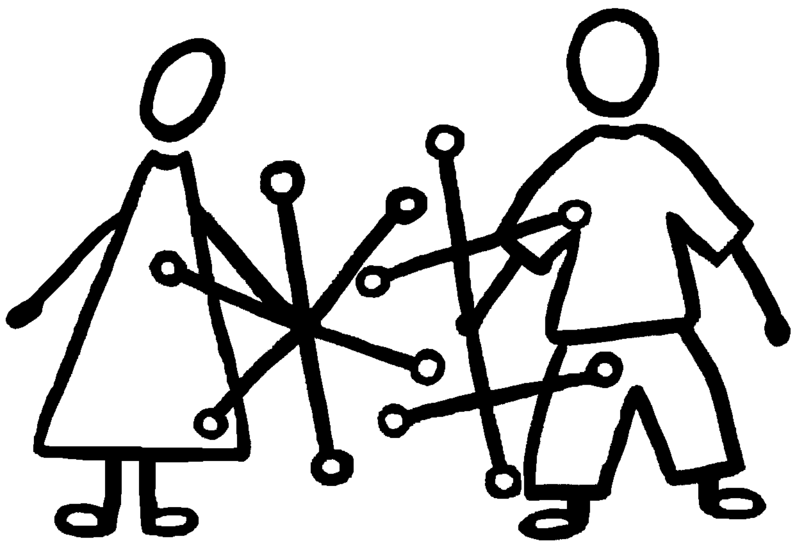
Agnis ANDŽĀNS, Laura FREIJA,
Sandra ZABAROVSKA, Benedikts JOHANNESSONS

Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2005./2006. mācību gadā



Rīga 2007

A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannesons. *Matemātikas sacensības 9.-12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.*

Rīga: Mācību grāmata, 2007. - 90 lpp.

Grāmatā apkopoti 2004./2005. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. - 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Darbs izstrādāts LZP projekta „Matemātikas padziļinātas mācīšanas zinātniskais un metodiskais nodrošinājums" ietvaros un publicēts ar Rīgas Tehniskās universitātes atbalstu.

Vāka zīmējuma autore – L.Freija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 9984-18-344-0

Saturs

Ievads

Cilvēkiem ir jāattīsta visa veida domāšana. Matemātikas sacensību uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Tie radina loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi. Apgūt šīs prasmes ir īpaši noderīgi skolēniem, kas izvēlējušies mācīties eksaktos priekšmetus.

Matemātikas olimpiāžu uzdevumi ir paredzēti, lai skolēni apgūtu četras nozīmīgas matemātikas nozares – algebru, ģeometriju, kombinatoriku un skaitļu teoriju. Izmantojot šo mācību materiālu, skolēni var novērtēt, cik spēcīgi viņi ir katrā no minētajām nozarēm, un tādējādi pilnveidoties.

Grāmatā ir apkopoti 2005./2006.m.g. matemātikas olimpiāžu 9.-12. klašu uzdevumi un atrisinājumi. Sagatavošanas olimpiāde ir paredzēta kā sacensības skolas, savukārt, rajona olimpiāde – rajona mērogā. Tie, kam ir labi rezultāti rajona olimpiādē, piedalās valsts olimpiādē. Mācību gada beigās norisinās Atklātā matemātikas olimpiāde, kurā var piedalīties jebkurš gribētājs. Skolēni, kuri ir uzrādījuši labus rezultātus valsts olimpiādē, tiek uzaicināti uz divu dienu sacensībām, lai noteiktu, kuri skolēni piedalīsies starptautiskajā olimpiādē. Esam iekļāvuši grāmatā arī starptautiskās olimpiādes uzdevumus. Te ir arī uzdevumi no atlases sacensībām uz komandu olimpiādi „Baltijas ceļš" un no paša "Baltijas ceļa", kas ir starptautiskas sacensības un uz kurām no katras valsts dodas pieci 9.-12. klašu skolēni.

Lai arī ne visi startē augstākā līmeņa olimpiādēs, ikvienam ir dota iespēja piedalīties gan sagatavošanas, gan atklātajā matemātikas olimpiādē. Šī grāmata būs palīgs gatavošanās darbā. To var izmantot skolēni, skolotāji un jebkurš cits, kurš vēlas uzlabot savu matemātisko domāšanu.

Ja lasītājs nezina, kā var atrisināt attiecīgo uzdevumu, viņš var meklēt palīdzību otrajā grāmatas sadaļā „Ieteikumi", kurā sniegtas norādes, kā nonākt pie mums zināmā atrisinājuma. Lasītājs, protams, var atrast arī atrisinājumus, kas atšķiras no grāmatā dotajiem un tomēr ir pareizi.

Novēlam veiksmīgu risināšanu un ceram, ka grāmata Jums palīdzēs sasniegt plašākus zinību apvāršņus.

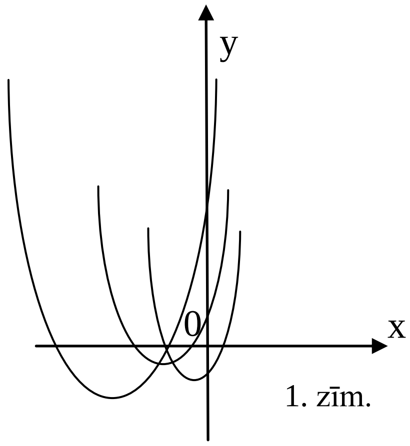
Autori

Uzdevumi

S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. Uz koordinātu asīm nav uzrādīti mērogi. Vai var gadīties, ka 1. zīm. attēloti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



1. zīm.

S.9.2. Pierādīt: trijstūra ABC tā ārējā leņķa bisektrise, kas atrodas pie virsotnes B, krusto apvilkto riņķa līniju loka ABC viduspunktā (zināms, ka $AB \neq BC$).

S.9.3. Dots, ka p – pirmskaitlis. Pierādīt, ka p^4-1 dalās vai nu ar 15, vai ar 16.

S.9.4. Riņķa līnija ar rādiusu R pieskaras ΔABC malām AB un BC, bet tās centrs atrodas uz malas AC. Pierādīt, ka R < 2r, kur r – ΔABC ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

S.9.5. Kvadrātisks režģis sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ar vienu gājienu var nokrāsot sarkanā krāsā jebkura viena kvadrāta kontūru. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var nokrāsot sarkanu visu režģi?

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Dots, ka a > 0 un b > 0. Pierādīt: taisne, kuras vienādojums ir $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, atšķeļ no koordinātu asu „pozitīvajiem" stariem $\overrightarrow{0x}$ un $\overrightarrow{0y}$ nogriežņus, kuru garumi ir attiecīgi a un b.

S.10.2. Vai eksistē tādi racionāli skaitļi x un y, ka vienlaicīgi $x \neq 0$, $y \neq 0$ un $x^2 + y^2 = 13xy$?

S.10.3. Uz taisnes t atlikti punkti A_1, A_2, A_3, A_4 (tieši šādā secībā); punkts B nepieder taisnei t. Ar R_{ij} apzīmēsim tās riņķa līnijas rādiusu, kas apvilkta ap trijstūri BA_iA_j ($i \neq j$; $1 \leq i$, $j \leq 4$). Pierādīt, ka $R_{12} \cdot R_{34} = R_{13} \cdot R_{24}$.

S.10.4. Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi un abc = 1. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + 1 + \frac{1}{a}$.

S.10.5. Klasē ir 6 aktīvisti. Katri divi aktīvisti veido tieši vienu komisiju. Atrast mazāko skaitli n ar īpašību: no jebkurām n komisijām var izvēlēties 3 tādas komisijas, kas kopā satur visus 6 aktīvistus.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Divas paralēlas taisnes krusto funkcijas $y = x^2$ grafiku: viena taisne – punktos A un B, otra taisne – punktos C un D. Pierādīt: taisne, kas iet caur nogriežņu AB un CD viduspunktiem, paralēla 0y asij.

S.11.2. Klasē ir 5 aktīvisti. Viņi izveidojuši vairākas komisijas. Katrā komisijā ir vismaz viens loceklis, un nekādas divas komisijas sastāva ziņā nesakrīt. Bez tam katrām divām komisijām ir vismaz viens kopējs loceklis. Kāds lielākais komisiju skaits var būt izveidots?

S.11.3. Riņķa līnijas W_1 un W_2 krustojas punktos A un B. Riņķa līnijas W_1 pieskare, kas novilkta punktā A, krusto W_2 vēl punktā C; riņķa līnijas W_2 pieskare, kas novilkta punktā B, krusto W_1 vēl punktā D. Pierādīt, ka AD||BC.

S.11.4. Dots, ka $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ir šauri leņķi un $\alpha+\beta+\gamma+\delta=90^0$. Pierādīt, ka $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\delta+\alpha)>4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\delta$.

S.11.5. Vai eksistē 8-ciparu naturāls skaitlis M ar īpašību: ja n – patvaļīgs piecciparu naturāls skaitlis, tad M ciparus var pārkārtot tādā secībā, lai iegūtais 8-ciparu skaitlis M_1 dalītos ar n? (Skaitlis M_1 var sākties arī ar vienu vai vairākām nullēm.)

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Dots, ka a, b, c – reāli skaitļi un $|a-b|<c<a+b$. Vai noteikti $|a-c|<b<a+c$?

S.12.2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka abi skaitļi $7^x\cdot 2^y-1$ un $7^x\cdot 2^y+1$ ir pirmskaitļi?

S.12.3. Dots, ka ABCDE ir izliekts piecstūris, pie tam AB||CE, BC||AD, CD||BE un AE||BD. Nogriežņi AC un BE krustojas punktā D_1, bet nogriežņi AD un BE krustojas punktā C_1. Pierādīt, ka $BD_1 = C_1E$.

S.12.4. Kādiem naturāliem n eksistē polinoms P(t) ar īpašību:

$P\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^n-\frac{1}{x^n}$ visiem reāliem $x\neq 0$?

S.12.5. Futbola turnīrā piedalījās 28 komandas, katra ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Par uzvaru komanda iegūst 2 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu – 0 punktus. Vairāk nekā 75% spēļu beidzās neizšķirti. Pierādīt: vismaz divām komandām turnīra noslēgumā bija vienāds punktu skaits.

R. 56. Rajona olimpiāde

R.9. Devītā klase

R.9.1. Kādā kolektīvā katram cilvēkam ir tieši 3 draugi (ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs). Nav tādu triju cilvēku, kas visi savā starpā draudzētos. Kāds ir mazākais iespējamais cilvēku skaits šajā kolektīvā?

R.9.2. Dots, ka ABCD – paralelograms. Taisne t ir paralēla diagonālei BD un krusto malu AB punktā M, bet malu AD – punktā K. Pierādīt, ka trijstūru BMC un KCD laukumi ir vienādi.

Ja nevarat atrisināt uzdevumu vispārīgajā gadījumā, apskatiet gadījumu, kad ABCD – kvadrāts (protams, iegūto punktu skaits tad būs mazāks).

R.9.3. Ja a - reāls skaitlis, tad ar [a] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a (skaitļa a veselo daļu). Piemēram, [4,8] = 4; [-3, 3] = –4; [5] = 5.

Savukārt pēc definīcijas $\{a\} = a - [a]$ (skaitļa a daļveida daļa). Piemēram, {4,8} = 0,8; {-3,3} = 0,7; $\{5\} = 0$.

Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = z \\ [y] + \{z\} = x \\ [z] + \{x\} = y \end{cases}$$

R.9.4. Kuri naturālie skaitļi x apmierina vienlaicīgi visas sekojošās prasības:

- $x \le 2006$,
- x dalās ar 5,
- x + 1 dalās ar 7,
- x + 2 dalās ar 9,
- x + 3 dalās ar 11?

R.9.5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz.
Ja kaut kāds skaitlis x jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu x + 1, vai 2x (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Tas, kurš uzraksta 1000, uzvar. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Atrodiet lielāko 12-ciparu skaitli ar īpašību: katri divi blakus uzrakstīti cipari veido pirmskaitli, un visi šie 11 pirmskaitļi ir dažādi.

R.10.2. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).
Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

- abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
- pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi - taisnleņķa, vai abi - platleņķa.

Atbildiet uz šo jautājumu, ja
a) n = 5;
b) n = 2006.

R.10.3. Dots, ka a, b un c – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $\frac{a}{bc+1}$, $\frac{b}{ac+1}$, $\frac{c}{ab+1}$ nepārsniedz $\frac{1}{2}$.

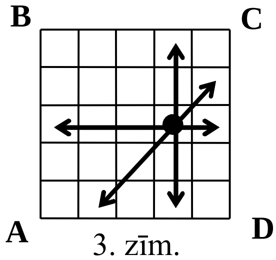
R.10.4. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts P. Stari AP, BP, CP krusto attiecīgi malas BC ,AC, AB attiecīgi punktos A_1, B_1, C_1. Pierādīt: ap abiem četrstūriem ABA_1B_1 un ACA_1C_1 var apvilkt riņķa līnijas tad un tikai tad, ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts.

R.10.5. Ir 2006 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 1004 svēršanām noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Doti 6 viens otram sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt: eksistē pirmskaitlis, ar kuru dalās tieši viens no šiem skaitļiem.

R.11.2. Kvadrāts ABCD sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām, $n \ge 2$. Par "lēdiju" sauc figūru, kas var atrasties jebkurā rūtiņā; tā apdraud visas tās rūtiņas, kas atrodas ar to vienā horizontālē, vienā vertikālē vai vienā "diagonālē", kura paralēla AC (skat. 3. zīm.)



3. zīm.

Kādu mazāko lēdiju skaitu var novietot kvadrātā, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?

R.11.3. Stars t ir ΔABC leņķa A bisektrise. Tā krusto malu BC punktā K. Punkti M un N ir to perpendikulu pamati, kas no B un C vilkti pret t (M un N nesakrīt). Tā perpendikula pamats, kas no K vilkts pret AC, ir S. Pierādīt, ka $\angle MSK = \angle NSK$.

R.11.4. Funkcija f(x) definēta visiem $x \geq 0$. Ir zināms, ka funkcijas $f(x) - x^3$ un $f(x) - 3x$ ir augošas visā definīcijas apgabalā. Pierādīt, ka funkcija $f(x) - x^2 - x$ ir augoša

a) segmentā [0; 1],

b) visā definīcijas apgabalā.

R.11.5. Andrim, Dzintaram un Gunāram ir liels daudzums zīmīšu. Uz katras zīmītes ir uzrakstīts viens no skaitļiem 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Maija uzlīmēja katram no viņiem uz pieres pa vienai zīmītei. Katrs zēns redz zīmītes uz abu draugu pierēm, bet neredz zīmīti uz savas pieres. Maija, visiem dzirdot, paziņoja: „Ne visi skaitļi uz jūsu pierēm ir dažādi. Visu triju skaitļu reizinājums ir vesela skaitļa kvadrāts."
Vai zēni nesarunājoties var noskaidrot, kādi skaitļi ir uz viņu pierēm?

R.12. Divpadsmitā klase

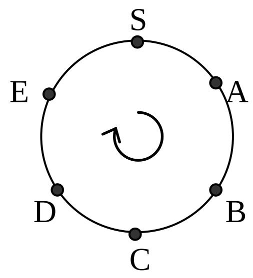
R.12.1. Koordinātu plaknē uzzīmēts funkcijas $y = x^4 - 2x^2 + 7$ grafiks un taisne, kas krusto šo grafiku 4 dažādos punktos. Pierādīt, ka krustpunktu abscisu summa ir 0.

R.12.2. Parlamentā ir 100 deputātu. Ir zināms, ka nevienam deputātam nav aizspriedumu pret vairāk nekā 5 citiem deputātiem. (Ja A ir aizspriedumi pret B, tad B var arī nebūt aizspriedumu pret A.)
Kāds ir mazākais komisiju skaits, kurās noteikti var sadalīt jebkura šāda parlamenta deputātus (katram deputātam jāpiedalās vismaz vienā komisijā) tā, ka nevienā komisijā nevienam deputātam nav aizspriedumu ne pret vienu citu?

R.12.3. Kuriem pirmskaitļiem p piemīt īpašība: skaitlim $p^2 + 11$ ir mazāk nekā 11 naturālu dalītāju?

R.12.4. Riņķa līnijā ievilkts kvadrāts ABCD. Punkts M atrodas uz mazākā no lokiem CD un nesakrīt ne ar C, ne ar D. Taisne AM krusto taisnes BD un CD attiecīgi punktos P un R. Taisne BM krusto taisnes AC un DC attiecīgi punktos Q un S. Pierādiet, ka $PS \perp QR$.

R.12.5. Pa apli izvietotas n spuldzes; sākotnēji tās visas ir izslēgtas. Viena spuldze apzīmēta ar S. Atrodam visus skaitļa n pozitīvos dalītājus, ieskaitot 1 un n. Katram šādam dalītājam d veicam sekojošu operāciju: mainām katras d-tās spuldzes stāvokli (sākot ar spuldzi S), pavisam izdarot n maiņas. (Piemēram, ja 4. zīm attēlotajā situācijā pie n = 6 ņemts dalītājs d = 3, tad pakāpeniski mainīsim spuldžu S; C; S; C; S; C stāvokļus.)



4. zīm.

Kurām n vērtībām, beidzot šīs darbības, visas spuldzes būs ieslēgtas?

V. 56. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Atrisināt vienādojumu $x + y = 1025$, ja x un y ir naturāli skaitļi – skaitļa 640000 dalītāji.

V.9.2. Apzīmējam $f(x) = x^2 + px + q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, no kurām viena atrodas starp 0 un 1, bet otra – nē. Pierādīt, ka $f(q) \leq 0$.

V.9.3. Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Uz taisnes AB atrasti tādi divi dažādi punkti C_1 un C_2, ka $IC_1 = IC_2 = IC$; uz taisnes AC atrasti tādi divi dažādi punkti B_1 un B_2, ka $IB_1 = IB_2 = IB$; uz taisnes BC atrasti tādi divi dažādi punkti A_1 un A_2, ka $IA_1 = IA_2 = IA$.

Pierādīt, ka $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + CA$.

V.9.4. Eksāmenam tika sagatavoti 8 uzdevumi. Katram skolēnam iedeva 3 no tiem. Nav tādu divu skolēnu, kas būtu saņēmuši vairāk nekā vienu kopīgu uzdevumu. Kāds ir lielākais iespējamais skolēnu skaits?

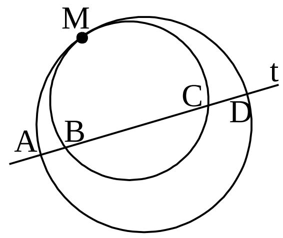
V.9.5. Deviņos traukos pavisam kopā ir 36 litri ūdens. Ūdeni, kas ir 1. traukā, sadalīja 8 vienādās daļās un šīs daļas ielēja pārējos 8 traukos (pa vienai daļai katrā traukā). Pēc tam to pašu izdarīja ar ūdeni, kas bija 2. traukā, 3. traukā, ..., 8. traukā, 9. traukā. Izrādījās, ka tagad katrā traukā ir tikpat ūdens, cik tur bija sākumā. Cik litru ūdens sākumā bija katrā traukā?

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām noorganizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss „darbojas" abos virzienos. Reisus organizē 90 aviokompānijas. Katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp kādām divām pilsētām (apzīmēsim tās ar A un B), tad tai ir biroji gan pilsētā A, gan pilsētā B. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji.

V.10.2. Kādiem pirmskaitļiem p un q, kas nepārsniedz 100, visi skaitļi p + 6, p + 10, q + 4, q + 10 un p + q + 1 arī ir pirmskaitļi?

V.10.3. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Taisne t krusto tās punktos A, B, C, D (skat. 5. zīm.) Pierādīt, ka $\angle AMB = \angle CMD$.



5. zīm.

V.10.4. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}}>21{,}8$$

V.10.5. Kādam mazākajam naturālajam skaitlim n piemīt šāda īpašība: vienalga kādā veidā nokrāsojot dažus no naturālajiem skaitļiem 1; 2; 3; ...; n baltus, bet pārējos – sarkanus, vienādojumam x + y + z = t eksistē atrisinājums, kurā visu četru mainīgo vērtības ir vienā un tai pašā krāsā (starp šīm vērtībām var būt arī savā starpā vienādas)?

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Skolā ir n skolnieki un m skolotāji. Ir zināms, ka katrs skolotājs māca tieši a skolniekus, a > 1, un katriem diviem dažādiem skolniekiem var atrast tieši b skolotājus, kuri māca abus šos skolniekus. Pierādīt, ka

$$\frac{m}{b}=\frac{n(n-1)}{a(a-1)}.$$

V.11.2. Reālu skaitļu virknē (a_n), n = 1; 2; 3; ..., pirmo locekli a_1 izvēlas patvaļīgi, bet katru nākošo aprēķina pēc formulas $a_{n+1}=a_n(a_n+2)$, n = 1; 2; 3; ... . Kādas vērtības var pieņemt a_{2006}?

V.11.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(x+y)(xy+1)=2^z$.

V.11.4. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu trijstūris. Riņķa līnija ω iet caur A un B un krusto malas AC un BC attiecīgi punktos M un N. Pieskares, kas ω novilktas punktos M un N, krustojas punktā O. Pierādīt: O ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs tad un tikai tad, ja AB ir ω diametrs.

V.11.5. Regulāra n – stūra A virsotnēs ierakstīti skaitļi: n-1 virsotnē nulles, bet vienā virsotnē – vieninieks. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru tādu regulāru daudzstūri D, kura visas virsotnes ir n-stūra A virsotnēs, un visiem skaitļiem daudzstūra D virsotnēs pieskaitīt 1. Kādiem n, atkārtojot šādus gājienus, iespējams panākt, lai visās n-stūra A virsotnēs būtu ierakstīti vienādi skaitļi?

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Pierādīt, ka

$$(1+\mathrm{tg}1^\circ)(1+\mathrm{tg}2^\circ)(1+\mathrm{tg}3^\circ)\ldots(1+\mathrm{tg}44^\circ)(1+\mathrm{tg}45^\circ)=2^{23}.$$

V.12.2. Funkcija $f(x)$ definēta pie $0\le x\le 1$. Zināms, ka $f(0)=f(1)=0$ un visiem x un y no intervāla [0; 1] pastāv nevienādība

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(x)+f(y).$$

a) Pierādīt: vienādojumam $f(x)=0$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu,

b) vai eksistē tāda funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un starp kuras vērtībām ir tādas, kas atšķiras no 0?

V.12.3. Trijstūrī ABC visas malas ir dažāda garuma un tajā ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB, BC, CA attiecīgi punktos D, E, F.

a) Pierādīt, ka ΔCDI un ΔDSI ir līdzīgi, ja S ir CI un EF krustpunkts,

b) pieņemsim, ka K ir nogriežņa CD un ievilktās riņķa līnijas kopējais punkts, kas atšķiras no D. Taisne, kas punktā K pieskaras ievilktajai riņķa līnijai, krusto taisni AB punktā G. Pierādīt, ka $GS \perp CI$.

V.12.4. Naturāli skaitļi m un n apmierina sekojošu īpašību: m dalās ar jebkuru no skaitļiem 1; 2; 3; ... ; n, bet nedalās ne ar n + 1, ne ar n + 2, ne ar n + 3. Kādas ir iespējamās n vērtības?

V.12.5. Uz katras daudzskaldņa šķautnes atzīmēta bultiņa. Zināms, ka katrā virsotnē ieiet vismaz viena bultiņa un no katras virsotnes iziet vismaz viena bultiņa.

a) Pierādīt: ja daudzskaldnis ir izliekts, tad noteikti eksistē tāda skaldne, kuras kontūru var apiet, ejot pa malām bultiņu norādītajos virzienos,

b) vai šī īpašība noteikti izpildās, ja daudzskaldnis nav izliekts?

A. Latvijas 33. atklātā matemātikas olimpiāde

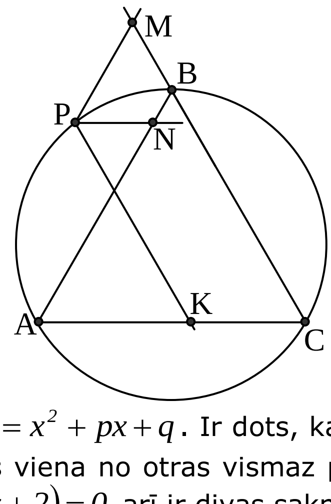
A.9. Devītā klase

A.9.1. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

A.9.2. Dots, ka *n* – naturāls skaitlis. Katrs no 2*n*+1 rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz *n* citus rūķīšus.

Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus 2*n* citus rūķīšus.

A.9.3. Dots, ka ΔABC ir regulārs. Punkts P atrodas uz ABC apvilktās riņķa līnijas (skat. 6. zīm.) Taisnes, kas caur P vilktas paralēli AB, BC un CA, krusto atbilstoši taisnes BC, AC un AB attiecīgi punktos M, K un N. Pierādīt, ka $\angle BMN = \angle BMK$.



6. zīm.

A.9.4. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Ir dots, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, kas atšķiras viena no otras vismaz par 5. Pierādīt, ka vienādojumam $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$ arī ir divas saknes.

A.9.5. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var izvēlēties tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nedalītos viens ar otru un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks par 1?

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām baltām rūtiņām. Parādiet, ka **a)** 8, **b)** 9, **c)** 10 no tām var nokrāsot melnas tā, lai katrai atlikušajai baltajai rūtiņai R būtu tieši viena melna rūtiņa, ar kuru R ir kopīga mala.

A.10.2. Pusriņķa līnijas diametrs ir AB. Uz pusriņķa līnijas ņemti divi punkti M un N, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Stari AM un BN krustojas punktā O.
Pierādīt: ap ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums atkarīgs tikai no hordas MN garuma, nevis no tās novietojuma.

A.10.3. Ir dots, ka, sareizinot visus naturālos skaitļus no 1 līdz 33 ieskaitot, iegūst 86833176188xy8864955181944012zt000000, kur x, y, z, t ir cipari. Noskaidrojiet x, y, z un t vērtības.

A.10.4. Tenisa turnīrā piedalījās n spēlētāji, katrs ar katru citu spēlēja tieši 2 reizes. Neizšķirtu tenisā nav. Turnīra noslēgumā tieši vienam spēlētājam bija 13 uzvaras un tieši 2 spēlētājiem – pa 10 uzvarām; citiem katram bija vai nu 11, vai 12 uzvaras. Kāda var būt n vērtība?

A.10.5. Dots, ka x, y un z ir pozitīvi skaitļi.

a) Pieņemsim, ka zināms: $x+y+z\le 3$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3$?

b) Pieņemsim, ka zināms: $x+y+z\ge 3$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 3$?

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Apskatām n pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka tos var sadalīt divās grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir pirmskaitlis, ja **a)** n = 8, **b)** n = 10? Katrā grupā jābūt vismaz 2 skaitļiem.

A.11.2. Dots, ka $a<b\le c<d$ ir pozitīvi veseli skaitļi, $ad=bc$ un $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$. Pierādīt, ka *a* ir vesela skaitļa kvadrāts.

A.11.3. Punkts P atrodas regulāra trijstūra ABC iekšpusē. Pierādīt, ka:

a) $PA+PB+PC<3\cdot AB$**,**

b) $PA+PB+PC<2\cdot AB$**.**

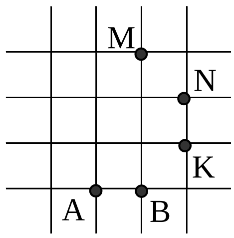
A.11.4. Dots, ka a – pozitīvs skaitlis. Atrisināt vienādojumu $x+a^3=\sqrt[3]{a-x}$.

A.11.5. Dots, ka n – naturāls skaitlis, $n\ge 3$. Katri divi no n zinātniekiem sarakstās vienā no n valodām, turklāt visas n valodas tiek izmantotas. Pierādiet: var atrast tādus trīs zinātniekus, kas savstarpējā sarakstē izmanto trīs dažādas valodas.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?

A.12.2. Pierādīt, ka $\angle AMB=\angle ANB=\angle AKB$, kur A, B, M, N, K – punkti, kas atrodas kvadrātiska režģa virsotnēs (skat. 7. zīm.)



7. zīm.

A.12.3. Zināms, ka katram no vienādojumiem $ax^2+bx+c=0$ un $Ax^2+Bx+C=0$ ir tieši divas dažādas reālas saknes. Zināms arī, ka visiem reāliem x pastāv nevienādība $\left|ax^2+bx+c\right|\le\left|Ax^2+Bx+C\right|$. Pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2\le A^2+B^2+C^2$.

A.12.4. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trīs no tām ir īstas (to masas ir vienādas savā starpā), divas – viltotas (to masas arī ir vienādas savā starpā, bet citādas nekā īstajām monētām). Nav zināms, vai viltotā monēta vieglāka vai smagāka par īsto. Mūsu rīcībā ir sviras svari; ir iespējams nolasīt uz kausiem uzlikto masu starpību. Ar kādu iespējami mazu svēršanu skaitu Jūs varat atrast kaut vienu īsto monētu? (**Nav jāpierāda**, ka Jūsu piedāvātais svēršanu skaits ir mazākais iespējamais.)

A.12.5. Vai eksistē tāda funkcija *f*, kuras definīcijas apgabals sastāv no visiem plaknes daudzstūriem, visas vērtības ir lielākas par 0 un mazākas par 1 un kam piemīt īpašība: ja daudzstūris D sadalīts divos daudzstūros D_1 un D_2, tad noteikti $f(D)=f(D_1)+f(D_2)$?

Piezīme. Ja daudzstūri x_1 un x_2 ir vienādi, bet atšķiras viens no otra ar novietojumu plaknē, tad varbūt $f(x_1)\ne f(x_2)$.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 47.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 56.matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$3^x = 2^x\cdot y + 1$$

VP.1.2. Dots, ka $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ir reāli skaitļi un pastāv sakarība $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 - 1)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2 - 1) > (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n - 1)^2$. Pierādīt, ka $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 1$.

VP.1.3. Klubā ir 3n+1 dalībnieki. Katri divi savā starpā sarunājas tieši vienā no 3 valodām: angļu, vācu, franču. Katrs kluba dalībnieks katrā no šīm valodām sarunājas ar tieši n citiem.
Pierādīt: var atrast tādus trīs kluba dalībniekus, kas savstarpējā saziņā lieto visas trīs valodas.

VP.1.4. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu. Tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB un AC atbilstoši punktos D un E. Leņķu ACB un ABC bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos X un Y. Malas BC viduspunkts ir Z. Pierādīt: ΔXYZ ir vienādmalu tad un tikai tad, ja $\angle A=60^\circ$.

VP.1.5. Plaknē dota taisnleņķa koordinātu sistēma un atzīmēti n punkti. Pierādīt, ka var nokrāsot dažus no šiem punktiem baltus, bet pārējos – sarkanus tā, ka uz katras taisnes, kas paralēla kādai no koordinātu asīm, abu krāsu punktu daudzumi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 1.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 6.maijā

VP.2.1. Dots, ka d – pozitīvs vesels skaitlis. Definējam skaitļu virkni (a_n) šādi:

$a_0=1$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, \text{ ja } a_n - \text{pāra skaitlis,}\\ a_n+d, \text{ ja } a_n - \text{nepāra skaitlis.}\end{cases}$$

Kādām d vērtībām eksistē tāds k>0, ka $a_k=1$?

VP.2.2. Dots, ka ABCD ir trapece ar pamatiem AB un CD. Tās diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras un krustojas punktā O. Punkti M un N atrodas attiecīgi uz stariem OA un OB, pie tam $\angle ANC = \angle BMD = 90^0$. Punkts E ir nogriežņa MN viduspunkts. Pierādīt, ka $OE \perp AB$.

VP.2.3. Katram naturālam n atrodiet izteiksmes $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ mazāko iespējamo vērtību, ja $x_1, x_2, ..., x_n$ ir dažādi naturāli skaitļi.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 7.maijā

VP.3.1. Pieņemsim, ka $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$ ir aritmētiska progresija, kas sastāv no pirmskaitļiem. Kāda ir mazākā iespējamā a_7 vērtība?

VP.3.2. Vai eksistē naturāli skaitļi m un n, kam piemīt šāda īpašība: jebkurā grupā, kas satur m zēnus un n meitenes, var izvēlēties 5 zēnus un 5 meitenes tā, ka vai nu visi izvēlētie zēni pazīst visas izvēlētās meitenes, vai arī neviens no izvēlētajiem zēniem nepazīst nevienu no izvēlētajām meitenēm?

VP.3.3. Kādām funkcijām $f(t)$ vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:

- $f(t)$ definēta visiem pozitīviem reāliem t,
- $f(t)$ vērtības ir pozitīvi reāli skaitļi,
- visiem pozitīviem reāliem x un y pastāv vienādība $x^2\left(f(x)+f(y)\right)=(x+y)\cdot f\left(f(x)\cdot y\right)$?

IMO. 47. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (47th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2006. gada 12. jūlijā.

IMO.1. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Punkts P atrodas trijstūra iekšpusē un apmierina sakarību $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$.
Pierādiet, ka $AP \geq AI$ un ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja punkts P sakrīt ar punktu I.

IMO.2. Pieņemsim, ka *P* ir regulārs 2006-stūris. Daudzstūra *P* diagonāli sauc par *labu*, ja tās galapunkti sadala *P* kontūru divās daļās, katra no kurām satur nepāra skaitu daudzstūra *P* malu. Arī daudzstūra *P* malas sauc par *labām*.
Pieņemsim, ka daudzstūris *P* ir sadalīts trijstūros, novelkot 2003 diagonāles, nekādām divām no kurām nav kopīgu punktu daudzstūra *P* iekšpusē. Kāds ir lielākais šādā sadalījumā iespējamais tādu vienādsānu trijstūru skaits, kuriem ir pa divām *labām* malām?

IMO.3. Noskaidrojiet, kāds ir vismazākais reālais skaitlis M, ar kuru nevienādība $\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ ir spēkā visiem reāliem skaitļiem a, b un c.

IMO. Uzdevumi 2006. gada 13. jūlijā.

IMO.4. Noskaidrojiet, kuriem veselu skaitļu pāriem (x,y) ir spēkā vienādība $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

IMO.5. Pieņemsim, ka $P(x)$ ir n-tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem, $n>1$. Pieņemsim, ka k ir pozitīvs vesels skaitlis. Aplūkosim polinomu $Q(x)=P(P(...P(P(x))...))$, kur P parādās k reizes. Pierādiet, ka ir ne vairāk kā n tādu veselu skaitļu t, kuriem $Q(t)=t$.

IMO.6. Katrai izliekta daudzstūra *P* malai *b* piekārtojam maksimālo tāda trijstūra laukumu, kurš ietilpst daudzstūrī *P* un kuram *b* ir viena no malām. Pierādiet, ka visām daudzstūra *P* malām piekārtoto laukumu summa nav mazāka par divkāršotu daudzstūra *P* laukumu.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2005"

AB.A. Algebra

AB.A.1. Dots, ka $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$. Kādas vērtības var pieņemt izteiksme $\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}$?

AB.A.2. Visi burti apzīmē pozitīvus skaitļus. Pierādīt nevienādības

a) $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}\geq\frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2}$

b) $\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\geq 1$

AB.A.3. Ir zināms, ka visi burti apzīmē pozitīvus skaitļus un $x\leq y\leq z$, $x\leq a\leq z$, $x\leq b\leq z$, $x\leq c\leq z$, $x+y+z=a+b+c$ un $xyz=abc$. Pierādīt, ka viens no skaitļiem *x*, *y*, *z* vienāds ar *a*, otrs – ar *b*, bet trešais – ar *c*.

AB.A.4. Dots, ka $x\neq 1$ - reāls pozitīvs skaitlis un *n* – pozitīvs vesels skaitlis. Pierādīt, ka

$$n^2\leq\frac{x^n+x^{-n}-2}{x+x^{-1}-2}.$$

AB.A.5. Noskaidrojiet, kuras funkcijas $f(x,y)$ vienlaicīgi apmierina šādas 4 prasības:

a) $f(x,y)$ definēta visiem veseliem *x* un *y*,

b) *f* vērtības ir reāli skaitļi,

c) katriem veseliem *x*, *y*, *z* pastāv sakarība $f(x,y)\cdot f(y,z)\cdot f(z,x)=1$,

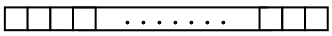
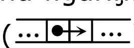
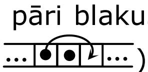
d) katram veselam *x* pastāv sakarība $f(x+1,x)=2$.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Kuba virsotnēs pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt: var atrast tādas divas pretējās kuba virsotnes un savienot tās ar lauztu līniju, kas sastāv no trim kuba šķautnēm, ka šīs lauztās līnijas četrās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 21.

AB.K.2. Katri divi no 6 datoriem savienoti ar baltu vai sarkanu vadu. Pierādīt: var atrast tādus 4 datorus un apzīmēt tos ar A, B, C un D, ka visi 4 vadi A-B, B-C, C-D, D-A ir vienādā krāsā.

AB.K.3. Kvadrāts ar izmēriem $n\times n$ sadalīts n^2 vienādos kvadrātiņos. Katra no $(n+1)^2$ mazo kvadrātiņu virsotnēm tiek nokrāsota zaļa vai dzeltena. Cik ir tādu krāsojumu, kuros katram mazajam kvadrātiņam ir tieši 2 zaļas un 2 dzeltenas virsotnes?

AB.K.4. Lenta sastāv no *n* vienādiem kvadrātiņiem: . Kreisajos 9 kvadrātiņos ir pa vienai figūriņai. Ar vienu gājienu figūriņa var vai nu pārbīdīties uz blakus pa labi esošo rūtiņu, ja tā ir brīva (), vai arī pārlēkt pāri blakus pa labi esošai figūriņai uz aiznākošo rūtiņu pa labi, ja tā ir brīva (). Kāda ir mazākā iespējamā *n* vērtība, pie kuras figūriņas kādreiz var nostāties kaut kādos 9 pēc kārtas esošos kvadrātiņos pretējā secībā nekā sākumā?

AB.K.5. Klasē ir 10 skolēni. Viņiem jāreģistrējas 1023 eksāmenu kārtošanai, turklāt nedrīkst būt divu tādu eksāmenu, kurus kārto vieni un tie paši skolnieki. Katru eksāmenu jākārto vismaz vienam skolniekam. Dots, ka *n* – vesels skaitlis, $0\leq n\leq 1023$. Pierādīt, ka eksāmeniem reģistrējušos skolnieku sarakstus var nodrukāt uz baltām un zaļām lapām tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas prasības:

- ja divas lapas X un Y ir vienā krāsā, tad tā lapa, uz kuras pierakstīti tieši tie skolnieki, kas pierakstīti vismaz uz vienas no lapām X un Y, ir tādā pašā krāsā kā X un Y,
- ir tieši n baltas lapas.

AB.Ģ. Ģeometrija

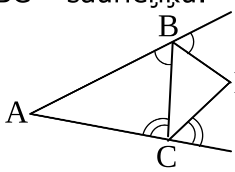
AB.Ģ.1. Riņķa līnijas w_1 un w_2 krustojas punktos A un B. Taisne t_1 iet caur A, pieskaras w_2 un krusto riņķa līniju w_1 vēl punktā C; taisne t_2 iet caur A, pieskaras w_1 un krusto riņķa līniju w_2 vēl punktā D. Stars s sākas punktā A, atrodas leņķa CAD iekšpusē un krusto w_1 punktā M, w_2 punktā N un ΔACD apvilkto riņķa līniju punktā P. Pierādīt, ka AM=NP.

AB.Ģ.2. Naturālam skaitlim n piemīt īpašība: ir iespējams plaknē izvēlēties n tādus punktus, no kuriem nekādi 3 neatrodas uz vienas taisnes, ka neviena $n-1$ posma lauzta līnija, kuras virsotnes ir izvēlētie n punkti, pati sevi nekrusto.
Atrast lielāko iespējamo n vērtību.

AB.Ģ.3. Izliektā četrstūrī ABCD zināms, ka $\angle A=\angle C=90°$. Uz katras no ABCD malām atzīmēts pa vienam iekšējam pelēkam punktam. Pierādīt, ka tā izliektā četrstūra perimetrs, kura virsotnes ir šie pelēkie punkti, nav mazāks par 2·AC.

AB.Ģ.4. Ap trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija w. Punkts M atrodas uz tā w loka BC, kurš nesatur A. Taisne, kas vilkta caur A paralēli BC, krusto w vēl punktā A_1. Taisnes MA un MA_1 krusto malu BC attiecīgi punktos N un N_1. Pierādīt, ka $\frac{N_1B}{N_1C}=\frac{NB}{NC}\cdot\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.

AB.Ģ.5. Pierādīt, ka ap ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes AM (skat. 8. zīm.), ja ΔABC – šaurleņķu.



8. zīm.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka 3^n+n^3 dalās ar 7 tad un tikai tad, ja $3^n\cdot n^3+1$ dalās ar 7.

AB.S.2. Katram no naturāliem skaitļiem 5001; 5002; 5003; ...; 10000 atrodam lielāko nepāra dalītāju. Atrast šo dalītāju summu.

AB.S.3. Dots, ka a un b – divi dažādi naturāli skaitļi. Zināms arī, ka visi trīs skaitļi $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ un $\frac{2ab}{a+b}$ ir veseli. Atrast mazāko iespējamo $|a-b|$ vērtību.

AB.S.4. Atrast lielāko naturālo skaitli n ar īpašību: dalot n ar jebkuru naturāla skaitļa kvadrātu x^2, kur $2<x^2<\frac{n}{2}$, atlikums ir nepāra skaitlis.

AB.S.5. Noskaidrojiet, kuras funkcijas $f(t)$ vienlaicīgi apmierina 3 prasības:
a) $f(t)$ definēta visiem veseliem pozitīviem t,
b) $f(t)$ vērtības ir veseli pozitīvi skaitļi,
c) katriem veseliem pozitīviem m un n skaitlis $(m^2+n)^2$ dalās ar $(f(m))^2+f(n)$.

BW. 16.matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2005”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Pieņemsim, ka a_0 ir pozitīvs vesels skaitlis. Definēsim virkni (a_n), $n \geq 0$, sekojoši: ja $a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i$, kur c_i ir tādi veseli skaitļi, ka $0 \leq c_i \leq 9$, tad $a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \ldots + c_j^{2005}$.

Vai var izvēlēties a_0 tā, lai visi virknes locekļi būtu dažādi?

BW.A.2. Pieņemsim, ka α, β un γ ir trīs leņķi, kam izpildās nosacījumi $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^0$ un $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Pierādīt, ka $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma \geq \frac{3}{8}$.

BW.A.3. Aplūkosim virkni (a_k), $k \geq 1$, kuru definē ar nosacījumiem $a_1=1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}}$, ja $k \geq 1$.

Pierādiet, ka $\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \ldots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4$.

BW.A.4. Atrodiet tādus trīs dažādus polinomus ar reāliem koeficientiem P(x), ka visiem x pastāv sakarība $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$.

BW.A.5. Pieņemsim, ka a, b, c ir pozitīvi reāli skaitļi, kas apmierina nosacījumu abc=1. Pierādiet, ka $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Pieņemsim, ka K un N ir pozitīvi veseli skaitļi un $1 \leq K \leq N$. Kāršu komplekts satur N dažādas kārtis, kas sākumā saliktas kaudzē viena virs otras kaut kādā secībā. Ar vienu gājienu var paņemt K augšējās kārtis, apmainīt to secību uz pretējo un jauniegūto K kāršu bloku novietot kaudzes apakšā. Pierādiet: atkārtojot šādus gājienus, kārtis novietosies sākotnējā secībā pēc ne vairāk kā $\frac{4N^2}{K^2}$ gājieniem.

BW.K.2. Taisnstūrveida tabulā ir n rindas un 6 kolonnas, turklāt n>2. Katrā tabulas rūtiņā ierakstīts skaitlis 0 vai 1. Tabulā nav divu vienādu rindiņu. Ja tabulā ir rindiņas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ un $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, tad tajā ir arī rindiņa $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$. Pierādiet: tabulā ir tāda kolonna, kurā vismaz pusē rūtiņu ierakstītas nulles.

BW.K.3. Aplūkosim kvadrātisku režģi, kas sastāv no 25×25 vienības kvadrātiņiem. Vienā gājienā ar sarkanu zīmuli drīkst uzzīmēt jebkura izmēra kvadrāta kontūru, kas iet pa režģa līnijām. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var nokrāsot visas režģa līnijas?

BW.K.4. Taisnstūris sadalīts 200×3 vienības kvadrātos. Pierādīt: to veidu skaits, kuros taisnstūri var sadalīt mazākos taisnstūros ar izmēriem 1×2, dalās ar 3.

BW.K.5. Apzīmēsim $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ar M sapratīsim visu tādu skaitļa m pozitīvu dalītāju kopu, kuri katrs sadalās divu pirmskaitļu reizinājumā. Atrodiet mazāko naturālo skaitli n ar īpašību: lai kā izvēlētos n skaitļus no kopas M, starp izvēlētajiem atradīsies 3 tādi skaitļi a, b, c, ka $a \cdot b \cdot c = m$.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Punkti D un E atrodas attiecīgi uz trijstūra ABC malām BC un AC; pastāv vienādība BD=AE. Taisne, kas iet caur trijstūru ADC un BEC apvilkto riņķa līniju centriem, krusto taisnes AC un BC attiecīgi punktos K un L. Pierādiet, ka KC=LC.

BW.Ģ.2. Pieņemsim, ka ABCD ir izliekts četrstūris un BC=AD. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un CD viduspunkti. Taisnes AD un BC krusto taisni MN attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka CQ=DP

BW.Ģ.3. Ar kādu mazāko daudzumu riņķu, kuru rādiusi ir $\sqrt{2}$, var pārklāt taisnstūri **a)** ar izmēriem 6×3; **b)** ar izmēriem 5×3?

BW.Ģ.4. Pieņemsim, ka trijstūra ABC mediānas krustojas punktā M. Pieņemsim arī, ka D un E ir dažādi punkti uz taisnes BC un DC=CE=AB. Savukārt punkti P un Q atrodas atbilstoši uz nogriežņiem BD un BE, un pastāv vienādības 2BP=PD un 2BQ=QE. Aprēķināt $\angle PMQ$.

BW.Ģ.5. Taisnes e un f ir savstarpēji perpendikulāras un krustojas punktā H. Punkti A un B pieder taisnei e, bet punkti C un D pieder taisnei f; visi pieci punkti A, B, C, D, H ir dažādi. Taisnes b un d vilktas atbilstoši caur B un D perpendikulāri AC; taisnes a un c vilktas atbilstoši caur A un C perpendikulāri BD. Pieņemsim, ka a un b krustojas punktā X, bet c un d krustojas punktā Y. Pierādiet, ka taisne XY iet caur punktu H.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Pieņemsim, ka p ir pirmskaitlis, bet n – pozitīvs vesels skaitlis. Ar q apzīmēsim skaitļa $(n+1)^p-n^p$ patvaļīgu pozitīvu dalītāju. Pierādīt, ka q-1 dalās ar p.

BW.S.2. Virkni (x_n), $n\geq 0$, definē sekojoši: $x_0=a$; $x_1=2$; $x_n=2x_{n-1}x_{n-2}-x_{n-1}-x_{n-2}+1$, ja n>1. Kuriem veseliem skaitļiem a vienlaicīgi visi skaitļi $2x_{3n}-1$, $n\geq 1$, ir veselu skaitļu kvadrāti?

BW.S.3. Skaitļi x un y ir veseli un pozitīvi; skaitlis $z=\dfrac{4xy}{x+y}$ ir nepāra vesels skaitlis. Pierādiet, ka vismaz vienu skaitļa z dalītāju var izteikt formā 4n-1, kur n ir vesels pozitīvs skaitlis.

BW.S.4. Vai var atrast 2005 dažādus pozitīvu veselu skaitļu kvadrātus, kuru summa ir vesela skaitļa kvadrāts?

BW.S.5. Kuriem veseliem pozitīviem skaitļiem n piemīt īpašība: izsakot $n=p_1p_2...p_k$, kur p_1, p_2, ..., p_k ir pirmskaitļi (ne noteikti dažādi), skaitlis $(p_1+1)(p_2+1)...(p_k+1)$ dalās ar n?

Ieteikumi

S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. Parabolas zari ir vērsti uz augšu, ja koeficients pie x^2 ir pozitīvs.
S.9.2. Novelciet arī iekšējā leņķa bisektrisi un salīdziniet riņķa līnijas loku un trijstūra leņķu lielumus.
S.9.3. Atsevišķi apskatiet gadījumus, kad p – pāra skaitlis un p – nepāra skaitlis.
S.9.4. Izsakiet ΔABC laukumu divos veidos – ar R palīdzību un ar r palīdzību.
S.9.5. Apskatiet, kādā ceļā iespējams nokrāsot nogriežņus, kas no režģa malām „iet" uz režģa iekšpusi.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Izdomājiet, ko var pateikt par punkta koordinātām un līnijas vienādojumu, ja šis punkts atrodas uz dotās līnijas.
S.10.2. Ievērojiet, ka vienādojums ir homogēns, tātad var izdalīt abas puses ar viena mainīgā augstāko pakāpi un ieviest jaunu mainīgo.
S.10.3. Novelciet kopējo augstumu no punkta R pret taisni t un izsakiet R_{ij} ar šī augstuma un trijstūru leņķu sinusu palīdzību.
S.10.4. Aizstājiet b^2+c^2 ar citu tādu izteiksmi, kas to noteikti nepārsniedz.
S.10.5. Sadaliet visas iespējamās komisijas 5 grupās tā, lai, pielietojot Dirihlē principu, iegūtu atbildi, ka ar 11 komisijām pietiek. Neaizmirstiet parādīt, ka ar mazāk nepietiek.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Uzrakstiet novilkto taišņu vienādojumus un atrodiet abscisas punktiem, kuros taisnes krusto parabolu.
S.11.2. Sadaliet visas iespējamās komisijas pa pāriem un tad pielietojiet Dirihlē principu.
S.11.3. Atcerieties hordas – pieskares leņķa un ievilkta leņķa īpašības.
S.11.4. Apskatiet trijstūri, kura divi leņķi ir α un β. Izmantojot sinusu teorēmu un kosinusu teorēmu, ar apvilktās riņķa līnijas rādiusu izsakiet malu garumus. To pašu izdariet ar citiem leņķu pāriem.
S.11.5. Pieņemiet, ka eksistē, un izpētiet -gadījumā, ja n = 10000, M jāsatur vismaz 4 nulles. Atrodiet citus n, kas rada pretrunu ar šo apgalvojumu.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Atcerieties, ka $|a-b|<c$ var izteikt kā $-c<a-b<c$.
S.12.2. Ar kādiem pirmskaitļiem dalās vismaz viens no 3 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem?
S.12.3. Izsakiet paralelitātes nosacījumus ar laukumu vienādību palīdzību. Atrodiet zīmējumā paralelogramus.
S.12.4. Parādiet, ka pāra n neeksistē tāds polinoms. Lai pierādītu polinoma eksistenci nepāra n gadījumā, lieto matemātisko indukciju pēc shēmas
1; 3; n, n+2 => n+4.
S.12.5. Lai komandām būtu dažādi punktu skaiti, jābūt dažādām starpībām starp to uzvaru un zaudējumu daudzumiem. Tāpēc vienai šai starpībai pēc moduļa jābūt vismaz 14. Novērtējiet šādā gadījumā iespējamo rezultatīvo spēļu skaitu.

R. 56. Rajona olimpiāde

R.9. Devītā klase

R.9.1. Mēģiniet ilustrējot atrast mazāko iespējamo skaitu un pierādiet, ka tas ir mazākais, izmantojot faktu, ka nav tādu 3 cilvēku, kas savā starpā draudzētos.

R.9.2. Ja trijstūriem ir kopīgs pamats un vienādi augstumi pret šo pamatu, tad trijstūru laukumi ir vienādi.

R.9.3. $[a] \in Z, \{a\} \in [0;1)$.

R.9.4. $2x - 5$ dalās ar 5; ar 7; ar 9; ar 11.

R.9.5. Pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Apskatiet, kādiem jābūt visiem cipariem, kas atrodami meklējamā skaitlī, lai izpildītos minētā īpašība.

R.10.2. a) nē; pietiek atrast vienu piemēru, kad tā nav.

b) apvelciet ap abiem 2006-stūriem riņķa līnijas.

R.10.3. Apskatiet gadījumu, kad $a \le b$ un $a \le c$.

R.10.4. Uzdevumam ir divas daļas: pirmkārt, pierādīt – ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts, tad ap abiem dotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas; otrkārt, pierādīt – ja ap abiem dotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas, tad P ir ΔABC augstumu krustpunkts.

Ja divi ievilkti leņķi balstās uz vienu un to pašu loku, tad tie ir vienādi.

R.10.5. Salīdziniet divas monētas un tad šo monētu pāri - ar citu monētu pāri.

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Apskatiet, cik no sešiem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem dalās ar 5.

R.11.2. Atrodiet rindiņu un kolonnu, kuru rūtiņas nav apdraudētas pa horizontāli resp. vertikāli, un apskatiet, cik lēdiju vajag, lai apdraudētu visas šīs rūtiņas.

R.11.3. Novelciet arī perpendikulu no K pret malu AB.

R.11.4. Apskatiet divus gadījumus: kad $0 \le x < y < 1$ un kad $1 \le x < y$.

R.11.5. Apzīmējiet skaitļus ar x, x un y, kur var būt arī tā, ka $x = y$, un apskatiet šo skaitļu reizinājumu.

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Tā kā taisne nav perpendikulāra Ox asij, jo tad tā krustotu grafiku vienā punktā; tad tās vienādojums ir formā $y = ax + b$.

R.12.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast komisiju skaitu, par cik mazāk komisiju noteikti nevar būt; otrkārt, pierādīt, ar cik komisijām vienmēr pietiek.

Atbilde: 11 komisijas.

R.12.3. Vispirms pārbaudiet gadījumus, kad $p \le 11$. Tad pieņemiet, ka $p > 11$, un pierādiet, ka šādā gadījumā p dalās gan ar 3, gan ar 4.

R.12.4. $\angle PMS$ ir puse no mazākā loka AB.

R.12.5. Pierādiet, ka sērijā, kas atbilst dotajam d, katras spuldzes stāvoklis tiek mainīts vai nu 0 reizes, vai d reizes.

V. 56. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Tā kā 1025 – nepāra, tad vai nu x, vai y ir nepāra.

V.9.2. $f(0)\cdot f(1)\leq 0$, jo tieši viena no kvadrātvienādojuma saknēm ir intervālā (0;1).

V.9.3. Izmantojiet ievilktās riņķa līnijas pieskāršanās punktus ΔABC malām un apskatiet izveidojušos taisnleņķa trijstūrus. Sākumā apskatiet gadījumu, kad ir atlikti punkti A_1 un A_2.

V.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) Jāparāda, ka var sadalīt uzdevumus 8 skolēniem; 2) Jāpierāda, ka tas ir lielākais iespējamais skolēnu skaits, jo katru uzdevumu var iedot augstākais 3 skolēniem.

V.9.5. Iespējamais variants ir : 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 un 0 litri. Mēģiniet pierādīt, ka šis ir vienīgais iespējamais atrisinājums, apskatot pārliešanu kā bezgalīgu, periodisku procesu.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Tā kā no 8 elementiem var izveidot ne vairāk kā 28 pārus, tad kompānija var noorganizēt vairāk par 28 reisiem tikai tad, ja tai būtu vairāk kā 8 biroji.

V.10.2. Apskatiet gadījumus, kad p un q ir 2 un 3, un tad gadījumus, kad p un q ir 3k+1 vai 3k+2, kur k ir naturāls skaitlis.

V.10.3. Novelciet punktā M abu riņķa līniju kopējo pieskari un izmantojiet ievilktu leņķu un hordas-pieskares leņķu īpašības.

V.10.4. Apskatiet summu $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}}$ un salīdziniet ar uzdevumā doto.

V.10.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) Jāparāda, ka skaitlim 10 šāda īpašība nepiemīt; 2) Jāparāda, ka skaitlim 11 šāda īpašība nepiemīt. To var izdarīt, pieņemot pretējo tam, kas jāpierāda, un apskatot gadījumus, kad 1 un 2 ir vienādās vai atšķirīgās krāsās.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Iedomājieties, ka skolotāji ir m sarkani punkti, visi iespējamie skolēnu pāri ir $\frac{n(n-1)}{2}$ zaļi punkti un pētiet, kā tos var savienot.

V.11.2. Apskatiet virkni $b_n=a_n+1$

V.11.3. Atcerieties, ka $(x-1)(y-1)\geq 0$, izmantojiet dalāmības īpašības un atcerieties, ka atrisinājums var saturēt arī mainīgu lielumu.

V.11.4. Uzdevums jāpierāda uz abām pusēm: pirmkārt, ja AB ir ω diametrs, tad no tā seko, ka O ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs, izmantojot ievilkta un hordas-pieskares leņķa īpašības un Talesa teorēmu; otrkārt, ja O ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs, tad AB ir ω diametrs, atceroties, ka attālumi no trijstūrim apvilktas riņķa līnijas centra līdz trijstūra virsotnēm ir vienādi.

V.11.5. Šo uzdevumu iesakām risināt, izmantojot vektoru lineāras kombinācijas. Atcerieties, ka summa vektoriem, kas vilkti no regulāra daudzstūra centra uz virsotnēm, ir $\vec{0}$.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Izsakiet izteiksmi $(1+tgx)(1+tg(45°-x))$ un rezultātus grupējiet.

V.12.2. a) Apskatiet divus gadījumus: kad x=y vai x=0, y=1, un izmantojiet iegūto par indukcijas bāzi.

b) Atcerieties, ka funkcija var pieņemt arī tikai 2 vērtības.

V.12.3. a) Izmantojiet sakarības taisnleņķa trijstūrī.

b) Apskatiet četrstūri GKID un atcerieties, ka ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi.

V.12.4. Pierādiet, ka n+1, n+2, n+3 ir pirmskaitļu pakāpes. Izmantojiet to, ka vismaz viens no šiem skaitļiem ir pāra skaitlis, tātad ir 2^x, tieši viens dalās ar 3, tātad ir 3^y, tāpēc $2^x = 3^y \pm 1$.

V.12.5. a) Izpētiet, kādās daļās daudzskaldņa virsmu sadala ceļš, kas veidojas, ejot pa bultiņām.

b) Atrodiet „gredzenveidīga" daudzskaldņa piemēru, kuram šādu skaldni nevar atrast.

A. Latvijas 33. atklātā olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Izmantojiet to, ka skaitlis ...000 dalās ar 8.

A.9.2. Apskatiet, kad var aiziet pirmais atnākušais rūķītis, lai varētu izpildīties uzdevuma nosacījumi.

A.9.3. Apskatiet trapeces PNBM un PMCK.

A.9.4. Atcerieties, ka vienādojumam ir divas saknes, ja tā funkcija maina zīmi divās vietās.

A.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) Apskata skaitļus, kas dalās ar 2, un izvēlas lielāko daudzumu no tiem ar nepieciešamo īpašību; 2) Pierāda, ka vairāk skaitļus, kas apmierina uzdevuma prasības, izvēlēties nevar.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Mēģiniet sākt ar c punktu.

A.10.2. Apskatiet, cik lieli ir leņķi MON abos novietojuma gadījumos, un izmantojiet sinusu teorēmu.

A.10.3. Izdaliet skaitlī 33! reizinātājus 2^a, 3^b, 10^c, 11^d un izmantojiet dalāmības pazīmes.

A.10.4. Vispirms atrodiet, ka nav iespējami citi gadījumi kā n=12 vai n=13. Pēc tam pierādiet, ka vienīgais iespējamais variants ir n=12.

A.10.5. a) Apskatiet reizinājumu $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. Un atcerieties, ka vidējais aritmētiskais vienmēr ir lielāks vai vienāds ar vidējo ģeometrisko.

b) Atrodiet piemēru, kas pierāda pretējo.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. a) Atrodiet piemēru, kas apmierina uzdevuma prasības.

b) Apskatiet skaitļu pārību.

A.11.2. Apzīmējiet b=a+n, c=a+m, d=a+p, kur $0 < n \le m < p$, un apskatiet doto vienādību.

A.11.3. Pierādiet lemmu: PA<AB. Izmantojiet to, pierādot abas nevienādības.

A.11.4. Pārveidojiet vienādojumu par $a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a-x} - x}$ un apskatiet funkciju $f(a) = \sqrt[3]{a-x}$.

A.11.5. Izmantojiet matemātisko indukciju.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Pierādiet, ka šāds skaitlis neeksistē.

A.12.2. Apskatiet riņķa līniju, kuras centrs ir AM viduspunkts.

A.12.3. Uzzīmējiet shematiski funkciju $f(x)=\left|ax^2+bx+c\right|$ un $F(x)=\left|Ax^2+Bx+C\right|$ grafikus.

A.12.4. Parādiet, ka ar divām svēršanām pietiek.

A.12.5. Šāda funkcija eksistē. Sadaliet plakni vienības kvadrātos un sanumurējiet tos „pa spirāli" ar naturāliem skaitļiem.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 47. Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP1. Latvijas 56.matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP1.1. Pieņemiet, ka $x=2^m\cdot(2n+1)$, kur $m\geq 0$; $n\geq 0$; $m,n\in Z$, un atcerieties, ka $l^{2^k}-1$ var sadalīt reizinātājos $(l-1)\left(l^{2^0}+1\right)\left(l^{2^1}+1\right)\ldots\left(l^{2^{k-1}}+1\right)$. Izmantojiet atlikumus pēc moduļa 8.

VP1.2. Pierādiet no pretējā. Apzīmējiet ($a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ - 1) un ($b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$ - 1) pretējos skaitļus ar jauniem mainīgajiem.

VP1.3. Apzīmējiet dalībniekus ar virsotnēm un valodas ar krāsām, kādās nokrāsotas šķautnes, kas savieno virsotnes. Salīdziniet visu trijstūru skaitu ar „slikto" trijstūru skaitu.

VP1.4. Izmantojiet riņķa līnijas centru, lai pierādītu, ka ΔBXC un ΔBYC ir taisnleņķa ar kopīgu hipotenūzu. Var pierādīt, ka „ΔXZY regulārs" tikai, ja $\angle YXZ=60°$, un tas tikai, ja $\angle A=60°$.

VP1.5. Apskatiet gadījumus, kad n=0, n=1, n=2 un n=3. Ņemiet tos par induktīvo bāzi un apskatiet, kā krāsot (n+1)-o punktu visos iespējamos izvietojuma (attiecībā pret citiem punktiem uz taisnēm, kas vertikālas vai horizontālas un iet caur šo punktu) variantos.

VP2. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 6.maijā

VP2.1. Apskatiet gadījumus, kad d ir pāra vai nepāra skaitlis, un izmantojiet matemātisko indukciju.

VP2.2. Pierādiet, ka $\Delta OMN\sim\Delta OBA$, un izmantojiet šo līdzību.

VP2.3. Atbilde: $\frac{n(n+1)}{2}$. Definējiet x_i=i, $1\leq i\leq n$ un izmantojiet olimpiāžu matemātikā vispārzināmās formulas: $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ un $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Ar matemātisko indukciju pierādiet, ka dažādiem naturāliem $x_1,\ldots,x_n$ pastāv nevienādība $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\geq(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$.

VP3. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 7.maijā

VP3.1. Atbilde ir 907. Novērtējiet pirmo locekli (no apakšas), kā arī atrodiet iespējamās diferences vērtības, pētot, ar kādiem pirmskaitļiem tai noteikti jādalās.

VP3.2. Ņemiet n=9 un aprēķiniet tik lielu m, lai noteikti atrodas 5 zēni, kas pazīst vienas un tās pašas meitenes. Apskatiet iespējamos gadījumus atkarībā no šo pazīstamo meiteņu skaita.

VP3.3. Apzīmējiet $f(1)=a$, $a>0$, un ievietojiet dotajā vienādībā dažādas konkrētas x un y vērtības (piemēram, 1; a utt.). No iegūtajām sakarībām atrodiet a. Pēc tam ievietojot dotajā vienādībā $x = a$, iespējams atrast meklēto funkciju.

IMO. 47. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (47th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2006. gada 12. jūlijā.

IMO.1. Risinājums balstās uz lemmu: ja ΔABC virsotnes A leņķa bisektrise krusto apvilkto riņķa līniju punktā M, tad MB=MC=MI.

IMO.2. Atbilde: 1003. Risinājumam ir divas daļas – pierādīt, ka vairāk nav iespējams, un parādīt, ka 1003 trijstūri var būt.

IMO.3. Atbilde: $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$. Var izmantot identiskus pārveidojumus, lai iegūtu simetrisku nevienādību un reālos skaitļus a, b un c varētu sakārtot (tātad uzskatīt, ka $a \le b \le c$). Vēl var izmantot nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko.
Lai parādītu, ka atrastais M ir mazākais iespējamais, var pierādīt, ka tāds tas ir jau nenulles skaitļu gadījumā. Tam noder iepriekšējā risināšanas gaitā apskatīt gadījumus, kad izpildās vienādības.

IMO. Uzdevumi 2006. gada 13. jūlijā.

IMO.4. Reducējiet uzdevumu uz gadījumu x>0, y>0. Pārveidojiet to formā $2^x\left(1+2^{x+1}\right)=(y-1)(y+1)$ un apskatiet y-1 un y+1 dalīšanos ar dažādām divnieka pakāpēm.

IMO.5. Pētiet skaitļu virknes x_0, $x_1 = P(x_0)$, $x_2 = P(x_1)$ utt., kur x_0 - tāds skaitlis, ka $Q(x_0) = x_0$. Vispirms pierādiet, ka $P(P(x_0)) = x_0$.

IMO.6. Viens no risinājumiem izmanto lemmu: ja izliekta 2n-stūra laukums ir L, tad eksistē tāda mala AB un virsotne V, ka ABV laukums ir ne mazāks par $\frac{1}{n}\cdot L$.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2005”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Pieskaitiet visām izteiksmēm skaitli 2 un apskatiet 2 gadījumus: $a+b+c=0$ un $a+b+c \neq 0$

AB.A.2. a) Izmantojiet $(x-y)^2 \ge 0$

b) Izmantojiet pirmajā punktā pierādīto, apskatot dotās izteiksmes pirmā, trešā saskaitāmā summu un otrā, ceturtā saskaitāmā summu.

AB.A.3. Apskatiet polinomus *(t-a)(t-b)(t-c)* un *(t-x)(t-y)(t-z)* un pierādiet, ka eksistē tāds t, ar kuru to vērtības ir vienādas.

AB.A.4. Ieviesiet jaunu mainīgo $\sqrt{x} = y$.

AB.A.5. Pierādiet, ka $\frac{f(x,y)}{2^x} = \frac{f(x+1,y)}{2^{x+1}}$ un no tā seciniet, ka $f(x,y) = 2^x \cdot c$, c – konstante, kas nav atkarīga no x (bet var būt atkarīga no y).

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Iekrāsojiet kuba virsotnes „šaha galdiņa kārtībā”. Pierādiet, ka katrām 3 virsotnēm, kas nav visas vienā krāsā, eksistē ≥ 2 lauztas līnijas, kas savieno kuba pretējās virsotnes.

AB.K.2. Ar Dirihlē principa palīdzību pierādiet, ka var atrast 4 datorus, kurus savieno ≥ 4 „vienādas krāsas vadi”. Tālāk analizējiet atsevišķus gadījumus.

AB.K.3. Šķirojiet divus gadījumus:
1) apakšējā rindā punkti nokrāsoti pamīšus,
2) apakšējā rindā ir divi blakus esoši vienādi nokrāsoti punkti.

AB.K.4. Atbilde: n=18. Pētiet, kur beigās jāatrodas tām 2 figūriņām, kuras sākumā ir vistālāk pa labi.

AB.K.5. Ievērojiet, ka katrai netukšai skolēnu kopai atbilst kāds eksāmens. Attēlojiet šīs kopas ar nuļļu un vieninieku virknēm garumā 10.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Atrodiet līdzīgu trijstūru pārus.

AB.Ģ.2. Izdomājiet, kādas formas var būt n punktu izliektais apvalks, lai nevarētu izveidot lauztu līniju, kas krusto pati sevi.

AB.Ģ.3. Atrodiet lauztu līniju, kuras posmus var salīdzināt ar iekšējā četrstūra malām vai to summām un kura savieno A ar C. Atcerieties, ka taisnleņķa trijstūrī garums mediānai, kas vilkta pret hipotenūzu, ir puse no hipotenūzas garuma.

AB.Ģ.4. Pierādiet lemmu $\frac{AX}{XB} = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{BC \cdot \sin\beta}$, ja X – punkts uz trijstūra ABC malas AB un α, β - leņķi, kādos CX sadala leņķi ACB; tad varat pielietot to uzdevumā.

AB.Ģ.5. Atrodiet, ar kādu divu leņķu vienādību var izsacīt faktu, ka O ir uz taisnes AM. Iesakām izmantot arī M simetriskos punktus pret malām AB un AC.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Atrodiet, kādus atlikumus var dot n^3 un 3^n, dalot ar 7. Uzdevums jāpierāda „uz abām pusēm”: pirmkārt, ja $3^n \cdot n^3 + 1$ dalās ar 7; otrkārt, ja $3^n + n^3$ dalās ar 7.

AB.S.2. Apzīmējiet dotos skaitļus ar n+1; n+2; n+3;...; 2n. Noskaidrojiet, vai iespējamas vairākas vienādas lielāko nepāra dalītāju vērtības.

AB.S.3. Apzīmējot $x = \frac{a+b}{2}$ un $y = \frac{2ab}{a+b}$, iespējams iegūt vienādības $a = x \pm \sqrt{x(x-y)}$ un $b = 2x - a = x \mp \sqrt{x(x-y)}$, no kurām var izteikt prasīto, ja ir izpētīts, kādos veselos skaitļos var sadalīt reizinātājus zem saknēm.

AB.S.4. Pierādiet, ka 1) *n* ir nepāra, 2) nepilnais dalījums, dalot *n* ar nepāra kvadrātu, ir pāra skaitlis. Tātad neviens apskatāmais nepāra kvadrāts, ar kuru dala, nav starp $\frac{n}{4}$ un $\frac{n}{3}$. No šejienes novērtējiet, cik lieli šie nepāra kvadrāti var būt.

AB.S.5. Izmantojiet fiksētas *n* un *m* vērtības, lai iegūtu jaunus nosacījumus. Izmantojiet pirmskaitli p un iegūtos nosacījumus, lai pierādītu, ka eksistē bezgala daudz tādu *k*, ka $f(k) = k$. Nofiksējiet n, lai pierādītu, ka vienmēr $f(t) = t$.

BW. 16.matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2005”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Pierādiet, ka (a_n) ir ierobežota virkne. Tā kā tās locekļu ir bezgalīgi daudz, tad vismaz viena vērtība tiks pieņemta bezgalīgi daudz reizes.

BW.A.2. Nevienādība identisku pārveidojumu ceļā viegli pārveidojama par $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\ge\frac{27}{8}$. Izmantojiet vienādību $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$ un nevienādību starp nenegatīvu skaitļu vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko.

BW.A.3. Tā kā visi virknes locekļi pozitīvi, tad $a_{k+2}>a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}$, no kurienes var iegūt $\frac{1}{a_k a_{k+2}}<\frac{2}{a_k a_{k+1}}-\frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}}$.

BW.A.4. Parādiet, ka der $P(t)\equiv t$ un, ja P(t) ir polinoms, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, tad polinoms $Q(t)\equiv(P(t))^2+1$ arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

BW.A.5. Aizstājiet saucējus ar 2a+1, 2b+1, 2c+1 un atbrīvojieties no saucējiem.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Izdaliet n ar k ar atlikumu: $n=q\cdot k+r, 0\le r<k$ un pierādiet, ka katra atsevišķi ņemta kārts atgriežas sākotnējā pozīcijā vai nu pēc 2q gājieniem, vai pēc 2q+2 gājieniem, tātad pēc 2q(q+1) gājieniem visas kārtis vienlaicīgi būs sākuma pozīcijās. Pierādot izšķir divus gadījumus: $i\le r$ un $r<i\le k$.

BW.K.2. Šķirojiet gadījumus atkarībā no tā, kāds ir mazākais nuļļu skaits vienā rindiņā.

BW.K.3. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) Jāparāda, ka ar 48 gājieniem režģi var nokrāsot; 2) Jāpierāda, ka ar mazāk kā 48 gājieniem nepietiek.

BW.K.4. Izmantojiet rekurento sakarību metodi, aplūkojiet arī taisnstūrus ar vienu izgrieztu stūra rūtiņu.

BW.K.5. Atbilde: n=11. Lai pierādītu, ka šī vērtība der, sadaliet M dalītājus piecās grupās pa trim tā, lai katrā grupā visu skaitļu reizinājums būtu m.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Atcerieties faktu, ka taisne, kas iet caur riņķa līniju centriem, ir perpendikulāra taisnei, kas iet caur riņķa līniju krustpunktiem. To izmantojot, var reducēt uzdevumu uz tādu, ka jāpierāda: iepriekšminētā taisne ir leņķa ACB bisektrise. Šo var pierādīt, ja pierāda, ka riņķa līniju krustpunkts, kas nav C, atrodas vienādos attālumos no CA un CB.

BW.Ģ.2. Atlieciet četrstūra virsotņu projekcijas uz MN un izmantojiet vienādos nogriežņus, lai atrastu vienādus taisnleņķa trijstūrus. Izmantojiet tos, lai pierādītu, ka AP=BQ, un no tā izsakiet prasīto.

BW.Ģ.3. Lai pierādītu, ka ar mazāk nepietiek, izvēlieties punktus, starp kuriem varat novērtēt attālumus, un parādiet, ka nevar pārklāt divus no šiem punktiem ar vienu riņķi, tātad vajag vismaz tik riņķus, cik punktus esat izvēlējušies.
Lai pierādītu, ka ar attiecīgo skaitu pietiek, parādiet, ka taisnstūri var pārklāt ar šādu skaitu četrstūru, kurus katru var pārklāt ar riņķi.

BW.Ģ.4. Izmantojiet homotētiju ar centru B un koeficientu $\frac{1}{3}$.

BW.Ģ.5. Atrodiet zīmējumā riņķa līnijas, kas iet caur dažiem no dotajiem 4 punktiem, perpendikulu pamatiem un H, un padomājiet par to radikālajām asīm.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Izsakiet q kā pirmskaitļu reizinājumu $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$ un pierādiet: q_i -1 dalās ar p, ja $1 \le i \le k$.

BW.S.2. Izsakiet $y_n = 2x_n - 1$, iegūstiet $y_n = y_{n-1} \cdot y_{n-2}$ (n>1) un apskatiet, kādā gadījumā visi y_{3n} ir kvadrāti.

BW.S.3. Izsakiet $x = 2^s \cdot x_1$ un $y = 2^t \cdot y_1$, kur x_1 un y_1 – nepāra naturāli skaitļi, un apskatiet gadījumus, kad s>t un s=t.

BW.S.4. Tas ir iespējams. Izmantojiet vienādību $5^2 = 3^2 + 4^2$ un no tās pakāpeniski konstruējiet līdzīgas ar 3; 4; 5; ... kvadrātiem labajā pusē.

BW.S.5. Atbilde ir $n = 2^x \cdot 3^y$, kur x un y ir nenegatīvi veseli skaitļi un $y \le x \le 2y$.

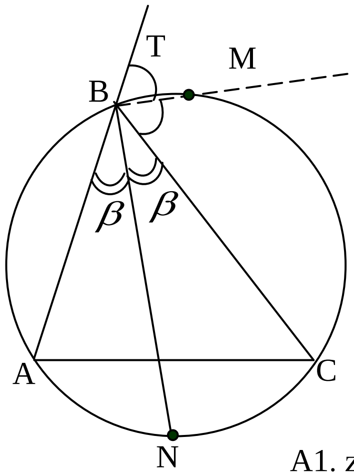
Atrisinājumi

S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. Nē. Tā kā visām parabolām zari vērsti ”uz augšu”, tad *a* > 0, b > 0, c > 0. Bet tad neviena no parabolām nevar krustot ordinātu asi (kur x = 0) punktā, kurā y < 0.

S.9.2. Novelkam arī iekšējā leņķa bisektrisi, kas krusto riņķa līniju punktā N. Tā kā $\cup AN = 2\beta = \cup NC$, tad N ir $\cup AC$ viduspunkts.



A1. zīm.

Tā kā

$$\angle MBN = \angle MBC + \angle CBN = \frac{1}{2}\angle TBC + \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}(\angle TBC + \angle CBA) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ =$$

$= 90^\circ$, tad M un N ir diametrāli pretēji punkti. Tātad $\cup NAM = \cup NCM$. Atņemot no šīs vienādības vienādību $\cup AN = \cup NC$, iegūstam $\cup AM = \cup CM$, k.b.j.

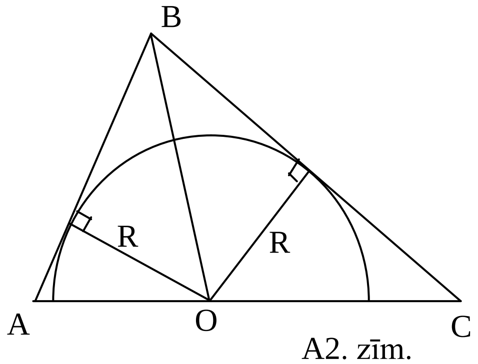
S.9.3. Ja p = 2, tad $p^4 - 1 = 15$. Ja p > 2, tad p – nepāra skaitlis. Ievērojam, ka

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1).$$

Skaitļi p - 1 un p + 1 ir divi viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 2, bet otrs ar 4; p^2+1 ir pāra skaitlis. Tāpēc p^4-1 dalās ar $2\cdot 4\cdot 2 = 16$.

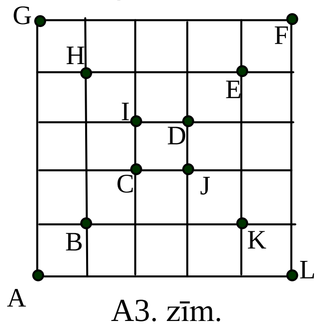
S.9.4. Ievērosim, ka $L(ABC) = L(ABO) + L(CBO) = \frac{1}{2}AB\cdot R + \frac{1}{2}BC\cdot R =$ $= \frac{1}{2}(AB + BC)\cdot R$ un $L(ABC) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)\cdot r$.

No abu laukuma izteiksmju vienādības seko $\frac{r}{R} = \frac{AB + BC}{AB + BC + CA} > \frac{AB + BC}{(AB + BC) + (AB + BC)} = \frac{1}{2}$, k.b.j. (Skat. A2. zīm.).

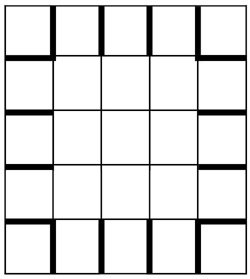


A2. zīm.

S.9.5. Atbilde: Ar 8 gājieniem. Risinājums sastāv no divām daļām. Pirmkārt: parādīt, ka ar 8 gājieniem var pārkrāsot visas rūtiņu kontūras; otrkārt: pierādīt, ka ar mazāk gājieniem nepietiek. Pirmkārt: viegli redzēt, ka prasītais sasniedzams, nokrāsojot kvadrātus, kuru diagonāles ir AE; AD; CF; BF; HL; IL; JG; KG (skat. A3. zīm.).



A3. zīm.



A4. zīm.

Otrkārt: viegli saprast, ka ar vienu gājienu var nokrāsot augstākais divus no A4. zīm. izceltajiem 16 nogriežņiem. Tāpēc nepieciešami vismaz $\frac{16}{2}=8$ gājieni.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Ja punkts atrodas uz x ass, tad y vērtība tajā ir 0 un x vērtība sakrīt ar šī punkta atšķeltā nogriežņa garumu (vai garumu ar „-„ zīmi). Ja punkts atrodas uz y ass, tad x vērtība tajā ir 0 un y vērtība sakrīt ar šī punkta atšķeltā nogriežņa garumu (vai garumu ar „-„ zīmi). Ja dotajā vienādojumā ievietojam punktu (a;0) un (0;b) vērtības, iegūstam $\frac{a}{a}+\frac{0}{b}=1$ un $\frac{0}{a}+\frac{b}{b}=1$. Katra punkta koordinātas apmierina doto vienādojumu, tātad punkti atrodas uz uzdevumā minētās taisnes.

No šī uzdevuma varam mācīties, ka arī pārbaude var būt pilnvērtīgs atrisinājums.

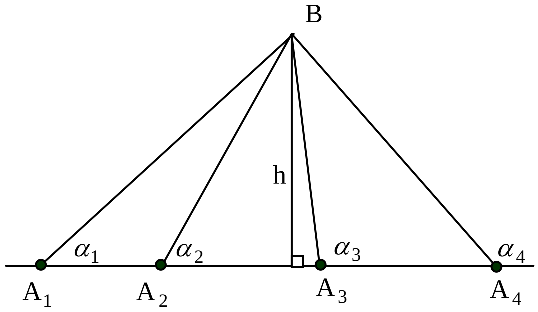
S.10.2. Atbilde: nē.

Pierādījums: ja $x^2+y^2 = 13xy$, tad $\left(\frac{x}{y}\right)^2-13\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+1=0$ un $\frac{x}{y}=\frac{13}{2}\mp\frac{\sqrt{165}}{2}$.

Bet $\sqrt{165}$ ir iracionāls skaitlis, tāpēc arī iegūtās $\frac{x}{y}$ vērtības ir iracionālas – pretruna.

S.10.3. Atceramies, ka trijstūrī ABC AB=2RsinC, kur R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss. Tāpēc $R_{12}=\frac{BA_2}{2\sin\alpha_1}=\frac{h}{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$; līdzīgi $R_{34}=\frac{h}{2\sin\alpha_3\sin\alpha_4}$;

$R_{13} = \dfrac{h}{2\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}$ un $R_{24} = \dfrac{h}{2\sin\alpha_2 \sin\alpha_4}$. No tā seko vajadzīgais. (Ievērojam, ka punktu kārtība uz taisnes nav svarīga.)



A5. zīm.

S.10.4. Tā kā $(b-c)^2 \geq 0$, tad $b^2 + c^2 \geq 2bc$.

Tāpēc $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc = a^2 + \dfrac{2}{a}$. Tāpēc pietiek pierādīt, ka $a^2 + \dfrac{2}{a} \geq a + \dfrac{1}{a} + 1$ jeb $a^2 - a - 1 + \dfrac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a^2-1)(a-1)}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)^2(a+1)}{a} \geq 0$, kas ir acīmredzams.

S.10.5. Atbilde: n = 11

Risinājums. Apzīmēsim aktīvistus ar A; B; C; D; E; F. Desmit komisiju piemērs AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE parāda, ka jābūt n>10. Tiešām, neviena no visām 10 komisijām nesatur F, tātad F nesatur arī to apvienojumi.

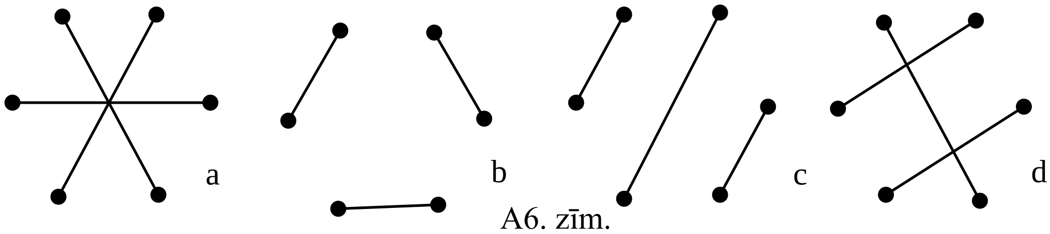
Tagad parādīsim, ka vērtība n=11 der. Dosim divus risinājumus.

1.risinājums. Sadalām visas komisijas 5 grupās tā, lai katrā grupā būtu trīs komisijas, kas kopā satur visus 6 aktīvistus:

AB, CF, DE
AC, BD, EF
AD, BF, CE
AE, BC, DF
AF, BE, CD.

No jebkurām 11 komisijām atradīsies 3, kas ir vienā grupā (jo $2 \cdot 5 = 10 < 11$), un tās kopā saturēs visus aktīvistus.

2.risinājums. Apzīmēsim katru aktīvistu ar punktu regulāra sešstūra virsotnē, iespējamās komisijas – ar taišņu nogriežņiem, kas šos punktus savieno. Ievērosim, ka pavisam ir 15 nogriežņi. Pieņemsim: no visiem 15 nogriežņiem ir izdzēsti 4, un starp atlikušajiem 11 nogriežņiem nevar atrast nevienu 3 nogriežņu komplektu, kas pa divi savieno visus 6 punktus. Apskatīsim tikai dažus iespējamos 3 nogriežņu komplektus. Ja mūsu pieņēmums ir pareizs, mēs varam vienlaicīgi izjaukt visus šos 3 nogriežņu komplektus, izdzēšot 4 līnijas. Saskaitīsim, cik 3 nogriežņu komplektus, kādi parādīti zīmējumā A6., var izveidot.



A6. zīm.

Katru reizi, kad kādu figūru pagriež ap centru par 60° un pa pāriem tiek

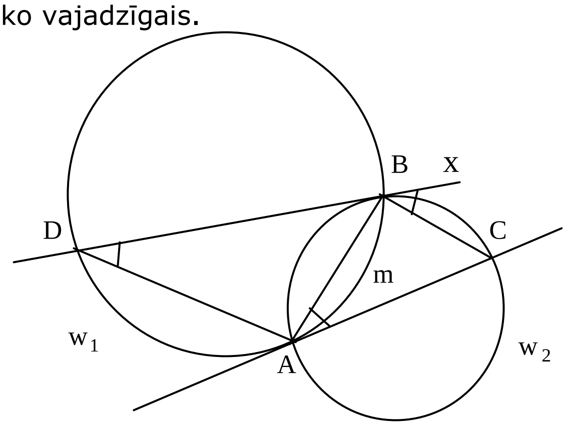
savienoti citi punkti, ir iegūts jauns 3 nogriežņu komplekts. No zīmējumā parādītajām figūrām varam iegūt: no a – 1, no b – 2 un no c un d – 3 komplektus, kopā 9. Katra garā diagonāle ietilpst vienā a tipa, vienā c tipa un vienā d tipa komplektā. Tātad garās diagonāles izdzēšana „sabojā" trīs komplektus. Malas izdzēšana sabojā divus komplektus (b un c tipa), bet īsās diagonāles izdzēšana – vienu komplektu (d tipa). Turklāt, tā kā ir **tikai viens** a tipa komplekts, tad **tikai pirmās** garās diagonāles izdzēšana sabojā trīs komplektus – nākošo garo diagonāļu izdzēšanas (ja tādas dzēš) sabojā katra pa augstākais diviem jauniem komplektiem.
Tātad 4 nogriežņu izdzēšana var izbojāt augstākais 3+2+2+2=9 no apskatāmajiem komplektiem, turklāt tas var notikt tikai pie nosacījuma, ka tiek dzēstas **tikai garās diagonāles un malas**. Tāpēc, lai sabojātu visus d tipa komplektus, jādzēš visas 3 garās diagonāles; tad atliek vēl dzēst vienu malu. Bet vienas malas dzēšana nevar sabojāt abus b tipa komplektus.
Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un ar 4 nogriežņu izdzēšanu nevar sabojāt pat visus 9 mūsu apskatītos komplektus (nemaz nerūpējoties par citiem).

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Apzīmēsim taišņu vienādojumus ar $y = kx + b_1$ un $y = kx + b_2$. Tad punktu A un B abscisas ir vienādojuma $x^2 = kx + b_1$ saknes, bet punktu C un D abscisas ir vienādojuma $x^2 = kx + b_2$ saknes. Pēc Vjeta teorēmas $x_A + x_B = k$ un $x_C + x_D = k$, tātad $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_C + x_D}{2}$. Tāpēc AB un CD viduspunktiem ir vienādas abscisas, no kā seko vajadzīgais.

S.11.2. Atbilde: 16 komisijas. Risinājums sastāv no divām daļām. Pirmkārt: parādīt, ka ar atrasto komisiju skaitu vēl izpildās visi nosacījumi, otrkārt: pierādīt, ka lielākam komisiju skaitam tie vairs neizpildās.
Pirmkārt: var ņemt kopas $\{A; B; C; D; E\}$ visas iespējamās apakškopas, kas satur aktīvistu A; tādu ir $2^4 = 16$, jo tās viena no otras atšķiras ar 4 aktīvistu B; C; D; E iekļaušanu/neiekļaušanu.
Otrkārt: tā kā pavisam ir $2^5 = 32$ apakškopas (viena no tām – tukša), tad tās var sadalīt 32:2 = 16 pāros tā, ka neviena pāra apakškopām nav kopīgu locekļu un tās abas kopā satur visus 5 aktīvistus. Ja tiks veidotas vairāk nekā 16 komisijas, tad divas no tām būs no viena pāra, un tām nebūs kopīgu locekļu.

S.11.3. No hordas – pieskares leņķa un ievilkta leņķa īpašībām $\angle XBC = \frac{1}{2} \cup BC = \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BmA = \angle \mathrm{BDA}$. No tā un no kāpšļu leņķu īpašībām seko vajadzīgais.



A7. zīm.

S.11.4. Apskatām trijstūri, kura divu leņķu lielumi ir α un β. Tad trešā leņķa lielums ir $\gamma+\delta+90^o$, tāpēc trijstūris ir platleņķa. No sinusu teorēmas tā malu garumi ir $2R\sin\alpha$; $2R\sin\beta$; $2R\sin(\alpha+\beta)$.

No kosinusu teorēmas:

$$(2R\sin(\alpha+\beta))^2 > (2R\sin\alpha)^2 + (2R\sin\beta)^2, \text{ tāpēc}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta) > \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq 2\sin\alpha\sin\beta$$

Līdzīgi iegūstam

$$\sin^2(\beta+\gamma) > 2\sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin^2(\gamma+\delta) > 2\sin\gamma\sin\delta$$

$$\sin^2(\delta+\alpha) > 2\sin\delta\sin\alpha.$$

Sareizinot šīs 4 nevienādības un velkot kvadrātsakni, iegūstam vajadzīgo.

S.11.5. Atbilde: nē, neeksistē. Risinājums. Pieņemsim, ka tāds skaitlis M eksistē. No tā jāvar iegūt M_1, kas dalās ar 10000; tāpēc M satur vismaz 4 nulles. No M jāvar iegūt arī skaitli $\overline{abcdefgh}$, kas dalās ar 99999. Ievērojam, ka $\overline{abcdefgh} = \overline{abc}\cdot 10^5 + \overline{defgh} = \overline{abc}\cdot 99999 + (\overline{abc} + \overline{defgh})$, tāpēc $\overline{abc}+\overline{defgh}$ jādalās ar 99999.

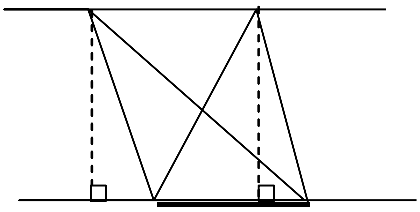
Tā kā $\overline{abc}+\overline{defgh} < 2\cdot 99999$, tad jābūt $\overline{abc}+\overline{defgh} = 99999$. Tāpēc $d\neq 0$, $e\neq 0$ un *a* + *f* = *b* + *g* = *c* + *h* = 9. Bet tā nevar būt, jo vismaz 4 no cipariem a; f; b; g; c; h ir 0.

S.12. Divpadsmitā klase

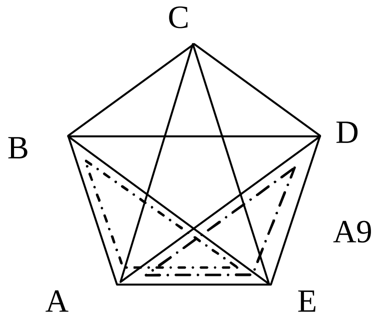
S.12.1. Jā. Doto nevienādību $|a-b|<c$ var izteikt kā $-c<a-b<c$. Šīs nevienādības ir ekvivalentas sistēmai $\begin{cases} a-b<c \\ -a+b<c \end{cases}$. Apvienojot šo sistēmu ar otru sākumā doto nevienādību, iegūstam $\begin{cases} a-b<c \\ b-a<c \\ c<a+b \end{cases}$, kas reducējas par $\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$. Uz to pašu tādā pašā ceļā reducējas pierādāmās nevienādības.

S.12.2. Nē. Viens no trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem $7^x\cdot 2^y - 1$, $7^x\cdot 2^y$ un $7^x\cdot 2^y + 1$dalās ar 3. Tā kā tas nav $7^x\cdot 2^y$, tad viens no abiem apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 3. Tā kā tas ir vismaz $7^1\cdot 2^1 - 1 = 13$, tad tas nav pirmskaitlis.

S.12.3. Vispirms pierādīsim, ka AC||DE. Apskatot zīmējumu A8, viegli saprast, ka diviem trijstūriem, kam kopēja viena mala un pretējās virsotnes atrodas uz taisnes, kas paralēla šai malai, ir vienādi laukumi.



A8. zīm.



A9. zīm.

Ja patvaļīgas figūras F laukumu apzīmējam ar L(F), tad no dotā seko L(AED)=L(AEB)=L(ACB)=L(DCB)=L(DCE); bet no L(AED)=L(DCE) seko AC||DE. To vieglāk saprast apskatot zīmējumu A9. Tātad DCD_1E un $DCBC_1$ ir paralelogrami; tātad $BC_1=CD=ED_1$. No $BC_1=ED_1$ seko vajadzīgais.

S.12.4. Atbilde: nepāra naturāliem n.

Risinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, parādīt, ka nevienam pāra n polinoms ar tādu īpašību neeksistē; otrkārt, parādīt, ka katram nepāra n tāds polinoms eksistē.

Pirmkārt: pieņemsim, ka n ir pāra skaitlis un šāds polinoms P(t) eksistē. Tad patvaļīgam $a \neq 0$ pie $x = a$ iegūstam $P\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^n - \frac{1}{a^n}$ un pie $x = -\frac{1}{a}$ iegūstam $P\left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{-\frac{1}{a}}\right) = \left(-\frac{1}{a}\right)^n - \frac{1}{\left(-\frac{1}{a}\right)^n}$ jeb (tā kā n ir pāra skaitlis) $P\left(-\frac{1}{a} + a\right) = \frac{1}{a^n} - a^n$. Tā kā abas nupat iegūtās vienādības izsaka polinoma vērtību vienā un tai pašā punktā, tad $a^n - \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} - a^n$ un $2a^n = \frac{2}{a^n}$, no kurienes $a^{2n} = 1$. Skaidrs, ka tas nav spēkā vienlaicīgi visiem apskatāmajiem a. Iegūta pretruna.

Otrkārt: parādīsim, ka katram nepāra naturālam n šāds polinoms P_n eksistē. Viegli saprast, ka pie n = 1 der $P_1(t) = t$. Pie n = 3 der $P_3(t) = t^3 + 3t$. Tiešām, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) + \left(3x - \frac{3}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ Mēs apgalvojam: ja $P_n(t)$ un $P_{n+2}(t)$ apmierina uzdevuma prasības nepāra skaitļiem n un n + 2, tad $P_{n+4}(t) = \left(t^2 + 2\right) \cdot P_{n+2}(t) - P_n(t)$ apmierina uzdevuma prasības nepāra skaitlim n + 4. Tiešām,

$$P_{n+4}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right) \cdot \left(x^{n+2} - \frac{1}{x^{n+2}}\right) - \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) =$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^{n+2} - \frac{1}{x^{n+2}}\right) - \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+4} - \frac{1}{x^{n+4}}$$

S.12.5. Pavisam tiek izspēlētas $C_{28}^2 = \frac{28 \cdot 27}{2} = 378$ spēles. Tā kā $378 \cdot \frac{3}{4} = 283{,}5$, tad vismaz 284 spēles beidzās neizšķirti. Tāpēc turnīrā pavisam izcīnītas ne vairāk kā 378 – 284 = 94 uzvaras un piedzīvoti ne vairāk kā 94 zaudējumi.

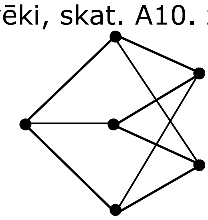
Aprēķināsim katrai komandai starpību starp tās uzvaru skaitu un zaudējumu skaitu. Pieņemsim, ka turnīra beigās visām komandām ir dažāds punktu

skaits; tad visām 28 aprēķinātajām starpībām jābūt dažādām. (Paskaidrosim to. Iedomāsimies, ka par uzvaru komandai piešķir 1 punktu, par neizšķirtu – 0, par zaudējumu piešķir -1 punktu. Punktu summu vienādība no tā nemainās, visām komandām galā būs par 27 punktiem mazāk. Tagad komandas iegūto punktu summa ir vienāda ar starpību starp tās uzvaru skaitu un zaudējumu skaitu. Tāpēc, ja punktu skaiti ir dažādi, tad arī šīs starpības ir dažādas.) Tāpēc ne vairāk kā viena no tām ir 0, un ir vismaz 27 nenulles starpības. Starp tām var izvēlēties vai nu ≥ 14 pozitīvas, vai ≥ 14 negatīvas. Pieņemsim, ka var atrast 14 pozitīvas starpības; otrs gadījums ir pilnīgi „simetrisks".
Ievērosim, ka katrai komandai nav mazāk uzvaru nekā viņai aprēķinātā starpība. Tāpēc apskatāmajām 14 komandām kopā nav mazāk par $1+2+\ldots+14=(14\cdot 15)\cdot\frac{1}{2}=105$ uzvarām (saskaitījām četrpadsmit mazākos naturālos skaitļus). Tā ir pretruna ar sākumā aprēķināto, ka turnīrā nav vairāk par 94 uzvarām.
Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, k.b.j.

R. Rajona olimpiāde

R.9. Devītā klase

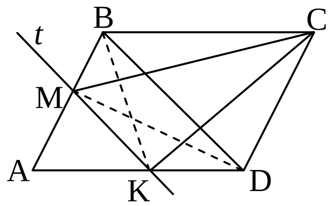
R.9.1. To, ka var būt 6 cilvēki, skat. A10. zīm.



A10. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais skaits. Apzīmēsim ar A vienu cilvēku, ar B, C, D – viņa draugus. Tā kā B nevar draudzēties ne ar C, ne D, tad ir vismaz vēl divi citi cilvēki – B draugi, no kurienes seko vajadzīgais.

R.9.2. Tā kā ΔKDC un ΔKDB ir kopīgs pamats KD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tad L(KDC) = L(KDB). Līdzīgi L(BMC) = L(BMD).



A11. zīm.

Bet ΔKDB un ΔBMD ir kopīgs pamats BD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tāpēc L(KDB) = L(BMD). No šīm vienādībām seko vajadzīgais.
(Speciālajā kvadrāta gadījumā vajadzīgais seko arī, piemēram, no simetrijas dēļ spēkā esošās vienādības $\Delta BMC=\Delta DKC$.)

R.9.3. Pārrakstām sistēmu formā

$$\begin{cases}[x]+\{y\}=[z]+\{z\}\\ [y]+\{z\}=[x]+\{x\}\\ [z]+\{x\}=[y]+\{y\}\end{cases}$$

Tā kā skaitlis viennozīmīgi nosaka savu veselo daļu un daļveida daļu, tad no šejienes seko [x] = [y] = [z] un {x} = {y} = {z}, tātad x = y = z. No otras puses, skaidrs, ka jebkurš vienādu skaitļu trijnieks (a;a;a) der par atrisinājumu.

R.9.4. No uzdevumā dotajām pēdējām 4 prasībām seko, ka 2x-5 dalās ar 5; ar 7; ar 9; ar 11 (piemēram, 2x – 5 = 2(x + 1) – 7 dalās ar 7 utml.). Tā kā 5; 7; 9; 11 pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi, tad 2x – 5 dalās ar $5\cdot7\cdot9\cdot11=3465$. Tā kā $1\le x\le 2006$, tad $-3\le 2x-5\le 4007$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet 2x – 5 = 0 naturālam x nav iespējams, tāpēc 2x – 5 = 3465 un x = 1735.

R.9.5. Uzvar Gunārs.

Tā kā pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999, tad zaudē tas, kurš uzraksta vienu no šiem skaitļiem. Pieņemsim, ka zaudētājs uzraksta 500. Tas tiek darīts tāpēc, ka citu iespēju (izņemot varbūt rakstīt 999) viņam nav. Tas nozīmē, ka visi skaitļi 1; 2; 3; ...; 499 jau ir uzrakstīti (citādi varētu rakstīt mazāko vēl neuzrakstīto no tiem) un tātad arī divas reizes lielākie skaitļi 502; 504; ... 998 ir uzrakstīti; no tā savukārt seko, ka arī 503; 505; ...; 997 ir jau uzrakstīti. Savukārt 999 vēl nav uzrakstīts (citādi spēle būtu beigusies jau ātrāk) un arī 501 vēl nav uzrakstīts (citādi jau iepriekš būtu uzrakstīts 500, un spēle būtu beigusies ātrāk). Tātad brīdī, kad zaudētājs uzrakstījis 500, uz tāfeles atrodas 997 skaitļi (ieskaitot 500). Tāpēc skaitli 500 uzraksta sācējs, proti, Dzintars. Tāpēc viņš zaudē.

Gadījumu, ja „zaudējošais gājiens” ir 999 uzrakstīšana, analizē līdzīgi.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Visiem cipariem, izņemot pirmo, jābūt 1; 3; 7; 9. No šiem cipariem var sastādīt 10 pirmskaitļus 11; 13; 17; 19; 31; 37; 71; 73; 79; 97. Tātad visi tie būs atrodami meklējamā skaitlī, un vienpadsmitais pirmskaitlis būs tas, kas sāksies ar skaitļa pirmo ciparu.

Ar 1 sākas 4 augšminētie pirmskaitļi, bet beidzas 3; tāpēc 1 ir meklējamā skaitļa otrais cipars. Vislielākais iespējamais pirmais cipars ir 6 (jo 71 būs sastopams tālāk, bet 81 un 91 nav pirmskaitļi).

Ar 9 sākas 1 pirmskaitlis, bet beidzas 2; tāpēc 9 ir meklējamā skaitļa pēdējais cipars. Aiz otrā cipara lielākie iespējamie rakstāmi cipari 9 un 7. Tātad skaitlis jāmeklē formā

6197abcdefg9.

Citu devītnieku skaitlī nevar būt (aiz tiem neko nevar uzrakstīt). Tāpēc *g*=7. Izvēloties *a* un *b* iespējami lielus, iegūstam

619737cdef79.

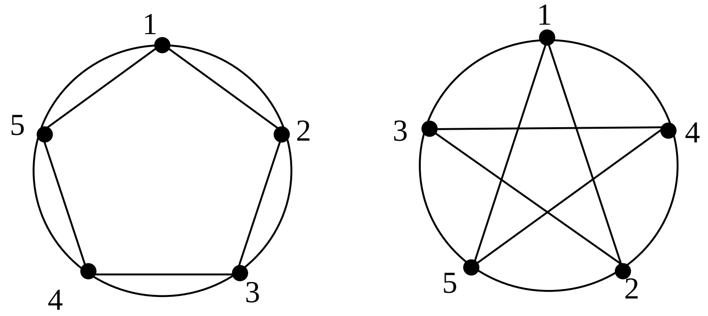
Tā kā $c\neq 9$ un $c\neq 3$ (73un79 jau sastopami citur), tad c = 1. Iegūstam formu

6197371def79.

Tā kā $d\neq 7$ un $d\neq 9$ (aiz d nebūtu ko rakstīt), liekam iespējami lielāko vērtību d = 3. Atliek e =f =1 (lai parādītos pirmskaitlis11).

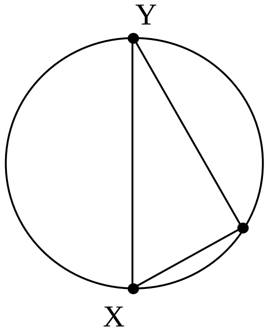
<u>Atbilde:</u> 619737131179.

R.10.2. a) Nē. Skat., piem., A12. zīm.

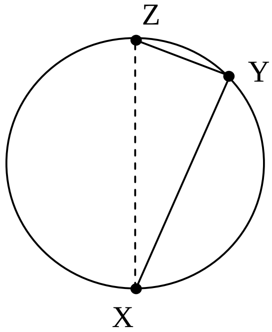


A12.zīm.

b) jā. Apvelkam ap abiem 2006-stūriem riņķa līnijas. Ja eksistē kaut viens skaitļu pāris, kas abos 2006-stūros ir diametra galapunktos, tad par trešajām virsotnēm var ņemt jebkuras ar vienādiem numuriem – abi trijstūri būs taisnleņķa (skat.A13. zīm.).
Ja tāda pāra nav, tad ņemam divus skaitļus, kas pirmajā 2006-stūrī ir diametra galapunktos (pieņemsim, tie ir x un y). Pieņemsim, ka skaitlis z otrā 2006-stūrī ir uz viena diametra ar skaitli x. Tad skaitļi x, y, z ir meklējamie: abi ar tiem sanumurētie trijstūri ir taisnleņķa, jo divas trijstūra virsotnes atrodas diametra galapunktos, bet trešā - uz riņķa līnijas(skat.A14. zīm.).



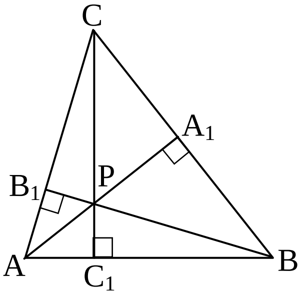
A13.zīm.



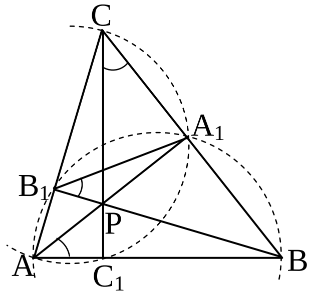
A14.zīm.

R.10.3. Varam pieņemt, ka *a* ir mazākais (vai viens no mazākajiem) no skaitļiem *a*; *b*; *c*. Tad $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{a^2+1}$. Nevienādība $\frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}$ ir pareiza. Tiešām, $(a-1)^2 \geq 0$. No tā seko $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ un $a^2 + 1 \geq 2a$.

R.10.4. Atrisinājumam ir divas daļas: pirmkārt, pierādīt – ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts, tad ap abiem dotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas; otrkārt, pierādīt – ja ap abiem dotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas, tad P ir ΔABC augstumu krustpunkts.
Pirmkārt: Ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts, tad (A15. zīm.).



A15. zīm.



A16. zīm.

$\angle AB_1B = \angle AA_1B$ (un tātad A, B, A_1, B_1 ir uz vienas riņķa līnijas) un $\angle AC_1C = \angle AA_1C$ (un tātad A, C, A_1, C_1 ir uz vienas riņķa līnijas).
Otrkārt: ja uzdevumā minētās divas riņķa līnijas eksistē, tad (A16. zīm.) ievilktu leņķu īpašības dēļ $\angle A_1CC_1 = \angle A_1AB = \angle A_1B_1P$. No šejienes seko, ka B_1, C, A_1, P ir uz vienas riņķa līnijas un tātad $\boldsymbol{\angle CA_1P + \angle CB_1P = 180^o}$. No tā, ka A, B_1, A_1, B ir uz vienas riņķa līnijas, seko, ka $\angle AB_1B = \angle AA_1B$ un tātad $\boldsymbol{\angle CB_1P = \angle CA_1P}$. No abām izceltajām vienādībām seko, ka $\angle CB_1P = \angle CA_1P = 90^\circ$, t.i., P ir ΔABC augstumu krustpunkts.

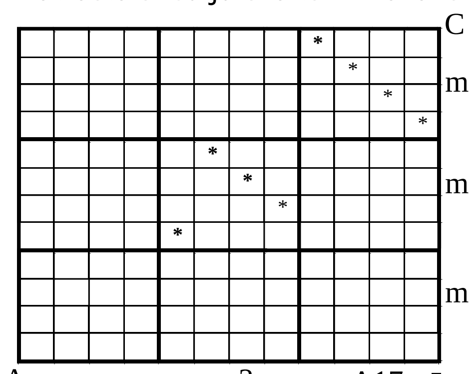
R.10.5. Salīdzinām divas monētas A un B. Pastāv divas iespējas.
1.) A un B ir dažādas masas. Tad viena no tām ir viltota, otra – īsta. Sadalām atlikušās 2004 monētas 1002 pāros un katru no tiem salīdzinām ar pāri

(A, B). Katrā svēršanā mēs noskaidrosim, cik viltoto monētu ir konkrētajā pārī. Pavisam tiks izmantotas 1 + 1002 = 1003 svēršanas.
2.) A un B ir vienādas masas. Kā iepriekš salīdzinām pāri (A, B) ar citiem monētu pāriem, kamēr atrodam pāri (C, D), kura masa atšķiras no (A, B) masas. Pieņemsim, ka (C, D) kopējā masa ir mazāka nekā (A, B) kopējā masa (otrs gadījums ir „simetrisks"). Tad A un B, kā arī visas citas līdz šim svērtās monētas ir īstas. Salīdzinām C un D. Rezultātā mēs atrodam vismaz vienu monētu no pāra (C, D), kura ir viltota, kā arī noskaidrojam, cik viltoto monētu ir pārī (C, D). Tagad izveidojam pāri (īsta monēta, viltota monēta) un turpinām kā 1. gadījumā. Pavisam tiks izmantotas 1 + 1002 + 1 = 1004 svēršanas.

R.11. Vienpadsmitā klase

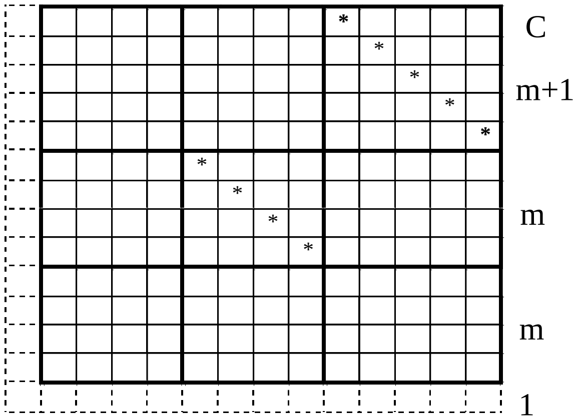
R.11.1. Apzīmēsim apskatāmos skaitļus ar n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5. Ja n (un tātad arī n + 5) nedalās ar 5, tad tieši viens no apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 5. Ja n dalās ar 5, tad neviens no skaitļiem n + 1; n + 2; n + 3; n + 4 nedalās ar 5; divi no tiem (to starpība ir 2) nedalās ar 2; vismaz viens no šiem abiem nedalās ar 3. Šis skaitlis tāpēc dalās ar kādu pirmskaitli p, p > 5; tātad $p \geq 7$. Bet no 6 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem tikai viens var dalīties ar p, ja p > 6.

R.11.2. Atbilde: vajag vismaz $\left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil$ lēdijas (mazākais veselais skaitlis, kas nav mazāks par doto daļu), un ar šo daudzumu pietiek.
Tātad meklējamais daudzums ir:
2m, ja n = 3m;
2m + 1, ja n = 3m + 1;
2m + 1, ja n = 3m + 2.
Ievērosim, ka pie $n \geq 2$ atrastais lēdiju skaits ir mazāks par n.



A17. zīm.

Atrisinājums sastāv no divām daļām. Pirmkārt: parādīt, ka ar atrasto skaitu lēdiju pietiek, otrkārt: pierādīt, ka ar mazāku skaitu lēdiju nepietiek.
Pirmkārt: parādām, ka ar atrasto skaitu lēdiju vienmēr pietiks, lai apdraudētu visas neaizņemtās rūtiņas. Tas izdarāms, kā parādīts A17. un A18. zīmējumos.

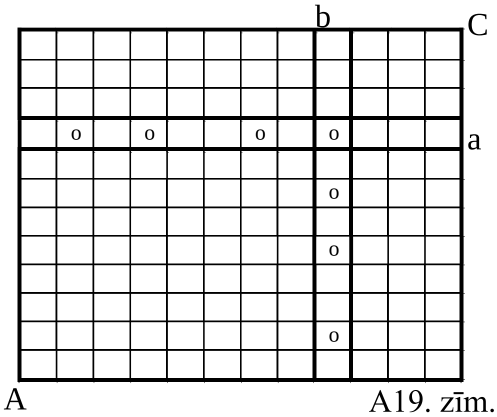


n=3m+1, n=3m+2 A18. zīm.

Otrkārt: pierādīsim, ka mazāk lēdiju nevar izvietot tā, lai apdraudētu visus brīvos lauciņus. Pieņemsim, ka ir vēl mazāk - k lēdijas, kas apmierina nosacījumus. Tad ir vismaz n-k>0 rindas (kolonnas) bez lēdijām.

Pieņemsim, ka augšējā "bezlēdiju" rindā r_1, r_2, ..., r_{n-k} ir rūtiņas, kuru kolonnās nav lēdiju, un labējā "bezlēdiju" kolonnā R_1, R_2, ..., R_{n-k} ir rūtiņas, kuru rindās nav lēdiju (ievērojam: viena r_i sakrīt ar vienu R_j). Tad ir vismaz 2(n - k) - 1 šādas rūtiņas uz dažādām diagonālēm, kas paralēlas AC.

Vieglāk to saprast, apskatot zīmējumu A19. Iedomāsimies, ka mēs no augšējās rindas sākot pārbaudām, vai tajā rindā ir kāda lēdija, un, kad atrodam pirmo rindu, kurā lēdiju nav (piemēram, rindu a), tad sākam no labās pārbaudīt kolonnas, kamēr atrodam pirmo kolonnu, kurā nav lēdiju (piemēram, kolonnu b).

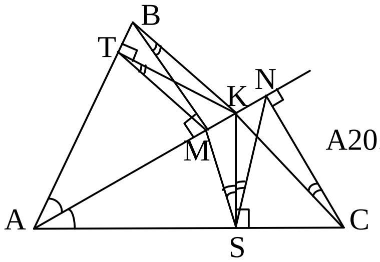


A19. zīm.

Tagad mēs zinām, ka rindiņā a rūtiņas noteikti nav apdraudētas pa horizontāli un kolonnā b rūtiņas nav apdraudētas pa vertikāli. Atrodam, kuras rūtiņas rindiņā a ir tādas, kuras nav apdraudētas arī pa vertikāli (kuru kolonnās nav lēdiju), un atzīmējam ar o, un tāpat kolonnā b atrodam, kuras rūtiņas nav apdraudētas pa horizontāli (kuru rūtiņu rindiņās nav lēdiju). Pat ja katra no mūsu iedomātajām k lēdijām atrodas savā rindiņā un savā kolonnā, tik un tā ir vismaz n-k rindiņas bez lēdijām (rūtiņas, kas nav apdraudētas pa horizontāli kolonnā b) un tikpat kolonnas bez lēdijām (n-k rūtiņas, kas nav apdraudētas pa vertikāli, rindiņā a). Tā kā viena rūtiņa sakrīt, tad kopā kolonnā b un rindiņā a ir 2(n-k)-1 rūtiņas, kuras netiek apdraudētas ne pa horizontāli, ne pa vertikāli. Tātad tām jābūt apdraudētām pa diagonāli. Redzam, ka jebkura no atzīmētajām rūtiņām var atrasties tikai uz vienas diagonāles, kas paralēla AC. Viena lēdija var apdraudēt tikai vienu tādu rūtiņu. Tāpēc jābūt

$k \geq 2(n-k)-1$, $3k \geq 2n-1$, $k \geq \dfrac{2n-1}{3}$. Tā kā k – vesels skaitlis, tad $k \geq \left\lceil \dfrac{2n-1}{3} \right\rceil$. Iegūta pretruna.

R.11.3. Novelkam perpendikulu KT pret AB. Tā kā $\angle BTK = \angle BMK$, tad ap BTMK var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle KBM = \angle KTM$. Simetrijas pēc (attiecībā pret AM) $\angle KTM = \angle KSM$, tāpēc $\angle KBM = \angle KSM$.
Tā kā BM || CN, tad $\angle KBM = \angle KCN$. Tā kā ap CNKS var apvilkt riņķa līniju (pretējo leņķu summa ir 180º), tad $\angle NCK = \angle NSK$. No šejienes seko vajadzīgais (skat. A20. zīm.).



A20. zīm.

R.11.4. a) Pieņemsim, ka $0 \leq x < y \leq 1$. No dotā $f(y) - 3y > f(x) - 3x$, tāpēc $f(y) - f(x) > 3(y-x)$.
Tā kā 0 < x + y + 1 < 3,
tad $f(y) - f(x) > (x+y+1)(y-x)$
jeb $f(y) - f(x) > xy - x^2 + y^2 - yx + y - x$,
jeb $f(y) - y^2 - y > f(x) - x^2 - x$, k.b.j.
b) Pieņemsim, ka $1 \leq x < y$. Tad no dotā $f(y) - y^3 > f(x) - x^3$,
tāpēc $f(y) - f(x) > (y-x)(y^2 + xy + x^2)$.
Tā kā $y^2 + xy + x^2 > y + x + 1$,
tad $f(y) - f(x) > (x+y+1)(y-x)$, no kurienes kā a) gadījumā seko vajadzīgais.
Ja $f(x) - x^2 - x$ ir augoša apgabalos [0; 1] un $[1; \infty)$, tad tā ir augoša arī apgabalā $[0; \infty)$.

R.11.5. Tā kā visi trīs skaitļi nav dažādi, apzīmēsim tos ar x; x; y (varbūt x = y). Reizinājums $x \cdot x \cdot y = x^2 y$ ir vesela skaitļa kvadrāts tad un tikai tad, ja y ir vesela skaitļa kvadrāts. Tātad viens no šiem skaitļiem ir 4, un abi pārējie ir savā starpā vienādi.
Ja visi skaitļi ir 4, tad katrs zēns redz divus četriniekus. Tā kā katrs zina, ka 4 ir lietots vai nu vienu, vai trīs reizes, tad katrs secina, ka viņam uz pieres ir skaitlis 4. Ja visi skaitļi nav 4, tad viens zēns redz divus vienādus skaitļus, kas nav 4; tāpēc viņš secina, ka viņam uz pieres ir 4. Katrs no abiem pārējiem redz skaitļus 4 un $x \neq 4$, tāpēc no iepriekšējā secina, ka viņam uz pieres ir x (x ir viens no skaitļiem 2; 3; 5; 6; ;7; 8).

R.12. Divpadsmitā klase

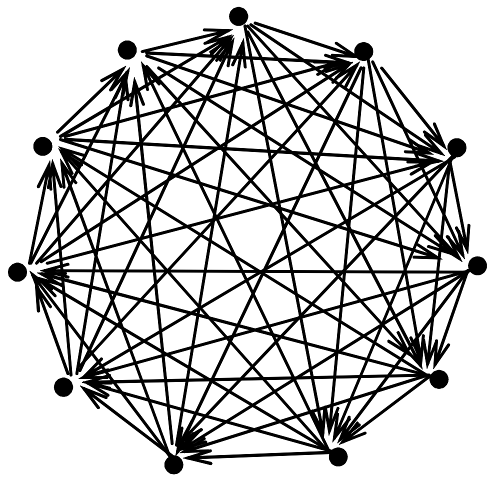
R.12.1. Apskatāmo krustpunktu abscisas ir vienādojuma $x^4 - 2x^2 + 7 = ax + b$ saknes (ja $y = ax + b$ ir novilktās taisnes vienādojums; skaidrs, ka taisne nav perpendikulāra Ox asij, jo tad tā krustotu grafiku vienā punktā; tāpēc tās vienādojums ir formā $y = ax + b$). Šo vienādojumu var pierakstīt formā

$$x^4 + 0 \cdot x^3 - 2x^2 - ax + (7 - b) = 0$$

Apzīmējot krustpunktu abscisas ar x_1; x_2; x_3; x_4, no Bezū teorēmas seko, ka kreisā puse identiski vienāda ar $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$. Atverot iekavas, iegūstam polinomu, kur koeficients pie x^3 ir $-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Pielīdzinot koeficientus pie x^3, iegūstam vajadzīgo.

R.12.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast komisiju skaitu, par ko mazāk komisiju noteikti nevar būt; otrkārt, pierādīt, ar cik komisijām vienmēr pietiek.

Pirmkārt: var gadīties, ka ir 11 deputāti, kuru „aizspriedumu struktūra” attēlota A21. zīm. (zīmējumā no katra punkta iziet bultiņas uz 5 tam sekojošiem punktiem pulksteņrādītāja kustības virzienā). Nekādus divus no tiem nevar iekļaut vienā komisijā. Tātad var gadīties, ka nepieciešamas vismaz 11 komisijas.



A21. zīm.

Otrkārt: parādīsim, ka ar 11 komisijām vienmēr pietiek. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju patvaļīgam deputātu skaitam n. Pie n = 1; 2; ...; 11 tas ir acīmredzams (katrā komisijā iekļauj vienu deputātu).

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n = 1; 2; 3; ...; m – 1, kur $m \geq 12$. Apskatīsim m deputātus. Ja katru no šiem deputātiem „ienīstu” vairāk nekā 5 citi, tad kopējais „ienaidu” skaits būtu lielāks par 5m. Tā ir pretruna, jo katram deputātam ir aizspriedumi pret augstākais 5 citiem, tāpēc „ienaidu” nav vairāk par 5m.

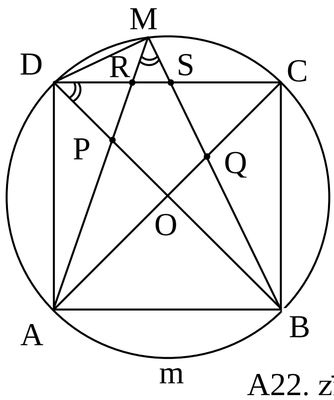
Tāpēc eksistē deputāts A, pret kuru aizspriedumu nav vairāk kā 5 citiem. Apskatīsim visus m-1 deputātus, izņemot A. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tos var sadalīt 11 komisijās vajadzīgā veidā. Deputāts A ir „nepieņemams” ne vairāk kā 10 no tām (jo ir ≤ 5 deputāti, kam ir aizspriedumi pret viņu, un ir ≤ 5 deputāti, pret kuriem viņam ir aizspriedumi). Tātad A var pievienot vismaz 1 komisijai. Induktīvā pāreja izdarīta.

R.12.3. Pārbaude parāda, ka der p = 2; 3; 5 un neder p = 7; p = 11. Pieņemsim, ka p > 11. Ja p = 3k + 1, tad $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$; ja p = 3k + 2, tad $p^2 = 9k^2 + 12k + 4$. Tātad $p^2 + 11$ dalās ar 3.

Bez tam p ir nepāra skaitlis, p = 2q + 1; tāpēc $p^2 + 11 = 4q^2 + 4q + 12$ dalās ar 4.

Tāpēc $p^2 + 11 = 12a$, kur $a \geq 12$ (jo $p^2 + 11 > 11^2 + 11 = 12 \cdot 11$). Šim skaitlim ir vismaz 11 dažādi dalītāji 1; 2; 3; 4; 6; 12; 2a; 3a; 4a; 6a; 12a. Tātad šie p neapmierina uzdevuma prasības.

R.12.4. Tā kā $\angle PMS = \frac{1}{2} \cup AmB = 45^o = \angle PDS$, tad ap PDMS var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle DMS = 90^o$ (balstās uz 180° lielo loku „lielajā” riņķa līnijā), tad arī $\angle DPS = 90^o$.



A22. zīm.

Tāpēc $\boldsymbol{PS \perp BD}$. Līdzīgi pierāda, ka $\boldsymbol{RQ \perp AC}$. No izceltajiem faktiem seko vajadzīgais, jo $BD \perp AC$.

R.12.5. Atbilde: n = 2^k, k = 0; 1; 2; … .

Risinājums. Ja k = 0, tad n = 1; vienīgā spuldze tiek ieslēgta, un tālāk nekas netiek darīts. Pie n = 2^k, $k \in N$, katram no pāra dalītājiem d = 2; 4; 8; …; 2^{k-1}; 2^k atbilstošā maiņu sērija skar katru spuldzi 0 vai d reizes (tātad kopumā neietekmē tās stāvokli), kamēr dalītājam 1 atbilstošā sērija maina katras spuldzes stāvokli 1 reizi. Tāpēc beigās visas spuldzes būs ieslēgtas.

Ja turpretī skaitlim n ir kāds nepāra pirmskaitlis p, ar kuru n dalās, tad (p+1)-ā spuldze (uzskatot S par pirmo spuldzi) tiks „aizskārta” tieši p+1 reizi (sērijās, kas atbilst n dalītājiem 1 un p) un tāpēc beigās paliks izslēgta.

V. 56. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Viens no skaitļiem x un y ir pāra, otrs – nepāra. Skaitļa 640000 nepāra dalītāji ir 1; 5; 25; 125; 625. Ievērojam, ka $640000 = 5^4 \cdot 2^{10}$. Tāpēc $1025 - 1 = 1024 = 2^{10}$, 1025 – 25 = 1000 un $1025 - 625 = 400$ ir skaitļa 640000 dalītāji, bet $1025 - 5 = 1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ un $1025 - 125 = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ - nav.

Atbilde. (1; 1024), (25; 1000), (400; 625), (625; 400), (1000; 25), (1024; 1).

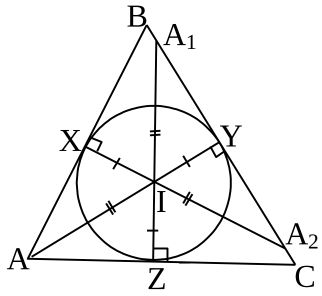
V.9.2. Pirmais atrisinājums. Tā kā intervālā (0; 1) atrodas tikai viena no kvadrātvienādojuma $f(x) = 0$ saknēm, tad abas vērtības $f(0)$ un $f(1)$ reizē nevar būt pozitīvas. Tāpēc $f(0) \cdot f(1) \le 0$. Iegūstam $q(p + q + 1) \le 0$ jeb $q^2 + pq + q \le 0$, jeb $f(q) \le 0$.

Otrais atrisinājums. Pieņemsim, ka vienādojuma $f(x) = 0$ saknes ir x_1 un x_2. Saskaņā ar Vjeta teorēmu

$$f(q) = q^2 + pq + q = x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_2 =$$
$$= x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) = [x_1(1 - x_1)] \cdot [x_2(1 - x_2)].$$

Saskaņā ar uzdevumā doto tieši viena no kvadrātiekavām ir negatīva, tāpēc to reizinājums ir ≤ 0.

V.9.3. Apzīmējam ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punktus ΔABC malām ar X; Y; Z (skat. A23. zīm.) Taisnleņķa trijstūri AXI, AZI, A_1YI un A_2YI ir vienādi savā starpā (hk), tāpēc $A_1A_2 = AX + AZ$. Līdzīgi $B_1B_2 = BX + BY$ un $C_1C_2 = CY + CZ$. Saskaitot šīs vienādības, iegūstam vajadzīgo.



A23. zīm.

V.9.4. Ja uzdevumus apzīmējam ar A; B; C; D; E; F; G; H, tad 8 skolēniem var iedot komplektus ABC; ADE; AFG; BDG; BFH, CDH, CEF, EGH. Tātad var būt 8 skolēni.

Ja kādu uzdevumu iedalītu ≥ 4 skolēniem, tad katram no tiem jāsaņem vēl 2 citi uzdevumi, un pavisam būtu vismaz $1+4\cdot 2=9$ uzdevumi – pretruna. Tātad katru uzdevumu iedeva augstākais 3 skolēniem, un pavisam tika iedoti augstākais $8\cdot 3=24$ uzdevumu teksti. Tā kā katrs skolēns saņēma trīs tekstus, tad skolēnu nav vairāk par 24 : 3 = 8.

V.9.5. Atbilde: 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0 litri.

Risinājums. To, ka minētā atbilde apmierina uzdevuma nosacījumus, pārbauda tieši. Pierādīsim, ka tā ir vienīgā. Tā kā pēc viena „cikla" ūdens sadalījums ir sākotnējais, mēs varam iztēloties, ka process notiek bezgalīgi un ir periodisks. Apskatīsim šajā bezgalīgajā periodiskajā procesā deviņu vienu otrai sekojošu pārliešanu virkni, kas sākas ar ūdens izliešanu no tā trauka T, kurā ir vismazākais procesa gaitā no trauka izlejamais ūdens daudzums; apzīmēsim šo daudzumu ar 8x. Saskaņā ar šo izvēli traukā T astoņās nākošajās liešanās tiks ieliets **vismaz** ūdens daudzums x katrā reizē.

Tā kā traukā T astoņās nākošajās liešanās kopā ielies ūdens daudzumu 8x, tad katrā no šīm 8 liešanām traukā T ielies ūdens daudzumu x. Tātad katrā traukā tai brīdī, kad no tā izlej ūdeni, ir ūdens daudzums 8x. No tā iegūstam, ka ūdens daudzums sākotnēji ir 8x; 7x; 6x; 5x; 4x; 3x; 2x; x; 0. Tā kā $8x+7x+\ldots+x+0=36$, iegūstam x = 1, no kā seko uzdevuma atbilde.

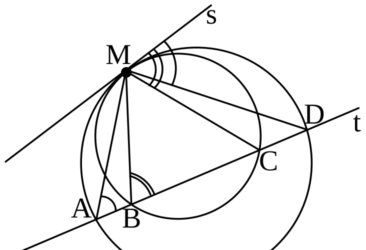
V.10. Desmitā klase

V.10.1. Ja kādai kompānijai būtu mazāk par 9 birojiem, tad tā nevarētu noorganizēt vairāk par 28 reisiem, jo no 8 elementiem var izveidot ne vairāk kā 28 pārus. Tātad katrai kompānijai ir vismaz 9 biroji, un biroju kopskaits ir vismaz $9\cdot 90=810$. Tā kā $810>8\cdot 100$, tad starp 100 pilsētām ir jābūt tādai, kurā ir vairāk nekā 8, tātad vismaz 9 biroji.

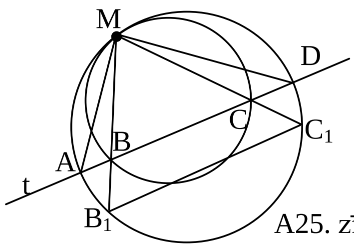
V.10.2. Skaidrs, ka $p\neq 2$, $q\neq 2$, $p\neq 3$. Ja p = 3k + 2, $k\in N$, tad p + 10=3(k+4) nav pirmskaitlis. Tāpēc p = 3k + 1, $k\in N$. Ja q = 3m + 1, $m\in N$, tad p + q + 1=3(k + m + 1) nav pirmskaitlis. Ja q = 3m + 2, $m\in N$, tad q + 10 nav pirmskaitlis. Tāpēc q = 3**.** Tad q + 4 un q + 10 tiešām ir pirmskaitļi, un jāmeklē tādi pirmskaitļi p formā p = 3k + 1, $k\in N$, ka p + 4, p + 6, p + 10 arī ir pirmskaitļi. Tieša pārbaude parāda, ka der tikai p = 7, p = 13, p = 37, p = 97.

V.10.3. 1. risinājums. Speciālā gadījumā, ja M ir loka AMD viduspunkts, apskatām taisni l, kas iet caur M un abu riņķu centriem. Tā ir perpendikulāra taisnei t, tātad krusto gan nogriezni AD, gan nogriezni BC to viduspunktos. Tādā gadījumā $\angle AMB=\angle DMC$, jo šie leņķi ir viens otram simetriski attiecībā pret l.

Vispārīgā gadījumā (kas ietver arī speciālo), novelkam punktā M abu riņķa līniju kopējo pieskari s (skat. A24. zīm.) No ievilktu leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašībām seko A24. zīm. atzīmētās leņķu vienādības. Redzams, ka $\angle CMD=$ un $\angle AMB = \angle MBC - \angle MAB$ (ārējā leņķa īpašība) = , tātad $\angle CMD = \angle AMB$.



A24. zīm



A25. zīm.

<u>2. risinājums.</u> Pagarinām MB un MC līdz krustpunktiem B_1 un C_1 ar ārējo riņķa līniju (skat. A25. zīm.) Tā kā abas riņķa līnijas ir homotētiskas ar centru M, tad B_1 un C_1 ir atbilstoši punktu B un C attēli šajā homotētijā; tātad taisne B_1C_1 ir taisnes BC attēls, tāpēc $B_1C_1 \parallel BC$. Tāpēc loki AB_1 un C_1D ir vienādi, no kā seko uz tiem balstošos ievilkto leņķu vienādība.

V.10.4. Ievērojam, ka

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}} = \\ &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \ldots + \\ &+ \left(\sqrt{2005}-\sqrt{2004}\right) + \left(\sqrt{2006}-\sqrt{2005}\right) = \\ &= \sqrt{2006} - 1 \geq 43{,}7 \end{aligned}$$

Tā kā šajā summā katrs nākošais saskaitāmais mazāks par iepriekšējo, tad uzdevuma formulējumā minēto saskaitāmo summa ir lielāka par $\frac{1}{2}S$, tātad lielāka par 21,85.

V.10.5. <u>Atbilde:</u> n = 11.

<u>Risinājums.</u> Vispirms parādīsim, ka pie n = 10 skaitļus var nokrāsot tā, lai minētā tipa atrisinājums neeksistētu. Piemēram, nokrāsojam 1; 2; 9; 10 baltus, bet 3; 4; 5; 6; 7; 8 – sarkanus. Katru trīs sarkano saskaitāmo summa ir vismaz $3 \cdot 3 = 9$, tātad nav sarkana. Savukārt katru trīs baltu saskaitāmo summa ir vismaz 11 (ja kāds no tiem ir 9 vai 10), vai no 3 līdz 6 (ja neviens no tiem nav ne 9, ne 10), tātad nav balta.

Tagad parādīsim, ka pie n = 11 minētā tipa atrisinājums noteikti eksistē. To, ka skaitlis x ir balts resp. sarkans, pierakstīsim kā x ~ b resp. x ~ s. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Šķirojam divus gadījumus.

- Skaitļi 1 un 2 ir vienā un tai pašā krāsā; varam pieņemt, ka 1 ~ s un 2 ~ s. Tā kā 1 + 1 + 1 = 3 un 1 + 1 + 2 = 4, tad 3 ~ b un 4 ~ b.
  Tad 3 + 3 + 3 = 9, tāpēc 9 ~ s; tā kā 3 + 4 + 4 = 11, tad 11 ~ s. Bet 1 + 1 + 9 = 11 pretruna.
- Skaitļi 1 un 2 ir dažādās krāsās; varam pieņemt, ka 1 ~ s un 2 ~ b. Tā kā 1 + 1 + 1 = 3, tad 3 ~ b. Tā kā 2 + 2 + 2 = 6, tad 6 ~ s; tā kā 2 + 3 + 3 = 8, tad 8 ~ s. Bet 1 + 1 + 6 = 8 – pretruna.

V.11. Vienpadsmitā klase

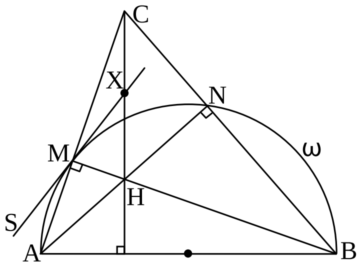
V.11.1. Attēlosim skolotājus ar m sarkaniem punktiem, bet skolnieku pārus – ar $\frac{n(n-1)}{2}$ zaļiem punktiem. Ja kāds skolotājs māca abus kādā pārī ietilpstošos skolniekus, novilksim starp atbilstošajiem punktiem līniju. No katra sarkanā punkta iziet tieši $\frac{a(a-1)}{2}$ līnijas, tāpēc līniju kopskaits ir $\frac{1}{2}\cdot m\cdot a\cdot(a-1)$. No katra zaļā punkta iziet tieši b līnijas, tāpēc līniju kopskaits ir $\frac{1}{2}\cdot b\cdot n\cdot(n-1)$. No vienādības $\frac{1}{2}\cdot m\cdot a\cdot(a-1)=\frac{1}{2}\cdot b\cdot n\cdot(n-1)$ seko vajadzīgais.

V.11.2. Pieskaitot abām dotās vienādības pusēm 1, iegūstam $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$. (Tālāk iegūsim $a_{n+2}+1=(a_{n+1}+1)^2=\left((a_n+1)^2\right)^2$ un tā uz priekšu.) Tāpēc $a_{2006}+1=(a_1+1)^{2^{2005}}$. Tāpēc $a_{2006}+1\geq 0$ un $a_{2006}\geq -1$. Parādīsim, ka a_{2006} var pieņemt jebkuru vērtību $\alpha\geq -1$. Ja $\alpha\geq -1$, tad, izvēloties $a_1=\sqrt[2^{2005}]{\alpha+1}-1$, iegūsim $a_{2006}=\alpha$. Tāpēc a_{2006} iespējamo vērtību kopa ir $[-1;\infty)$.

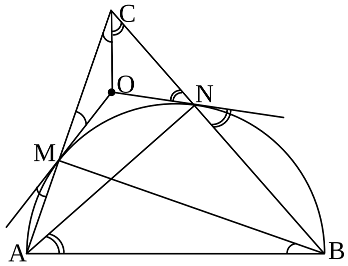
V.11.3. Vispirms atzīmēsim, ka naturāliem x un y pastāv nevienādība $xy+1\geq x+y$; tiešām, tā ir ekvivalenta ar $(x-1)(y-1)\geq 0$, kas ir patiesība. Lai izpildītos $(x+y)(xy+1)=2^z$, jābūt $x+y=2^a$, $xy+1=2^b$, kur a un b – naturāli skaitļi; saskaņā ar iepriekšējo $b\geq a$. No tā, ka xy + 1 dalās ar 2^a un x + y dalās ar 2^a, seko, ka arī $x(x+y)$ dalās ar 2^a; $(x^2+xy)-(xy+1)$ dalās ar 2^a; x^2-1 dalās ar 2^a; $(x+1)(x-1)$ dalās ar 2^a.

Ievērosim, ka LKD(x + 1; x - 1) ir vai nu 1, vai 2. Tāpēc vai nu viens no skaitļiem x + 1 un x – 1 dalās ar 2^a, vai arī viens no tiem dalās ar 2^{a-1}, bet otrs ar 2. Jebkurā gadījumā viens no skaitļiem x + 1 un x – 1 dalās ar 2^{a-1}. Tā kā no nosacījuma $x+y=2^a$ seko, ka $1\leq x\leq 2^a-1$, tad x var būt tikai šādas vērtības: $x_1=1$; $x_2=2^{a-1}-1$; $x_3=2^{a-1}+1$; $x_4=2^a-1$, kur a – naturāls skaitlis ($x=2^{a-1}-1$ der tikai pie $a\geq 2$). Atbilstošās y vērtības iegūst kā $y=2^a-x$, un $y_1=2^a-1$; $y_2=2^{a-1}+1$; $y_3=2^{a-1}-1$; $y_4=1$ (vērtība y_3 un tātad arī x_3 der tikai pie $a\geq 2$). Apkopojot redzam, ka **varbūt** der $(x;y)=(1;2^a-1)$; $(x;y)=(2^a-1;2^a+1)$; $(x;y)=(2^a+1;2^a-1)$; $(x;y)=(2^a-1;1)$, a – naturāls. Pārbaude parāda, ka šīs vērtības tiešām der; z = 2a vai z = 3a + 1.

V.11.4. Pirmkārt: pieņemsim, ka AB ir ω diametrs. Tad AN un BM ir ΔABC augstumi; apzīmēsim ΔABC augstumu krustpunktu ar H. Pieņemsim, ka pieskare, kas ω novilkta punktā M, krusto augstumu CH punktā X. Tad $\angle MCX=90^o-\angle A=\angle ABM=\angle SMA$ (ievilkts un hordas – pieskares leņķis) $=\angle CMX$, tātad ΔMXC ir vienādsānu. Tātad X atrodas uz MC vidusperpendikula, tātad (pēc Talesa teorēmas) CH viduspunktā. Līdzīgi arī ω pieskare, kas novilkta punktā N, krusto CH tā viduspunktā, tātad punktā X, un CX = NX. No MX = CX = NX seko, ka X ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs.



A26. zīm.



A27. zīm.

Otrkārt: pieņemsim, ka O ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs. Tad (skat. A27. zīm.) OC = OM = ON, tāpēc $\angle CMO = \angle MCO = \angle ABM$ un $\angle CNO = \angle NCO = \angle NAB$. Tāpēc $\angle ACB = \angle ABM + \angle BAN$ un

$$2\angle ANB = \angle ANB + \angle AMB = 180^o - \angle B - \sphericalangle + 180^o - \angle A - \sphericalangle =$$

$$= 360^o - (\angle A + \angle B + \angle C) = 180^o,$$

tāpēc $\angle ANB = 90^o$ un AB ir ω diametrs.

V.11.5. To nevar panākt nevienam n. Apzīmēsim n-stūra A virsotnes ar A_1, A_2, ... , A_n, bet centru – ar O.

Apskatīsim lielumu $\vec{S} = a_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + a_n \cdot \overrightarrow{OA_n}$, kur a_i ir virsotnē A_i ierakstītais skaitlis (i = 1; 2; ... ; n). Sākotnēji $\vec{S}$ nav nulles vektors. Izdarot pieļauto gājienu, $\vec{S}$ „izmainās" par $\vec{0}$ (jo to vektoru summa, kas savieno O ar regulāra k-stūra virsotnēm, noteikti ir $\vec{0}$), tāpēc $\vec{S}$ nekad nav $\vec{0}$. Bet, ja visās n-stūra A virsotnēs atrastos vienādi skaitļi, tad būtu $\vec{S} = \vec{0}$.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Ievērosim, ka $(1+\text{tg}x)(1+\text{tg}(45^o - x)) = (1+\text{tg}x)\left(1+\frac{1-\text{tg}x}{1+\text{tg}x}\right) =$

$= (1+\text{tg}x)\cdot\frac{2}{1+\text{tg}x} = 2$ visām pieļaujamām x vērtībām. Grupējot reizinātājus $(1+\text{tg}1^o)$ un $(1+\text{tg}44^o)$, $(1+\text{tg}2^o)$ un $(1+\text{tg}43^o)$ utt., iegūstam vajadzīgo.

V.12.2. a) Ievietojot x = y = a, iegūstam $f(a) \le 2f(a)$, tāpēc $f(a) \ge 0$. Ņemot x = 0; y = 1, iegūstam

$$0 \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(0) + f(1) = 0, \text{ tāpēc } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

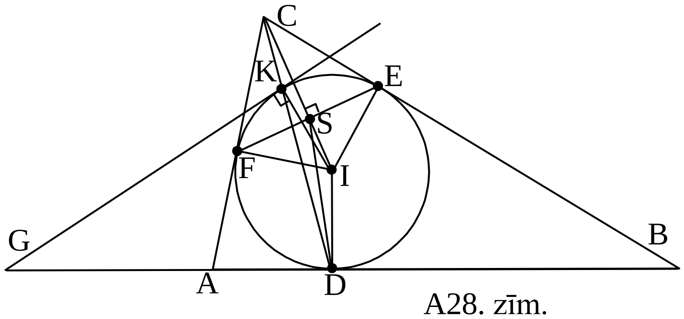
Pieņemsim, ka ir jau pierādīts, ka kādam naturālam k pastāv vienādība $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$. Tad, ņemot x = 0 un $y = \frac{1}{2^k}$, iegūstam $0 \le f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \le f(0) + f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$, tāpēc $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 0$. Tātad katram naturālam n pastāv vienādība $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$.

b) funkcija

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ ja } x - \text{racionāls skaitlis}\\ 1, \text{ ja } x - \text{iracionāls skaitlis}\end{cases}$$

apmierina visas uzdevuma prasības.

V.12.3. a) Tā kā CF = CE, tad ΔECF ir vienādsānu un tā bisektrise CS ir arī augstums. Tāpēc ES ir augstums pret hipotenūzu taisnleņķa trijstūrī CEI. Tāpēc $EI^2 = IS \cdot IC$. Tā kā $EI = DI$, tad $DI^2 = IS \cdot IC$, no kurienes $DI : IC = IS : ID$. Tāpēc $\Delta SID \sim \Delta DIC$ (kopējs leņķis I un proporcionālas to ietverošās malas).



A28. zīm.

b) Tā kā $\angle GKI = \angle GDI = 90°$, tad ap četrstūri $GKID$ var apvilkt riņķa līniju ω. No a) punkta seko, ka $\angle ISD = \angle IDC = \angle IDK = \angle IKD$. No vienādības $\angle ISD = \angle IKD$ seko, ka punkti D, K, S, I atrodas uz vienas riņķa līnijas (labi zināms vispārīgs fakts: ja $\angle XZY = \angle XTZ$ un punkti Z, T atrodas vienā pusē no taisnes XY, tad punkti X, Y, Z, T atrodas uz vienas riņķa līnijas). Šī riņķa līnija ir ω, jo ω iet caur punktiem D, I, K. Tāpēc $\angle GSI = \angle GKI = 90°$.

V.12.4. Vispirms pierādīsim, ka n + 1; n + 2; n + 3 ir kaut kādu pirmskaitļu pakāpes ar naturāliem kāpinātājiem. Pretējā gadījumā kāds no šiem skaitļiem būtu izsakāms kā reizinājums $a \cdot b$, kur $a \geq 2$, $b \geq 2$, LKD(a, b) = 1. Tā kā m nedalās ar $a \cdot b$, tad vai nu m nedalās ar a, vai arī m nedalās ar b; pieņemsim, ka m nedalās ar a. Tad $a \geq n+1$. Tā kā $a \cdot b \leq n+3$, tad $a \cdot b - a \leq 2$ jeb $a(b-1) \leq 2$. Tas iespējams tikai, ja a = 2 un b = 2; tad $a \cdot b = 4$. Ja n + 1 = 4, tad n = 3; ja n + 2 = 4, tad n = 2; ja n + 3 = 4, tad n = 1. Vērtība n = 3 neapmierina uzdevuma nosacījumus (ja m dalās ar 2 un ar 3, tad m dalās arī ar 6); pie n = 1 un n = 2 visi skaitļi n + 1; n + 2; n + 3 ir pirmskaitļu pakāpes.

Tātad n + 1; n + 2; n + 3 ir pirmskaitļu pakāpes.

Vismaz viens no šiem skaitļiem ir pāra skaitlis, tātad ir 2^x; tieši viens dalās ar 3, tātad ir 3^y. Tāpēc $2^x = 3^y \pm 1$. Šķirojam abus gadījumus:

a) $2^x = 3^y + 1$. Tā kā $2^{2t+1} = 2 \cdot 4^t = 2 \cdot (3+1)^t$, tad pie nepāra x pakāpe 2^x dod atlikumu 2, dalot ar 3; tāpēc x ir pāra skaitlis, x = 2z. Iegūstam $2^{2z} - 1 = 3^y$ un $(2^z - 1)(2^z + 1) = 3^y$. Tātad $2^z - 1$ un $2^z + 1$ ir trijnieka pakāpes vai 1; tās savā starpā atšķiras par 2, tāpēc ir 1 un 3. Tāpēc z = 1, x = 2 un mūsu apskatāmā divnieka pakāpe ir 4.

Ja n + 1 = 4, tad n = 3; jau iepriekš redzējām, ka tas neder. Ja n + 2 = 4, tad n = 2; varam ņemt m = 2. Ja n + 3 = 4, tad n = 1; varam ņemt m = 1.

b) $2^x = 3^y - 1$. Pie x = 1 nonākam pie n = 1; pieņemam, ka $x \geq 2$. Ja y – nepāra skaitlis, tad y = 2t + 1 un $3^y - 1 = 3^{2t+1} - 1 = 3 \cdot 9^t - 1 = 3 \cdot (8+1)^t - 1$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4; tā nevar būt. Tāpēc y = 2z un $2^x = (3^z - 1)(3^z + 1)$. Tāpēc skaitļi $3^z - 1$ un $3^z + 1$ ir divnieka pakāpes vai 1, kas savā starpā atšķiras par 2; tie var būt tikai 2 un 4. Tad $2^x = 8$. Ja n + 1 = 8, tad n = 7; tā kā n + 3 = 10 nav pirmskaitļa pakāpe, šī atbilde neder. Ja n + 2 = 8, tad **n = 6**; var ņemt m = 60. Ja n + 3 = 8, tad n = 5; tā kā n + 1 = 6 nav pirmskaitļa pakāpe, šī atbilde neder.

Atbilde: n = 1; n = 2; n = 6.

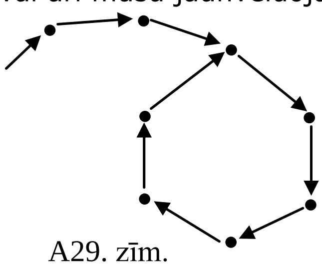
V.12.5. a) Apskatīsim vispirms izliekta daudzskaldņa gadījumu.

Sākam iet no patvaļīgas virsotnes bultiņu virzienos pa šķautnēm. Tas ir iespējams, jo no katras virsotnes iziet kāda šķautne. Tā kā virsotņu ir galīgs skaits, tad kādreiz mēs atgriezīsimies virsotnē, kurā jau esam bijuši. Šai brīdī būs izveidojies cikls, kas apejams bultiņu virzienos (skat. A29. zīm.) Šis cikls sadala daudzskaldņa virsmu divās daļās. Apskatām D – vienu no tām. Ja tajā iekšpusē nav ne citu virsotņu, ne citu šķautņu, tad tā ir skaldne, kāda mums nepieciešama. Pieņemsim, ka šīs daļas D iekšpusē atrodas virsotne V (skat. A30. zīm.)

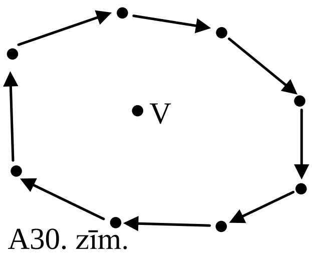
Sākam iet no virsotnes V pa šķautnēm bultiņu virzienos, kamēr

1) vai nu nonākam uz jau esošā kontūra,

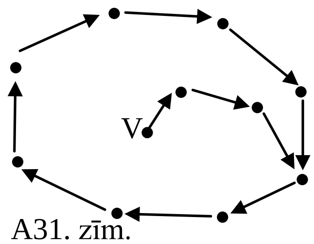
2) vai arī mūsu jaunveidojamais ceļš izveido ciklu (kā iepriekš).



A29. zīm.



A30. zīm.



A31. zīm.

Otrajā gadījumā atrastais cikls ierobežo mazāku daļu nekā D. Pirmajā gadījumā (skat. A30. zīm.) sākam iet no virsotnes V pa šķautnēm pretēji bultiņu virzieniem, kamēr nonākam kādā virsotnē, kas jau redzama A31. zīm.

Ja turpretī D iekšpusē nav citu virsotņu, bet ir šķautne, tad apskatām šo šķautni kopā ar katru no D kontūra daļām, kurās šī šķautne sadala D kontūru.

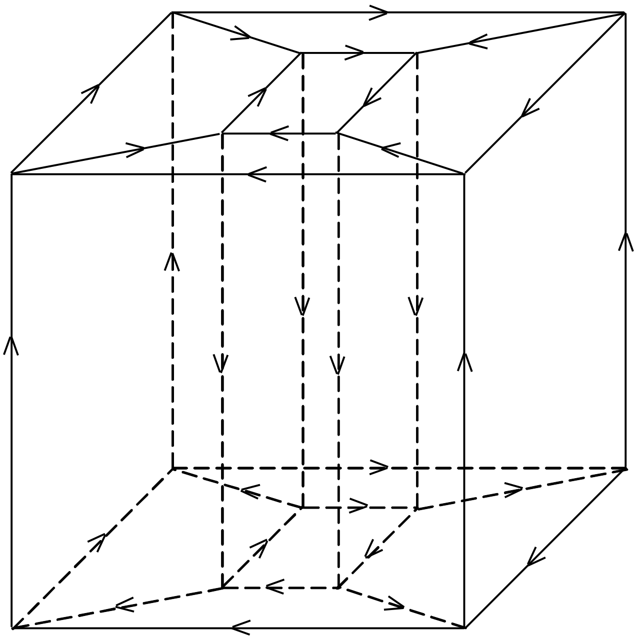
Katrā gadījumā izveidosies daļa, kas mazāka par D un apejama pa kontūru bultiņu virzienos.

Ar šo daļu rīkojamies tāpat kā iepriekš ar daļu D utt. Tā kā nevaram atrast bezgalīgi daudzas arvien mazākas daļas, kuras norobežo pa šķautnēm ejošas kontūras, tad kādreiz iegūsim daļu, kas apejama pa kontūru bultiņu virzienā un kuras iekšpusē nav ne citu virsotņu, ne citu šķautņu, t.i., iegūsim mums vajadzīgo skaldni.

Piezīme. Viegli pamanīt, ka šādas skaldnes ir vismaz divas (pa vienai katrā no tām daļām, kurās daudzskaldņa virsmu sadala pirmais atrastais cikls).

b) Ieliekta daudzskaldņa gadījumā šādu skaldni varbūt arī nevar atrast. Piemērs redzams A32. zīm. (Daudzskaldnis ir kubs ar prizmveidīgu „caurumu”.)

Piezīme. Spriedumu, kas derīgs izliektam daudzskaldnim, šoreiz nevar atkārtot, jo sākotnējais (un arī katrs nākošais) cikls var nesadalīt virsmu divās daļās, un tāpēc nav pamata apgalvot, ka katrs nākošais atrastais cikls ierobežo mazāku apgabalu nekā iepriekšējais, tāpēc mūsu aprakstītais meklēšanas process var nekad nebeigties.



A32. zīm.

A. Latvijas 33. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Septiņciparu naturāls skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8 (jo $...\overline{abc} = ...000 + \overline{abc} = ...\cdot 10^3 + \overline{abc}$).

Ja pirmie 4 cipari ir 9 un $\overline{abc} = 888$, ciparu summa ir 4·9+3·8=60. Pierādīsim, ka $\overline{abc}$ ciparu summa nevar būt lielāka par 24. Lai tā būtu lielāka par 24, pastāv šādas iespējas:

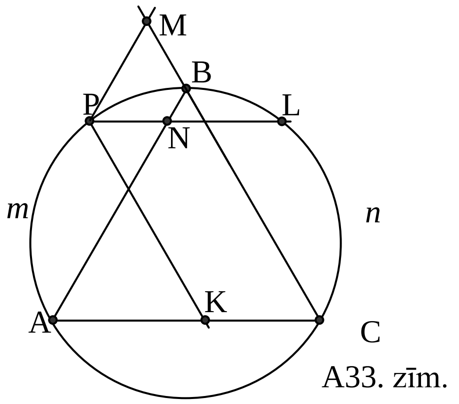
1) viens no cipariem *a*, *b*, *c* ir 9, bet divi -8,
2) divi no cipariem *a*, *b*, *c* ir 9, bet viens – 8,
3) visi cipari *a*, *b*, *c* ir 9,
4) divi no cipariem *a*, *b*, *c* ir 9, bet viens – 7.

Viegli pārbaudīt, ka neviens no šādiem skaitļiem nedalās ar 8.

A.9.2. Pieņemsim, ka pēdējais atnāca rūķītis A, bet pirmais aizgāja rūķītis B. Ja A=B, tas ir meklējamais rūķītis. Ja A≠B, tad ar K_A apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem; līdzīgi ieviešam K_B. Gan K_A, gan K_B katrā ir vismaz $n+1$ rūķītis. Tā kā $(n+1)+(n+1)>2n+1$, tad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan K_A, gan K_B; apzīmēsim to ar R. Ja kāds rūķītis X aizietu agrāk, nekā atnāca R, tad arī B būtu aizgājis agrāk, nekā atnāca R; bet tad B nebūtu saticis R – pretruna. Ja kāds rūķītis Y atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, tad arī A atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, un A nebūtu saticis R – pretruna.

No minētā seko, ka R satika visus rūķīšus.

A.9.3. No konstrukcijas seko, ka PMBN ir trapece, pie tam vienādsānu (leņķi pie pamata PM abi ir 60º). Tāpēc $\angle$**BMN=**$\angle$**BPN**.



A33. zīm.

Līdzīgi PMCK ir vienādsānu trapece, tāpēc **∠BMK=∠BCP**, un mums pietiek pierādīt, ka ∠BPN=∠BCP. Tā kā tie abi ir ievilkti leņķi, tad pietiek pierādīt, ka B ir loka PBL viduspunkts. Bet tas seko no vienādībām ◡APB=◡CLB=120º un ◡A*m*P=◡C*n*L (loki starp paralēlām hordām), atņemot tās vienu no otras.

Piezīme. No pierādītā seko, ka M, N, K atrodas uz vienas taisnes.

A.9.4. Apzīmējam vienādojuma $f(x)=0$ saknes ar x_1 un x_2, $x_1<x_2$. Tad pie $x_1<x<x_2$ pastāv nevienādība $f(x)<0$, bet pie $x>x_2$ un pie $x<x_1$ pastāv nevienādība $f(x)>0$. Tāpēc pie $x_3=x_1+0{,}1$ pastāv nevienādības $f(x_3)<0$, $f(x_3+1)<0$ un $f(x_3+2)<0$; pie $x_4=x_1-10$ pastāv nevienādības $f(x_4)>0$, $f(x_4+1)>0$ un $f(x_4+2)>0$; pie $x_5>x_2$ pastāv nevienādības $f(x_5)>0$, $f(x_5+1)>0$ un $f(x_5+2)>0$.

Tātad funkcija $F(x)=f(x)+f(x+1)+f(x+2)$ maina zīmi starp x_5 un x_3, kā arī starp x_3 un x_4, no kurienes seko vajadzīgais.

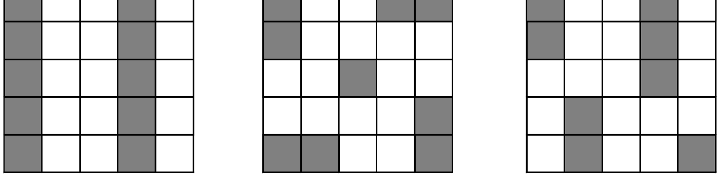
A.9.5. Atbilde: 25 skaitļus.

Risinājums. Apskatīsim skaitļus 52; 54; 56; ...; 96; 98; 100. Tie visi dalās ar 2 un neviens nedalās ar otru, jo pat lielākā skaitļa dalījums ar mazāko ir $\frac{100}{52}<2$, tātad nekādu divu apskatāmo skaitļu dalījums nav naturāls skaitlis.

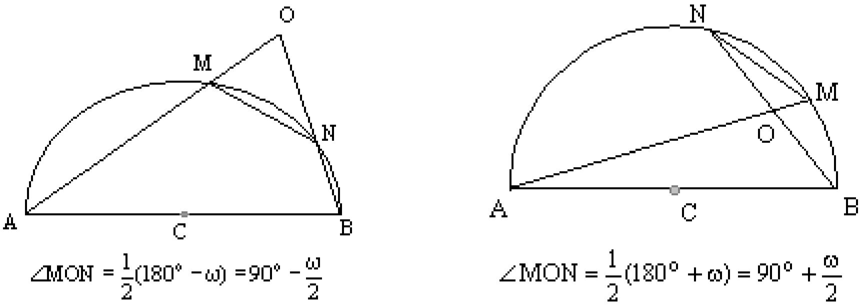
Pierādīsim, ka vairāk par 25 skaitļiem, kas apmierina uzdevuma prasības, izvēlēties nevar. Pieņemsim, ka kopa M ir kopa ar maksimālo skaitļu skaitu tajā. Ja eksistē tāds $x\in$M, ka $x\le 50$, tad $2x\notin$M; mazāko no šādiem x var aizstāt ar $2x$. (Viegli pārbaudīt, ka kopai M izvirzāmās prasības saglabājas.) Ar galīgu skaitu gājienu M varam pārveidot par M_1, kurā visi skaitļi ir lielāki par 50, bet elementu ir tikpat, cik kopā M. Ja M_1 būtu **vairāk nekā 25** elementi, tad vismaz divi no tiem atrastos vienā no 25 pāriem (51; 52), (53; 54), (55; 56), ..., (97; 98), (99; 100). Bet tā ir pretruna, jo diviem skaitļiem, kas atšķiras viens no otra par 1, lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Skat., piem., A34. zīm.


A34. zīm.

A.10.2. Apzīmēsim hordas MN savilktā loka leņķisko lielumu ar ω. Iespējami divi gadījumi:



A35. zīm.

Atliek ievērot, ka $\sin(90^o - \frac{\omega}{2}) = \sin(90^o + \frac{\omega}{2})$, un izmantot sinusu teorēmu $MN = 2R \cdot \sin\angle MON$.

A.10.3. Ievērosim, ka

$33! = 31 \cdot 29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13^2 \cdot 11^3 \cdot 7^4 \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 2^{31} = M \cdot 11^3 \cdot 3^{15} \cdot 2^{24} \cdot 10^7$, kur M – naturāls skaitlis, kas nebeidzas ar 0. Tāpēc 33! beidzas tieši ar 7 nullēm. No tā seko, ka **t=0**, z≠0. Skaitlis, ko iegūst, nosvītrojot pēdējās 7 nulles, acīmredzami dalās ar 8; tāpēc tā pēdējo triju ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8. Skaitlis $\overline{12z}$ dalās ar 8, ja z=0 vai z=8; tā kā z≠0, tad **z=8**.

Tā kā 33! dalās ar 9, tad tā ciparu summai jādalās ar 9, t.i., 142+x+y jādalās ar 9 (jeb, kas ir tas pats, x+y-2 jādalās ar 9). Tā kā 33! dalās ar 11, tad tā alternējošai ciparu summai (nepāra vietās esošie cipari ar „+" zīmi, pāra vietās esošie cipari ar „-" zīmi) jādalās ar 11, t.i., (-x+y-22) jādalās ar 11 (jeb, kas ir tas pats, y-x jādalās ar 11). Tā kā x un y – cipari, tad no šejienes seko, ka y=x; tad no tā, ka x+y-2 dalās ar 9, seko, ka **x=y=1**.

Atbilde: x=y=1; z=8; t=0.

A.10.4. Atbilde: n=12.

Risinājums. Skaidrs, ka n≥3. Apzīmēsim spēlētāju izcīnīto uzvaru daudzumus ar

$$10 = k_1 = k_2 < k_3 \le k_4 \le ... \le k_{n-1} < k_n = 13.$$

„Uzvarētājs" pavisam spēlēja 2(n-1) reizes, tātad zaudēja 2n-15 reizes. Tā kā „uzvarētājs" nevarēja zaudēt vairāk nekā uzvarēt (un nevarēja arī zaudēt tikpat, cik uzvarēt, jo ir spēlētāji, kas zaudējuši vairāk nekā uzvarējuši), tad 2n-15<13, no kurienes n<14, tātad n≤13. Līdzīgi (apskatot „zaudētājus") iegūstam, ka 2n-12>10, tātad n>11 un n≥12.

Tātad vai nu n=12, vai n=13. Pieņemsim, ka n=13. Ja i spēlētājiem bija 11 uzvaras katram un j spēlētājiem bija 12 uzvaras katram, tad pavisam tika izcīnītas 2·10+11i+12j+13=11i+12j+33 uzvaras. Bet pavisam tika spēlētas 13·12=156 spēles, tāpēc **11i+12j=123**. Tā kā **i+j=10**, tad iegūstam j=13, i=-3; tā nevar būt. Tāpēc n≠13, tātad vienīgā iespēja varētu būt n=12. Tāda iespēja tiešām pastāv: piemēram, „uzvarētājs" abās spēlēs uzvar katru no abiem „zaudētājiem", bet visu citu tenisistu pāru spēlēs katram no abiem spēlētājiem ir pa vienai uzvarai.

A.10.5. a) jā, noteikti. Ievērosim, ka

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$. Tā kā pozitīviem α ir spēkā $\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 2$, tad apskatāmā reizinājuma vērtība ir vismaz 3+3·2=9. No tā seko apgalvojums.

b) nē, ne noteikti. Piemēram, var būt x=0,1; y=0,1; z=100.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. a) jā; piemēram, 1+2+4=7 un 3+5+6+7+8=29.

b) nē. Starp 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir tieši 5 pāra un 5 nepāra skaitļi, tātad visu 10 skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Tāpēc viena no apskatāmo grupu summām ir nepāra skaitlis, otra – pāra skaitlis. Tā kā abas summas ir lielākas par 2, tad tā summa, kas ir pāra skaitlis, nav pirmskaitlis.

A.11.2. Apzīmējam $b=a+n$, $c=a+m$, $d=a+p$, kur $0<n\le m<p$.

No $a(a+p)=(a+n)(a+m)$ seko $p=m+n+\dfrac{m\cdot n}{a}$. Tā kā p – naturāls skaitlis, tad $a\le m\cdot n$ un $p\ge m+n+1$, pie tam vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a=m\cdot n$. No $\sqrt{a+p}\le\sqrt{a}+1$ seko $p\le 2\sqrt{a}+1$,

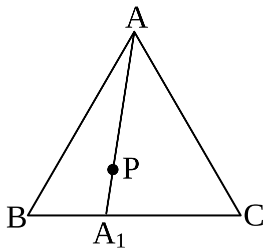
tātad $m+n+1\le p\le 2\sqrt{a}+1\le 2\sqrt{mn}+1$, no kurienes $m+n+1\le 2\sqrt{mn}+1$, $m-2\sqrt{mn}+n\le 0$ un $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2\le 0$, no kurienes $m=n$.

Acīmredzami jāpastāv vienādībai $p=m+n+1$, jo citādi būs $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2<0$, kā nevar būt. Atceroties iepriekš iegūto, no šejienes seko, ka $a=m\cdot n=m^2$, k.b.j.

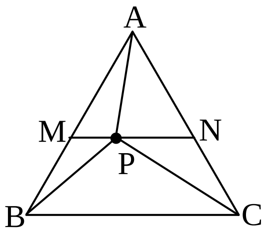
A.11.3. Lemma. PA<AB.

Tiešām, pagarinām AP līdz krustpunktam A_1 ar malu BC. Vai nu $\angle AA_1B\ge 90^\circ$, vai arī $\angle AA_1C\ge 90^\circ$; varam pieņemt, ka $\angle AA_1B\ge 90^\circ$. Tad trijstūrī AA_1B leņķis AA_1B ir lielākais leņķis, tātad pret to atrodas lielākā mala; tāpēc $AB>AA_1>AP$. Otrā gadījumā $AB=AC>AA_1>AP$.

Tagad atrisināsim uzdevumu.



A36. zīm.



A37. zīm.

a) no lemmas PA<a, PB<a, PC<a, kur a – regulārā trijstūra malas garums. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo.

b) novelkam MN||BC; tad ΔMAN ir regulārs. No trijstūra nevienādības seko BP+CP<(BM+MP)+(CN+NP), tātad

BP+CP<BM+CN+MN **(1)**

No lemmas seko

AP<AM **(2)**

Saskaitot (1) un (2) un ievērojot, ka MN=AN, iegūstam BP+CP+AP<BM+CN+MN+AM=(BM+AM)+(CN+AN)=BA+AC=2·AB, k.b.j.

A.11.4. Pārveidojam vienādojumu:

$$x+a^3=\sqrt[3]{a-x}$$

$$\sqrt[3]{a-x}-x=a^3$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a-x}-x}=a$$

Uzskatīsim a par mainīgo, bet x – par parametru un apskatīsim funkciju

$$f(a)=\sqrt[3]{a-x}\,.$$

Mūsu vienādojums pierakstāms formā

$$f(f(a))=a\,.$$

Ievērosim, ka $f(a)$ ir augoša funkcija. Tāpēc, ja $f(a)>a$, tad $f(f(a))>f(a)>a$; ja $f(a)<a$, tad $f(f(a))<f(a)<a$. Tātad jābūt $f(a)=a$. No šejienes iegūstam $x=a-a^3$. Pārbaude parāda, ka šī sakne der.

Piezīme. Šo sakni nav grūti arī vienkārši uzminēt. Tas, ka tā ir vienīgā, tad seko no fakta, ka dotā vienādojuma kreisajā pusē ir argumenta x augoša funkcija, bet labajā pusē – argumenta x dilstoša funkcija.

A.11.5. Izmantosim matemātisko indukciju. Pie n=3 uzdevuma apgalvojums ir acīmredzams. Pieņemsim, ka tas ir patiess pie n=3; 4; ...; k. Apskatām n=k+1. Izvēlamies vienu zinātnieku A un šķirojam divus gadījumus.

1. Ir tādi divi zinātnieki B un C, ka valoda AB netiek lietota nevienā citā sarakstē un valoda AC arī netiek lietota nevienā citā sarakstē. Tad A, B, C ir meklējamā grupa.

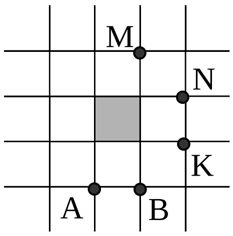
2. Tādu divu zinātnieku nav. Tas nozīmē, ka no valodām, kuras izmanto A, **augstākais viena** citās sarakstēs netiek lietota. Aizmirsīsim par zinātnieku A un viņa sarakstēm. Ja **tieši viena** no A lietotajām valodām citās sarakstēs netiek lietota, tad atlikušie k zinātnieki izmanto k valodas, un lietojam induktīvo hipotēzi. Ja visas A lietotās valodas tiek lietotas arī citur, tad atlikušajā k zinātnieku grupā apvienojam k-to un (k+1)-o valodas un lietojam induktīvo hipotēzi. Iegūtajā trijniekā „integrēto" valodu atšifrējam tās sākotnējā formā.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Varam apzīmēt $n=3^k \cdot a$, kur a nedalās ar 3. Tad $n^2=3^{2k} \cdot a^2$. Dalītāji, par kuriem runā uzdevumā, ir precīzi skaitļa a^2 dalītāji (citi skaitļa n^2 dalītāji dalās ar 3).

Tā kā a^2 ir nepāra skaits dalītāju (visi dalītāji, izņemot a, apvienojas pa pāriem tā, ka vienā pārī ieejošo dalītāju reizinājums ir a^2), tad uzdevumā prasītais skaitlis neeksistē.

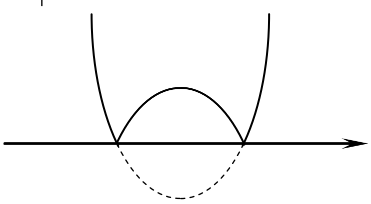
A.12.2. Viegli pārliecināties, ka punkti A, B, K, N, M atrodas vienādos attālumos no iekrāsotās rūtiņas centra, tātad atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tātad apskatāmie leņķi ir ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku.



A38. zīm.

Iespējami ļoti daudzi citi risinājumi.

A.12.3. No dotā seko, ka $a\neq 0$ un $A\neq 0$. Funkciju $f(x)=\left|ax^2+bx+c\right|$ un $F(x)=\left|Ax^2+Bx+C\right|$ grafiki shematiski attēloti A39. zīm.


A39. zīm.

Lai nevienādība $\left|f(x)\right|\leq\left|F(x)\right|$ varētu izpildīties visiem reāliem x, abiem vienādojumiem jābūt vienām un tām pašām saknēm. Tātad $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ un $F(x)=A(x-x_1)(x-x_2)$; tātad $f(x)$ un $F(x)$ koeficienti ir proporcionāli. Pie $x=0$ iegūstam $|c|\leq|C|$. Izmantojot minēto proporcionalitāti, arī $|b|\leq|B|$ un $|a|\leq|A|$, no kurienes seko vajadzīgais.

A.12.4. Parādīsim, kā to var izdarīt ar 2 svēršanām. Apzīmēsim monētas ar A, B, C, D, E.

1. variants: Nosveram A pret B un C pret D.

Ja A=B un C=D, tad E ir īsta.
Ja A=B un $C \neq D$, tad A un B ir īstas.
Ja $A \neq B$ un C=D, tad C un D ir īstas.
Ja $A \neq B$ un $C \neq D$, tad E ir īsta.

2. variants: Nosveram A un B pret C un D; nenegatīvo starpību apzīmējam ar *x*. Nosveram A pret C; nenegatīvo starpību apzīmējam ar *y*.
Ja $x=0$, tad E ir īsta monēta.
Ja $x \neq 0$ un $y=0$, tad A un C abas ir īstas.
Ja $x \neq 0$ un $x=y$, tad B un D abas ir īstas.
Ja $x \neq 0$ un $x=2y$, tad E ir īsta.

Piezīme. Var pierādīt, ka ar vienu svēršanu nepietiek.

A.12.5. Atbilde: Jā eksistē. 1.risinājums: Sadalīsim plakni vienības kvadrātos un sanumurēsim tos „pa spirāli" ar naturāliem skaitļiem, kā parādīts A40. zīm.

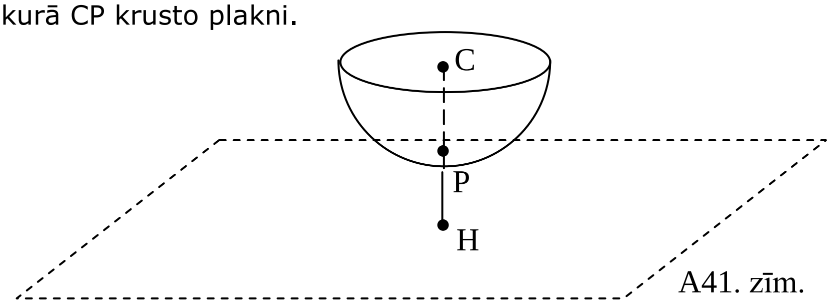
	17	16	15	14	13	
	18	5	4	3	12	
	:	6	1	2	11	
		7	8	9	10	

A40. zīm.

Katram daudzstūrim D eksistē tāds k, ka D neiziet ārpus pirmo k vienības kvadrātu veidotās figūras. Pieņemsim, ka D aizņemtais laukums i-tā vienības kvadrāta iekšpusē ir S_i (i=1; 2; ...; k). Tad definējam

$$f(D) = \frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{4} + \frac{S_3}{8} + \ldots + \frac{S_k}{2^k}.$$

2.risinājums: (Ieteica Madars Virza, Valmieras Valsts ģimnāzijas skolēns.) Novietosim virs plaknes puslodi ar sfēriskās virsmas laukumu 1 tā, ka tās pamats ir paralēls plaknei un pols atrodas starp puslodes pamatu un plakni (A41. zīm.) C, P, H – attiecīgi puslodes pamata centrs, puslodes pols un punkts, kurā CP krusto plakni.



A41. zīm.

Skaidrs, ka katram plaknes punktam varam piekārtot vienu puslodes sfēriskās virsmas punktu, pie tam tā, ka veidojas savstarpēji viennozīmīga atbilstība (riņķa līnijas punkti šajā atbilstībā nepiedalās). Šādu atbilstību var izveidot, velkot nogriežņus no C līdz plaknes punktiem un piekārtojot tiem nogriežņa krustpunktus ar puslodes virsmu. Viena šādas atbilstības īpašība būtu, ka noslēgtas figūras plaknē attēlojas par noslēgtām figūrām uz puslodes, pie tam, sadalot plaknes figūru divās daļās, arī puslodes figūra sadalās divās daļās.

Par prasīto funkciju varam ņemt tādu, kas figūrai plaknē piekārto laukumu atbilstošajai figūrai uz sfēras.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 47.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 56.matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Pārrakstot vienādojumu formā $3^x - 1 = 2^x \cdot y$, redzam, ka x nevar būt lielāks par kāpinātāju, ar kādu 2 ieiet skaitlī $3^x - 1$. Pieņemam, ka $x = 2^m \cdot (2n+1)$, kur $m \geq 0$; $n \geq 0$; $m,n \in Z$, un uzrakstām

$$3^x - 1 = 3^{2^m(2n+1)} - 1 = (3^{2n+1})^{2^m} - 1 =$$

$$= (3^{2n+1} - 1)((3^{2n+1})^{2^0} + 1)((3^{2n+1})^{2^1} + 1)((3^{2n+1})^{2^2} + 1)...((3^{2n+1})^{2^{m-1}} + 1).$$

Ievērojam, ka $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot (8+1)^n \equiv_8 3$, tāpēc $3^{2n+1} - 1$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4. Savukārt

$$(3^{2n+1})^{2^i} \equiv_8 3^{2^i} \equiv_8 \begin{cases} 3, & ja\ i = 0 \\ 1, & ja\ i = 1;2;3;... \end{cases},$$ tātad $\left(3^{2n+1}\right)^{2^i} + 1$

1) dalās ar 4, bet nedalās ar 8, ja $i=0$;
2) dalās ar 2, bet nedalās ar 4, ja $i=1;2;3;...$.

Tāpēc $3^x - 1 = 3^{2^m(2n+1)} - 1$
1) dalās ar 2, bet ne ar 4, ja $m=0$,
2) dalās ar 2^{m+2}, bet ne ar 2^{m+3}, ja $m>0$.
Tātad $x \leq m+2$. Iegūstam $2^m(2n+1) \leq m+2$ ($n,m \geq 0$; $n,m \in Z$).
Viegli pārbaudīt, ka pie $m \geq 3$ jau $2^m > m+2$.
Tāpēc $m \in \{0;1;2\}$; visos gadījumos $n=0$.
Attiecīgi iegūstam ($x=1$; $y=1$), ($x=2$; $y=2$), ($x=4$; $y=5$).

VP.1.2. Pieņemsim pretējo: $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \leq 1$. Tad acīmredzot arī $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 \leq 1$. Apzīmēsim $x = 1 - a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2 \geq 0$ un $y = 1 - b_1^2 - b_2^2 - ... - b_n^2 \geq 0$.

Dotajā nevienādībā katrai iekavai mainot zīmes uz pretējo (nevienādība saglabājas, jo abās pusēs izmainītā zīme „tiek pareizināta" ar tādu pašu) un pareizinot abas puses ar 4, iegūstam $4xy > (2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - ... - 2a_nb_n)^2 =$

$= ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2 + x + y)^2$, no kurienes, tā kā $x \geq 0$ un $y \geq 0$, seko $4xy > (x+y)^2$. Tā iegūstam $(x-y)^2 < 0$ - pretruna.

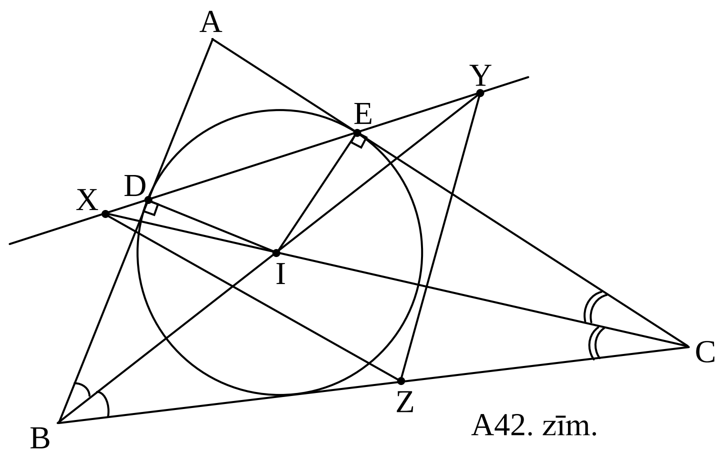
VP.1.3. Runāsim par grafu ar 3n+1 virsotnēm, kura šķautnes nokrāsotas krāsās a, v, f. Pavisam ir $C_{3n+1}^3 = \frac{(3n+1)(3n)(3n-1)}{6}$ virsotņu trijnieki. Novērtēsim, cik ir tādu virsotņu trijnieku, kuras savienojošās šķautnes visas nav dažādās krāsās. Ņemam vienu virsotni ω un apskatām tās n virsotnes, kuras ar ω savienotas ar a krāsas šķautnēm. Katras divas no šīm n virsotnēm kopā ar ω veido meklējamā tipa trijstūri; pavisam to ir $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Apskatot arī krāsas v un f un ņemot par virsotni ω patvaļīgu virsotni, iegūstam

$3\cdot(3n+1)\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$ trijstūrus; ja dažos trijstūros **visas** šķautnes nokrāsotas vienādi, tad skaits ir mazāks. Aplūkojam starpību

$$\frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{6}-3\cdot(3n+1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}=$$

$=(3n+1)\cdot\dfrac{1}{2}\left[n(3n-1)-3n(n-1)\right]=n(3n+1)>0;$ tas parāda, ka trijstūri ar visām dažādām malām eksistē (patiesībā to ir pat krietni vairāk nekā viens).

VP.1.4.



A42. zīm.

Apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru ar I.

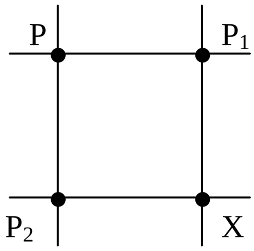
Ievērojam, ka $\angle XIB$=180°-$\angle BIC$=$\frac{1}{2}\angle B$+$\frac{1}{2}\angle C$=90°-$\frac{1}{2}\angle A$. No vienādsānu ΔDAE iegūstam $\angle ADE$=90°-$\frac{1}{2}\angle A$. Tātad $\angle XIB$=$\angle ADE$=$\angle XDB$; no tā seko, ka ap $BXDI$ var apvilkt riņķa līniju. Līdzīgi iegūst, ka ap $EICY$ var apvilkt riņķa līniju. No šiem faktiem seko, ka $\angle BXC$=$\angle BDI$=90° un $\angle BYC$=$\angle IEC$=90°. Tātad ΔBXC un ΔBYC ir taisnleņķa ar kopīgu hipotenūzu BC, tāpēc ZX=$\frac{1}{2}BC$=ZY. Redzam, ka „ΔXZY regulārs”⇔ $\angle YXZ$=60°. Ievērosim, ka $\angle YXC\equiv\angle DXI=\angle DBI\equiv\angle ABY$ (jo ap $BXDI$ var apvilkt riņķa līniju) un $\angle CXZ$=$\angle XCZ$ (jo CZ=XZ kā hipotenūzas puse un mediāna taisnleņķa trijstūrī BXC). Tāpēc $\angle YXZ$=$\angle YXC$+$\angle CXZ$=$\angle ABY$+$\angle XCZ$=$\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$=90°-$\frac{1}{2}\angle A$.

Tātad $\angle YXZ$=60°⇔$\angle A$=60°, k.b.j.

VP.1.5. Ja n=0, n=1, n=2 vai n=3, uzdevuma apgalvojums acīmredzams. Pieņemsim, ka tas pareizs pie n<k, un apskatām k punktus (k≥4). Šķirojam vairākus gadījumus:

a) ir punkts P, kas ir vienīgais gan uz „horizontāles”, kas iet caur P, gan uz „vertikāles”, kas iet caur P. Uz laiku novācam P, izkrāsojam atlikušos punktus saskaņā ar induktīvo hipotēzi un pēc tam P izkrāsojam patvaļīgi;

b) ir punkts P, kas ir vienīgais uz „vertikāles", kas iet caur P, bet nav vienīgais uz „horizontāles", kas iet caur P. Uz laiku novācam P, izkrāsojam atlikušos punktus saskaņā ar induktīvo hipotēzi un pēc tam izkrāsojam P tā, lai uz „horizontāles" īpašība saglabātos (t.i., krāsojam P „mazākuma krāsā", ja uz „horizontāles" krāsas nav vienādā daudzumā, un patvaļīgi, ja tās ir vienādā daudzumā);
c) ir punkts P, kas ir vienīgais uz „horizontāles" caur P, bet nav vienīgais uz „vertikāles" caur P. Šo gadījumu analizējam līdzīgi b) gadījumam;
d) katram punktam P ir citi punkti gan uz „vertikāles" caur P, gan uz „horizontāles" caur P. Ņemam P un atbilstošos punktus P_1 un P_2 (skat. A43. zīm.) Aplūkojam ceturto taisnstūra virsotni X.



A43. zīm.

d_1) X arī **ir** starp apskatāmajiem k punktiem. Uz laiku novācam punktus P, P_1, P_2 un X, izkrāsojam atlikušos punktus saskaņā ar induktīvo hipotēzi un pēc tam krāsojam P un X – baltus, P_1 un P_2 – sarkanus;
d_2) X **nav** starp apskatāmajiem k punktiem. Uz laiku novācam P, P_1 un P_2 un pievienojam punktu X. Iegūto k-2 punktu sistēmu izkrāsojam saskaņā ar induktīvo hipotēzi; pēc tam novācam X, izkrāsojam P_1 un P_2 tāpat, kā bija izkrāsots X, bet P izkrāsojam pretējā krāsā, nekā bija izkrāsots X.
Induktīvā pāreja izdarīta.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 6.maijā

VP.2.1. Atbilde: nepāra pozitīviem d.

Risinājums.

I Ja d – pāra skaitlis, tad ar matemātisko indukciju viegli pierādām, ka visi a_n ir nepāra un $a_n = 1 + n \cdot d > 1$, ja $n \geq 1$.

II Pieņemsim, ka d – nepāra skaitlis. Pierādīsim ar matemātisko indukciju sekojošus apgalvojumus (reizē):

- •Katram i pastāv nevienādība $a_i \leq 2d$
- ••Ja a_i – nepāra skaitlis, tad $a_i \leq d$.

Viegli saprast, ka $a_0=1$, $a_i = 1 + d \leq 2d$ - pāra skaitlis un

$a_2 = \frac{1}{2}(1+d) \leq \frac{1}{2}(d+d) = d$. Tātad (•) un (••) ir pareizi, ja i=0; 1; 2.

Pieņemsim, ka tie ir pareizi pie i=0; 1; 2; ...; k. Apskatām a_{k+1}. Tā kā

$\frac{a_k}{2} \leq \frac{2d}{2} = d < 2d$ un $a_k + d \leq d + d = 2d$, ja a_k – nepāra, tad (•) izpildās arī

loceklim a_{k+1}. Tālāk ja a_{k+1} ir nepāra, tad tas iegūts kā $\frac{a_k}{2}$, tāpēc

$a_{k+1} \leq \frac{2d}{2} = d$. Arī (••) pārbaudīts.

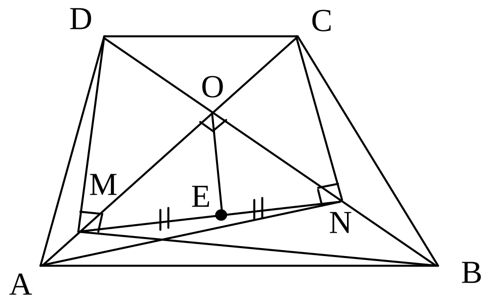
Redzam, ka virkne ir ierobežota. Tāpēc locekļi atkārtojas, ņemam mazāko tādu i, kam eksistē j ar īpašībām i<j, $a_i=a_j$. **Pieņemsim, ka i>0.** Šķirojam divus gadījumus:

1) $a_i \leq d$. Tad a_i un a_j abi iegūti dalīšanas rezultātā, bet tad $a_{i-1}=a_{j-1}$, un tā ir pretruna ar i minimalitāti.

2) $a_i>d$. Tad $a_i=a_j$ – pāra skaitlis, un tie abi iegūti kā $a_{i-1}+d$ un $a_{j-1}+d$;

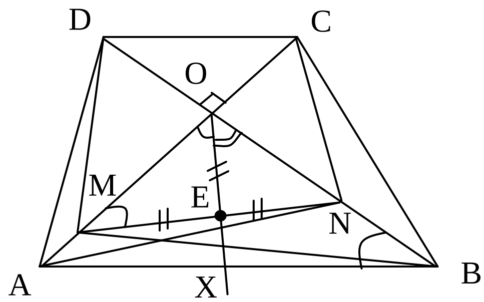
no $a_{i-1}+d=a_{j-1}+d$ seko $a_{i-1}=a_{j-1}$, un tā ir pretruna ar i minimalitāti.
Tātad pieņēmums, ka i>0, ir aplams. Tāpēc i=0, no kā seko vajadzīgais.
Komentārs. Ja i=0, augstāk minētās pretrunas nerodas, jo tad a_i **nav iegūts** saskaņā ar virknes definīcijas otro daļu.

VP.2.2. Pierādīsim vispirms, ka $\Delta OMN \sim \Delta OBA$.



A44.zīm

No taisnleņķa trijstūriem ANC un BMD iegūstam, ka $ON^2=OA\cdot OC$ un $OM^2=OB\cdot OD$. Tā kā $\Delta AOB \sim \Delta COD$, tad $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$. Tāpēc $\frac{ON^2}{OA^2}=\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{OM^2}{OB^2}$. No $\frac{ON^2}{OA^2}=\frac{OM^2}{OB^2}$ seko $\frac{ON}{OA}=\frac{OM}{OB}$. Tā kā papildus vēl $\angle NOM$ abiem trijstūriem ir kopējs, tad tie ir līdzīgi.
Tā kā ΔMON ir taisnleņķa, tad EM=EO=EN. Izmantojot iegūto līdzību, $\angle EOM=\angle EMO=\angle OBA$.



A45.zīm

Tāpēc $\angle BOE=90^0-\angle EOM=90^0-\angle OBA$, no kurienes $\angle BOE+\angle OBA=90^0$. No tā seko vajadzīgā perpendikularitāte (skat. ΔOXB).

VP.2.3. Atbilde: $\frac{n(n+1)}{2}$.

Risinājums: Šādu vērtību iegūst, piemēram, definējot $x_i=i$, $1\le i\le n$, jo $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ un $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Šīs ir olimpiāžu matemātikā vispārzināmas formulas, kuras var pierādīt daudzos veidos, arī ar matemātisko indukciju.
Ja mēs pratīsim pierādīt, ka visiem dažādiem naturāliem x_1, ..., x_n $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\ge(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$ (1),
tad, sareizinot to ar $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\ge\frac{n(n+1)}{2}$ (2),
iegūsim, ka sākumā dotā atbilde tiešām ir minimums.
Nevienādību (1) pierādīsim ar matemātisko indukciju. Tās pareizība pie n=1 acīmredzama. Pieņemsim, ka tā pareiza pie n=k-1, t.i., dažādiem naturāliem $x_1, \ldots, x_{k-1}$ ir spēkā $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{k-1}^3\ge(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1})^2$.

Varam pieņemt, ka $x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k$. Tad

$$(x_1^3+...+x_k^3)-(x_1+...+x_k)^2=$$
$$=\left[(x_1^3+...+x_{k-1}^3)-(x_1+...+x_{k-1})^2\right]+x_k\left[x_k^2-x_k-2(x_1+x_2+...+x_{k-1})\right]$$

Pirmā iekava ir ≥ 0 saskaņā ar induktīvo pieņēmumu. Otro novērtējam šādi:

$$x_k^2-x_k-2(x_1+x_2+...+x_{k-1})\geq$$
$$\geq x_k^2-x_k-2((x_k-1)+(x_k-2)+...+(x_k-(k-1)))=$$
$$=x_k^2+(-x_k-2(k-1)x_k)+2(1+2+...+(k-1))=$$
$$=x_k^2-x_k(2k-1)+k(k-1)=(x_k-(k-1))(x_k-k)\geq 0, \text{ jo } x_k\geq k.$$

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2006. gada 7.maijā

VP.3.1. Atbilde: 907.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo progresiju ar p; p+d; p+2d; p+3d; p+4d; p+5d; p+6d. Skaidrs, ka p>2 (citādi p+2d>2 dalās ar 2). Līdzīgi p>3 un p>5. Ja p>2, tad d jābūt pāra skaitlim. Līdzīgi d jādalās ar 3 (citādi kāds no skaitļiem p+d vai p+2d dalītos ar 3) un d dalās ar 5 (citādi kāds no p+d, p+2d, p+3d, p+4d dalītos ar 5).

Secinām, ka $p\geq 7$ un d dalās ar 30. Tālāk šķirojam divus gadījumus.

1) p>7. Tad, ja d nedalās ar 7, viens no skaitļiem p+d; p+2d; p+3d ; p+4d; p+5d; p+6d dalās ar7 (apskatām atlikumus, kādus tie dod, dalot ar 7); ja savukārt d dalās ar 7, tad d dalās ar $7\cdot 30=210$ un p+6d$\geq 11+6\cdot 210=1271$.

2) p=7, d dalās ar 30. Ja d=30, tad mūsu virknē ir skaitlis $7+6\cdot 30=189=11\cdot 17$; tas pats notiek, ja d=60 vai d=90. Ja d=120, tad $7+2\cdot 120=247=13\cdot 19$. Ja d=150, tad iegūstam pirmskaitļus 7; 157; 307; 457; 607; 757; 907. Tā kā 907<1271, atbilde pierādīta.

VP.3.2. Atbilde: jā, eksistē.

Risinājums. Ņemam m= $4\cdot 2^9+1$, n=9. Katram no m zēniem apskatām viņam pazīstamo meiteņu kopu. Tā kā iespējamu dažādu šādu kopu ir 2^9, tad atradīsies 5 zēni, kam šīs kopas ir vienādas. Apzīmējam attiecīgo meiteņu kopu ar M, bet zēnu kopu ar Z; Z satur 5 zēnus, bet M elementu skaits mums nav zināms. Šķirojam divus gadījumus:

1) $|M|\geq 5$; tad viss kārtībā (ir „pazīšanas situācija”);

2) $|M|<5$. Tad apskatām 5 meitenes, kas nav no kopas M; tās veido kopu M_1, $|M_1|=5$. Kopas Z un M_1 veido „nepazīšanas situāciju”.

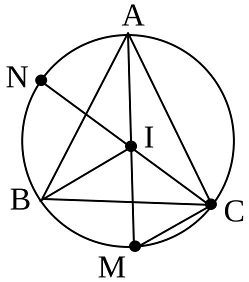
VP.3.3. Atbilde: $f(t)=\frac{1}{t}$.

Risinājums. Apzīmējam $f(1)=a$, $a>0$. Ievietojot dotajā vienādībā $x=y=1$, iegūstam $1(f(1)+f(1))=2\cdot f(f(1)\cdot 1)$, t.i., $2a=2f(a)\Rightarrow a=f(a)$. Ievietojot dotajā vienādībā $x=a$ un $y=1$, iegūstam $a^2(f(a)+a)=(a+1)\cdot f(f(a))$, no kurienes $2a^3=(a+1)\cdot a$. Tā kā $a\neq 0$, tad $2a^2=a+1$, no kurienes $a_1=-\frac{1}{2}$ (neder) un $\boldsymbol{a_2=1}$. Ievietojot dotajā vienādojumā $x=1$, iegūstam $1+f(y)=(1+y)\cdot f(y)$, no kurienes $f(y)=\frac{1}{y}$. Pārbaude parāda, ka šī atbilde der.

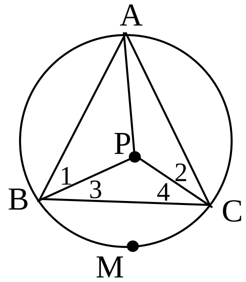
IMO. 47. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (47th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2006. gada 12. jūlijā.

IMO.1. Apzīmēsim loku BC un AB viduspunktus attiecīgi ar M un N (skat. A46. zīm.).



A46. zīm



A47. zīm

Tad A,I,M ir uz vienas taisnes ($\angle A$ bisektrises) un $\angle ICM =$

$= \frac{1}{2}\left(\cup NB + \cup BM\right) = \frac{1}{2} \cup NB + \frac{1}{2} \cup BM = \angle NCB + \angle BAM = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A)$.

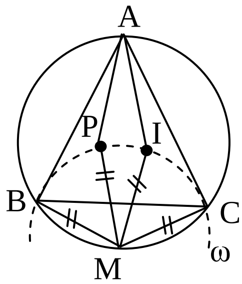
Savukārt $\angle CIM = \frac{1}{2}\left(\cup NA + \cup CM\right) = \frac{1}{2} \cup NA + \frac{1}{2} \cup CM =$

$= \angle NCA + \angle MAC = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A)$. Tātad $\angle ICM = \angle CIM$, tātad ΔIMC ir vienādsānu un $MC=MI$. Līdzīgi pierāda, ka $MB=MI$. Tātad eksistē riņķa līnija ω ar centru M, kas iet caur B,I un C.

No uzdevumā dotā seko, ka $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ (skat. A47. zīm.), tāpēc $\angle BPC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. Bet arī $\angle BIC =$

$= 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{1}{2}\left(\angle B + \angle C\right)$ (skat. A46. zīm.)

Tātad $\boldsymbol{\angle BPC = \angle BIC}$. Tā kā P un I atrodas vienā pusē no taisnes BC, tad no izceltā apgalvojuma seko, ka B, P, I, C ir uz vienas riņķa līnijas jeb, ka P pieder ω.

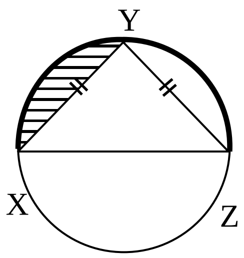


A48. zīm

Tāpēc no ΔAPM iegūstam $\boldsymbol{AP + PM} \geq AM = AI + IM = \boldsymbol{AI + PM}$. Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja ΔAPM deģenerējas par nogriezni, t.i., ja P atrodas uz AM, t.i., ja P sakrīt ar I. Uzdevums atrisināts.

IMO.2. Atbilde: 1003.

Risinājums. **1)** Skaidrs, ka nevienam trijstūrim nevar būt 3 labas malas, jo triju nepāra skaitļu summa ir nepāra, tātad nevar būt 2006. Tāpēc vienādsānu trijstūriem, par kuriem runā uzdevumā, ir **tieši** divas labas malas; tāpēc tās ir sānu malas. Vienādsānu trijstūri, kuram ir divas labas malas, sauksim par labu.



A49. zīm

Ja XYZ – labs trijstūris ar vienādajām malām XY un ZY, tad teiksim: tās daudzstūra malas, kas ir otrā pusē no XY nekā Z vai otrā pusē no YZ nekā X, pieder ΔXYZ (skat. A49. zīm., kur tās daudzstūra malas, kas pieder ΔXYZ, atrodas izceltajā kontūra daļā). Gan „malas XY dēļ”, gan „malas YZ dēļ” ΔXYZ pieder **nepāra skaits malu**.

No tām malām, kas ΔXYZ pieder „malas XY dēļ”, vismaz viena nepieder nevienam citam labam trijstūrim. Tiešām, katrs tāds labs trijstūris pilnībā atrodas iesvītrotajā segmentā, tāpēc (tā kā tas ir vienādsānu) tam kopumā šajā segmentā piederētu pāra skaits malu. Tas attiecas arī uz visiem šajā segmentā esošajiem labajiem trijstūriem kopā. Bet šajā segmentā pavisam ir nepāra skaits malu, tāpēc viena no tām nepieder nevienam citam labam trijstūrim.

Līdzīgi no tām malām, kas ΔXYZ pieder „malas YZ dēļ”, vismaz viena nepieder nevienam citam labam trijstūrim.

Tāpēc katra labā trijstūra „ekskluzīvā īpašumā” ir vismaz divas daudzstūra P malas. Tāpēc labo trijstūru nav vairāk par $\frac{2006}{2}=1003$.

2) Tagad parādīsim, ka var būt tieši 1003 labi trijstūri. Tos var iegūt, novelkot daudzstūrī $A_1A_2A_3...A_{2006}$ diagonāles A_1A_3; A_3A_5; A_5A_7; ...; $A_{2003}A_{2005}$; $A_{2005}A_1$. Jau esam ieguvuši 1003 labus trijstūrus. Atlikušo P daļu varam sadalīt trijstūros patvaļīgi.

IMO.3. Apskatāmo nevienādību identisku pārveidojumu ceļā var pārveidot par

$$|(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)| \le M\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad (1)$$

Tā ir simetriska, tāpēc varam uzskatīt, ka $a \le b \le c$. Tādā gadījumā no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)\cdot(c-b) \le \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4} \quad (2)$$

(vienādība pastāv tikai tad, ja $b-a=c-b$ resp. $a+c=2b$) un no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko

$$\frac{(c-a)^2}{4} = \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 \le \frac{(b-a)^2+(c-b)^2}{2}$$

(vienādība atkal pastāv tad un tikai tad, ja $a+c=2b$). Šo nevienādību tālāk pārveidojam par $3\cdot(\mathrm{c}-\mathrm{a})^2 \le 2\cdot\left((\mathrm{b}-\mathrm{a})^2+(\mathrm{c}-\mathrm{b})^2+(\mathrm{c}-\mathrm{a})^2\right)$ (3), kur vienādība atkal pastāv tad un tikai tad, ja $a+c=2b$.

Izmantojot (2) un (3), pakāpeniski iegūstam

$$|(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)| \le \frac{1}{4}\left|(c-a)^3(a+b+c)\right| =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \le \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right]\right)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2}\right)^2 \le$$ (lietojam 4. pakāpes saknei nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko četru reizinātāju gadījumā) $\le \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 =$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{32}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Mēs redzam, ka (1) ir spēkā ar konstanti $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Tagad parādīsim, ka tā ir mazākā iespējamā M vērtība. Lai to pierādītu, pietiek parādīt gadījumu, kad visu nestingro nevienādību vietā ir vienādības starp nenulles skaitļiem. Atceroties mūsu spriedumu, vienādības pastāv tad un tikai tad, ja vienlaicīgi

$$\begin{cases} a+c=2b \\ \frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2 \end{cases}$$, pie tam jābūt $a \le b \le c$.

Ievietojot $b = \frac{a+c}{2}$ sistēmas otrajā vienādojumā, iegūstam $2(c-a)^2 = 9(a+c)^2 = 36b^2$, tātad varam aplūkot sistēmu $\begin{cases} 2b = a+c \\ 18b^2 = (c-a)^2 \end{cases}$.

Šai sistēmai acīmredzami eksistē atrisinājums $b=1$, $a=1-\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $c=1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$, kas apmierina arī nosacījumu $a \le b \le c$. Ar šīm a, b, c vērtībām un $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ (1) pārvēršas par vienādību starp diviem pozitīviem skaitļiem, tātad vērtību $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ samazināt nevar. Uzdevums atrisināts.

IMO. Uzdevumi 2006. gada 13. jūlijā.

IMO.4. Ja $x=0$, iegūstam vienādojumu $y^2=4$, no kurienes $y=\pm 2$. Skaidrs, ka nevar būt $x<0$, jo tad $1<1+2^x+2^{2x+1}\le 1+2^{-1}+2^{-1}=2$, un y neiznāk vesels. Ja $(x;y)$ ir vienādojuma atrisinājums, tad acīmredzami arī $(x;-y)$ ir atrisinājums; skaidrs, ka nevar būt $y=0$. Sākumā aprobežosimies ar gadījumu $x>0$, $y>0$. Vienādojumu var pārrakstīt formā

$$2^x\left(1+2^{x+1}\right)=(y-1)(y+1) \quad (1)$$

No šejienes redzam, ka $y-1$ un $y+1$ ir pāra skaitļi; tā kā tie atšķiras viens no otra par 2, tad tieši viens no tiem dalās ar 4, bet labā puse dalās ar 8. Tāpēc arī kreisā puse dalās ar 8; tā kā $1+2^{x+1}$ ir nepāra skaitlis, tad 2^x dalās ar 8 un $x \geq 3$. Tātad viens no skaitļiem $y-1$ un $y+1$ dalās ar 2 (bet ne ar 4), savukārt otrs dalās ar 2^{x-1} (bet ne ar 2^x). Šķirosim abas iespējas.

1. Skaitlis $y-1$ dalās ar 2^{x-1}, bet ne ar 2^x. Tad $y-1=2^{x-1}\cdot k$, ($k\geq 1$, k – nepāra) un $y=2^{x-1}\cdot k+1$. Ievietojot to dotajā vienādojumā (1), iegūstam $2^x\left(1+2^{x+1}\right)=2^{2x-2}k^2+2^x k$ jeb $1+2^{x+1}=2^{x-2}k^2+k$, no kurienes

$$1-k=2^{x-2}\left(k^2-8\right) \quad (2)$$

Tā kā $k\geq 1$, jābūt $k^2-8\leq 0$; tā kā k ir nepāra, tad $k=1$. Tad no (2) iegūstam $2^{x-2}\cdot(-7)=0$ - pretruna. Tātad 1. iespēja patiesībā nav realizējama.

2. Skaitlis $y+1$ dalās ar 2^{x-1}, bet ne ar 2^x. Tad $y+1=2^{x-1}\cdot k$ (kur $k\geq 1$, k – nepāra). No (1) iegūstam $2^x\left(1+2^{x+1}\right)=2^{2x-2}\cdot k^2-2^x\cdot k$ jeb $1+2^{x+1}=2^{2x-2}\cdot k^2-k$, no kurienes

$$1+k=2^{x-2}\left(k^2-8\right) \quad (3)$$

Tā kā k – nepāra, tad jābūt $x\geq 3$. Tāpēc $1+k\geq 2\left(k^2-8\right)$, no kurienes $2k^2-k-17\leq 0$; tāpēc $k\leq \frac{1+\sqrt{1+136}}{4}<\frac{1+15}{4}=4$, tātad $k\leq 3$. No (3) redzam, ka nevar būt $k=1$; tātad $k=3$. Iegūstam $2^{x-2}=4$, tāpēc $x-2=2$ un $x=4$; tad $y=2^{x-1}\cdot 3-1=2^3\cdot 3-1=23$. Pārbaude parāda, ka $(x;y)=(4;23)$ ir vienādojuma atrisinājums. Atceroties sākumā minēto, redzam, ka vienādojumam ir 4 atrisinājumi: $(0;2)$, $(0;-2)$, $(4;23)$, $(4;-23)$.

IMO.5. Uzdevumu risināšanas gaitā mēs izmantosim divus sekojošus faktus.

F1. Ja $R(x)$ – polinoms ar **veseliem** koeficientiem, bet u un v – divi **dažādi veseli** skaitļi, tad $R(u)$-$R(v)$ dalās ar u-v.

Tiešām, ja $R(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$, tad $R(u)-R(v)=a_0\left(u^k-v^k\right)+$ $+a_1\left(u^{k-1}-v^{k-1}\right)+\ldots+a_{k-1}(u-v)$, un atliek ievērot, ka katram naturālam n starpība u^n-v^n dalās ar $u-v$, jo ir spēkā viegli pārbaudāma identitāte $u^n-v^n=(u-v)\left(u^{n-1}+u^{n-2}v+u^{n-3}v^2+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1}\right)$.

F2. Katram n-tās pakāpes polinomam, kur $n\geq 1$, ir augstākais n saknes.

Faktus F1 un F2 matemātikas olimpiādēs uzskata par vispārzināmiem.

Ja $f(x)$ ir funkcija un ja pastāv vienādība $f(a)=a$, tad skaitli a sauksim par funkcijas f nekustīgo punktu. Visi šeit apskatāmie nekustīgie punkti būs veseli skaitļi.

Mūsu risinājuma stratēģija būs atrast tādu n-tās pakāpes polinomu $R(x)$, ka katrs polinoma $Q(x)$ nekustīgais punkts ir $R(x)$ sakne. Tad saskaņā ar faktu F2 šo nekustīgo punktu nav vairāk par n, k.b.j.

Lemma. Katrs polinoma $Q(x)$ nekustīgais punkts ir arī vienkāršāka polinoma $P(P(x))$ nekustīgais punkts.

Lemmas pierādījums. Pieņemsim, ka x_0 ir kāds $Q(x)$ nekustīgais punkts (tādi var būt vairāki). Tas nozīmē, ka skaitļu virknē x_0; $x_1=P(x_0)$; $x_2=P(x_1)$; $x_3=P(x_2)$;…; $x_{k-2}=P(x_{k-3})$; $x_{k-1}=P(x_{k-2})$; $x_k=P(x_{k-1})$ pastāv vienādība $x_k=x_0$, un tāpēc $x_{k+1}=P(x_k)=x_1$. Šķirojam divus gadījumus.

1. Patiesībā $x_1=x_0$. Tad arī $x_2=P(x_1)=P(x_0)=x_0$, un tātad x_0 ir $P(P(x))$ nekustīgs punkts.

2. Patiesībā $x_1 \neq x_0$. Mēs apgalvojam, ka tad skaitļu virknē x_0; x_1; x_2;...; x_{k-1}; $x_k (= x_0)$; $x_{k+1} (= x_1)$;... **nekādi** divi blakus esoši locekļi nav vienādi savā starpā. Tiešām, pretējā gadījumā arī visi nākošie locekļi būtu tādi paši, un tā, kā virkne ir periodiska, tad iznāktu arī, ka $x_1 = x_0$ - pretruna.

Tāpēc no F1 seko sekojošas dalāmības:

$x_1 - x_2$ dalās ar $x_0 - x_1$

$x_2 - x_3$ dalās ar $x_1 - x_2$

...

$x_{k-1} - x_k$ dalās ar $x_{k-2} - x_{k-1}$

$x_k - x_{k+1}$ dalās ar $x_{k-1} - x_k$, ko var izteikt arī kā

$x_0 - x_1$ dalās ar $x_{k-1} - x_0$

Tātad **nenulles** skaitļi $x_0 - x_1$, $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$,..., $x_{k-1} - x_0$, $x_0 - x_1$ **cikliski** katrs ir nākošā skaitļa dalītājs. Tā kā pēc moduļa mazāks nenulles skaitlis nevar dalīties ar pēc moduļa lielāku nenulles skaitli, tad no šejienes seko $|x_0 - x_1| \leq |x_1 - x_2| \leq |x_2 - x_3| \leq ... \leq |x_{k-1} - x_0| \leq |x_0 - x_1|$; tāpēc

$|x_0 - x_1| = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = ... = |x_{k-1} - x_0| = |x_0 - x_1|$. Ja x_m - **lielākais** no skaitļiem periodiskajā virknē x_0, x_1, x_2,..., x_{k-1},... tad no

$|x_{m-1} - x_m| = |x_m - x_{m+1}|$ seko $x_{m-1} = x_{m+1}$. Tad arī $x_m = x_{m+2}$; $x_{m+1} = x_{m+3}$,... virknes periodiskuma dēļ agri vai vēlu iegūsim, ka $x_0 = x_2$, tātad x_0 ir polinoma $P(P(x))$ nekustīgs punkts. **Lemma pierādīta**.

Piezīme. Jau no lemmas seko, ka polinomam $Q(x)$ nav vairāk par $2n$ nekustīgiem punktiem, jo katrs polinoma $P(P(x))$ nekustīgs punkts ir polinoma $S(x) = P(P(x)) - x$ sakne; polinoma $S(x)$ pakāpe ir $2n$.

Tagad risināsim sākotnējo uzdevumu. Ja **visi** $Q(x)$ nekustīgie punkti ir arī $P(x)$ nekustīgie punkti, tad tie ir n-tās pakāpes polinoma $P(x) - x$ saknes; tad saskaņā ar faktu F2 to nav vairāk par n.

Tomēr var arī gadīties, ka polinomam $Q(x)$ ir tāds nekustīgs punkts a, kas nav vienlaikus arī $P(x)$ nekustīgs punkts; apzīmējam $P(a) = b$, $b \neq a$. Saskaņā ar lemmu $P(b) = a$. Šai gadījumā lemmas pierādījumā apskatītā periodiskā virkne x_0; x_1; x_2;... ar perioda garumu k ir a; b; a; b;... ; tāpēc skaidrs, ka arī b ir $Q(x)$ nekustīgais punkts, jo arī virknē b; a; b; a;... (k-1)-ais loceklis sakrīt ar pirmo.

Pieņemsim, ka c – kaut kāds cits polinoma $Q(x)$ nekustīgs punkts, kas atšķiras gan no a, gan no b; apzīmējam $P(c) = d$ (varbūt $c = d$). Saskaņā ar lemmu $P(d) = c$. Pierādīsim, ka d nesakrīt ne ar a, ne ar b. Ja $d = a$, tad $P(d) = P(a)$, tāpēc $c = b$ – pretruna; ja $d = b$, tad $P(d) = P(b)$, tāpēc $c = a$ – pretruna. No vienādībām $P(a) = b$, $P(b) = a$, $P(c) = d$, $P(d) = c$ un no fakta F1 seko:

$$\begin{cases} a\text{-}c \text{ dalās ar } b\text{-}d \\ b\text{-}d \text{ dalās ar } a\text{-}c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\text{-}d \text{ dalās ar } b\text{-}c \\ b\text{-}c \text{ dalās ar } a\text{-}d \end{cases}$$

Tā kā visas šīs starpības ir nenulles skaitļi, tad

$$a - c = \pm(b - d)$$

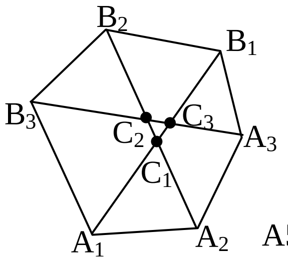
$$a-d=\pm(b-c)$$

Ja abās šajās vienādībās ir „+” zīme, tad no $a-c=b-d$ un $a-d=b-c$ saskaitot seko $a=b$ - pretruna. Tāpēc vismaz vienā no tām ir „-” zīme. Abos gadījumos iegūstam $a+b=c+d$, ko varam pierakstīt kā $a+b-c-P(c)=0$. Izceltā vienādība izsaka faktu, ka c ir polinoma $R(x)=(a+b)-x-P(x)$ sakne. Viegli pārbaudīt, ka arī a un b ir šī polinoma saknes. Tātad visi $Q(x)$ nekustīgie punkti ir $R(x)$ saknes. Bet polinoma $R(x)$ pakāpe ir n. No fakta F2 seko, ka uzdevums atrisināts.

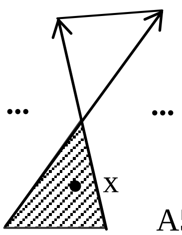
IMO.6. Tālākajā risinājumā mēs nedaudz vispārināsim daudzstūra jēdzienu: uzskatīsim, ka daži no tā leņķiem var būt arī 180° lieli. Figūras F laukumu apzīmēsim ar [F].

Lemma. Ja izliekta 2*n*-stūra laukums ir L, tad eksistē tāda šī daudzstūra mala AB un tāda virsotne V, ka [ABV]$\geq \frac{1}{n}\cdot L$.

Pierādījums. Apzīmēsim daudzstūra virsotnes pēc kārtas pozitīvā secībā ar $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$; diagonāļu A_iB_i un $A_{i+1}B_{i+1}$ krustpunktu apzīmēsim ar C_i (uzskatām, ka A_{n+1} ir tas pats B_1 un B_{n+1} – tas pats A_1). Punkti $C_1, C_2,...,C_n$ eksistē un atrodas daudzstūra iekšpusē, jo daudzstūris ir izliekts. Vispirms pierādīsim, ka trijstūri $A_1A_2C_1$ un $B_1B_2C_1$, $A_2A_3C_2$ un $B_2B_3C_2,...,A_{n-1}A_nC_{n-1}$, $B_{n-1}B_nC_{n-1}$, $A_nB_1C_n$, $B_nA_1C_n$ kopumā pārklāj visu 2*n*-stūri (skat., piem., A50. zīm., kur n=3).

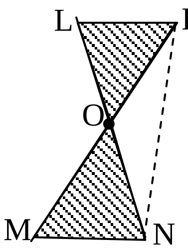


A50. zīm



A51. zīm

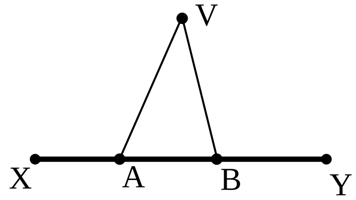
Tiešām, apskatīsim patvaļīgu daudzstūra punktu X, kas neatrodas ne uz malas, ne uz kādas no diagonālēm $A_1B_1, A_2B_2,...,A_nB_n$. Aplūkosim pēc kārtas **starus** $A_1B_1, A_2B_2,...,A_nB_n, B_1A_1$; varam pieņemt, ka X ir pa labi no stara A_1B_1. Tad X ir pa kreisi no stara B_1A_1. Tātad apskatāmajā staru virknē ir divi tādi viens otram sekojoši stari, ka pirmajam no tiem X ir pa labi, bet otrajam – pa kreisi (skat. A51. zīm.) Tātad X ir pārklāts ar vienu no mūs interesējošiem 2*n* trijstūriem; tātad šie trijstūri pārklāj visu 2*n*-stūri, un to laukumu summa ir vismaz L. Tāpēc eksistē divi „pretēji” trijstūri, kuru laukumu summa ir vismaz $\frac{1}{n}\cdot L$ (skat. A52. zīm.) Varam pieņemt, ka NO$\geq$LO; tad [NOK]$\geq$[LOK] un tāpēc [MNK]=[MNO]+[NOK]$\geq$[MNO]+[LOK]$\geq \frac{1}{n}\cdot L$. Lemma pierādīta.



A52. zīm

Apzīmēsim tagad mūsu daudzstūra P laukumu ar L, bet tā malām $a_1, a_2,...,a_n$ piekārtoto trijstūru laukumus - ar $L_1, L_2,...,L_n$. **Pieņemsim, ka**

$\boldsymbol{L_1+L_2+...+L_n<2L}$; tad $\frac{L_1}{L}+\frac{L_2}{L}+...+\frac{L_n}{L}<2$. Eksistē tādi pozitīvi racionāli skaitļi r_1, r_2,...,r_n, ka $\frac{L_i}{L}<r_i$ un $r_1+r_2+...+r_n=2$, $1\le i\le n$. Izteiksim tos ar kopsaucēju: $r_i=\frac{k_i}{m}$, $1\le i\le n$. Tad $k_1+k_2+...+k_n=2m$. Sadalīsim katru malu a_i, $1\le i\le n$, k_i vienādos nogriežņos; esam ieguvuši izliektu 2m-stūri (kuram daži leņķi varbūt ir 180° lieli). Pielietosim šim 2m-stūrim lemmu (skat. A53. zīm.):



A53. zīm

[AVB] $\ge\frac{1}{m}\cdot L$, $XY=a_i$, $AB=\frac{1}{k_i}\cdot a_i$. Tad L_i=[XYV]$=k_i\cdot$[ABV] $\ge\frac{k_i}{m}\cdot L=r_i\cdot L$

Tātad $\frac{L_i}{L}\ge r_i$. Bet tā ir pretruna ar r_i izvēli. Tātad mūsu augstāk izceltais apgalvojums ir nepareizs, un $L_1+...+L_n\ge 2L$, k.b.j.

AB. Atlases sacensības starptautiskajai komandu olimpiādei „Baltijas Ceļš 2005”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Pieskaitot visām izteiksmēm 2, mēs iegūstam $\frac{a+b+c}{c}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{a}$. Pastāv 2 iespējas:

1) $a+b+c=0$. Tad a + b = - c, a + c = -b, b + c = -a un prasītā vērtība ir „**-1**”.

2) $a+b+c\ne 0$; tad $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, $a=b=c$ un prasītā vērtība ir „**8**”.

Skaidrs, ka abas vērtības ir sasniedzamas.

AB.A.2. 1) no $(x-y)^2\ge 0$ iegūstam $(x+y)^2\ge 4xy$ un $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$. Tāpēc

$\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=\frac{uy+vx}{xy}\ge\frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2}$, k.b.j.

2) izmantojot nupat pierādīto, iegūstam

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{c}{d+2a+b}\ge\frac{4\left(ad+2a^2+ab+bc+2c^2+cd\right)}{(2a+2b+2c+2d)^2}=$$

$$=\frac{2a^2+2c^2+ab+bc+cd+da}{(a+b+c+d)^2}$$ un līdzīgi

$$\frac{b}{c+2d+a}+\frac{d}{a+2b+c}\ge\frac{2b^2+2d^2+ab+bc+cd+da}{(a+b+c+d)^2}.$$

Saskaitot abas iegūtās nevienādības, iegūstam, ka

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\geq$$

$$\geq\frac{2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2ab+2bc+2cd+2da}{(a+b+c+d)^2}=\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geq 1$$

AB.A.3. Apskatām funkcijas $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ un $g(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. Tā kā $f(z)\geq 0=g(z)$ un $f(x)\leq 0=g(x)$, tad intervālā $[x;\, z]$ eksistē tāds punkts u, kurā $f(u)=g(u)$.

No vienādības $(u-a)(u-b)(u-c)=(u-x)(u-y)(u-z)$ seko

$$u^3-u^2(a+b+c)+u(ab+ac+bc)-abc=$$
$$=u^3-u^2(x+y+z)+u(xy+xz+yz)-xyz.$$

Ņemot vērā uzdevumā doto, iegūstam $u(ab+ac+bc-xy-xz-yz)=0$. Tā kā $u\geq x>0$, no šejienes seko $ab+ac+bc=xy+xz+yz$.

Tāpēc $f(t)\equiv g(t)$ (pēc koeficientiem). Tāpēc $f(t)$ un $g(t)$ sakņu kopas sakrīt, no kurienes seko vajadzīgais.

AB.A.4. Apzīmējam $\sqrt{x}=y$. Tad $x^n+x^{-n}-2=\left(y^n-y^{-n}\right)^2$ un $x^1+x^{-1}-2=\left(y^1-y^{-1}\right)^2$.

Pierādāmā nevienādība kļūst par $\dfrac{y^n-y^{-n}}{y-y^{-1}}\geq n$.

Viegli saprast, ka $\dfrac{y^n-y^{-n}}{y-y^{-1}}=y^{1-n}\cdot\dfrac{y^{2n}-1}{y^2-1}=y^{1-n}\cdot\left(1+y^2+y^4+\ldots+y^{2n-2}\right)\geq$

(sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko)

$\geq y^{1-n}\cdot n\cdot\sqrt[n]{y^{2+4+6+\ldots+(2n-2)}}=y^{1-n}\cdot n\cdot\sqrt[n]{y^{n(n-1)}}=n$, k.b.j.

AB.A.5. Ievietojot $x=y=z$, iegūstam $f(x,\, x)=1$ visiem $x\in Z$.

Pie $y=z$ iegūstam $f(x,\, y)\cdot f(y,\, x)=1$ visiem $x,\, y\in Z$.

Tāpēc $f(x,\, z)=\dfrac{1}{f(z,\, x)}=f(x,\, y)\cdot f(y,\, z)=\dfrac{f(x,\, y)}{f(z,\, y)}$ visiem $x,\, y,\, z\in Z$.

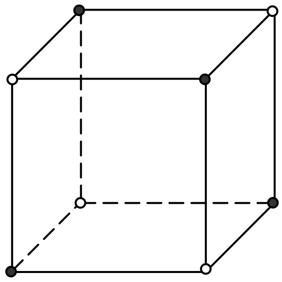
Tāpēc $2=f(x+1,\, x)=\dfrac{f(x+1,\, y)}{f(x,\, y)}$, no kurienes $\dfrac{f(x+1,\, y)}{2^{x+1}}=\dfrac{f(x,\, y)}{2^x}$ visiem $x,\, y\in Z$.

Tāpēc, lielumam x mainoties, lielums $\dfrac{f(x,\, y)}{2^x}$ paliek konstants. Pie $x=y$ iegūstam $\dfrac{f(x,\, y)}{2^x}=\dfrac{f(y,\, y)}{2^y}=\dfrac{1}{2^y}$ (jo $f(y,\, y)=1$). Tāpēc $\underline{f(x,\, y)=2^{x-y}}$.

Pārbaude parāda, ka šis atrisinājums der.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Iekrāsojam kuba virsotnes baltas un melnas, kā parādīts A54. zīmējumā:



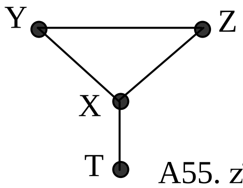
A54. zīm.

Katra šķautne savieno vienu baltu un vienu melnu virsotni.
Lauztu triju šķautņu līniju, kas savieno kuba pretējās virsotnes, sauksim par **ceļu**. Katrā ceļā ir 2 baltas un 2 melnas virsotnes **(α)**. Bez tam, ja mēs izvēlamies 3 virsotnes, kas visas nav vienā krāsā, tad noteikti eksistē ceļš, kas satur šīs 3 virsotnes **(β)**. (Pārbaude: ņemam 2 melnas virsotnes un apskatām tās kopā ar katru no baltām; tas izsmeļ visus dažādos gadījumus.

- Ja 6; 7; 8 nav vienā un tai pašā krāsā, uzdevuma apgalvojums seko no **(β)**, jo 6 + 7 + 8 = 21.
- Ja 5; 7; 8 nav vienā krāsā, tad arī uzdevuma apgalvojums seko no **(β)**: 5 + 7 + 8 = 20 un ceturtajā ceļa virsotnē ierakstīts skaitlis ≥ 1.
- Atliek iespēja, ka 5; 6; 7; 8 ir vienā krāsā, pieņemsim, melnā. Tad 4 ir baltā krāsā. Ievērojam, ka 4 + 7 + 8 = 19. Viegli pārbaudīt, ka ir **divi** ceļi, kas satur 4; 7; 8. Vienā no tiem bez 4; 7; 8 ietilpst vēl skaitlis ≥ 2, tāpēc summa uz šī ceļa ir $4+7+8+(\geq 2)=s$, kur $s \geq 21$.

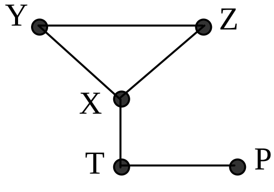
AB.K.2. Vadu pavisam ir $\frac{6\cdot 5}{2}=15$. Varam pieņemt, ka balto vadu ir ≥ 8.

Ir pavisam $C_6^4=C_6^2=15$ kopas, kas katra satur 4 datorus. Katrs vads „ietilpst” $C_4^2=6$ šādās kopās (jau savienotajiem diviem datoriem jāpiekārto katri divi no atlikušajiem četriem datoriem). Tātad 8 baltie vadi sastopami četru datoru kopās $8\cdot 6=48$ reizes. Tā kā $15\cdot 3=45<48$, tad eksistē tāda četru datoru kopa, kurā sastopami ≥ 4 balti vadi. Ja šie vadi veido ciklu, viss kārtībā. Ja nē, viegli saprast, ka baltie vadi veido konfigurāciju A55. zīm., turklāt varam pieņemt, ka citu baltu vadu šajā konfigurācijā nav (citādi jau būtu cikls).

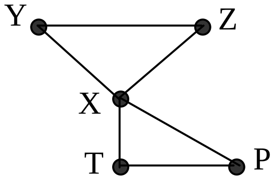


A55. zīm.

Pie abiem pārējiem datoriem P un Q kopā pienāk vismaz 4 balti vadi. Pat ja viens no tiem ir starp P un Q, jābūt ≥ 2 vadiem, kas savieno A55. zīm. konfigurāciju ar vienu no datoriem P un Q (pieņemam – ar P). Ja tie abi iet uz $\{X, Y, Z\}$, viss kārtībā. Tāpēc uzskatām, ka viens no šiem vadiem ir P-T (skat. A56. zīm.). Ja otrs ir P-Y vai P-Z, arī viss kārtībā. Atliek A57. zīm. attēlotais gadījums, turklāt citu baltu vadu šajā konfigurācijā nav.



A56. zīm.



A57. zīm.

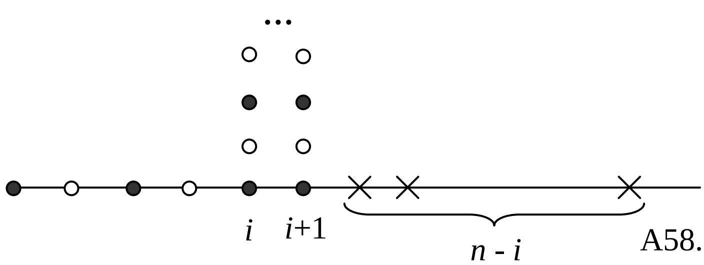
No Q iet 2 balti vadi. Kā iepriekš pierādām, ka viens no tiem iet uz $\{X, Y, Z\}$, otrs uz $\{X, T, P\}$. Ja viens vads ir QX, otrs uzreiz rada ciklu. Tāpēc viens iet no Q uz $\{Y, Z\}$, otrs – no Q uz $\{T, P\}$. Acīmredzami, ka rodas balts cikls.

AB.K.3. Sanumurēsim apakšējās rindas punktus no kreisās uz labo ar 1; 2; 3; ...; n; n + 1. To, ka i-tais punkts ir dzeltens resp. zaļš, izsacīsim ar $i \sim d$ resp. $i \sim z$.

Skaitīsim vispirms krāsojumus, kuros $1 \sim d$. Šķirosim 2 gadījumus:

- apakšējā rindā punkti nokrāsoti pamīšus. Tad 2. rindas kreisais punkts nosaka visas 2. rindas krāsojumu (un šo kreiso punktu var krāsot gan zaļu, gan dzeltenu), pēc tam 3. rindas kreisais punkts nosaka visas 3. rindas krāsojumu, utt. Tāpēc šādu krāsojumu ir 2^n.
- Apakšējā rindā ir divi blakus esoši vienādi nokrāsoti punkti, un pirmais šāds pāris (skaitot no kreisās puses) ir $(i; i+1)$, i = 1; 2; 3; ...; n. Ievērosim, ka i un i + 1 krāsas viennozīmīgi nosaka i paritāte.

 Tagad „kolonnās” virs $(i; i+1)$ krāsas noteiktas viennozīmīgi:



A58. zīm.

Skaidrs, ka pa kreisi no i – tās kolonnas krāsojums arī noteikts viennozīmīgi (apskatām pēc kārtas (i – 1) –o, (i – 2) –o, ..., 2 – o, pirmo kolonnas). Pa labi no (i + 1)–ās kolonnas pirmās rindas krāsojumu var izvēlēties patvaļīgi, bet citu punktu krāsas noteiktas viennozīmīgi (apskatām pēc kārtas (i + 2) – o, (i + 3) – o,..., n – o, (n + 1) – o kolonnas). Tātad dažādu krāsojumu ir 2^{n-i}.

Tāpēc dažādu krāsojumu mūsu gadījumā iznāk $2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^n - 1$.

Kopā ir $2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ krāsojumi, kuros $1 \sim d$.

Gadījumu, kuros $1 \sim z$, arī ir $2^{n+1} - 1$. Tātad pavisam apskatāmo krāsojumu ir $2^{n+2} - 2$.

AB.K.4. Sanumurēsim figūriņas ar skaitļiem no 1 līdz 9 no kreisās uz labo pusi sākuma pozīcijā. Skaidrs, ka nevar būt $n \leq 16$, jo tad Nr. 9 būtu jāpārvietojas pa kreisi. Parādīsim, ka nevar būt arī n = 17. Pie n = 17 figūriņai Nr. 9 jāpaliek uz vietas. Tāpēc pirmais gājiens ir 8 9. Arī Nr. 8 tagad vairs nedrīkst kustēties, tāpēc 9 8 ir „siena”, kurai pāri netiek citas figūriņas.
Parādīsim, kā mērķis ir sasniedzams ar n = 18. Vispirms iebīdām Nr. 9 īstajā vietā. Tad pakāpeniski nogādājam īstajās vietās Nr. 7, Nr. 5, Nr. 3, Nr. 1. Pēc tam nogādājam īstajās vietās pēc kārtas Nr. 2, Nr. 4, Nr. 6, Nr. 8.

AB.K.5. Skaidrs, ka uz lapām jāraksta skolēnu kopas visas netukšās apakškopas, jo to ir tieši $2^{10} - 1 = 1023$. Identificēsim skolēnus ar skaitļiem 0; 1; 2; ...; 9. Ņemsim skolēnu kopu $A \subset \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

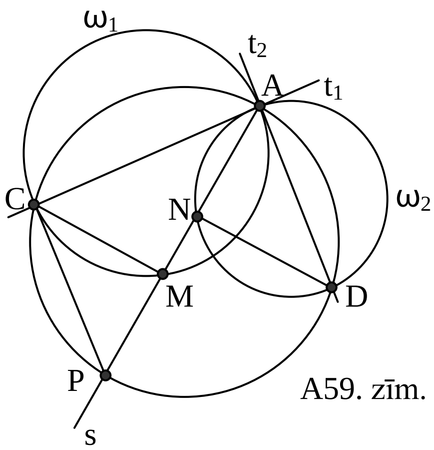
Parādīsim, kā izvēlēties krāsu lapai, uz kuras uzrakstīta A.

- Ja n = 1023, lapas krāsa noteikti ir balta.
- Ja n = 0, lapas krāsa noteikti ir zaļa.
- Apskatām gadījumu, kad n > 0 un n < 1023.

Izsakām $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}$, kur $0 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le 9$ – dažādi naturāli skaitļi (t.i., izsakām n binārajā sistēmā). Uzskatīsim skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_k$ par baltiem, bet pārējos skaitļus no $\{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ – par zaļiem.
Krāsosim kopas A lapu tādā krāsā, kādā ir kopas A lielākais elements. Tā kā divu kopu apvienojuma lielākais elements ir lielākais no šo kopu lielākajiem elementiem, uzdevuma nosacījums par lapu krāsām izpildās. Noskaidrosim, cik ir balto lapu. Ir tieši 2^{a_i} kopas, kuru lielākais elements ir a_i (katru no 0; 1; ...; $a_i - 1$ var iekļaut vai neiekļaut). Tāpēc balto lapu ir $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k} = n$, kas bija vajadzīgs.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. No trijstūra ārējā leņķa īpašības $\angle CMP = \angle CAM + \angle MCA$, $\angle MAD = \angle MCA$ kā hordas - pieskares leņķis;
$\angle CMP = \angle CAM + \angle MCA = \angle CAM + \angle MAD = \angle CAD$.
No ievilkta leņķa īpašībām $\angle CPM = \angle CDA$. No šejienes seko, ka $\Delta MCP \sim \Delta ACD$ un tāpēc $\frac{MC}{AC} = \frac{MP}{AD}$.

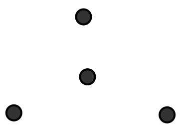


A59. zīm.

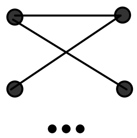
Līdzīgā ceļā $\angle ACM = \angle DAN$ un $\angle CAM = \angle ADN$, tāpēc $\Delta ACM \sim \Delta DAN$ un $\frac{AN}{AD} = \frac{CM}{CA}$.

No abām iegūtajām proporcijām seko $\frac{MP}{AD} = \frac{AN}{AD}$, tātad $MP = AN \Rightarrow NP = AM$, k.b.j.

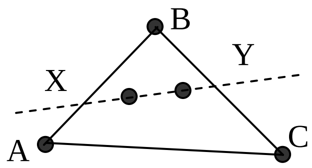
AB.Ģ.2. Skaidrs, ka var būt n = 4 (skat. A60. zīm.).


A60. zīm.

Ja $n \ge 5$, izvēlamies 4 no punktiem. Ja tie ir izliekta četrstūra virsotnes, tad eksistē lauzta līnija, kas sevi krusto (skat. A61. zīm.)



A61. zīm.

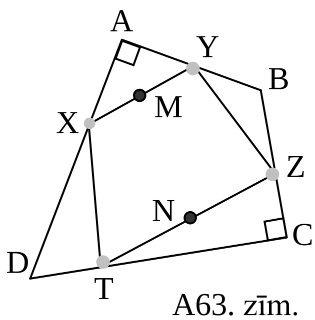


A62. zīm

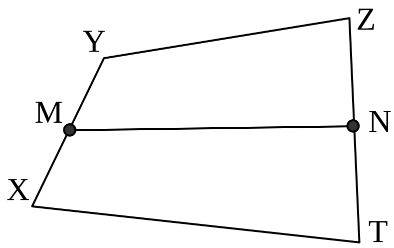
Tāpēc n punktu izliektais apvalks ir trijstūris, un abi pārējie punkti atrodas tā iekšpusē (skat. A62. zīm.). To ir ≥ 2. Taisne XY krusto divas ΔABC malas, tāpēc kopā ar trešās malas galapunktiem veido izliektu četrstūri – pretruna ar iepriekšējo.

AB.Ģ.3. Apzīmējam pelēkos punktus ar X, Y, Z un T (skat. A63. zīm.). Apzīmējam XY un ZT viduspunktus attiecīgi ar M un N. Tad $AM = \frac{1}{2}XY$, $CN = \frac{1}{2}ZT$ (mediānas pret hipotenūzām), un labi zināms, ka $MN \leq \frac{1}{2}(YZ + XT)$ (skat. piezīmi). No šiem faktiem seko, ka

$$XY + ZT + (YZ + XT) \geq 2 \cdot AM + 2 \cdot CN + 2 \cdot MN =$$
$$= 2(AM + MN + NC) \geq 2 \cdot AC \text{, k.b.j.}$$



A63. zīm.

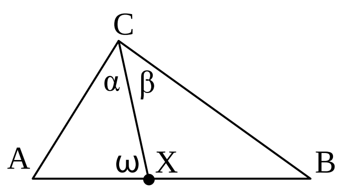


A64. zīm.

<u>Piezīme:</u>

$$2\,\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZN}\right) + \left(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TN}\right) = \left(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MX}\right) + \left(\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{XT}\right) +$$
$$+ \left(\overrightarrow{ZN} + \overrightarrow{TN}\right) = \vec{0} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{XT} + \vec{0} = \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{XT} \text{, tāpēc}$$
$$\left|2\,\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{XT}\right| \leq YZ + XT \text{, k.b.j.}$$

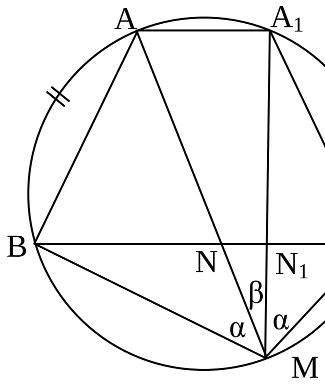
AB.Ģ.4. <u>Lemma.</u> $\frac{AX}{XB} = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{BC \cdot \sin\beta}$ (skat. A65. zīm.).



A65. zīm.

Tiešām, no sinusu teorēmas $\frac{AX}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$ un $\frac{BX}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin(180^o - \omega)}$.

Dalot šīs vienādības vienu ar otru, iegūstam $\frac{AX}{AC}\cdot\frac{BC}{BX}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{AX}{BX}=\frac{AC\cdot\sin\alpha}{BC\cdot\sin\beta}$, k.b.j.



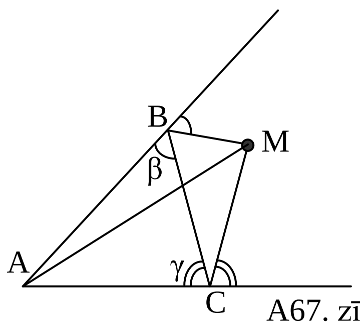
A66. zīm.

Tā kā $AA_1 \parallel BC$, tad $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{CA_1}$. Tāpēc $\angle BMA=\angle A_1MC\ (=\alpha)$; apzīmēsim $\angle AMA_1=\beta$. Tad $\frac{BN_1}{N_1C}=\frac{BM\sin(\alpha+\beta)}{CM\sin\alpha}$, $\frac{NB}{NC}=\frac{BM\sin\alpha}{CM\sin(\alpha+\beta)}$,

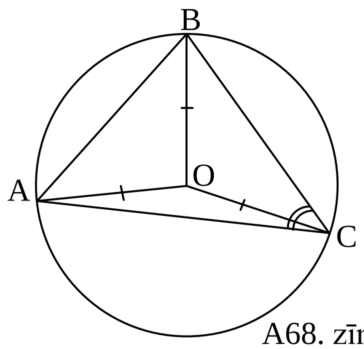
$\frac{AC}{AB}=\frac{2R\sin(\alpha+\beta)}{2R\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ – no sinusu teorēmas.

Šīs sakarības ievietojot pierādāmajā vienādībā, iegūst identitāti.

AB.Ģ.5. Apzīmēsim $\angle BCA=\gamma$ un $\angle CBA=\beta$, ΔABC apvilktās riņķa līnijas centru ar O.



A67. zīm.



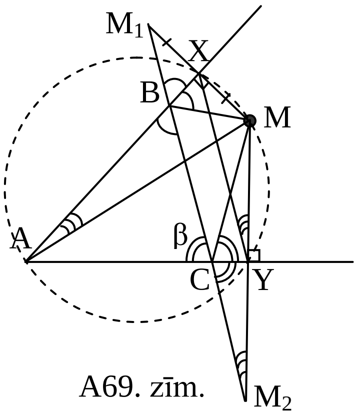
A68. zīm.

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $\angle BAM=\angle BAO$, vajadzīgais būs pierādīts. Tā kā $\angle ACB=\gamma$, tad $\angle AOB=2\gamma$. Tad $\angle BAO+\angle ABO=180^o-2\gamma$. Tā kā ΔAOB – vienādsānu, tad $\angle BAO=90^o-\gamma$ (skat. A68. zīm.).

Atrodam M simetriskos punktus M_1 resp. M_2 attiecībā pret AB resp. AC. (skat. A69. zīm.). Tad M_1, B, C, M_2 atrodas uz vienas taisnes. Viduslīnijas īpašības dēļ $XY \parallel BC$.

Caur A, X, M, Y var novilkt riņķa līniju, jo $\angle AXM+\angle AYM=90^o+90^o=180^o$.

Tad $\angle BAM=\angle XYM=\angle CM_2Y=90^o-\gamma=\angle BAO$, k.b.j.



A69. zīm.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Viegli sastādīt šādu tabulu:

$n \equiv_7$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv_7$	0	1	1	-1	1	-1	-1

Skaidrs, ka 3^n nekad nedalās ar 7. Tāpēc, lai $3^n + n^3$ dalītos ar 7, jābūt $3^n \equiv_7 -1$ vai $3^n \equiv_7 1$ (atbilstoši tam, vai $n^3 \equiv_7 1$ vai $n^3 \equiv_7 -1$). Bet šajos gadījumos $1 \cdot (-1) + 1 = 0$ un $(-1) \cdot 1 + 1 = 0$. Līdzīgi, ja $3^n \cdot (1) + 1 \equiv_7 0$, jābūt $3^n \equiv_7 -1$, un, ja $3^n \cdot (-1) + 1 \equiv_7 0$, jābūt $3^n \equiv_7 1$ (ievērojam, ka **katram** naturālam n vai nu $3^n \equiv_7 1$, vai $3^n \equiv_7 -1$). Šajos gadījumos $(-1) + 1 = 0$ un $1 + (-1) = 0$. Līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

AB.S.2. Apzīmēsim skaitļa n lielāko nepāra dalītāju ar $f(n)$. Ievērosim: ja $f(x) = f(y)$, tad x un y attiecība ir divnieka pakāpe. Starp skaitļiem $n + 1$; $n + 2$; ...; $2n$ šādus x atrast nav iespējams, tāpēc vērtības $f(n+1), f(n+2), \ldots, f(2n)$ visas ir dažādas. Skaidrs, ka šīs vērtības var būt tikai no kopas $\{1; 3; 5; \ldots; 2n-1\}$, t.i., skaitā n. Tā kā to ir tieši n, tad tās ir visi šīs kopas elementi, katrs pa reizei. Tāpēc to summa ir $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2$. Mūsu gadījumā n = 5000, tāpēc šī summa ir 25 000 000.

AB.S.3. Apzīmējam $x = \frac{a+b}{2}$ un $y = \frac{2ab}{a+b}$.

Tad $ab = xy$ un $0 = a^2 - a(a+b) + ab = a^2 - 2ax + xy$, tāpēc $x(x-y) = (a-x)^2$, un $x(x-y)$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Apzīmēsim $d = LKD(x, y)$ un $x = dx_1$, $y = dy_1$. Tad $LKD\ (x_1, y_1) = 1$, tāpēc arī $\boldsymbol{LKD\ (x_1, x_1 - y_1) = 1}$. Tā kā $x(x-y)$ ir kvadrāts, tad $d^2 x_1 (x_1 - y_1)$ ir kvadrāts, tāpēc x_1 un $x_1 - y_1$ ir kvadrāti. Apzīmējam $x_1 = m^2$ un $x_1 - y_1 = n^2$.

Ievērojam, ka $xy = ab = \sqrt{ab}^2$ ir kvadrāts. Tātad $x_1 d \cdot y_1 d = d^2 m^2 \left(m^2 - n^2\right)$ ir kvadrāts. Tāpēc $m^2 - n^2$ ir kvadrāts; apzīmējam $m^2 - n^2 = p^2$ jeb $\boldsymbol{m^2 = n^2 + p^2}$.

Esam ieguvuši, ka $x = dm^2$, $y = dy_1 = d\left(x_1 - n^2\right) = d\left(m^2 - n^2\right) = dp^2$.

No $a^2 - 2ax + xy = 0$ seko $a = x \pm \sqrt{x(x-y)}$; $b = 2x - a = x \mp \sqrt{x(x-y)}$. Tāpēc $|a-b| = 2\sqrt{x(x-y)} = 2\sqrt{dm^2 \cdot d\left(m^2 - p^2\right)} = 2dmn$. Mazākā vērtība iegūstama, ja $d = 1$, $m = 5$, $n = 3$, jo jābūt $m^2 = n^2 + p^2$. Tāpēc $\boldsymbol{|a-b| \geq 30}$. Šī vērtība sasniedzama, ja $a = 40$, $b = 10$.

AB.S.4. Atbilde: meklējamais skaitlis ir 505.

Risinājums. To, ka 505 apmierina uzdevuma prasības, pārbaudām tieši. Tāpēc skaidrs, ka meklējamais n > 10. (Tas skaidrs arī no piemēra n = 11.) Tā kā, dalot n ar 4, atlikums ir nepāra, tad arī **n ir nepāra.** Ja $n = q \cdot x^2 + r$, tad q ≥ 2 (jo $x^2 < \frac{n}{2}$). Dalot ar nepāra kvadrātu, q nevar būt 3 (tad n iznāktu pāra); tātad $q \geq 4$. Tāpēc nevienādība $\frac{n}{4} < (2k-1)^2 \leq \frac{n}{3}$ nav iespējama.

Tātad jāeksistē tādam m, ka $(2m-1)^2 \leq \frac{n}{4} < \frac{n}{3} < (2m+1)^2$. No šejienes $(2m+1)^2 - (2m-1)^2 > \frac{n}{3} - \frac{n}{4}$, tāpēc $8m > \frac{n}{12}$ un $(2m-1)^2 \leq \frac{n}{4} < 24m$. No šejienes $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, tātad $n < 96 \cdot m = 576$. Tad **nepāra** kvadrāti, no tiem, par dalīšanu ar kuriem runā uzdevumā, ir 9; 25; 49; ...; 225.

Dalot ar 169 un 225, dalījumam q jābūt pāra; tāpēc tam jābūt 2 (citādi $4 \cdot 169 > 576$). Tāpēc jābūt $n < 3 \cdot 169 = 507$. Lielākā iespējamā vērtība 505 der.

AB.S.5. Skaidrs, ka der funkcija $f(t) \equiv t$. Pierādīsim, ka citu funkciju ar vajadzīgajām īpašībām nav.

Pie m = n = 1 iegūstam, ka 4 dalās ar $f^2(1) + f(1)$, tāpēc $f(1) = 1$ (ja $f(1) \geq 2$, tad $f^2(1) + f(1) \geq 6$). Pie m = 1 un patvaļīga n iegūstam, ka $\boldsymbol{(n+1)^2 \vdots f(n) + 1}$; pie n = 1 un patvaļīga m iegūstam, ka $\boldsymbol{\left(m^2+1\right)^2 \vdots f^2(m) + 1}$.

Pieņemsim, ka p – patvaļīgs pirmskaitlis; pierādīsim, ka $\boldsymbol{f(p-1) = p-1}$. No iepriekšējā seko, ka $f(p-1)+1$ ir skaitļa p² dalītājs; tātad $f(p-1)+1 = p$ vai $f(p-1)+1 = p^2$. Ja $f(p-1)+1 = p^2$, tad $f(p-1) = p^2 - 1$. Tad no iepriekšējā $\left((p-1)^2+1\right)^2 \vdots \left(p^2-1\right)^2 + 1$. Tas nav iespējams, jo pie p > 1 ir spēkā $\left(p^2-1\right)^2 + 1 > \left((p-1)^2+1\right)^2$ – viegli pārbaudīt.

Tātad mums ir bezgalīgi daudzas tādas k vērtības, ka $f(k) = k$. Ņemot uzdevuma nosacījumos m = k, iegūstam: $\left(k^2+n\right)^2$ dalās ar $k^2 + f(n)$ visiem

n. Ņemam vienu fiksētu n. Ievērojam, ka
$\left(k^2+n\right)^2=\left(k^2+f(n)+n-f(n)\right)^2=\left(k^2+f(n)\right)^2+$
$+2\left(k^2+f(n)\right)\left(n-f(n)\right)+\left(n-f(n)\right)^2$. Tātad visiem bezgalīgi daudzajiem k skaitlis $\left(n-f(n)\right)^2$ dalās ar $f(n)+k^2$. Izvēloties tādu k, ka $k^2+f(n)>\left(n-f(n)\right)^2$, redzam, ka $n-f(n)=0$ un $f(n)=n$.

BW. 16.matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2005"

BW.A. Algebra

BW.A.1. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Ievērosim, ka a_{n+1} ir skaitļa a_n decimālā pieraksta ciparu 2005-o pakāpju summa. Pierādīsim, ka (a_n) ir ierobežota virkne. Tad tās locekļi var pieņemt tikai galīgu skaitu vērtību (jo tie ir naturāli skaitļi). Tā kā locekļu ir bezgalīgi daudz, tad vismaz viena vērtība tiks pieņemta bezgalīgi daudzas reizes, tātad vairāk nekā vienu reizi, un uzdevums būs atrisināts.
Skaidrs, ka virkne ir ierobežota no apakšas, jo visi tās locekļi ir pozitīvi. Pierādīsim, ka tā ir ierobežota arī no augšas.
Atradīsim vispirms tādu skaitli M, kam piemīt īpašība: ja x – naturāls skaitlis un $x>M$, tad skaitļa x decimālā pieraksta ciparu 2005-o pakāpju summa $S(x)$ mazāka par x.
Apzīmēsim patvaļīga (k+1)-ciparu naturāla skaitļa x decimālo pierakstu ar $\overline{c_0c_1c_2...c_k}$, $c_0\neq 0$, $0\leq c_1,c_2,...,c_k\leq 9$. Tad

$$S(x)=c_0^{2005}+c_1^{2005}+...+c_k^{2005}\leq (k+1)\cdot 9^{2005}=$$
$$=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot 9^{2005}\leq 2^k\cdot 9^{2005};$$

savukārt $x\geq 10^k$. Tāpēc $\frac{S(x)}{x}\leq\frac{2^k\cdot 9^{2005}}{10^k}=\frac{9^{2005}}{5^k}$. Ja k ir pietiekoši liels, tad $\frac{S(x)}{x}<1$ un tātad $S(x)<x$. Tātad par M var ņemt jebkuru (k+1)-ciparu naturālu skaitli, ja tikai $5^k>9^{2005}$.
Apzīmēsim ar M_1 lielāko no summām $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(M)$. Tālāk šķirojam divus gadījumus:
1) neviens virknes loceklis nav lielāks pa M. Tad tā ir ierobežota no augšas ar M.
2) virknē ir locekļi, kas lielāki par M; apzīmēsim **pirmo** no tiem ar L, $L>M$. Tad nākošie virknes locekļi pakāpeniski samazinās, kamēr kāds no tiem kļūst mazāks vai vienāds ar M. Tagad nākošais virknes loceklis nevar būt lielāks par M_1. Ja šis loceklis ir lielāks par M, tad turpmākie virknes locekļi atkal samazinās, kamēr kāds no tiem nepārsniedz M, utt. Tātad neviens no turpmākajiem virknes locekļiem nav lielāks par M_1, un uzdevums ir atrisināts, jo neviens virknes loceklis nepārsniedz lielāko no skaitļiem L un M_1.
Piezīme: patiesībā vērtību M_1 var pārsniegt tikai a_0 un tam sekojošie daži pirmie virknes locekļi.

BW.A.2. Nevienādība identisku pārveidojumu ceļā viegli pārveidojama par $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq\frac{27}{8}$.

Apzīmēsim $\cos^2\alpha=x$, $\cos^2\beta=y$, $\cos^2\gamma=z$; x ,y, z > 0. Tā kā visiem pozitīviem x, y, z ir spēkā

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq$$

$$\geq 3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}=9,$$

tad $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$, un mums pietiek pierādīt, ka $\frac{9}{x+y+z}\geq\frac{27}{8}$ jeb, ka $x+y+z\leq\frac{8}{3}$. Bet $x+y+z=3-\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)$, tāpēc pietiek pierādīt, ka $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geq\frac{1}{3}$. Tas seko no labi pazīstamās nevienādības starp nenegatīvu skaitļu vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko: ja $a,b,c\geq 0$, tad $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}$.

Mūsu gadījumā $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1$, tāpēc $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geq 3\cdot\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$, k.b.j.

BW.A.3. No virknes definīcijas seko, ka visi tās locekļi ir pozitīvi, tāpēc $a_{k+2}>a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}$. Tāpēc pakāpeniski iegūstam

$$\frac{1}{2}a_{k+1}<a_{K+2}-a_k \quad (1)$$

$$a_{k+1}<2a_{K+2}-2a_k \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_k a_{k+2}}<\frac{2}{a_k a_{k+1}}-\frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}} \quad (3)$$

(nevienādība (3) iegūta, dalot (2) abas puses ar $a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}$).

Ievietojot (3) pakāpeniski k=1; 2; 3; ...; 98 un iegūtās nevienādības saskaitot, iegūstam

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{98}a_{100}}<\frac{2}{a_1a_2}-\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_2a_3}-\frac{2}{a_3a_4}+\ldots+$$

$$+\frac{2}{a_{98}a_{99}}-\frac{2}{a_{99}a_{100}}=\frac{2}{a_1a_2}-\frac{2}{a_{99}a_{100}}<\frac{2}{a_1a_2}=4, \text{ k.b.j.}$$

BW.A.4. Acīmredzot der $P(t)\equiv t$: tiešām, $P(x^2+1)=x^2+1$ un $(P(x))^2+1=(x)^2+1=x^2+1$.

Viegli pierādīt: ja P(t) ir polinoms, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, tad polinoms $Q(t)\equiv(P(t))^2+1$ arī apmierina uzdevuma nosacījumus. Tiešām, $Q(x^2+1)=(P(x^2+1))^2+1=((P(x))^2+1)^2+1=(Q(x))^2+1$.

Tātad divi citi meklējamie polinomi varētu būt, piemēram, $P_1(x)=x^2+1$ un $P_2(x)=(P_1(x))^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$

Interesanti, bet grūts uzdevums ir atrast **visus** polinomus P(x) ar uzdevumā minēto īpašību.

BW.A.5. Tā kā $(x-1)^2\geq 0$, tad $x^2+1\geq 2x$ un tātad $x^2+2\geq 2x+1$. Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka $\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\leq 1$ jeb $a(2b+1)(2c+1)+b(2a+1)(2c+1)+c(2a+1)(2b+1)\leq(2a+1)(2b+1)(2c+1)$.

Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam $4abc\leq a+b+c+1$ jeb, tā kā abc=1, $a+b+c\geq 3$.

No nevienādības starp pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, k.b.j.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Izdalīsim n ar k ar atlikumu: $n=q\cdot k+r, 0\leq r<k$. Skaidrs, ka $q\geq 1$.

Mēs pierādīsim, ka **katra atsevišķi ņemta kārts atgriežas sākotnējā pozīcijā vai nu pēc 2q gājieniem vai pēc 2q+2 gājieniem**. No tā seko, ka pēc 2q(q+1) gājieniem visas kārtis vienlaicīgi būs sākuma pozīcijās. Atliek ievērot, ka $2q(q+1)\leq 2q\cdot 2q=4q^2=4\cdot\left(\frac{n-r}{k}\right)^2\leq 4\cdot\left(\frac{n}{k}\right)^2$, k.b.j.

Pierādīsim augstāk izcelto apgalvojumu.

Sanumurēsim kāršu pozīcijas ar 1; 2; 3; ...; n, sākot no apakšas. Tā kā katra kārts kādreiz nonāk vienā no pozīcijām 1; 2; ...; k, tad izcelto apgalvojumu pietiek pierādīt kārtīm, kas sākumā ir pozīcijās 1; 2; ...; k. Sauksim tās par kārtīm 1; 2; ...; k.

Apskatīsim i-to kārti. Šķirosim divus gadījumus.

1) $\mathbf{i\leq r}$**.**

Tad pirmo q gājienu rezultātā šī kārts pakāpeniski nonāks pozīcijās i+k; i+2k; ...; $i+q\cdot k$ (būtiski, ka $i+q\cdot k\leq r+q\cdot k=n$), t.i., visu laiku būs virzījusies uz augšu. Pēc šiem q gājieniem apskatāmā kārts ir starp augšējām k kārtīm: virs tās ir vēl $n-(i+q\cdot k)=(r+q\cdot k)-(i+q\cdot k)=r-i<r<k$ kārtis.

Apgriežot augšējās k kārtis otrādi, apskatāmā kārts būs (r-i+1)-ā, skaitot no apakšas, tātad ar kārtējo gājienu tā nonāks (r-i+1)-ā pozīcijā. Šobrīd izdarīts q+1 gājiens.

Ievērosim, ka $r-i+1=r-(i-1)\leq r$. Tāpēc, spriežot līdzīgi kā iepriekš, vēl pēc q+1 gājiena šī kārts nonāks pozīcijā ar numuru r-(r-i+1)+1=i, t.i., būs atgriezusies sākotnējā pozīcijā.

2) $\mathbf{r<i\leq k}$**.**

Šo gadījumu analizē līdzīgi A gadījumam. Atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi („cikla garums” izrādīsies 2q). Līdz ar to uzdevums atrisināts.

BW.K.2. Teiksim, ka rindiņa $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ ir rindiņu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ un $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ reizinājums.

Skaidrs, ka tabulā ir dažas nulles (citādi visas rindiņas būtu vienādas). Šķirosim vairākus gadījumus.

1) Ir rindiņa ar tieši vienu nulli; varam uzskatīt, ka tā ir (0; 1; 1; 1; 1; 1) (citi gadījumi ir analoģiski). Koncentrēsimies uz pirmo kolonnu. Ja kādā rindiņā $(1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ pirmajā kolonnā ir 1, tad reizinājuma (0; 1; 1; 1; 1; 1)x $x(1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)=(0; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ pirmajā kolonnā ir 0, turklāt katrai rindiņai ar vieninieku pirmajā kolonnā šādā ceļā atbilst **cita** rindiņa ar nulli pirmajā kolonnā. Tātad šajā gadījumā pirmā kolonna apmierina uzdevuma prasības.

2) Ir rindiņa ar tieši divām nullēm; varam uzskatīt, ka tā ir (0; 0; 1; 1; 1; 1). Ar n_{ij} apzīmēsim to rindiņu skaitu, kam pirmie divi elementi ir atbilstoši i un j. Līdzīgi kā A gadījumā pierādām, ka $\mathbf{n_{00} \geq n_{11}}$. Varam pieņemt, ka $\mathbf{n_{01} \geq n_{10}}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Tad 1. kolonnā ir $n_{00}+n_{01}$ nulles un $n_{10}+n_{11}$ vieninieki. Tā kā $n_{00}+n_{01} \geq n_{11}+n_{10}$, tad atkal pirmā kolonna apmierina uzdevuma prasības.

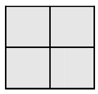
3) Katrā rindiņā (izņemot varbūt rindiņu (1; 1; 1; 1; 1; 1), ja tāda vispār ir) ir vismaz 3 nulles. Pierādīsim: nevar būt, ka katrā tādā rindiņā ir tieši 3 nulles. Pieņemsim pretējo. Tā kā n>2, tad ir vismaz divas **dažādas** rindiņas, katra ar 3 nullēm; to reizinājumā ir vismaz 4 nulles – pretruna. Iegūstam, ka tabulā ir **vairāk** nekā 3(n-1) nulles. Tā kā tās sadalās pa sešām kolonnām, tad kādā kolonnā to ir **vairāk** nekā $\frac{3(n-1)}{6}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$. Ja n=2k, $k \in N$, tad nuļļu skaits šajā kolonnā ir vairāk nekā $k-\frac{1}{2}$, tātad vismaz k, tātad vismaz puse; ja n=2k+1, $k \in N$, tad nuļļu skaits šajā kolonnā ir vairāk nekā k, tātad vismaz k+1, tātad **vairāk** nekā puse.

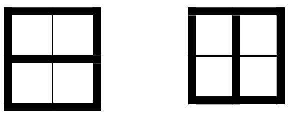
BW.K.3. Atbilde: ar 48 gājieniem

Risinājums. Vispirms pierādīsim, ka ar 48 gājieniem pietiek. Pieņemsim, ka viena no kvadrātiskā režģa diagonālēm ir XY. Uz šīs diagonāles ir 48 režģa punkti (bez X un Y). Izvēlēsimies Z-patvaļīgu režģa punktu uz šīs diagonāles. Ja XZ>YZ, uzzīmējam tāda kvadrāta kontūru, kura diagonāle ir XZ; ja YZ>XZ, uzzīmējam tāda kvadrāta kontūru, kura diagonāle ir YZ. Viegli pārbaudīt, ka uzzīmētie kontūri „nosedz" visu režģi.

Tagad parādīsim, ka ar mazāk kā 48 gājieniem nepietiek. Aplūkosim tos vienības nogriežņus, kas sākas uz kvadrātiskā režģa ārējā kontūra un vērsti tā iekšpusē; tādu nogriežņu pavisam ir $4 \cdot 24 = 96$. Katrs sarkanais kontūrs satur ne vairāk kā divus šādus nogriežņus, tāpēc jāiekrāso vismaz $\frac{96}{2}=48$ kontūri.

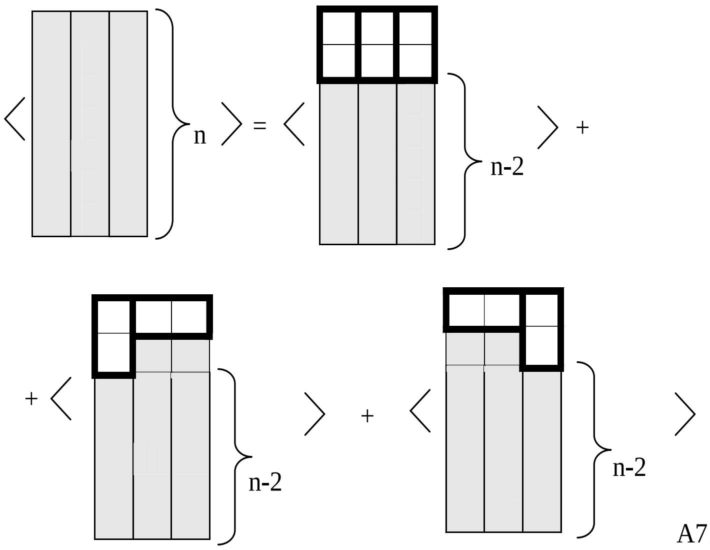
BW.K.4. Ja F – no vienības kvadrātiem sastāvoša figūra, daļa no kuras iesvītrota, tad ar ⟨F⟩ apzīmēsim to veidu skaitu, kuros iesvītroto daļu var sagriezt taisnstūros ar izmēru 1×2.

Piemēram, ⟨  ⟩ =2 (skat. A70.zīm.)



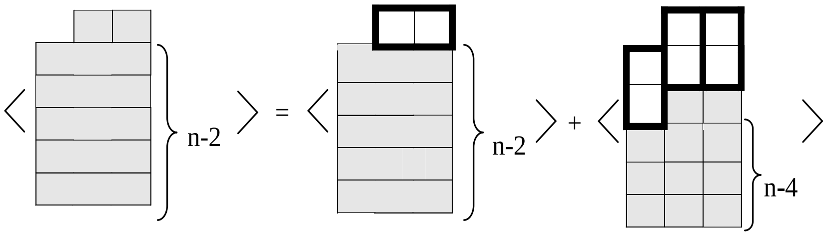
A70.zīm.

Pētot, kādā veidā no augšas var sākties $3 \times (n+2)$ rūtiņu taisnstūra sagriešana 1×2 rūtiņu taisnstūros, viegli iegūstam, ka pie $n \geq 2$



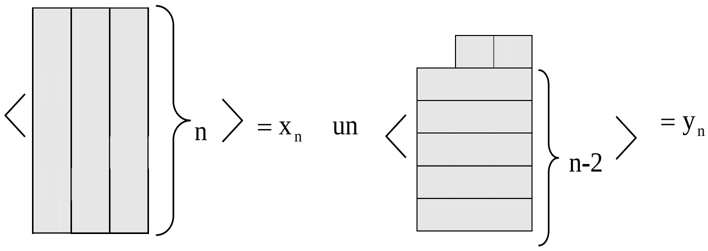
A71.zīm.

Līdzīgi iegūstam, ka pie $n \geq 4$



A72.zīm.

Apzīmējot



,

no šejienes iegūstam:

Pie $n \geq 2$ $\quad y_n = x_{n-2} + 2\,y_n$ $\quad$ (no A71. zīm.) $\quad$ (1)

pie $n \geq 4$ $\quad y_n = x_{n-2} + y_{n-2}$ $\quad$ (no A72. zīm.) $\quad$ (2)

Vienādībā (1) ievietojot n vietā n-2, iegūstam, ka

pie $n \geq 4$ $\quad 2\,y_{n-2} = x_{n-2} - x_{n-4}$ $\quad$ (3)

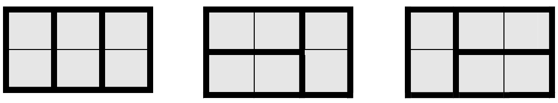
Vienādību (2) varam pārveidot par

pie $n \geq 4$ $\quad 2\,y_n = 2x_{n-2} + 2y_{n-2}$ $\quad$ (4)

Saskaitot (1), (3) un (4), pēc saīsināšanas iegūstam:

pie $n \geq 4$ $\quad x_n = 4x_{n-2} - x_{n-4}$ $\quad$ (5)

Viegli pārbaudīt, ka $x_2 = 3$ (skat. A73. zīm.).



A73. zīm.

Skaidrs arī ,ka $x_0=1$ (taisnstūrim ar 0 rindiņām eksistē viens sadalījums 1×2 elementos – „tukšais sadalījums", kas nesatur nevienu elementu. Citādi to var saprast arī no A71. zīm.: lai iznāktu $x_2=3$, pirmajam saskaitāmajam x_0 jābūt vieniniekam.
No $x_0=1$, $x_2=3$ un sakarības (5) varam pakāpeniski aprēķināt (x_{2n}) elementu atlikumus pēc moduļa 3.

2n	X_{2n} atlikums pēc moduļa 3
0	1
2	0
4	$4\cdot 0-1=-1\equiv 2$
6	$4\cdot 2-0=8\equiv 2$
8	$4\cdot 2-2=6\equiv 0$
10	$4\cdot 0-2=-2\equiv 1$
12	$4\cdot 1-0=4\equiv 1$
14	$4\cdot 1-1=3\equiv 0$

Katrs nākošais atlikums viennozīmīgi atkarīgs no diviem iepriekšējiem. Tā kā divu pēc kārtas sekojošu atlikumu pāris (1;0) ir atkārtojies, tad cikliski atkārtosies arī visi tālākie atlikumi. Secinām, ka pie n=2; 8; 14; 20; ... x_n dalās ar 3. Tā kā $200=2+6\cdot 33$, tad arī x_{200} dalās ar 3, k.b.j.

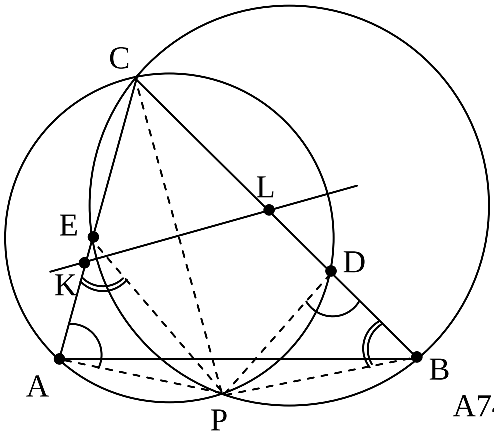
BW.K.5. Atbilde: n=11.
Risinājums. Ja izvēlēti 10 dalītāji, kas nesatur pirmskaitli 13, tad nekādu šo dalītāju reizinājums nevar būt m. Tāpēc jābūt $n\ge 11$. Sadalīsim kopu M piecās daļās:

$$\{2\cdot 3,\quad 5\cdot 13,\quad 7\cdot 11\}$$
$$\{2\cdot 5,\quad 3\cdot 7,\quad 11\cdot 13\}$$
$$\{2\cdot 7,\quad 3\cdot 13,\quad 5\cdot 11\}$$
$$\{2\cdot 11,\quad 3\cdot 5,\quad 7\cdot 13\}$$
$$\{2\cdot 13,\quad 3\cdot 11,\quad 5\cdot 7\}.$$

Ja izvēlas 11 dalītājus no kopas M, tad trīs no tiem būs izvēlēti no vienas daļas (jo $2\cdot 5=10<11$). Bet katrā daļā visu triju dalītāju reizinājums ir m.

BW.Ģ. Ģeometrija

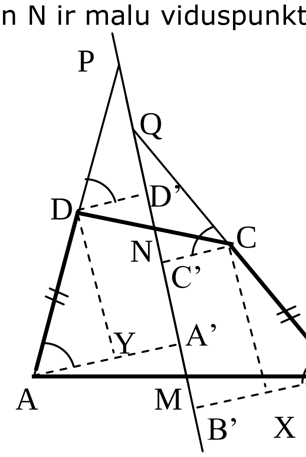
BW.Ģ.1. Pieņemsim, ka abas minētās riņķa līnijas bez punkta C krustojas vēl arī punktā P. Taisne KL, kas iet caur centriem, ir perpendikulāra CP. Ja mēs pierādīsim, ka CP ir $\angle ACB$ bisektrise, tad trijstūrī KCL bisektrise būs arī augstums, tāpēc ΔKCL būs vienādsānu un KC=LC.



A74. zīm.

No tā, ka četrstūri CAPD un CEPB ir ievilkti, seko A74. zīm. parādītās leņķu vienādības. Tā kā bez tam AE=BD, tad $\Delta APE = \Delta DPB$ (lml). Tāpēc P ir vienādos attālumos no taisnēm CA un CB (vienādos trijstūros atbilstošie augstumi ir vienādi), tāpēc P atrodas uz $\angle ACB$ bisektrises, k.b.j.

BW.Ģ.2. Ar A′, B′, C′, D′ apzīmēsim attiecīgi punktu A, B, C, D projekcijas uz taisnes MN. Tā kā M un N ir malu viduspunkti, tad AA′=BB′ un CC′=DD′.



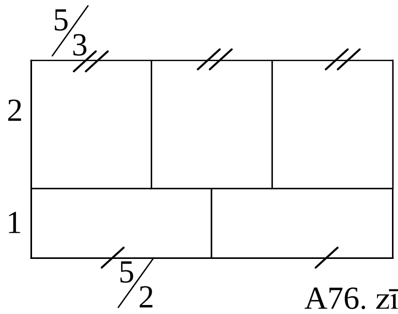
A75. zīm.

Apzīmēsim ar X un Y attiecīgi C resp. D projekcijas uz BB′ resp. AA′. Tad AY=AA′-DD′=BB′-CC′=BX. No šīs vienādības un no AD=BC seko taisnleņķa trijstūru vienādība $\Delta AYD = \Delta BXC$. Tāpēc $\angle DAY = \angle CBX$. No šīs vienādības un no AA′=BB′ seko taisnleņķa trijstūru vienādība $\Delta AA'P = \Delta BB'Q$; tāpēc AP=BQ. Tāpēc CQ=BQ-BC=AP-AD=DP, k.b.j.

BW.Ģ.3. <u>Atbilde:</u> **a)** ar 6, **b)** ar 5.

<u>Risinājums</u>. **a)** Apskatīsim taisnstūra virsotnes un garāko malu viduspunktus. Katri divi no šiem 6 punktiem atrodas attālumā ≥ 3 viens no otra. Tā kā $3 > 2 \cdot \sqrt{2}$, tad nekādus divus no šiem 6 punktiem nevar pārklāt ar vienu riņķi; tāpēc ar 5 riņķiem nepietiek. No otras puses, taisnstūri 6×3 viegli pārklāt ar sešiem kvadrātiem 2×2, un katru no šiem kvadrātiem var pārklāt ar vienu riņķi. Tātad ar 6 riņķiem pietiek.

b) Apskatīsim taisnstūra virsotnes un centru. Attālums no centra līdz virsotnei ir $\frac{1}{2}\sqrt{5^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34} = \sqrt{8{,}5} > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; arī $3 > 2\sqrt{2}$ un $5 > 2\sqrt{2}$. Tāpēc nekādus divus no šiem 5 punktiem nevar pārklāt ar vienu riņķi; tāpēc ar 4 riņķiem nepietiek.



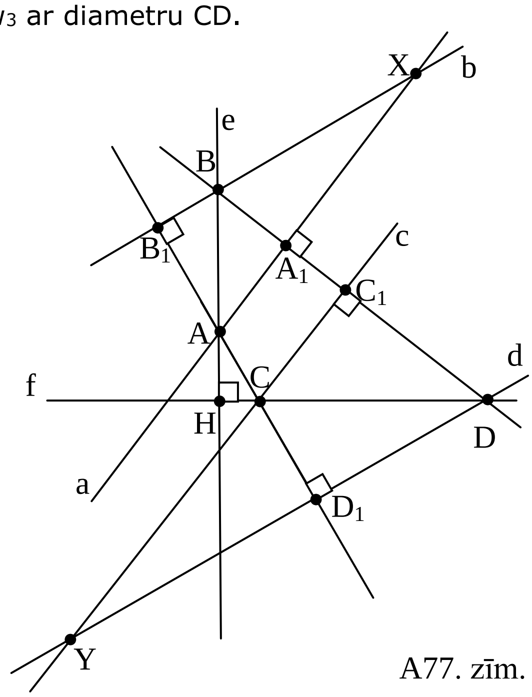
A76. zīm.

Kā redzams A76. zīm., taisnstūri var sadalīt 5 taisnstūros ar izmēriem $\frac{5}{3} \times 2$ vai $\frac{5}{2} \times 1$; katram no tiem diagonāle ir īsāka nekā $2\sqrt{2}$, tātad katru no tiem var pārklāt ar vienu riņķi. Tātad ar 5 riņķiem pietiek.

BW.Ģ.4. Apzīmējam AC viduspunktu ar B_1. Papildinām trijstūri ABC līdz paralelogramam ABCX. Tad CX=BA, tātad CX=CD=CE. Tātad eksistē riņķa līnija ω, kas iet caur X, D un E. Tā kā DE ir šīs riņķa līnijas diametrs, tad

$\angle DXE = 90^0$. Punkts M atrodas uz BX, un saskaņā ar mediānu krustpunkta īpašību $BM = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BX$. Tā kā arī $BP = \frac{1}{3}BD$ un $BQ = \frac{1}{3}BE$, tad homotētijā ar centru B un koeficientu $\frac{1}{3}$ $\angle DXE$ attēlojas par $\angle PMQ$. Tāpēc $\angle PMQ = \angle DXE = 90^0$.

BW.Ģ.5. Apzīmējam ar A_1, B_1, C_1, D_1 attiecīgi a un BD, b un AC, c un BD, d un AC krustpunktus. No dotajiem taisnajiem leņķiem seko, ka sekojošas punktu grupas katra atrodas uz vienas riņķa līnijas:
A, D, A_1, D_1, H – uz w_1 ar diametru AD,
B, C, B_1, C_1, H – uz w_2 ar diametru BC,
C, D, C_1, D_1 – uz w_3 ar diametru CD.



A77. zīm.

Riņķa līniju w_1 un w_3 radikālā ass ir DD_1, bet w_2 un w_3 radikālā ass ir CC_1. Tā kā Y ir DD_1 un CC_1 krustpunkts, tad Y ir w_1, w_2 un w_3 radikālais centrs, tātad pieder w_1 un w_2 radikālajai asij ℓ. Līdzīgi (w_3 vietā izmantojot riņķa līniju w_4, kas iet caur A, B, A_1, B_1) pierāda, ka arī X pieder w_1 un w_2 radikālajai asij ℓ. Bet ℓ iet caur H, kas ir kopējs w_1 un w_2. Tātad X, Y, H visi pieder taisnei ℓ, k.b.j.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Ja q=1, uzdevuma apgalvojums acīmredzams. Ja q>1, izsacīsim q kā pirmskaitļu reizinājumu: $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$. Protams, arī q_1, q_2, ..., q_k ir skaitļa $(n+1)^p - n^p$ dalītāji. Pieņemsim, ka mēs prastu pierādīt: q_i-1 dalās ar p, ja $1 \le i \le k$. Pierakstot to kongruenču valodā, iegūstam

$$q_1 \equiv_p 1$$
$$q_2 \equiv_p 1$$
$$\vdots$$
$$q_k \equiv_p 1$$

Sareizinot šīs kongruences, iegūstam $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k \equiv_p 1$ jeb $q \equiv_p 1$, k.b.j.

Tātad mums pietiek pierādīt uzdevuma apgalvojumu gadījumam, kad q ir pirmskaitlis.
Risinājumā mēs izmantosim šādus divus labi pazīstamus skaitļu teorijas faktus (lasītājs var tos pierādīt patstāvīgi vai arī atrast to pierādījumus literatūrā):
(1) ja q – pirmskaitlis un x nedalās ar q, tad eksistē tāds y, ka $xy \equiv_q 1$
(2) ja t_0 ir **mazākais** no tiem nenulles kāpinātājiem t, kam izpildās sakarība $x^t \equiv_p 1$, tad **katrs** šāds kāpinātājs t dalās ar t_0.
Fakta (1) pierādījumā aplūko skaitļu x, 2x, 3x, ..., (q-1)x atlikumus, dalot ar q, un pierāda, ka tie visi ir dažādi un atšķirīgi no nulles; fakta (2) pierādījumā izsaka $t = k \cdot t_0 + r$, $0 \le r < t_0$, un pierāda, ka r=0.
Risinājuma plāns ir šāds.
1) atradīsim tādu skaitli s, ka $s^p \equiv_q 1$ un p ir mazākais no tiem nenulles kāpinātājiem t, ar kuriem $s^t \equiv_q 1$. Tad automātiski s nedalās ar q un tāpēc LKD(s,q)=1.
2) atcerēsimies, ka no Fermā Mazās teorēmas seko $s^{q-1} \equiv_q 1$.
3) saskaņā ar augšminēto īpašību (2) iegūsim, ka q-1 dalās ar p, k.b.j.
Atliek realizēt punktu **1)**.
Ja $(n+1)^p - n^p$ dalās ar pirmskaitli q, tad ne $(n+1)^p$, ne n^p ar q nedalās. (Pretējā gadījumā arī otrs no šiem skaitļiem dalītos ar q, bet tad gan n+1, gan n dalītos ar q; tas nav iespējams.) Tātad ne n+1, ne n nedalās ar q; tāpēc LKD(n,q)=LKD(n+1,q)=1.
Saskaņā ar (1) eksistē tāds m, ka $m \cdot n \equiv_q 1$.
Definējam s=m(n+1). Mēs apgalvojam, ka tas apmierina punkta 1) prasības.
Vispirms pārbaudīsim, ka $s^p \equiv_q 1$. Tā kā pēc uzdevumā dotā $(n+1)^p - n^p$ dalās ar q, tad $(n+1)^p \equiv_q n^p$. Tāpēc

$$s^p = (m(n+1))^p = m^p \cdot (n+1)^p \equiv_q m^p n^p = (m \cdot n)^p \equiv_q 1.$$

Saskaņā ar (2) mazākais no tiem t, kam $s^t \equiv_q 1$, ir p dalītājs. Tā kā p ir pirmskaitlis, tad mazākais no šādiem t ir vai nu 1, vai p. Pieņemsim, ka tas ir 1; tad $m(n+1) \equiv_q 1$. Tā kā arī $m \cdot n \equiv_q 1$, tad, atņemot šīs kongruences, iegūstam $m \equiv_q 0$, un tad $m \cdot n \equiv_q 0$ - pretruna. Tātad mazākais no tiem t, kam $s^t \equiv_q 1$, ir p, k.b.j.

BW.S.2. Atbilde: $a = 2m^2 - 2m + 1$, $m \in N$.
Risinājums. Apzīmēsim $y_n = 2x_n - 1$. Tad pie n>1 $y_n = 4x_{n-1}x_{n-2} - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 1 = (2x_{n-1} - 1)\cdot(2x_{n-2} - 1) = y_{n-1}y_{n-2}$. Tāpēc pie $n \ge 0$ $y_{n+3} = y_{n+2}y_{n+1} = y_{n+1} \cdot y_n \cdot y_{n+1} = y_{n+1}^2 \cdot y_n$. Tātad y_{n+3} ir kvadrāts tad un tikai tad, ja y_n ir kvadrāts. Tāpēc visi y_{3n} ir kvadrāti tad un tikai tad, ja y_0 ir kvadrāts, bet y_0=2a-1; ja tas ir kvadrāts, tad tas ir nepāra skaitļa 2m-1 kvadrāts, $m \ge 1$. Tātad $2a - 1 = (2m-1)^2$, no kurienes seko vajadzīgais.

BW.S.3. Izsacīsim $x = 2^s \cdot x_1$ un $y = 2^t \cdot y_1$, kur x_1 un y_1 – nepāra naturāli skaitļi.
Varam pieņemt, ka $s \ge t$. Tad $z = \dfrac{2^{s+2}x_1y_1}{2^{s-t}x_1 + y_1}$.

Ja s>t, tad skaitītājā ir pāra, bet saucējā – nepāra skaitlis, tātad z ir pāra skaitlis – pretruna. Tāpēc s=t un $z=\frac{2^{s+2}x_1y_1}{x_1+y_1}$.

Apzīmēsim LKD(x_1,y_1)=d, x_1=dx_2, y_1=dy_2; tātad LKD(x_2,y_2)=1. Tad $z=\frac{2^{s+2}x_2y_2d}{x_2+y_2}$. Tā kā skaitītājs dalās ar 4 un z ir nepāra, tad arī saucējs dalās ar 4. Tā kā x_2 un y_2 ir nepāra skaitļi, tad viens no tiem dod atlikumu 1, bet otrs – atlikumu 3, dalot ar 4; varam pieņemt, ka $x_2 \equiv_4 3$. Tā kā LKD(x_2,x_2+y_2)=LKD(x_2,y_2)=1, tad x_2 skaitļa z izteiksmē nesaīsināsies; tāpēc x_2 ir skaitļa z dalītājs mums vajadzīgā formā.

BW.S.4. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Vienādības

$$5^2=3^2+4^2$$

$$5^2\cdot5^2=3^2\cdot5^2+4^2\cdot5^2=3^2\cdot(3^2+4^2)+4^2\cdot5^2=3^2\cdot3^2+3^2\cdot4^2+4^2\cdot5^2$$

$$5^2\cdot5^2\cdot5^2=3^2\cdot3^2\cdot5^2+3^2\cdot4^2\cdot5^2+4^2\cdot5^2\cdot5^2=$$

$$=3^2\cdot3^2\cdot(3^2+4^2)+3^2\cdot4^2\cdot5^2+4^2\cdot5^2\cdot5^2=$$

$$=3^2\cdot3^2\cdot3^2+3^2\cdot3^2\cdot4^2+3^2\cdot4^2\cdot5^2+4^2\cdot5^2\cdot5^2$$ utt.

parāda, kā var iegūt jebkuru galīgu skaitu dažādu kvadrātu ar vajadzīgajām īpašībām.

BW.S.5. Atbilde: $n=2^x\cdot3^y$, kur x un y ir nenegatīvi veseli skaitļi un $y\le x\le 2y$.

Risinājums. Pieņemam, ka $n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, $m=(p_1+1)(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_k+1)$ un p_k ir vislielākais no pirmskaitļiem p_1, ..., p_k (vai viens no vislielākajiem, ja tādi ir vairāki). Pieņemsim uz brīdi, ka p_k>3. Tad kādam i, $1\le i\le k$, p_i+1 dalās ar p_k, bet tas nav iespējams: ja p_i=p_k, tad $\frac{p_i+1}{p_k}=\frac{p_k+1}{p_k}=1+\frac{1}{p_k}$ nav vesels skaitlis, bet, ja p_i<p_k, tad p_i+1<p_k.

Tāpēc n pirmreizinātāji var būt tikai 2 un 3, tātad $n=2^x\cdot3^y$, kur $x\ge0$, $y\ge0$, x un y – veseli skaitļi. Tad $m=3^x\cdot4^y=2^{2y}\cdot3^x$. Lai m dalītos ar n, saskaņā ar aritmētikas pamatteorēmu nepieciešami un pietiekami, lai $2y\ge x$ un $x\ge y$.

Uzdevumu sadalījums pa tēmām

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Funkcijas, virknes: S.9.1., R.11.4., R.12.1., V.9.2., V.11.2., A.9.4., A.12.3., IMO.5., BW.A.3.
Nevienādības: S.10.4., S.12.1., R.10.3., R.11.4., V.10.4., A.10.5., A.11.2., VP.1.2., VP.2.3., IMO.3., AB.A.2., AB.A.4., BW.A.1., BW.A.2., BW.A.3., BW.A.5.
Funkcionālvienādojumi: S.12.4., V.12.2., VP.3.3., AB.A.5., AB.S.5., BW.A.4.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: R.9.3., A.9.4., A.11.4.
Polinomi: R.12.1., IMO.5., AB.A.3.
Pārveidojumi: V.12.1., AB.A.1.

Ģeometrija

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.9.2., S.11.3., R.10.4., R.11.3., R.12.4., V.10.3., V.11.4., A.9.3., A.12.2., VP.1.4., IMO.1., AB.Ģ.1., AB.Ģ.5., BW.Ģ.1.
Ģeometriskie pārveidojumi: V.10.3., BW.Ģ.4.
Vienādi trijstūri: V.9.3., BW.Ģ.1., BW.Ģ.2.
Laukumi: S.12.3., R.9.2., A.12.5., IMO.6.
Metriskās sakarības: S.10.3., V.12.3., A.10.2., VP.2.2., AB.Ģ.4.
Līdzība: V.12.3., AB.Ģ.1.
Koordinātu metode: S.10.1., S.11.1.
Nevienādības: S.9.4., S.11.4., A.11.3., IMO.1., IMO.6., AB.Ģ.3.
Figūru sistēmas: S.9.5., R.10.2., R.11.2., V.12.5., A.10.1., VP.1.5., AB.Ģ.2., BW.K.3., BW.Ģ.3.
Radikālā ass: BW.Ģ.5.
Dirihlē princips: S.9.5., V.12.5., IMO.2., BW.K.3., BW.Ģ.3.
Vektori: V.11.5.

Skaitļu teorija

Atlikumi: S.9.3., S.12.2., R.11.1., R.12.3., V.10.2., A.11.1., VP.3.1., AB.S.1., AB.S.4.
Kongruences: BW.S.1.
Sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.9.3., S.12.2., V.9.1., V.12.4., A.9.5., A.12.1., VP.1.1., AB.S.2., AB.S.3., BW.K.5., BW.S.2., BW.S.3., BW.S.5.
Racionāli un iracionāli skaitļi: S.10.2.
Dalāmības īpašības un pazīmes: S.11.5., R.10.1., R.12.3., A.10.3., AB.S.5.
Vienādojumi veselos skaitļos: V.11.3., IMO.4., BW.S.4.
Skaitļa pieraksts: S.11.5., A.9.1.

Kombinatorika

Dirihlē princips: S.10.5., S.11.2., R.12.2., V.9.4., V.10.1., VP.1.3., VP.3.2., BW.K.2., BW.K.5.
Invariantu metode: V.11.1., V.11.5.
Ekstremālā elementu metode: A.9.2.

Skaitīšana: AB.K.3., BW.K.4.
Gadījumu pārlase: V.10.5., AB.K.1., AB.K.2.
Kombinatorikas struktūras: S.12.5., R.9.1., R.12.2., V.9.4., A.10.4., A.11.5., AB.K.5., BW.K.2.

Algoritmika

Algoritma izstrāde: R.10.5., R.11.5., A.12.4., VP.1.5., AB.K.4.
Algoritma analīze: R.9.5., R.12.5., V.9.5., VP.2.1., AB.K.4., BW.A.1., BW.K.1.
Loģiski uzdevumi: R.11.5.

Literatūra

Vairāki Latvijas olimpiāžu uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Olimpiāde „Baltijas ceļš”: S.10.3., S.11.4., S.11.5., S.12.4.

Irānas matemātikas olimpiāde: R.11.4.

Jaunzēlandes matemātikas olimpiāde: R.12.5., V.9.3.

Īrijas matemātikas olimpiāde: V.10.2.

Lielbritānijas matemātikas olimpiāde: V.10.5., VP.3.1.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: V.11.4., V.12.3., VP.1.1.

Sanktpēterburgas matemātikas olimpiāde: V.11.5.

ASV matemātikas olimpiāde: V.12.1., VP.1.2.

Balkānu matemātikas olimpiāde: VP.1.4., AB.S.3.

Starptautiskā matemātikas olimpiāde: VP.1.5.

Izraēlas – Ungārijas matemātikas sacensības: VP.3.2., AB.A.4.

Rumānijas matemātikas olimpiāde: AB.A.5., AB.K.2., AB.S.4.

Krievijas matemātikas olimpiāde: AB.S.2.

T.Andrejesku: A.12.5.

Sērija „Laima” matemātikā

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (Latvijas un Islandes Matemātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

Sērijas „Laima” grāmatas

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.