A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna

MATEMĀTIKAS SACENSĪBAS
5.-9. KLASĒM
1999./2000. mācību gadā

Rīga, 2001

Andžāns A., Čerāne A., Ramāna L. Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000. mācību gadā. Rīga: Latvijas Universitāte, 2001. - 73 lpp.

Šajā izstrādnē apkopoti 1999./2000. mācību gadā notikušo Latvijas mēroga matemātikas sacensību uzdevumi un to atrisinājumi 5.-9. klašu skolēniem. Vairāki grūtākie uzdevumi piemēroti arī darbam ar vecāko klašu skolēniem.

Iesakām lasītājiem vispirms censties atrisināt uzdevumus pašiem. Tomēr vērts iepazīties arī ar te sniegtajiem atrisinājumiem - gan tāpēc, ka tie var saturēt jaunas, jums nezināmas idejas, gan tāpēc, ka, lasot tos, var atklāties nepilnības jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos.

Izstrādni izdošanai sagatavojušas Silvija Čerāne un Lāsma Strazdiņa.

ISBN

Reģ. apl. No. 2-0266.

Iespiests SIA "Mācību grāmata", Raiņa bulv. 19, Rīgā, LV - 1586, tel./fax. 7615695

SATURS

IEVADS 4

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM 6

UZDEVUMI 7

- Sagatavošanās olimpiāde (1.-25.) 7
- Rajona olimpiāde (26.-50.) 8
- Profesora Cipariņa klubs (51.-116.) 11
- Olimpiāde "Drusti '99" (117.-128.) 15
- Atklātā olimpiāde (129. - 153.) 16

ATRISINĀJUMI 19

- Sagatavošanās olimpiāde (1.-25.) 19
- Rajona olimpiāde (26.-50.) 26
- Profesora Cipariņa klubs (51.-116.) 36
- Olimpiāde "Drusti '99" (117.-128.) 62
- Atklātā olimpiāde (129. - 153.) 66

LITERATŪRA 73

Ievads

Jebkuras izglītības pamatorientācija ir darbīgas, aktīvas un radošas personības veidošana. Personība sāk veidoties jau pirmajā dzīves gadā. Radošas personības attīstība ģimenē sekmējama jau pirmskolas vecumā.

Personības veidošanās galvenā sastāvdaļa ir normāla, vispusīga psihiskā attīstība. Tās sekmēšanai ir nepieciešamas zināšanas un aktīva virzoša darbība, lai attīstītu bērna sajūtas, vizuālo, taustes u.c. uztveri, labu tēlu atmiņu, aktīvu domāšanu, radošu iztēli, pozitīvas emocijas u.c. psihiskās parādības.

Psihologs Žans Piažē uzskata: domāšanā pēc dzīves 15. gada nenotiek kvalitatīvas pārmaiņas. Cilvēks arī vēlāk apgūst jaunus domāšanas paņēmienus, taču tas nerada tādas kvalitatīvas pārmaiņas domāšanas priekšnoteikumos kā iepriekšējie attīstības posmi. Laika posmā no 11. līdz 15. gadam domāšanai pamazām jāsasniedz pieaugušajiem raksturīgais līmenis. Tāpēc ir ļoti svarīgi jau no skolas jaunākajām klasēm skolēnos attīstīt domāšanas / izziņas procesus.

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas jēdziens par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Intelekts ir spēja risināt problēmsituācijas un spēja pielāgoties jaunai videi. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Šim jaunveidojumam – loģiskai domāšanai – ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā.

Matemātikai specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā – matemātikas olimpiādes un konkursi, LU Mazā matemātikas universitāte un A.Liepas Neklātienes matemātikas skola, matemātikas nometnes "Alfa". Skolēni var izmēģināt savus spēkus, piedaloties matemātikas neklātienes konkursā "Profesora Cipariņa klubs".

Matemātikas olimpiādes izvirza skolēniem konkrētus mērķus; tās faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tās rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šai procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus.

Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Šajā darbā ir apkopoti šādu 1999./2000.m.g. sacensību uzdevumi:

1) sagatavošanās olimpiāde;
2) rajona olimpiāde;
3) “Profesora Cipariņa klubs”;
4) Olimpiāde "Drusti '99";
5) atklātā olimpiāde.

“Profesora Cipariņa kluba” konkursa ietvaros notika 6 nodarbības. Katrā nodarbībā tika piedāvāti divi komplekti pa 6 uzdevumiem katrā (6.nodarbībā – 3.uzdevumi):

A grupā – risinātājiem, kam vēl nav lielas pieredzes;

B grupā – ievērojami sarežģītāki uzdevumi.

Pārējās olimpiādēs uzdevumi tika sadalīti pa klašu grupām (katrā pieci uzdevumi). Cēsu rajona olimpiādē "Drusti '99" vasaras nometnē vidējo klašu grupā tika piedāvāti 12 uzdevumi, un tos kolektīvi risināja skolēnu komandas.

Atkarībā no tā, kādus objektus matemātika pēta, to var nosacīti iedalīt nepārtrauktajā matemātikā un diskrētajā matemātikā. Pastāv arī cits iedalījums, proti, deduktīvā matemātika un algoritmiskā matemātika. Pie deduktīvās matemātikas pieder apgalvojumi par jau “eksistējošām” lietām un šo apgalvojumu lietojumi, pie algoritmiskās matemātikas - dažādu objektu veidošanas metodes un efektīvu procedūru izstrāde šo objektu īpašību analīzei.

Tradicionālajā skolas kursā galvenā vērība tiek veltīta deduktīvajai nepārtrauktajai matemātikai.

Tomēr 20. gadsimta otrajā pusē diskrētās matemātikas un algoritmiskās matemātikas daļas īpatsvars ir strauji audzis. Tas saistīts gan ar jauniem matemātikas lietojumiem, gan it īpaši ar datoriem. Turklāt datoru ietekme uz matemātiku ir divējāda: tā pavērusi jaunas iespējas klasiskajām matemātikas nozarēm un pati radījusi vairākas jaunas matemātikas nozares.

Vidusskolas kursā šīs izmaiņas jau atspoguļotas gan matemātikas profilkursa un pamatkursa saturā, gan arī ieviešot informātikas kursu, kas satur lielu diskrētās matemātikas daļu. Pamatskolas kursā būtisku izmaiņu līdz šim brīdim nav. Tāpēc diskrētās un algoritmiskās matemātikas elementu iekļaušana arī pamatskolas kursā ir ļoti svarīgs uzdevums, kas jārisina gan programmu, gan standartu, gan mācību grāmatu un līdzekļu līmenī.

Viena no iespējām ir izmantot fakultatīvās nodarbības, veidot ārpus mācību stundām matemātikas pulciņus, kā arī veidot atbilstošus mācību līdzekļus.

Šī izstrādne ir paredzēta 5.-9. klašu skolēniem, kā arī viņu skolotājiem.

Visiem uzdevumiem doti pilnīgi atrisinājumi, atsevišķiem uzdevumiem – arī vairāki risinājumu varianti. Mācību līdzekli var izmantot arī skolēni, kas padziļināti interesējas par matemātiku un kuriem nav iespējams papildināt savas zināšanas matemātikā, darbojoties matemātikas pulciņā vai fakultatīvās nodarbībās skolotāja vadībā.

Lasītājam jāievēro, ka daudzus uzdevumus noteikti var atrisināt arī citādi, nekā te norādīts. Izstrādne ir paredzēta aktīvam darbam.

Iesakām lasītājam vispirms censties atrisināt uzdevumu paša spēkiem. Tomēr ir vērts iepazīties arī ar te sniegtajiem atrisinājumiem – gan tāpēc, ka tie var saturēt jaunas, jums agrāk nezināmas idejas, gan tāpēc, ka, lasot tos, var atklāties nepilnības jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 4 grupās pa tēmām : skaitļu teorija, algebra, ģeometrija un kombinatorika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne ir paredzēta 5.-9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle ir atkarīga no skolēnu vecuma un tajā brīdī viņiem pieejamām zināšanām**.**

ALGEBRA	
Algebriskie pārveidojumi, darbības ar skaitļiem:	21., 22., 36., 41., 43, 63., 80., 111., 114., 120., 126., 127., 139., 150.
Vienādojumi, vienādību pierādīšana:	13., 16., 19., 82., 104., 118., 139., 144., 152.
Nevienādības:	23., 33., 46., 59., 62., 82., 92., 97., 98., 112., 121., 132.
Vienādojumu sistēmas:	104., 149.
Dirihlē princips:	33.
ĢEOMETRIJA	
Klasiskā ģeometrija:	24., 37., 44., 48, 64., 70., 94., 123., 125., 141., 145., 147., 151.
Ekstremālais elements:	148.
Figūru sistēmas:	7., 12., 18., 34., 38., 42., 52., 67., 79., 84., 85., 100., 106., 109., 124.
Uzdevumi par figūru sagriešanu:	2., 28., 32., 55., 78., 88., 102., 103., 116., 133., 138., 143., 148.
Invarianti, krāsošana:	10., 37., 57., 128.
Dirihlē princips:	10., 38., 42., 64., 79., 84., 85., 133.
SKAITĻU TEORIJA	
Skaitļu dalāmība:	3., 6., 8.,19., 29., 31., 39., 49., 51., 53., 71., 76., 77., 80., 83., 89., 117., 129., 135., 140.
Skaitļu sadalījums pirmreizinātājos:	1., 11., 65., 77.
Ekstremālais elements:	47., 59., 112.
Aritmētiskās darbības:	20., 27., 73., 75., 90., 99., 101., 111., 119., 130.
Grupēšana:	14., 17., 33., 52.,58., 93., 95., 107., 108., 114., 122., 137., 142., 146.
Dirihlē princips:	27., 73., 93., 142., 146.
KOMBINATORIKA	
Algoritma izstrāde:	61., 66., 81., 86., 96., 110., 113.
Uzdevumi, kas reducējas uz grafiem:	25., 136., 153.
Objektu skaitīšana:	134.
Galvenās kombinatoriskās sistēmas (izvietojumi uz šaha galdiņa, turnīri u.c.):	4., 9., 35., 45., 50., 68., 74., 91., 128.
Loģiska rakstura uzdevumi:	5., 26., 30., 56., 60., 87., 105., 132.
Procesu analīze:	15., 40., 45., 54., 69., 72., 95., 101., 115., 131., 146., 152.
Dirihlē princips:	5., 25., 72.

UZDEVUMI

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE (1. - 25.)

5. klase (1. - 5.)

1. Kādiem trīsciparu skaitļiem visu ciparu reizinājums ir 30?

2. Kvadrātveida salas malas garums ir 5 km. Vai salā var izrakt vairākus kvadrātveida dīķus un līčus (katra dīķa un līča malas garumam jābūt 1 km) tā, lai kopējais krastmalu garums būtu 52 km?

3. Vai var izrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 6, katru vienu reizi, tā, lai no katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalītos ar otru? Bet vai tā var izrakstīt skaitļus no 1 līdz 7?

4. Kvadrāts sastāv no 16 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai rūtiņās var ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16, katru vienu reizi, tā, lai rūtiņās ar kopēju malu ierakstītie skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 3, vai par 4?

5. Pie galda sēž 5 cilvēki. Jaunākajam no tiem ir 21 gads, vecākajam-24 gadi. Vai no šiem cilvēkiem noteikti var izvēlēties divus tādus, kuri dzimuši vienā un tai pašā gadā?

6. klase (6. - 10.)

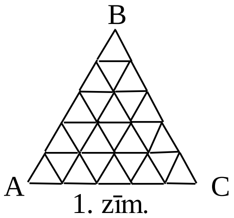
6. Cik no pirmajiem 200 naturālajiem skaitļiem ir tādu, kam ciparu summa dalās ar 3?

7. Katra no četrām zemnieku saimniecībām aizņem trijstūrveida zemes gabalu. Vai var gadīties, ka katrām divām no tām kopējā robeža ir tieši 1 km gara?

8. Kādu lielāko skaitli, kurš dalās ar 9, var iegūt, no skaitļa 421421421 izsvītrojot dažus ciparus?

9. Kvadrāts sastāv no 9 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs tieši vienā rūtiņā. Katrai kolonnai un katrai rindiņai aprēķināta tajā ierakstīto skaitļu summa. Cik no šīm summām var būt nepāra skaitļi?

10. Katram no mazajiem trijstūrīšiem visu malu garumi ir 1 (skat. 1.zīm.).Kādu lielāko daudzumu no šiem nogriežņiem ar garumu 1 var nokrāsot sarkanus tā, lai nebūtu neviena mazā trijstūrīša, kam visas malas ir sarkanas?



1. zīm.

7. klase (11. - 15.)

11. Atrast 7 saliktus trīsciparu skaitļus, katram no kuriem ciparu reizinājums ir 42.

12. Vai var uzzīmēt plaknē 7 starus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus?

13. Atrisināt vienādojumu $(((((2\cdot x - 1)\cdot 2 - x)\cdot 2 - x)\cdot 2 - x)\cdot 2 - x)\cdot 2 - x = 1$

14. Pierādīt, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 29 ieskaitot var tā uzrakstīt pa apli, katru vienu reizi, ka katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem atradīsies cipars, kurš izmantots abu pierakstā.

15. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2; 4; 6. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst vienu no skaitļiem un tā vietā uzrakstīt abu pārējo skaitļu summu, no kuras atņemts vieninieks. Vai var gadīties, ka, izpildot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, uz tāfeles vienlaikus atrodas skaitļi 1997; 1999; 2001?

8. klase (16. - 20.)

16. Dots, ka x+y+z=0 un neviens no skaitļiem x, y, z nav 0. Pierādīt, ka $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=0$

17. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 2, vai par 3?

18. Uzzīmēt a) desmitstūri, b) piecpadsmitstūri ar īpašību: uz katras taisnes, uz kuras atrodas kāda uzzīmētā daudzstūra mala, atrodas vēl vismaz viena cita šī daudzstūra mala.

19. Ir iedomāti naturāli skaitļi x; y; z. Ir zināms, ka 2x dalās gan ar y, gan ar z; 2y dalās gan ar x, gan ar z; 2z dalās gan ar x, gan ar y. Cik no iedomātajiem skaitļiem var būt dažādi?

20. Naturālā skaitlī x katrs nākošais cipars ir lielāks par iepriekšējo.
Pierādīt, ka skaitļa 9x ciparu summa ir 9.

9. klase (21. - 25.)

21. Sadalīt reizinātājos izteiksmi $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

22. Pierādīt: ja $n\geq 7$ un n - nepāra skaitlis, tad skaitli n^2 var izsacīt kā triju saliktu nepāra skaitļu summu.

23. Trīs smagākās loma zivis kopā svēra 35% no visa loma. Pēc to pārdošanas trīs vieglākās zivis kopā svēra $\frac{5}{13}$ no atlikušā loma. Cik zivju bija lomā sākumā?

24. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB, BC, CA attiecīgi punktos M, N, K.
Pierādīt, ka trijstūros AMK, BNM, CKN ievilkto riņķa līniju centri atrodas uz trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas.

25. No 10 cilvēkiem katrs ir ienaidā ar augstākais 4 citiem. Pierādīt, ka cilvēkus var sadalīt pa pāriem tā, ka nevienā pārī nav ienaidnieki.

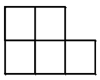
RAJONA OLIMPIĀDE (26. - 50.)

5. klase (26. - 30.)

26. Uzrakstīt kaut vienu trīsciparu skaitli, kas ar katru no skaitļiem 654, 253 un 673 vienā šķirā sakrīt, bet divās atšķiras.

27. Vai var atrast 4 tādus naturālus skaitļus, ka nekādiem diviem no tiem ne summa, ne starpība, ne reizinājums nebeidzas ar ciparu 0? Bet vai var atrast 5 tādus skaitļus?

28. Vai taisnstūri, kura izmēri ir a) 4x5, b) 5x6, c) 6x7, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 2.zīm.? Rūtiņas malas garums ir 1.



2. zīm.

29. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 9 (ieskaitot) katru vienu reizi tā, lai nekādu divu blakus uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7 ?

30. Pasaku meža čempionātā piedalās vairākas komandas, katra ar katru spēlē vienu reizi. Pēc votivapu domām, par uzvaru pienāktos 3 punkti, par neizšķirtu - 1 punkts, par zaudējumu - 0 punktu. Pēc šillišallu domām, par uzvaru pienākas 2 punkti, par neizšķirtu - 1 punkts, par zaudējumu - 0 punktu. Vai var gadīties, ka čempionāta noslēgumā tā komanda, kas votivapu vērtējumā ir pirmā, šillišallu vērtējumā ir pēdējā?

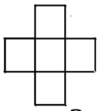
6. klase (31. - 35.)

31. Dots, ka a, b, c - naturāli skaitļi. Cik daudzi no skaitļiem a + b, a + c, b + c var vienlaikus dalīties ar 3?

32. Kvadrāta malas garums ir 10m. Vai to var sadalīt divās daļās, kuru perimetri ir:
a) 30m un 60m;
b) 50m un 100m?

33. Naturāli skaitļi no 1 līdz 10 kaut kādā kārtībā izrakstīti pa apli (katrs vienu reizi). Aprēķinātas visas iespējamās triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summas.
Pierādīt, ka starp šīm summām var atrast divas, kas viena no otras atšķiras vismaz par 3.

34. Kvadrāts sastāv no 7x7 rūtiņām. Vai var katru rūtiņu nokrāsot vienā no piecām krāsām tā, lai katrā 3.zīm redzamajā figūrā būtu sastopamas visas piecas krāsas?



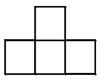
3. zīm.

35. Kuba katra skaldne sadalīta 4 kvadrātos. Katrā no iegūtajiem kvadrātiem ierakstīts kāds skaitlis. Jānis aprēķināja visas summas, kuras iegūstamas, ja kādā kvadrātā ierakstītajam skaitlim pieskaita visos tā kaimiņos ierakstītos skaitļus (divus kvadrātus sauc par kaimiņiem, ja tiem ir kopīga mala). Visas Jāņa summas ir 17. Vai visi kvadrātos ierakstītie skaitļi vienlaikus var būt veseli?

7. klase (36. - 40.)

36. Neviens no skaitļiem a, b, c, d nav nulle. Ir zināms, ka starp skaitļiem ab, ac, ad, bc, bd, cd ir tieši n negatīvi. Cik negatīvu skaitļu ir starp skaitļiem $\frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{b}{c}, \frac{d}{b}, \frac{c}{d}$?

37. Melns kvadrāts ar izmēriem 4x4 sagriezts kaut kādos gabalos. Četras tādas baltas figūras, kāda redzama 4.zīm., arī sagrieztas gabalos (rūtiņas malas garums ir 1, gabalu skaits un forma nav zināma). Pierādīt: melnos un baltos gabalus var sagriezt sīkākās daļās tā, lai visas daļas varētu apvienot pāros, pie tam katrā pārī atrastos viena balta un viena melna daļa, kas savā starpā vienādas.



4. zīm.

38. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.
a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3; 4; 5; 6; 7; 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt 180°,
b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par 180°?

39. Naturālu skaitli sauc par interesantu, ja tā ciparu summa dalās ar 5.
a) atrast kaut vienu tādu interesantu x, ka arī x+9 ir interesants,
b) cik pavisam ir tādu interesantu x, kādi minēti a) punktā?
c) pierādīt: starp jebkuriem 9 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir vismaz viens interesants.

40. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitļus $\frac{b^2}{a}$ un $\frac{a^2}{b}$. Vai, izdarot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos skaitļi $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$?

8. klase (41. - 45.)

41. Katrā rūtiņā ieraksta to divu izteiksmju reizinājumu, kas atrodas tabulas ārpusē vienā kolonnā un vienā rindā ar šo rūtiņu (skat. 5.zīm.). Atrast visās sešās rūtiņās ierakstīto reizinājumu summu pēc tam, kad tajā savilkti līdzīgie locekļi.

	1-3x	x+3	2x-3
x-1			
x+2			

5. zīm.

42. Uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti. Kādu lielāko daudzumu hordu ar abiem galapunktiem šajos punktos var novilkt, lai neveidotos neviens četrstūris ar visām virsotnēm atzīmētajos punktos?

43. Dots, ka $a^3=a+1$. Pierādīt, ka $a^5=a^4+1$.

44. Zināms, ka ΔABC visas malas vienādas. Uz malām AB un BC attiecīgi ņemti punkti M un N tā, ka MB+BN=AC. Pierādīt, ka $\angle MAN+\angle MCN=60°$.

45. Tabula sastāv no nxn rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 0, 1, vai 2 tā, lai, aprēķinot rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūtu visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2n, katru vienu reizi. Vai to var izdarīt, ja a) n=5, b) n=6?

9. klase (46. - 50.)

46. Triju veselu skaitļu summa ir 0. Vai to kubu summa var būt lielāka par 200020002000 ?

47. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām. Tajās ieraksta veselus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā - citu skaitli). Pēc tam katrām divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala, aprēķina tajās ierakstīto skaitļu summu (pavisam ir 12 summas). Kādu mazāko skaitu dažādu vērtību var iegūt ?

48. Dots, ka AB ir riņķa līnijas diametrs, bet MN - tās horda, kas nav diametrs (visi punkti A, B, M, N ir atšķirīgi). No punktiem A un B pret taisni MN novilkti perpendikuli; to pamati ir attiecīgi A_1 un B_1. Pierādīt, ka $MA_1 = NB_1$.

49. Uz piecām kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Uz katrām trim kartītēm uzrakstīto skaitļu summa dalās ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz abām pārējām kartītēm.
a) atrodiet kaut vienu piemēru, kur šis nosacījums izpildās,
b) vai tas var izpildīties, ja uz visām kartītēm uzrakstīti dažādi skaitļi?

50. Kvadrāts sastāv no nxn rūtiņām. Rindas sanumurētas no lejas uz augšu ar skaitļiem 1; 2; 3; …; n; tāpat sanumurētas kolonnas no kreisās uz labo pusi. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu +1, vai -1. Ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi, tad visu šai rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu šai kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma. Vai tas ir iespējams, ja a) n=7, b) n=8 ?

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS (51. - 116.)

51. Kādi četrciparu skaitļi, kas beidzas ar 9, dalās ar katru savu ciparu?

52. Izdomājiet, kā visu kuba virsmu var aplīmēt ar 6 kvadrātiem tā, lai tie nekur nepārsegtos un lai starp kvadrātiem būtu gan vienādi, gan dažādi.

53. No grāmatas izrāva vairākas pēc kārtas ņemtas lapas. Pirmās izrautās lappuses numurs bija 185, bet pēdējais numurs sastādīts no tiem pašiem cipariem, tikai citā kārtībā. Kāds bija pēdējās izrautās lappuses numurs?

54. Trīs kaudzēs ir attiecīgi 10, 17 un 21 akmentiņi. Atļauts ar vienu gājienu pievienot divām kaudzēm pa vienam akmentiņam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visās kaudzēs būtu vienāds akmentiņu skaits? Vai to var panākt, ja kaudzēs sākotnēji ir patvaļīgs akmentiņu daudzums?

55. Visas trijstūra malas ir vienādas. Vai to var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros, starp kuriem nekādi divi savā starpā nav vienādi?

56. Sprīdītim jāuzzina, vai ķēniņa pils atrodas pa labi vai pa kreisi. Viņš satiek trīs rūķīšus. Zināms, ka divi rūķīši vienmēr runā patiesību, bet viens dažreiz runā patiesību, dažreiz melo. Sprīdītis nezina, kurš rūķītis ir “neuzticams”. Kā Sprīdītis var uzzināt vajadzīgo, uzdodot pa vienam jautājumam diviem no rūķīšiem?

57. Kuba izmēri ir 3x3x3. Vai no tā var izzāģēt 9 kubiņus ar izmēriem 1x1x1 katru tā, lai atlikušā ķermeņa virsmas laukums būtu tāds pats kā sākotnējam kubam?

58. Apskatām visas daļas ar saucēju 1999, kuru skaitītāji ir 1; 2; ...;1998. Pierādīt, ka starp tām ir pāra skaits nesaīsināmu daļu.

59. Uz kuba skaldnēm uzrakstīti 6 dažādi naturāli skaitļi; uz blakus skaldnēm uzrakstītie skaitļi atšķiras viens no otra vismaz par 2. Kāda ir mazākā iespējamā visu 6 skaitļu summa?

60. Simts vienāda izmēra kartītēm viena puse ir sarkana, bet citām 100 tādām pašām kartītēm - balta; otrā puse visām 200 kartītēm ir zaļa. Kartītes kaut kā novietotas divās rindās pa 100 kartītēm katrā ar zaļo pusi uz augšu. Sprīdītis, tikai paskatoties uz rindām, prot pateikt, vai pirmajā rindā balto kartīšu ir tikpat, mazāk vai vairāk nekā otrajā rindā sarkano. Kā tas iespējams?

61. Ģeologam ir sviras svari bez atsvariem un 8 dažādi akmeņi. Viņš vēlas noskaidrot, vai ir taisnība, ka katri divi akmeņi kopā sver vairāk par jebkuru trešo akmeni. Kā to izdarīt, izmantojot 13 svēršanas?

62. Doti 10 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 90. Pierādīt: no tiem var izvēlēties divus skaitļus tā, ka izvēlēto skaitļu attiecība (lielākais pret mazāko) nepārsniedz 3/2.

63. Tabula sastāv no 3x3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Rindiņās ierakstīto skaitļu summas ir 21, 22 un 24; divās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 27 un 28. Kāda ir trešajā kolonnā ierakstīto skaitļu summa?

64. Vai septiņstūra trīs diagonāles var krustoties vienā punktā? Bet četras diagonāles?

65. Kādu naturālo skaitli pareizināja pašu ar sevi. Pierādiet, ka rezultāts nav 97516824.

66. Lauvam apstājies sienas pulkstenis. Viņš var aiziet ciemos pie tīģera un paskatīties uz tīģera pulksteni, bet, atgriežoties savā alā, pareizais laiks būs cits. Kā lauvam nostādīt savu sienas pulksteni pareizi?

67. Plaknē atrodas 4 punkti. Izmērot attālumus starp katriem diviem no tiem, iegūst tikai 2 dažādas vērtības. Uzzīmējiet sešus dažādus 4 punktu novietojumus ar šādu īpašību.

68. Ierakstiet tabulā 4x4 rūtiņas naturālus skaitļus no 1 līdz 7 (katrā rūtiņā vienu skaitli) tā, lai katra rindiņa un katra kolonna kopā saturētu 7 dažādus skaitļus.
Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

69. Jānis piedāvā Andrim sadalīt konfektes šādi: viena man, divas tev, trīs man, četras tev,…; kad tā vairs nevarēs turpināt, kārtējais zēns paņems visas atlikušās. Kurš kopā saņems vairāk konfekšu?

70. Sešstūra malu garumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6 (varbūt citā kārtībā). Vai var gadīties, ka kāda riņķa līnija pieskaras visām sešstūra malām?

71. Skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21;… veido pēc likuma: katrs loceklis sākot ar trešo, vienāds ar divu iepriekšējo summu. Vai šajā virknē ir divi blakus stāvoši skaitļi, kas dalās ar 3?

72. Kvadrāts sastāv no 4x4 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt tās tā, lai katrā rūtiņā būtu tieši vienu reizi? Ar pēdējo gājienu nav obligāti jāatgriežas sākotnējā rūtiņā.

73. Kādu mazāko daudzumu naturālu skaitļu jāuzraksta, lai katrs nenulles cipars būtu pēdējais cipars kaut kādu divu uzrakstītu skaitļu reizinājumā?

74. Ierakstiet tabulā 8x8 rūtiņas naturālus skaitļus no 1 līdz 15 (katrā rūtiņā vienu skaitli) tā, lai katra rindiņa un katra kolonna kopā saturētu 15 dažādus skaitļus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

75. Skaitli $\frac{1}{26}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un izsvītroja tajā 1999-to ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks: sākotnējais vai iegūtais?

76. Atrast visus naturālos skaitļus, kas 8 reizes lielāki par savu ciparu summu.

77. Desmit dažādi naturāli skaitļi izrakstīti uz riņķa līnijas. No katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalās ar otru. Vai noteikti eksistē tādi skaitļi, kas uzrakstīti uz riņķa līnijas, neatrodas blakus un no kuriem viens dalās ar otru?

78. Izdomājiet kaut vienu taisnstūri, kuru var sagriezt savstarpēji līdzīgos trijstūros, kas nav taisnleņķa trijstūri.

79. Kvadrāts sastāv no 36 vienādām rūtiņām; rūtiņas malas garums ir 1. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu centru var atzīmēt, lai attālums starp katriem diviem atzīmētajiem centriem būtu lielāks par 2?

80. Ar kādu lielāko daudzumu vienādu nenulles ciparu var beigties naturāla skaitļa kvadrāts?

81. Krava ar masu 11 tonnas iepakota kastēs; nevienas kastes masa nepārsniedz 3 tonnas. Kāds mazākais daudzums reisu jāveic, lai aizvestu visu kravu, ja katrā reisā var aizvest ne vairāk kā 3 tonnas?

82. Dots, ka a, b, c, d- pirmskaitļi, $a>3b>6c>12d$ un $a^2-b^2+c^2-d^2=1749$. Aprēķiniet $a^2+b^2+c^2+d^2$.

83. Deviņi dažādi naturāli skaitļi izrakstīti uz riņķa līnijas. No katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalās ar otru. Vai noteikti eksistē tādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz riņķa līnijas, neatrodas blakus un no kuriem viens dalās ar otru?

84. Kvadrāts sastāv no 64 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās ierakstīta zvaigznīte, pie tam tā, ka blakus katrai rūtiņai atrodas vismaz viena zvaigznīte. (Zvaigznīte atrodas blakus rūtiņai X, ja tā ir tādā rūtiņā, kam ar X ir kopēja mala). Kāds mazākais zvaigznīšu daudzums var būt kvadrātā?

85. Kvadrāts sastāv no 16 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa diagonālei; nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīgu punktu. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

86. Skopulim ir 51 pēc ārējā izskata vienāda monēta. No tām 50 ir ar vienādu masu, bet viena- vieglāka. Kā ar 5 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast vieglāko monētu, ja nevienu monētu nedrīkst svērt vairāk par 2 reizēm?

87. Viens no trim brāļiem A, B, C vienmēr runā patiesību, otrs vienmēr melo, bet trešais dažreiz runā patiesību, dažreiz melo. Uz jautājumu "Kas ir A?" viņi atbildēja šādi:
A: "Es dažreiz meloju, dažreiz nē".
B: "Melis!".
C: "Godīgs!".
Noskaidrojiet, "kas ir kas" no šiem brāļiem.

88. Vai pastāv tāds izliekts četrstūris, kuru var sadalīt divās vienādās daļās, novelkot vienu nogriezni, bet nevar to izdarīt, novelkot diagonāli vai viduslīniju?

89. Pierādīt: no sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens nav lielāks par savu naturālo dalītāju summu, neieskaitot šai summā viņu pašu.

90. Divi trīsciparu skaitļi atšķiras viens no otra par 8. Par cik var atšķirties to ciparu summas?

91. Šaha turnīrā ir 6 dalībnieki, katrs spēlē ar katru vienu reizi. Vai var gadīties, ka no katriem četriem dalībniekiem var atrast tādu, kura partijās ar trim pārējiem viņš vienreiz uzvarējis, vienreiz zaudējis un vienreiz spēlējis neizšķirti?

92. Astoņiem bērniem ir dažāds konfekšu skaits. Ir zināms, ka katrs bērns var visas savas konfektes sadalīt pārējiem tā, lai viņiem būtu vienāds konfekšu skaits. Kāds mazākais konfekšu daudzums var būt tam bērnam, kuram to ir visvairāk?

93. Pēterim ir 1 lats un 98 santīmi, pavisam 100 monētas. Pierādīt, ka viņš savu naudu var sadalīt divās vienādās daļās.

94. Kā no punkta ārpus taisnes var novilkt perpendikulu pret šo taisni, ja dots cirkulis ar neierobežoti lielu rādiusu un lineāls, kura garums ir 1 cm?

95. Vai var izveidot 10 kaudzes akmeņu ar 100 akmeņiem kopā tā, lai visās būtu dažāds skaits akmeņu, bet, jebkuru kaudzi patvaļīgā veidā sadalot divās mazākās, šī īpašība vairs neizpildītos?

96. Pa apli stāv 5 zēni un 5 meitenes. Ar vienu gājienu divi bērni patvaļīgi var mainīties vietām. Ar kādu mazāko gājienu skaitu no jebkuras sākotnējās situācijas var panākt, lai ne divi zēni, ne divas meitenes nekur nestāvētu blakus?

97. Daži rūķīši no votivapu un šillišallu ciltīm kopīgi sagaidīja Jauno gadu. Svinībām bija sagādātas vairākas kūku kastes, katrā pa 12 kūkām. Katrs votivapa var apēst 6 vai 7 kūkas, katrs šillišalla- 2 vai 3 kūkas. Cik bija votivapu un cik- šillišallu, ja ar 4 kūku kastēm noteikti nebūtu pieticis, bet, nopērkot 5 kastes, visas kūkas noteikti netiktu apēstas?

98. Daži skolēni no 7^a klases pārgāja uz 7^b klasi. Pierādiet: varēja gadīties, ka abās klasēs vidējā atzīme paaugstinājās. Vai tas pats varēja notikt, ja pēc tam daži skolēni no 7^b klases pārgāja uz 7^a klasi?

99. Vienas daļas saucējs ir 3, otras- 5; skaitītāji ir veseli skaitļi, un daļu vērtības nav vienādas. Kāda ir mazākā iespējamā šo daļu starpība, no lielākās atņemot mazāko?

100. Vai var plaknē atzīmēt vairākus punktus un novilkt vairākas taisnes tā, lai caur katru atzīmēto punktu būtu novilktas tieši 3 taisnes un uz katras novilktās taisnes atrastos tieši 3 atzīmēti punkti?
(Novilktās taisnes var krustoties arī neatzīmētos punktos.)

101. Aprēķināt reizinājumus 67x67; 667x667; 6667x6667. Kāds būs rezultāts, ja katrā no diviem reizinātājiem būs 100 sešinieki un pēdējais cipars - septītnieks? Atbildi pamatojiet.

102. Taisnstūris sastāv no 3x4 kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1. Parādīt, ka taisnstūrī var izdarīt dažus iegriezumus tā, lai tas nesadalītos vairākos gabalos, bet ar to varētu divās kārtās aplīmēt kubu ar izmēriem 1x1x1.

103. Dota taisnstūraina papīra lapa. Jānis to ar taisnu griezienu sagriež divos gabalos, pēc tam vienu no gabaliem atkal divos utt., lietojot tikai taisnus griezienus. Pierādiet: ja Jānis griezīs pietiekami ilgi, tad iestāsies stāvoklis, kad viņam būs 2000 daudzstūri ar vienādu malu skaitu.

104. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi. Summām a+b, a+c, a+d, b+c, b+d vērtības ir 6; 9; 11; 12; 15 (nav zināms, kurai summai kura vērtība). Atrast:
a) summu c+d,
b) skaitļus c un d.

105. Atrodiet visus veidus, kā no 9 nenulles cipariem, lietojot katru tieši vienu reizi, izveidot trīs trīsciparu skaitļus, kuri ir naturālu skaitļu kvadrāti. Pierādiet, ka citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.

106. Plaknē doti 10 punkti; tie ne visi atrodas uz vienas taisnes. Caur katriem 2 punktiem novilkta viena taisne. Pierādiet, ka caur kādu punktu iet vismaz 4 dažādas taisnes.

107. Naturālos skaitļus no 1 līdz 3n jāsadala n grupās pa 3 skaitļiem katrā tā, lai katrā grupā divu skaitļu summa būtu 3 reizes lielāka par trešo skaitli. Vai to var izdarīt, ja a) n=8, b) n=6?

108. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 1999 var uzrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai nekādu divu vai vairāku pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ar 2000?

109. Vai var plaknē atzīmēt vairākus punktus un novilkt vairākas taisnes tā, lai caur katru atzīmēto punktu būtu novilktas tieši 4 taisnes un uz katras novilktās taisnes atrastos tieši 4 atzīmētie punkti? (Novilktās taisnes var krustoties arī neatzīmētos punktos.)

110. Četrām vienāda izskata monētām ir dažādas masas. Apzīmēsim masas ar $a<b<c<d$. Ir zināms, ka $2ac=bd$ un ka $3a>2b$. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast smagāko monētu?

111. Pierādiet, ka skaitli $97\cdot99\cdot101\cdot103+16$ var iegūt, pareizinot kādu naturālu skaitli pašu ar sevi.

112. Izmantojot katru ciparu tieši vienu reizi, izveidot divus naturālus piecciparu skaitļus tā, lai to reizinājums būtu mazākais iespējamais.

113. Uz galda atrodas kubs. To atļauts ripināt pa galdu, pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tas atbalstās uz galda. Vai var pārvelt kubu pāri katrai no šķautnēm tieši vienu reizi tā, lai kubs pēc šīm 12 pārvelšanām nonāktu turpat, kur atradās sākumā?

114. Ar n! apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n. Piemēram, $1!=1$, $6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$. Vai no skaitļiem 1!, 2!, 3!,…, 1999!, 2000! var izvēlēties tieši 1999 skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts?

115. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Katra tā rūtiņa var būt balta vai melna. Ar vienu gājienu atļauts reizē mainīt krāsu 11 rūtiņās, kas aizpilda vienu (patvaļīgu) rindu un vienu (patvaļīgu) kolonnu.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visas rūtiņas kļūtu baltas, ja sākotnēji tās visas ir melnas?

116. Vai kvadrātu var sagriezt tā, lai rastos viens 2000-stūris un 665 trijstūri, bet nerastos nekādas citas daļas?

OLIMPIĀDE "DRUSTI '99" (117. - 128.)

117. Dots, ka m un n ir naturāli skaitļi un m^2-n^2 dalās ar 2. Pierādīt, ka m^2-n^2 dalās ar 4.

118. a) atrast kaut vienu tādu naturālu skaitļu pāri (x,y), ka pastāv vienādība x+y+xy=1999
b) atrast visus šādus pārus un pierādīt, ka citu bez atrastajiem nav.

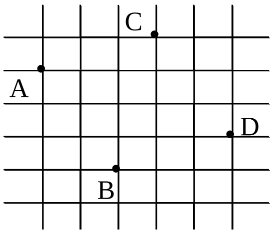
119. Septiņciparu naturālā skaitlī pārlika ciparus citā kārtībā un iegūto skaitli saskaitīja ar sākotnējo. Vai summa var būt 9999999?

120. Dots, ka $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$. Pierādīt, ka vismaz divi no skaitļiem a, b, c ir vienādi savā starpā.

121. Dots, ka $x \geq y > 0$ un $x+y \leq 1$. Pierādīt, ka $x^2+3y^2 \leq 1$.

122. Apskatām visus naturālos skaitļus, kuru pierakstā netiek izmantots neviens no cipariem 6; 7; 8; 9; 0. Uzrakstām tos augošā kārtībā. Kurš skaitlis atrodas simtajā vietā?

123. Dots, ka A, B, C, D ir kvadrātisku rūtiņu režģa punkti (skat. 6.zīm.). Pierādīt, ka AB||CD.



6. zīm.

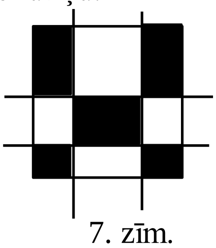
124. Uzzīmēt 6 taisnes un divpadsmitstūri, kuram katra mala atrodas uz vienas no šīm taisnēm.

125. Uz taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzas AB ņemts punkts M. Novilkti perpendikuli ME un MF pret katetēm (E un F ir šo perpendikulu pamati). Kur jāizvēlas punkts M, lai EF garums būtu mazākais iespējamais?

126. Tabula sastāv no 2x17 rūtiņām. Vai var augšējās rindas rūtiņās ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 17 (katru vienu reizi) un apakšējās rindas rūtiņās- tāpat, lai kolonnās ierakstīto skaitļu pāru summas no kreisās uz labo būtu pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi?

127. Pa riņķa līniju izrakstīti veseli skaitļi no (-7) līdz 7, katrs tieši vienu reizi.
Vai var gadīties, ka visi tādu divu skaitļu reizinājumi, starp kuriem atrodas tieši viens cits skaitlis, ir pozitīvi vai 0?

128. Kvadrāts sastāv no 100x100 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Novilktas dažas vertikālas un dažas horizontālas taisnes, kas iet pa rūtiņu robežām; tās sadala kvadrātu taisnstūros. Šie taisnstūri izkrāsoti šaha galdiņa kārtībā (skat. 7.zīm.). Pierādīt, ka melnā krāsā nokrāsots pāra skaits rūtiņu.


7. zīm.

ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE (129. - 153.)

5. klase (129. - 133.)

129. Cik no 1 līdz 2000 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 5?

130. Atrast, kādi cipari saskaitīšanas piemērā aizstāti ar burtiem, ja vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi - ar dažādiem:

$$\begin{array}{r} A\ U\ D\ I \\ A\ U\ D \\ +\qquad A\ U \\ A \\ \hline 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

131. Pasaku mežā dzīvoja triju ķildīgu cilšu rūķīši: votivapas, šillišallas un pukkas. Sākot ar pirmdienas rītu, katru dienu notika sekojošais:

a) brokastlaikā katrs mežā palikušais votivapa padzina no meža vienu šillišallu (katrs citu),

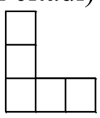
b) pusdienlaikā katrs mežā vēl palikušais pukka padzina no meža vienu votivapu (katrs citu),

c) vakariņu laikā katrs mežā vēl palikušais šillišalla padzina no meža vienu pukku (katrs citu).

Ceturtdien pēc vakariņām mežā palika tikai viens rūķītis. Cik katras cilts rūķīšu bija mežā pirmdien pirms brokastīm?

132. Trīsdesmit zēni nostājušies taisnstūrī piecās rindās un sešās kolonnās. Vienu no tiem sauc par Jāni, otru - par Andri. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Jāni, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Jāni, nav īsāks par viņu. Tas pats paliek spēkā, ja vārdu "Jānis" aizstāj ar vārdu "Andris". Pierādiet, ka Jānis un Andris ir vienāda auguma.

133. Kvadrāts sastāv no 8x8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 8.zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?



8. zīm.

6. klase (134. - 138.)

134. Cik nepāra ciparu uzrakstīts, ja pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100 ieskaitot?

135. Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

136. Parlamentā ir 100 deputāti. Tajā nodibinātas 17 komisijas (katrs deputāts var piedalīties vairākās komisijās). Lai novērstu grūtības balsošanā, katrā komisijā ir nepāra skaits locekļu. Pierādīt: vismaz viens deputāts ir iesaistījies pāra skaitā komisiju.

137. Kuba virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 8, katrs vienu reizi. Visās skaldnēs ierakstīto 4 skaitļu summas ir vienādas.
a) Atrodiet kaut vienu skaitļu izvietojumu ar šo īpašību,
b) atrodiet trīs dažādus skaitļu izvietojumus ar šo īpašību.
(Divi izvietojumi skaitās dažādi, ja var atrast divus skaitļus, kas vienā izvietojumā atrodas uz vienas šķautnes, bet otrā - nē).

138. Kvadrāts sastāv no 5x5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 8.zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?

7. klase (139. - 143.)

139. Dots, ka a, b, c, d - naturāli skaitļi un ab=cd. Pierādīt, ka skaitli $a^2+b^2+c^2+d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu?

140. Atrast mazāko naturālo skaitli, kam visi cipari vienādi un kas dalās ar 49.

141. Dots, ka trijstūris ABC ir vienādmalu. Uz malas BC ņemts punkts M, kas nav trijstūra ABC virsotne. Taisnes, kas caur M vilktas paralēli AB un AC, krusto malas AC un AB atbilstoši punktos E un F. Dots, ka K un L ir atbilstoši BE un CF viduspunkti. Pierādīt, ka trijstūris MKL ir vienādmalu.

142. Vai naturālos skaitļus a) no 1 līdz 12 ieskaitot, b) no 1 līdz 50 ieskaitot var tā sadalīt pa pāriem, lai visas pāros ieejošo skaitļu summas būtu dažādas un katra no tām būtu pirmskaitlis?
(Piemēram, skaitļus no 1 līdz 6 varētu sadalīt tā: 1+2=3, 3+4=7, 5+6=11).

143. Kvadrāts sastāv no 6x6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu figūru, kas visas vienādas ar 8.zīm. redzamo, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas nevienu citu tādu figūru izgriezt vairs nevarētu? Griezumi pieļaujami tikai pa rūtiņu robežām.

8. klase (144. - 148.)

144. Dots, ka a+b+c=0. Pierādīt, ka kvadrātvienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

145. a)Vai eksistē tāds trijstūris ABC, ka $AB=2\cdot AC$ un $\angle CAB=2\cdot\angle ABC$?
b) Trijstūrī ABC zināms, ka $AB=2\cdot AC$ un $\angle CAB=2\cdot\angle ABC$.
Aprēķināt $\angle ACB$.

146. Uz katras no vairākām kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi); uz visām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa ir 100. Vai noteikti var atrast tādas kartītes (varbūt vienu pašu), uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 50, ja kartīšu skaits ir a) 50, b) 51 ?

147. Riņķa līnija ar 2000 punktiem sadalīta 2000 vienādos lokos. Puse no dalījuma punktiem ir balti, puse - sarkani. Novilktas visas hordas, kas savieno divus dalījuma punktus. Pierādīt: to hordu garumu summa, kam abi gali ir balti, ir vienāda ar to hordu garumu summu, kam abi gali ir sarkani.

148. Kvadrāts sastāv no 6x6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 8.zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?

9. klase (149. - 153.)

149. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$

150. Vai

a) skaitli 2, b) skaitli $\frac{1}{8}$

var izsacīt kā četriem dažādiem naturālu skaitļu kvadrātiem apgriezto lielumu summu?

151. Caur taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru novilktas taisnes paralēli tā malām. Šīs taisnes sadala katru no trijstūra malām trīs nogriežņos. Pierādīt, ka hipotenūzas vidējā nogriežņa garums vienāds ar katešu vidējo nogriežņu garumu summu.

152. Apskatām pirmos n naturālos skaitļus. No tiem jāizvēlas divus tā, lai to reizinājums būtu vienāds ar visu pārējo skaitļu summu. Vai tas ir iespējams, ja:

a) n=10,

b) n=15 ?

153. Karnevāla zālē katras divas lampas savienotas ar baltu vai sarkanu vītni (tikai vienu!). Pierādīt, ka zirneklītis var izvēlēties vienu no šīm krāsām tā, ka, rāpojot tikai pa izvēlētās krāsas vītnēm, viņš var nokļūt no jebkuras lampas uz jebkuru citu, pa ceļam apmeklējot augstākais 3 no pārējām lampām.

ATRISINĀJUMI

Sagatavošanās olimpiāde (1.-25.)

1. **Risinājums.** Skaitli 30 jāsadala trijos naturālos viencipara reizinātājos: $a\cdot b\cdot c=30$. Ievērojam, ka skaitļa 30 naturālie dalītāji ir 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30.

   1) Ja $a=1$, tad $b\cdot c=30$ ($b\cdot c=1\cdot 30$; $2\cdot 15$; $3\cdot 10$; $5\cdot 6$ vai $b\cdot c=6\cdot 5$; $10\cdot 3$; $15\cdot 2$; $30\cdot 1$). Uzdevuma prasības apmierina reizinātāji 1; 5 un 6. Reizinātāji 30; 15; 10 uzdevuma prasības neapmierina, jo nav viencipara skaitļi.

   2) Ja $a=2$, tad $b\cdot c=15$ ($b\cdot c=1\cdot 15$; $3\cdot 5$ vai $5\cdot 3$; $15\cdot 1$). Tikai reizinātāji 2; 3 un 5 apmierina uzdevuma nosacījumus.

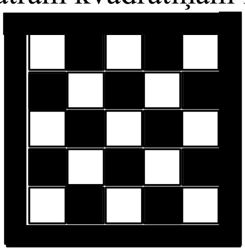
   Ja $a=3$; 5; 6; 15; 30, spriežam līdzīgi kā 1) un 2) gadījumā.

   Iegūstam divus iespējamus ciparu komplektus: (1; 5; 6) un (2; 3; 5). No katra no tiem var izveidot 6 trīsciparu skaitļus. Tātad pavisam var uzrakstīt divpadsmit trīsciparu skaitļus, katram no kuriem ciparu reizinājums ir 30:

   156; 165; 516; 561; 615; 651; 235; 253; 325; 352; 523; 532.

2. **Atbilde:** jā, var izrakt (skat. 9.zīm.).

   Risinājums. Doto kvadrātu ar malas garumu 5 km var sadalīt 25 kvadrātiņos ar malas garumu 1 km. Salā izrok 8 līčus un 4 dīķus. Atlikušie 13 kvadrātiņi veido krastmalu, kuras kopējais garums ir 52 km (katram kvadrātiņam ir 4 malas, kopā $13\cdot 4=52$).



9. zīm.

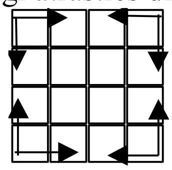
3. **Atbilde: a)** jā, var. Piemēram: 4; 2; 6; 3; 1; 5 vai 5; 1; 3; 6; 2; 4.

   b) nē, nevar.

   Risinājums. Skaitļiem 7 un 5 vienīgais blakus pieļaujamais dalītājs ir skaitlis 1, un paši tie nav citu skaitļu dalītāji. Tātad 7 un 5 var atrasties blakus tikai ar 1. Tāpēc 1 jāatrodas starp skaitļiem 7 un 5. Fragmentu 7; 1; 5 nevar turpināt ne pa labi ne pa kreisi. Tātad visus skaitļus prasītajā veidā uzrakstīt nevar.

4. **Atbilde:** nē, nevar.

   Risinājums. Skaitlim 1 blakus var būt vienīgi skaitļi 4 un 5 ($1+3=4$; $1+4=5$), skaitlim 2 - vienīgi skaitļi 5 un 6 ($2+3=5$; $2+4=6$). Tātad skaitļi 1 un 2 atrodas stūros (vienīgi stūra rūtiņām ir divas kopīgas malas ar citām rūtiņām) un tiem abiem blakus ir skaitlis 5, bet tā nevar būt: skaitlis 5 nevar vienlaicīgi atrasties divās dažādās rūtiņās (skat. 10.zīm.):



10. zīm.

5. **Atbilde:** ne noteikti.

Risinājums. Pieciem cilvēkiem ir tikai 4 dažādi vecumi pilnos gados. Tātad noteikti eksistē divi cilvēki, kam vecumi pilnos gados ir vienādi. Tomēr no tā neseko, ka tie dzimuši vienā un tai pašā gadā. Sākoties jaunajam astronomiskajam gadam, cilvēkam gadu skaits nemainās automātiski. Tā notiek tikai cilvēkiem, kas dzimuši 1. janvārī.

Piemēram: cilvēki var būt dzimuši 1975. gada novembrī, 1976. gada augustā, 1977. gada oktobrī, 1978. gada janvārī un 1979. gada maijā. Tad 2000. gada aprīlī viņiem attiecīgi būs 24; 23; 22; 22 un 21 gads.

6. **Atbilde:** 66 skaitļi.

Risinājums. Skaitļa ciparu summa dalās ar 3 tad un tikai tad, ja skaitlis dalās ar 3 (pēc dalāmības pazīmes ar 3).Tāpēc mēs meklēsim skaitļus, kas dalās ar 3.

Izrakstot naturālos skaitļus pēc kārtas, ievērojam, ka katrs trešais naturālais skaitlis dalās ar 3.

1, 2, <u>3,</u> 4, 5, <u>6,</u> 7, 8, <u>9,</u> 10, 11, <u>12,</u> …

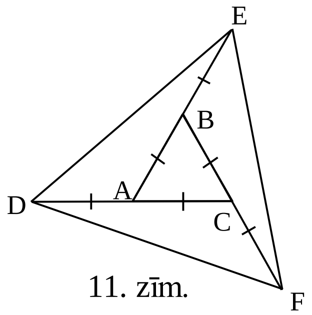
Skaitļus sagrupējam pa trīs: (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9), …

Ievērojam, ka 200:3=66 atl. 2. No pirmajiem 200 naturāliem skaitļiem var atrast pilnas 66 grupas. Katrā grupā trešais skaitlis dalās ar 3.

Tātad var atrast 66 skaitļus.

7. **Atbilde:** jā, var (skat. 11.zīm.).

Risinājums. Pirmā zemnieku saimniecība aizņem zemes gabalu - vienādmalu trijstūri ABC ar malas garumu 1 km. Uz vienādmalu trijstūra malu pagarinājumiem atliek 1 km garus nogriežņus (AD=BE=CF=1).



11. zīm.

8. **Atbilde:** 4421421.

Risinājums. Dotajam skaitlim 421421421 ciparu summa ir 21. Ar 9 dalās tieši tie skaitļi, kam ciparu summa dalās ar 9.

Izsvītrojot vienu ciparu 1; 2 vai 4, attiecīgi iegūst ciparu summas 20; 19 vai 17, no kurām neviena nedalās ar 9. Tātad jāizsvītro vismaz divi cipari.

Izsvītrojot divus ciparus (4 un 2), (1 un 2), (4 un 1), (4 un 4), (2 un 2) vai (1 un 1), attiecīgi iegūst ciparu summas: 15; 18; 16; 13; 17; 19. No tām ar 9 dalās tikai 18.

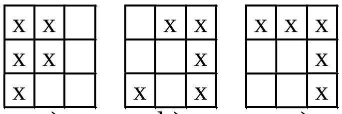
Tātad ir jāizsvītro divi cipari: 1 un 2. Lai rezultātā pirmie cipari būtu iespējami lieli, jāizsvītro pirmais divnieks un pirmais vieninieks. Iegūtais skaitlis ir 4421421.

Izsvītrojot trīs vai vairāk ciparus, iegūtajam skaitlim būtu ne vairāk par 6 cipariem, tātad tas būtu mazāks par skaitli 4421421.

9. Atbilde: 2, 4 vai 6.

Risinājums. Dotais kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām. Var atrast 6 summas (3 pa rindām un 3 pa kolonnām). No deviņiem ierakstītajiem skaitļiem pieci ir nepāra skaitļi. Izmantosim acīmredzamu faktu: summa ir nepāra tad un tikai tad, ja tajā ir nepāra skaits nepāra saskaitāmo.

Aplūkosim trīs īpašus gadījumus, kā var izvietot nepāra skaitļus (skat. 12. a), b), c) zīm.):



a) b) c)

12. zīm.

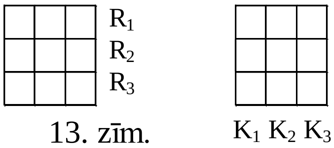
a) iegūst 2 nepāra summas: 1. kolonnā un 3. rindā,

b) iegūst 4 nepāra summas: 2. rindā un 1., 2., 3. kolonnās,

c) iegūst 6 nepāra summas: 1., 2., 3. rindās un 1., 2., 3. kolonnās.

Apzīmēsim 1. rindas summu ar R_1, 2. rindas summu ar R_2 un 3. rindas summu ar R_3 (skat. 13.zīm.).

Summa $R_1+R_2+R_3$ ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz 9 summa, tātad $R_1+R_2+R_3=45$.



13. zīm.

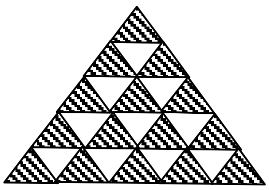
Tā kā summa $R_1+R_2+R_3$ ir nepāra skaitlis, tad no skaitļiem R_1; R_2; R_3 nepāra ir vai nu viens, vai trīs skaitļi. Līdzīgi var izspriest par kolonnu summām.

Tātad nepāra skaits summu dotajā kvadrātā var būt tikai 1+1; 1+3; 3+3 jeb 2; 4; 6 summas. Ka šīs iespējas realizējas, redzams 12.zīm.

10. Atbilde: 30 nogriežņus.

Risinājums. Var nokrāsot visus tos nogriežņus, kas paralēli malai AB vai malai BC. Tad katram no 25 mazajiem trijstūrīšiem nokrāso divas malas, un kopējais nokrāsoto nogriežņu skaits ir 30.

Ja nokrāsos vairāk par 30 nogriežņiem, tad vismaz vienā no 14.zīm. attēlotajiem 15 trijstūrīšiem būs nokrāsotas vairāk nekā divas malas, t.i. visas 3 malas.



14. zīm.

11. Risinājums. Skaitli 42 jāsadala trijos naturālos viencipara reizinātājos: $42=a\cdot b\cdot c$.

Ja $a=1$, tad $b\cdot c=42$ ($b\cdot c=1\cdot 42$; $2\cdot 21$; $3\cdot 14$; $6\cdot 7$; $42\cdot 1$; $21\cdot 2$; $14\cdot 3$; $7\cdot 6$). Uzdevuma nosacījumus neapmierina reizinātāji 42; 21; 14, jo tie nav viencipara.

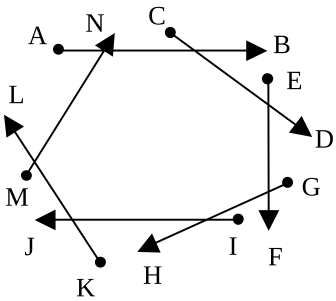
No cipariem 1; 6; 7 izveidotais skaitlis 176 ir salikts ($11\cdot 16=176$).

Ja $a=2$, tad $b\cdot c=21$ ($b\cdot c=3\cdot 7$; $7\cdot 3$). Ciparu 2; 3; 7 summa ir 12. Pēc dalāmības pazīmes ar 3 skaitlis ar cipariem 2; 3; 7 ir salikts, jo dalās ar 3.

Tātad iespējamie trīsciparu skaitļi ir 237; 273; 327; 372; 723; 732, kā arī 176.

12. Atbilde: jā, var uzzīmēt (skat. 15.zīm.)

Risinājums.



15. zīm.

Stars AB krusto starus MN un CD;
stars CD – AB un EF; stars EF – CD un GH;
stars GH – EF un IJ; stars IJ – GH un KL;
stars KL – IJ un MN; stars MN – KL un AB.

13. 1. risinājums. Dotais vienādojums ir lineārs, jo, izpildot reizināšanu, x tiek reizināts tikai ar skaitļiem.

Risinot lineāru vienādojumu $a \cdot x+b=0$, aplūko iespējamo atrisinājumu skaitu:

1) ja $a \neq 0$, tad vienādojumam ir viena noteikta sakne;

2) ja $a=0$, $b \neq 0$, tad vienādojumam nav saknes;

3) ja $a=0$ un $b=0$, tad vienādojuma atrisinājums ir jebkurš skaitlis.

Pārbaude rāda, ka der atrisinājums x=1. Pārbaudām vai der x=2. Tā kā $34 \neq 1$, tad 2 nav vienādojuma sakne. Tātad dotajam vienādojumam ir tieši viens atrisinājums.

Tātad x=1.

2. risinājums. Vienādojumu atrisina, izpildot ekvivalentus pārveidojumus.

Pakāpeniski atverot iekavas un savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam:

$$((((3x-2)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x=1$$
$$(((5x-4)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x=1$$
$$((9x-8)\cdot 2-x)\cdot 2-x=1$$
$$(17x-16)\cdot 2-x=1$$
$$33x-32=1$$
$$33x=33$$
$$x=1$$

14. Risinājums. Saprātīgi mēģināt novietot skaitļus 10 un 20 blakus, jo citos skaitļos cipara 0 nav.

Skaitļus var sagrupēt, piemēram tā: 24; 4; 14; 21; 1; 11; 10; 20; 12; 2; 22; 23; 3; 13; 15; 5; 25; 26; 6; 16; 17; 7; 27; 28; 8; 18; 19; 9; 29 (24 un 29 nonāk blakus).

15. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Sākotnēji ir doti trīs pāra skaitļi. Aplūkosim iespējamos gājienus:

1) saskaitot pāra skaitli ar pāra skaitli, iegūst pāra skaitli; no summas atņemot 1, iegūst nepāra skaitli. Tātad pēc pirmā gājiena uz tāfeles ir divi pāra skaitļi un viens nepāra skaitlis. Pēc pirmā gājiena ir iespēja izvēlēties:

2a) nodzēšot pāra skaitli, tā vietā uzraksta (pāra sk.+nepāra sk.-1) = pāra skaitlis.

2b) nodzēšot nepāra skaitli, tā vietā uzraksta ((pāra sk.+pāra sk.-1) = nepāra skaitlis.

Tātad pēc otrā gājiena uz tāfeles atkal ir divi pāra un viens nepāra skaitlis. Tāpēc arī pēc jebkura gājiena uz tāfeles atrodas divi pāra un viens nepāra skaitlis.

Tātad skaitļus 1997; 1999; 2001 vienlaicīgi iegūt nevarēs, jo tie visi ir nepāra.

16. 1. risinājums. Tā kā x+y+z=0, tad x= –(y+z). Ievieto izteiksmē x= –(y+z) un izpilda ekvivalentus pārveidojumus: vienādo saucējus, savelk līdzīgos locekļus “uz vienas daļsvītras”.

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=$$

$$=-\frac{y+z}{yz}-\frac{y}{z(y+z)}-\frac{z}{y(y+z)}-\frac{2}{y+z}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{-(y+z)\cdot x\cdot(y+z)-y\cdot xy-z\cdot xz-2xyz+2xz(y+z)+2xy(y+z)}{xyz\cdot(y+z)}=$$

$$=\frac{-y^2x-2xyz-xz^2-xy^2-xz^2-2xyz+2xyz+2xz^2+2xy^2+2xyz}{xyz\cdot(y+z)}=$$

$$=\frac{0}{xyz\cdot(y+z)}=0.$$

2. risinājums. Izteiksmē izpilda ekvivalentus pārveidojumus: vienādo saucējus un izmanto saīsināto reizināšanas formulu $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{x^2+y^2+z^2+2yz+2xz+2xy}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2}{xyz};$$

tā kā x+y+z=0, tad daļas $\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$ vērtība ir 0.

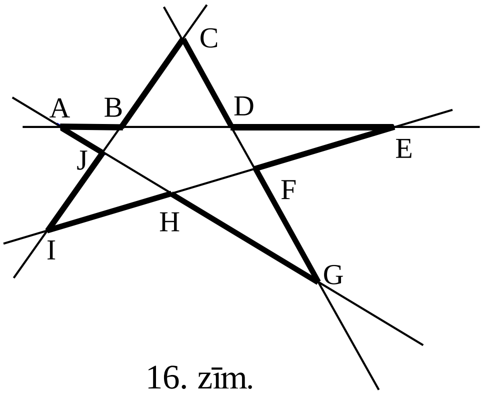
17. Risinājums. Jā, var. Piemēram:

2; 4; 1; 3; 5; 7; 9; 6; 8; 10; 12; 14; 11; 13; 15; 17; 19; 16; 18; 20; 22; 24; 21; 23; 25.

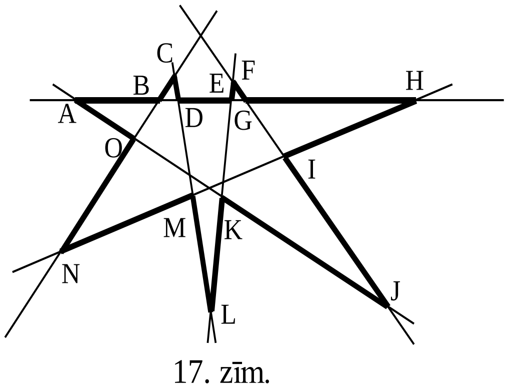
Dotos skaitļus grupē pa pieci: a+1; a+2; a+3; a+4; a+5 un katrā grupā skaitļus sakārto secībā a+2; a+4; a+1; a+3; a+5.

18. Risinājums. a) Desmitstūrim ABCDEFGHIJ uz 5 taisnēm atrodas pa divām malām (skat. 16.zīm.).

b) Piecpadsmitstūri sāk zīmēt līdzīgi kā desmitstūri; uz katras no sešām taisnēm atrodas divas daudzstūra malas, bet uz septītās taisnes - trīs daudzstūra malas (skat. 17.zīm.).



16. zīm.



17. zīm.

19. Atbilde: visi skaitļi var būt vienādi, kā arī starp tiem var būt divi dažādi.

Risinājums. Aplūko 3 gadījumus:

1) iedomātie skaitļi x; y; z ir vienādi,

2) iedomātie divi skaitļi ir vienādi un trešais atšķirīgs;

3) iedomātie skaitļi x; y; z ir dažādi.

Redzam:

1) ja x=y=z, tad uzdevuma nosacījumi noteikti izpildās.

Tātad iedomātie skaitļi var būt vienādi.

2) pieņemsim, ka x=y=1; z=2; tad $\frac{2x}{y}=2;\ \frac{2x}{z}=1;\ \frac{2y}{x}=2;\ \frac{2y}{z}=1;\ \frac{2z}{x}=4;\ \frac{2z}{y}=4$.

Tātad var būt divi vienādi skaitļi un trešais – atšķirīgs.

3) visi iedomātie skaitļi ir dažādi; varam pieņemt, ka x<y<z.

Tad $\frac{x}{y}<1$, jo x<y, un $2\cdot\frac{x}{y}<2\cdot1$; līdzīgi $\frac{2x}{z}<2$. Tā kā dalījumiem $\frac{2x}{y}$ un $\frac{2x}{z}$ jābūt naturāliem skaitļiem, tad $\frac{2x}{y}=1$ un $\frac{2x}{z}=1$, no kurienes seko, ka y=z.

Tātad visi skaitļi nevar būt atšķirīgi.

20. Risinājums. Aplūko naturālu skaitli $x=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n}$, kur $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{n-1}<a_n$ ($a_i\geq a_{i-1}+1$ un $a_1>0$).

Skaitli 9x var izteikt kā starpību 10x-x. Uzrakstām skaitļus 10x un x vienu zem otra:

$$\begin{array}{ll} 10x: & \overline{a_1\ a_2\ a_3\ldots a_{n-1}\ a_n\ \ 0} \\ x: & \quad\ \overline{a_1\ a_2\ldots a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n} \end{array}$$

Reizinājumā 10·x pēdējais cipars ir 0. Atrod reizinājuma 10x un x starpību. Tā kā $a_n\neq0$, tad, lai no 0 atņemtu a_n, ir jāaizņemas viens desmits no a_n ($a_n>0$).

Tā kā $a_n-1\geq a_{n-1}$, tad no a_n-1 var atņemt a_{n-1}, neaizņemoties no nākošās šķiras. Dotajā skaitlī katrs nākošais cipars ir lielāks par iepriekšējo ($a_i>a_{i-1}$), tāpēc atņemšanu var turpināt:

$$10x-x=\overline{a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-1-a_{n-1})(10-a_n)}$$

Atrodam iegūtās starpības ciparu summu:

$$a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-1-a_{n-1})+(10-a_n).$$

Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, iegūst:

$$a_1+a_2-a_1+a_3-a_2+\ldots+a_{n-1}-a_{n-2}+a_n-a_{n-1}-1+10-a_n=-1+10=9, \text{ kbj.}$$

21. 1.risinājums. Sadalot reizinātājos, izmanto kubu summas formulu:
$x^3+y^3=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)$

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(a-c)^3=$$
$$=((a-b)^3+(b-c)^3))+(c-a)^3=$$
$$=(a-b+b-c)\cdot((a-b)^2-(a-b)\cdot(b-c)+(b-c)^2)+(c-a)^3=$$
$$=(a-c)\cdot(a^2-2ab+b^2-ab+b^2+ac-bc+b^2-2bc+c^2)+(c-a)^3=$$
$$=(a-c)\cdot(a^2-3ab+3b^2+ac-3bc+c^2)-(a-c)^3=$$
$$=(a-c)\cdot(a^2-3ab+3b^2+ac-3bc+c^2-(a-c)^2)=$$
$$=(a-c)\cdot(3b^2-3ab+3ac-3bc)=$$
$$=(a-c)\cdot(3b\cdot(b-a)+3c\cdot(a-b))=$$
$$=(a-c)\cdot(a-b)\cdot(3c-3b)=$$
$$=3(a-c)\cdot(a-b)\cdot(c-b)$$

2.risinājums. Sadalot izteiksmi reizinātājos, lieto Bezū teorēmu.

Ja a=b, tad apskatāmā izteiksme ir 0; ja a≠b, tad saskaņā ar Bezū teorēmu tā dalās ar (a-b). Tāpat tā dalās ar (b-c) un (c-a). Tā kā tā ir 3. pakāpes izteiksme, tad tā ir k·(a-b)·(b-c)·(c-a), kur k - konstante. Konstantes k vērtību var atrast, vienādībā $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=k(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)$ ievietojot, piemēram, a=1; b= –1; c=0;
iegūst $2^3-1^3-1^3=k\cdot(2\cdot(-1)\cdot(-1))$, tātad k=3.

22. Risinājums. Skaitli n izsaka formā n=a+4, kur a≥3 un a - nepāra skaitlis. Meklē skaitļa n kvadrātu:

$$n^2=(a+4)^2=a^2+8a+16=a^2+8(a+2)=a^2+5(a+2)+3(a+2).$$

Tā kā a - nepāra skaitlis, tad a^2 - nepāra skaitlis; a+2 - nepāra skaitlis, tāpēc reizinājumi 5(a+2) un 3(a+2) arī ir nepāra. Skaidrs, ka tie visi ir salikti skaitļi.

23. Risinājums. Trim smagākajām loma zivīm atbilst 35 % no visa loma svara, tātad atlikušajam lomam atbilst 65%. Tā kā trīs vieglākās zivis kopā svēra $\frac{5}{13}$ no atlikušā loma, tad procentos tas ir $\frac{5}{13}$ no 65% jeb 25%. Tātad trīs smagākās zivis svēra 35%, trīs vieglākās zivis – 25%, bet pārējās ("vidējās") zivis – 40% no visa loma.

Ja "vidējo" zivju ir 3 vai mazāk, tad rodas pretruna, jo pēc dotā trīs smagākās zivis svēra 35% no loma, bet "vidējās" zivis 40% no loma (3 "vidējās" zivis nevar svērt vairāk nekā 3 smagākās zivis). Tātad "vidējo" zivju ir vairāk nekā 3.

Pieņemsim, ka "vidējo" zivju ir 5 vai vairāk. Apzīmēsim masas (procentos) piecām vieglākajām no tām ar x≤y≤z≤t≤v, tad x+y+z+t+v≤40.Tā kā trīs vieglākās zivis svēra 25% no visa loma, tad no "vidējām" trīs vieglākās svērs 25% vai vairāk, un ir spēkā nevienādība x+y+z≥25, tāpēc 3z≥25, $z\geq 8\frac{1}{3}$. Tāpēc arī $t\geq 8\frac{1}{3}$ un $v\geq 8\frac{1}{3}$.

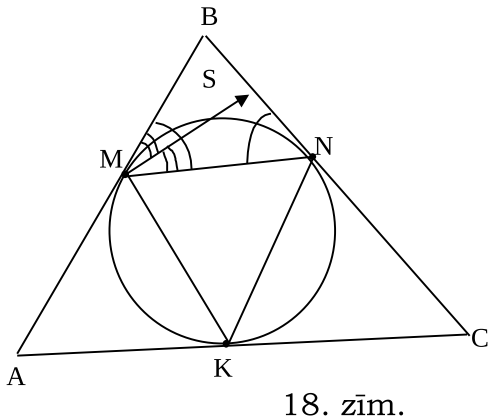
No atrastajām nevienādībām secinām:

$$x+y+z+t+v\geq(x+y+z)+t+v\geq 25+8\frac{1}{3}+8\frac{1}{3}=25+2\cdot 8\frac{1}{3}=41\frac{2}{3},\text{ tātad } x+y+z+t+v\geq 41\frac{2}{3}.$$

Iegūta pretruna, jo "vidējās" zivis svēra 40% no visa loma. Tātad "vidējo" zivju skaits ir mazāks par 5 un lielāks par 3. Tātad "vidējo" zivju ir 4 un pavisam zivju bija 10.

24. Risinājums. Pierādījums: Aplūko ΔMBN (skat. 18.zīm.). Hordas - pieskares leņķis ∠BMN ietver loku MN, kā arī ∠MNB ietver loku MN, tāpēc $\angle BMN=\frac{1}{2}\cup MN$ un $\angle MNB=\frac{1}{2}\cup MN$. Tātad ∠BMN=∠BNM. Tātad ΔMBN ir vienādsānu. Ja MS ir ∠BMN bisektrise, tad ievilktais leņķis ∠SMN ir puse no ∠BMN, tāpēc balstās uz pusi no loka MN. Tātad šī bisektrise iet caur loka MN viduspunktu. Simetrijas pēc caur loka MN viduspunktu iet arī ∠MNB bisektrise. Tātad ΔMBN bisektrišu krustpunkts ir loka MN viduspunkts.

Apgalvojumu par ΔAMK un ΔCNK pierāda līdzīgi.



18. zīm.

25. Risinājums. Cilvēkus brīvi apvienosim pāros, kā pagadās. Pāri sauksim par sliktu, ja tajā ir ienaidnieki, un par labu pretējā gadījumā.

Pieņemsim, ka ir kāds slikts pāris (A, B). Pieņemsim, ka ir jau pierādīts: eksistē tāds pāris (X, Y), ka A nav ienaidā ar X un B nav ienaidā ar Y. Tad pāru (A, B) un (X, Y) vietā izveidosim divus labus pārus (A, X) un (B, Y). Šīs izmaiņas rezultātā slikto pāru skaits ir samazinājies. Ja pēc tam vēl ir palicis kāds slikts pāris, izdara tādu pašu izmaiņu, u.t.t. Tā kā slikto pāru skaits pašā sākumā nav lielāks par 5, tad vēlākais pēc 5 aprakstītā veida izmaiņām slikto pāru vairs vispār nebūs, un mēs būsim ieguvuši vajadzīgo sadalījumu pāros.

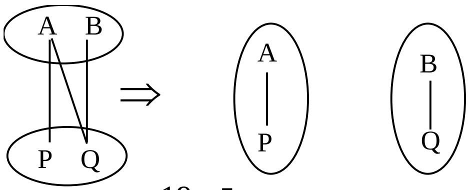
Atliek pierādīt, ka jebkurā sadalījumā pāros katram sliktam pārim (A, B) eksistē tāds pāris (X, Y), ka ne A ar X, ne B ar Y nav ienaidnieki.

Pieņemsim pretējo, ka tāda pāra (X, Y) nav.

Sacīsim, ka starp patvaļīgiem cilvēkiem P un Q pastāv draudzība, ja P un Q nav ienaidnieki.

1) ja kādā pārī (P, Q) cilvēkam A ir divi draugi, tad B šajā pārī nav neviena drauga, un otrādi: ja kādā pārī B ir divi draugi, tad A šajā pārī nav neviena drauga.

Tiešām, ja tā nebūtu, tad šo pāri (P, Q) varētu ņemt par meklējamo (X, Y), skat. 19.zīm.



19. zīm.

Secina: pārus (A, B) un (P, Q) savieno augstākais 2 draudzības.

2) ja katrā pārī (P, Q) cilvēkam A (resp. B) ir tikai viens draugs, tad B (resp. A) šajā pārī ir ne vairāk kā viens draugs; pamatojums līdzīgs iepriekšējā gadījumā apskatītajam.

Tātad arī šajā gadījumā pārus (A, B) un (P,Q) savieno augstākais divas draudzības.

3) ja katrā pārī (P, Q) cilvēkam A nav neviena drauga, tad uzreiz skaidrs, ka pārus (A, B) un (P, Q) savieno augstākais divas draudzības (tās, kas var būt pārī (P, Q) cilvēkam B).

Esam ieguvuši, ka pāri (A, B) ar katru no četriem citiem pāriem savieno augstākais 2 draudzības. Tātad (A, B) ar citiem pāriem savieno augstākais $4 \cdot 2 = 8$ draudzības. Bet ienaidniekiem A un B katram ir vismaz pa 5 draugiem, tāpēc pāri (A, B) ar citiem pāriem savieno vismaz $5+5=10$ draudzības.

Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un vajadzīgais pāris (X, Y) eksistē. Uzdevums atrisināts.

Rajona olimpiāde (26. - 50.)

26. Atbilde: Piemēram, 274. Lasītājs pats var pārliecināties, ka tā der.

Piezīme: patiesībā 274 ir vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

27. Atbilde: četrus var, piecus nevar.

Risinājums. Divu naturālu skaitļu summas, starpības, reizinājuma pēdējais cipars ir atkarīgs no doto skaitļu pēdējiem cipariem:

a) lai summās pēdējais cipars nebūtu **0,** nedrīkst būt vienlaicīgi skaitļi ar pēdējiem cipariem (1;9), (2;8), (3;7), (5;5) un (4;6);

b) lai starpībās pēdējais cipars nebūtu **0**, visiem pēdējiem cipariem jābūt dažādiem;

c) lai reizinājumos pēdējais cipars nebūtu **0**, nedrīkst būt vienlaicīgi skaitļi ar pēdējiem cipariem (2;5), (4;5), (6;5), (8;5), kā arī nedrīkst būt skaitlis ar pēdējo ciparu 0.

Tātad četrus naturālus skaitļus var atrast. Piemēram:

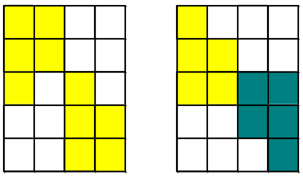
(1; 2; 3; 4), (1; 2; 4; 7), (6; 7; 8; 9).

Piecus naturālus skaitļus atrast nevar.

Visiem pēdējiem cipariem jābūt dažādiem un neviens no tiem nav 0. Ja kāds no tiem ir 5, tad pārējie var būt tikai 1; 3; 7; 9 (nevar būt 2; 4; 6; 8, jo tad, reizinot ar 5, pēdējais cipars būs 0). Turklāt skaitļi ar pēdējiem cipariem (1;9), (3;7) reizē nevar būt (summā pēdējais cipars būtu 0). Ja starp pēdējiem cipariem nav 5, tad starp pieciem uzrakstītajiem skaitļiem atradīsies vismaz divi skaitļi ar pēdējiem cipariem (1;9), (2;8), (3;7), (4;6).

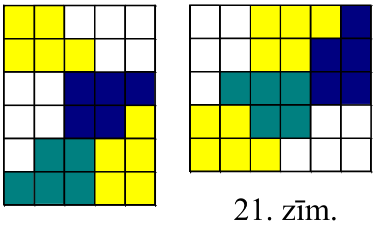
28. Atbilde: a), b) – var, c) – nevar.

Risinājums. a) Aplūko taisnstūri 4x5. To var sagriezt 4 figūrās, skat. 20.zīm.



20. zīm.

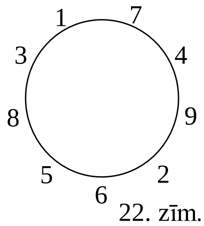
b) Aplūko taisnstūri 5x6. To var sagriezt 6 figūrās, skat. 21.zīm.



21. zīm.

c) Aplūko taisnstūri ar izmēriem 6x7. Tajā ir 42 rūtiņas. Rūtiņu skaits nedalās ar 5. Tātad taisnstūri dotā veida figūrās sagriezt nevarēs.

29. Jā, var izrakstīt. Skat. 22.zīm.



22. zīm.

Parādīsim, ka būtiski citu atrisinājumu nav. Aplūkosim skaitļu pārus, kuru skaitļu summa dalās ar 3, ar 5, ar 7:

(1 un 2), (1 un 4), (1 un 5), (1 un 6), (1 un 8), (1 un 9),
(2 un 1), (2 un 3), (2 un 4), (2 un 5), (2 un 7), (2 un 8),
(3 un 2), (3 un 4), (3 un 6), (3 un 7), (3 un 9),
(4 un 1), (4 un 2), (4 un 3), (4 un 5), (4 un 6), (4 un 8),
(5 un 1), (5 un 2), (5 un 4), (5 un 7), (5 un 9),
(6 un 1), (6 un 3), (6 un 4), (6 un 8), (6 un 9),
(7 un 2), (7 un 3), (7 un 5), (7 un 8)
(8 un 1), (8 un 2), (8 un 4), (8 un 6), (8 un 7),
(9 un 1), (9 un 3), (9 un 5), (9 un 6).

Tātad **1** blakus var atrasties 3 un 7,

2 - 6 un 9,

3 - 1; 5 un 8,

4 - 7 un 9,
5 - 3; 6 un 8,
6 - 2; 5 un 7,
7 - 1; 4; 6 un 9,
8 - 3; 5 un 9,
9 - 2; 4; 7 un 8.

Pirmos centīsimies izvietot skaitļus 1; 2 un 4, jo tiem blakus var atrasties tikai divi skaitļi. Izvēloties kā pirmo skaitli 1, iegūstam secību 3; 1; 7. Pievienojot 4, iegūstam secību 3; 1; 7; 4; 9. Pēc tam, pievienojot 2, iegūstam secību 3; 1; 7; 4; 9; 2; 6. Tā kā 8 nevar būt blakus ar 6, tad iegūstam 22. zīm. ainu.

30. Atbilde: jā, tā var gadīties.

Risinājums. Pieņemsim, ka čempionātā spēlē 15 komandas. Viena no komandām ir uzvarējusi 6 spēles un zaudējusi 8 spēles. Visas pārējās spēles čempionātā beidzas neizšķirti. Sastādīsim tabulu un aplūkosim, cik punktu čempionātā ir saņēmusi katra komanda pēc votivapu un šillišallu vērtējuma. Komandas numurēsim ar skaitļiem no 1 līdz 15.

1.komanda uzvarēja 6 spēles un zaudēja 8. No 2.līdz 9. komandai (8 komandas) 13 spēles nospēlēja neizšķirti un vienu spēli, spēlējot ar 1. komandu, uzvarēja. No 10. līdz 15. komandai (6 komandas) 13 spēles nospēlēja neizšķirti un vienu spēli, spēlējot ar 1. komandu, zaudēja.

Nr.	Votivapu vērt.	Šillišallu vērt.
1.	6x3+8x0=18	6x2+8x0=12
2.	13x1+1x3=16	13x1+1x2=15
•	•	•
•	•	•
•	•	•
9.	13x1+1x3=16	13x1+1x2=15
10.	13x1+1x0=13	13x1+1x0=13
•	•	•
•	•	•
•	•	•
15.	13x1+1x0=13	13x1+1x0=13

Tātad secinām, ka 1.komanda pēc votivapu vērtējuma čempionātā iegūst pirmo vietu, jo ir saņēmusi lielāko punktu skaitu, t.i., 18, bet pēc šillišallu vērtējuma 1.komanda iegūst pēdējo vietu, jo ir saņēmusi mazāko punktu skaitu, t.i., 12.

31. Atbilde: 0; 1; 2 vai 3.

Risinājums.

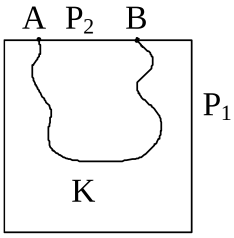
Aplūko, kādas var būt iespējas trijām summām dalīties ar 3:

1) ar 3 nedalās neviena no trijām summām;
2) ar 3 dalās viena summa, bet divas summas nedalās;
3) ar 3 dalās divas summas, bet viena summa nedalās;
4) ar 3 dalās trīs summas.

Visas šīs iespējas tiešām realizējas, piemēram:

1) (1; 3; 4), (2; 3; 5), (3; 4; 7) u.t.t.
2) (1; 5; 3), (1; 2; 3), (2; 3; 4) u.t.t.
3) (1; 4; 5), (1; 2; 4), (1; 2; 8) u.t.t.
4) (3; 6; 9), (6; 9; 12), (9; 12; 15) u.t.t.

32. Atbilde: a) var, b) nevar.



23. zīm.

Risinājums. a) Kopīgās robežas garumu apzīmēsim ar K. Attālumu no punkta A līdz punktam B uz dotā kvadrāta kontūras apzīmēsim ar P_2, bet pārējo kontūras daļu ar P_1.

Tā kā dotā kvadrāta perimetrs ir 40 m, tad

$P_1+P_2= 40$ (1).

Pēc dotā 1. daļas perimetrs ir 60 m un to var izteikt

$P_1+K=60$ (2),

bet 2. daļas perimetrs ir 30 m, tātad $P_2+K=30$ (3).

No (1) vienādības izsakām $P_2=40-P_1$, ievietojam (3) vienādībā: $(40-P_1)+K=30$.

Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka $P_1-K=10$.

Ja $P_1-K=10$ un $P_1+K=60$, tad $P_1=35$ un $K=25$ un no (3) vienādības $P_2=5$. Piemēru viegli uzzīmēt (tas nepieciešams!)

b) Līdzīgi kā a) gadījumā $P_1+P_2=40$, $P_1+K=100$, $P_2+K=50$. Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka $P_1–P_2=50$ un $P_1+P_2=40$, tātad $P_1=45$. Tā nevar būt, jo dotā kvadrāta perimetrs ir 40m un P_1 nevar būt lielāks par dotā kvadrāta perimetru.

Tātad sadalīt kvadrātu divās daļās ar perimetriem 50m un 100m nevar.

33. Risinājums. Grupēsim visus skaitļus pa trīs pēc kārtas uzrakstītiem trijos trijniekos; viens skaitlis ir lieks. Ja par lieko izvēlas skaitli 1, tad pārējo skaitļu summa ir $2+3+4+…+9+10=54$, tātad vidēji katra trijnieka summa ir $54:3=18$. Tas rāda, ka vismaz viena no šo triju trijnieku summām nav mazāka par 18.

Ja par lieko izvēlas skaitli 10, tad pārējo skaitļu summa ir $1+2+…+8+9=45$. Šai gadījumā trijnieka summa vidēji ir $45:3=15$. Tāpēc eksistē trijnieks, kura summa nepārsniedz 15.

Līdz ar to ir pierādīts, ka norādīto summu vidū ir divas tādas summas ≥ 18 un ≤ 15, kuras atšķiras ne mazāk kā par 3.

34. Atbilde: Jā, var nokrāsot. Skat., piem., 24.zīm.

1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5

24. zīm.

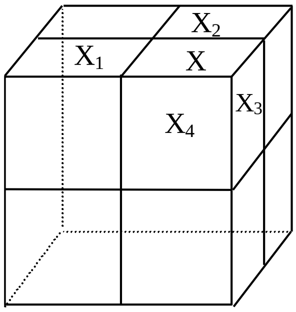
35. Atbilde: nē, nevar būt.

Risinājums. Katru kuba skaldni sadalot 4 kvadrātos iegūst $4\cdot 6=24$ kvadrātus. Pieņemsim, ka patvaļīgi ierakstītais skaitlis ir X un tā kaimiņi ir X_1; X_2; X_3 un X_4 (skat. 25.zīm.), tad $X+X_1+X_2+X_3+X_4=17$. Tā kā ir 24 kvadrātiņi, tad var aprēķināt 24 šādas summas. Savukārt 24 summu summa ir $24\cdot 17$.

Aplūkosim, kā vēl var aprēķināt doto summu.

Apzīmēsim ar S visu 24 skaitļu summu (S - vesels skaitlis). Meklējot katra skaitļa summas ar tā kaimiņiem, katru skaitli kā saskaitāmo izmanto 5 reizes. Tātad 24 summu summu var aprēķināt pēc formulas $5 \cdot S$. Līdz ar to $5 \cdot S = 24 \cdot 17$. Reizinājums $24 \cdot 17$ ar 5 nedalās bez atlikuma, bet $5 \cdot S$ ar 5 dalās.

Tātad kvadrātiņos visi ierakstītie skaitļi vienlaicīgi nevar būt veseli.



25. zīm.

36. Atbilde: starp skaitļiem ir n negatīvi skaitļi.

1. risinājums. Apzīmēsim divus no apskatāmajiem skaitļiem ar x un y.

a) reizinājums $x \cdot y$ ir negatīvs, ja $x>0$ un $y<0$ vai $x<0$ un $y>0$. Šajos gadījumos $\frac{x}{y}<0$ un $\frac{y}{x}<0$. Tāpēc, ja $x \cdot y<0$, tad arī $\frac{x}{y}<0$ un $\frac{y}{x}<0$.

b) reizinājums $x \cdot y$ ir pozitīvs, ja $x>0$ un $y>0$ vai $x<0$ un $y<0$. Šajos gadījumos $\frac{x}{y}>0$ un $\frac{y}{x}>0$. Tāpēc, ja $x \cdot y>0$, tad arī $\frac{x}{y}>0$ un $\frac{y}{x}>0$.

Tātad ab ir pozitīvs/ negatīvs vienlaicīgi ar $\frac{a}{b}$, ac – vienlaicīgi ar $\frac{c}{a}$ utt.

Tātad starp dalījumiem ir tieši n negatīvi skaitļi.

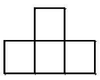
2. risinājums. Reizinājumu xy pārveido: $xy=\frac{x}{y} \cdot y^2$. Tā kā $y^2>0$ pie jebkuras y nenulles vērtības, tad

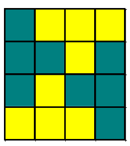
a) ja $xy>0$, tad arī $\frac{x}{y}>0$;

b) ja $xy<0$, tad arī $\frac{x}{y}<0$.

Tālāk spriež kā 1. risinājumā.

37. Risinājums. No četrām baltām figūrām (skat. 26.zīm.) var salikt kvadrātu 4x4 rūtiņas (skat. 27.zīm.).



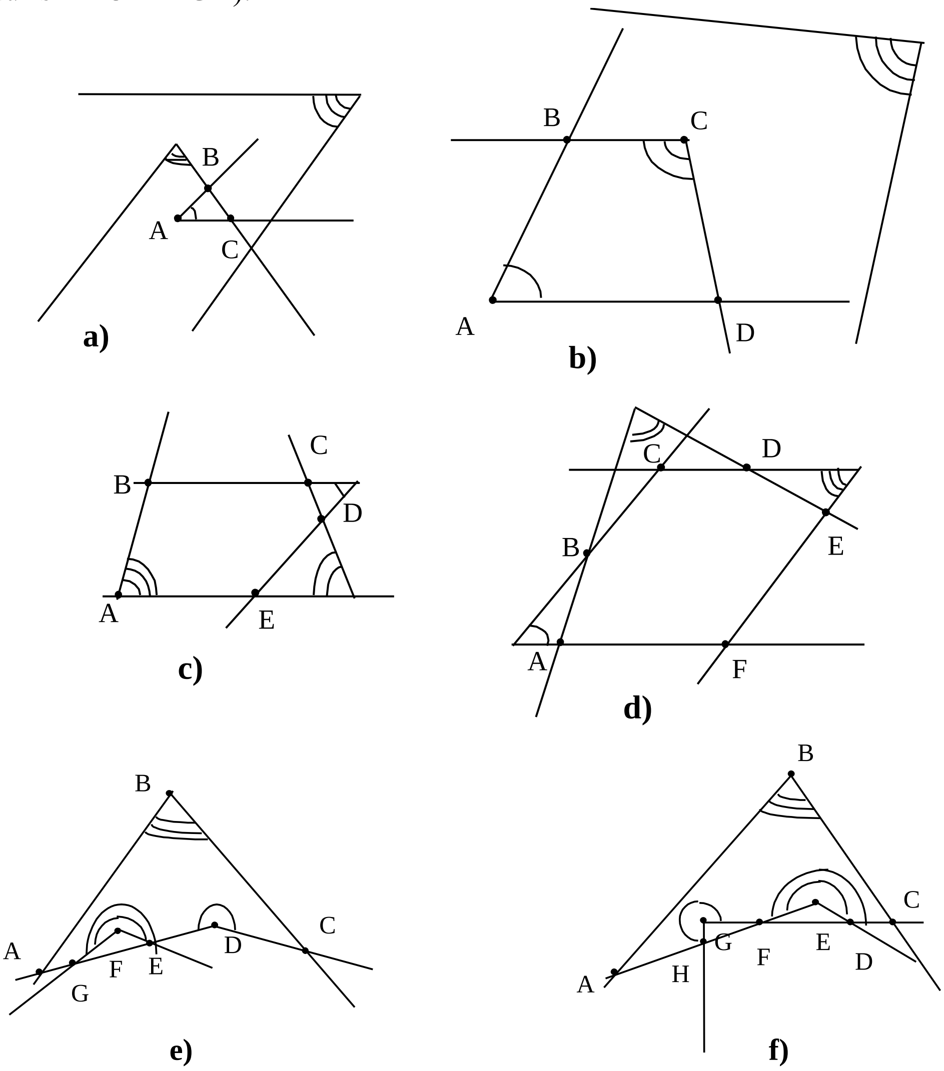


26. zīm. 27. zīm.

Tātad melnais kvadrāts un baltais kvadrāts ir vienādi, jo pilnībā viens otru pārklāj. Sagriežot melno kvadrātu kaut kādos gabalos, griezuma līnijas "pārkopē " uz baltā kvadrāta (melno kvadrātu uzliekot uz baltā kvadrāta). Savukārt balto daļu kontūras pārkopē uz melnā kvadrāta. Tādā veidā veicot “pārkopēšanu”, griezuma līnijas uz abiem kvadrātiem sakritīs.

Tādēļ varēs visas daļas apvienot pāros, pie tam katrā pārī atradīsies viena balta un viena melna daļa, kas savā starpā ir vienādas (tās precīzi uzklājas viena otrai).

38. Risinājums. a) skat. 28.zīm. (a) gadījumā radies trijstūris ABC, b) - četrstūris ABCD, c) - piecstūris ABCDE, d) - sešstūris ABCDEF, e) - septiņstūris ABCDEFG, f) - astoņstūris ABCDEFGH).



28. zīm.

b) Tā kā visi leņķi ir mazāki par 180^{o}, tad meklētais daudzstūris ir izliekts. Uz katra leņķa katras malas var atrasties augstākais viena daudzstūra mala (pretējā gadījumā iegūtu ieliektu daudzstūri). Plaknē uzzīmētajiem trijiem leņķiem kopā ir sešas malas.

Tātad izliektā daudzstūra malu skaits nepārsniedz 6.

Aplūkojot a) daļas risinājumu, secinām, ka izliekta daudzstūra malu skaits var būt no 3 līdz 6 (skat. 28. a), b), c), d) zīm.).

39. Risinājums. a) Piemēram, skaitlis x=55 ir interesants, jo tā ciparu summa dalās ar 5. Tā kā x+9=55+9=64 un 6+4=10 dalās ar 5, tad skaitlis 64 arī ir interesants.

b) Tādu skaitļu x ir bezgalīgi daudz. Piemēram, der skaitļi: 505; 5005; 50005; 500005;… utt. Tiešām, tiem pieskaitot 9, iegūst attiecīgi 514; 5014; 50014; 500014 utt. Visi šie skaitļi ir interesanti.

c) Naturālos skaitļus sadalīsim blokos. Viens no blokiem ir 1; 2; 3; …; 9. Katrā citā blokā ietilpst 10 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi $\overline{n0}$; $\overline{n1}$; $\overline{n2}$;…; $\overline{n9}$ (0; 1; 2; …; 9 norāda blokā ietilpstošo naturālo skaitļu pēdējos ciparus).

Piemēram, viens bloks ir 20; 21;… ;29.

No 9 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem vismaz pieci pieder vienam blokam un šo skaitļu ciparu summas pašas ir pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

Tāpēc viena no šīm summām noteikti dalās ar 5.

40. Atbilde: nē, nevar.

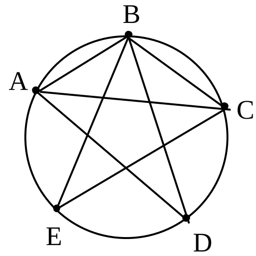
Risinājums. Ievērojam, ka $\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a^2}{b}\cdot c=a\cdot b\cdot c$. Tātad, izdarot gājienus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās, bet $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}\neq\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}$. Tātad nevarēs iegūt prasītos skaitļus.

41. Risinājums. Atrodam summu:

$$\begin{aligned}&(x-1)\cdot(1-3x)+(x-1)\cdot(x+3)+(x-1)\cdot(2x-3)+(x+2)\cdot(1-3x)+(x+2)\cdot(x+3)+(x+2)\cdot(2x-3)=\\&=(x-1)\cdot(1-3x+x+3+2x-3)+(x+2)\cdot(1-3x+x+3+2x-3)=\\&=(x-1+x+2)\cdot(1-3x+x+3+2x-3)=\\&=(2x+1)\cdot 1=\\&=2x+1\end{aligned}$$

42. 1. risinājums. Uz riņķa līnijas brīvi atliek 5 punktus. Vispārīgā gadījumā, ja uz riņķa līnijas ir atlikti 5 punkti, var novilkt 10 hordas ar gala punktiem šajos 5 punktos.

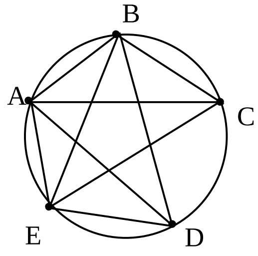
Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var novilkt 8 hordas (skat. 29.zīm.).



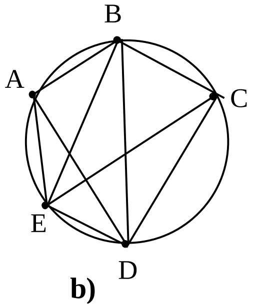
29. zīm.

Ja novelk deviņus nogriežņus, tad ir nenovilkta viena izliektā piecstūra mala (piem., CD, skat. 30.a) zīm.) vai viena diagonāle (piem., AC, skat. 30.b) zīm.). Abos gadījumos redzams, ka veidojas četrstūri.

Tātad var novilkt augstākais 8 hordas.



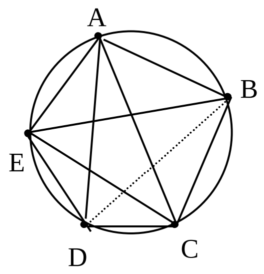
a)



b)

30. zīm.

2. risinājums. Ja punkti uz riņķa līnijas pēc kārtas ir ABCDE, tad tie ir 5 četrstūru virsotnes: ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE. Katra izliektā piecstūra ABCDE mala ir mala trijos no tiem, katra izliektā piecstūra diagonāle ir mala vienā no tiem (31. zīm.). Tātad, nenovelkot vienu hordu, paliek "nesabojāti" vismaz 2 četrstūri.



31. zīm.

Tātad maksimālais novelkamo hordu daudzums ir 8.

43. 1. risinājums. Dotās vienādības abas puses reizina ar **a**; iegūst

$$a^4=a^2+a$$

Abām vienādības pusēm pieskaita $\mathbf{a^3-a}$; iegūst

$$a^4+a^3-a=a^2+a+a^3-a$$

$$a^4+(a^3-a)=a^2+a^3$$

Tā kā pēc dotā $\mathbf{a^3-a=1}$, tad seko

$$a^4+1=a^2(1+a)$$

Tā kā pēc dotā $1+a=a^3$, tad seko

$$a^4+1=a^2\cdot a^3 \text{ jeb } a^5=a^4+1, \text{ kbj.}$$

2 .risinājums. Pierādīsim, ka $a^5-a^4-1=0$. Tiešām,

$$a^5-a^4-1=a^4(a-1)-1=a^3\cdot a\cdot(a-1)-1=$$

$$(a^3=a+1)$$

$$=(a+1)\cdot(a-1)\cdot a-1=(a^2-1)\cdot a-1=a^3-a-1=0$$

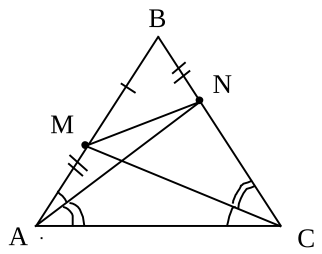
Tātad $a^5=a^4+1$.

44. Risinājums.

Dots: ΔABC - regulārs; $M\in AB$; $N\in BC$; $MB+BN=AC$

Jāpierāda: $\angle MAN+\angle MCN=60°$

Pierādījums: skat. 32.zīm.



32. zīm.

Pēc dotā $MB+BN=AC$. Acīmredzams, ka $MB+MA=AB=AC$.

No abām vienādībām seko, ka $AM=BN$. Ievērosim, ka $AB=AC$ (pēc dotā) un $\angle MAC=\angle ABN=60°$ (regulārs trijstūris).

Tāpēc $\Delta ABN=\Delta CAM$ (pēc trijstūru vienādības pazīmes mlm).

Ja trijstūri ir vienādi, tad atbilstošie elementi arī ir vienādi. Tātad $\angle BAN=\angle ACM$.

Ja $\angle BAN=\angle ACM$, tad $\angle NAC=\angle MCB$ (jo $\angle BAC=\angle BCA=60°$).

Apzīmē: $\angle MAN=x$ un $\angle MCN=y$, tad $x+y=\angle MAN+\angle NAC=\angle BAC=60°$, kbj.

45. Atbilde: a) nē, nevar, **b)** jā, var.

Risinājums.

a) Pieņemsim no pretējā, ka tas ir izdarīts.

Kvadrātā 5x5 katrā rūtiņā jāieraksta skaitļi 0; 1 vai 2. Aprēķinot rindiņās un kolonnās visu ierakstīto skaitļu summas, iegūst naturālos skaitļus 1; 2; 3; …; 9; 10. Saskaitot iegūtās summas 1+2+…+9+10=55, iegūst nepāra skaitli, bet rezultātam jābūt pāra skaitlim, jo katrs skaitlis, kurš ierakstīts kvadrātā, atrastajā summā 55 kā saskaitāmais “piedalās” divas reizes.

Tātad pieņēmums ir aplams.

b) Skat. 33.zīm. Kvadrātā 6x6 rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz 12.

11	9	7	6	4	2	
2	2	2	2	2	2	12
2	2	2	2	2	0	10
2	2	2	2	0	0	8
2	2	1	0	0	0	5
2	1	0	0	0	0	3
1	0	0	0	0	0	1

33.zīm.

46. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Pieņemsim, ka a; b; c - uzdevumā minētie veselie skaitļi.

Varam izvēlēties a=2n, b= - n, c= - n, kur n - naturāls skaitlis.

Tad 2n+(-n)+(-n)=0, bet $(2n)^3+(-n)^3+(-n)^3=8n^3-n^3-n^3=6n^3$. Ņemot n pēc patikas lielu, $6n^3$ pārsniegs 200020002000.

47. Atbilde: mazākais dažādu summu daudzums ir četras.

Risinājums. Skaitli kvadrāta vidū nosauksim par “centrālo” skaitli. Šis skaitlis viens pats piedalīsies 4 dažādās summās, jo ap viņu ir 4 dažādi skaitļi. Tātad dažādo summu ir vismaz četras. Lai iegūtu četras dažādas summas, pārējie skaitļi jāizvieto tā, lai atlikušās 8 summas katra būtu vienāda ar kādu no četrām sākotnējām.

Četras dažādas summas iegūtas, piem., 34.zīm.

8	3	5
1	7	4
9	2	6

34. zīm.

48. Risinājums. Šķirojam divus gadījumus.

1) Horda MN nekrusto diametru (skat. 35.a) zīm. un 35.b) zīm.).

a) b)

35. zīm.

Novelk perpendikulu OT no centra O un perpendikulus AA_1 un BB_1 pret MN. Tā kā AO=OB=R, tad pēc Talesa teorēmas $A_1T=TB_1$ (=x).

Saskaņā ar teorēmu par diametru, kas perpendikulārs hordai, MT=TN (=y).

Atkarībā no tā, vai M ir tuvāk A_1 vai B_1, šķirojam apakšgadījumus:

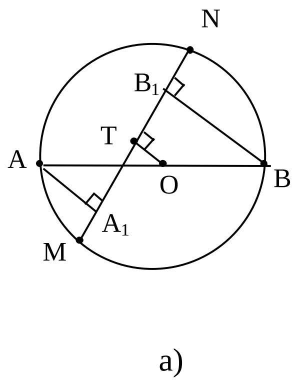
a) $A_1M=A_1T-MT=x-y$

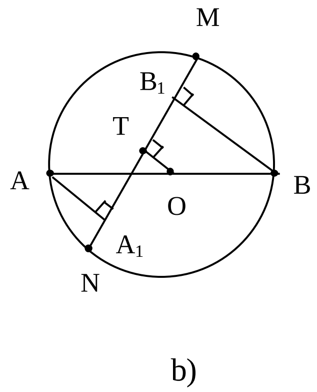
$NB_1=TB_1-TN=x-y$, tātad $A_1M=NB_1$ (35. a) zīm.)

b) $A_1M=A_1T+TM=x+y$

$NB_1=NT+TB_1=y+x$, tātad $A_1M = NB_1$ (35. b) zīm.)

2) horda MN krusto diametru (skat. 36.a) zīm. un 36.b) zīm.).





36. zīm.

Kā iepriekš ieviešot apzīmējumus, iegūstam 2 apakšgadījumus:

a) $A_1M=MT-A_1T=y-x$

$B_1N=TN-TB_1=y-x$, tātad $A_1M=NB_1$ (36. a) zīm.)

b) $A_1M=A_1T+TM=x+y$

$B_1N=B_1T+TN=x+y$, tātad $MA_1= NB_1$ (36. b) zīm.)

49. Atbilde: a) jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums. a) der, piemēram, skaitļi 1; 1; 1; 1; 2.

b) Skaitļus apzīmēsim ar burtiem a; b; c; d; e. Pieņemsim no pretējā, ka skaitļi a; b; c; d; e, kas apmierina uzdevuma prasības, ir dažādi, un $a<b<c<d<e$.

Apskata daļu $\frac{a+b+c}{d+e}$. Skaitītājs $a+b+c<3c$, bet saucējs $d+e>2c$. Tāpēc dalījums mazāks par 1,5. Tā kā dalījums ir naturāls skaitlis, tad tas ir 1.

Tātad $\frac{a+b+c}{d+e}=1$ un $a+b+c=d+e$ (1)

Aplūko daļu $\frac{a+b+d}{c+e}<\frac{2c+e}{c+e}=\frac{c+c+e}{c+e}=1+\frac{c}{c+e}<2$

($a+b<2c$ un $d<e$, tāpēc $a+b+d<2c+e$).

Tā kā dalījums ir ir naturāls skaitlis, tad tas ir 1.

Tātad $\frac{a+b+d}{c+e}=1$un $a+b+d=c+e$ (2)

No (2) atņemot (1), iegūst

$d-c = c-d$, no kurienes seko, ka $c=d$.

Tātad iegūta pretruna.

50. Atbilde: a) nē, **b)** jā.

Risinājums. a) Pieņem pretējo. Apzīmēsim rindiņās ierakstīto skaitļu reizinājumus ar $r_1; r_2;\ldots;r_7$ un kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumus ar $k_1; k_2;\ldots;k_7$.

Pēc dotā rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma, ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi.

Tā kā šie reizinājumi var būt tikai (+1) vai (-1), tad pie $1\le i\le 7$ ir spēkā $r_i \cdot k_i= -1$, jo viens no r_i un k_i ir (+1), bet otrs ir (-1) Aplūko reizinājumus:

$r_1 \cdot k_1= -1; r_2 \cdot k_2= -1; \ldots; r_7 \cdot k_7= -1$ (1)

Reizinājumā $r_1k_1r_2k_2 \ldots r_7k_7$ katrs kvadrātā ierakstītais skaitlis kā reizinātājs ietverts divas reizes: vienu reizi kolonnā, otru - rindā.

No (1) seko: reizinājums $(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_7)\cdot(k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_7)=(r_1k_1)(r_2k_2)\ldots(r_7k_7)=(-1)^7= -1$, bet, tā kā katrs skaitlis kā reizinātājs tiek reizināts divas reizes (kāpināts kvadrātā), tad $(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_7)\cdot(k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_7)=1$.

Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams.

b) skat. 37.zīm.

8.	-1							
7.						-1		
6.								
5.				-1				
4.								
3.		-1						
2.								
1.								
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

37. zīm.

Tukšajās rūtiņās ierakstīts skaitlis +1.

Profesora Cipariņa klubs (51. - 116.)

51. Risinājums. Skaidrs, ka starp cipariem nav 0. Tā kā četrciparu skaitļa pēdējais cipars ir 9, tad dotais skaitlis nedalās ar 5; tātad starp cipariem nav 5. Tas nedalās arī ar 2; 4; 6; 8, jo tad pēdējam ciparam būtu jābūt pāra. Tātad četrciparu skaitlī var būt cipari 1; 3; 7 un 9. Pēc uzdevuma nosacījumiem pēdējais cipars ir 9, tātad dotais skaitlis dalās ar 9. Ar 9 dalās skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9. Iespējamās ciparu summas ir 9; 18; 27; 36 (36 ir lielākā ciparu summa, jo no 4 cipariem lielāku iegūt nevar: $4 \cdot 9=36$).

Aplūko katru no šīm ciparu summām:

a) summu 9 no cipariem 1; 3; 7; 9 iegūt nevar, jo pēdējais cipars četrciparu skaitlī ir 9,

b) summu 18 no cipariem 1; 3; 7; 9 var iegūt gan no (1; 1; 7; 9), gan no (3; 3; 3; 9). No cipariem veido iespējamos četrciparu skaitļus (ar pēdējo ciparu 9) un pārbauda dalāmību ar pārējiem cipariem. Jāapskata skaitļi 1179; 1719; 7119; 3339.

1179:7=168 atl. 3

1719:7=245 atl. 4

7119:7=1017

3339 dalās ar 3, jo tas dalās ar 9.

Tātad ir atrasti skaitļi 7119 un 3339.

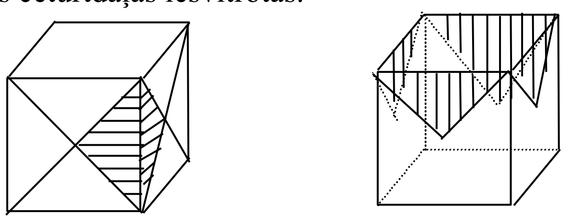
c) summu 27 no cipariem 1; 3; 7; 9, lai pēdējais cipars būtu 9, iegūt nevar,

d) summu 36 var iegūt tikai vienā veidā; tāda ir skaitlim 9999.

Meklētie skaitļi ir 7119; 3339 un 9999.

52. Risinājums. Skat. piem., 38.zīm.

Četri kvadrāti pārlocīti pa vertikālām kuba šķautnēm (tie visi savā starpā vienādi), bet divi pārklāj pa vienai skaldnei (augšējo un apakšējo) un vēl pa ceturtdaļai no katras vertikālās skaldnes; šīs ceturtdaļas iesvītrotas.



38. zīm.

53. Atbilde: 518.

Risinājums. Tā kā katru lapu grāmatā numurē no abām pusēm un vienā pusē ir nepāra skaitlis, bet otrā - pāra skaitlis, tad pēdējās izrautās lappuses numurs noteikti ir pāra skaitlis. Ja pirmās izrautās lappuses numurs bija 185, tad pēdējās lappuses numurs varētu būt 158; 815; 851; 581; 518; 185. Skaitļi ar pēdējo nepāra ciparu atkrīt. Skaitlis 158 neder, jo ir mazāks par pirmās izrautās lappuses numuru 185.

Tātad pēdējās izrautās lappuses numurs ir 518.

54. Atbilde: Jā var.

Risinājums.

1) Kaudzītes apzīmēsim ar A, B, C, bet akmentiņu skaitu tajās ar a; b; c (a=10; b=17; c=21).

a) pievienojam kaudzēs A un C septiņas reizes pa vienam akmentiņam, kamēr a = b = 17,

b) pievienojam kaudzēs A un B vienpadsmit reizes pa vienam akmentiņam, kamēr a = b = c = 28.

a	b	c
10	17	21
11	17	22
12	17	22
. . .	. . .	. . .
17	17	28
18	18	28
19	19	28
. . .	. . .	. . .
28	28	28

2) Akmentiņu skaitu kaudzēs apzīmē ar a; b; c (a≤b≤c).

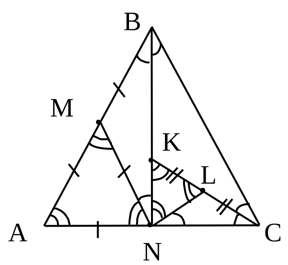
a) ja a=b=c, tad prasītais iegūts,

b) ja a=b<c, tad kaudzēs ar a un b akmentiņiem pievieno pa vienam akmentiņam, kamēr a=b=c,

c) ja a<b≤c, tad kaudzēs ar a un c akmentiņiem pievieno pa vienam akmentiņam, kamēr a=b, pēc tam pāriet uz b) un a) gadījumu.

55. Atbilde: jā var.

Risinājums. Skat. 39.zīm.



39. zīm.

Dots: ΔABC - regulārs, $\angle A=\angle B=\angle C= 60^o$

1) Novelk AC vidusperpendikulu BN (pēc vidusperpendikula īpašības vienādmalu trijstūrī BN - bisektrise), tad $\angle ABN=\angle NBC=30^o$ un N ir malas AC viduspunkts.

2) M - malas AB viduspunkts, tad AM=MB=AN=NC, jo AB=AC. Trijstūris MAN ir vienādsānu un $\angle A=60^o$, tad $\angle AMN=\angle ANM=60^o$. Tātad ΔAMN ir regulārs.

3) Tā kā MN=MB, tad ΔBMN ir vienādsānu, $\angle BMN = 180^o-60^o=120^o$ un $\angle MBN=\angle MNB=\frac{1}{2}(180^o-120^o)=30^o$.

4) Novelk $\angle BCA$ bisektrisi CK, kur K atrodas uz BN. Tad $\angle KCB=\frac{1}{2}\cdot 60^o=30^o=\angle KBC$, tātad ΔBKC ir vienādsānu un $\angle BKC=120^o$ (pēc trijstūra iekšējo leņķu summas). Tādēļ $\angle NKC = 180^o-120^o=60^o$.

5) Atrod malas KC viduspunktu L. Pēc vienādmalu trijstūra īpašībām punkts K, kas ir ΔABC bisektrišu krustpunkts, ir arī tā mediānu krustpunkts un mediānu BN sadala attiecībā 2:1, t.i., BK=2KN. Tā kā ΔBKC ir vienādsānu un BK=KC, tad KC=2KN un $KN=\frac{1}{2}KC$. Savukārt $\frac{1}{2}KC=KL$, tātad KL=KN un ΔNKL ir vienādsānu, $\angle NKL=60^o$. Aprēķinot pārējos divus leņķus ($\angle KNL=\angle KLN=60^o$), secinām ka ΔNKL ir regulārs.

6) $\angle LNC=\angle BNC-\angle BNL=90^o-60^o=30^o$. Tātad ΔLNC ir vienādsānu, jo $\angle LNC=\angle LCN$.

Tātad iegūti 5, acīmredzami dažādi vienādsānu trijstūri.

56. Risinājums. Apzīmēsim rūķīšus ar A, B un C.

a) Sprīdītis uzdod jautājumu rūķītim A: "Vai B vienmēr runā patiesību?"

Ja atbilde ir "jā", tad B tiešām vienmēr runā patiesību.

Tiešām, ja rūķītis A būtu melojis, tad būtu 2 neuzticami rūķīši A un B (pretruna, jo neuzticams ir tikai viens rūķītis).

Ja atbilde ir "nē", tad rūķītis C vienmēr runā patiesību.

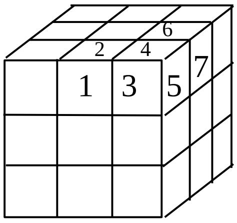
Tiešām, pieņemsim pretējo, ka rūķītis C ir neuzticams. Tādā gadījumā rūķītis A, sacīdams, ka neuzticams ir B, būtu melojis, un tad būtu 2 "neuzticami" rūķīši A un C. Iegūta pretruna, tātad C nav neuzticams.

b) Pēc pirmā jautājuma ir skaidrs, ka otrais jautājums "uz kuru pusi ir ķēniņa pils?" ir jāuzdod tam no rūķīšiem B un C par kuru ir noskaidrots, ka viņš vienmēr runā patiesību.

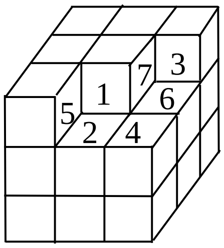
57. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Skat. 40. un 41.zīm.

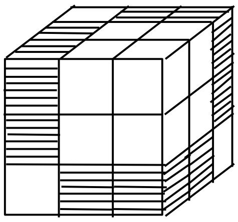
Izgriežot stūra kubiņu un divus tam blakus esošus kubiņus, no kuba virsmas tiek izņemti 7 vienādi kvadrātiņi (skat. 40.zīm.). To vietā virsma papildinās ar 7 tādiem pašiem kvadrātiņiem (skat. 41.zīm.). Tātad 9 kubiņus var izzāģēt, piemēram, tā, kā redzam 42.zīm.



40. zīm.



41. zīm.


42. zīm.

58. 1.risinājums. Aplūko daļas $\frac{1}{1999};\frac{2}{1999};\frac{3}{1999};...;\frac{1997}{1999};\frac{1998}{1999}$.

Daļas apvienojam pāros ($\frac{1}{1999}$ un $\frac{1998}{1999}$), ($\frac{2}{1999}$ un $\frac{1997}{1999}$),..., ($\frac{999}{1999}$ un $\frac{1000}{1999}$) tā, ka katrā pārī skaitītāju summa ir 1999. Tā kā daļu skaits ir pāra skaitlis, tad to var izdarīt.

Pārliecināmies par faktu: ja x+y=n, tad skaitļus x un n abus var izdalīt ar kādu d>1 tādā un tikai tādā gadījumā, ja y un n abus var izdalīt ar šo d.

Izteiksim x=n-y. Ja y un n dalās ar d, tad arī x dalās ar d. Līdzīgi y=n-x un, ja n un x dalās ar d, tad arī y dalās ar d. Tātad katrā pārī vai nu abas daļas ir nesaīsināmas, vai arī neviena no tām nav nesaīsināma. Tāpēc nesaīsināmo daļu ir pāra skaits.

Piezīme: minētais spriedums der arī vispārīgam gadījumam, kur apskata daļas $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}$ (ja n - pāra skaitlis, tad vidējā daļa, kura ne ar ko pārī neapvienojas, ir saīsināma).

2. risinājums. Ja pierādīsim, ka 1999 ir pirmskaitlis, tad būs skaidrs, ka visas 1998 apskatāmās daļas ir nesaīsināmas.

Ievērojam, ka $\sqrt{1999} < 45$. Jāpierāda, ka dotais skaitlis 1999 nedalās ne ar vienu no pirmskaitļiem no 2 līdz 45, t.i., ar 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43.

Ar 2 - nedalās, jo pēdējais cipars ir nepāra.

Ar 3 - nedalās, jo ciparu summa ir 28.

Ar 5 - nedalās, jo pēdējais cipars nav 0 vai 5.

1999:7=285	atl. 4
1999:11=181	atl. 8
1999:13=153	atl. 10
1999:17=117	atl. 10
1999:19=105	atl. 4
1999:23=86	atl. 21
1999:29=68	atl. 27
1999:31=64	atl. 15
1999:37=54	atl. 1
1999:41=48	atl. 31
1999:43=46	atl. 21

Tā kā skaitlis 1999 nedalās ne ar vienu no apskatītajiem pirmskaitļiem, tad tas ir pirmskaitlis. Tāpēc nesaīsināmo daļu ir pāra skaits (1998 daļas).

59. Atbilde: 27.

Risinājums. Summu 27 var iegūt, ja uz divām pretējām skaldnēm uzraksta 1 un 2, bet uz pārējām četrām pēc kārtas 4; 7; 5; 8.

Pierādīsim, ka mazāku summu iegūt nevar.

Izvēlas trīs pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus: n; n+1; n+2. No jebkuriem trīs pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem uz kuba nevar atrasties vairāk par diviem (pretējā gadījumā skaitlim n+1 ir vai nu "kaimiņš" n, vai "kaimiņš" n+2, un tie atšķiras par 1). Summa būs jo mazāka, jo mazāki būs izvēlēti trijnieki (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9), (10; 11; 12), … un jo mazāki skaitļi būs izvēlēti izvēlētajos trijniekos. No trijniekiem izvēlas trīs mazākos (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9). Lai summa būtu pēc iespējas mazāka, tad no katra trijnieka izvēlas divus mazākos skaitļus, t.i., 1; 2; 4; 5; 7; 8. To summa ir 27, tātad mazāku summu iegūt nevar.

60. Atbilde: balto kartīšu pirmajā rindā ir tikpat, cik otrajā rindā sarkano, un otrādi - sarkano kartīšu pirmajā rindā ir tikpat, cik otrajā rindā balto.

Risinājums. Apzīmēsim ar x sarkano kartīšu skaitu pirmajā rindā un pierādīsim, ka otrajā rindā balto kartīšu ir tikpat.

1. rinda:	x sarkanas kartītes,	100-x baltas kartītes
2. rinda:	100-x sarkanas kartītes,	100-(100-x)=x baltas kartītes

Ja 1.rindā ir x sarkanas kartītes, tad balto tur ir 100-x, jo 1.rindā pavisam atrodas 100 kartītes.

Ja 1.rindā ir x sarkanas kartītes, tad 2.rindā ir 100-x sarkanas kartītes, jo sarkano kartīšu kopā ir 100. Tātad balto kartīšu 1.rindā ir tikpat, cik 2.rindā sarkano.

61. Risinājums. Pietiek noskaidrot, vai abi vieglākie akmeņi kopā sver vairāk nekā smagākais akmens viens pats. Atradīsim smagāko un 2 vieglākos akmeņus.

Sadalīsim akmeņus 4 pāros un salīdzināsim katra pāra akmeņus. Ar pirmajām 4 svēršanām atradīsim katra pāra smagāko akmeni. Atrastos 4 savos pāros smagākos akmeņus apvienojam pa 2 pāros un salīdzinām savā starpā, un smagākais no smagākajiem šajos pāros ir smagākais vispār. Kopā ir iztērētas 7 svēršanas.

Līdzīgi kā meklējām smagāko akmeni, ar 3 svēršanām atradīsim arī visvieglāko akmeni. Pēc izdarītajām pirmām 4 svēršanām atlika 4 akmeņi, kas izrādījās savos pāros vieglākie. Šos akmeņus apvienojam pa 2 pāros un salīdzinām savā starpā, un vieglākais no vieglākajiem šajos pāros ir vieglākais vispār. Tātad kopā ir patērētas 10 svēršanas.

Šai brīdī ir 3 akmeņi, kas tikuši tieši salīdzināti ar visvieglāko akmeni un izrādījušies smagāki par to. Katrs cits akmens (bez šiem trim) ir izrādījies smagāks par kādu citu bez visvieglākā, tātad nav otrais vieglākais. Lai atrastu otru vieglāko akmeni, meklē vieglāko no trim minētajiem. To var viegli izdarīt, izmantojot 2 svēršanas.

Trīs minētos akmeņus apzīmē ar x; y; z. Ar vienu svēršanu nosver x un y un atrod, kurš no tiem ir vieglāks; ar otru svēršanu salīdzina vieglāko ar z. Tagad ir atrasts otrs vieglākais akmens, patērētas 12 svēršanas. Ar pēdējo, 13. svēršanu noskaidro, vai abi vieglākie akmeņi kopā ir smagāki par vissmagāko.

62. Risinājums. Dotos naturālos skaitļus apzīmē ar $a_1<a_2<a_3<...<a_9<a_{10}$.

Pierādīsim, ka ir spēkā vismaz viena no nevienādībām $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{3}{2}; \frac{a_3}{a_2} \le \frac{3}{2}; ...; \frac{a_{10}}{a_9} \le \frac{3}{2}$.

Pieņem pretējo tam, kas jāpierāda: $\frac{a_2}{a_1} > \frac{3}{2}; \frac{a_3}{a_2} > \frac{3}{2}; ...; \frac{a_{10}}{a_9} > \frac{3}{2}$. Aplūko šīs nevienādības pēc kārtas:

a) $2a_2>3a_1$, tātad $a_2>\frac{3}{2}\cdot a_1 \ge \frac{3}{2}$, jo $a_1\ge1$. Tā kā a_2 ir naturāls skaitlis, tad $a_2\ge2$.

b) $2a_3>3\cdot a_2$, tātad $a_3>\frac{3}{2}\cdot a_2 \ge 3$, jo $a_2\ge2$. Tā kā a_3 ir naturāls skaitlis, tad $a_3\ge4$.

c) $2a_4>3a_3$, tātad $a_4>\frac{3}{2}\cdot a_3 \ge 6$, jo $a_3\ge4$. Tā kā a_4 ir naturāls skaitlis, tad $a_4\ge7$.

d) $2a_5>3a_4$, tātad $a_5>\frac{3}{2}\cdot a_4 > 10$, jo $a_4\ge7$. Tā kā a_5 ir naturāls skaitlis, tad $a_5\ge11$.

e) $2a_6>3a_5$, tātad $a_6>\frac{3}{2}\cdot a_5 > 16$,jo $a_5\ge11$. Tā kā a_6 ir naturāls skaitlis, tad $a_6\ge17$.

f) $2a_7>3a_6$, tātad $a_7>\frac{3}{2}\cdot a_6 > 25$, jo $a_6\ge17$. Tā kā a_7 ir naturāls skaitlis, tad $a_7\ge26$.

g) $2a_8>3a_7$, tātad $a_8>\frac{3}{2}\cdot a_7 \ge 39$, jo $a_7\ge26$. Tā kā a_8 ir naturāls skaitlis, tad $a_8\ge40$.

h) $2a_9>3a_8$, tātad $a_9>\frac{3}{2}\cdot a_8 \ge 60$, jo $a_8\ge40$. Tā kā a_9 ir naturāls skaitlis, tad $a_9\ge61$.

i) $2a_{10}>3a_9$, tātad $a_{10}>\frac{3}{2}\cdot a_9 > 91$, jo $a_9\ge61$. Tā kā a_{10} ir naturāls skaitlis, tad $a_{10}\ge92$.

Iegūta pretruna, jo pēc dotā naturālie skaitļi nepārsniedz 90.

Tātad pieņēmums ir aplams.

63. Risinājums. Tā kā rindiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt vienādai ar kolonnās ierakstīto skaitļu summu (tiek saskaitīti tie paši skaitļi, tikai citā secībā), tad 21+22+24=27+28+x (x - trešās kolonnas summa), x=(21+22+24)-(27+28); x=12. Piemēram, skat. 43.zīm.

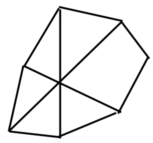
13	7	1
9	8	5
5	13	6

43.zīm.

(Piemērs nepieciešams, jo citādi pastāv iespēja, ka uzdevuma nosacījumi ir pretrunīgi, un tādā gadījumā pareizā atbilde būtu "tā nevar būt").

64. Atbilde: a) jā; **b)** nē.

Risinājums. a) skat. 44. zīm.



44. zīm.

b) Ja 4 diagonāles krustojas vienā punktā, tad tās savieno 4·2=8 dažādas virsotnes - šo diagonāļu galapunktus. Tā kā septiņstūrim ir 7 virsotnes, tad 4 diagonāles, kas krustojas vienā punktā, novilkt nevar.

65. Risinājums. Aplūko skaitli 97516824, apzīmē to ar A.

Skaitlim A ciparu summa ir 42. Ciparu summa dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad pats skaitlis A dalās ar 3, bet ar 9 nedalās.

Pieņemsim pretējo: doto skaitli A var iegūt, ja kādu naturālu skaitli pareizina pašu ar sevi.

Tad A=x·x, x ir naturāls skaitlis. Ja "viens " x dalās ar 3, tad arī "otrs" x reizinājumā dalās ar 3. Tātad A dalās ar 3·3 jeb 9.

Savukārt, ja x nedalās ar 3, tad arī A nedalās ar 3.

Abos gadījumos iegūta pretruna, jo skaitlis A dalās ar 3, bet nedalās ar 9 (sākotnēji konstatētas īpašības).

Tātad pieņēmums ir nepareizs. Skaitlis A nav neviena naturāla skaitļa kvadrāts.

66. Risinājums. Pieņemsim, ka lauvam sienas pulkstenis nav sabojājies, tikai lauva ir aizmirsis to uzvilkt.

Pirms lauva iet ciemos pie tīģera, lauvam ir jāuzvelk sienas pulkstenis un, ejot ārā, jāatceras, cik rāda pulkstenis viņa aiziešanas brīdī (l_1 - laiks, ko atceras lauva aiziešanas brīdī).

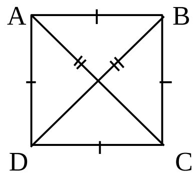
Ierodoties ciemos pie tīģera, lauva ievēro, cik rāda tīģera pulkstenis (t_1 - laiks). Kādu laiku paciemojies, lauva dodas mājup, atkal ievērojot, cik rāda tīģera pulkstenis aiziešanas brīdī (t_2 - laiks). Atgriežoties alā, lauva pēc sava pulksteņa piefiksē laiku l_2. Starpība l_2-l_1 ir laiks, cik ilgi lauva nav bijis alā. Savukārt starpība t_2-t_1 ir laiks, cik ilgi lauva ciemojies pie tīģera.

No (l_2-l_1) atņemot (t_2-t_1), lauva uzzina laika daudzumu, ko ir pavadījis ceļā turp un atpakaļ.

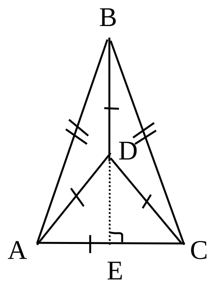
Starpību (l_2-l_1)-(t_2-t_1) izdalot ar 2, lauva uzzina atceļā pavadīto laiku. Pieskaitot šo laiku tīģera pulksteņa laikam t_2, lauva uzzina patieso laiku, cikos atgriezies savā alā, un uzstāda savu pulksteni pareizi: $\frac{(l_2-l_1)-(t_2-t_1)}{2}+t_2=\frac{l_2-l_1+t_2+t_1}{2}$.

Piezīme: Šo plānu var realizēt tikai tanī gadījumā, ja lauva ceļu turp un atpakaļ veic vienā laikā. Tas ir panākams, ja lauva abos virzienos pārvietojas ar vienu un to pašu ātrumu, pa vienu un to pašu maršrutu.

67. Risinājums. 1) Uzzīmē kvadrātu ABCD; tā malu garumi vienādi un diagonāles vienādas (skat. 45.zīm.).



45. zīm.

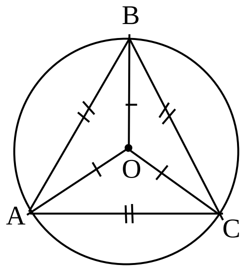


46. zīm.

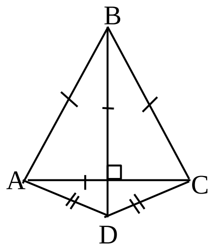
2) Uzzīmē regulāru trijstūri ADC, no punkta D novelk malas AC vidusperpendikula DE pagarinājumu, atliek nogriezni DB tā, ka DB=AD=DC=AC (skat. 46.zīm.).

Aplūko trijstūrus BDC un BDA: $\angle EDC=\angle EDA=30°$ (pēc vienādmalu trijstūra īpašības), tātad $\angle BDC=\angle BDA=150°$ (pēc blakusleņķu īpašības). Tā kā AD=DB=DC, tad $\Delta ADB=\Delta CDB$ pēc trijstūru vienādības pazīmes (mlm).Tātad AB=CB.

3) Punkts O ir riņķa līnijas centrs, centra leņķi $\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=120°$ (skat. 47.zīm.).



47. zīm.



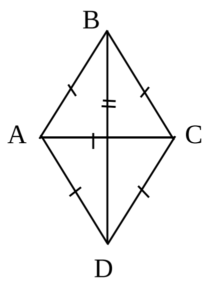
48. zīm.

Malas AO=BO=CO ir vienādas kā rādiusi. Tā kā centra leņķi ir vienādi, tad $\Delta AOB=\Delta BOC=\Delta AOC$ pēc trijstūru vienādības pazīmes (mlm).Tātad AB=BC=CA.

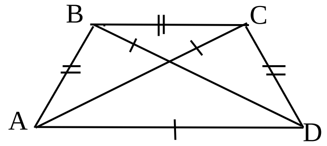
4) Uzzīmē regulāru trijstūri ABC, caur punktu B novelk AC vidusperpendikulu, uz tā atliek nogriezni BD=AB=BC=AC (skat. 48.zīm.).

Pēc vienādmalu trijstūra īpašības $\angle ABD=\angle DBC=30°$, tātad $\Delta ABD=\Delta CBD$ pēc trijstūru vienādības pazīmes (mlm); tātad AD=DC.

5) Uzzīmē divus regulārus trijstūrus tā, ka viena mala sakrīt (skat. 49.zīm.).



49. zīm.



50. zīm.

6) Uzzīmē vienādsānu trapeci ABCD, kur BC un AD ir pamati, $\angle CAD=\angle BDA=36°$ un diagonāles vienādas ar garāko pamatu (skat. 50.zīm.).

Trijstūri CAD un BDA ir vienādsānu, $\angle CBD=\angle ADB=36°$ (kā iekšējie šķērsleņķi), kā arī $\angle BCA=\angle CAD=36°$. Apzīmē $\angle CDB=x$, tad pēc trapeces sānu malas pieleņķu summas īpašības (36°+x)·2+36°=180°. Atrisinot vienādojumu, iegūst x=36°. Tātad ΔBCD ir vienādsānu, jo leņķi pie pamata BD ir vienādi. Analoģiski pierāda par trijstūri ABC.

68. Atbilde: Uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Risinājums. Pieņem pretējo, ka to izdarīt var.

Visi skaitļi a; b; c; d; e; f; g ir dažādi. Tā kā katrā rindiņā un kolonnā kopā ir tieši 7 rūtiņas, tad ne rindiņā, ne kolonnā nevar būt 2 vienādi skaitļi. Tāpēc nevienā ar * apzīmētajā rūtiņā (skat. 51.zīm.) nevar būt skaitlis e.

4.	d	e	f	g
3.	c	*		
2.	b	*		
1.	a	*		
	1.	2.	3.	4.

51.zīm.

Apskatot kopā 1. kolonnu un 1.rindiņu, redzams, ka skaitļi a; b; c; d ir jau izmantoti, e nevar izmantot, tātad ar * apzīmētajā vietā var būt tikai viens no skaitļiem f vai g. Līdzīgi apskatot 1. kolonnu un 2. rindiņu, 1. kolonnu un 3. rindiņu, ar * apzīmētajā vietā var būt tikai viens no skaitļiem f vai g. Tā kā trijās ar * apzīmētajās rūtiņās var ierakstīt tikai f vai g, tad divās no tām ir ierakstīti vienādi skaitļi.

Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams.

69. Risinājums. Pieņemsim, ka pirmo konfekti saņem Jānis, nākošās divas - Andris u.t.t. (Jānis "katrā porcijā" saņem nepāra skaitu konfekšu, Andris - pāra skaitu konfekšu). Pieņemsim, ka katram zēnam n reizes tiek iedotas konfektes saskaņā ar likumu "viena man, divas tev, ...", bet (n+1)-mo reizi iedot konfektes **abiem** zēniem saskaņā ar šo likumu vairs nevar:

Jānis	Andris
1	2
3	4
5	6
⋮	⋮
2n-1	2n

Tā kā katrs zēns ir n reizes saņēmis konfektes, tad var uzzināt, cik konfekšu ir jau sadalīts:

$$1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n=(1+2n)+(2+(2n-1))+(3+(2n-2))+\ldots+(n+(n+1))=$$
$$=(1+2n)+(1+2n)+\ldots+(1+2n)=(1+2n)\cdot n=2n^2+n$$

Ar x apzīmēsim atlikušo konfekšu skaitu. Nākošajā izsniegšanu pārī, ja tas notiktu pēc likuma "viena man, divas tev, ...", Jānis saņemtu 2n+1 konfekti, bet Andris 2n+2 konfektes.

Tā kā mēs pieņēmām, ka (n+1)-ā izsniegšanu pārī tā vairs nenotiek, tad $0\le x<(2n+1)+(2n+2)$ jeb $0\le x<4n+3$

(Ja neiedotas būtu $x\ge 4n+3$ konfektes, tad varētu veikt vismaz vēl vienu konfekšu izsniegšanu pāri pēc iepriekšējā likuma.)

Šai brīdī Jānis ir saņēmis n^2 konfektes ($\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$), bet Andris $\frac{2+2n}{2}\cdot n=n^2+n$ konfektes, un Andrim ir par n konfektēm vairāk nekā Jānim.

a) Ja $0<x\leq n-1$, tad visas atlikušās $n-1$ konfektes saņems Jānis, un beigās vairāk konfekšu būs Andrim.

b) Ja $x=n$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un beigās abiem zēniem būs vienāds konfekšu skaits.

c) Ja $n+1\leq x\leq 2n+1$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un viņam beigās būs vairāk konfekšu.

d) Ja $2n+1<x$, tad Jānis vispirms saņems $2n+1$ konfektes (un viņam šai brīdī būs par $n+1$ konfekti vairāk nekā Andrim), bet pēc tam visas atlikušās konfektes saņems Andris. No šejienes iegūstam:

d_1) ja $2n+1<x<(2n+1)+(n+1)$ jeb $2n+1<x<3n+2$, tad beigās vairāk konfekšu būs Jānim,

d_2) ja $x=(2n+1)+(n+1)$ jeb $x=3n+2$, tad beigās abiem zēniem konfekšu skaits būs vienāds, jo Jānim nāk klāt $2n+1$ konfekte, bet Andrim $n+1$ konfekte. Pēc sākotnējā sadalījuma Andrim bija par n konfektēm vairāk, un $2n+1=(n+1)+n$.

d_3) ja $3n+2<x<4n+3$, tad beigās vairāk konfekšu būs Andrim.

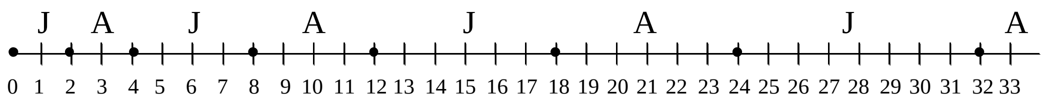
Apkopojot šos rezultātus, iegūstam:

1) ja sākumā ir $(2n^2+n)+n=2n^2+2n$ vai $(2n^2+n)+(3n+2)=2n^2+4n+2$ konfektes kādam veselam n, tad beigās abiem zēniem ir vienāds konfekšu skaits,

2) ja sākumā konfekšu skaits ir lielāks par $2n^2+2n$ un mazāks par $2n^2+4n+2$ kādam veselam n, tad beigās vairāk konfekšu ir Jānim,

3) citos gadījumos vairāk konfekšu ir Andrim.

Parādīsim, kā skaitļu ass sākumā izvietojas Jānim un Andrim "labvēlīgie" konfekšu sākuma daudzumi. Ar "izceltajiem" punktiem apzīmēti tie konfekšu sākuma daudzumi, kas noved pie "godīga" sadalījuma (skat. 52. zīm.).

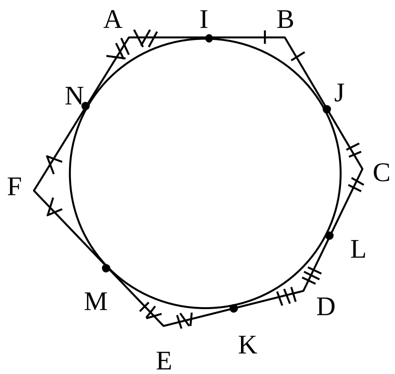


52. zīm.

70. Atbilde: nē, tā nevar gadīties.

Risinājums. Pieņemsim pretējo: tāds sešstūris eksistē.

Izmanto īpašību: no viena punkta pret riņķa līniju vilkto pieskaru garumi ir savā starpā vienādi (skat. 53.zīm.).



53. zīm.

$$AN=AI;\ BI=BJ;\ CJ=CL;\ DL=DK;\ EK=EM;\ FM=FN.$$

Aplūko summas:

$$AB+CD+EF=AI+IB+CL+LD+EM+MF$$
$$BC+DE+FA=BJ+JC+EK+KD+FN+NA.$$

Tā kā saskaitāmie labajā pusē pa pāriem ir vienādi, tad summas $AB+CD+EF$ un $BC+DE+FA$ ir vienādas.

Pēc dotā $(AB+CD+EF)+(BC+DE+FA)=1+2+3+4+5+6=21$, tātad

$$AB+CD+EF=BC+DE+FA=10,5.$$

Tas nav iespējams, jo visu malu garumi ir veseli skaitļi. Tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.

71. Atbilde: nē, nav.

Risinājums. Pieņemsim pretējo: tādi skaitļi ir.

Tad šo skaitļu starpība, kas ir virknes iepriekšējais loceklis, arī dalītos ar 3. Tā turpinot, mēs iegūtu, ka arī virknes pirmais skaitlis dalās ar 3, bet tā ir pretruna, jo 1 ar 3 nedalās.

Tātad pieņēmums ir aplams.

72. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Sadalīsim kvadrāta malējās rūtiņas 6 grupās; vienas grupas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem cipariem, skat. 54.zīm.

1	5	6	2
6			5
5			6
4	6	5	3

54. zīm.

Grupas 5 "iekšpusē" var staigāt, neaizskarot centrālās rūtiņas (līdzīgi par grupu 6). Savukārt, lai no vienas grupas rūtiņām aizietu uz citas grupas rūtiņām, ir **nepieciešams** ieiet kādā no centrālajām rūtiņām. Tā kā zirdziņam jānonāk visu 6 grupu rūtiņās, tad viņam vismaz 5 reizes jāpāriet no vienas grupas uz otru, tātad vismaz 5 reizes jānonāk kādā no centrālajām rūtiņām. Bet centrālo rūtiņu ir tikai četras.

Tātad zirdziņam kādā no centrālajām rūtiņām jānonāk vairāk nekā vienu reizi.

73. Atbilde: sešus.

Risinājums. Uzrakstīto skaitļu reizinājumos jāiegūst pēdējie cipari 1; 2; 3; 4; . . .;8; 9.

a) Pietiek ar 6 skaitļiem. Piemēram, der skaitļi 1; 3; 4; 5; 7; 9. Vajadzīgos pēdējos ciparus dod reizinājumi:

$$3\cdot7=21;\ 4\cdot3=12;\ 1\cdot3=3;\ 1\cdot4=4;\ 3\cdot5=15;\ 4\cdot9=36;\ 1\cdot7=7;\ 4\cdot7=28;\ 1\cdot9=9.$$

b) Parādīsim, ka ar mazāk nekā 6 skaitļiem nepietiek.

Starp skaitļiem vismaz vienam jābūt pāra skaitlim (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar pāra ciparu).

Nepieciešams skaitlis, kas beidzas ar 5 (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar 5).

Savukārt, lai reizinājumi beigtos ar cipariem 1; 3; 7; 9, ir vajadzīgi nepāra skaitļi, kas nebeidzas ar 5. Lai iegūtu skaitļus, kas beidzas ar cipariem 1; 3; 7; 9 (tiem jābūt skaitā 4), ir nepieciešami vismaz četri nepāra skaitļi, jo no trim skaitļiem a; b; c var iegūt tikai trīs reizinājumus $a\cdot b$; $b\cdot c$ un $a\cdot c$.

Tātad vajag vismaz 6 skaitļus (6=1+1+4).

74. Atbilde: to nevar izdarīt.

Risinājums. Pieņemsim pretējo: to izdarīt izdevies.

Visi skaitļi a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; l; k; m; n; o ir dažādi (skat. 55. zīm.), kopskaitā 15. Tā kā katrā rindiņā un kolonnā kopā ir tieši 15 rūtiņas, tad ne rindiņā, ne kolonnā nevar būt 2 vienādi skaitļi. Tāpēc nevienā ar * apzīmētajā rūtiņā nevar būt skaitlis i (jo tas jau ir 2. kolonnā un 8. rindiņā).

Apskatot 1. kolonnu un 1. rindiņu, redzam, ka 1. rindiņā ar * apzīmētajā vietā var būt tikai viens no skaitļiem: j; l; k; m; n; o.

Līdzīgi var spriest par 1. kolonnu un 2. rindiņu, 1. kolonnu un 3. rindiņu u.t.t. Tā kā 2. kolonnā ir 7 zvaigznītes, bet skaitļu j; l; k; m; n; o ir tikai seši, tad divās rūtiņās, kuras ir apzīmētas ar *, tiks ierakstīti vienādi skaitļi.

8.	a	i	j	l	k	m	n	o
7.	b	*						
6.	c	*						
5.	d	*						
4.	e	*						
3.	f	*						
2.	g	*						
1.	h	*						
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

55. zīm.

Līdz ar to iegūta pretruna, un pieņēmums nav pareizs.

75. Atbilde: sākotnējais.

Risinājums. Daļa $\frac{1}{26}$ ir bezgalīga decimāldaļa, jo, sadalot saucēju pirmreizinātājos, iegūst $26=2\cdot13$ - saucējā ir arī citi pirmskaitļi bez 2 un 5.

Izpildot dalīšanu, iegūstam:

$1:26 = 0{,}0384615...$

100
78
220
208
120
104
160
156
40
26
140
130
100
. . .

Katrs nākošais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī. Tā kā atlikums **10** ir atkārtojies, tad dotā daļa $\frac{1}{26}$ ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar periodu **384615**. Tātad daļa ir periodiska un periodu veido seši cipari.

Noskaidrosim, kāds cipars ir 1999 - jā vietā aiz komata. Tā kā $1999=1+6\cdot333$, tad 1999 - tais cipars ir 333 -ā perioda pēdējais cipars un ir 5 (cipars, kuru jāizsvītro). Tātad sākotnējam un iegūtajam skaitlim pirmie 1998 cipari aiz komata sakrīt, bet nākošais cipars sākotnējam skaitlim ir 5, bet iegūtajam skaitlim tas ir 3.

Tā kā $5>3$, tad sākotnējais skaitlis ir lielāks.

76. Atbilde: 72.

Risinājums. Starp meklētajiem skaitļiem nav viencipara skaitļu: ja n=1, 2, 3, . . . , 9, tad $n<8n$ (viencipara skaitlis ir arī šī skaitļa ciparu summa). Četrciparu skaitļa ciparu summa nav lielāka par $9\cdot4=36$, tāpēc astoņkāršota ciparu summa nav lielāka par $36\cdot8=288$. Bet mazākais četrciparu skaitlis ir 1000, un $1000>288$. Tātad nav arī tāda četrciparu skaitļa.

Aplūko 5 - ciparu, 6 - ciparu u.t.t. skaitļus.

Pierādīsim, ka arī starp šiem skaitļiem nav meklēto skaitļu. Apskata n - ciparu skaitli x, kur n≥5. Tad $x \ge \underbrace{1000...0}_{n\ \text{cipari}} = 1\underbrace{000...0}_{n-1\ \text{nulle}} = \underbrace{10\cdot 10\cdot ...\cdot 10}_{n-1\ \text{desmitnieks}} = 100\cdot \underbrace{10...10}_{n-3\ \text{desmitnieki}}$ (1)

Savukārt skaitļa x ciparu summa ir S apmierina nevienādību $S \le 9\cdot n$, tāpēc astoņkāršota tā ciparu summa apmierina sakarības

$$8\cdot S \le 8\cdot 9\cdot n = 72\cdot n = 72\cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot ...\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}}_{n-3\ \text{reizinātāji}}\cdot 4 \quad (2)$$

Tā kā 100>72 un katrs no n-3 reizinātājiem (2) labajā pusē mazāks par 10, jo $\frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1} \le 2$, tad $8S < 100\cdot\underbrace{10\cdot 10\cdot ...\cdot 10}_{n-3} \le x$.

No (1) un (2) seko 8S<x. Tātad vajadzīgais pierādīts.

Līdz ar to meklējamie skaitļi var būt tikai divciparu vai trīsciparu skaitļi. Turklāt tiem jādalās ar 8. Tā kā tiem nav vairāk par trim cipariem, tad to ciparu summa nevar pārsniegt 3·9=27, tāpēc pats skaitlis nevar pārsniegt 8·27=216.

Visi divciparu un trīsciparu skaitļi, kas nepārsniedz 216 un dalās ar 8, ir sekojoši:

16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; 104; 112; 120; 128;
136; 144; 152; 160; 168; 176; 184; 192; 200; 208; 216.

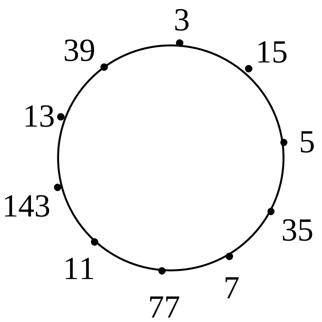
Pārbauda, kurš no skaitļiem der

16≠7·8; 24≠6·8; 32≠5·8; 40≠4·8; 48≠12·8; 56≠11·8; 64≠10·8; **72=9·8**; 80≠8·8; 88≠16·8; 96≠15·8; 104≠5·8; 112≠4·8; 120≠3·8; 128≠11·8; 136≠10·8; 144≠9·8; 152≠8·8; 160≠7·8; 168≠15·8; 176≠14·8; 184≠13·8; 192≠12·8; 200≠2·8; 208≠10·8 un 216≠9·8.

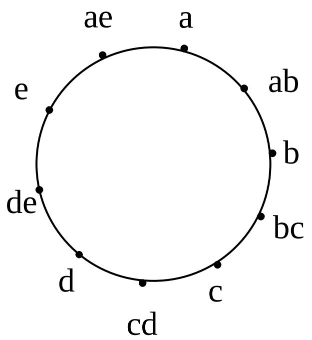
Tātad tāds ir tikai skaitlis **72.**

77. Atbilde: nē, ne noteikti.

Risinājums. Piemēram, 56.zīm. tādus skaitļus atrast nevar.



56. zīm.



57. zīm.

Aplūkosim vispārīgāku atrisinājumu. Ja pa riņķa līniju vispirms izraksta dažādus pirmskaitļus a; b; c; d; e (57.zīm.), bet pēc tam starp katriem diviem blakus uzrakstītiem pirmskaitļiem - to reizinājumu, tad nevar atrast divus skaitļus, kuri neatrodas blakus un dalās viens ar otru.

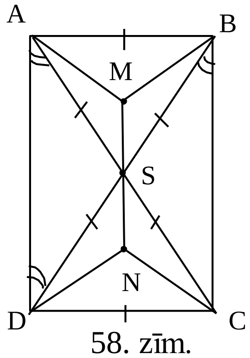
78. Risinājums. 1) Uzzīmē divus vienādus vienādmalu trijstūrus ABS un DSC (skat. 58.zīm.) tā, ka punkti A, S, C atrodas uz vienas taisnes un B, S, D - tāpat. Tā kā ∠ASB=60°, tad ∠ASD=120° (blakusleņķi).

ΔASD - vienādsānu, tātad ∠SAD=∠SDA=(180°-120°):2=30°.

ΔBSC - vienādsānu, tātad ∠CBS=∠SCB=30°.

ΔASD=ΔCSB (pēc trijstūru vienādības pazīmes mlm), tātad ∠ADS=∠SBC. Tie ir iekšējie šķērsleņķi pie AD un BC, ko krusto BD. Tātad AD||BC. Līdzīgi pierāda AB||DC. Tātad ABCD ir paralelograms.

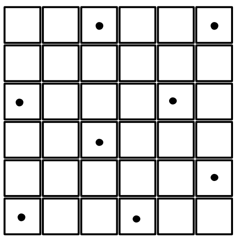
Tā kā ∠ADC=∠ADS+∠SDC=90°, tad ABCD ir taisnstūris.

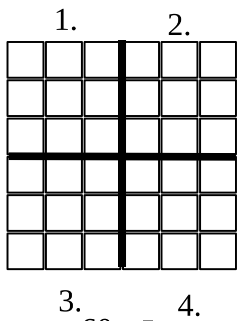


58. zīm.

2) Vienādmalu trijstūriem ABS un DSC atrod bisektrišu krustpunktus M un N.
3) Visiem trijstūriem AMB, BMS, SMA, SNC, CND, DNS, ASD un BSC viens leņķis ir 120°, bet divi leņķi - 30° lieli. Tātad šie trijstūri ir savā starpā līdzīgi.

79. Atbilde: var atzīmēt 8 centrus.
Risinājums. a) skat. 59. zīm.


59. zīm.

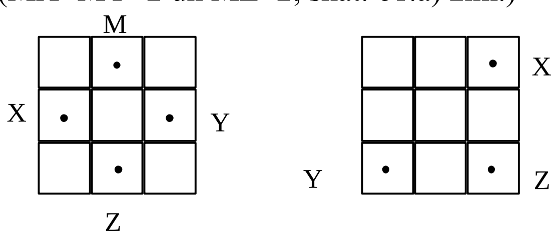


60. zīm.

b) Pierādīsim, ka vairāk par 8 centriem atzīmēt nevar.

Pieņemsim pretējo: saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem atzīmēti vismaz 9 punkti - centri. Doto kvadrātu 6x6 rūtiņas sadala 4 vienādos 3x3 rūtiņu kvadrātos. Tad vismaz vienā no četriem 3x3 rūtiņu kvadrātiem (skat. 60.zīm.) atzīmēti ne mazāk par 3 centriem, jo 2·4=8<9.

Aplūkosim šo kvadrātu un tajā atzīmētos 3 rūtiņu centrus. Neviena no trim atzīmētajām rūtiņām neaizņems centrālo rūtiņu un ne vairāk kā viena var būt atzīmēta malas vidējā rūtiņā (MX=MY<2 un MZ=2, skat. 61.a) zīm.)



a) 61. zīm. b)

Tāpēc vismaz divi no centriem atzīmēti stūra rūtiņās; tiem jābūt pretējās stūra rūtiņās, jo XZ=YZ=2. Pieņemsim, ka tie ir X un Y (skat. 61.b zīm.).

Viegli redzēt, ka trešo centru nav kur atzīmēt. Tātad mūsu pieņēmums, ka var atzīmēt 9 centrus, noved pie pretrunas un tāpēc ir nepareizs.

80. Atbilde: ar 3 vienādiem nenulles cipariem.

Risinājums. a) Viegli pārbaudīt, ka $38^2=1444$. Tātad naturāla skaitļa kvadrāts var beigties ar trim vienādiem nenulles cipariem

b) Jāpierāda, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar 4 vienādiem nenulles cipariem.

Lai pierādītu šo apgalvojumu, izmanto lemmu.

Lemma. Ja naturāla skaitļa n pēdējais cipars ir nepāra, tad tā kvadrāta priekšpēdējais cipars (ja tāds vispār eksistē, t.i., ja $n^2 \geq 10$) ir pāra cipars.

Ja n=5; 7; 9, apgalvojumu pārbauda tieši: $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$. Tātad priekšpēdējais cipars ir pāra.

Pieņemsim, ka n>10. Apzīmēsim ar y skaitļa n pēdējo ciparu un ar A - skaitli, kuru iegūst, ja skaitlī n nosvītro pēdējo ciparu (piemēram, ja n=517, tad y=7, A=51).

Tad $n=10\cdot A+y$ un $n^2=(10A+y)^2=100A^2+20Ay+y^2$. Ievērosim, ka skaitlī $100A^2$ divi pēdējie cipari ir nulles, bet skaitlī 20Ay (jeb, kas ir tas pats, $2\cdot 10Ay$) pēdējais cipars ir nulle, bet priekšpēdējais ir pāra cipars, jo Ay reizina ar 2. Tāpēc n^2 priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra atkarībā no tā, vai y^2 priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra cipars. Ja y^2 ir tikai viens cipars, tad varam uzskatīt, ka tā priekšpēdējais cipars ir 0.

Pārbauda visas iespējas: $1^2=\underline{0}1$; $3^2=\underline{0}9$; $5^2=\underline{2}5$; $7^2=\underline{4}9$; $9^2=\underline{8}1$, tātad lemma pierādīta.

No pierādītās lemmas izriet, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar četriem vienādiem nepāra cipariem, t.i. ar 1111, ar 3333, ar 5555, ar 7777, ar 9999.

Aplūko pāra ciparu kvadrātus. Tā kā $2^2=\underline{4}$; $4^2=1\underline{6}$; $6^2=3\underline{6}$; $8^2=6\underline{4}$, tad redzam, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ne ar 2, ne ar 8. Tātad tas nevar beigties arī ar 2222 un 8888.

Atliek pārbaudīt, vai tas var beigties ar 4444 vai ar 6666.

Ja n^2 beigtos ar 6666, tad tas būtu pāra skaitlis un tad arī n būtu pāra skaitlis, tāpēc n^2 dalītos ar 4. Bet $n^2=\ldots 6666=\ldots 6600+66$.

Tā kā gan n^2 dalās ar 4, gan …6600 dalās ar 4, tad arī 66 jādalās ar 4, bet tas tā nav. Tātad n^2 nevar beigties ar 6666, kā arī ar 66.

Ja n^2 beigtos ar 4444, tad n^2 un arī n būtu pāra skaitlis. Apzīmēsim n=2m ($m\in N$), tad $n^2=4m^2=\overline{A4444}=A\cdot 10000+4444$ (A - skaitlis, kuru iegūst, ja n^2 nosvītro pēdējos 4 ciparus).

No vienādības $4m^2=10000A+4444$ seko, ka $m^2=2500A+1111$, tātad m^2 beidzas ar 11. Bet tas ir pretrunā ar sākumā pierādīto lemmu.

Līdz ar to visi gadījumi aplūkoti un ir pierādīts, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar četriem vienādiem nenulles cipariem.

81. Risinājums. Mazākais pietiekamais reisu daudzums ir atkarīgs no kravas sadalījuma kastēs. Jāatrod visi iespējamie gadījumi un jāpierāda, ka citu bez atrastajiem nav. Pierādīsim, ka

A: mazākais pietiekamais reisu daudzums var būt 4; 5; 6; 7,

B: nekādā gadījumā nevar iztikt ar 3 vai mazāk reisiem,

C: vienmēr var iztikt ar augstākais 7 reisiem.

A. Ja krava iepakota 4 kastēs, katrā kastē pa $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$ tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti. Tātad nepieciešami vismaz 4 reisi. Skaidrs, ka šajā gadījumā ar 4 reisiem pietiek (ar katru reisu aizved tieši vienu kasti).

Ja krava iepakota 5 kastēs, katrā kastē pa $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$ tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti. Tātad nepieciešami vismaz 5 reisi un ar 5 reisiem pietiek.

Ja krava iepakota 6 kastēs, katrā kastē pa $\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$ tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti, jo $1\frac{5}{6}\cdot 2=2\frac{10}{6}=3\frac{2}{3}$. Tātad nepieciešami vismaz 6 reisi un ar 6 reisiem pietiek.

Ja krava iepakota 7 kastēs, katrā kastē ir pa $\frac{11}{7}=1\frac{4}{7}$ tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti, jo $1\frac{4}{7}\cdot 2=2\frac{8}{7}=3\frac{1}{7}$. Tātad nepieciešami vismaz 7 reisi un ar 7 reisiem pietiek.

B. Veicot ne vairāk kā 3 reisus, var aizvest ne vairāk kā 3·3=9 tonnas, bet jāaizved 11 tonnas. Tāpēc ar 3 vai mazāk reisiem nepietiek nekādā kravas iepakojuma gadījumā.

C. Pierādīsim, ka ar 7 reisiem kravu vienmēr var aizvest.

Kastes, kuras sver vairāk par 1,5 tonnām, sauksim par smagām; pārējās kastes, kuras katra sver 1,5 tonnas vai mazāk, sauksim par vieglām.

No **vieglajām** kastēm veidosim kaudzes. Kaudžu veidošana notiek sekojoši: izvēlamies vienu kasti un kraujam tai virsū citas kastes tik ilgi, līdz kaudzes kopējā masa pirmo reizi pārsniedz 1,5 tonnas. Šai brīdī kaudzes veidošanu pabeidzam un sākam veidot jaunu kaudzi no vēl atlikušajām vieglajām kastēm (ja tādas vēl ir). Ievērosim, ka katras kaudzes kopējā masa nepārsniedz 3 tonnas, jo pirms pēdējās kastes pievienošanas šajā kaudzē bija ne vairāk kā 1,5 tonnas un pēdējā pievienotā kaste svēra ne vairāk par 1,5 tonnām.

Agri vai vēlu, tā veidojot kaudzes, nonāksim pie situācijas, ka jaunas kaudzes vairs izveidot nevar. Tad:

a) smago kastu un kaudžu kopējais skaits nepārsniedz 7 (ja tas būtu vismaz 8, tad kravas būtu vismaz 1,5·8=12 tonnas - pretruna).

b) kaudzēs neievietota palikusi ne vairāk kā viena vieglā kaste (ja tās būtu divas, tad no tām varētu izveidot vēl vienu kaudzi).

Tālāk aplūko divas iespējas:

C.1) smago kastu un kaudžu kopā ir ne vairāk par 6. Katru no tām aizvedam ar vienu reisu, bet atlikušo, kaudzēs neievietoto kasti, ja tāda ir - ar septīto reisu.

C.2) smago kastu un kaudžu kopā ir 7. Tad to kopējā masa ir vairāk nekā 7x1,5 tonnas=10,5 t. Ja visas vieglās kastes ievietotas kaudzēs, tad varam visu kravu aizvest ar 7 reisiem. Ja viena kaste palikusi pāri, tad tā sver mazāk nekā 11-10,5=0,5 tonnas.

Pierādīsim, ka vismaz viena smagā kaste vai kaudze sver ne vairāk par 2,5 tonnām. Tiešām, ja tā nebūtu, tad to kopējā masa būtu lielāka nekā 2, 5 t ·7=17,5 t >11 t - iegūta pretruna.

Tātad tāda smagā kaste vai kaudze eksistē. Uzliekot tai virsū palikušo pēdēju kasti, iegūstam kaudzi, kuras masa mazāka nekā 2,5 t +0,5 t =3 t. Tagad visu kravu var aizvest ar 7 reisiem.

82. Atbilde: 1999.

Risinājums. Pēc uzdevuma nosacījumiem a>3b>6c>12d, tātad arī a>b>c>d. Skaitlis d ir mazākais no pirmskaitļiem a; b; c; d un tie visi ir dažādi.

Tā kā a^2-b^2+c^2-d^2 ir nepāra skaitlis, tad vismaz viens no skaitļiem a; b; c; d ir pāra. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tātad tieši viens no skaitļiem a; b; c; d ir pāra skaitlis, un tas ir 2. Tā kā 2 vispār ir mazākais pirmskaitlis, tad tas ir arī mazākais no a; b; c; d, tāpēc d=2. Ievietojot dotajā vienādībā, iegūstam

$$a^2-b^2+c^2-d^2=1749 \text{ un } a^2-b^2+c^2=1753 \ (1).$$

Tā kā $c>2d$, tad $c>4$, tāpēc $c\geq5$.

Pieņemsim, ka $c\neq5$, tad $c\geq7$. Tā kā $3b>6c$, tad $3b>6\cdot7$, $b>\frac{6\cdot7}{3}$ un $b>14$, tātad $b\geq17$. Tad $a^2-b^2+c^2>(3b)^2-b^2+25 = 8\cdot b^2+25\geq8\cdot17^2+25 = 8\cdot289+25>8\cdot250 = 2000>1753$.

Iegūta pretruna ar (1) vienādību, tāpēc pieņēmums nav pareizs un $c=5$.

No (1) vienādības iegūstam: $a^2-b^2+25=1753$, $a^2-b^2=1728$ (2)

Savukārt no $3b>6c$ seko $b>2c$, $b>10$, $b\geq11$ (3).

Tā kā $a>3b$, tad no (2) seko $(3b)^2-b^2<1728$ jeb $9b^2-b^2<1728$; $8b^2<1728$, no kurienes $b^2<216$ un $b\leq14$. No (3) nevienādības seko, ka vai nu $b=11$, vai $b=13$.

Ja $b=13$, tad no (2) seko $a^2-13^2=1728$, $a^2=1728+169$; $a^2=1897$. Tā kā 1897 nav neviena naturāla skaitļa kvadrāts, tad a nav naturāls skaitlis.

Ja $b=11$, tad no (2) seko $a^2-121=1728$, $a^2=1728+121$; $a^2=1849$ un $a=43$. Tā kā 43 ir pirmskaitlis un $43>3\cdot11$, tad visi uzdevuma nosacījumi izpildīti. Var aprēķināt summu $a^2+b^2+c^2+d^2 = 43^2+11^2+5^2+2^2 = 1849+121+25+4=1999$.

83. Atbilde: jā, noteikti.

Risinājums. Tā kā visi izrakstītie skaitļi uz riņķa līnijas ir dažādi, tad no katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens (lielākais) dalās ar otru (mazāko), bet ne otrādi.

Ja pa apli pēc kārtas kādā vietā uzrakstīti skaitļi a, b, c tā, ka $a>b>c$, tad a dalās ar b un b dalās ar c, tātad a dalās ar c, pie tam a un c neatrodas blakus. Tāpēc vienīgā iespēja, kad uzdevumā minētie divi skaitļi neeksistē, varētu pastāvēt tikai tad, ja nekādi trīs skaitļi pēc kārtas neatrodas uz riņķa līnijas ne augošā, ne dilstošā secībā.. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Uz riņķa līnijas skaitļus apzīmē pēc kārtas ar a, b, c, d, e, f, g, h, i. Pieņemsim, ka a ir vislielākais, tad $a>b$. Lai nebūtu trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu dilstošā secībā, jābūt $b<c$; lai nebūtu trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu augošā secībā, jābūt $c>d$. Līdzīgi, lai nebūtu trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu dilstošā secībā, $d<e$; līdzīgi $e>f$, $f<g$, $g>h$, $h<i$, $i>a$.

Nevienādība $i>a$ nevar pastāvēt, jo a ir vislielākais skaitlis. Tātad pieņēmums nav pareizs.

84. Atbilde: 20 zvaigznītes.

Risinājums. a) tas, ka ar 20 zvaigznītēm pietiek, redzams 62.zīm.

•			•	•			•
•							•
		•			•		
		•			•		
•							•
•			•	•			•
	•	•			•	•	

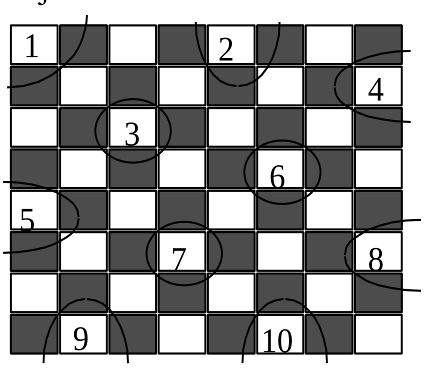
62. zīm.

b) Pierādīsim, ka 20 zvaigznītes ir nepieciešamas.

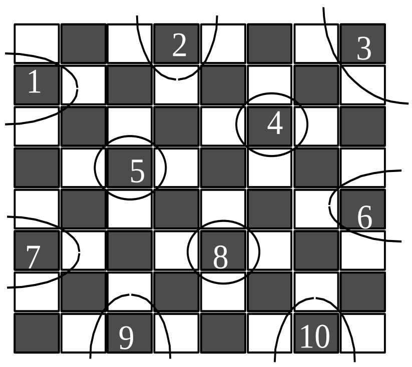
Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Baltajām rūtiņām blakus atrodas tikai zvaigznītes, kas ierakstītas melnajās rūtiņās, kā arī melnajām rūtiņām blakus atrodas tikai zvaigznītes, kas ierakstītas baltajās rūtiņās.

Pierādīsim, ka melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes.

Aplūkosim ar skaitļiem apzīmētās baltās rūtiņas (skat. 63.zīm.), katru no tām apjož līnija.



63. zīm.



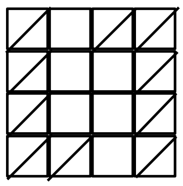
64. zīm.

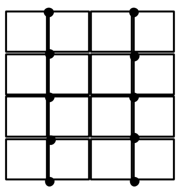
Līnija iet caur visām tām melnajām rūtiņām, kuras atrodas blakus atbilstošajai baltajai. Redzam, ka ne caur vienu melno rūtiņu neiet divas līnijas. Tas nozīmē, ka katrai ar skaitli apzīmētajai baltajai rūtiņai nepieciešama tai blakus esoša cita zvaigznīte. Tāpēc melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes.

Līdzīgi aplūkosim ar skaitļiem apzīmētās melnās rūtiņas (skat. 64.zīm.), katru no tām apjož līnija. Šī līnija iet caur visām tām baltajām rūtiņām, kuras atrodas blakus atbilstošajai melnajai. Redzam, ka ne caur vienu balto rūtiņu neiet divas līnijas. Tas nozīmē, ka katrai ar skaitli apzīmētajai melnajai rūtiņai nepieciešama tai blakus esoša cita zvaigznīte. Tāpēc baltajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes. Tātad kopā ir nepieciešamas vismaz 10+10=20 zvaigznītes.

85. Atbilde: 10 diagonāles.

Risinājums. a) skat. 65.zīm.


65. zīm.


66. zīm.

b) katrai diagonālei, kuru vispār var novilkt, viens galapunkts atrodas vienā no 10 punktiem, kas atzīmēti 66.zīm.

Tā kā nekādām divām diagonālēm nav kopīgu punktu (tās nekrustojas un neiziet no viena punkta), tad no katra atzīmētā punkta var novilkt augstākais vienu diagonāli, un to nevar būt vairāk par 10.

86. Risinājums. Uz svaru kausiem liekam pa 9 monētām, pēc tam - pa 7, pēc tam - pa 5, pēc tam - pa 3, pēc tam - pa 1. Katru reizi liekam uz svariem līdz šim vēl nesvērtās monētas (18+14+10+6+2=50). Ja nevienā reizē līdzsvars netiek izjaukts, tad vieglākā monēta ir vienīgā malā palikusī, un esam to noskaidrojuši ar 5 svēršanām (katra monēta ir svērta tikai vienu reizi).

Ja turpretī kādā reizē (salīdzinot 2n+1 monētas uz viena kausa ar 2n+1 monētām uz otra kausa) viens kauss paceļas uz augšu, tad vieglākā monēta atrodas uz tā, augstāk minēto procesu ir jāpārtrauc (jau patērētas 5-n svēršanas).Tagad 2n no “aizdomīgajām” monētām sadalām pa pāriem (piem., ja n=4, tad aizdomīgo monētu ir 9, un 8 monētas sadala 4 pāros).

Ja kādā salīdzināšanā viens kauss paceļas uz augšu, tad uz tā ir vieglākā monēta. Ja visas reizes svari ir līdzsvarā, tad vieglākā ir malā palikusī “aizdomīgā” monēta. Esam iztērējuši ne vairāk par (5-n)+n=5 svēršanām, un neviena monēta nav svērta vairāk par divām reizēm.

Piezīme: ja nebūtu nosacījuma, ka katru monētu var svērt ne vairāk par divām reizēm, vieglāko monētu varētu atrast ar 4 svēršanām sekojošā ceļā.

1) Skopuļa 51 monētu sadala trīs vienādās kaudzītēs katrā pa 17 monētām. Ar pirmo svēršanu noskaidrojam, kurā no trijām kaudzītēm ir vieglākā monēta (patvaļīgi izvēlas divas kaudzītes; ja sverot tās abas ir līdzsvarā, tad trešajā kaudzītē ir vieglākā monēta, ja turpretim abas kaudzītes nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir kaudzītē, kura ir vieglāka).

2) Kaudzītei, kurā ir vieglākā monēta, pieliek vienu īstu monētu; tad tur kopā ir 18 monētas.

Šīs 18 monētas sadala trijās vienādās kaudzītēs pa sešām monētām katrā. Ar otro svēršanu (līdzīgi kā 1) etapā) noskaidrojam, kurā no kaudzītēm ir vieglākā monēta.

3) Šīs atlikušās sešas monētas sadala trijās kaudzītēs pa 2 monētām katrā.

Ar trešo svēršanu noskaidrojam, kurā no šīm kaudzītēm ir vieglākā monēta.

4) Ar ceturto svēršanu sver atlikušās divas "aizdomīgās" monētas.

Tajā kausā, kas paceļas uz augšu, ir meklētā vieglākā monēta. Esam patērējuši 4 svēršanas.

87. Risinājums.

1) Ja A runā patiesību, tad A ir svārstīgs; iegūta pretruna, jo A vienlaicīgi nevar būt svārstīgs un runāt patiesību. Tātad A nerunā patiesību.

2) Ja A ir svārstīgs, tad ne B, ne C nav patiess. Tāpēc A nav svārstīgs.

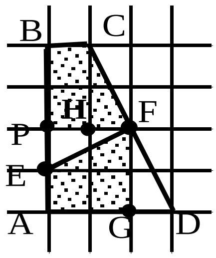
Tātad A melo.

Tā kā viens no brāļiem vienmēr runā patiesību un A ir melis, tad B runā patiesību, bet C ir svārstīgs.

88. Atbilde: jā, pastāv.

Risinājums.

Aplūko kvadrātisku rūtiņu režģī iezīmētu taisnleņķa trapeci ABCD (skat. 67.zīm.; $\angle A=90°$, $BC\|AD$).



67.zīm.

Pēc pazīmes mlm $\Delta CHF=\Delta FGD$; tāpēc $\angle CFD = \angle CFH + \angle HFG + \angle GFD = \angle CFH + 90° + \angle HCF = 90° + (\angle CFH + \angle HCF) = 180°$ un rūtiņu virsotne F atrodas uz malas CD tās viduspunktā. Sagriežam trapeci ABCD pa nogriezni EF. Tagad PBCF = GAEF, jo, savietojot šīs taisnleņķa trapeces pa rūtiņu līnijām, tās acīmredzami sakrīt. Bez tam $\Delta EPF = \Delta DGF$ (mlm). Ja divām vienādām figūrām pie atbilstošajām malām pievieno vienādi orientētas vienādas figūras, atkal iegūst vienādas figūras. Tātad četrstūri AEFD un BCFE ir vienādi.

Savukārt, novelkot diagonāli BD, iegūst taisnleņķa trijstūri BAD un platleņķa trijstūri BCD, kuri nav vienādi. Līdzīgi, novelkot diagonāli AC, iegūst taisnleņķa trijstūri ABC un šaurleņķu trijstūri ACD . Novelkot viduslīniju PF, trapeces PBCF un APFD nav vienādas, jo vienai no tām pamatu garumi ir 1 un 2 , bet otrai - 2 un 3. Novelkot viduslīniju, kas savieno pamatu BC un AD viduspunktus, iegūst divas trapeces, no kurām tikai viena ir taisnleņķa; tāpēc tās nav vienādas.

89. Risinājums. No sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 6; to apzīmē ar n. Skaitlim n ir dalītāji $\frac{n}{3}, \frac{n}{2}$ un $\frac{n}{6}$, kas atšķiras no n. Atrod šo dalītāju summu: $\frac{n}{3}+\frac{n}{2}+\frac{n}{6}=\frac{6n}{6}=n$. (Atceramies, ka n var būt arī vēl citi dalītāji.)

90. Atbilde: par 1, par 8 vai par 10.

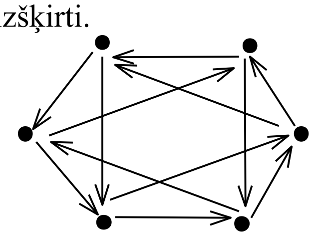
Risinājums. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 0 vai 1, tad, pieskaitot tam 8, tā ciparu summa palielinās par 8. Ja rodas pārnesums, tad ciparu summa katra pārnesuma dēļ samazinās par 9 (jo var rasties tikai pārnesums 1). Tā kā pārnesums var būt tikai divās - vienu un desmitu - šķirās, tad pārnesumu dēļ ciparu summa var samazināties par 9 vai par 18.

Tātad abu apskatāmo skaitļu ciparu summas var savā starpā atšķirties par 8, par $1=|8-9|$ un par $10=|8-2\cdot 9|$.

Piemēri: 211 un 219; 218 un 226; 299 un 307 parāda, ka šīs iespējas tiešām realizējas.

91. Risinājums. Jā, var (piem., skat. 68.zīm.).

$X \longrightarrow Y$ nozīmē, ka X uzvarējis pret Y (jeb Y zaudējis pret X); nenovilkta līnija nozīmē, ka spēle beigusies neizšķirti.



68. zīm.

92. Atbilde: mazākais konfekšu daudzums ir 28.

Risinājums.

a) Piemērs 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28 parāda, ka vērtība 28 ir iespējama. To, kā katrs bērns var sadalīt savas konfektes, parāda sekojoša tabula.

Dalītāja konfekšu skaits	Cik dod citam atkarībā no viņa konfekšu skaita							
	21	22	23	24	25	26	27	28
21		6	5	4	3	2	1	0
22	7		5	4	3	2	1	0
23	7	6		4	3	2	1	0
24	7	6	5		3	2	1	0
25	7	6	5	4		2	1	0
26	7	6	5	4	3		1	0
27	7	6	5	4	3	2		0
28	7	6	5	4	3	2	1	

b) Pieņemsim, ka konfekšu daudzumi bērniem ir a_1; a_2; . . .; a_8 un $a_1<a_2< \ldots <a_8$. Bērnu ar a_i konfektēm sauksim par i - to bērnu. Tā kā jebkurš bērns var sadalīt savas konfektes pārējiem, tad, ja 1.bērns "izlīdzina" konfekšu daudzumu, viņam jādod vismaz viena konfekte 7. bērnam, vismaz divas konfektes 6. bērnam, vismaz trīs konfektes 5. bērnam, . . . , vismaz sešas konfektes 2. bērnam.

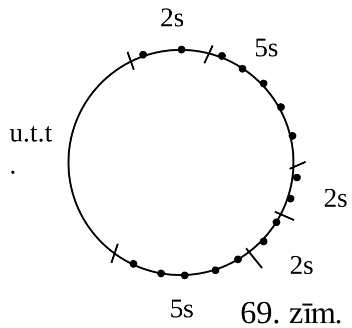
Tāpēc $a_1 \geq 1+3+\ldots+6=21$.

Tā kā $a_2>a_1$, tad $a_2 \geq 22$. Līdzīgi $a_3 \geq 23$, . . . , $a_8 \geq 28$. Tātad mazākais konfekšu daudzums bērnam, kuram to ir visvairāk, ir 28.

93. Risinājums. Ja visas monētas ir 1 santīma vērtībā, tad uzdevuma prasības izpildāmas (naudu var sadalīt divās vienādās daļās). Acīmredzot to var izdarīt arī, ja visas ir 2 santīmu monētas.

Pieņemsim, ka monētas ir dažādas.

Uz riņķa līnijas atzīmē 198 punktus (1 lats 98 sant.=198 sant.). Novelkam starp punktiem nogriežņus tā, lai punktu skaits riņķa līnijas "lokos" atbilstu monētu vērtībām santīmos (skat. 69.zīm.).



69. zīm.

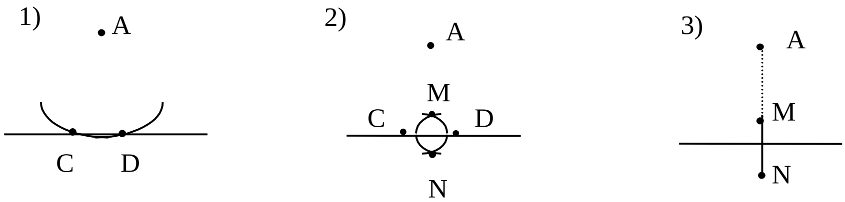
Tā kā uz riņķa līnijas ir 198 punkti, tad ir 198 atstarpes starp punktiem. Ievērosim , ka $198=99\cdot 2$. Tātad atstarpes var sadalīt "diametrāli pretēju" atstarpju pāros, un šādu pāru būs 99.Ir novilkti 100 nogriežņi (100 monētas). Ievērojam, ka 100>99 .Tātad divi nogriežņi nonāks vienā "diametrāli pretēju" atstarpju pārī, tātad "diametrāli pretējās" atstarpēs. Tie norādīs vajadzīgo naudas sadalījumu.

94. Risinājums.

1) Ar centru punktā A velk riņķa līnijas loku, kas krusto taisni t divos punktos C un D (loka rādiusu izvēlas tā, lai būtu CD<1 cm).

2) Ar centriem punktos C un D velk riņķa līnijas lokus ar vienādiem rādiusiem tā, lai loki krustotos divos punktos N un M (rādiusi nedaudz lielāki par pusi no CD).Tad NM<1 cm.

3) Novelk nogriezni NM un pakāpeniski pagarina līdz to punktam A (skat. 70.zīm.).



70. zīm.

95. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Izveidojam kaudzes ar 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19 akmeņiem. Viegli pārbaudīt, ka $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=(1+19)+(3+17)+(5+15)+(7+13)+(9+11)=$ $=5\cdot 20=100$.

Savukārt, ja kādu kaudzi ar n akmeņiem (n - nepāra skaitlis)sadalīs kaudzēs ar a un b akmeņiem, tad a+b=n, tāpēc vai nu a, vai b būs nepāra skaitlis. Tā kā a<n un b<n, tad tajā kaudzītē, kurā sadalot radīsies nepāra skaits akmeņu, būs tikpat akmeņu, cik kādā no pārējām.

96. Risinājums. Sanumurēsim vietas pa apli pēc kārtas: 1, 2, 3, . . . , 10.

Beigās pēc maiņām vai nu visi zēni ir pāra un meitenes - nepāra vietās, vai otrādi (zēni - nepāra un meitenes - pāra vietās).

Pieņemsim, ka X zēni sākumā atrodas "nepareizās" vietās, tad arī X meitenes sākumā atrodas nepareizās vietās (zēnu un meiteņu skaits ir vienāds). Acīmredzot šajā situācijā pietiek ar X maiņām, lai iegūtu uzdevumā prasīto. No otras puses, X maiņas ir nepieciešamas, jo ir 2X (X - zēni un X - meitenes) nepareizības, un ar vienu maiņu var izlabot augstākais 2 nepareizības.

Ja no sākuma visi zēni stāv pēc kārtas un meitenes - arī, tad atkarībā no tā, vai zēnus beigās novietos pāra vai nepāra vietās, X=2 vai X =3, pie tam jebkurā situācijā var panākt, lai X≤2 (izvēloties, vai zēni beigās stāvēs pāra vai nepāra vietās).

Tātad ar 2 maiņām pietiek vienmēr, un ir gadījumi, kur ar mazāk nekā 2 maiņām iztikt nevar.

97. Atbilde: 8 votivapas un 1 šillišalla.

Risinājums. Apzīmēsim votivapu un šillišalu daudzumus attiecīgi ar v un š.

No pirmā nosacījuma seko: 6v+2š>4·12; abas nevienādības puses dalot ar 2, iegūst

$$3v+š>24 \quad (1)$$

No otrā nosacījuma seko:

$$7v+3š<5\cdot 12 \quad (2)$$

No (1) seko 3š>72-9v; no (2) seko 3š<60-7v. Tāpēc 72-9v<60-7v, 2v>12, v>6.

Tāpēc no 7v+3š<60 secinām, ka v=7 vai v=8, jo jābūt š≥0.

Ja v=7, tad no (1) š>3, tātad š≥4; bet tad neizpildās (2). Ja v=8, tad no (1) š>0, tātad š≥1, bet no (2) 56+3š<60.

Tāpēc noteikti š=1. Tātad votivapu bija 8, bet šillišallu - 1.

98. Atbilde: a) jā, b) nē.

Risinājums. a) Pieņemsim, ka 7.a klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "10" balles un 2 skolēni ar vērtējumu "9" balles, savukārt 7.b klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "2" balles.

Iedomāsimies, ka uz 7.b klasi pāriet abi skolēni no 7.a klases ar vērtējumu "9" balles.

Pirms pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija $\frac{8\cdot 10+2\cdot 9}{10}=9{,}8$ balles, bet 7.b klasē vidējais vērtējums bija 2 balles. Savukārt pēc pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija 10 balles, bet 7.b klasē tas bija $\frac{8\cdot 2+2\cdot 9}{10}=3{,}4$. Tātad abi vērtējumi paaugstinājušies.

b) Apzīmēsim 7.a klases vidējo atzīmi ar x, 7.b klases vidējo atzīmi ar y, bet tās skolēnu grupas vidējo atzīmi, kas pāriet no 7.a uz 7.b, ar p. Viegli saprast, ka abās klasēs vidējā atzīme paaugstināsies tad un tikai tad, ja x>p>y; tad jaunās vidējās atzīmes $x_1>x>p>y_1>y$. Līdzīgi spriežot, lai otrajā pārejā paaugstinātos 7.b klases vidējā atzīme, uz 7.a klasi jāpāriet grupai ar vidējo atzīmi p_1, kur $p_1<y_1$, tātad $p_1<x_1$. Bet tā rezultātā 7.a klases vidējā atzīme samazināsies.

Atliek pamatot pasvītroto apgalvojumu. Pieņemsim, ka 7.a klasē pirms pārejas bija m skolēni, 7.b klasē - n skolēni, bet pārgāja k skolēni. Tad pēc pārejas vidējā atzīme 7.a klasē bija $\frac{m\cdot x-k\cdot p}{m-k}$, bet 7.b klasē tā bija $\frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}$. Viegli saprast, ka

$$\frac{m\cdot x-k\cdot p}{m-k}>x \Leftrightarrow m\cdot x-k\cdot p>m\cdot x-k\cdot x \Leftrightarrow k\cdot x>k\cdot p \Leftrightarrow x>p$$

$$\text{un}\quad \frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}>y \Leftrightarrow n\cdot y+k\cdot p>n\cdot y+k\cdot y \Leftrightarrow p>y.$$

Savukārt $p>y_1 \Leftrightarrow \frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}<p \Leftrightarrow n\cdot y+k\cdot p<n\cdot p+k\cdot p \Leftrightarrow n\cdot y<n\cdot p \Leftrightarrow y<p.$

Vajadzīgais pierādīts.

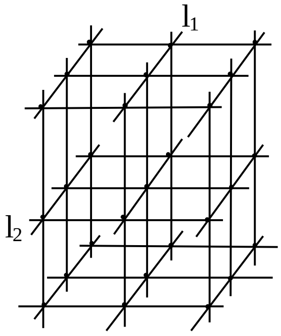
99. Atbilde: mazākā iespējamā starpība ir $\frac{1}{15}$.

Apzīmēsim daļu skaitītājus ar x un y. Tad apskatāmā starpība ir **pozitīvs** skaitlis $\left|\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right|=\frac{|5x-3y|}{15}$. Tā kā |5x-3y|>0 un |5x-3y| ir vesels skaitlis, tad |5x-3y|≥1. Tāpēc apskatāmā starpība nevar būt mazāka par $\frac{1}{15}$.

Piemērs $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$ parāda, ka tā var būt $\frac{1}{15}$.

100. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Skat. 71.zīm.



71. zīm.

Var pamanīt, ka mēs esam attēlojuši plaknē “režģi”, kuru telpā veido 8 vienādu klucīšu šķautnes, ja šie klucīši salikti tā, ka tie kopā sastāda vienu lielu “kluci” .

Klucīšu izmēri jāizvēlas tā, lai zīmējumā norādītās taisnes nesakristu (piem., 71.zīm. varētu sakrist l_1 un l_2, lai gan telpā šīs taisnes, protams, ir dažādas).

101. Risinājums.

a) 67x67=4489,

b) 667x667=444889

c) 6667x6667=44448889

Rodas doma, ka $\underbrace{66...6}_{n}7\cdot\underbrace{66...6}_{n}7=\underbrace{44...4}_{n+1}\underbrace{88...8}_{n}9$. Pamatosim to.

Viegli pārbaudīt, ka $\underbrace{66...6}_{n}7=\frac{1}{3}\cdot 2\underbrace{0...0}_{n}1$.

Tāpēc $\underbrace{66..6}_{n}7\cdot\underbrace{66..6}_{n}7=\frac{1}{9}\cdot 2\underbrace{0...0}_{n}1\cdot 2\underbrace{0...0}_{n}1$.

Sareizinot “stabiņā” $2\underbrace{00...0}_{n}1\cdot 2\underbrace{00...0}_{n}1$, iegūstam

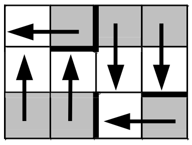
$$\begin{array}{r} 20\ldots01\cdot 200\ldots01 \\ \hline 2\underbrace{0\ldots0}_{n}1 \\ 4\underbrace{00\ldots0}_{n}2 \\ \hline 4\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}1 \end{array}$$

Viegli pārbaudīt (dalot pēc skolā mācītā paņēmiena), ka

$$4\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}1:9=\underbrace{44...4}_{n+1}\underbrace{88...8}_{n}9\text{, k.b.j.}$$

102. Risinājums. To var izdarīt, piemēram, tā, kā redzams 72.zīm.

Griezumus izdara pa biezajām līnijām. Pēc tam pelēkos kvadrātiņus uzlokām virsū baltajiem un ar iegūto "divkāršo " figūru aplīmējam kubu.

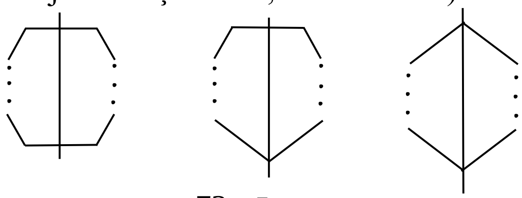


72. zīm.

103. Risinājums. Pēc **1999n** griezieniem Jānim būs **1999n+1** daudzstūris.

Ja nekādiem 2000 daudzstūriem nav vienāds malu skaits, tad Jānim katra veida daudzstūru (trijstūri, četrstūri u.t.t.) var būt augstākais 1999.

Tāpēc iegūtajiem daudzstūriem kopā ir vismaz $1999\cdot3 + 1999\cdot4+ ... + 1999\cdot n + 2000 = 1999(3 + 4 + ... + n) + 2000$ malas. No otras puses, katra griezina rezultātā kopējais malu skaits visos daudzstūros palielinās ne vairāk kā par 4 (divas malas rodas pilnīgi no jauna grieziena rezultātā, un vēl ne vairāk kā divas no sagrieztā gabala malām katra sadalās divās jauno daļu malās, skat. 73.zīm.).



73. zīm.

Tāpēc kopējais malu skaits nepārsniedz $4+4\cdot1999n=7996n+4$. Tātad jāpastāv nevienādībai $1999(3 + 4+ ... + n) + 2000 \le 7996n + 4$

Nevienādība nav pareiza, ja, piemēram, $n = 10$.

Tāpēc mūsu pieņēmums nav pareizs.

104. Atbilde: $c=2, d=8$ vai $c=8, d=2$.

Risinājums. Ievērosim, ka $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c)$. Tātad no skaitļiem 6; 9; 11; 12; 15 jāvar izveidot divus pārus, kuros ieejošo skaitļu summas ir vienādas. Viegli pārbaudīt, ka tas ir iespējams tikai vienā veidā: $6+15=9+12$.

Tāpēc $a+b+c+d=21, a+b=11$ un tāpēc $c+d=21-11=10$.

Skaidrs, ka visi naturālie skaitļi a, b, c, d ir dažādi: ja starp tiem būtu vienādi, tad vienādām būtu jābūt arī dažu pāru summām.

Apzīmēsim tagad skaitļus a, b, c, d augošā kārtībā ar $x<y<z<t$. Tad mazākā divu skaitļu summa ir $x+y$, otrā mazākā $x+z$, lielākā $z+t$, otra lielākā $y+t$.

Tātad $x+y=6$, $x+z=9$, $y+t=12$, $z+t=15$.

Iegūstam $y=6-x$, $z=9-x$, $t=12-y=6+x$. Tāpēc $x+t=6+2x$ un $y+z=15-2x$; viena no šīm summām ir 10, otra 11 (tātad viena pāra, otra - nepāra skaitlis).

Tā kā $6+2x$ ir pāra skaitlis un $15-2x$ ir nepāra skaitlis, tad $6+2x=10$; no šejienes $x=2$, $y=4$, $z=7$, $t=8$. No šiem skaitļiem tikai 2 un 8 dod summā 10. Tāpēc skaitļi c un d ir 2 un 8.

Pārbaude parāda, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

105. Atbilde: 361; 529; 784.

Risinājums. Uzdevumā minētie trīsciparu skaitļi var būt tikai 169; 196; 256; 289; 324; 361; 529; 576; 625; 729; 784; 841; 961 (mums neder skaitļi ar vienādiem cipariem). Lai izmantotu ciparu 3, jāveido vai nu 324, vai 361.

Pieņemsim, ka viens no kvadrātiem ir 324. Viegli pārbaudīt, ka tad mēs nevaram izmantot ciparu 8. Tāpēc nav jāveido vis 324, bet gan **361.** Tad ciparu 4 var izmantot tikai skaitlī **784.** No atlikušajiem cipariem 2; 5; 9 var izveidot vienu kvadrātu, proti, **529.**

Tāpēc vienīgais atrisinājums ir **361; 529; 784.**

106. Risinājums. Izvēlamies punktu A. Pieņemsim, ka caur to iet augstākais 3 taisnes. Uz tām ir izvietoti 9 pārējie punkti, tāpēc vismaz uz vienas no šīm taisnēm ir izvietoti vēl vismaz 3 citi punkti bez A; tātad uz šīs taisnes var atrast 4 punktus A, B, C, D. Ņemam punktu S ārpus šīs taisnes (tāds eksistē saskaņā uzdevuma nosacījumiem). Caur to iet četras dažādas taisnes SA, SB, SC, SD (un varbūt vēl kādas citas).

107. Atbilde: a) var, **b)** nevar.

Risinājums. Ievērosim: ja a+b=3c, tad a+b+c=4c, tātad katrā veidojamajā 3 skaitļu grupā skaitļu summa dalās ar 4. Tāpēc, lai prasīto sadalījumu varētu izveidot, visu skaitļu summai no 1 līdz 3n ieskaitot jādalās ar 4.

Tā kā 1+2+3+ . . . +18 = 171, tad pie n = 6 uzdevuma prasības nav izpildāmas, jo 171 nedalās ar 4.

Pie n = 8 tās var izpildīt, piemēram, šādi:

$$\frac{1+5}{2}=3;\ \frac{3+9}{4}=3;\ \frac{10+11}{7}=3;$$

$$\frac{6+18}{8}=3;\ \frac{16+20}{12}=3;\ \frac{17+22}{13}=3;\ \frac{19+23}{14}=3;\ \frac{21+24}{15}=3.$$

108. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Aizstāsim nepāra skaitļus 1; 3; 5; ...; 1999 attiecīgi ar -1999; -1997; ...; -1 (t.i., samazināsim katru no tiem par 2000). Veicot šādu samazināšanu, nevienas apskatāmās summas dalīšanās vai nedalīšanās ar 2000 nemainās.

Iegūto skaitļu sistēmu sakārtosim šādi:

-1; 2; -3; 4; -5; 6; . . . ; -1997; 1998; -1999.

Pierādīsim, ka šis sakārtojums apmierina uzdevuma prasības.

Ja jāsaskaita skaitļi "skaitļu nogrieznī", kas sākas ar nepāra un beidzas ar pāra skaitli, tad tiek saskaitīti n (n≤999) blakusesošu skaitļu pāri, kur katra pāra skaitļu summa ir (-1). Tāpēc iegūtā kopējā summas vērtība ir -n.

Tā kā $|-n| \le 999$, tad šī summa nedalās ar 2000.

Trīs citus gadījumus apskata līdzīgi.

109. Atbilde: jā, to var izdarīt.

Risinājums. Līdzīgi kā 100.uzdevuma risinājumā attēlojam plaknē “kluci”, kas izveidots no 3x3x3 maziem vienādiem klucīšiem. Tagad uz katras taisnes ir 4 punkti, bet caur katru punktu iet tikai trīs taisnes.

Caur visiem pašreiz atzīmētajiem 64 punktiem novelkam paralēlas taisnes tā, lai tās visas atšķirtos savā starpā, un atzīmējam vēl trīs jau uzzīmētā režģa kopijas, kas iegūtas, sākotnējo kopiju pārbīdot paralēli tā, lai 64 punkti slīdētu pa novilktajām taisnēm. Kopijas atzīmējam tā, lai neviena jaunā taisne nesakristu ne ar vienu veco.

110. Risinājums. No četrām monētām var izveidot 6 monētu pārus ar masām a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d.

Tā kā a<b<c<d, tad a+b un a+c ir attiecīgi mazākā un otrā mazākā no tām, bet c+d un b+d ir attiecīgi lielākā un otrā lielākā no tām.

Vispārīgi runājot, jebkura no abām atlikušajām summām a+d un b+c var būt mazāka par otru. Parādīsim, ka mūsu gadījumā, kad izpildās sakarības 2ac=bd un 3a>2b, noteikti b+c<a+d.

Tiešām, mums jāpierāda, ka $b+c<a+\frac{2ac}{b}$ jeb, kas ir tas pats,

$$b^2+bc<ab+2ac\ (*).$$

Atcerēsimies, ka $a > \frac{2}{3}b$. Tāpēc, ja mēs pratīsim pierādīt nevienādību, kas iegūta no (*), aizstājot a ar $\frac{2}{3}b$ (t.i., samazinot (*) labo pusi), tad būs pierādīta arī (*).

Aizstājot (*) a ar $\frac{2}{3}b$, iegūstam

$$b^2 + bc < b \cdot \frac{2}{3}b + 2c \cdot \frac{2b}{3}$$

$$\frac{b^2}{3} < \frac{bc}{3}$$

Tā ir taisnība, jo b<c. Tāpēc (*) pierādīta.

No šejienes iegūstam, ka ir spēkā nevienādību virkne

$$a+b<a+c<b+c<a+d<b+d<c+d$$

Tātad, ja uz katra no svaru kausiem novietos divas monētas, tad noteikti uz leju nosvērsies tas kauss, uz kura atrodas smagākā monēta ar masu d.

Apzīmēsim monētas ar x, y, z, t un izdarām divas svēršanas:

1) salīdzināsim x; y ar z; t
2) salīdzināsim x; z ar y; t

Tieši viena monēta abās svēršanās atradīsies uz kausa, kas nosveras uz leju. Tā arī būs meklējamā smagākā monēta.

111. Risinājums. Uzdevuma apgalvojums seko no vienādībām

$$(2a-3)(2a-1)(2a+1)(2a+3)+16 = (2a-3)(2a+3)(2a-1)(2a+1)+16 =$$
$$= (4a^2-9)(4a^2-1)+16=16a^4-40a^2+25 = (4a^2-5)^2,$$ ievietojot a=50.

112. Atbilde: 10468 un 23579.

Risinājums. Ievērosim, ka 10468x23579=246824972.

No šejienes uzreiz redzams, ka reizinātāju pirmajiem cipariem jābūt 1 un 2 (visos citos gadījumos reizinājuma pirmais cipars ir vismaz 3 un reizinājumam ir vismaz 9 cipari, tāpēc tas ir lielāks par nupat iegūto.

Vienādība $xy = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2}$ pozitīviem x un y pierāda: ja divu skaitļu summa ir konstanta, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Atcerēsimies, ka no diviem piecciparu skaitļiem mazākais ir tas, kuram mazāks pirmais cipars (ja šie cipari ir dažādi, kā tas ir mūsu gadījumā).

Tāpēc iegūstam: tam skaitlim, kuram ir mazāks pirmais cipars, ir mazāks arī otrais cipars (citādi, samainot otros ciparus - no tā abu skaitļu summa nemainās - reizinājums samazinātos), mazāks arī trešais cipars u.t.t. Bez tam skaidrs arī, ka katrā no abiem reizinātājiem cipariem jābūt novietotiem augošā secībā (izņemot nulli, kas nedrīkst būt skaitļa pirmais cipars); pretējā gadījumā, samainot ciparus augošā secībā, mēs samazinām atbilstošo reizinātāju, tātad arī reizinājumu.

Ierakstīsim reizinātāju ciparus tabulā ar izmēriem 2x5 rūtiņas, mazāko reizinātāju rakstot pirmajā rindiņā. No augstāk minētā seko, ka sekojošu ciparu vietas noteiktas viennozīmīgi:

1	0			
2				9

Ja otrā reizinātāja otrais cipars nav 3, tad reizinājums ir lielāks par 10300x24500=252350000, kas ir vairāk par sākumā iegūto rezultātu. Tāpēc iegūstam ciparu sadalījumu

1	0			
2	3			9

Skaidrs, ka 4 ir trešajā kolonnā; saskaņā ar iepriekšējo tam kā mazākajam simtu ciparam jābūt mazākajā reizinātājā. Iegūstam

1	0	4		
2	3			9

Atlikušos ciparus var ierakstīt tikai piecos veidos tā, lai izpildītos iepriekš minētie nosacījumi. Viens no tiem minēts risinājuma sākumā. Pārējie četri ir:

1	0	4	5	6
2	3	7	8	9

$10456 \cdot 23789 = 248737784$

1	0	4	5	7
2	3	6	8	9

$10457 \cdot 23689 = 247715873$

1	0	4	5	8
2	3	6	7	9

$10458 \cdot 23679 = 247634982$

1	0	4	6	7
2	3	5	8	9

$10467 \cdot 23589 = 246906063$

Tātad tiešām mūsu sākumā uzrādītais piemērs dod prasīto minimumu.

113. Atbilde: jā, to var izdarīt, ripinot kubu tāda taisnstūra iekšpusē, kas sastāv no 10 rūtiņām, katra no kurām vienāda ar kuba skaldni.

Risinājums. Tabulā redzama viena no iespējām, kurā ar numuriem apzīmētas rūtiņas, kurās kubs nonāk pēc kārtējās pārvelšanas. Velšana sākas no rūtiņas ar numuru 12 un arī beidzas šajā rūtiņā.

11	10	3; 9	4	5
12	1	2; 8	7	6

114. Risinājums. Ievērosim, ka

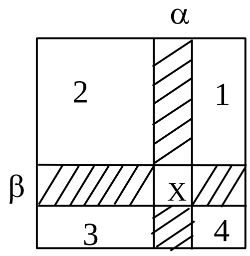
$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 1999! \cdot 2000! = 1! \cdot (1! \cdot 2) \cdot 3! \cdot (3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot 1999! \cdot (1999! \cdot 2000) =$$
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 1999!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2000) = 1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (1999!)^{2\square} \cdot 2^{1000} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000) =$$
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 1999! \cdot 2^{500})^2 \cdot 1000!$$

Tātad varam izsvītrot 1000!, un palikušie reizinātāji būs meklētie.

115. Risinājums. Viegli pārbaudīt, ka pietiek ar 36 gājieniem, ja mēs izmantojam visus iespējamos pārus “rindiņa - kolonna “(tad katra rūtiņa maina krāsu 11 reizes). Pierādīsim, ka ar mazāk gājieniem nepietiek.

Īsuma pēc ar vārdiem “gājiens x” apzīmēsim krāsu maiņu rindiņā un kolonnā, kam ir kopīga rūtiņa x. Skaidrs, ka katru gājienu vērts izdarīt vai nu 0, vai 1 reizi, jo divreiz izdarīts viens un tas pats gājiens “anulējas”. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem **katrā rindiņas un kolonnas veidotā pārī jābūt izdarītam nepāra skaitam gājienu, lai rezultātā mainītos krāsa šīs rindiņas un kolonas kopējā rūtiņā.**

Pieņemsim, ka gājiens x nav izdarīts (skat. 74.zīm.)



74. zīm.

Aplūkosim iesvītroto apgabalu; katra no tā 10 rūtiņām mainījusi krāsu nepāra skaitu reižu, tāpēc visas šīs 10 rūtiņas kopā mainījušas krāsu pāra skaitu reižu. Gājieni, kas izdarīti apgabalos 1, 2, 3, 4, katrs veido divas maiņas iesvītrotajās rūtiņās, tāpēc tie kopā izsauc tur pāra skaitu krāsu maiņu.

Ja kolonnā α izdarīti a gājieni un rindiņā β - b gājieni, tad tie kopā iesvītrotajā apgabalā radījuši $5 \cdot a+5 \cdot b=5 \cdot (a+b)$ krāsu maiņas; tāpēc a+b ir pāra skaitlis. Bet tā ir pretruna ar pasvītroto apgalvojumu.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un katrā rūtiņā jābūt izdarītam gājienam. Tāpēc gājienu ir vismaz 36.

116. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Trijstūriem kopā būtu $665 \cdot 3=1995$ stūri. Katrs 2000 - stūra stūris vienlaikus būtu arī vai nu sākotnējā kvadrāta stūris, vai vismaz viena trijstūra stūris, bet 2000>1995+4.

Tātad trijstūru stūru ir "pārāk maz", lai "apkalpotu" visus 2000 - stūra stūrus.

Olimpiāde "Drusti '99" (117. - 128.)

117. 1. risinājums. Starpību m^2-n^2 sadala reizinātājos (m-n) un (m+n).

Pēc dotā starpība dalās ar 2, tātad viens no reizinātājiem dalās ar 2.

a) pieņemsim, ka (m-n) dalās ar 2; tad vai nu m un n abi ir pāra skaitļi, vai arī m un n abi ir nepāra skaitļi.

Ja m un n ir pāra skaitļi, tad summa m+n ir pāra skaitlis.

Ja m un n ir nepāra skaitļi, tad summa m+n ir pāra skaitlis.

Tātad starpība m^2-n^2 dalās ar 4, jo katrs no reizinātājiem dalās ar 2.

b) pieņemsim, ka (m+n) dalās ar 2; tad vai nu m un n abi ir pāra skaitļi, vai arī m un n abi ir nepāra skaitļi. Abos gadījumos starpība (m-n) ir pāra skaitlis.

Tātad starpība m^2-n^2 dalās ar 4, jo katrs no reizinātājiem dalās ar 2.

2. risinājums. Izsakām $(m^2-n^2)=(m-n)\cdot(m+n)=(m-n)\cdot((m-n)+2n)$.

Ja (m-n) nedalās ar 2, tad (m-n) ir nepāra skaitlis. Tad arī (m+n)+2n ir nepāra skaitlis. Tāpēc m^2-n^2 kā divu nepāra skaitļu reizinājums nedalās ar 2 - pretruna.

Tātad starpība (m-n) ir pāra skaitlis; tad, pieskaitot (m-n) pāra skaitli 2n, arī iegūstam pāra skaitli.

Tātad starpība m^2-n^2 dalās ar 4 kā divu pāra skaitļu reizinājums.

118. Risinājums.

a) piemēram x=1; y=999 (1+999+999=1999)

b) Doto vienādību pārveido:

$$x+y+xy=1999;\ x+y+xy+1=1999+1;\ (x+1)+(y+xy)=2000;$$
$$(x+1)+y(x+1)=2000=16\cdot 125;\ (x+1)\cdot(y+1)=2^4\cdot 5^3$$

Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad $x+1\neq 1$ un $y+1\neq 1$.

Aplūko visas iespējas, kā pirmreizinātājus no reizinājuma $2^4 5^3$ sadalīt starp x+1 un y+1, pie tam x+1 satur 5 ar mazāku kāpinātāju nekā y+1:

$\begin{cases} x+1=2 \\ y+1=2^3\cdot 5^3 \end{cases}$ tad x=1 un y+1=1000; y=999

$\begin{cases} x+1=2^2 \\ y+1=2^2\cdot 5^3 \end{cases}$ tad x=3 un y+1=500; y=499

$\begin{cases} x+1=2^3 \\ y+1=2\cdot 5^3 \end{cases}$ tad x=7 un y+1=250; y=249

$\begin{cases} x+1=2^4 \\ y+1=5^3 \end{cases}$ tad x=15 un y+1=125; y=124

$\begin{cases} x+1=5 \\ y+1=2^4\cdot 5^2 \end{cases}$ tad x=4 un y+1=400; y=399

$\begin{cases} x+1=2\cdot 5 \\ y+1=2^3\cdot 5^2 \end{cases}$ tad x=9 un y+1=200; y=199

$\begin{cases} x+1=2^2\cdot 5 \\ y+1=2^2\cdot 5^2 \end{cases}$ tad x=19 un y+1=100; y=99

$\begin{cases} x+1=2^3\cdot 5 \\ y+1=2\cdot 5^2 \end{cases}$ tad x=39 un y=49

$\begin{cases} x+1=2^4\cdot 5 \\ y+1=5^2 \end{cases}$ tad x+1=80; x=79 un y=24 .

Citi atrisinājumi ir "simetriski" atrastajiem (x un y mainās vietām).

Tātad meklētie pāri ir: (1 un 999); (999 un 1);
(3 un 499); (499 un 3);
(7 un 249); (249 un 7);
(15 un 124); (124 un 15);
(4 un 399); (399 un 4);
(9 un 199); (199 un 9);
(19 un 99); (99 un 19);
(39 un 49); (49 un 39);
(24 un 79); (79 un 24).

119. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Apskatot šķiras pēc kārtas no labās puses, redzam, ka nevienā vietā nerodas pārnesums. Tiešām, tas nerodas pēdējā šķirā, jo divu vienu ciparu summa nevar būt 19, 29 utt. Līdzīgi tas nerodas priekšpēdējā šķirā utt. Ciparu summu 9 var iegūt, saskaitot šādus ciparu pārus:

(0 un 9); (1 un 8); (2 un 7); (3 un 6); (4 un 5);
(9 un 0); (8 un 1); (7 un 2); (6un 3); (5 un 4).

Tātad sākotnējā skaitlī uz katru vieninieku jābūt astotniekam, uz katru divnieku - septītniekam u.t.t. Tātad tur jābūt pāra skaitam ciparu. Iegūta pretruna.

120. Risinājums. Ievērojam, ka

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2(a-b) =$$
$$= ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b) = ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b) =$$
$$= (a-b)(c^2+ab-ac-bc) = (a-b)(c(c-a)-b(c-a)) = (a-b)(c-b)(c-a).$$

Ja reizinājums vienāds ar nulli, tad vismaz viens reizinātājs vienāds ar 0. No tā seko uzdevuma atrisinājums.

121. Risinājums. Pārveidojam $x^2+3y^2 = x^2+2y^2+y^2 = x^2+2y\cdot y+y^2$.

Tā kā $x\geq y>0$, tad $x^2+2\cdot y\cdot y+y^2 \leq x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=(x+y)^2$

Tā kā $x+y\leq 1$, tad $(x+y)^2\leq 1$, tāpēc $x^2+3y^2\leq 1$.

122. Atbilde: 345.

Risinājums. Naturālo skaitļu pierakstā mēs izmantosim ciparus 1; 2; 3; 4; 5

a) viencipara skaitļu ir 5

b) divciparu skaitļu ir 25 (tā kā tiek izmantoti pieci cipari, tad ar 1 sākas pieci skaitļi, ar 2 sākas pieci skaitļi u.t.t., ar 5 - pieci skaitļi; 5x5=25).

c) trīsciparu skaitļu ir 125:

Ja 1 - pirmais; 1 - otrais; 1, 2, 3, 4, 5 - trešais cipars, tad var uzrakstīt 5 skaitļus (111, 112, 113, 114, 115).

Ja 1 - pirmais; 2 - otrais; 1, 2, 3, 4, 5 - trešais cipars, tad var uzrakstīt 5 skaitļus (121, 122, 123, 124, 125).

u.t.t.

Ja 1 - pirmais; 5 - otrais; 1, 2, 3, 4, 5 - trešais cipars, tad var uzrakstīt 5 skaitļus (151, 152, 153, 154, 155).

Tātad, ja 1 ir pirmais cipars, var uzrakstīt 5x5=25 skaitļus.

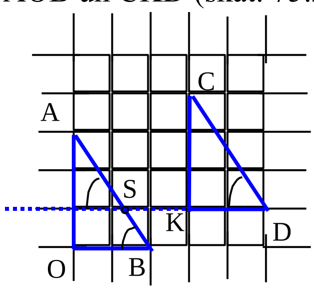
Līdzīgi, ja trīsciparu skaitlis sākas ar 2, var uzrakstīt 5x5=25 skaitļus, ja tas sākas ar 3 - 5x5=25 skaitļus u.t.t., ja tas sākas ar 5, var uzrakstīt 5x5=25 skaitļus.

Tātad var uzrakstīt 5x25=125 trīsciparu skaitļus.

Tā kā pirmajā simtā ir 30 skaitļi, bet trīsciparu skaitļu ir 125, tad meklētais skaitlis ir trīsciparu. Pēc uzdevuma nosacījumiem jāatrod 100. vietā esošais skaitlis. Pirmajā simtā ir 30 skaitļi, tātad no trīsciparu skaitļiem jāatrod septiņdesmito. Ievērojam, ka 70=25+25+20. No c) seko, ka ir pa 25 skaitļiem, kas sākas ar 1(2). Tāpēc meklētais skaitlis ir divdesmitais no tiem, kas sākas ar 3. Tā kā $20=5\cdot 4$, tad meklējamais skaitlis ir piektais skaitlis ceturtajā to skaitļu pieciniekā, kuri sākas ar 3. Tāpēc tā otrais cipars ir 4, trešais - 5; tātad tas ir **345.**

123. Risinājums.

1) Uzzīmē taisnleņķa trijstūrus AOB un CKD (skat. 75.zīm.).



75. zīm.

$\angle O=\angle K=90°$ (kvadrātisks režģis), OB=KD (2 vienības) - katetes un AO=CK (3 vienības) - katetes.

Tātad trijstūri AOB un CKD ir vienādi (pēc taisnleņķa trijstūra vienādības pazīmes kk.).

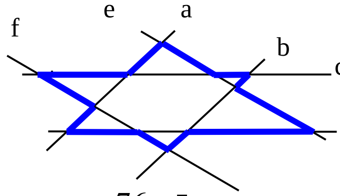
Tā kā trijstūri ir vienādi, tad to atbilstošie elementi ir vienādi, t.i. $\angle B=\angle D$.

2) Novelk taisni KD paralēli OB. Tā kā KD||OB, tad $\angle S=\angle B$ kā kāpšļu leņķi.

3) $\angle B=\angle D$ un $\angle B=\angle S$, tātad $\angle S=\angle D$.

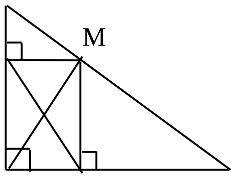
Ja $\angle S=\angle D$ kā kāpšļu leņķi pie taisnēm AB un CD, ko krusto taisne KD, tad CD||AB pēc paralēlo taišņu pazīmes.

124. Risinājums.
Skat., piem., 76.zīm.



76. zīm.

125. Atbilde: augstuma pamatā.
Risinājums. Četrstūris EMFC - taisnstūris, pēc taisnstūra diagonāļu īpašības EF=CM. Pēc teorēmas par perpendikulu pret taisni CM ir visīsākais, ja CM⊥AB. Tātad punkts M jāizvēlas kā tā perpendikula pamats, kas no C vilkts pret AB (skat. 77.zīm.).

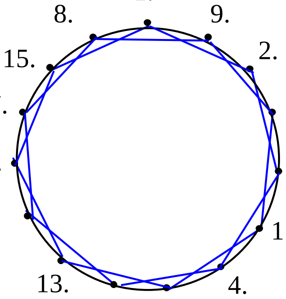


77. zīm.

126. Atbilde: jā, var.
Risinājums. Pirmajā rindā vispirms izraksta nepāra skaitļus augošā secībā, pēc tam pāra skaitļus augošā secībā. Otrajā rindā izraksta naturālos skaitļus sākot ar 9 dilstošā secībā, pēc tam naturālos skaitļus no 17 līdz 10 arī dilstošā secībā.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2	4	6	8	10	12	14	16
9	8	7	6	5	4	3	2	1	17	16	15	14	13	12	11	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

127. Atbilde: nē, nevar.
Risinājums. Skaitļi, kuri tiek sareizināti, 78.zīm. savienoti ar hordu. Viegli redzēt, ka tiem var piešķirt kārtas numurus “pirmais”, “otrais”, ..., “piecpadsmitais” tā, ka pirmais reizināts ar otro, otrais - ar trešo, ..., četrpadsmitais - ar piecpadsmito, piecpadsmitais - ar pirmo.



78. zīm.

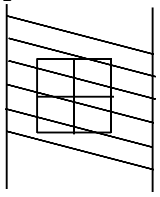
Izvēlamies šos kārtas numurus tā, lai nulle būtu pirmais skaitlis. Tad otrajam un trešajam, trešajam un ceturtajam, ceturtajam un piektajam, . . . , trīspadsmitajam un četrpadsmitajam skaitlim jābūt ar vienādām zīmēm: vai nu visiem pozitīviem, vai visiem negatīviem (jo dažādzīmju skaitļu reizinājums ir negatīvs). Tātad jābūt 13 skaitļiem ar vienādu zīmi. Bet tas nav iespējams, jo ir tikai 7 pozitīvi un 7 negatīvi skaitļi.

128. **Risinājums.** Doto kvadrātu ar izmēriem 100x100 rūtiņas sadala 2500 kvadrātiņos ar izmēriem 2x2 rūtiņas. Novelkot horizontālās un vertikālās taisnes, katrs kvadrātiņš ar izmēriem 2x2 rūtiņas var:

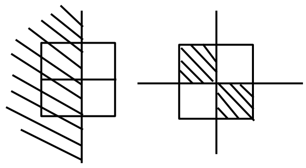
1) pilnīgi atrasties iekrāsotajā daļā (skat. 79.zīm.);

2) daļēji atrasties iekrāsotajā daļā (skat. 80.zīm.);

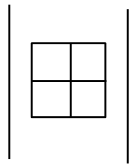
3) pilnīgi atrasties neiekrāsotajā daļā (skat. 81.zīm.).



79. zīm.



80. zīm.



81. zīm.

Apskatot 1), 2) un 3) gadījumus, redzam, ka melnā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits katrā 2x2 rūtiņu kvadrātiņā noteikti ir pāra skaitlis.

Tā kā tas ir pāra skaitlis katrā no 2500 kvadrātiņiem, tad tas ir pāra skaitlis arī visos tajos kopā, t.i., lielajā 100x100 rūtiņu kvadrātā.

Atklātā olimpiāde (129. - 153.)

129. **Atbilde:** 399.

Risinājums. No 1 līdz 9 ir viens tāds skaitlis, kuram ciparu summa dalās ar 5; no $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$ (n=1; 2; 3;…) ciparu summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi (piem. 10; 11; 12; . . . ;19 ciparu summas ir 1; 2; 3; . . .; 10), tāpēc katrā šādā desmitniekā ir 2 prasītā tipa skaitļi. Tā kā skaitlis 2000 neder, jo tā ciparu summa nedalās ar 5, tad ir pilni 199 desmiti, katrā no kuriem diviem skaitļiem ciparu summa dalās ar 5.

Tātad pavisam mūs interesējošo skaitļu ir $2 \cdot 199 + 1 = 399$.

130. **Atbilde:**

$$\begin{array}{r} 3\,8\,9\,1 \\ 3\,8\,9 \\ +\quad 3\,8 \\ 3 \\ \hline 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

Risinājums. Piemēra pareizību pārbauda tieši.

Parādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Acīmredzot $A \le 4$.

Ja A=4 un $U \ge 6$, tad summa sāktos ar 5. Ja A =4 un $U \le 5$, tad summā simtu cipars nevar būt 3. Tāpēc A=3.Tā kā I + D + U + 3 ≤ 9 + 8 + 7 +3 = 27, tad uz desmitu šķiru pāriet pārnesums ≤ 2. Tā kā D + U + 3 + 2 ≤ 9 + 8 + 3 + 2 = 22, tad arī uz simtu šķiru pāriet pārnesums ≤ 2. Ciparam U kopā ar šo pārnesumu un ciparu 3 jārada pārnesums uz tūkstošu šķiru; tāpēc U=9 vai U=8.

Ja būtu U=9:

$$\begin{array}{r} 3\,9\,D\,I \\ 3\,9\,D \\ +\quad 3\,9 \\ 3 \\ \hline 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

tad piemērā vieninieku vienu šķirā var iegūt tikai, ja I+D+9+3=21; tad uz desmitu šķiru pāriet 2, un jābūt D=8, tāpēc I=1.

Bet tad nesanāk pareizs summas simtu cipars. Tāpēc U=8:

$$\begin{array}{r} 3\,8\,D\,I \\ 3\,8\,D \\ +\quad 3\,8 \\ 3 \\ \hline 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

iegūstam piemēru, no kura redzams, ka I+D+8+3=21, 2+D+8+3=22, tātad D=9. Tāpēc I=1.

Pārbaude parāda, ka atrisinājums der.

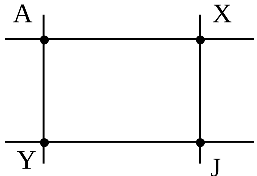
131. Atbilde: pirmdien pirms brokastīm mežā bija 41 votivapa, 28 pukkas un 60 šillišallas.
Risinājums. Aprēķinus atspoguļo sekojoša tabula, ko iegūst rindu aiz rindas.

Diena	Pirms kuras ēdienreizes	Votivapas	Pukkas	Šillišallas
	Vakariņām		1	1
Ceturtdiena	Pusdienām	1	1	1
	Brokastīm	1	1	2
	Vakariņām	1	3	2
Trešdiena	Pusdienām	4	3	2
	Brokastīm	4	3	6
	Vakariņām	4	9	6
Otrdiena	Pusdienām	13	9	6
	Brokastīm	13	9	19
	Vakariņām	13	28	19
Pirmdiena	Pusdienām	41	28	19
	Brokastīm	41	28	60

132. Risinājums. Apzīmējam Andra un Jāņa augumus attiecīgi ar A un J.

Ja Jānis un Andris ir vienā rindā vai vienā kolonnā, tad pēc uzdevuma nosacījumiem neviens no viņiem nav īsāks (garāks) par otru. Tātad abi zēni ir viena auguma.

Ja Jānis un Andris nav ne vienā rindā, ne vienā kolonnā, tad salīdzinām viņus abus ar X un Y (skat. 82.zīm.).



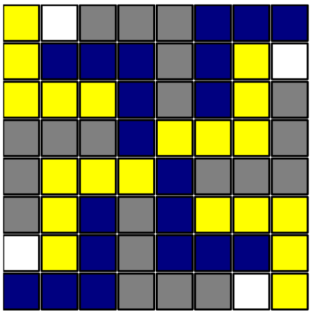
82. zīm.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $A \geq X \geq J$ (tātad $\mathbf{A \geq J}$) un $A \leq Y \leq J$ (tātad **A≤J**).

Lai abas nevienādības izpildītos vienlaicīgi, jābūt A=J, tātad Andris un Jānis ir vienāda auguma.

133. Risinājums.

Var iegūt 12 daļas, skat. 83.zīm.; 4 rūtiņas paliek " brīvas". Tā kā 13·5=65>64, tad 13 daļām kvadrātā nepietiek vietas.



83. zīm.

134. Atbilde: 101 cipars.

Risinājums. Skaitļos no 1 līdz 9 ir pieci nepāra cipari; tāpēc pa pieciem nepāra **vienu cipariem** ir katrā desmitā no $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$. Tā kā pirmajā simtā ir 10 desmiti, tad viencipara un divciparu skaitļos kopā ir 50 nepāra vienu cipari; bez tam tajos ir $5 \cdot 10 = 50$ nepāra **desmitu cipari**. Tā kā skaitlī 100 arī ir viens nepāra cipars, tad iegūstam 50+50+1=101.

135. Risinājums. Vērts pētīt tikai hipotētiskās summas 1; 2; 3; . . . .

a) summa 1 ir tikai skaitļiem 10 . . . 0; tie nedalās ar 7, tātad **summa nevar būt 1;**

b) 1001 dalās ar 7; tātad **summa var būt 2;**

c) 21 dalās ar 7; tātad **summa var būt 3;**

d) skaitļi 1001 1001 ... 1001 dalās ar 7, tātad **summa var būt jebkurš naturāls pāra skaitlis**;

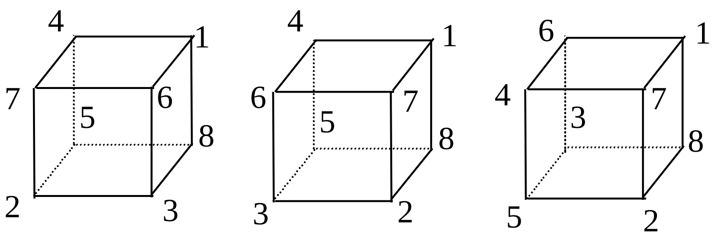
e) skaitļi 21 1001 1001 ... 1001 dalās ar 7, tātad **summa var būt jebkurš par 1 lielāks naturāls nepāra skaitlis.**

Tātad iespējamās vērtības ir visi naturālie skaitļi, kas lielāki par 1.

136. Risinājums. Pieņemsim pretējo un izskaitīsim, cik kopā ir deputātu piedalīšanos komisiju darbā.

Skaitot “pa deputātiem”, iegūstam 100 nepāra skaitļu summu, tātad pāra skaitli. Skaitot pa “komisijām”, iegūstam 17 nepāra skaitļu summu, tātad nepāra skaitli. Tā ir pretruna, tātad pieņēmums ir aplams.

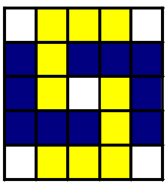
137. Risinājums. Skat. 84.zīm.

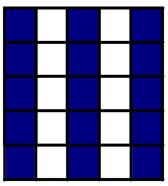


84. zīm.

138. Atbilde: 4 daļas.

Risinājums. a) skat. 85. zīm.





85. zīm. 86. zīm.

b) Ja varētu iegūt 5 tādas daļas, tad tādās būtu jāsagriež viss kvadrāts, jo tajā ir 25 rūtiņas un 25=5·5. Daļas izvietojot 86. zīm., var redzēt, ka balto un pelēko rūtiņu daudzumi katrā daļā atšķirtos viens no otra par 3 (skat. 86.zīm.). Tāpēc visā kvadrātā kopā tiem jāatšķiras vienam no otra par 3 daudzkārtni. Bet tie atšķiras par 5.

Tātad 5 prasītā veida daļas iegūt nevar.

139. Risinājums.

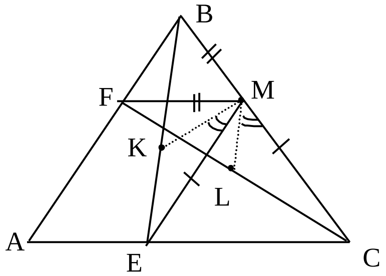
a) Tā kā ab=cd, tad 2ab=2cd. Izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a^2-2ab+b^2)+(c^2+2cd+d^2)=(a-b)^2+(c+d)^2 .$$

b) Ja a=b=c=d=1, tad $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ nav izsakāms kā divu **naturālu** skaitļu kvadrātu summa.

140. Risinājums. Meklējamais skaitlis ir formā $a\cdot\underbrace{111...1}_{n}$, kur a - cipars. Tas būs jo mazāks, jo mazāks būs tā ciparu skaits. Tā kā 49=7·7, bet a var dalīties ar augstākais vienu septītnieku, tad $\underbrace{111...1}_{n}$ jādalās ar 7. Skaitļi 1; 11; 111; 1111; 11111 nedalās ar 7, bet 111 111 dalās, tātad mazākais meklējamā skaitļa ciparu skaits ir 6 un tas ir 777 777.

141. Risinājums. Tā kā ΔBFM un ΔMEC visi leņķi ir 60° (kāpšļu leņķu īpašības), tad tie ir vienādmalu; tāpēc BM=FM un ME=MC (skat. 87.zīm.)



87. zīm.

Bez tam $\angle BME=180°-60°=120°$ un $\angle FMC=180°-60°=120°$, tātad $\angle BME = \angle FMC$.

Tāpēc $\Delta BME=\Delta FMC$; tāpēc MK=ML kā atbilstošās mediānas vienādos trijstūros.

Ievērosim, ka $\angle KME=\angle LMC$ (leņķi vienādos trijstūros starp atbilstošām mediānām un atbilstošām malām); tāpēc

$$\angle KML = \angle KME+\angle EML = \angle EML+\angle LMC = \angle EMC = 60°.$$

Tātad ΔKML ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu.

142. Atbilde: a) jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums.

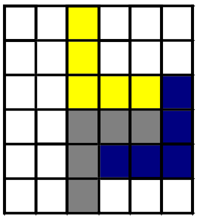
a) 1+4=5, 2+5=7, 3+8=11, 9+10=19, 11+12=23, 6+7=13.

b) Mēs principā varētu iegūt tikai pirmskaitļus, kas mazāki par 100: tie ir 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97. Tiešām, ja $x\le 50$ un $y\le 50$, tad $x+y\le 100$

To ir tikai 24, bet mums nepieciešamas 25 dažādas summas.

143. Atbilde: 3 figūras**.**

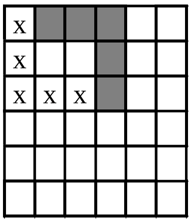
Risinājums. To, ka pietiek ar 3 figūru izgriešanu, skat. 88.zīm..

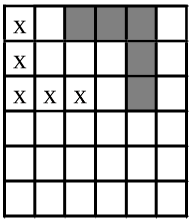


88. zīm.

Parādīsim, ka ar 2 figūru izgriešanu nepietiek. Lai "sabojātu" figūras 1; 2; 3; 4 (89.zīm.), pastāv tikai viena iespēja: ar katru no divām izgriežamajām figūrām "sabojāt" divas blakus stāvošas no šīm četrām.

1	1	1	4	4	4
1					4
1					4
2					3
2					3
2	2	2	3	3	3





89. zīm. 90. zīm. 91. zīm.

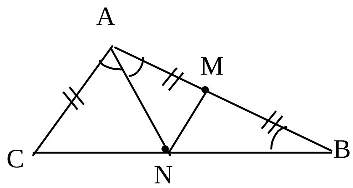
Aplūkosim izgriežamo figūru, kas sabojā 1 un 4. Tai iespējami tikai divi principiāli dažādi stāvokļi (skat. 90.zīm. un 91.zīm.); abos redzams, ka var izgriezt vēl vienu figūru kvadrāta augšējā pusē, kura tātad nešķeļas ar to izgriezto figūru, kas sabojā 2 un 3.

144. Risinājums. Tā kā, ievietojot dotajā vienādojumā 1, iegūst pareizu vienādību $a+b+c=0$, tad viena no saknēm ir 1 ($x_1=1$).

Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ un $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, tātad $x_2=\frac{c}{a}$ (vai arī $x_2 = -\frac{b}{a} - 1$).

145. Atbilde: a) jā, **b)** 90°

Risinājums. a) Apskatīsim taisnleņķa trijstūri ABC, kur ∠C=90° un ∠A=60°. Tad ∠B=30° un katete pret 30° lielu leņķi ir puse no hipotenūzas.



92. zīm.

b) Novelkam ∠A bisektrisi AN (skat. 92.zīm.). Tad trijstūris ANB ir vienādsānu (pēc vienādsānu trijstūra īpašības). Ja M ir AB viduspunkts, tad ∠AMN=90°. Bet ΔAMN=ΔACN pēc trijstūru vienādības pazīmes mlm (mala AN ir kopīga), tāpēc arī ∠ACB=90°.

146. Atbilde: a) nē; **b)** jā.

Risinājums. a) piemēram, var būt uzrakstīti skaitļi $51;\underbrace{1;1;1;...;1}_{49 \text{ reizes}}$.

b) Sadalīsim riņķa līniju 100 vienādās daļās un dažus dalījuma punktus nokrāsosim sarkanus tā, lai lociņu skaiti starp blakus esošajiem sarkanajiem punktiem atbilstu uz kartītēm uzrakstītajiem skaitļiem. Mums ir 51 sarkans punkts, kas izvietots uz 50 diametriem. Tie sarkanie punkti, kas atrodas uz viena diametra, "ierobežo" prasīto kartīšu komplektu.

147. Risinājums. Aplūkosim hordas, kas savelk n mazos lociņus, n=1; 2; . . . ; 1000.

Pagriezīsim riņķa līniju ap centru par n mazajiem lociņiem. Ja x baltie punkti pāriet par baltiem, tad 100-x baltie punkti pāriet par sarkaniem, tāpēc 100-(100-x)=x sarkanie punkti pāriet par sarkaniem.

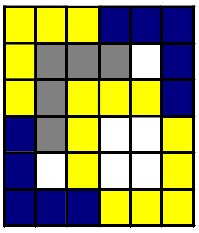
Tātad aplūkojot hordas, kas savelk n mazos lociņus, ir x hordas, kam abi gali ir balti, un x hordas, kam abi gali sarkani; tāpēc to kopgarumi ir vienādi.

Tā kā tas ir spēkā katram n, tad uzdevumā prasītais pierādīts.

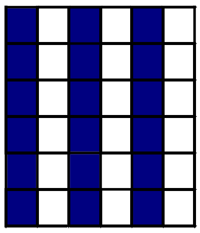
148. Atbilde: 6 daļas.

Risinājums.

a) kā iegūt 6 daļas , redzam 93. zīm.



93. zīm.



94. zīm.

b) Tā kā $8 \cdot 5 = 40 > 36$, tad 8 vai vairāk prasītā veida daļas iegūt nevar.

Pieņemsim, ka var iegūt 7 tādas daļas.

Apskatām 94. zīm. Tā kā 36 - 5·7 = 1, tad tieši viena rūtiņa nepieder šīm 7 daļām. Tātad apskatāmajās daļās melno un balto rūtiņu daudzumi kopā atšķirtos par 1. Bet pārbaudot redzam, ka katrā šajā daļā šie daudzumi atšķiras viens no otra par 3 (skat. 94.zīm.), tāpēc arī kopā tiem jāatšķiras vienam no otra par 3 daudzkārtni.

Tāpēc iegūta pretruna, un 7 figūras izgriezt nevar.

149. Risinājums. No 1. vienādojuma atņemot 2. vienādojumu, iegūstam

$$x^2+y-x-y^2=0$$
$$(x-y)\cdot(x+y)=x-y$$

a) ja x-y=0, tad x=y un no pirmā vienādojuma $x^2+x-1=0$, no kurienes $x=y=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) ja $x \neq y$, tad x+y=1, y=1-x un no pirmā vienādojuma iegūstam $x^2=x$, no kurienes iegūstam atrisinājumus (1; 0) un (0;1).

Var arī uzreiz lietot ievietošanas metodi. Pakāpeniski iegūstam

$$y=1-x^2;\ x+(1-x^2)^2=1$$
$$(1-x^2)^2=1-x;\ ((1-x)\cdot(1+x))^2=1-x$$
$$(1-x)^2\cdot(1+x)^2=1-x$$

No šejienes uzreiz iegūstam vienu atrisinājumu (1; 0).

Ja $x \neq 1$, tad dalām abas vienādības puses ar (x-1) un iegūstam

$$(1-x)\cdot(1+x)^2=1;\ (1-x)\cdot(1+2x+x^2)=1$$
$$1+2x+x^2-x-2x^2-x^3=1;\ x^3+x^2-x=0$$
$$x(x^2+x-1)=0,$$

no kurienes iegūstam atrisinājumu (0; 1) un tālāk $x=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$y=1-x^2=1-(-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2})^2=1-(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5})=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(Abos risinājumos jāizseko pārveidojumu atgriezeniskumam vai jāveic pārbaude.)

150. Atbilde: a) nē; **b)** jā.

Risinājums.

a) Ievērojam, ka $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<2$. Tātad pat četru iespējamo lielāko saskaitāmo summa ir mazāka par 2.

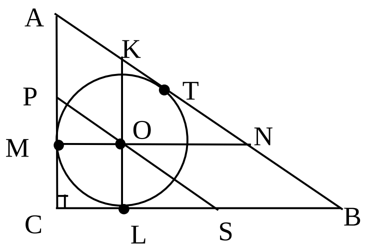
b) $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2}=$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{3^2+4^2}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{400}+\frac{1}{225}.$$

151. Risinājums (skat. 95.zīm.).

Tā kā BNOS ir paralelograms ar vienādiem augstumiem (ievilktās riņķa līnijas rādiusi), tad tas ir rombs. Tāpēc BN=BS. Tā kā BT=BL (pieskares), tad TN=LS.

Līdzīgi pierāda, ka TK=MP. Saskaitot šīs vienādības, iegūst vajadzīgo.



95. zīm.

152. Atbilde: a) jā; **b)** nē.

Risinājums. a) Apzīmējam reizinātos skaitļus ar x un y. Tā kā 1+2+. . . +10=55, iegūstam $x\cdot y=55-(x+y)$. Izdarot identiskus pārveidojumus:

xy+x+y =55; x(1+y)+y=55; x(1+y)+y+1-1=55; (1+y)(1+x)-1=55

(1+x)·(1+y)=56. Varam ņemt x=6, y=7.

b) līdzīgā ceļā iegūstam x·y=120-(x+y) un (1+x)(1+y)=121. Tas ir iespējams tikai, ja 1+x=1, 1+y=121 vai 1+x=121, 1+y=1 (neder, jo x vai y neiznāk vajadzīgās robežās) vai arī 1+x=1+y=11 (neder, jo jābūt x≠y).

153. Risinājums. Apskatām lampu, no kuras iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu; pieņemsim, ka tā ir A ar x baltām vītnēm, un šīs baltās vītnes iet uz lampām $L_1, L_2, ..., L_x$.

Pieņemsim, ka ir vēl kāda cita lampa B. Ar A tā ir savienota ar sarkanu vītni. Ja B ar visām $L_1, L_2, . . . , L_x$ būtu savienota ar sarkanām vītnēm, tad no tās izietu ≥ x+1 sarkana vītne (arī uz A!), un tā ir pretruna ar A izvēli.

Tātad B ar kādu L_i savienota ar baltu vītni. Tāpēc no A uz jebkuru citu lampu var nokļūt, rāpojot pa augstākais 2 baltām vītnēm.

Tāpēc no jebkuras lampas C uz jebkuru lampu D var nokļūt, rāpojot "caur lampu A". Šim nolūkam jārāpo pa augstākais 4 (baltām) vītnēm, tātad pa ceļam jāapmeklē augstākais 3 citas lampas.

LITERATŪRA

Daži uzdevumi vai to idejas aizgūtas no citiem autoriem:

Krievijas matemātikas olimpiāde:	14., 17., 20.
Sorosa olimpiāde:	30., 45., 50., 83.
Maskavas matemātikas olimpiāde:	61.
Olimpiāde "Baltijas Ceļš":	82.
Slovēnijas matemātikas olimpiāde:	97.
Olimpiāde "Pilsētu Turnīrs" :	98.
Skotijas matemātikas olimpiāde:	104., 110.
Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde:	128.
Bulgārijas matemātikas olimpiāde:	131.
Ungārijas matemātikas olimpiāde:	151.
A. Liu:	72.
V. Prasolovs:	102., 113., 147.
Dž. Berzsenji:	137., 142.