākais no Andra izvēlētajiem skaitļiem.

Visas iespējas izanalizētas, tātad Maija var izvēlēties četrus no Andra uzrakstītajiem skaitļiem tā, ka divu Maijas izvēlēto skaitļu summa vienāda ar abu pārējo Maijas izvēlēto skaitļu summu.

V.11.5. Šajā uzdevumā izmantosim divus faktus:

I. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad ja $\angle 1 = \angle 2$ (skat. A28.zīm.).



A28. zīm.

II. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

<u>Risinājums:</u> Ja X un Y ir attiecīgi ΔABD un ΔABC iecentri (skat. A29.zīm.), tad AX un BY ir attiecīgi $\angle BAC$ un $\angle ABC$ bisektrises. Tātad:

$$\angle AYB = 180° - \angle BAY + \angle ABY =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) =$$

$$= \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) + \frac{1}{2}\angle ACB =$$
$$= 90° + \frac{1}{2}\angle ACB .$$

Līdzīgi $\angle AXB = 90° + \frac{1}{2}\angle ADB$.

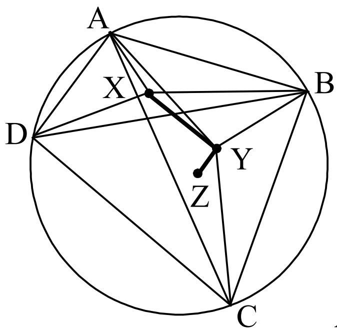
Tā kā $\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ADB}$ (jo balstās uz vienu un to pašu loku), tad $\angle AYB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB = 90° + \frac{1}{2}\angle ADB = \angle AXB$. Tātad punkti A, X, Y, B atrodas uz vienas riņķa līnijas (no I). No II seko, ka $\angle \mathrm{XYB} = 180° - \frac{1}{2}\angle \mathrm{DAB}$.

Ja Z ir $\Delta \mathrm{BCD}$ iecentrs, tad līdzīgi iegūstam, ka $\angle \mathrm{ZYB} = 180° - \frac{1}{2}\angle \mathrm{DCB}$.

Izmantojot šīs divas vienādības un II, iegūstam:

$$\angle XYZ = 360° - \angle XYB - \angle ZYB =$$
$$= 360° - 180° + \frac{1}{2}\angle DAB - 180° + \frac{1}{2}\angle \mathrm{D}CB =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle DCB) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Līdzīgi pierāda, ka arī citi vajadzīgie leņķi ir taisni.



A29. zīm.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Tā kā $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \ldots = x_{12} + y_{12} = 11$ un $x_1 + \ldots + x_{12} = y_1 + \ldots + y_{12}$ (jo katrā spēlē viens uzvar un viens zaudē), tad $y_1 + \ldots + y_{12} = 12 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} = 66$.

Tādā gadījumā:

$$x_1^2 + \ldots + x_{12}^2 = (11 - y_1)^2 + \ldots + (11 - y_{12})^2 =$$
$$= 121 \cdot 12 - 22(y_1 + y_2 + \ldots + y_{12}) + (y_1^2 + \ldots + y_{12}^2) =$$
$$= 121 \cdot 12 - 22 \cdot 66 + (y_1^2 + \ldots + y_{12}^2) = y_1^2 + \ldots + y_{12}^2 ,$$

kas arī bija jāpierāda.

V.12.2. Atbilde: $n = 784$.

Risinājums. Ja Katrīnas uzrakstītais skaitlis ir $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, tad visu sešu no cipariem a, b, c izveidojamo skaitļu summa ir:

$$200(a+b+c) + 20(a+b+c) + 2(a+b+c) = 222(a+b+c).$$

Tādā gadījumā Maijas uzrakstīto skaitļu summa ir:

$$(222-100)a + (222-10)b + (222-1)c =$$
$$= 122a + 212b + 221c =$$
$$= 5(a+b+c) + 9(13a + 23b + 24c).$$

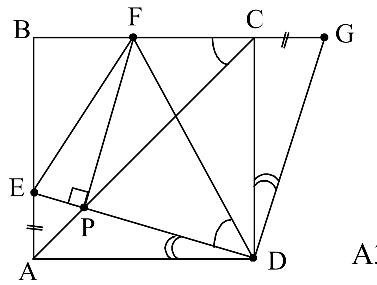
Tā kā $3434 \equiv 5 \pmod 9$, tad arī $5(a+b+c) \equiv 5 \pmod 9$. No šejienes seko, ka $a+b+c \equiv 1 \pmod 9$. Tā kā a, b, c – dažādi cipari, tad $6 \le a+b+c \le 24$ un varam secināt, ka $a+b+c = 10$ vai $a+b+c = 19$.

Ja $a+b+c = 10$, tad $n = 222 \cdot 10 - 3434 < 0$ - pretruna.

Ja $a+b+c = 19$, tad $n = 222 \cdot 19 - 3434 = 784$. Tas arī apmierina visas uzdevuma prasības.

V.12.3. Atliekam uz BC pagarinājuma $CG = AE$ (skat. A30.zīm.). Tad $\Delta DAE = \Delta DCG$ (mlm), tāpēc $\angle ADE = \angle CDG$. Varam secināt, ka $\angle EDG = \angle ADC = 90°$.

Ap $DPFC$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle P + \angle C = 180°$. Tādā gadījumā $\angle PDF = \angle PCF = 45°$, jo balstās uz vienu un to pašu loku. Tāpēc $\angle FDG = \angle EDG - \angle PDF = 90° - 45° = 45°$. Iegūstam, ka $\Delta EDF = \Delta GDF$ (mlm), tātad $EF = GF = GC + CF = AE + CF$, kas arī bija jāpierāda.



A30. zīm.

V.12.4. Pierādīsim, ka tāda vārdnīcu sistēma iespējama jebkuram nepāra skaitam valodu n, $n \ge 3$.

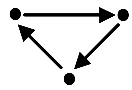
Bāze. Pie $n = 3$ rīkojamies, kā redzams A31.zīm.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka k valodām vārdnīcu shēma ietverta apgabalā Q (skat. A32.zīm.)

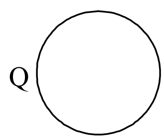
Pievienojot vēl 2 valodas A un B, izveidojam shēmu, kas redzama A33.zīm.:

- ieviešam vārdnīcas, kas ļauj tulkot no A uz katru no iepriekšējām k valodām;
- ieviešam vārdnīcas, kas ļauj tulkot no katras no iepriekšējām k valodām uz B;
- ieviešam vārdnīcu, kas ļauj tulkot no B uz A.

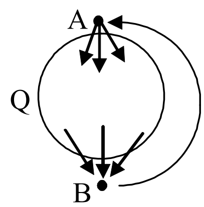
To, ka papildinātā vārdnīcu sistēma apmierina uzdevuma prasības $k+2$ valodām, pārbauda tieši, apskatot visas iespējas. Uzdevums atrisināts.



A31. zīm.



A32. zīm.



A33. zīm.

V.12.5. Vienādojums pārveidojas par $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6ax - 4a^2 = 0$.

Pārrakstīsim to formā $4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$ un apskatīsim kā vienādojumu attiecībā uz a ar parametru x. Atrodam vienādojuma saknes:

$$a_{1,2} = \frac{-6x \pm \sqrt{36x^2 + 16x^4 + 16x^3 - 32x^2}}{8} = \frac{-6x \pm 2x\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{8} =$$

$$= \frac{-6x \pm 2x\sqrt{(2x+1)^2}}{8} = \frac{-6x \pm (4x^2 + 2x)}{8}.$$

Tātad $a_1 = -\frac{1}{2}x^2 - x$ un $a_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. Tāpēc sākotnējais vienādojums pārveidojas par $(a + \frac{1}{2}x^2 + x)(a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) = 0$, kas ir ekvivalents ar $(x^2 + 2x + 2a)(x^2 - x - 2a) = 0$.

Apskatot kvadrātvienādojumus, atrodam saknes:

- $x = -1 \mp \sqrt{1 - 2a}$, ja $a < -\frac{1}{8}$;
- $x_1 = -1 \mp \sqrt{1 - 2a}$ un $x_2 = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + 2a}$, ja $-\frac{1}{8} \le a \le \frac{1}{2}$;
- $x = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + 2a}$, ja $a > \frac{1}{2}$.

A. Latvijas 36. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Ievērojam, ka zīmējumā redzami visi 6 iespējamie krustpunkti, tātad citu krustpunktu nav, taču visu minēto funkciju vērtības sakrīt arī pie $x=1$. Tā kā dotie 3 grafiki neiet caur vienu punktu, tad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

A.9.2. Ceļam dotās nevienādības kvadrātā:

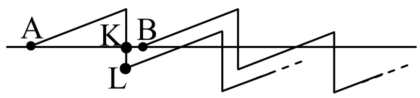
$$a^2 \geq b^2 + 2bc + c^2$$

$$b^2 \geq a^2 + 2ac + c^2$$

$$c^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

Saskaitām šīs nevienādības, pārnesam visus locekļus uz labo pusi un savelkam līdzīgos locekļus. Iegūstam, ka $(a+b+c)^2 \leq 0$. Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $a+b+c=0$, kas arī bija jāpierāda.

A.9.3. Jā, var. Skat, piem., A34. zīm. Ievērojam, ka attālumiem KB un KL ir jābūt izvēlētiem ievērojami maziem, lai AC varētu sasniegt garumu, kas ir lielāks kā 2009.



A34. zīm.

A.9.4. a) Atrodam 5 apaļīgus skaitļus, kas ir atšķirīgi no uzdevumā dotajiem:

- $n=2$; 2 dalās tikai ar 1 un 2, tātad $d(2)=2$; $n=2$ dalās ar $d(2)=2$;
- $n=9$; 9 dalās tikai ar 1, 3 un 9, tātad $d(9)=3$; $n=9$ dalās ar $d(9)=3$;
- $n=12$; 12 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6 un 12, tātad $d(12)=6$; $n=12$ dalās ar $d(12)=6$;
- $n=18$; 18 dalās tikai ar 1, 2, 3, 6, 9 un 18, tātad $d(18)=6$; $n=18$ dalās ar $d(18)=6$;
- $n=625$; 625 dalās tikai ar 1, 5, 25, 125 un 625, tātad $d(625)=5$; $n=625$ dalās ar $d(625)=5$.

b) Ja p ir pirmskaitlis, tad skaitlim p^{n-1} ir tieši n dalītāji - tie ir $1; p; p^2; \ldots; p^{n-1}$. Izvēloties $n=p$, mēs iegūstam, ka $d\left(p^{p-1}\right)=p$. Ievērojam, ka $p^{p-1} : p = p^{p-2}$, tātad $n=p^{p-1}$ dalās ar $d(n)=p$, jo $p \geq 2$. Tātad n ir apaļīgs skaitlis. Tā kā ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu, tad ir arī bezgalīgi daudz apaļīgu skaitļu.

A.9.5. Ja mainām krāsas stūrīšos *ABC, ADC, BAD* (skat. A35.zīm.), rezultātā krāsa mainījusies tikai rūtiņā A. Tātad varam mainīt krāsu vienā (patvaļīgā) rūtiņā. Tātad no jebkura krāsojuma varam iegūt jebkuru.

B	C
A	D

A35. zīm.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Nē, nevar. Tā kā parabolām zari vērsti uz augšu, tad būtu $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Tā kā katra parabola krusto abscisu asi divos punktos, tad visu trinomu diskriminanti būtu pozitīvi, t. i., $4b^2 > 4ac$, $4c^2 > 4ab$, $4a^2 > 4cb$, tātad $b^2 > ac$, $c^2 > ab$, $a^2 > cb$. Sareizinot šīs nevienādības, mēs iegūtu $a^2b^2c^2 > a^2b^2c^2$ – pretruna.

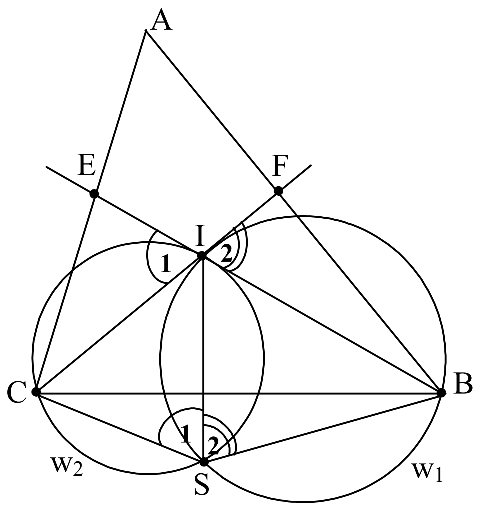
A.10.2. Apzīmējam $p = 2k+1,\ q = 2n+1$, $k,\ n$ – naturāli skaitļi. Tad $p+q = 2(k+n+1)$. Tātad $p+q$ var izsacīt kā 2 un $k+n+1$ reizinājumu. Varam pieņemt, ka $k < n$, tad $2k+1 < k+n+1 < 2n+1$. Tā kā $2k+1$ un $2n+1$ ir divi **viens otram sekojoši** pirmskaitļi, tad $k+n+1$ nav pirmskaitlis. Tāpēc $k+n+1$ sadalās vismaz divos reizinātājos, kas lielāki nekā 1.

A.10.3. Apskatām ΔABC: apzīmējam $\angle ABC = 2\beta$ un $\angle ACB = 2\gamma$, tad $\angle A = 180° - (2\beta + 2\gamma)$.

Apskatām ΔIBC: $\angle ICB = \gamma$, jo CF – bisektrise; $\angle IBC = \beta$, jo BE – bisektrise; $\angle CIB = 180° - (\gamma + \beta)$.

No ievilkto leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašībām, apskatot ω_1 un ω_2, seko A36.zīm. parādītās leņķu vienādības, tāpēc:

$\angle CSB = \angle 1 + \angle 2 = 360° - 2\angle CIB = 2(\beta + \gamma)$. Tāpēc $\angle A + \angle CSB = 180°$ un A, B, S un C atrodas uz vienas riņķa līnijas. Punkts S ir meklētais.



A36. zīm.

A.10.4. Pieņemam, ka x, y – pozitīvi skaitļi. Tā kā $(x-y)^2 \ge 0$ jeb $x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$, tad $x^2 + y^2 \ge 2xy$. Pārveidojam šo nevienādību: $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \ge 2$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$; $1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \ge 4$; $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \ge 4$. Tātad $x + y \ge \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Tā kā $\frac{1}{a+b}$ un $\frac{1}{c+d}$ ir pozitīvi skaitļi, tad varam izmantot šo nevienādību:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} \ge \frac{4}{(a+b)+(c+d)}$$

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}\geq 4\cdot\frac{a+c}{a+b+c+d}.$$

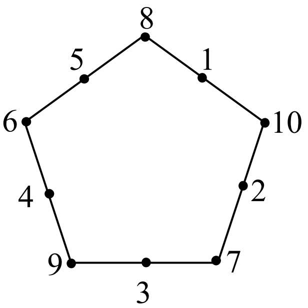
Tā kā arī $\frac{1}{b+c}$ un $\frac{1}{d+a}$ ir pozitīvi skaitļi, līdzīgi iegūstam:

$$\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4\cdot\frac{b+d}{a+b+c+d}.$$

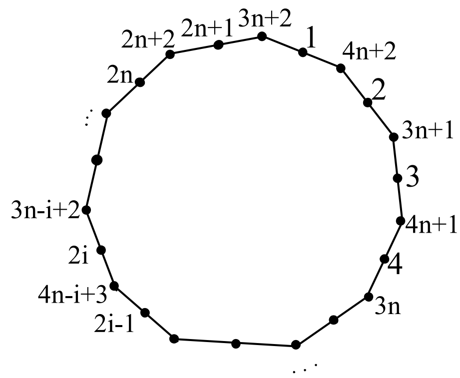
Saskaitām abas iegūtās nevienādības un esam pierādījuši uzdevumā prasīto:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4\cdot\frac{a+c+b+d}{a+b+c+d}=4.$$

A.10.5. a) Jā, var. Skat. A37.zīm.



A37. zīm.



A38. zīm.

b) Jā, var. Pulksteņa rādītāja kustības virzienā sanumurējam malu viduspunktus pēc kārtas ar $1;\ 2;\ 3;\ ...;2n+1$. Tad, sākot ar virsotni starp 1 un 2, sanumurējam virsotnes, ik pa vienai izlaižot, ar skaitļiem $4n+2$; $4n+1$; ...; $2n+2$ arī pulksteņa rādītāja kustības virzienā, līdz visas virsotnes ir sanumurētas (skat. A38.zīm.).

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Ievērosim, ka katram $n>0$ pastāv vienādība

$$\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{n}{n^4+2n^2+1-n^2}=\frac{n}{\left(n^2+1\right)^2-n^2}=\frac{n}{\left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right].$$

Saskaitot šīs vienādības pie $n=1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 2009$, iegūstam summu ar 4018 saskaitāmajiem. Ievērojam, ka saskaitāmie saīsinās, un rezultātā iegūstam tikai pirmo un pēdējo saskaitāmo. Tātad novērtējamās summas vērtība ir

$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{2010^2-2010+1}\right]<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2-1+1}=\frac{1}{2}$, kas arī bija jāpierāda.

A.11.2. <u>Atbilde:</u> pēc $2n-1$ dienām.

<u>Risinājums.</u> Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas Pirmkārt, pierādīsim, ka ar $2n-2$ vai mazāk dienām nepietiek. Pieņemsim pretējo, ka pēc $2n-2$ vai mazāk dienām visiem spēlētājiem atkal ir 0 punkti. Tādā gadījumā var šķirot 2 gadījumus:

- Ir vismaz 2 spēlētāji, kas uzvarējuši tikai vienreiz. Tādā gadījumā tas noticis dažādās dienās, un viņu punktu skaiti nevar būt vienādi –pretruna.
- Ir kāds spēlētājs, kurš ne reizi nav uzvarējis. Tādā gadījumā viņa punktu skaits ir negatīvs –pretruna.

Otrkārt, parādīsim, ka pēc $2n-1$ dienām visiem spēlētājiem atkal var būt 0 punkti:

viens spēlētājs uzvar *1*. un ($2n-2$)-ā dienā;
viens spēlētājs uzvar *2*. un ($2n-3$)-ā dienā;
...
viens spēlētājs uzvar n-ā un ($n-1$)-ā dienā;
viens spēlētājs uzvar ($2n-1$)-ā dienā.

A.11.3. Šķirojam 3 iespējas:

- a, b – nepāra skaitļi. Tā kā nepāra skaitļu reizinājums ir nepāra skaitlis un trīs nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tad S – nepāra skaitlis.
- a – nepāra skaitlis, b – pāra skaitlis. Varam secināt, ka a^2 - nepāra, ab - pāra, b^2 - pāra. Tādā gadījumā S – nepāra skaitlis.
- a, b – pāra skaitļi. Tā kā pāra skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis un trīs pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad S – pāra skaitlis.

Tā kā uzdevumā dots, ka S pēdējais cipars ir 0, tad S – pāra skaitlis. Varam secināt, ka a un b arī ir pāra skaitļi. Tādā gadījumā S dalās ar 4.

Tā kā $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ un a^2+ab+b^2 pēdējais cipars ir 0, tad arī a^3-b^3 pēdējais cipars ir 0. Varam secināt, ka a^3-b^3 dalās ar 5 bez atlikuma, tāpēc a^3 un b^3 dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 5.

Skaitļa pēdējais cipars	Atlikums, dalot ar 5	Skaitļa kuba pēdējais cipars	Atlikums, dalot ar 5
1	1	1	1
2	2	8	3
3	3	7	2
4	4	4	4
5	0	5	0
6	1	6	1
7	2	3	3
8	3	2	2
9	4	9	4
0	0	0	0

Pēc tabulas redzam, ka tādā gadījumā arī a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 5.

Varam secināt, ka $3a^2$ dos tādu pašu atlikumu, dalot to ar 5, kā a^2+ab+b^2. Tā kā a^2+ab+b^2 pēdējais cipars ir 0, tad arī $3a^2$ dalās ar 5 bez atlikuma. Bet 3 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc a^2 dalās ar 5 bez atlikuma. Tādā gadījumā arī a dalās ar 5 bez atlikuma. Tā kā a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 5, tad arī b dalās ar 5 bez atlikuma. Varam secināt, ka S dalās ar 25.

Tā kā $\mathrm{LKD}(4,25)=1$, tad S dalās ar $4\cdot 25=100$, un tādā gadījumā S priekšpēdējais cipars ir 0.

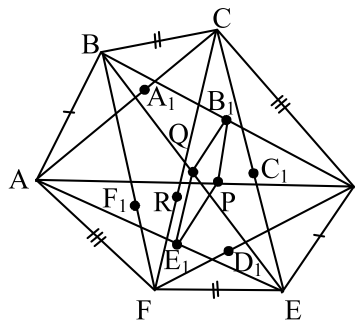
A.11.4. No trijstūru viduslīniju īpašībām viegli seko vispārzināms fakts: izliektā četrstūrī $XYZT$, kam nav paralēlu malu, nogriežņu XZ, YZ, YT un XT viduspunkti ir paralelograma virsotnes. Turklāt, ja $XY=ZT$, tad šis paralelograms ir rombs.

Apzīmēsim ar P, Q, R diagonāļu AD, BE, CF viduspunktus (skat. A39.zīm.). Apskatām izliektu četrstūri $ABDE$. Nogriežņu AD, BD, BE un AE viduspunkti ir

P, B_1, Q un E_1. Tā kā $AB = DE$, tad PB_1QE_1 ir rombs. Tāpēc B_1E_1 iet caur PQ viduspunktu un $B_1E_1 \perp PQ$.

Līdzīgi iegūstam, ka A_1D_1 iet caur PR viduspunktu un $A_1D_1 \perp PR$ (apskatot četrstūri $FACD$), kā arī C_1F_1 iet caur QR viduspunktu un $C_1F_1 \perp QR$ (apskatot četrstūri $BCEF$).

Tā kā A_1D_1, B_1E_1 un C_1F_1 ir ΔQPR malu idusperpendikuli, varam secināt, ka A_1D_1, B_1E_1 un C_1F_1 krustojas ΔPQR apvilktās riņķa līnijas centrā.



A39. zīm.

A.11.5. Ja x. y, z – pozitīvi skaitļi, tad $4x-3 \geq 0$, $4y-3 \geq 0$, $4z-3 \geq 0$. Apskatām dotās nevienādības. Pārnesot trijniekus uz labo pusi un sareizinot šīs nevienādības, iegūstam:

$$x^4y^4z^4 \leq (4x-3)(4y-3)(4z-3) \qquad (1)$$

Tā kā $(k-l)^2 \geq 0$ jeb $k^2+l^2 \geq 2kl$, tad katram a ir spēkā $a^4+3=(a^4+1)+2 \geq 2a^2+2 \geq 4a$, tāpēc $a^4 \geq 4a-3$. Izmantojot šo nevienādību, iegūstam:

$$x^4y^4z^4 \geq (4x-3)(4y-3)(4z-3) \quad (2)$$

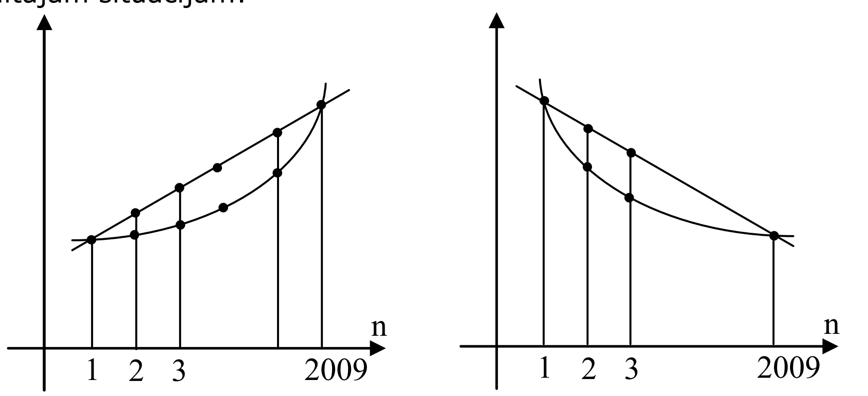
No (1) un (2) seko, ka $x^4y^4z^4 = (4x-3)(4y-3)(4z-3)$.

Tā kā $a^4 = 4a-3$ tad un tikai tad, ja $a=1$, varam secināt, ka $x=y=z=1$.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Attēlosim abas progresijas kā naturāla argumenta funkcijas. Aritmētiskās progresijas locekļi izvietojas uz taisnes, bet ģeometriskās progresijas locekļi – uz eksponentfunkcijas grafika.

No eksponentfunkcijas grafika īpašībām zinām, ka ir spēkā viena no A40.zīm. parādītajām situācijām:



A40. zīm.

Redzam, ka abos gadījumos aritmētiskās progresijas locekļu summa ir lielāka.

A.12.2. Ievērojam, ka

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz =$$

$$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]+3(xy+xz+yz) \geq 3(xy+xz+yz) > 3(x+y+z).$$

Tā kā $(x+y+z)^2 > 3(x+y+z)$, tad $x+y+z > 3$, kas arī bija jāpierāda.

A.12.3. a) Ievērojam, ka **katram** naturālam n:

$R = n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4+6n^3+11n^2+6n = (n^2+3n+1)^2-1$.

Tā kā nav divu naturālu skaitļu kvadrātu, kas atšķirtos viens no otra par 1, tad nav iespējams, ka R ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

b) Apskatām $R = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Skaitļi $n+1$ un $n+2$, kā arī $n+1$ un n ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi, līdz ar to tiem nav kopīgu dalītāju, izņemot 1.

Skaitļiem $n+1$ un $n+3$ kopīgs dalītājs var būt tikai 1 vai 2, jo $(n+3)-(n+1)=2$. Tā kā n – pāra skaitlis, tad tas nevar būt 2.

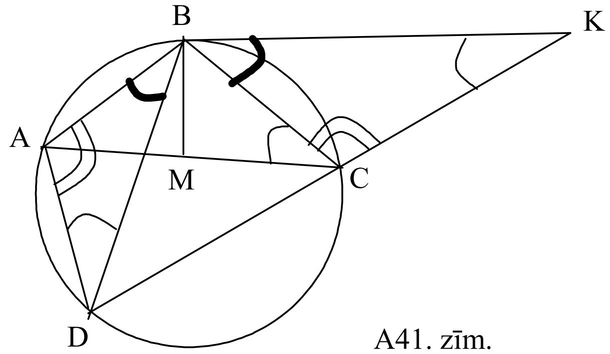
Tātad $n+1$ nav kopīgu dalītāju ar $n(n+2)(n+3)$. Ja R būtu kubs, tad kubs būtu gan atsevišķi $n+1$, gan $n(n+2)(n+3)$.

Tā kā $(n+1)^3 < n(n+2)(n+3) < (n+2)^3$ un skaitlis, kas atrodas starp divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu kubiem, nav naturāla skaitļa kubs, tad R nevar būt kāda naturāla skaitļa kubs.

A.12.4. Izvēlamies K uz stara DC tā, ka $\angle BKC = \angle BDA$ (skat. A41.zīm.). Tā kā $\angle BCK = 180° - \angle BCD = \angle BAD$, tad $\Delta BCK \sim \Delta BAD$ (ll). Tāpēc $\frac{BC}{CK} = \frac{AB}{AD}$.

No dotā $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$, tāpēc $\frac{BC}{CK} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$, un tādā gadījumā $CD = CK$.

No leņķu vienādībām viegli seko, ka $\Delta ABC \sim \Delta DBK$ (ll). Šajā līdzībā malas AC viduspunkts M atbilst malas DK viduspunktam C. Tāpēc $\angle ABM = \angle DBC$, kas arī bija jāpierāda.



A41. zīm.

A.12.5. Pieņemsim no pretējā, ka n ir **lielākais** konfekšu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija. (Tādi n vispār eksistē, piem., $n=2$.) Pieņemsim, ka uz galda atrodas n^2+n+1 konfekte. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs var uzvarēt. Tā būs pretruna ar pieņēmumu, un uzdevums būs atrisināts.

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu nevar apēst vairāk par n^2 konfektēm, jo $(n+1)^2 > n^2+n+1$. Tāpēc pēc šī gājiena uz galda paliek $\geq n+1$ konfekte. Saskaņā ar pieņēmumu, ka n ir lielākais konfekšu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija, šajā situācijā uzvar tas spēlētājs, kas spēli sāk, tātad otrais spēlētājs. Vajadzīgā pretruna iegūta.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 50. Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka par atbildi der $(m,n)=(k,k^2)$ un $(m,n)=(k^2,k)$, kur $k\in N$, $k>1$. Tiešām:

$n^3-1=k^3-1$ dalās ar $m\cdot n-1=k\cdot k^2-1=k^3-1$;

$n^3-1=(k^2)^3-1=k^6-1=(k^3-1)(k^3+1)$ dalās ar $m\cdot n-1=k^2\cdot k-1=k^3-1$.

Otrkārt, pierādīsim, ka nevar atrast citus m un n, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Saskaņā ar doto $(n^3-1)m-n^2(nm-1)=\boldsymbol{n^2-m}$ **dalās ar** $\boldsymbol{m\cdot n-1}$. Tālāk līdzīgi iegūstam, ka $m(n^2-m)-n(nm-1)=n-m^2$ dalās ar $m\cdot n-1$. Koncentrēsimies uz $n-m^2$. Šķirojam 3 iespējas:

- $n>m^2$. Tad $m\cdot n-1\le n-m^2$ jeb $n(m-1)\le 1-m^2$ - acīmredzama pretruna.
- $n=m^2$. Tā ir pirmā atbildē minētā risinājumu sērija.
- $n<m^2$. Tad no augstāk pierādītā, ka $n-m^2$ dalās ar $m\cdot n-1$, seko, ka **naturāls skaitlis** $\boldsymbol{m^2-n}$ **dalās ar** $\boldsymbol{m\cdot n-1}$. No uzdevumā dotā seko, ka $m\cdot n-1\le n^3-1$, tātad $m\le n^2$. Ja $m=n^2$, iegūstam atbildē minēto otro atrisinājumu sēriju. Ja turpretī $m<n^2$, tad n^2-m ir naturāls skaitlis; tad no pirmā izceltā apgalvojuma seko, ka $m\cdot n-1\le n^2-m\le n^2-1$, tātad $\underline{m<n}$. Savukārt no otrā izceltā apgalvojuma seko, ka $m\cdot n-1\le m^2-n<m^2-1$, tāpēc $\underline{n<m}$. Iegūta pretruna.

VP.1.2. Ar matemātisko indukciju triviāli pierāda, ka pie $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ pastāv nevienādība

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

(Tā ir arī Koši – Bunjakovska nevienādība vektoriem

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}},\ldots\frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)\text{ un }\left(\sqrt{x_1},\ldots,\sqrt{x_n}\right).\ )$$

Iegūstam:

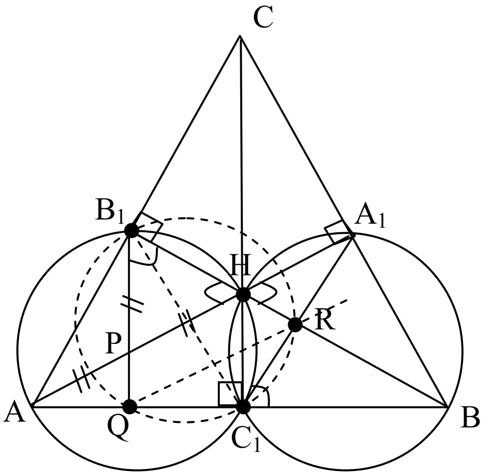
$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a}\ge$$

$\ge\dfrac{(2a+2b+2c)^2}{4(a+b+c)}=a+b+c$, kas arī bija jāpierāda.

VP.1.3. Atceramies Holla teorēmas „precību variantu”: ja ir n puiši, n meitenes un ir zināms, ka visiem k, $1\le k\le n$, katri k puiši kopumā pazīst vismaz k meitenes, tad jauniešus var sadalīt pa pāriem tā, ka katrā pārī ir puisis un meitene, kas viens otru pazīst.

Pasludināsim tabulas rindas par meitenēm, kolonnas – par puišiem. Teiksim, ka puisis pazīst meiteni, ja atbilstošās kolonnas un rindas kopējā rūtiņā atrodas pozitīvs skaitlis. Katrās k kolonnās esošie pozitīvie skaitļi kopā izvietojas ne mazāk kā k rindās, līdz ar to Holla teorēmas nosacījumi izpildīti.

VP.1.4. Nepārtraukti uzzīmēto riņķa līniju eksistence ir acīmredzama (skat. A42.zīm.). Tā kā mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, tad $PB_1 = PH$ un tātad $\angle PB_1H = \angle PHB_1$. No šīs vienādības un nepārtrauktajām riņķa līnijām seko ar vienu lociņu atzīmēto leņķu vienādība.



A42. zīm.

No $\angle QB_1R = \angle RC_1B$ seko $\angle QB_1R + \angle QC_1R = 180°$, tāpēc eksistē „pārtrauktā" riņķa līnija caur B_1, Q, C_1, R. No šīs riņķa līnijas seko $\angle QRB_1 = \angle QC_1B_1 = \angle AC_1B_1 = \angle AHB_1$. No vienādības $\angle QRB_1 = \angle AHB_1$ seko $AA_1 \| QR$, tāpēc $QR \perp CB$, kas arī bija jāpierāda.

VP.1.5. Visām griešanas/pārvietošanas procesā piedalošamies daļām uz malām uzzīmēsim bultiņas tā, ka iegūtie vektori veido pozitīvā virzienā orientētu ciklu. Tā kā divi pretēji vektori anulējas un mūsu procesā neviens vektors nemaina savu virzienu, tad **katrai** taisnei t paralēlo vektoru summa procesa gaitā paliek nemainīga. Tāpēc iegūtais trijstūris ir vismaz līdzīgs dotajam. Tā kā to laukumi ir vienādi, tad abi trijstūri ir arī vienādi savā starpā.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 2.maijā

VP.2.1. Pārveidojam doto nevienādību:

$$\frac{a^k(c-b)+b^k(a-c)+c^k(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a^k-b^k)(c-a)-(c^k-a^k)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= \frac{1}{b-c}\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+b^{k-1}-a^{k-1}-a^{k-2}c-\ldots-c^{k-1}\right)=$$

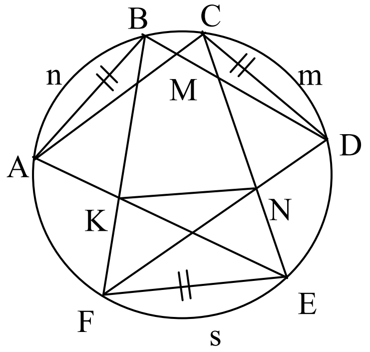
$$= a^{k-2}+a^{k-3}\frac{b^2-c^2}{b-c}+\ldots+\frac{b^{k-1}-c^{k-1}}{b-c}.$$

Mēs varam izteikt šo izteiksmi kā summu: $\sum\limits_{i+j+l=k-2} a^i b^j c^l$.

Ievērojam, ka saskaitāmo skaits šajā summā ir $\frac{k(k-1)}{2}$. Saskaņā ar sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\sum_{i+j+l=k-z} a^i b^j c^l > \frac{k(k-1)}{2} a^m b^m c^m = \frac{k(k-1)}{2}, \text{ kur } m = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

VP.2.2. Apzīmēsim uzdevuma nosacījumos minētos krustpunktus attiecīgi ar M, N, K (skat. A43.zīm.).



A43. zīm.

Apskatīsim taisni t, kas iet caur M un riņķa centru O. Taisne simetrijas pēc ir perpendikulāra pret BC un AD, jo $ABCD$ – riņķī ievilkta vienādsānu trapece ar diagonāļu krustpunktu M. Ja mēs pierādīsim, ka $KN \| BC$ (vai, kas ir tas pats, $KN \| AD$), no šejienes izrietēs, ka ΔMNK augstums pret KN iet caur O. Līdzīgu rezultātu iegūsim par ΔMNK augstumiem pret MN un MK, un vajadzīgais būs pierādīts – visi ΔMNK augstumi iet caur O, tātad O ir ΔMNK ortocentrs.

Apzīmēsim $A\tilde{n}B = C\tilde{m}D = E\tilde{s}F = w$; tad pēc iekšējo leņķu īpašībām $\angle FKE = \frac{1}{2}(w + w) = w$.

Līdzīgi arī $\angle FNE = w$. Tātad $\angle FKE = \angle FNE$; tāpēc ap $FKNE$ var apvilkt riņķa līniju. Tādēļ $\angle CNK = 180° - \angle KNE = \angle KFE$. Tā kā ap $FBCE$ ir apvilkta sākotnējā riņķa līnija, tad $\angle BCN + \angle CNK = \angle BCN + \angle KFE = 180°$. No tā seko, ka taisnes BC un KN ir paralēlas, kas arī bija jāpierāda.

VP.2.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, pierādīsim, ka lielākā iespējamā n vērtība nebūs lielāka kā 8. Iedomāsimies, ka pavisam ir m grāmatas, un apzīmēsim ar A_m $(1 \le i \le m)$ kopu, kura sastāv no rūķīšiem, kuri ir izlasījuši i-to grāmatu. Ievērojam, ka $|A_i \setminus A_j| + |A_j \setminus A_i| = |A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j| \ge 4$ katram $i < j$.

Saskaitot šīs nevienādības visiem $i < j$, iegūstam:

$$\sum_{i<j}\left(|A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j|\right) = (m-1)\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j}|A_i \cap A_j| \ge 4C_m^2 = 2m(m-1).$$

Apzīmējot ar m_a grāmatu skaitu, kuras ir izlasījis rūķītis a, iegūstam:

$$\sum_a |A_i| = \sum_a m_a,\ \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| = \sum_a C_{m_a}^2 = \sum_a \frac{m_a(m_a-1)}{2}.$$

Tādējādi: $\sum_a (m \cdot m_a - m_a^2) = \sum_a \left(\frac{m^2}{4} - \left(\frac{m}{2} - m_a\right)^2\right) \ge 2m(m-1)$.

Tātad $\frac{7m^2}{4} \ge 2m(m-1)$ jeb $0 \ge m^2 - 8m$. Esam ieguvuši, ka $m \le 8$.

Otrkārt, parādīsim, ka n vērtība var būt 8. Tas ir iespējams, ja:

$A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{a,d,e\}$, $A_3 = \{a,f,g\}$, $A_4 = \{b,d,f\}$, $A_5 = \{b,e,g\}$, $A_6 = \{c,d,g\}$, $A_7 = \{c,e,f\}$, $A_8 = \{a,b,c,d,e,f,g\}$.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2009. gada 3.maijā

VP.3.1. 1. atrisinājums. Pierādīsim uzdevumā doto nevienādību, izmantojot matemātisko indukciju.

Pie $n=2$ iegūstam nevienādību: $\sqrt{x_1^2+1}+2\sqrt{x_2^2+1}\ge\sqrt{(x_1+2x_2)^2+9}$.

Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam $\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}\ge x_1x_2+1$. Ja nevienādības labā puse ir negatīva, tad nevienādība ir patiesa. Ja vienādības labā puse ir nenegatīva, tad kāpinām abas puses kvadrātā un iegūstam, ka $(x_1-x_2)^2\ge 0$. Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr nenegatīvs skaitlis, tad varam secināt, ka pie $n=2$ nevienādība vienmēr patiesa.

Varam pieņemt, ka nevienādība patiesa n saskaitāmajiem. Pierādīsim, ka tādā gadījumā nevienādība patiesa arī $n+1$ saskaitāmajiem. Esam pieņēmuši, ka izpildās nevienādība:

$$\sqrt{x_1^2+1}+2\sqrt{x_2^2+1}+\ldots+n\sqrt{x_n^2+1}\ge\sqrt{(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}},$$

tātad mums pietiek pierādīt:

$$\sqrt{(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}}+(n+1)\sqrt{x_{n+1}^2+1}\ge$$
$$\ge\sqrt{(x_1+2x_2+\ldots+nx_n+(n+1)x_{n+1})^2+\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}.$$

Šī nevienādība ekvivalenta nevienādībai:

$$(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^2x_{n+1}^2+(n+1)^2+$$
$$+2(n+1)\sqrt{(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\sqrt{x_{n+1}^2+1}\ge$$
$$\ge(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+(n+1)^2x_{n+1}^2+2(n+1)x_{n+1}(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)+$$
$$+\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

kas savukārt ekvivalenta nevienādībai:

$$2\sqrt{(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\sqrt{x_{n+1}^2+1}\ge$$
$$\ge 2x_{n+1}(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)+n(n+1).$$

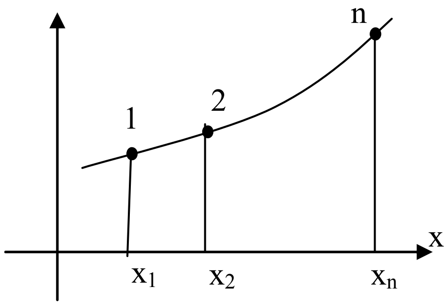
Ja labā puse ir negatīva, tad nevienādība ir patiesa. Ja tā ir nenegatīva, varam abas puses kāpināt kvadrātā un iegūstam nevienādību:

$$4(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2x_{n+1}^2+4(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+n^2(n+1)^2x_{n+1}^2+n^2(n+1)^2\ge$$
$$\ge 4x_{n+1}^2(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)^2+n^2(n+1)^2+$$
$$+4n(n+1)x_{n+1}(x_1+2x_2+\ldots+nx_n),$$

kas tālāk pārveidojas par $(2(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)-n(n+1)x_{n+1})^2\ge 0$.

Šī nevienādība acīmredzami ir patiesa. Induktīvā pāreja izdarīta.

2. atrisinājums. Apskatām funkciju $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Tā ir izliekta uz leju (varam pierādīt, ka $f''(x)>0$, vai arī pierādīt, ka $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$, un atzīmēt, ka $f(x)$ ir nepārtraukta).



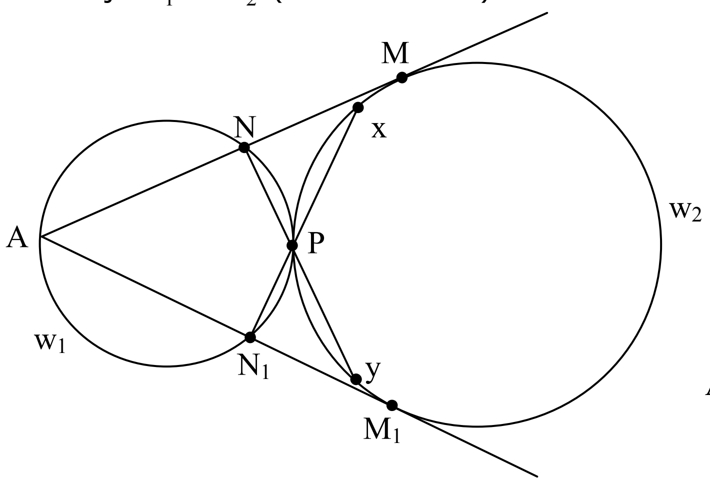
A44. zīm.

Ievietojot masas, kā parādīts A44.zīmējumā, no Jensena nevienādības iegūstam

$$\frac{1\cdot\sqrt{x_1^2+1}+2\cdot\sqrt{x_2^2+1}+\ldots+n\cdot\sqrt{x_n^2+1}}{1+2+\ldots+n}\ge\sqrt{\left(\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n}{1+2+\ldots+n}\right)^2+1},$$

no kurienes pēc triviāliem pārveidojumiem seko vajadzīgais.

VP.3.2. Izdarām homotētiju ar centru P un koeficientu $k=-\frac{R_2}{R_1}$. Šajā homotētijā $w_1\to w_2$ (skat. A45.zīm.).



A45. zīm.

Apzīmējam $N\to y$ un $N_1\to x$.

Punkta N pakāpe attiecībā pret w_2 ir $NM^2=NP\cdot NY=(1-k)\cdot NP^2$. Tātad:

$$NM^2=(1-k)\cdot NP^2 \qquad (1)$$

Līdzīgi iegūstam: $$N_1M_1^2=(1-k)\cdot N_1P^2 \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko: $$\frac{NM^2}{NP^2}=\frac{N_1M_1^2}{N_1P^2},$$

no kurienes seko vajadzīgais.

VP.3.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka dotās izteiksmes vērtība var būt 4. Tiešām, pie vērtībām $m=0$ un $n=11$ $\left|5^{4m+3}-n^2\right|=\left|5^3-11^2\right|=|125-121|=|4|=4$.

Otrkārt, pierādām, ka 4 ir mazākā iespējamā dotās izteiksmes vērtība. Acīmredzams, ka izteiksmes vērtība nevar būt 0, jo 5^{4m+3} nav vesela skaitļa kvadrāts. Tātad mums atliek pierādīt, ka izteiksmes vērtība nevar būt 1, 2 vai 3.

I Pieņemsim, ka $n^2-5^{4m+3}>0$.

Ja $n^2-5^{4m+3}=1$, tad $5^{4m+3}=n^2-1=(n-1)(n+1)$. Varam secināt, ka n ir pāra skaitlis un tādā gadījumā skaitļi $n-1$ un $n+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, no kā secinām, ka $n-1=1$ un $n=5^{4m+3}$. Tātad $n=2$, bet 5^{4m+3} nevar būt vienāds ar 3 – pretruna.

Ja n dalās ar 5, tad $n^2-5^{4m+3}\geq 5$. Ja n ir formā $n=5k\pm 1$, tad $n^2-5^{4m+3}\equiv 1$ (mod 5). Ja n ir formā $n=5k\pm 2$, tad $n^2-5^{4m+3}\equiv 4$ (mod 5). Tā kā neviens no atlikumiem nav vienāds ar 2 vai 3 un $n^2-5^{4m+3}>1$, varam secināt, ka $n^2-5^{4m+3}\geq 4$.

II Pieņemsim, ka $5^{4m+3}-n^2>0$. Skaitlis $5^{4m+3}-n^2$ nevar būt vienāds ar 2 vai 3. Pierādām to, apskatot 3 gadījumus:

- Skaitli n var uzrakstīt formā $n=5k$. Tātad $5^{4m+3}-n^2$ dalās ar 5, līdz ar to secinām, ka tas ir lielāks nekā 5.
- Skaitli n var uzrakstīt formā $n=5k\pm 1$. Tātad $5^{4m+3}-n^2\equiv -1\equiv 4$ (mod 5).
- Skaitli n var uzrakstīt formā $n=5k\pm 2$. Tātad $5^{4m+3}-n^2\equiv -4\equiv 1$ (mod 5).

Pieņemsim, ka eksistē tādi m un n, ka $5^{4m+3}-n^2=1$. Tātad:

$n^2=5^{4m+3}-1=(5-1)(5^{4m+2}+5^{4m+1}+\ldots+5+1)=4(5^{4m+2}+5^{4m+1}+\ldots+5+1)$.

Tā kā 4 ir vesela skaitļa kvadrāts, tad arī $5^{4m+2}+5^{4m+1}+\ldots+5+1$ jābūt vesela skaitļa kvadrātam. Apzīmējam šo summu ar l^2. Tādā gadījumā:

$(l-1)(l+1)=5(5^{4m+1}+5^{4m}+\ldots+5+1)$. Bet

$5^{4m+1}+5^{4m}+\ldots+5+1\equiv 1+1+\ldots+1+1\equiv(4m+2)\equiv 2$ (mod 4).

Tātad šī summa nedalās ar 4, bet dalās ar 2. Tātad arī $(l-1)(l+1)$ dalās ar 2 jeb $(l-1)(l+1)$ ir pāra skaitlis. Ievērojam, ka skaitļi $l-1$ un $l+1$ ir vienādas paritātes, tātad $(l-1)(l+1)$ dalās arī ar 4 –pretruna. Tātad neeksistē tādi m un n, pie kuriem izpildās vienādība $5^{4m+3}-n^2=1$.

IMO. 50. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (50th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2009. gada 15. jūlijā.

IMO.1. Uzdevumā doto var pierakstīt kongruenču formā:

$$a_1a_2 \equiv a_1 \pmod n$$
$$a_2a_3 \equiv a_2 \pmod n$$
$$\dots$$
$$a_{k-1}a_k \equiv a_k \pmod n$$

Pieņemsim no pretējā, ka

$$a_ka_1 \equiv a_k \pmod n \qquad (*)$$

No **dotajām** kongruencēm pakāpeniski seko

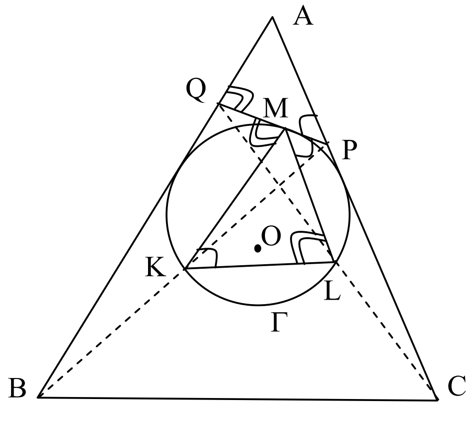
$$a_1 \equiv a_1a_2 \equiv a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3 \equiv (a_1a_2)(a_3a_4) = (a_1a_2a_3)a_4 \equiv$$
$$\equiv (a_1a_2a_3)(a_4a_5) = \dots \equiv a_1a_2\dots a_k \text{ (visas kongruences pēc moduļa } n\text{)}.$$

Līdzīgā ceļā, sākot ar (*), pakāpeniski iegūstam

$$a_k \equiv a_ka_1 \equiv a_k(a_1a_2) = (a_ka_1)a_2 \equiv (a_ka_1)(a_2a_3) = (a_ka_1a_2)a_3 \equiv$$
$$\equiv (a_ka_1a_2)(a_3a_4) = \dots \equiv a_ka_1\dots a_{k-1} \text{ (visas kongruences pēc moduļa } n\text{)}.$$

Iznāk, ka $a_1 \equiv a_1a_2\dots a_{k-1}a_k \equiv a_k \pmod n$. Bet tas nav iespējams, jo $1 \le a_1 \ne a_k \le n$, tāpēc a_1 un a_k dod dažādus atlikumus, dalot ar n. Iegūta pretruna. Tātad vajadzīgais pierādīts.

IMO.2. No trijstūra viduslīnijas īpašības seko, ka $ML \parallel PC$ (skat. A46.zīm.). Tāpēc $\angle LMP = \angle QPA$. No ievilktu leņķu un hordas-pieskares leņķu īpašībām $\angle LMP = \angle LKM$, tāpēc $\angle LKM = \angle QPA$.



A46. zīm.

Līdzīgi pierāda, ka $\angle KLM = \angle PQA$. Tātad $\Delta AQP \sim \Delta MLK$. Tāpēc:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{1}{2}BQ}{\frac{1}{2}CP} = \frac{BQ}{CP}.$$

Secinām, ka $AP \cdot CP = AQ \cdot BQ \quad (*)$

Novelkam ΔABC apvilkto riņķa līniju w un tās diametrus, kas iet caur P un Q. Ja w rādiuss ir R, tad no teorēmas par hordu nogriežņu reizinājumiem un no (*) iegūstam:

$$(R + OP)(R - OP) = AP \cdot CP = AQ \cdot BQ = (R + OQ)(R - OQ)$$

$$R^2 = OP^2 = R^2 - OQ^2,$$

no kurienes seko, ka $OP = OQ$, kas arī bija jāpierāda.

IMO.3. Apzīmēsim progresijas $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ diferenci ar D un $d_n = s_{n+1} - s_n$, $n = 1;\ 2;\ \ldots$. Mums jāpierāda, ka visi skaitļi d_n ir vienādi. Vispirms pierādīsim, ka tie ir ierobežoti. Tiešām, saskaņā ar doto $d_n \geq 1$ visiem n. Tāpēc: $d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_{n+1}-1} =$

$$= \left(s_{s_n+1} - s_{s_n}\right) + \left(s_{s_n+2} - s_{s_n+1}\right) + \ldots + \left(s_{s_{n+1}} - s_{s_{n+1}-1}\right) = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

Ierobežotība pierādīta.

No ierobežotības seko, ka eksistē $m = \min\{d_n | n \in N\}$ un $M = \max\{d_n | n \in N\}$.

Mums pietiek pierādīt, ka $m = M$. Pieņemsim pretējo, ka $m < M$

Izvēlamies tādu n, ka $m = d_n = s_{n+1} - s_n$. Iegūstam:

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+m-1} \leq m \cdot M \qquad (1),$$

pie tam vienādība pastāv tad un tikai tad, ja visi d_{s_n}, d_{s_n+1}, ..., d_{s_n+m-1} vienādi ar M.

Izvēlamies tādu n, ka $M = d_n = s_{n+1} - s_n$. Līdzīgi iegūstam $D \geq M \cdot m \qquad (2)$,

pie tam vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_n+M-1} = m$.

No nevienādībām (1), (2) un tām sekojošajiem secinājumiem iegūstam, ka $D = m \cdot M$, kā arī $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_{n+1}-1} = M$, ja $d_n = m$, un $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_{n+1}-1} = m$, ja $d_n = M$.

Tātad no $d_n = m$ seko $d_{s_n} = M$. Skaidrs, ka $s_n \geq n$. Pamatosim, ka $s_n > n$. Tiešām, ja būtu $s_n = n$, tad $m = d_n = d_{s_n} = M$, kas ir pretrunā ar pieņēmumu $m < M$.

Līdzīgi no $d_n = M$ seko $d_{s_n} = m$, bez tam $s_n > n$.

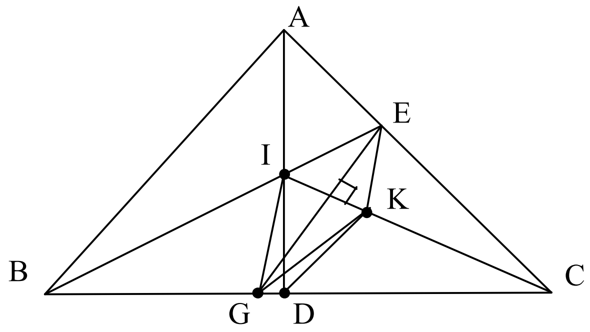
No šiem abiem secinājumiem iegūstam, ka eksistē tāda stingri augoša naturāla skaitļu virkne $n_1, n_2, n_3, \ldots$, ka $d_{s_{n_1}} = M$, $d_{s_{n_2}} = m$, $d_{s_{n_3}} = M$, $d_{s_{n_4}} = m$, ...

Bet šīs virknes elementi ir divu aritmētisku progresiju $s_{s_1+1}, s_{s_2+2}, \ldots$ un $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ atbilstošo locekļu starpības, tātad tie ir vienādi savā starpā. Tāpēc $m = M$. Iegūta pretruna ar sākotnējo pieņēmumu, ka $m < M$. Tāpēc tiešām $m = M$, kas arī bija jāpierāda.

IMO. Uzdevumi 2009. gada 16. jūlijā.

IMO.4. Apzīmēsim ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru ar I. Punkti I un K atrodas uz $\angle ACB$ bisektrises. Skaidrs, ka $\angle ADC = 90°$.
Apzīmēsim punktu, kas simetrisks punktam E attiecībā pret leņķa C bisektrisi, ar G. Skaidrs, ka G atrodas uz taisnes BC. Šķirosim trīs gadījumus:

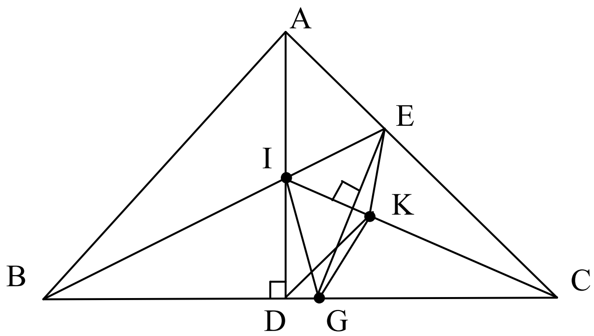
- Punkts G atrodas starp B un D (skat. A47.zīm.).



A47. zīm.

Simetrijas pēc $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK = 45°$. Tā kā $\angle IDK = \frac{1}{2}\angle ADC = 45°$, tad $\angle IGK = \angle IDK$. Tāpēc G, I, K, D atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tāpēc $\angle GIK = 180° - \angle GDK = 45°$, $\angle EIK = \angle GIK$ (simetrijas pēc) $= 45°$, $\angle BIC = 180° - 45° = 135°$, $\angle IBC + \angle ICB = 180° - 135° = 45°$, $\angle ABC + \angle ACB = 2(\angle IBC + \angle ICB) = 2 \cdot 45° = 90°$. (No tālākā sekos, ka šis gadījums īstenībā nav iespējams.

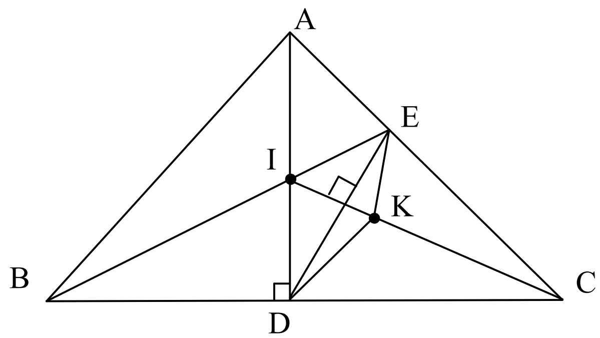
- Punkts G atrodas starp D un C (skat. A48.zīm.)



A48. zīm.

Ar tādu pašu spriedumu kā iepriekšējā gadījumā (vienīgā atšķirība - $\angle GIK = \angle GDK = 45°$) atkal iegūstam, ka $\angle BAC = 90°$.

- Punkts G sakrīt ar D (skat. A49.zīm.).



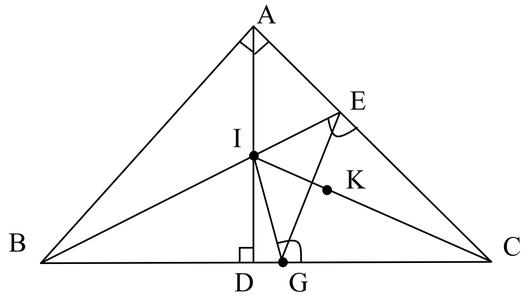
A49. zīm.

Simetrijas pēc $\angle IEC = \angle IDC = 90°$, tāpēc bisektrise BE ir arī augstums; tāpēc $BA = BC$. Tātad ΔABC ir vienādmalu un $\angle BAC = 60°$.

Līdzšinējie spriedumi parāda, ka $\angle BAC$ nevar būt citas vērtības kā vien $90°$ un $60°$. Tomēr, lai risinājums būtu pilnīgs, vēl jānoskaidro, vai šīs vērtības tiešām ir iespējamas.

Tas, ka regulāra ΔABC gadījumā uzdevuma nosacījumi izpildās, ir acīmredzams: D un E **ir** simetriski attiecībā pret CI, tāpēc $\angle BEK = \angle IEK = \angle IDK = \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$.

Vienādsānu taisnleņķa ΔBAC gadījumā $\angle IEC > 90°$. Tāpēc, konstruējot G simetriski E attiecībā pret CI, arī $\angle IGC > 90°$, un G atrodas starp D un C (skat. A50.zīm.).



A50. zīm.

Tā kā $\angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(45° + 45°) = 45°$, tad $\angle BIC = 135°$ un $\angle EIC = 45°$.

Simetrijas pēc $\angle GIK = \angle GIC = 45°$.

Tā kā $\angle GDK = \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$, tad $\angle GIK = \angle GDK$. Tāpēc *I, K,G, D* atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tāpēc $\angle IGK = \angle IDK = 45°$. Bet simetrijas pēc $\angle IEK = \angle IGK$. Tātad $\angle BEK = \angle IEK = 45°$, kas arī bija jāpierāda.

IMO.5. Viegli pārbaudīt, ka der funkcija $f(x) \equiv x$. Pierādīsim, ka citu iespēju nav.

I Pierādīsim ,ka $f(1) = 1$.

Ja $f(1) = 1 + m$, $m = 1;\ 2;\ ...$, apskatīsim trijstūri ar malu garumiem 1, $f(y)$; $f(y + 1 + m - 1) = f(y + m)$. Tā kā jābūt $f(y) - 1 < f(y + m) < f(y) + 1$, iegūstam $f(y + m) = f(y)$. Tātad funkcija *f* ir periodiska ar periodu *m*; tātad tā ir ierobežota. Varam pieņemt, ka visiem x pastāv nevienādība $f(x) \le B$. Pie $x > 2B$ iznāk, ka $x > B + B \ge f(y) + f(y + f(x) - 1)$, tātad *x*; $f(y)$; $f(y + f(x) - 1)$ nav trijstūra malu garumi.

II Pierādīsim, ka $f(f(x)) = x$ visiem *x*. Tiešām, izvēlamies uzdevumā $a = x$ un $b = 1$. Tad eksistē trijstūris ar malu garumiem *x*; 1; $f(f(x))$. Tā kā jābūt $x - 1 < f(f(x)) < x + 1$, iegūstam $f(f(x)) = x$, kas arī bija jāpierāda.

III Pierādīsim, ka visiem x pastāv $f(x) \le x$. Ja tas būs pierādīts, tad uzdevums būs atrisināts, jo tad saskaņā ar iepriekšējo $x = f(f(x)) \le f(x)$; no nevienādībām $f(x) \le x$ un $x \le f(x)$ seko vajadzīgais $f(x) \equiv x$.

Pieņemsim pretējo: eksistē tāds *z*, ka $f(z) > z$. Apzīmējam $f(z) = w + 1$. Tad $w \ge z \ge 2$ (saskaņā ar I).

Apzīmējam $M = \max\{f(1), f(2), ..., f(w)\}$. Pierādīsim vispirms: nav tāda pozitīva vesela skaitļa *t*, ka

$$(*) \qquad f(t) > \frac{z-1}{w}\cdot t + M .$$

Tiešām, ja tādi t būtu, tad izsacīsim mazāko no tiem kā $t = w \cdot r + s$, kur r ir vesels skaitlis, $1 \le s \le w$. No M izvēles iegūstam $t > w$. Izvēloties $a = z$ un $b = t - w$, apskatām trijstūri ar malu garumiem z; $f(t-w)$; $f((t-w)+f(z)-1) = f(t-w+w+1-1) = f(t)$. Iegūstam $z + f(t-w) \Rightarrow f(t)$.

Tāpēc $f(t-w) \ge f(t) - (z-1) > \frac{z-1}{w} \cdot t + M - (z-1) = \frac{z-1}{w}(t-w) + M$.

Iznāk, ka (*) ir spēkā arī tad, ja t vietā ņem pozitīvu veselu skaitli $(t-w)$, un tā ir pretruna ar t minimalitāti.

Tagad varam secināt, ka **visiem** t ir spēkā nevienādība

$$(**) \qquad f(t) \le \frac{z-1}{w} \cdot t + M .$$

Saskaņā ar apzīmējumiem $\frac{z-1}{w} < 1$. Tāpēc eksistē tāds vesels t, ka

$$\left(\frac{z-1}{w}\right)^2 t + \left(\frac{z-1}{w} + 1\right) M < t .$$

Divas reizes pielietojot (**), iegūstam:

$$f(f(t)) \le \frac{z-1}{w} \cdot f(t) + M \le \frac{z-1}{w}\left(\frac{z-1}{w} t + M\right) + M < t ,$$

kas ir pretruna ar augstāk pierādīto identitāti $f(f(x)) = x$.

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

IMO.6. Ja sienāzītis pēc kārtas veic lēcienus $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, mēs sacīsim, ka atbilstošais sienāža maršruts ir ($i_1, i_2, \ldots, i_k$).

Risināsim uzdevumu ar matemātisko indukciju pēc parametra n. Pēc uzdevuma formulējuma skaidrs, ka $n \ge 1$ (jo teikts, ka kopa M satur $n-1$ pozitīvu skaitli). Indukcijas bāze pie $n = 1$ ir triviāla (ja kopa M ir tukša, ne no kādiem skaitļu ass punktiem nav jāvairās). Pieņemsim, ka uzdevuma apgalvojums pareizs visām n vērtībām, kas mazākas par t, un apskatīsim situāciju, kad $n = t \ge 2$. Varam uzskatīt, ka $a_1 < a_2 < \ldots < a_t$. Apzīmēsim kopas M minimālo elementu ar d. Šķirosim divus gadījumus.

- $d < a_n$

  Ja $a_n \notin M$, tad saskaņā ar induktīvo hipotēzi sienāzis var nonākt *no* a_n *līdz* s *ar lēcieniem* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$*, nenonākot punktos no* $M \setminus \{d\}$*.* Tāpēc mūsu mērķiem der sienāža maršruts, kas sākas ar a_n un turpinās tā, kā minēts kursīvā izceltajā tekstā.

  Ja turpretī $a_n \in M$, apskatām n kopas $\{a_n\}$, $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, ..., $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Šīm kopām savā starpā nav kopēju elementu. Vismaz vienai no tām nav kopēju elementu ar M; pieņemsim, ka tā ir $\{a_i, a_i + a_n\}$. Tad no punkta $a_i + a_n$ ieskaitot līdz punktam s ieskaitot nav vairāk par $n-3$ kopas M elementiem, jo $d < a_i + a_n$ un $a_n < a_i + a_n$.

  Tad sienāzim der maršruts, kas sākas ar a_i un a_n un turpinās saskaņā ar induktīvo hipotēzi no $a_i + a_n$ līdz s.

- $d \geq a_n$

  Apzīmēsim $M' = M \setminus \{d\}$. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi sienāzis var nonākt no a_n līdz s, nenonākot M' punktos, pa kaut kādu maršrutu $X = (i_1, \ldots, i_{n-1})$. Ja šis maršruts X neskar arī punktu d, tad mūsu mērķiem der $(n, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$. Ja maršruts X skar punktu d, tad $a_n + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = d$ kādam k, kas apmierina nevienādību $0 \leq k < n-1$. Šai gadījumā apskatām maršrutu $Y = (i_1, \ldots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1})$. Tā kā $a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} + a_n = d$, sienāzis nenonāks kopas M punktos pirmo $k+1$ lēcienu laikā; savukārt turpmāko lēcienu laikā viņš nonāks tādās vietās, kurās nonāktu, izpildot maršrutu X (un visas šīs vietas ir pa labi no d). Tāpēc maršruts Y der mūsu mērķim.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2008”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Ceļot doto vienādību kvadrātā, iegūstam:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}\right)=\frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{9}{4}-2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}\right)$$

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{9}{4}-2\cdot\frac{(z-x)+(y-z)+(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{9}{4}.$$

AB.A.2. Uzdevumā vairākas reizes izmantosim Košī - Bunjakovska nevienādību: visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ ir spēkā

$$\left(a_1^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+...+a_nb_n\right)^2.$$

Izvēlamies $\left(a_1;a_2;a_3\right)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+y+z}};\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y^2+z}};\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x+y+z^2}}\right)$ un $\left(b_1,b_2,b_3\right)=\left(\sqrt{x};\sqrt{y};\sqrt{z}\right)$. Tad no Košī – Bunjakovska nevienādības seko, ka

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{x+y^2+z}}+\frac{z}{\sqrt{x+y+z^2}}\right)^2\leq$$

$$\leq\left(\frac{x}{x^2+y+z}+\frac{y}{x+y^2+z}+\frac{z}{x+y+z^2}\right)\left(x+y+z\right)\qquad(*)$$

Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka (*) labā puse nepārsniedz 3.
Vispirms pierādīsim, ka $x+y+z\leq 3$. Tiešām:

$$\left(x+y+z\right)^2=3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x-y\right)^2-\left(x-z\right)^2-\left(y-z\right)^2\leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=9,$$

no kā seko vajadzīgais.

Tāpēc atliek pierādīt, ka $\frac{x}{x^2+y+z}+\frac{y}{y^2+z+x}+\frac{z}{z^2+x+y}\leq 1$.

No Košī-Bunjakovska nevienādības nenegatīviem a, b, c seko ($a_1=a$; $b_1=1$; $a_2=b_2=\sqrt{b}$; $a_3=b_3=\sqrt{c}$): $\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\geq\left(a+b+c\right)^2$. Tāpēc

$$\frac{a}{a^2+b+c}\leq\frac{a\left(1+b+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

Tātad mums pietiek pierādīt, ka

$$\frac{x\left(1+y+z\right)+y\left(1+x+z\right)+z\left(1+x+y\right)}{\left(x+y+z\right)^2}\leq 1.$$

Tas ir ekvivalenti ar $x+y+z\leq x^2+y^2+z^2$. Bet $x^2+y^2+z^2=3$, un nevienādība $x+y+z\leq 3$ jau ir pierādīta. Vajadzīgais iegūts.

AB.A.3. Ja $x > y$, tad $y = \frac{x^3+1}{2} > \frac{y^3+1}{2} = z$, tātad $y > z$. Līdzīgi iegūst $z > x$.

Esam ieguvuši pretrunu $x > y > z > x$.

Līdzīgi pretruna tiek iegūta, ja apskatām gadījumu: $x < y$.

Esam ieguvuši, ka $x = y$. Tad arī $y = z$ un tāpēc $x = y = z$. Iegūstam vienādojumu $x^3 - 2x + 1 = 0$ jeb $(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$, no kura iegūstam atrisinājumus: $x = y = z = 1$, $x = y = z = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$.

AB.A.4. Visām dotajām funkcijām atvasinājums punktā $x = 1$ ir nulle. Šī īpašība saglabājas, izpildot pieļautās operācijas, jo $(f \pm g)' = f' \pm g'$ un $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$. Tā kā $(3x^2 - 5x)' = 6x - 5$ punktā $x = 1$ nav nulle, tad prasītais nav sasniedzams.

AB.A.5. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim, ka tāda funkcija eksistē. Apzīmēsim tās vērtību apgabalu ar V un izvēlamies patvaļīgu $b = f(a) \in V$. Tad pie $x = a$ iegūstam $f(a + f(y)) = b + \sin y$.

Ja y mainās intervālā $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $b + \sin y$ mainās intervālā $[b-1; b+1]$. Tātad $b \in V \Rightarrow [b-1; b+1] \subset V$. No tā seko, ka V ir visu reālo skaitļu kopa.

Ņemot $x = 0$, iegūstam $f(f(y)) = f(0) + \sin y$.

Tā kā $f(y)$ pieņem visas reālās vērtības, tad arī $f(f(y))$ pieņem visas reālās vērtības. Iegūta pretruna, jo $f(0) + \sin y$ pieņem tikai vērtības no $[f(0) - 1; f(0) + 1]$.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Uzzīmēsim tik lielu kvadrātu ar izmēriem $2^k \times 2^k$, $k \in N$, lai visas melnās rūtiņas atrastos kvadrāta iekšpusē un lai melnais laukums būtu mazāks par $\frac{1}{5}$ no visa kvadrāta laukuma. Sadalīsim to 4 vienādos kvadrātos (katrs ar izmēriem $2^{k-1} \times 2^{k-1}$) un ņemsim to no šiem četriem kvadrātiem, kurā melno rūtiņu ir visvairāk.

Melno rūtiņu daļa šajā kvadrātā nav mazāka kā sākotnējā un nav lielāka par $\frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$. Līdzīgi turpinām. Skaidrs, ka kādreiz nonāksim pie vajadzīgā kvadrāta.

AB.K.2. Padomāsim, kā var iegūt ($n+2$)-ciparu skaitļus no ($n+1$)-ciparu skaitļiem.

- **Katram** ($n+1$)-cipara skaitlim galā var pierakstīt vismaz divus ciparus (kurus – tas atkarīgs no ($n+1$)-ciparu skaitļa pēdējā cipara). Tas dod $2x_{n+1}$ iespējas.
- Tiem ($n+1$)-ciparu skaitļiem, kas beidzas ar 2, galā var pierakstīt arī trešo ciparu. Apskatīsim, cik daudz ir šādu skaitļu. Divnieks ($n+1$)-ciparu skaitļa galā ir pierakstīts galā **patvaļīgam** n-ciparu skaitlim. Tā kā n-ciparu skaitļu, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, pavisam ir x_n, tad arī

$(n+1)$-ciparu skaitļu, kas beidzas ar 2, pavisam ir x_n. Tas dod x_n iespējas.

No tā seko vajadzīgais.

AB.K.3. Attēlosim situāciju ar grafu: spēlētāji – virsotnes, notikušās spēles – šķautnes. Pavisam iespējamas $3\times 10\times 10=300$ šķautnes. No tām $300-201=99$ nav novilktas.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad katriem *a, b, c* no dažādām komandām eksistē vismaz viena nenovilkta šķautne. Šādu trijnieku ir $10\times 10\times 10=1000$. Tā kā katra nenovilktā šķautne ietilpst 10 trijstūros, tad kopā 99 nenovilktās šķautnes „apkalpo" $\leq 99\cdot 10=990<1000$ trijstūru – pretruna. Varam secināt, ka eksistē trijnieks, kur katri divi spēlētāji ir jau spēlējuši savā starpā.

AB.K.4. Apzīmējam monētas ar m_1, m_2, ... , m_{2n} un izdarām mērījumus $\left(m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}\right)+m_{2n-i}$, $i=0$; 1; 2; ... ; *n*. Tātad tiek veikti $n+1$ soļi.

Apzīmējam $m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}=M$, tātad katrs mērījums dod atbildi $M+a$ vai $M+b$. Tā kā tiek veikti $n+1$ mērījumi, bet ir tikai *n* monētas ar masu *a* un *n* monētas ar masu *b*, tad būs sastopamas abas atbildes. Apzīmēsim mazāko no abām atbildēm ar *p* un pieņemsim, ka tā sastopama x_1 reizes, bet lielāko no abām atbildēm – ar *q* un pieņemsim, ka tā sastopama x_2 reizes. Tad $M+a=p$, $M+b=q$ un starp monētām m_n, m_{n+1}, m_{n+2}, ... , m_{2n} ir x_1 monētas ar masu *a* un x_2 monētas ar masu *b*.

Varam secināt, ka starp monētām m_1, m_2, ... , m_{n-1} ir $n-x_1$ ar masu *a* un $n-x_2$ ar masu *b*. Tātad $M=m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}=(n-x_1)a+(n-x_2)b$ un varam izveidot vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases}(n-x_1)a+(n-x_2)b+a=p\\(n-x_1)a+(n-x_2)b+b=q\end{cases}\ \text{jeb}\ \begin{cases}(n+1-x_1)a+(n-x_2)b=p\\(n-x_1)a+(n+1-x_2)b=q\end{cases}.$$

Atrodam sistēmas determinantu:

$$\begin{aligned}&(n+1-x_1)(n+1-x_2)-(n-x_1)(n-x_2)=\\&=(n+1)^2-(n+1)(x_1+x_2)+x_1x_2-n^2+n(x_1+x_2)-x_1x_2=\\&=(2n+1)-(x_1+x_2)=(2n+1)-(n+1)=n>0.\end{aligned}$$

Tā kā determinants ir pozitīvs, tad sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums. Tātad $n+1$ soļos noteikti var noskaidrot *a* un *b* vērtības.

AB.K.5. Apzīmējam skaitļus attiecīgi ar $a_1,a_2,\ldots,a_{17}$ un $b_1,b_2,\ldots,b_{43}$. Varam pieņemt, ka

$$a_1+a_2+\ldots+a_{17}\geq b_1+b_2+\ldots+b_{43}.\quad (*)$$

Katram $i=1,2,\ldots,43$ ar n_i apzīmēsim mazāko no tādiem skaitļiem *n*, ka $S(n)=a_1+a_2+\ldots+a_n-(b_1+b_2+\ldots+b_i)\geq 0$; tāds n_i eksistē saskaņā ar (*). Apzīmējam $S(n_i)=S_i$. Tā kā $a_i\leq 43$, tad $0\leq S_i\leq 42$. Ja visi S_i ir dažādi, tad starp tiem ir arī 0; tad uzdevums jau atrisināts. Ja $S_k=S_l$, $k<l$, tad

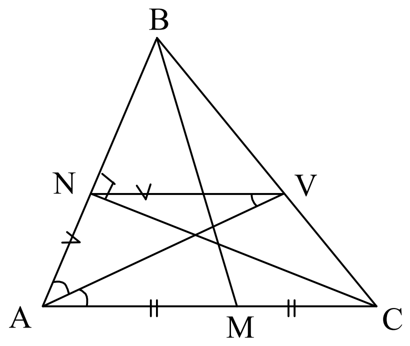
$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\ldots+a_{n_k})-(b_1+b_2+\ldots+b_k)=\\&=(a_1+a_2+\ldots+a_{n_l})-(b_1+b_2+\ldots+b_l),\end{aligned}$$

no kurienes $b_{k+1}+b_{k+2}+\ldots+b_l=a_{n_k+1}+a_{n_k+2}+\ldots+a_{n_l}$, kas arī bija jāpierāda.

Otrs gadījums, kad $a_1+a_2+\ldots+a_{17}\leq b_1+b_2+\ldots+b_{43}$, ir analoģisks.

AB.Ģ. Ģeometrija

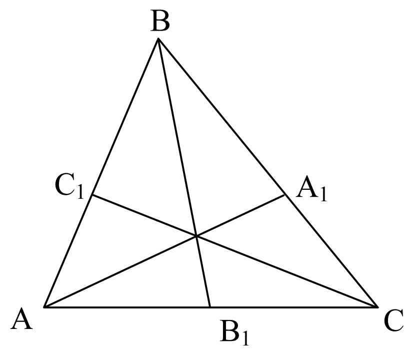
AB.Ģ.1. Tā kā $NA = NV$, tad ΔANV - vienādsānu (skat. A51.zīm.). Ņemot vērā arī to, ka AV ir bisektrise, varam secināt, ka $\angle NVA = \angle NAV = \angle VAC$.



A51. zīm.

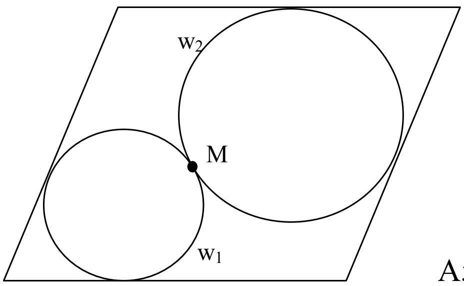
Tā kā $\angle NVA$ un $\angle VAC$ ir iekšējie šķērsleņķi un tie ir vienādi, tad $NV \| AC$. Tāpēc varam izveidot proporciju: $AN : NB = CV : VB$.

Tātad $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BV}{VC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{CV}{VB} \cdot \frac{BV}{VC} \cdot 1 = 1$ un vajadzīgais seko no Čevas teorēmas: nogriežņi A_1A , B_1B , C_1C (skat. A52.zīm.) krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.



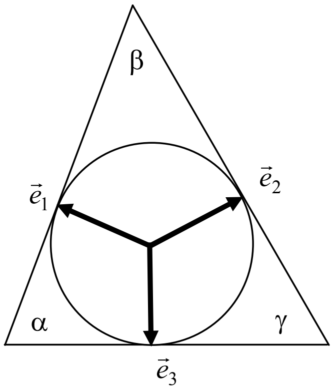
A52. zīm.

AB.Ģ.2. Apskatām homotētiju ar centru punktā M, kurā $\omega_1 \to \omega_2$ (skat. A53.zīm.). Tā kā pieskare attēlojas par pieskari, tad (taisne AB) $\to$ (taisne CD) un
(taisne AD) $\to$ (taisne CB). Tāpēc arī šo taišņu krustpunkti attēlojas viens par otru, t.i., $A \to C$. Bet tad A, M un C ir uz vienas taisnes, kas arī bija jāpierāda.



A53. zīm.

AB.Ģ.3. Apskatām vektorus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (skat. A54.zīm.). Varam izvēlēties mērogu tā, ka tie ir vienības vektori. Tad $\vec{e}_1$ un $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2$ un $\vec{e}_3$, $\vec{e}_3$ un $\vec{e}_1$ veido attiecīgi leņķus $180° - \beta$, $180° - \gamma$, $180° - \alpha$.



A54. zīm.

Tā kā vektora skalārais kvadrāts ir nenegatīvs lielums, tad $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \ge 0$.

No šejienes seko, ka $\vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_3\vec{e}_1 \ge 0$ jeb

$1 + 1 + 1 + 2\cos(180° - \beta) + 2\cos(180° - \gamma) + 2\cos(180° - \alpha) \ge 0$.

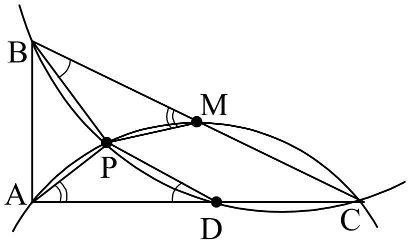
Veicot pārveidojumus, iegūstam, ka $3 - 2\cos\beta - 2\cos\gamma - 2\cos\alpha \ge 0$, no kā seko vajadzīgais.

AB.Ģ.4. No dotā seko, ka punkti D, C, B un P atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. A55.zīm.), tātad $\angle PBC$ un $\angle PDC$ summa ir $180°$. Varam secināt, ka $\angle PBC = 180° - \angle PDC = \angle ADP$.

Līdzīgi iegūstam, ka $\angle CAP = 180° - \angle CMP = \angle BMP$.

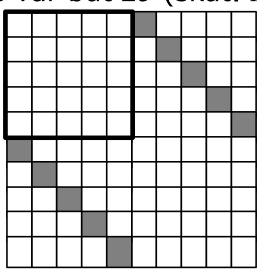
Tā kā ΔBAC - taisnleņķa, tad $MA = MB$; tātad $AD = MA = MB$.

Varam secināt, ka $\Delta PMB = \Delta PAD$ (lml), tāpēc atbilstošie augstumi ir vienādi. Tātad P ir vienādos attālumos no $\angle BCA$ malām, no kā seko vajadzīgais.



A55. zīm.

AB.Ģ.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādām, ka taisnstūra laukums var būt 25 (skat. A56.zīm.).



A56. zīm.

Otrkārt, pierādām, ka laukums nevar būt lielāks. Pieņemsim, ka „tukšajam" taisnstūrim ir a kolonnas un b rindas. Šajās a kolonnās ir a melnas rūtiņas, kas nav apskatāmajās b rindās; tātad tās ir atlikušajās $10 - b$ rindās. Varam secināt, ka $10 - b \ge a$, citādi a melnas rūtiņas nevarētu izvietot tā, lai neviena rinda nesaturētu vairākas melnas rūtiņas. Līdz ar to:

$L = a \cdot b \le (10 - b) \cdot b = -(b^2 - 10b) = 25 - (b - 5)^2 \le 25$, kas arī bija jāpierāda.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Sadalām $\{1;2;...;2008\}$ grupās G_0, G_1, ..., G_7 atkarībā no tā, kādu atlikumu dod skaitļi, dalot ar 8.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no dotajiem 756 skaitļiem ne vairāk kā viens ir grupā G_0 un ne vairāk kā viens ir grupā G_4. Tāpēc grupās G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_7 kopā ir vismaz $756-2=754$ dotie skaitļi. Tā kā $754=3\cdot 251+1$, tad vai nu G_1 un G_7, vai G_2 un G_6, vai G_3 un G_5 kopā satur vismaz 252 dotos skaitļus.

Tā kā katrā grupā G_i ir tieši 251 skaitlis, tad attiecīgajā pārī abas grupas satur vismaz pa vienam dotajam skaitlim. Bet tad abu šo skaitļu summa dalās ar 8, kas ir pretruna ar pieņēmumu. Tas arī bija jāpierāda.

AB.S.2. Nē. Katras šādas progresijas elementi dalās tikai ar tiem pirmskaitļiem, ar ko dalās tās pirmais loceklis vai kvocients (kvocientam jābūt naturālam skaitlim; pretējā gadījumā, sākot no kādas vietas, progresijas locekļi nebūs naturāli).

Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad šādas progresijas galīgā skaitā nevar tos visus saturēt.

AB.S.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, izsakām doto skaitli kā $S=2^{182}(1+2\cdot 2^{1917}+2^{2(n-91)})$. Redzam, ka S ir pilns kvadrāts, ja $n-91=1917$, t.i., ja $n=2008$, jo tad $S=2^{182}(1+2^{1917})^2=\left(2^{91}(1+2^{1917})\right)^2$.

Otrkārt, pierādām, ka n nevar būt lielāks kā 2008. Lai S būtu pilns kvadrāts, arī izteiksmei $M=1+2\cdot 2^{1917}+2^{2(n-91)}$ jābūt pilnam kvadrātam.

Pieņemam pretējo, ka eksistē tāds $n>2008$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tādā gadījumā $n-91>1917$ un secinām:

$$(2^{n-91})^2=2^{2(n-91)}<M<1+2\cdot 2^{n-91}+2^{2(n-91)}=(1+2^{n-91})^2.$$

Tātad M atrodas starp divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu kvadrātiem un tāpēc nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts – pretruna ar pieņēmumu.

AB.S.4. No dotā seko, ka $3m^2+3m+1=n^2$. Veicam identiskus pārveidojumus:

$$12m^2+12m+4=4n^2$$
$$12m^2+12m+3=4n^2-1$$
$$3(4m^2+4m+1)=4n^2-1$$
$$3(2m+1)^2=(2n+1)(2n-1) \qquad (*)$$

Tā kā $\mathrm{LKD}(2n+1, 2n-1)=\mathrm{LKD}(2n+1, (2n+1)-(2n-1))=\mathrm{LKD}(2n+1, 2)=1$, tad no (*) seko: viens no skaitļiem $2n+1$ un $2n-1$ ir vesela skaitļa kvadrāts, bet otrs ir (varbūt cita) vesela skaitļa kvadrāts, kas reizināts ar 3.

Tā kā viens no $(m+1)^3$ un m^3 ir pāra, otrs – nepāra skaitlis, tad no uzdevumā dotā tieši seko, ka n^2 ir pāra un nepāra skaitļu starpība. Varam secināt, ka n^2 ir nepāra skaitlis, tāpēc arī n - nepāra. Līdz ar to varam apzīmēt: $n=2k+1$, kur k – naturāls skaitlis.

Apskatām $2n+1=4k+3$. Tā kā $(2a)^2=4a^2$ un $(2a+1)^2=4(a^2+a)+1$, tad vesela skaitļa kvadrāts dod atlikumu 0 vai 1, dalot ar 4. Tātad $2n+1=4k+3$ nav kvadrāts. Tādā gadījumā $2n-1$ ir kvadrāts.

Tā kā $2n-1$ - nepāra, tad varam apzīmēt: $2n-1=(2t+1)^2$, $t\in Z$. No šejienes seko $n=2t^2+2t+1=t^2+(t+1)^2$, kas arī bija jāpierāda.

AB.S.5. Meklēsim risinājumus formā $y = k \cdot x$, kur $k \in N, k \geq 2$. Tad iegūstam:

$$\frac{x^2 + y^3}{y^2 + x^3} = \frac{x^2 + k^3 x^3}{k^2 x^2 + x^3} = \frac{k^3 x + 1}{k^2 + x} = \frac{k^3 x + k^5}{k^2 + x} - \frac{k^5 - 1}{k^2 + x} = k^3 - \frac{k^5 - 1}{k^2 + x}.$$

Ja izvēlamies $x = k^5 - k^2 - 1$, dalījums iznāk vesels skaitlis $k^3 - 1$. Tātad der, piemēram, risinājumi $x = k^5 - k^2 - 1$, $y = k \cdot x = k^6 - k^3 - k$, $k \in N, k \geq 2$.

BW. Matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2008”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Apskatīsim skaitļu virkni a_n, $n=0;\ 1;\ 2;\ ...$, kuru definē ar nosacījumiem $a_0=0$; $a_{n+1}=(a_n+1)^3$ pie $n\geq 0$. Tātad virknes pirmie locekļi ir $a_0=0$; $a_1=1$; $a_2=8$; $a_3=729$ utt.

Ja mēs pierādīsim, ka visiem $n=0;\ 1;\ 2;\ ...$ pastāv vienādība $p(a_n)=a_n$, tad polinomam $p(x)-x$ būs bezgalīgi daudz sakņu $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Tāpēc $p(x)-x$ būs nulles polinoms, tātad visiem reāliem x ir spēkā $\boldsymbol{p(x)=x}$.

Vienādību $p(a_n)=a_n$ pierādīsim ar matemātisko indukciju. Bāze pie $n=0$ ir dota. Ja $p(a_k)=a_k$, tad $p(a_{k+1})=p\left((a_k+1)^3\right)=\left(p(a_k)+1\right)^3=(a_k+1)^3=a_{k+1}$, kas arī bija jāpierāda.

BW.A.2. Apzīmēsim $2+b+c^2=u$, $2+c+a^2=v$, $2+a+b^2=w$. Tā kā $|a|, |b|, |c|\leq\sqrt{3}$, tad $u, v, w>0$. No Koši - Bunjakovska nevienādības seko, ka

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{u}}\cdot\sqrt{u}+\frac{b}{\sqrt{v}}\cdot\sqrt{v}+\frac{c}{\sqrt{w}}\cdot\sqrt{w}\right)^2\leq\left(\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}\right)\cdot(u+v+w) \quad (1)$$

Ievērosim, ka $u+v+w=6+(a+b+c)+\left(a^2+b^2+c^2\right)=9+(a+b+c)$, tāpēc no (1) seko:

$$\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+9}. \quad (2)$$

Ievērosim, ka

$$(a+b+c)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad (3)$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a=b=c$. Tā kā $a^2+b^2+c^2=3$, tad no (3) seko $(a+b+c)^2\leq 9$, tātad $-3\leq a+b+c\leq 3$. No šejienes un no (2) seko vajadzīgā nevienādība.

Lai pastāvētu vienādība, vajadzīgs, lai $a+b+c=3$, tātad nevienādībā (3) nepieciešams $a=b=c=1$. Tieša pārbaude parāda, ka pie $a=b=c=1$ vienādība tiešām pastāv.

BW.A.3. . Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka tas ir iespējams. Varam uzskatīt, ka $0<\alpha\leq\frac{\pi}{4}$ (ja $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, apskatām α vietā leņķi $y=\frac{\pi}{2}-\alpha$; tad aritmētisko progresiju veido $\sin y$, $\cos y$, tgy, $ctgy$ kaut kādā kārtībā). No nevienādībām

$\sin\alpha\leq\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}\leq\cos\alpha<1<ctg\alpha$ un $\sin\alpha<tg\alpha\leq 1\leq ctg\alpha$ seko, ka $\sin\alpha$ ir progresijas mazākais, bet $ctg\alpha$ - tās lielākais loceklis. Bez tam mēs redzam, ka progresija nav konstanta. Apskatīsim abas iespējas atsevišķi.

- Ja progresija augošā secībā ir $\sin\alpha<tg\alpha<\cos\alpha<ctg\alpha$, tad $\cos\alpha=\frac{tg\alpha+ctg\alpha}{2}>\sqrt{tg\alpha\cdot ctg\alpha}=1$ - pretruna.
- Ja progresija augošā secībā ir $\sin\alpha<\cos\alpha<tg\alpha<ctg\alpha$, tad $\sin\alpha+ctg\alpha=\cos\alpha+tg\alpha$, ko pakāpeniski pārveido par

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Ja $\sin\alpha-\cos\alpha=0$, tad $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Pārbaude rāda, ka tas neder. Tātad, lai vienādība izpildītos, jābūt spēkā vienādībai: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$. Tā kā α - šaurs leņķis, tad $\sin\alpha\cos\alpha<\sin\alpha<\sin\alpha+\cos\alpha$ - pretruna.

BW.A.4. Apskatām polinomu $P(x)-5$; tā koeficienti ir veseli skaitļi. Ja $P(x)=5$ pie piecām dažādām veselām x vērtībām $x_1;x_2;x_3;x_4;x_5$, tad $P(x)-5=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\cdot Q(x)$,kur $Q(x)$ - polinoms ar veseliem koeficientiem. Pieņemsim, ka eksistē tāds vesels x_0, ka $-6\le P(x_0)\le 4$ vai $6\le P(x_0)\le 16$. Tad $1\le|P(x_0)-5|\le 11$, un $|P(x_0)-5|=|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|\cdot|x_0-x_3|\cdot|x_0-x_4|\cdot|x_0-x_5|\cdot|Q(x_0)|$. Tā kā x_0-x_1, x_0-x_2, x_0-x_3, x_0-x_4, x_0-x_5 ir dažādi veseli skaitļi, tad $|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|\cdot|x_0-x_3|\cdot|x_0-x_4|\cdot|x_0-x_5|\ge|-1|\cdot|1|\cdot|-2|\cdot|2|\cdot|\pm 3|=12$. Tā kā $|Q(x_0)|\ge 1$ ($Q(x_0)\ne 0$, jo $P(x_0)-5\ne 0$), iegūta pretruna, jo $1\cdot 12>11$.

BW.A.5. Atbilde: jā.

Risinājums. Ievērosim, ka tetraedrā katrām divām skaldnēm ir tieši viena kopīga šķautne un katrām trim skaldnēm ir kopīga virsotne. Sanumurēsim Romeo un Džuljetas tetraedros virsotnes ar skaitļiem $1;2;3;4$ tā, lai skaldnēs 123, 124, 134 ierakstītie skaitļi atbilstoši sakristu; tad sakrīt arī skaldnēs 234 ierakstītie skaitļi. Apzīmēsim virsotnēs i Romeo un Džuljetas ierakstītos skaitļus atbilstoši ar r_i un d_i ($i=1;2;3;4$); tad iegūstam vienādības

$$r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=d_2d_3+d_2d_4+d_3d_4 \qquad (1)$$
$$r_1r_3+r_1r_4+r_3r_4=d_1d_3+d_1d_4+d_3d_4 \qquad (2)$$
$$r_1r_2+r_1r_4+r_2r_4=d_1d_2+d_1d_4+d_2d_4 \qquad (3)$$
$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3 \qquad (4)$$

Ja Romeo skaitļi visās vienas skaldnes virsotnēs ir lielāki/mazāki par atbilstošajiem Džuljetas skaitļiem, uzreiz iegūstam pretrunu ar doto. Pieņemsim, ka Romeo skaitļi **divās** virsotnēs ir lielāki par atbilstošajiem Džuljetas skaitļiem; varam uzskatīt, ka $r_1>d_1$ un $r_2>d_2$, $r_3\le d_3$ un $r_4\le d_4$.

Tad $$r_1r_2-r_3r_4>d_1d_2-d_3d_4 \qquad (5)$$

Tā ir pretruna ar vienādību (1) + (2) - (3) - (4). Tātad augstākais viens Romeo skaitlis ir lielāks par atbilstošo Džuljetas skaitli. Līdzīgi pierāda, ka augstākais viens Romeo skaitlis ir mazāks par atbilstošo Džuljetas skaitli. Tātad eksistē divas atbilstošas šķautnes (viena – Romeo, viena – Džuljetai), kam atbilstošajos galos ierakstīti vienādi skaitļi. Apskatot abos tetraedros skaldnes, kas satur šo šķautni, iegūstam arī pārējās virsotnēs ierakstīto skaitļu vienādības.

Komentārs. Risinājuma pirmā daļa, kurā tika pamatots, ka atbilstošās vienādās summas veidojas no vienā un tai pašā veidā atbilstošajās virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem, ir ļoti būtiska. Tā būtiski izmanto tetraedra ģeometrisko uzbūvi.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Ja $169 \in A$, viss kārtībā, jo $169 = 13^2$. Pieņemsim, ka $169 \notin A$. Apskatīsim $168:2 = 84$ kopas $\{x; 169 - x\}$, $x = 1; 2; ...; 84$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem neviena no tām nesatur divus A elementus; tāpēc katra satur tieši vienu A elementu. Tā kā viena no šim kopām ir $\{25; 144\}$, kur $25 = 5^2$ un $144 = 12^2$, tad vajadzīgais pierādīts.

BW.K.2. . Atbilde: jā.

Risinājums. Sadalīsim bērnus 3 grupās pa n bērniem katrā: $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$, $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$.

Tālāk mūsu mērķis būs nodibināt vairākus klubus tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

- katrā klubā ir tieši 3 bērni,
- katri divi bērni kopā ir tieši vienā klubā.

Ja to izdosies izdarīt, tad dāvanas varēs pasniegt sekojoši: katri divi bērni, kas ir vienā klubā, pasniedz kopīgu dāvanu trešajam šī kluba loceklim.

Dibināsim sekojošus klubus:

- $\{A_i, B_i, C_i\}$, $i = 1; 2; 3; ...; n$.
- visus iespējamos klubus $\{A_i, A_j, B_k\}$, $\{B_i, B_j, C_k\}$ un $\{C_i, C_j, A_k\}$, kur $1 \le i < j \le n$, $1 \le k \le n$ un $i + j \equiv 2k \pmod n$.

Tā kā n – nepāra skaitlis, tad katriem i un j eksistē tieši viens vajadzīgais k. Tāpēc pie $1 \le i < j \le n$ bērni A_i un A_j (līdzīgi B_i un B_j, C_i un C_j) ir kopā tieši vienā klubā.

Nevar iznākt $i = k$ vai $j = k$, jo tādā gadījumā no $i + j = 2i \pmod n$ resp. $i + j = 2j \pmod n$ sekotu $i \equiv j \pmod n$ - pretruna. Tāpēc A_i un B_i (līdzīgi A_i un C_i, B_i un C_i) ir kopā tikai klubā $\{A_i, B_i, C_i\}$.

Ja $i \ne k$, tad bērni A_i un B_k ir vienā klubā ar vienīgo A_j, kam $i + j \equiv 2k \pmod n$ un $1 \le j \le n$; turklāt $j \ne i$, jo citādi būtu $2i \equiv 2k \pmod n \Rightarrow i \equiv k \pmod n$ - pretruna.

Līdzīgi pārbauda arī citus bērnu pārus.

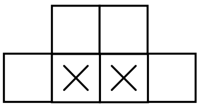
BW.K.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka šāda situācija iespējama, ja ir 56 dalībvalstis. Ja par vienu uzdevumu nebalso neviena valsts, tad no pārējiem 8 uzdevumiem var izveidot $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ kopas pa 3 uzdevumiem katrā. Ja katra valsts izvēlas citu kopu, „resursu" pietiek 56 valstīm.

Otrkārt, pierādīsim, ka vairāk par 56 valstīm nevar būt. Ar P (no vārda „populārs") apzīmēsim to uzdevumu trijnieku kopu, kurus kādas valstis izvēlējušās, ar N (no vārda „nepopulārs") – to uzdevumu trijnieku kopu, kurus neviena valsts nav izvēlējusies; jebkuras kopas S elementu skaitu apzīmējam ar $|S|$. Skaidrs, ka $|P| + |N| = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$. Izvēlamies $x \in P$ (x tātad ir uzdevumu trijnieks, kuru kāda valsts izvēlējusies). No šīs valsts **neizvēlētajiem** 6 uzdevumiem var izveidot $C_6^3 = 20$ trijniekus; šos trijniekus var sadalīt 10 pāros tā, ka katrā pārī abi trijnieki kopā satur 6 dažādus uzdevumus. Vismaz viens trijnieks no katra pāra pieder P (pretējā gadījumā abi šie trijnieka pāri un x kopā satur visus 9 uzdevumus – pretruna ar trešo nosacījumu). Tātad katram trijniekam $x \in P$ ir vismaz 10 šādi „antitrijnieki" no N. Ievērosim, ka katrs trijnieks $y \in N$ ir „antitrijnieks" ne vairāk kā 20 trijniekiem no P, jo ir tikai 20 trijnieki, kam nav kopīgu uzdevumu ar y. Iegūstam $10 \cdot |P| \leq$ pāru „trijnieks" – „antitrijnieku" skaits $\leq 20 \cdot |N|$, no kurienes seko $\frac{1}{2}|P| \leq |N|$.

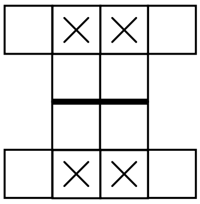
Tāpēc $|P| = \frac{2}{3}|P| + \frac{1}{3}|P| \leq \frac{2}{3}|P| + \frac{2}{3}|N| = \frac{2}{3}(|P| + |N|) = \frac{2}{3} \cdot 84 = 56$, kas arī bija jāpierāda.

BW.K.4. Atbilde: jā.

Risinājums. No diviem blokiem var izveidot figūru, kas skatā no augšas redzama A57.zīm. (apakšējā līmenī ir pa vienam kubiņam; krustiņi norāda, ka attiecīgajā vertikālē perpendikulāri lapai pa vienam kubiņam ir arī vienu līmeni virs apakšējā).



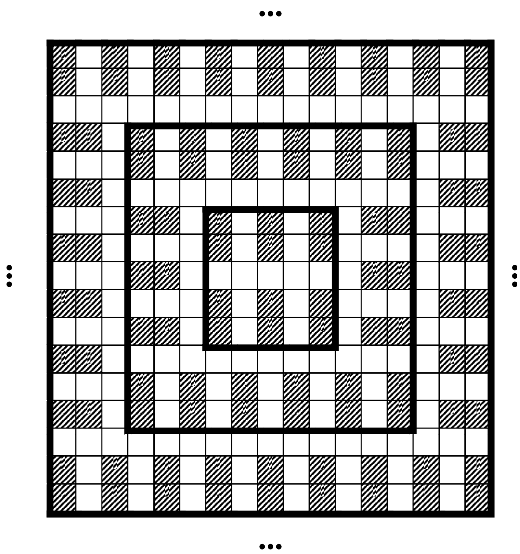
A57. zīm.



A.58. zīm.

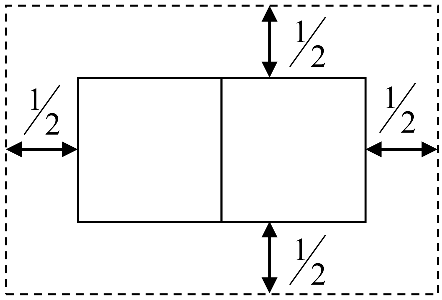
Divas A57.zīm. redzamās figūras veido A58.zīm. redzamo figūru, bet divas A58.zīm. redzamās figūras (viena no tām „apgriezta uz mutes" un pagriezta par $90°$ ap asi, kas perpendikulāra lapai) veido taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $4 \times 4 \times 2$. Divi šādi paralēlskaldņi veido vajadzīgo kubu.

BW.K.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja $n = 77$. Aizpildot tālākus „gredzenus" līdzīgi, kā redzams A59.zīm., domino kauliņu daudzums būs $6 + 18 + 30 + ... + 150 = \frac{156 \cdot 13}{2} = 1014$; to kopējais laukums ir $1014 \cdot 2 = 2028$. Noņemot $\frac{2028 - 2008}{2} = 10$ kauliņus, iegūstam vajadzīgo.

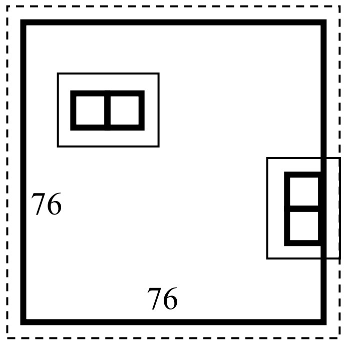


A59.zīm.

Otrkārt, parādīsim, ka kvadrātā 76×76 nosegt laukumu 2008 neizdosies. Pieņemsim pretējo, ka tas izdosies. Par domino kauliņa apkārtni sauksim pašu kauliņu līdz ar joslu platumā $\frac{1}{2}$ ap to (skat. A60.zīm.). Apkārtnes laukums ir $2 \times 3 = 6$. Dažādu domino kauliņu apkārtnes var tikai saskarties, nevis pārsegties; tāpēc to kopējais laukums ir $6 \cdot 1004 = 6024$. Bet visas apkārtnes izvietojas kvadrātā ar laukumu $77 \times 77 = 5929 < 6024$ - pretruna (skat. A61.zīm.)



A60. zīm.

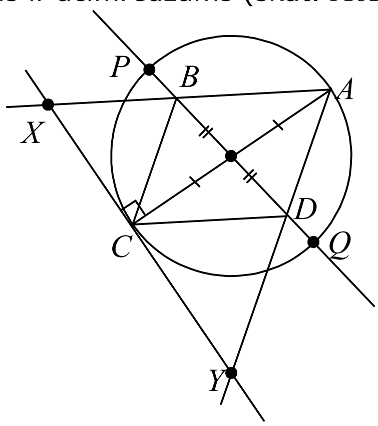


A61. zīm.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Šķirojam divus gadījumus:

- $BD \| XY$. Tad $ABCD$ ir paralelograms ar perpendikulārām diagonālēm, tātad rombs. Tad apskatāmie 4 punkti ir vienādsānu trapeces virsotnes un apgalvojums ir acīmredzams (skat. A62.zīm.)

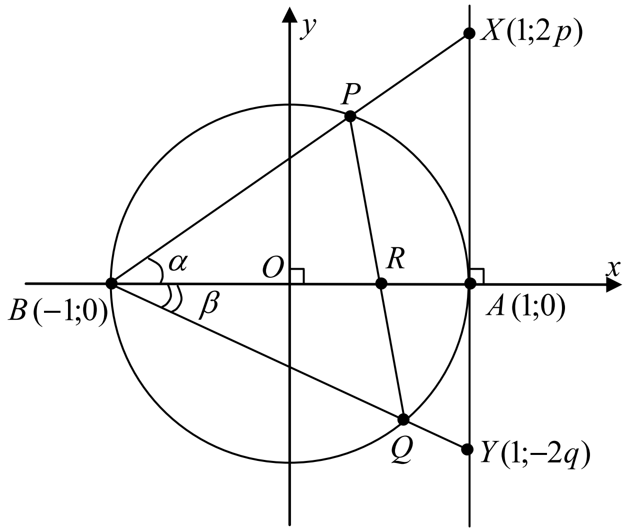


A62. zīm.

- BD un XY krustojas punktā M. Tad $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MY}$, jo $BC \| DY$, un līdzīgi $\frac{MB}{MD} = \frac{MX}{MC}$; tātad $\frac{MC}{MY} = \frac{MX}{MC}$ un $MC^2 = MX \cdot MY$. No teorēmas par sekanti un pieskari $MC^2 = MP \cdot MQ$ (MC ir pieskare, jo perpendikulāra diametram tā galapunktā). Tātad $MX \cdot MY = MP \cdot MQ$. Kā zināms, no tā seko, ka $X; Y; P; Q$ ir uz vienas riņķa līnijas.

BW.Ģ.2. Tā kā apskatāmā izteiksme ir simetriska attiecībā pret $a;b;c;d$, varam pieņemt, ka $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. No Ptolomeja teorēmas seko, ka $ac + bd = AC \cdot BD$. Tātad apskatāmā izteiksme ir $[(ab + cd) \cdot AC] \cdot [(ad + bc) \cdot BD]$. Atceroties trijstūra laukuma formulu $L = \frac{xyz}{4R}$, redzam, ka mūsu izteiksme ir $L^2(ABCD) \cdot 16R^2$. Tātad tā pieņem maksimālo vērtību, ja $L(ABCD)$ ir maksimālais. Labi zināms, ka no riņķī ievilktiem četrstūriem vislielākais laukums ir kvadrātam. No tā seko vajadzīgais.

BW.Ģ.3. Ieviešam koordinātu sistēmu, kā parādīts A63.zīm.



A63. zīm.

Tad $tg\alpha = p$ un $tg\beta = q$. Tāpēc $\angle ROP = 2\angle RBP = 2\alpha$, $\angle ROQ = 2\beta$, tātad $\angle POQ = 2\alpha + 2\beta$. Tā kā ΔPOQ ir vienādsānu, tad $\angle OPQ = \angle OQP = 90° - (\alpha + \beta)$. Tāpēc

$$\angle ORP = 180° - 2\alpha - 90° + (\alpha + \beta) = 90° - \alpha + \beta .$$

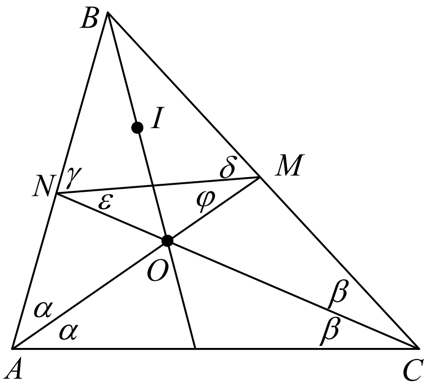
No sinusu teorēmas trijstūrī OPR iegūstam $\frac{OR}{\sin \angle OPR} = \frac{OP}{\sin \angle ORP}$, tāpēc

$$OR = \frac{\sin \angle OPR}{\sin \angle ORP} = \frac{\sin(90° - \alpha - \beta)}{\sin(90° - \alpha + \beta)} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = \frac{1 - pq}{1 + pq} = \frac{4 - c}{4 + c} .$$

Tātad visas taisnes PQ krusto Ox asi vienā un tai pašā punktā, kas arī bija jāpierāda.

BW.Ģ.4. Katrai hordai apskatīsim mazāko tās savilkto loku (sauksim to par īsto loku; ja horda ir diametrs, ņemam vienalga kuru no $180°$ lielajiem lokiem). Katram īstajam lokam apskatām arī tam simetrisko attiecībā pret riņķa centru. Tā kā loks ir garāks par hordu, kuru tā savelk, tad visu īsto un visu tiem simetrisko loku garumu summa ir lielāka par $19 \cdot 2 = 38 > (\pi \cdot 1) \cdot 12$. Riņķa līnijas garums ir $\pi \cdot 1$. Tāpēc eksistē punkts, kas pārklāts **vairāk nekā 12 reizes**. Īsto un simetrisko loku konfigurācijas ir vienādas; tāpēc eksistē punkts, kuru pārklāj vairāk nekā $\frac{12}{2} = 6$, t.i., vismaz 7 īsti loki. Varam apskatīt diametru, kas iet caur šo punktu.

BW.Ģ.5. Pieņemsim, ka O un I ir attiecīgi ΔABC un ΔNBM iecentri; apzīmējam leņķus kā A64.zīm.



A64. zīm.

Ja apzīmējam $\frac{\gamma}{\varepsilon}=\frac{\delta}{\varphi}=k$, iegūstam $\varepsilon+\varphi=\alpha+\beta$, $\gamma+\delta=2\alpha+2\beta$, $\gamma=k\cdot\varepsilon$, $\delta=k\cdot\varphi$. No šejienes viegli seko $k=2$. Tāpēc $\Delta NIM=\Delta NOM$, tāpēc $IO\perp NM$. Trijstūrī NBM virsotnes B bisektrise sakrīt ar augstumu; tāpēc $BN=BM$. Atceroties, kā trijstūra bisektrise dala pretējo malu, iegūstam $BN=\frac{AB\cdot BC}{AC+BC}$ un $BM=\frac{BC\cdot AB}{AB+AC}$; no $BN=BM$ seko $BC=AB$, kas arī bija jāpierāda.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka kopa $\{n;2n\}$, kur n - patvaļīgs naturāls skaitlis, atbilst uzdevuma prasībām. Tiešām, kopā $\{n;2n\}$ $2n>n$, un $\frac{n^2}{2n-n}=n\in\{n;2n\}$.

Otrkārt, pierādīsim, ka citu kopu ar šo īpašību nav. Pieņemsim, ka X ir meklējamā kopa un a– tās mazākais elements. Tad jebkuram citam elementam b ir spēkā $\frac{a^2}{b-a}\geq a$, no kurienes seko $2a^2\geq ab$ un $2a\geq b$. Tāpēc visi X elementi pieder intervālam $[a;2a]$. Tātad, ja viens elements dalās ar otru, tad dalījums nepārsniedz 2.

Pieņemsim, ka X divi lielākie elementi ir $c<d$. Tā kā $d\leq 2c$, tad $\frac{c^2}{d-c}\geq\frac{c^2}{2c-c}=c$. Tāpēc vai nu $\frac{c^2}{d-c}=d$, vai $\frac{c^2}{d-c}=c$. No pirmā nosacījuma iegūstam $\frac{d}{c}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, kas nav iespējams. No otrā nosacījuma seko $c=\frac{d}{2}$. Atceroties sākumā pierādīto, iegūstam, ka kopā X nav mazāku elementu par c, tātad $X=\{c;d\}$. Uzdevums atrisināts.

BW.S.2. Apzīmēsim $m = dx$ un $n = dy$, kur $d = LKD(m,n)$. Vienādojums pārveidojas par

$$3dxy = 2008(x + y),$$

kur $LKD(x, y) = 1$. Tāpēc $LKD(x, x + y) = LKD(y, x + y) = 1$; tāpēc x un y abi ir skaitļa 2008 dalītāji. Ievērojam, ka $2008 = 8 \cdot 251$ un 251 ir pirmskaitlis. No šejienes viegli iegūstam atrisinājumus (1;2), (1;8), (1;251), (1;1004), (4;251).

BW.S.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt, parādīsim, ka kopas A maksimālā elementa mazākā iespējamā vērtība var būt 1040. Ja $A = \{1001; 1008; 1012; 1035; 1040\}$, tad līdz ar faktiem $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $1008 = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2$, $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, $1035 = 5 \cdot 3^2 \cdot 23$, $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$ secinām, ka vērtība 1040 der.

Otrkārt, pierādīsim, ka maksimālais A elements nevar būt mazāks par 1040.

Tā kā $1001 = 13 \cdot 77$ un 77 nedalās ar 13, tad A jāsatur skaitļa 13 daudzkārtnis, kas ir lielāks par $1001 = 13 \cdot 77$. Šķirosim trīs iespējas:

- $13 \cdot 78 \in A$. Tā kā $78 = 13 \cdot 6$, tad A jāsatur vēl lielāku 13 daudzkārtni.
- $13 \cdot 79 \in A$. Tā kā 79 ir pirmskaitlis, tad A jāsatur vēl kādu 79 daudzkārtni. Tā kā $12 \cdot 79 < 1001$ un $14 \cdot 79 > 1040$, tad A satur elementu, kas ir lielāks par 1040.
- $13 \cdot n \in A$, $n \geq 80$. Tā kā $13 \cdot 80 = 1040$, vajadzīgais pierādīts.

BW.S.4. Ievērojam, ka $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Vispirms pierādīsim, ka ne a, ne b nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 7.

Tā kā $a^b - b^a$ ir pāra skaitlis, tad a un b vai nu abi ir pāra, vai abi – nepāra. Pieņemsim no pretējā, ka a un b ir $2x$ un $2y$, $x \geq y \geq 1$, $x, y \in N$. Tad $(2x)^{2y} - (2y)^{2x} = \pm 1008$, tāpēc 1008 dalās ar 2^{2y}. Tāpēc $y \leq 2$.

Ja būtu $y = 2$, mēs iegūtu

$$\left(x^2 + 4^{x-1}\right)\left(x^2 - 4^{x-1}\right) = \pm 63.$$

Tomēr viegli pārbaudīt, ka 63 nedalās ar $x^2 + 4^{x-1}$ pie $x = 1; 2; 3$, un pie $x \geq 4$ $63 < x^2 + 4^{x-1}$.

Ja būtu $y = 1$, mēs iegūtu

$$\left(x + 2^{x-1}\right)\left(x - 2^{x-1}\right) = \pm 252.$$

Arī tas nav iespējams (pietiek pārbaudīt $x < 9$). Iegūta pretruna.

Tā kā $a^b - b^a$ dalās ar 3, tad a un b abi reizē vai nu dalās, vai nedalās ar 3. Pieņemsim no pretējā, ka a un b abi dalās ar 3. Tad a^b un b^a abi dalās ar $3^3 = 27$, tāpēc arī 1008 dalās ar 27. Bet tā nav, tāpēc iegūta pretruna.

Līdzīgi pierāda, ka ne a, ne b nedalās ar 7.

No pierādītā seko, ka $LKD(a, 1008) = LKD(b, 1008) = 1$.

Turpmāk ar $\varphi(n)$ apzīmēsim to naturālo skaitļu daudzumu intervālā $[1; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n. Piemēram, $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(4) = 2$; $\varphi(11) = 10$.

<u>Eilera teorēma</u>. Ja $LKD(x, n) = 1$, tad $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Elementāru Eilera teorēmas pierādījumu var atrast daudzās skaitļu teorijas mācību grāmatās.

Turpmāk mēs būtiski izmantosim šādu lemmu:

Ja 1008 dalās ar n, $LKD(a, \varphi(n)) = 1$ un $LKD(b, \varphi(n)) = 1$, kā arī $a \equiv b \bmod \varphi(n)$, tad $a \equiv b \bmod n$.

No $LKD(a,1008)=LKD(b,1008)=1$ un $1008 \vdots n$ seko, ka $LKD(a,n)=LKD(b,n)=1$. Tāpēc $a^{\varphi(n)} \equiv b^{\varphi(n)} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ n)$.

Varam pieņemt, ka $a=b+t\cdot\varphi(n)$, $t=0;1;2;\ldots$. Tad

$$0 \equiv 1008 = a^b - b^a = a^b - b^{b+t\cdot\varphi(n)} = a^b - b^b \cdot \left(b^{\varphi(n)}\right)^t \equiv a^b - b^b \cdot 1^t = a^b - b^b \,(\mathrm{mod}\, n)$$

tātad $\qquad a^b \equiv b^b \,(\mathrm{mod}\, n) \qquad$ (*)

Tā kā $LKD(b,\varphi(n))=1$, tad eksistē tāds naturāls c, ka $b\cdot c \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\,\varphi(n))$. Tāpēc no (*) seko:

$$a^{bc} \equiv b^{bc} \,(\mathrm{mod}\, n)$$

$$a^{v\cdot\varphi(n)+1} \equiv b^{v\cdot\varphi(n)+1} \,(\mathrm{mod}\, n)$$

$$\left(a^{\varphi(n)}\right)^v \cdot a \equiv \left(b^{\varphi(n)}\right)^v \cdot b \,(\mathrm{mod}\, n)$$

$$1^v \cdot a \equiv 1^v \cdot b \,(\mathrm{mod}\, n)$$

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n),$$

kas arī bija jāpierāda.

Pārejam pie noslēguma posma. Tā kā $\varphi(4)=2$, $\varphi(8)=4$ un $\varphi(16)=8$, tad no $a \equiv b \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$ pakāpeniski iegūstam $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 4)$, $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 8)$, $\boldsymbol{a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 16)}$. Tā kā a un b ir nepāra skaitļi un $\varphi(3)=2$, iegūstam $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 3)$. Tā kā $\varphi(9)=6$ un a un b ir savstarpēji pirmskaitļi ar 6, turklāt kongruenti ar 1 pēc moduļa 6 (viegla visu iespējamo atlikumu pārbaude), tad $\boldsymbol{a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 9)}$. Tā kā $\varphi(7)=6$, līdzīgi konstatējam, ka $\boldsymbol{a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 7)}$.

Tā kā 16; 9; 7 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad no izceltajā kongruencēm seko $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 16\cdot 9\cdot 7)$ jeb $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 1008)$, kas arī bija jāpierāda.

BW.S.5. No skolas algoritma naturālu skaitļu reizināšanai acīmredzami seko, ka naturāliem skaitļiem a un b ir spēkā: $S(a\cdot b) \le S(a)\cdot S(b)$.

Tāpēc $S(n)=S(n\cdot 10\,000)=S(16n\cdot 625) \le S(16n)\cdot 13$, no kurienes iegūstam, ka

$$\frac{S(n)}{S(16n)} \le 13.$$

Pie $n=625$ pastāv vienādība. Tātad $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$ lielākā iespējamā vērtība ir 13.

Uzdevumu sadalījums pa tēmām

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Funkcijas, virknes: V.11.1., A.9.1., A.10.1., A.12.1., VP.3.1., IMO.3., AB.A.4., BW.A.1.
Nevienādības, nevienādību sistēmas: S.9.1., S.11.1., R.11.3., R.12.1., A.10.4., A.11.5., A.12.3., VP.1.2., VP.2.1., VP.3.1., AB.A.2., BW.A.2.
Funkcionālvienādojumi: IMO.5., AB.A.5., BW.A.1., BW.A.1.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.10.1., S.12.1., R.9.4., R.10.4., R.12.3., V.11.5., V.12.5., AB.A.3., AB.K.4., BW.A.4., BW.A.5.
Pārveidojumi: V.9.1., V.10.4., A.9.2., AB.A.1.
Matemātiskā indukcija: VP.1.2., VP.3.1., BW.A.1.

Ģeometrija

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.11.2., S.12.2., V.10.5., V.11.5., V.12.3., A.10.3., VP.1.4., VP.2.2., IMO.2., IMO.4., AB.Ģ.4.
Ar riņķa līniju saistītas līnijas: R.11.4., R.12.4., VP.3.2., IMO.2., BW.Ģ.1., BW.Ģ.4.
Vienādi trijstūri: V.9.4., V.12.3., AB.Ģ.4., BW.Ģ.5.
Sakarības trijstūros: S.9.2., S.10.2., S.11.2., V.9.4., A.11.4., AB.Ģ.1., BW.Ģ.3., BW.Ģ.5.
Laukumi: R.9.1., R.10.2., AB.K.1., AB.Ģ.5., BW.Ģ.2.
Metriskās sakarības: R.9.3.
Līdzība: A.12.4., IMO.2.
Koordinātu metode: BW.Ģ.3.
Nevienādības: S.10.2., AB.Ģ.3.
Figūru sistēmas, piemēri: S.12.4., V.10.1.
Invariantu metode: S.10.5.
Ekstremālie elementi:
Vektori: VP.1.5., AB.Ģ.3.
Pārveidojumi: VP.3.2., IMO.4., AB.Ģ.2.

Skaitļu teorija

Atlikumi, kongruences: V.10.2., V.12.2., IMO.1., AB.S.1., BW.K.2., BW.S.4.
Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.11.3., S.12.3., A.9.4., A.10.2., A.12.3., AB.S.2.
Dalāmības īpašības un pazīmes: S.9.3., S.10.3., S.12.3., R.10.1., R.10.3., R.12.3., V.9.2., V.10.2., V.11.2., A.11.3., VP.1.1., AB.S.2., AB.S.5., BW.S.3.
Vienādojumi veselos skaitļos: S.12.3., R.9.2., R.11.2., VP.3.3., AB.S.3., AB.S.4., BW.S.1., BW.S.2.
Skaitļa pieraksts:S.9.3., S.12.3., R.9.2., V.12.2., A.11.3., BW.S.5.

Kombinatorika

Dirihlē princips: R.9.5., AB.K.3., BW.K.1.
Invariantu metode:
Kombinatorikas struktūras: S.11.5., S.12.5., R.9.5., R.10.5., A.11.2., VP.1.3., VP.2.3., AB.K.1., BW.K.2., BW.K.3.. BW.K.5.
Skaitīšana: R.12.5., AB.K.2.
Gadījumu pārlase: S.9.5., R.11.5.
Matemātiskā indukcija: V.12.4., IMO.6.

Algoritmika

Algoritma izstrāde: S.9.4., S.12.4., V.9.3., A.9.3., A.9.5., A.10.5., AB.K.4., AB.K.5., BW.K.4.
Algoritma analīze: S.10.4., S.11.4., V.9.3., V.9.5., V.10.3., V.11.4., V.12.1., A.9.3., A.9.5., A.12.5., AB.K.4.

Literatūra

Vairāki Latvijas olimpiāžu uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Ukrainas matemātikas olimpiāde: S.9.1., AB.Ģ.5.

Krievijas matemātikas olimpiāde: S.11.4., R.12.5.

Slovēnijas matemātikas olimpiāde: S.12.1., R.12.2., V.12.2., VP.3.1., VP.3.3.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: V.9.1.

Rumānijas matemātikas olimpiāde: V.10.2., A.11.3.

Mongolijas matemātikas olimpiāde: A.11.4., VP.2.1., VP.2.3.

Irānas matemātikas olimpiāde: VP.1.5.

Lielbritānijas matemātikas olimpiāde: AB.S.1., AB.S.5.

M. Opmanis: A.11.2.

Sērija „Laima” matemātikā

Redakcijas padome:	A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja:	D. Bonka

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (Latvijas un Islandes Matemātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

Sērijas „Laima” grāmatas

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part I.** Rīga: LU, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: LU, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: LU, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: LU, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984.-1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.