Andžāns A., France I., Ramāna L. Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm 1993./94. mācību gadā. Rīga: Latvijas Universitāte, 2001. - 65 lpp.

Šajā izstrādnē apkopoti 1993./94. mācību gadā notikušo Latvijas mēroga matemātikas sacensību uzdevumi un to atrisinājumi 5.-8. klašu skolēniem. Vairāki grūtākie uzdevumi piemēroti arī darbam ar vecāko klašu skolēniem.

Iesakām lasītājam vispirms censties atrisināt uzdevumu pašam. Tomēr vērts iepazīties arī ar te sniegtajiem atrisinājumiem - gan tāpēc, ka tie var saturēt jaunas, jums agrāk nezināmas idejas, gan tāpēc, ka, lasot tos, var atklāties nepilnības jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos.

Izstrādni izdošanai sagatavojusi Lāsma Strazdiņa.

ISBN 9984 - 661 - 81 - 4

Reģ. apl. No.2 - 0266.
Iespiests

Saturs

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE (1.-20.)

5.klase (1.-5.)

1. No divām vienādām figūrām nogrieza pa vienādam gabalam. Vai var gadīties, ka pārpalikumi nav vienādi?

2. Vai desmit pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa var būt
a) 1000; b) 111 111, c) 1045?

3. Atrast tādus 4 skaitļus, ka to starpības pa divi (no lielākā skaitļa atņemot mazāko) ir 2; 3; 4**;** 5; 6; 9. Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

4. Vai var pa apli uzrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 1000 (katru vienu reizi) tādā kārtībā, ka no katriem pieciem pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem vismaz divi dalās ar 3?

5. Kvadrāts sastāv no 4x4 rūtiņām. Rūtiņā ierakstīti skaitļi (sk. 1.zīm.). Ar vienu gājienu drīkst pieskaitīt pa vieniniekam divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala.
Vai var panākt lai visās rūtiņās skaitļi kļūtu vienādi?

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

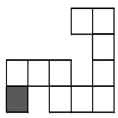
1.zīm.

6.klase (6.-10.)

6. Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 1000 aprēķināja tā ciparu reizinājumu. Cik reizes ieguva nulli?

7. Taisnstūris sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no tām ierakstīts skaitlis (ne noteikti vesels). Vai var gadīties, ka katrā kolonnā skaitļu reizinājums ir 3, bet katrā rindiņā - 7?

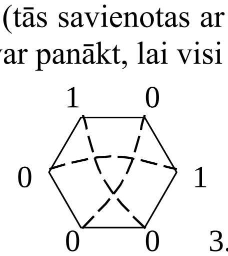
8. Kubam augšējā un apakšējā skaldne nokrāsotas ar nežūstošu melnu krāsu. Sākumā kubs atrodas uz melnās rūtiņas (sk. 2.zīm.). To ripina pa zīmējumā parādīto ceļu. Kuras rūtiņas vēl nokrāsosies melnas?



2.zīm.

9. Ap apaļu galdu sēž 1993 rūķīši no 4 ciltīm: voti, šilli, pukki un elfi. Ir zināms, ka voti nesēž blakus ar šilliem un pukki - ar elfiem. Pierādi, ka kaut kur blakus sēž vienas cilts pārstāvji.

10. Sešstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi, kā parādīts 3.zīm. Ar vienu gājienu var pieskaitīt pa vieniniekam vai nu abiem vienas (jebkuras) malas galapunktiem, vai divām pretējām virsotnēm (tās savienotas ar pārtrauktām līnijām). Vai, daudzkārt. atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?



3.zīm.

7.klase (11.-15.)

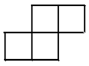
11. Plaknē novilktas 5 taisnes un 1 riņķa līnija. Vai var gadīties, ka tās sadala plakni tieši 23 daļās?

12. Kuri no sekojošiem skaitļiem ir pirmskaitļi? Pamato savu atbildi:

a) 1395, b) 131313, c) 1993, d) 1991.

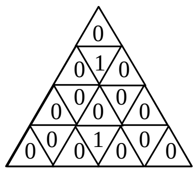
13. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi. a+b=c+d=10, ac+bd=99. Vai tā var būt?

14. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt tieši vienu no skaitļiem 1; 2; 4, lai katrā tādā figūrā, kāda redzama 4.zīm. (tā var būt pagriezta arī citādi), ierakstīto skaitļu summa būtu 8?



4.zīm.

15. Ar vienu gājienu atļauts diviem trijstūrīšiem, kam 5.zīm. ir kopīga mala, pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visos trijstūrīšos būtu ierakstīti vienādi skaitļi?



5.zīm.

8.klase (16.-20.)

16. Dots, ka $\frac{x}{y} = \frac{9y}{x}$. Kāda var būt $\frac{x}{y}$ vērtība?

17. Uzzīmējiet kaut vienu deviņstūri, kam 6 virsotnes atrodas uz vienas taisnes.

18. Desmitstūrim ir 4 šauri leņķi. Vai var būt, ka visi tā leņķi mazāki par 180^o?

19. Kvadrāts sastāv no 9x9 rūtiņām; katrā rūtiņā ierakstīts 1. Ar vienu gājienu var izvēlēties patvaļīgu 4x4 rūtiņu kvadrātu un visiem skaitļiem tajā pieskaitīt pa 1. Pierādiet: pēc 96 gājieniem varēs atrast tādu 5x5 rūtiņu kvadrātu, kura četrās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būs tieši 100.

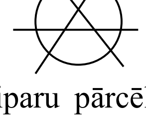
20. Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no 8x8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 81 rūtiņu stūriem ir autobusa pietura; citu pieturu nav. Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos? Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.

RAJONA OLIMPIĀDE (21.-40.)

5. klase (21.-25.)

21. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Parādi, kā dažās rūtiņās var iezīmēt pa krustiņam tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā būtu tieši divi krustiņi. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

22. Trīs taisnes, krustojot riņķi, sadala to 7 daļās (sk. 6.zīm.). Vai var tajās ierakstīt skaitļus no 1 līdz 7 (dažādās daļās dažādus skaitļus) tā, lai katrai taisnei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?



6.zīm.

23. Četrciparu skaitļa pēdējo ciparu pārcēla uz skaitļa sākumu. Iegūtais četrciparu skaitlis bija 6 reizes mazāks par sākotnējo. Vai tā var būt?

24. Pircējs pirka preci par 3 latiem un maksāja ar 10 latu naudas zīmi. Pārdevējam nebija maiņas naudas, tāpēc viņš vispirms samainīja šo zīmi pie kaimiņa. Kad pircējs aizgāja, kaimiņš konstatēja, ka 10 latu naudas zīme ir viltota. Pārdevējs atdeva kaimiņam 10 latus un noskuma. Cik naudas šajā notikumā zaudēja pārdevējs?

25. Kādā klasē mācās 11 skolnieki. Brīdi pa brīdim kāds no viņiem samaina 10 santīmu monētu pret divām 5 santīmu monētām ar kādu klases biedru. Citādas maiņas nenotiek. Vai var gadīties, ka gada laikā katrs skolnieks šādās maiņās atdevis citiem tieši 7 monētas?

6.klase (26.-30.)

26. Sadali skaitli 173173173
a) divos
b) trijos naturālos reizinātājos, kas visi lielāki par 1.

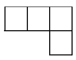
27. Vai kuba šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru šķautni ar citu skaitli) tā, lai katru tādu triju šķautņu numuru summa, kuras iziet no vienas virsotnes, dalītos ar 3?

28. Atrodiet kaut vienu tādu skaitli a, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:
1) noapaļojot a; 3a; 5a; 7a līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju,
2) noapaļojot 2a; 4a; 6a; līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

29. Jānis novietoja pa apli 17 figūriņas: dažas melnas, dažas baltas. Pēteris vispirms noņēma visas tās baltās figūriņas, kurām Jāņa izvietojumā blakus atradās kaut viena melna. Pēc tam Andris noņēma visas tās melnās figūriņas, kurām Pētera iegūtajā izvietojumā blakus atradās kaut viena balta. Beidzot Juris noņēma visas tās baltās figūriņas, kurām Andra iegūtajā izvietojumā blakus atradās kaut viena melna. Palika tikai viena figūriņa (melnā).

Parādiet kaut vienu piemēru, kā sākumā Jānis varēja būt novietojis figūriņas.

30. Kvadrāts sastāv no 6x6 baltām rūtiņām. Kāds mazākais daudzums rūtiņu jāiesvītro tā, lai neviena tāda figūra, kāda parādīta 7.zīm., nepaliktu pilnīgi balta? (Figūra var būt novietota arī citādi.)


7.zīm.

7.klase (31.-35.)

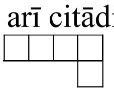
31. Vai
a) vienpadsmit, b) desmit
pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa var būt 0?

32. Tabula sastāv no 3x5 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt "-1" vai "+1" tā, lai katrs ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar visu savu kaimiņu reizinājumu? (Divus skaitļus sauc par kaimiņiem, ja tie ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.) Visi ierakstītie skaitļi nedrīkst būt vienādi.

33. Vai pastāv tādi divi viens otram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 19?

34. Mežā dzīvo 10 rūķīši. Katru vakaru daži no viņiem sēž mājās, bet pārējie apciemo visus mājās sēdētājus.
Parādiet: pietiek ar 5 dienām, lai katrs rūķītis būtu apciemojis katru citu.

35. Kvadrāts sastāv no 8x8 baltām rūtiņām. Kāds mazākais daudzums rūtiņu jānokrāso melnas tā, lai neviena tāda figūra, kāda parādīta 8.zīm., nepaliktu pilnīgi balta? (Figūra var būt novietota arī citādi.)


8.zīm.

8.klase (36.-40.)

36. Kādu atlikumu dod summa

a) 1+2+3+...+30, b) 1+2+3+...+1993+1994, dalot to ar 3?

37. Atrodiet tādus skaitļus a, b, c, d, e, lai no vienādojumiem ax=b, bx=c, cx=d, dx=e, ex=a trijiem būtu atrisinājums, bet diviem - ne. Pietiek atrast vienu piemēru.

38. Vai sešstūrim var būt tieši

a) seši, b) pieci šauri leņķi?

39. Konferencē piedalās 10 cilvēki; katrs ir pazīstams ar vismaz 5 citiem. Pierādiet, ka var izvēlēties 4 cilvēkus un nosēdināt viņus ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu paziņas.

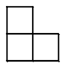
(Uzskatām: ja A pazīstams ar B, tad B pazīstams ar A.)

40. Kādu mazāko daudzumu punktu var atzīmēt plaknē tā, lai atrastos nogriežņi ar garumiem 1 cm; 2 cm; 4 cm; 8 cm; 16 cm; 32 cm, kam visi galapunkti ir atzīmētajos punktos?

21. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE (41.-60.)

5.klase (41.-45.)

41. Kvadrāts sastāv no 5x5 rūtiņām. Izgriežam tā centrālo rūtiņu. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādos "stūrīšos", kādi parādīti 9.zīm. (stūrīši var būt pagriezti arī citādi)?



9.zīm.

42. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 40 var izrakstīt rindā (katru vienu reizi) tā, lai katri divi blakus uzrakstītie skaitļi atšķirtos vismaz par 20?

43. Klasē ir 10 filatēlisti. Sākoties jaunajam mācību gadam, katrs nosūtīja apsveikumu pieciem citiem. Vai var gadīties, ka nekādi divi filatēlisti nenosūtīja apsveikumu viens otram?

44. Katrā kuba virsotnē sēž pa mušai. Vai tās var pacelties gaisā un atkal nosēsties katrā virsotnē pa vienai tā, lai nekādas divas mušas, kas agrāk atradās uz vienas šķautnes, tagad uz vienas šķautnes neatrastos?

45. Ierakstiet 10.zīm. parādītās tabulas 9 rūtiņās pa veselam pozitīvam, skaitlim (daži no tiem var būt arī vienādi; 16 rūtiņas paliek tukšas) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu tāda, kāda pierakstīta tabulā pie attiecīgās rindiņas vai kolonnas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

	3	7	4	5	7
1					
4					
2					
4					
15					

10.zīm.

6.klase (46.-50.)

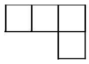
46. Cik nepāra skaitļu no 1 līdz 100 dalās ar 3?

47. Kvadrāts sastāv no 4x4 rūtiņām. Pierādi, ka tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa nepārsniegtu 19. Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 18? (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

48. Pierādi, ka

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{62}+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}>4.$$

49. Katra rūtiņu lapas rūtiņa nokrāsota vienā krāsā. Pie tam jebkurā tādā figūrā, kāda redzama 11.zīm. (tā var būt novietota arī citādi), visas četras krāsas ir dažādas. Pierādi, ka izmantotas vismaz 7 krāsas. Lapas izmēri ir 30x40 rūtiņas.


11.zīm.

50. Ap galdu sēž A, B un C. C paziņo: "Es esmu iedomājies divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus. Viens no tiem ir..." (iečukst ausī A), "bet otrs ir..." (iečukst ausī B.)
Pēc tam starp A un B notiek šāda saruna.
A: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
B: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
A: "Tagad es zinu iedomātos skaitļus."
Kādus skaitļus bija iedomājies C? (Visi izsacītie apgalvojumi ir pareizi.)

7.klase (51.-55.)

51. Dots, ka $a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$. Cik dažādu skaitļu var būt starp skaitļiem a, b, c un d?

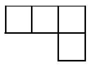
52. Uz taisna leņķa malām ņemti punkti X un Y (katrs uz savas malas), kas nav leņķa virsotne, uz tā bisektrises ņemts punkts O. Zināms, ka $\angle XOY=90^o$. Pierādi, ka OX=OY. (Arī O nav leņķa virsotne)

53. Uz 17 sarkanām kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 17 (uz katras kartītes - cits skaitlis). Tas pats izdarīts ar 17 baltām kartītēm. Pierādīt, ka kartītes var sadalīt pa pāriem tā, lai katrā pārī būtu viena sarkana un viena balta kartīte un pāros esošo kartīšu numuru summas būtu 17 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

54. Naturāla skaitļa A ciparus pārlika citā kārtībā un ieguva skaitli B. Vai var būt, ka:

$$A \cdot B = \underbrace{111...1}_{111\,reizes}?$$

55. Katra rūtiņu lapas rūtiņa nokrāsota vienā krāsā tā, ka jebkurā tādā figūrā, kāda redzama 12.zīm. (tā var būt novietota arī citādi), visas četras krāsas ir dažādas. Pierādi, ka to var izdarīt, izmantojot 8 dažādas krāsas. Lapas izmēri ir 30x40 rūtiņas.


12.zīm.

8.klase (56.-60.)

56. Vai eksistē tādi skaitļi A, B un C, ka vienlaicīgi $A^2<B^2<C^2$ un $A^3>B^3>C^3$?

57. Riņķa līnija ar 16 punktiem sadalīta 16 vienādos lokos. Vai var novilkt 8 dažāda garuma hordas, kam visi galapunkti atrodas dalījuma punktos un nekādi divi galapunkti nesakrīt?

58. Tabula sastāv no 10x10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras ne vairāk kā par 1. Pierādiet, ka vismaz viens skaitlis ierakstīts tabulā ne mazāk kā 6 reizes.

59. Tabula sastāv no 6x6 rūtiņām. Vai tajā var ierakstīt 36 dažādus veselus skaitļus tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu 0?

60. Starp naturāla skaitļa cipariem ir

a) 5, b) 4 dažādi.

Pierādi, ka skaitļu ciparus var pārlikt citā kārtībā tā, lai iegūtu skaitli, kas nav pirmskaitlis.

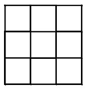
PROFESORA CIPARIŅA KLUBS (61.-132.)
1.NODARBĪBA (61.-72.)

A grupa (61.-66.)

61. Aija un viņas dzimšanas dienas viesi nostājās aplī. Izrādījās, ka ikkatram zēnam abās pusēs stāv meitenes, bet katrai meitenei - zēni. Aijas viesu vidū bija 8 zēni. Cik meiteņu bija viesos pie Aijas? (Pieņemam, ka citu viesu kā zēni un meitenes nebija.)

62. Vai, izmantojot tikai 2 g, 6 g, 10 g, 12 g un 20 g smagus atsvarus, var no miltu maisa nosvērt miltu paciņu, kura sver tieši 255 g? Svēršanā drīkst lietot sviras svarus. Tos atļauts izmantot vairākkārt, pie tam vienīgi sekojošā veidā: novietot uz to kausiem atsvarus (varbūt tikai dažus no tiem), varbūt novietot tur arī dažas jau iepriekš nosvērtas miltu porcijas un tad, ja kausi nav līdzsvarā, piebērt uz vieglākā kausa tādu miltu porciju, lai kausi nostātos līdzsvarā.

63. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām (sk. 13.zīm.). Katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs skaitlis vai 0. Zināms, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 1. Kāda var būt vismazākā visu deviņu ierakstīto skaitļu summa?


13.zīm.

64. Neviens no skaitļiem a, b, c, d, e, f nav nulle, bet tie var būt gan pozitīvi, gan negatīvi. Vai var gadīties, ka tieši 3 no skaitļiem ab, cd, ef, ac, bf, de ir pozitīvi un tieši 3 - negatīvi?

65. Kas ir lielāks: 2·2·2·...·2 (80 reizinātāju) vai 3·3·3·...·3 (50 reizinātāju)?

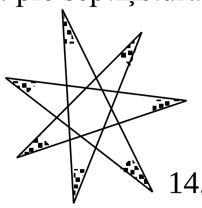
66. Parādi, kā kvadrātu var sagriezt vienādsānu trapecēs. (Paskaidrojums: par vienādsānu trapeci sauc četrstūri, kura divas pretējās malas ir paralēlas, bet nav vienādas, turpretī divas citas pretējās malas ir vienādas, bet nav paralēlas.

B grupa (67.-72.)

67. Zināms, ka a, b, c, d - naturāli skaitļi.
Pierādīt, ka (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) dalās ar 12.

68. Skudra rāpo pa kuba karkasu. Zināms, ka tā nekad negriežas atpakaļ (t.i. nepagriežas par 180 grādiem). Vai skudra var rāpot tā, lai 7 virsotnēs nonāktu pa 4 reizēm, bet astotajā - vismaz 6 reizes?

69. Atrodi leņķu lielumu summu pie septiņstūra zvaigznes virsotnēm.

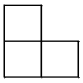

14.zīm.

70. Andris konstatēja, ka visiem viņa 25 klasesbiedriem ir dažāds draugu skaits (apskatām tikai draudzības šīs klases ietvaros). Cik draugu var būt Andrim?
Norādiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu bez jūsu norādītajām nav.

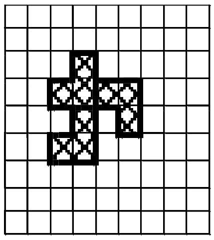
71. Es, profesors Cipariņš, pateicu Sandrai triju naturālu skaitļu summu, bet Regīnai - šo pašu skaitļu reizinājumu (varbūt starp šiem trim skaitļiem bija arī vienādi). Pēc tam starp meitenēm notika šāda saruna.
Sandra: "Ja es zinātu, ka tev pateikts lielāks skaitlis nekā man, tad es varētu pateikt trīs sākotnējos skaitļus. "
Regīna: "Man ir pateikts mazāks skaitlis nekā tev, un trīs sākotnējie skaitļi ir ..."

Kādus skaitļus nosauca Regīna? Ievērojiet: sākumā neviena meitene nezināja, kāds skaitlis pateikts otrai.

72. Kārlītim uzdeva kvadrātu ar izmēriem 9x9 rūtiņas sagriezt 27 tādos stūrīšos, kādi redzami 15.zīm. Pirmos viņš izgrieza 16.zīm. parādītos trīs stūrīšus. Vai Kārlītim izdosies izpildīt uzdevumu?



15.zīm.



16.zīm.

2.NODARBĪBA (73.-84.)

A grupa (73.-78.)

73. No visiem 10 cipariem, izmantojot katru tieši vienu reizi, izveidot divus skaitļus, kuru summa būtu vismazākā iespējamā. Pamatojiet savu atbildi.

74. Skaitļi a, b, c, d visi ir dažādi un pieņem vērtības 1; 2; 3; 4. Kādu lielāko un kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme a/1+b/2+c/3+d/4?

75. Cik dažādos veidos skaitli 1993 var izsacīt kā divu tādu naturālu skaitļu summu, kam lielākais kopīgais dalītājs ir 1? (Veidi a+b un b+a netiek uzskatīti par dažādiem.)

76. Izliekta četrstūra ABCD diagonāles AC un BD krustojas punktā O. Zināms, ka AD=BC un BO=OD. Vai ABCD noteikti ir paralelograms?

77. Kvadrāta izmēri ir 15x15. Parādi, ka to var sagriezt 13 mazākos kvadrātos (starp tiem var būt arī vienādi) tā, lai vismaz viena kvadrāta malas garums nepārsniegtu 1.

78. Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka starp katrām trijām no tām atradīsies divas ar vienādām masām. Mūsu rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Kā ar divu svēršanu palīdzību noskaidrot, vai ir dažādu masu monētas, un, ja ir, tad atrast divas monētas ar atšķirīgām masām?

B grupa (79.-84.)

79. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta pa vienam skaitlim no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā vidējais skaitlis būtu puse no abu malējo summas. Atrodiet visus veidus, kā to izdarīt, un pamatojiet, kāpēc citu bez jūsu atrastajiem nav.

80. Skaitļi a_1, a_2, ..., a_{100} visi ir dažādi un pieņem vērtības 1; 2; ...; 100. Kādu lielāko un kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $a_1/1+a_2/2+...+a_{100}/100$?

81. Dots, ka n - naturāls skaitlis. Ar kādiem skaitļiem var vienlaikus dalīties 2n+3 un 5n+7?

82. Sk. 76.uzdevumu, ja papildus vēl zināms, ka BC>1/2 BD.

83. Sk. 77.uzdevumu, ja lielais kvadrāts jāsagriež 12 mazākos kvadrātos.

84. Sk. 78.uzdevumu, ja monētu pavisam ir 16 un atļautas 4 svēršanas.

3.NODARBĪBA (85.-96.)

A grupa (85.-90.)

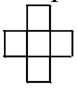
85. Vai pastāv tāds trīsciparu skaitlis, kas palielinās 8 reizes, ja tā pirmo ciparu pārnes uz beigām?

86. a) atrodiet kaut vienu tādu naturālu skaitļu pāri a un b, ka a+b+ab=1993,
b) atrodiet visus šādus pārus.

87. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti. Uzzīmējiet kaut vienu slēgtu lauztu līniju ar 16 virsotnēm, kas pati sevi nekrusto un kuras visas virsotnes atrodas šajos punktos.

88. Ansamblī dzied 9 skolēni. Vai var būt, ka trim no viņiem šajā ansamblī ir pa 8 draugiem, trim - pa 7 draugiem, bet pārējiem attiecīgi 6, 5 un 4 draugi?

89. Dotas 12 vienādas figūras (17.zīm.), kas katra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem. Vai var pagatavot tādu kubu, kura virsmu var aplīmēt ar šīm figūrām tā, lai figūras nepārklātos un lai nepaliktu neaplīmētas vietas?

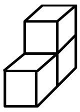

17.zīm.

90. Trijstūris ABC ir vienādmalu. Caur punktu S tā iekšpusē novilktas trīs taisnes paralēli ABC malām. Apskatām nogriežņus, kuros tās sadala ABC malas, un nogriežņus no S līdz taišņu krustpunktiem ar ABC malām. Cik dažādu garumu var būt šiem nogriežņiem?

B grupa (91.-96.)

91. Skaitļi a un b ir trīsciparu skaitļi, kas uzrakstīti ar vieniem un tiem pašiem cipariem pretējā kārtībā; pirmais cipars atšķiras no pēdējā. Skaitļu a un b kvadrāti ir piecciparu skaitļi un arī uzrakstīti ar vieniem un tiem pašiem cipariem pretējā kārtībā. Atrodiet visus šādus skaitļu a un b pārus.

92. Vai no 9 tādām figūriņām, kāda parādīta 18.zīm. (tā sastāv no trim vienādiem kubiņiem ar izmēriem 1x1x1) var salikt kubu ar izmēriem 3x3x3 ?


18.zīm.

93. Sk. 87.uzdevumu, kur skaitlis 16 aizstāts ar 64.

94. Sauksim skaitli par interesantu, ja tas ir tieši divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Kāds lielākais daudzums viens otram sekojošu naturālu skaitļu var būt interesanti?

95. Kādā karaļvalstī ir 13 pilsētas. Starp dažiem pilsētu pāriem nodibināta abpusēja satiksme ar autobusa, vilciena vai lidmašīnas palīdzību.
Kāds ir mazākais iespējamais šādu pāru skaits, ja ir zināms: lai kādus divus transporta veidus izvēlētos, no jebkuras pilsētas var nokļūt jebkurā citā (varbūt ar pārsēšanos), neizmantojot trešo transporta veidu?

96. Dots, ka n - naturāls nepāra skaitlis. Pierādiet, ka $n^{12}-n^8-n^4+1$ dalās ar 512.

4.NODARBĪBA (97.-108.)

A grupa (97.-102.)

97. Rindā izrakstīti seši divnieki. Starp katriem diviem blakus cipariem jāieraksta + vai x zīme (pavisam trīs x zīmes un divas + zīmes) tā, lai iegūtais rezultāts būtu iespējami liels. Kāds tas būs?

98. Ir zināms, ka šī mācību gada 7.nodarbības B grupas 2.uzdevums būs jubilejas - tūkstošais uzdevums "Profesora Cipariņa klubā" kopš tā pirmsākumiem. Ja pieņemam, ka katru gadu turpmāk notiks 7 vai 8 nodarbības un katrā būs 12 uzdevumu, tad kurā mācību gadā publicēs "Profesora Cipariņa kluba" 2000. uzdevumu? Uzrādi visas iespējas.

99. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Katra no tām jānokrāso balta, melna vai sarkana tā, lai vienlaikus

a) būtu vairāk nekā 24 baltas rūtiņas,

b) katrai baltai rūtiņai blakus būtu vismaz viena melna, katrai melnai - vismaz viena sarkana un katrai sarkanai - vismaz viena balta. Vai to var izdarīt?

(Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

100. Izliektā četrstūrī ABCD pastāv vienādības AB=2 un CD=5, bez tam leņķi B un C vienādi savā starpā: Pierādi, ka AD>3.

101. Kvadrātiska tabula sastāv no 3x3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (tie visi dažādi), pie tam katrā rindiņā un katrā kolonnā skaitļi ierakstīti augošā kārtībā (pa labi un uz leju). Kāda ir lielākā un mazākā iespējamā vidējās rindiņas skaitļu summa?

102. Vai 1994 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa var dalīties ar 3?

B grupa (103.-108.)

103. Doti 10 stienīši ar garumiem 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm. Cik dažādus trijstūrus var izveidot, savienojot trīs no tiem ar galiem?

104. Kvadrātu krusto divas savstarpēji perpendikulāras taisnes tā, ka tas sadalās četros četrstūros. Pierādi: divu četrstūru perimetru summa vienāda ar otru divu četrstūru perimetru summu.

105. Katra trijstūra virsotne savienota ar kādu pretējās malas punktu (ne virsotni). Vai iegūto triju nogriežņu viduspunkti var atrasties uz taisnes?

106. No naturāla skaitļa atļauts iegūt jaunu skaitli, pieskaitot sākotnējam kādu tā dalītāju (ne 1 un ne viņu pašu). Pierādi, ka no 6 var iegūt jebkuru lielāku saliktu skaitli, atkārtojot šādus gājienus vairākas reizes.

107. Sk. 101.uzdevumu, ja tabulā 7x7 ieraksta skaitļus no 1 līdz 49.

108. Astoņstūra virsotnēs ierakstīja pa skaitlim. Pēc tam uz katras malas uzrakstīja tās galos esošo skaitļu summu. Pēc tam nodzēsa visus skaitļus virsotnēs, kā arī vienu skaitli uz malas.

Vai, zinot tikai 7 palikušos skaitļus, var atjaunot uz malas nodzēsto skaitli?

5.NODARBĪBA (109.-120.)

A grupa (109.-114.)

109. Jāņa dzimšanas dienas svinībās piedalījās 4 zēni un 4 meitenes. Jānis nodejoja 7 dejas, Pēteris un Andris pa 8 dejām, Juris 6 dejas, Inta 7 dejas, Skaidrīte - 5, bet Gunta - 10 dejas. Cik dejas nodejoja Maija?

110. Zināms, ka n un m ir naturāli skaitļi, n+5 dalās ar m, bet m+5 dalās ar n. Atrodiet, kādas var būt n un m vērtības.

111. Vai var plaknē atzīmēt 6 punktus tā, lai katri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnes?

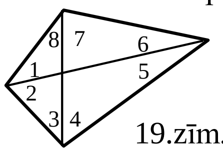
112. No deviņiem nenulles cipariem, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi, izveidojiet trīs skaitļus tā, lai to summa būtu mazākā iespējamā.

113. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas. 7 no tām sver pa 10 g katra, bet 2 - pa 11 g katra. Mūsu rīcībā ir atsperu svari ar vienu svaru kausu; svaru skalas iedaļa ir 1 g. Kā ar 5 svēršanām atrast abas smagākās monētas?

114. Kvadrātiska tabula sastāv no 4x4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala vai kopīgs stūris, tad tajās ierakstīto skaitļu starpība nepārsniedz 2. Vai tabulā var būt ierakstīti 8 dažādi skaitļi?

B grupa (115.-120.)

115. Apskatām 8 leņķus, ko izliekta četrstūra diagonāles veido ar tā malām (sk. 19.zīm.). Zināms, ka četrstūris nav ne paralelograms, ne trapece. Kāds lielākais daudzums no šiem leņķiem var būt savā starpā vienādi?



19.zīm.

116. a) Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli, kura visi cipari nav vienādi, kas nesatur ciparu 0 un kas dalās ar savu ciparu kvadrātu summu

b) Pierādiet, ka šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

117. Pierādiet, ka katru daudzstūri var sagriezt vienādsānu trijstūros.

118. No deviņiem nenulles cipariem, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi, izveidojiet trīs trīsciparu naturālus skaitļus tā, lai to reizinājums būtu mazākais iespējamais.

119. Kādā firmā katram strādājošam ir tieši viens draugs un tieši viens ienaidnieks (visas draudzības un ienaidus apskatām tikai šīs firmas ietvaros). Pierādīt: darbiniekus var sadalīt pa divām filiālēm tā, lai nevienā filiālē nestrādātu ne 2 draugi, ne 2 ienaidnieki.

120. Sk. 114.uzdevumu, kur jautāts par 7 dažādu skaitļu ierakstīšanas iespējām.

6. NODARBĪBA (121.-132.)

A grupa (121.-126.)

121. Dots, ka a, b, c, d ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādiet, ka to reizinājums dalās ar 12.

122. Pierādīt, ka četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumam pieskaitot 5, nevar iegūt vesela skaitļa kvadrātu.

123. Kādā laika posmā trīs draugi apmeklēja kino. Katru vakaru uz kino gāja tieši divi no viņiem. Katru reizi vienam filma tā patika, ka viņš gāja uz kino arī nākošajā vakarā, bet otram filma nepatika, un viņš nākošajā vakarā palika mājās.

Apskatāmajā posmā viens no draugiem redzēja 15 filmas, bet otrs 31 filmu. Cik filmas šajā laika posmā redzēja trešais draugs?

124. Ir 10 strādnieki un 10 instrumenti. Katrs strādnieks prot strādāt ar tieši 2 instrumentiem, ar katru instrumentu prot strādāt tieši 2 strādnieki. Pierādiet: instrumentus var sadalīt strādniekiem tā, lai katram tiktu instruments, ar kuru viņš prot strādāt.

125. Sauksim daudzstūra virsotni par īpašu, ja neviena diagonāle, kas no tās iziet, neatrodas šī daudzstūra iekšpusē. Uzzīmējiet desmitstūri, kam ir 5 īpašas virsotnes.

126. Uzzīmējiet 6 vienādas riņķa līnijas tā, lai katra no tām pieskartos tieši 3 citām.

B grupa. (127.-132.)

127. Pierādiet: sešciparu skaitlis dalās ar 7 tad un tikai tad, ja ar 7 dalās starpība, ko iegūst, no pēdējo triju ciparu veidotā skaitļa atņemot pirmo triju ciparu veidoto skaitli.

128. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un pastāv vienādība $2x^2+x=3y^2+y$. Pierādiet, ka $x-y$ un $2x+2y+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti.

129. Valstī ir 16 dzelzceļa līnijas; katra no tām var iet caur vairākām pilsētām. Vai var gadīties, ka dzelzceļa tīklam vienlaikus piemīt divas sekojošas īpašības.

a) lai arī kuru vienu līniju slēgtu, pa atlikušajām var no katras pilsētas aizbraukt uz katru citu.

b) lai arī kuras divas līnijas slēgtu, atradīsies divas pilsētas, ko dzelzceļa satiksme vairs nesavieno.

130. Vai A grupas 124.uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja vārdu "tieši" abās vietās aizstāj ar "vismaz"?

131. Pierādiet, ka nevienam desmitstūrim nav vairāk par 5 īpašām virsotnēm (sk. A grupas 125.uzdevumu).

132. Kvadrātu sagriež taisnstūros. Katram taisnstūrim aprēķinām tā īsākās malas garuma attiecību pret garākās malas garumu. Pierādiet, ka visu iegūto attiecību summa nav mazāka par 1.

OLIMPIĀDE "DRUSTI '94" (133.-136.)

133. Jānītim ir 6 grāmatas. Viņš grib sev uz galda novietot grāmatu kaudzi. Cik dažādas kaudzes viņš var izveidot? Kaudze var sastāvēt no 1; 2; ... ; 6 grāmatām. Kaudzes, kas atšķiras tikai ar tajās izvietoto grāmatu secību, bet sastāv no tām pašām grāmatām, uzskatām par dažādām.

134. No Cēsīm uz Drustiem izbrauc 3 automašīnas: vispirms A, tad B, tad C. Visas brauc pa vienu un to pašu ceļu. Brauciena laikā pavisam notiek 100 apdzīšanas; katrā apdzīšanā piedalās tikai 2 automašīnas. Vai tās var iebraukt Drustos secībā C; B; A ?

135. Skaitlis 15 visos iespējamos veidos izsacīts kā vieninieku un divnieku summa (varbūt lietoti arī tikai vieninieki). Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskatām par dažādiem. Cik pavisam ir šādu veidu?

136. Pierādīt: ja izveidosim divus trīsciparu skaitļus, katrs no kuriem satur tieši vienu ciparu no katras rindiņas un katras kolonnas (sk. 20.zīm.), tad to reizinājums dalīsies ar 9.

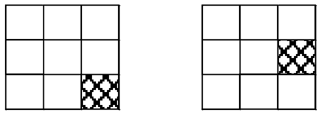
1	2	3
4	5	6
7	8	9

20.zīm.

ATRISINĀJUMI

1. Atbilde Jā, var.

Risinājums Aplūkosim divus kvadrātus, kuru izmēri ir 3x3 rūtiņas. Abi tie, protams, ir vienādi. No katra kvadrāta izgriezīsim pa vienai rūtiņai: no pirmā kvadrāta - stūra rūtiņu, bet no otra - malas centrālo rūtiņu. Kā redzams 21.zīm., atlikušās daļas nav vienādas.



21.zīm.

2. Atbilde a), b) nevar

c) var: 100+101+102+...+109=1045

Risinājums Tā kā starp 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir 5 nepāra un 5 pāra skaitļi, tad skaidrs, ka to summa ir nepāra skaitlis. Tātad 1000 noteikti nevar būt šo skaitļu summa.

Jebkuriem 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem pēdējie cipari ir visi cipari no 0 līdz 9, katrs tieši vienu reizi. Tā kā summas pēdējais cipars ir atkarīgs vienīgi no saskaitāmo pēdējo ciparu summas, tad meklējamās summas pēdējais cipars ir 5, jo 0+1+2+...+9=45. Tātad arī 111111 nevar būt šo desmit skaitļu summa.

3. Atbilde Der, piemēram, skaitļi 1; 4; 6; 10

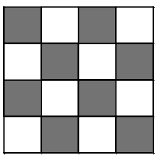
Risinājums Tiešām, 6 - 4=2; 4 - 1=3; 10 - 6=4; 6 - 1=5; 10 - 4=6; 10 - 1=9.

4. Atbilde Nē, nevar.

Risinājums Aplūkosim tādus skaitļu "pieciniekus", kas seko viens otram nepārklājoties. Pavisam ir 1000:5=200 "piecinieki". (Bez šiem "pieciniekiem", protams, ir arī vēl citi, kas pārklājas ar šiem, bet tos mēs neaplūkosim). Katrā no tiem pēc uzdevuma nosacījumiem ir jābūt vismaz 2 skaitļiem, kas dalās ar 3. Tātad šo skaitļu skaits ir vismaz $200 \cdot 2=400$. Taču no 1 līdz 1000 ar 3 dalās katrs trešais skaitlis, tātad tādu skaitļu ir tikai 333. Tā kā visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi, tad, protams, nevar būt uzrakstīti 400 vajadzīgie skaitļi.

5. Atbilde Nē, to izdarīt nevar.

Risinājums Izkrāsosim kvadrātu tā, kā parādīts 22.zīm.



22.zīm.

Aplūkosim visām melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu - tā ir 2, un visās baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu - tā ir 0. Tā kā katrā gājienā tiek pieskaitīts pa vieniniekam vienā baltā un vienā melnā rūtiņā, tad skaidrs, ka pēc katra gājiena gan visās baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa, gan visās melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa palielinās par 1. Tātad abas summas nekad nekļūs vienādas. Tā kā gadījumā, ja visās rūtiņās ierakstītie skaitļi būtu vienādi, abām summām arī būtu jābūt vienādām, tad skaidrs, ka uzdevumā prasīto izpildīt nav iespējams.

6. Atbilde 181 reizi.

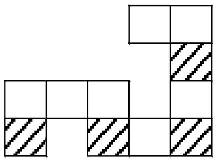
Risinājums Skaitļa ciparu reizinājums ir nulle vienīgi tajos gadījumos, ja vismaz viens no tā cipariem ir 0. Noskaidrosim, cik tādu skaitļu ir robežās no 1 līdz 1000. No 1 līdz 99 nulle var parādīties tikai kā vienu cipars (10; 20; 30; ...; 90). Tātad šādu skaitļu ir 9.

Katrā nākamajā skaitļu simtā 0 parādās 10 reizes kā vienu cipars $\left(\overline{a00};\overline{a10};\overline{a20};...;\overline{a90}\right)$ un 10 reizes kā desmitu cipars $\left(\overline{a00};\overline{a01};\overline{a02};...;\overline{a09}\right)$. Taču skaitlis $\overline{a00}$, šādi skaitot, tiek ieskaitīts divas reizes, tāpēc katrā simtā ir 19 skaitļi, kuru pierakstā izmantots cipars 0. Vēl nav aplūkots skaitlis 100, kura ciparu reizinājums, protams, ir 0. Tātad kopā ir 9+9·19+1=181 skaitlis.

7. Atbilde Nē, tas nav iespējams.

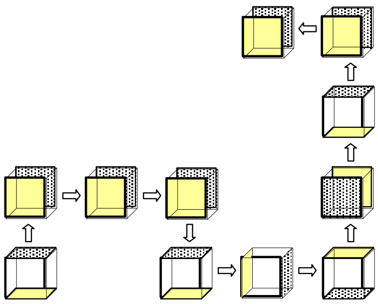
Risinājums Pieņemsim, ka taisnstūrī ir m rindiņas un n kolonnas. Tādā gadījumā visu kolonnu reizinājumu reizinājums ir $\underbrace{3\cdot 3\cdot ...\cdot 3}_{n \text{ reizes}}$, bet visu rindiņu reizinājumu reizinājums ir $\underbrace{7\cdot 7\cdot ...\cdot 7}_{n \text{ reizes}}$. Tie nevar būt vienādi, jo viens no tiem dalās ar 3, bet otrs ar 3 nedalās (kā arī tāpēc, ka viens no tiem dalās ar 7, bet otrs ar 7 nedalās). Ja reizinājumi būtu vienādi, tiem abiem būtu vieni un tie paši dalītāji. Tātad uzdevumā prasītais nevar izpildīties.

8. Atbilde Melnas tiks nokrāsotas 23.zīm. redzamās rūtiņas.



23.zīm.

Risinājums Attēlosim kuba "ceļu", katru reizi norādot melno skaldņu atrašanās vietas (24.zīm.). Ievērosim, ka katrā solī apakšā nokļūst tā skaldne, kas atrodas "kustības virzienā".

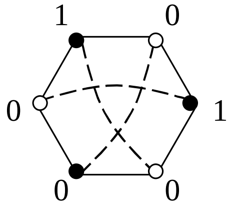


24.zīm.

9. Risinājums Pieņemsim pretējo - nav nevienas vietas, kurā blakus sēž vienas cilts pārstāvji. Palūgsim piecelties kājās visus votus un šillus. Tā kā pēc mūsu pieņēmuma vienas cilts pārstāvji nesēž blakus un tā kā blakus nesēž ne voti un šilli, ne pukki un elfi, tad starp katriem diviem sēžot palikušajiem rūķīšiem būs brīva vieta, un starp katriem diviem piecēlušamies rūķīšiem kāds būs palicis sēžot. Tas nozīmē, ka brīvās un aizņemtās vietas atradīsies pārmaiņus. Tas var būt tikai tādā gadījumā, ja vietu skaits pie galda ir pārskaitlis. Taču ir zināms, ka pie galda ir 1993 vietas. Pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams un būs vietas, kur blakus sēž vienas cilts pārstāvji.

10. Atbilde Nē, nevar.

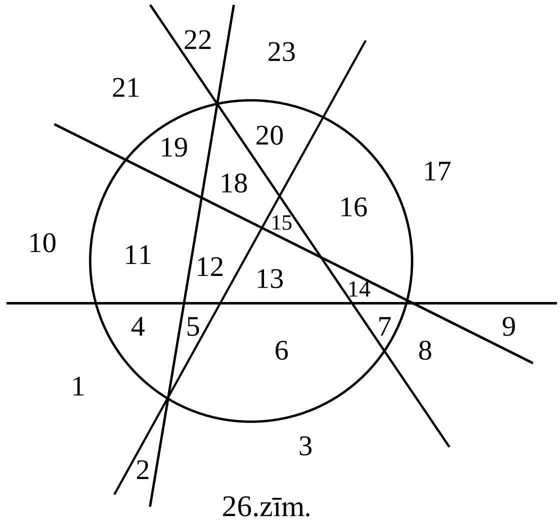
Risinājums Izkrāsosim virsotnes tā, kā parādīts 25.zīm.



25.zīm.

Aplūkosim melnajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summu - tā ir 2, un baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summu - tā ir 0. Izdarot atļauto gājienu, tiek pieskaitīts vieninieks vienai baltai un vienai melnai virsotnei. Tas nozīmē, ka abas summas katrā gājienā palielinās par 1 un tātad tās nekad nekļūs vienādas. Ja visi ierakstītie skaitļi kaut kad kļūtu vienādi, tad arī šīm summām būtu jāsakrīt vienai ar otru.

11. Atbilde Jā, var. Sk. 26.zīm.



26.zīm.

12. Atbilde a), b), d) nav pirmskaitlis,
c) ir pirmskaitlis.

Risinājums

a) 1395 dalās ar 5 un nav 5;
b) 131313 dalās ar 13 un nav 13;
d) 1991 dalās ar 11 un nav 11;

c) Lai pārbaudītu, vai skaitlis a ir pirmskaitlis, pietiek pārliecināties, ka tas nedalās ne ar vienu pirmskaitli no 2 līdz $\sqrt{a}$. Pamatosim to. Ja skaitli a var izsacīt kā 2 naturālu skaitļu reizinājumu $a=n\cdot m$, tad vai nu $n\le\sqrt{a}$, vai $m\le\sqrt{a}$. Tiešām, ja būtu $n>\sqrt{a}$ un $m>\sqrt{a}$, tad, sareizinot abas šīs nevienādības, mēs iegūtu $n\cdot m>a$; tā kā $a=n\cdot m$, tad būtu $a>a$, bet tā ir pretruna.

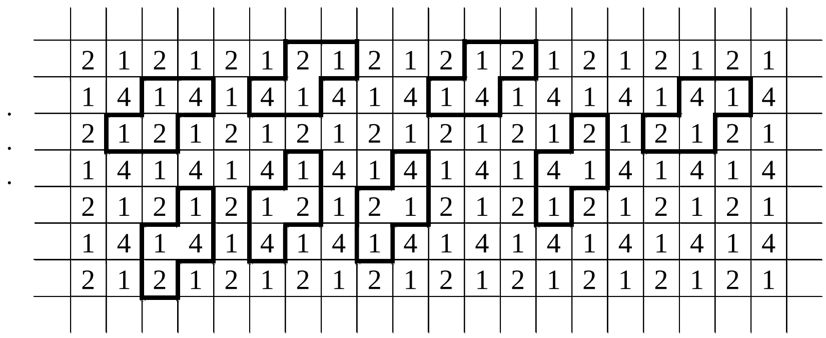
Tātad, lai pārliecinātos, vai skaitlis a nav pirmskaitlis, pietiek pārbaudīt tā dalīšanos ar visiem naturāliem skaitļiem no 2 līdz $\sqrt{a}$. Tā kā katrs skaitlis, kas nav pirmskaitlis, var tikt sadalīts pirmreizinātājos (tādu pirmskaitļu reizinājumā, kuri nepārsniedz doto skaitli), tad pietiek pārbaudīt vienīgi dalīšanos ar pirmskaitļiem, kas nepārsniedz $\sqrt{a}$. Tā kā $\sqrt{1993}=44{,}\ldots$, tad jāpārbauda, vai 1993 dalās ar 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43. Pārbaude parāda, ka neviens no šiem skaitļiem nav 1993 dalītājs. Tātad 1993 ir pirmskaitlis.

13. Atbilde Nē, nevar.

1. risinājums Ja a+b=10 un d+c=10, tad (a+b)·(d+c)=100 jeb ad+ac+bd+bc=100. Tā kā ac+bd=99, tad ad+bc=1. Tā kā a, b, c un d ir naturāli skaitļi, tad mazākā iespējamā izteiksmes ad+bc vērtība ir pie a=b=c=d=1, proti, ad+bc=2. Tātad ad+bc$\geq$2 jebkurām naturālām a, b, c, d vērtībām un nevar būt ad+bc=1. No tā seko, ka visi dotie nosacījumi reizē izpildīties nevar.

2. risinājums Skaitļi a un b, kā arī c un d vai nu abi ir pāra, vai abi - nepāra skaitļi. Tāpēc arī ac un bd vai nu abi ir pāra, vai abi nepāra (pēdējais iespējams tikai tad, ja a, b, c, d visi ir nepāra skaitļi). Tāpēc ac+bd noteikti ir pāra skaitlis un nevar būt 99.

14. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 27.zīm.,

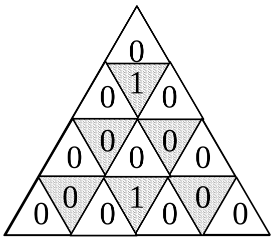


27.zīm.

kur parādīti visi principiāli atšķirīgie figūras novietojumi. Viegli pārbaudīt, ka tajos visos meklējamā summa ir 8.

15. Atbilde Nē, nevar.

1. risinājums Izkrāsosim trijstūrīšus tā, kā parādīts 28.zīm.



28.zīm.

Aplūkosim visos melnajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summu - tā ir 2, un visos baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summu - tā ir 0. Katrā gājienā tiek pieskaitīts vieninieks vienā baltā un vienā melnā trijstūrītī ierakstītajiem skaitļiem. Tātad pēc katra gājiena abas summas palielinās par 1. Tā kā sākumā tās nebija vienādas, tad, izdarot šādus gājienus, tās nekad nekļūs vienādas. Ja visos trijstūrīšos ierakstītie skaitļi kaut kad kļūtu vienādi, tad, protams, abām šīm summām būtu jāsakrīt, kas nekad nenotiks.

2. risinājums Augšējā trijstūrītī ierakstīto skaitli var palielināt vienīgi tad, ja reizē palielina arī zem tā ierakstīto skaitli. Tā kā sākumā "augšējais" skaitlis ir mazāks par "apakšējo", tad tie nekad nekļūs vienādi. Tātad arī visi skaitļi nekad nekļūs vienādi.

16. Atbilde $\frac{x}{y} = \pm 3$

Risinājums Ja x un y apmierina vienādību $\frac{x}{y} = \frac{9y}{x}$, tad ir spēkā vienādība $x^2=9y^2$ jeb $\frac{x^2}{y^2} = 9$, jeb $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 9$. No šejienes izriet, ka $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Piemēri: x=6; y=2 un x=6, y=-2 parāda, ka abas vērtības tiešām ir iespējamas.

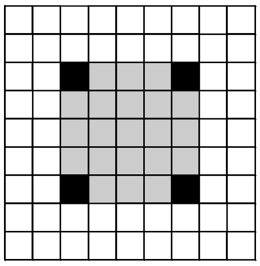
17. Atbilde Piemēram, sk. 29.zīm.

29.zīm.

18. Atbilde Nē, nevar.

Risinājums Ja daudzstūra visi leņķi mazāki par 180^o, tad tas ir izliekts. Izliektam daudzstūrim varam runāt par ārējiem leņķiem; tā ārējo leņķu summa ir 360^o. Atcerēsimies, ka ārējais leņķis ir iekšējā leņķa blakusleņķis. Aplūkosim 4 šauro leņķu ārējos leņķus. Ja leņķis α ir šaurs ($\alpha<90^o$), tad tam atbilstošais ārējais leņķis ir $180^o-\alpha>90^o$. Tātad jau šo 4 ārējo leņķu summa ir lielāka par $4\cdot90^o=360^o$. Pretruna.

19. Risinājums Meklējamais kvadrāts redzams 30.zīm.



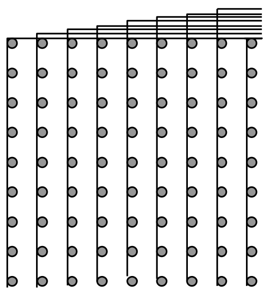
30.zīm.

Ievērosim, ka katrs gājiens (vieninieka pieskaitīšana skaitļiem kādā 4x4 rūtiņu kvadrātā) skar tieši vienu no pelēkā kvadrāta stūra rūtiņām. Tātad 96 gājienu rezultātā šajās 4 rūtiņās ierakstīto skaitļu summa palielināsies par 96, tātad kļūst vienāda ar 4+96=100.

20. Atbilde Jāievieš 9 maršruti.

Risinājums Katrs maršruts iet augstākais pa vienu horizontāli un vienu vertikāli. Ja būtu tikai 8 maršruti, tad ar tiem varētu pārklāt augstākais 8 vertikāles un 8 horizontāles, bet ielu tīklā ir 9 horizontāles un 9 vertikāles. Tātad vismaz viena horizontāle un vismaz viena vertikāle nesaturētu nevienu maršruta posmu, un uz pieturu šīs vertikāles un horizontāles krustpunktā nevarētu aizbraukt.

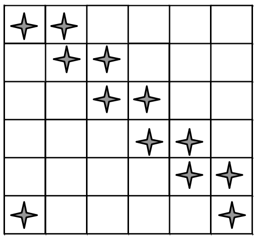
Ar 9 maršrutiem pietiek, sk. 31.zīm.



31.zīm.

Katrs maršruts satur pilnu vertikāli un visu to horizontāles daļu, kas atrodas pa labi no šīs vertikāles.

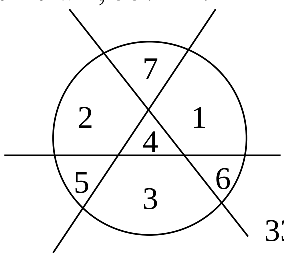
21. Atbilde Sk., piemēram, 32.zīm.



32.zīm.

Skaidrs, ka uzdevumā prasītais paliks spēkā, arī mainot vietām jebkuras divas rindiņas vai divas kolonnas, kā arī, izdarot šādas maiņas vairākkārt.

22. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 33.zīm.



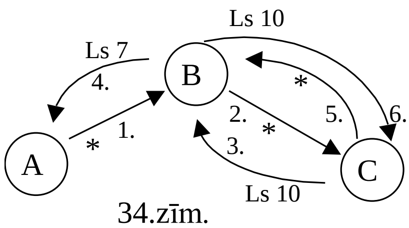
33.zīm.

23. Atbilde Tā nevar būt.

Risinājums Pieņemsim no pretējā, ka tas iespējams. Apzīmēsim sākotnējo četrciparu skaitli ar a, bet iegūto četrciparu skaitli ar b. Tādā gadījumā 6b=a. Tātad a dalās ar 6; tāpēc a ir pāra skaitlis. Tātad a pēdējais cipars ir pāra cipars. Tas nevar būt 0, jo tad b nebūtu četrciparu skaitlis. Tātad skaitļa a pēdējā cipara mazākā vērtība ir 2. Tātad arī b pirmais cipars ir vismaz 2. Ja četrciparu skaitli $\overline{2xyz}$ reizina ar 6 (reizinājums ir skaitlis a), iegūst piecciparu skaitli; tas pats notiek, ja divnieka vietā ir vēl lielāks cipars. Bet a ir četrciparu skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu.

24. Atbilde Pārdevējs zaudēja 10 latus.

Risinājums Attēlosim notikušo naudas apmaiņu starp pircēju (A), pārdevēju (B) un kaimiņu (C) ar diagrammu, kurā bultiņu numuri norāda darbību secību (sk. 34.zīm.). Viltoto banknoti attēlosim ar *.



34.zīm.

Tātad :

1. Pircējs iedod viltoto banknoti pārdevējam,
2. Pārdevējs iedod viltoto banknoti kaimiņam,
3. Kaimiņš iedod Ls 10 pārdevējam,
4. Pārdevējs atdod Ls 7 pircējam,
5. Kaimiņš atdod viltoto banknoti pārdevējam,
6. Pārdevējs atdod Ls 10 kaimiņam.

Kā viegli redzēt diagrammā, tad pārdevēja un kaimiņa naudas apmaiņa naudas daudzumu neietekmē. Tātad pārdevējs ir atdevis 7 Ls. Taču atcerēsimies, ka pircējs faktiski nav samaksājis par preci Ls 3. Tātad pārdevēja zaudējumi ir Ls7+Ls3=Ls10.

25. Atbilde Tā nevar gadīties.

Risinājums Pēc uzdevumā dotā katrā apmaiņā viens skolēns atdod vienu monētu, bet kāds cits viņam pretī dod divas monētas. Tātad katrā maiņā tiek atdotas 3 monētas. Ja gada laikā notiek k šādas apmaiņas, tad tajās kopā tiek atdotas 3k monētas. No otras puses, ja katrs no 11 skolēniem gada laikā šādās maiņās ir atdevis tieši 7 monētas, tad $3k=7\cdot 11$ jeb $3k=77$. Šāda vienādība naturāliem skaitļiem (apmaiņu skaits k ir naturāls skaitlis) nav iespējama, jo 77 nedalās ar 3. Tātad nevar gadīties, ka katrs skolēns atdevis citiem tieši 7 monētas.

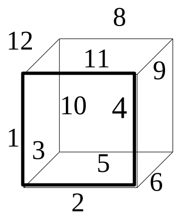
26. Atbilde

a) $173173173=173\cdot 1001001$

b) $173173173=173\cdot 1001001=173\cdot 3\cdot 333667$

Ievērosim: lai kādi arī būtu cipari a, b, c (a kā skaitļa pirmais cipars nav 0), pastāv vienādības $\overline{ababab}:\overline{ab}=10101$ un $\overline{abcabcabc}:\overline{abc}=1001001$. Par to visvieglāk pārliecināties, veicot "dalīšanu stabiņā".

27. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 35.zīm.



35.zīm.

Risinājums Sadalīsim visus skaitļus no 1 līdz 12 trīs grupās: pirmajā grupā būs tie skaitļi, kas dalās ar 3, otrajā - tie, kas, dalot ar 3, dod atlikumā 1, trešajā - tie, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2. Tātad pirmajā grupā būs skaitļi 3; 6; 9; 12, otrajā - 1; 4; 7; 10, bet trešajā - 2; 5; 8; 11. Vispārīgā veidā pirmās grupas skaitļus var uzrakstīt formā 3k, otrās - 3n+1, bet trešās - 3m+2, kur k, n, m - veseli skaitļi. Ņemot pa vienam skaitlim no katras grupas un saskaitot, iegūstam $3k+(3n+1)+(3m+2)=3k+3n+3m+3=3(k+n+m+1)$. Šis skaitlis dalās ar 3.

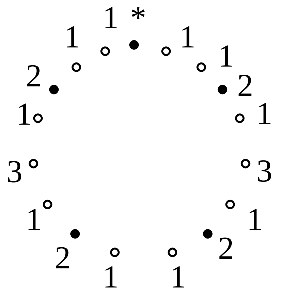
Lai izpildītu uzdevuma nosacījumus, visas vienā virzienā ejošās šķautnes numurēsim ar skaitļiem no vienas grupas (katrā grupā ir četri skaitļi un arī vienā virzienā ejošo šķautņu ir 4). Tad pie katras virsotnes būs pa vienam skaitlim no katras grupas un to summa dalīsies ar 3.

Protams, mūsu sniegtais risinājums ir tikai viens no iespējamiem. Var būt risinājumi, kas balstīti uz pavisam citām idejām.

28. Atbilde Piemēram, der skaitlis a=0,49.

Tad	$3a=1{,}47\sim 1$		$2a=0{,}98\sim 1$
	$5a=2{,}45\sim 2$	bet	$4a=1{,}96\sim 2$
	$7a=3{,}43\sim 3$,		$6a=2{,}94\sim 3$.

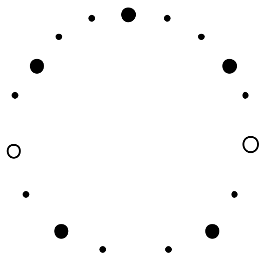
29. Atbilde Piemēram tā, kā parādīts 36.zīm.



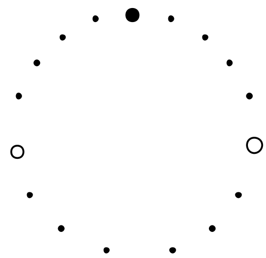
36.zīm.

Risinājums Skaitlis blakus figūriņai norāda, kurā gājienā tā tiek noņemta. Ar * apzīmētā figūra paliek pēdējā. Parādīsim tagad spēles gaitu, pieņemot 36.zīm. redzamo figūriņu izvietojumu par sākumpozīciju.

Pēc Pētera gājiena:



Pēc Andra gājiena:



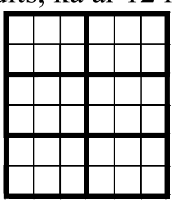
Pēc Jura gājiena tiek noņemtas abas baltās figūriņas un paliek viena melnā figūriņa.

30. Atbilde 12 rūtiņas.

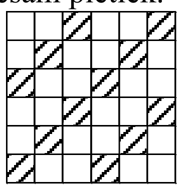
Risinājums Lai izpildītu uzdevuma prasību, katrā taisnstūrī, kura izmēri ir 2x3 rūtiņas, noteikti jāiesvītro vismaz 2 rūtiņas. Ja tiktu iesvītrota tikai viena rūtiņa, tad šādā taisnstūrī varēs ievietot doto figūriņu tā, lai tā nesaturētu iesvītroto rūtiņu. Sk., piemēram, 38.zīm.

38.zīm.

Kvadrātu ar izmēriem 6x6 var sadalīt 6 savstarpēji nepārklājošos taisnstūros ar izmēriem 2x3 rūtiņas (sk. 39.zīm.). Tātad jāiesvītro vismaz $6\cdot 2=12$ rūtiņas. Savukārt 40.zīm. parādīts, ka ar 12 rūtiņām tiešām pietiek.



39.zīm.



40.zīm.

31. Atbilde

a) Jā, var. Piemēram,
   $(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=0$,
b) Nē, nevar.

1. risinājums Starp desmit pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir tieši 5 pāra skaitļi un 5 nepāra skaitļi. Tātad to summa noteikti ir nepāra skaitlis, bet 0 ir pāra skaitlis. Tātad 10 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa nevar būt 0.

2. risinājums Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem veseliem skaitļiem ir (-5), tad to summa ir:

$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=-5$ (*)

Ja pirmais no šiem skaitļiem ir (-4), tad to summa ir:

$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=5$ (**)

Skaidrs: ja pirmais skaitlis būs mazāks par (-5), tad summa būs mazāka par (-5), jo atbilstošie saskaitāmie ir mazāki nekā summā (*). Līdzīgi, ja pirmais skaitlis būs lielāks par (-4), tad summa būs lielāka par 5, jo atbilstošie saskaitāmie būs lielāki nekā summā (**). Tātad vērtību 0 iegūt nevar.

32. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 41.zīm.

1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	1	-1
-1	1	-1	-1	1

41.zīm.

33. Atbilde Jā, pastāv. Piemēram, tādi ir skaitļi $198\underbrace{99...99}_{17\,\text{reizes}}$ un $199\underbrace{00...0}_{17\,\text{reizes}}$.

Risinājums Lai skaitļa ciparu summa dalītos ar 19, tai jābūt kādam no skaitļiem 19; 38; 57; 76; 95; 114; 133; 152; 171; 190; ... Mazākais naturālais skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 19, ir 199.

Divu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summas lielākajā daļā gadījumu (tāpat kā paši skaitļi) atšķiras viena no otras par 1. Izņēmums ir tie skaitļu pāri, kas satur skaitļus, kuri beidzas ar 9 un 0 ($\overline{....9}$ un $\overline{....0}$). Lai izpildītu uzdevuma noteikumus, mēs nevaram izvēlēties tādus skaitļus, kuru ciparu summas atšķiras tikai par 1, jo divi šādi skaitļi abi nevar dalīties ar 19. Tātad aplūkosim blakusesošus skaitļus, kuri beidzas ar 9 un 0.

Aplūkosim skaitļus 199 un 198. Ja pirmajam no tiem labajā pusē pierakstām nulles, bet otrajam devītniekus, pie tam vienādā skaitā, tie joprojām būs blakusesoši skaitļi. Pirmā skaitļa ciparu summa pie tam visu laiku paliks 19. Tātad mums jānoskaidro, cik devītnieku jāpieraksta skaitlim 198, lai arī tā ciparu summa dalītos ar 19. Skaitļa 198 ciparu summa ir 18. Pievienojot 17 reizes 9, iegūsim skaitli, kura ciparu summa ir $18+17\cdot 9=171$, un 171 dalās ar 19. Tātad par meklētajiem skaitļiem var ņemt $198\underbrace{99...99}_{17\,\text{reizes}}$ un $199\underbrace{00...0}_{17\,\text{reizes}}$.

Pamēģiniet paši pierādīt, ka skaitļu pāru ar uzdevumā minēto īpašību ir bezgalīgi daudz.

34. Atbilde Iespējamais sadalījums redzams 42.zīm.

Rūķītis / Dienas	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	▨	▨	▨	▨						
2.	▨				▨	▨	▨			
3.		▨			▨			▨	▨	
4.			▨			▨		▨		▨
5.				▨			▨		▨	▨

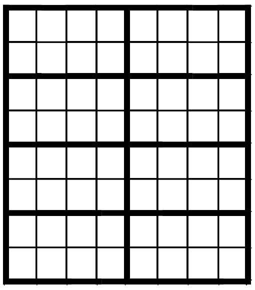
42.zīm.

Risinājums Aplūkojot tabulu, redzam, ka katrs rūķītis sēž mājās divas dienas. Tā kā nekādiem diviem rūķīšiem mājās sēdēšanas dienas nesakrīt, tad katriem diviem rūķīšiem A un B būs gan tāda diena, kad A ir mājās, bet B nav (tātad var atnākt ciemos pie A), gan arī otrādi. Tātad šajās piecās dienās katrs rūķītis varēs apciemot katru citu.

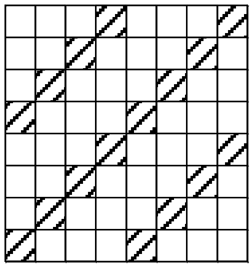
35. Atbilde 16 rūtiņas.

Lai izpildītu uzdevuma nosacījumus, katrā taisnstūrī ar izmēriem 2x4 rūtiņas noteikti jāiesvītro vismaz 2 rūtiņas. Ja tiktu iesvītrota tikai viena rūtiņa, tad šādā taisnstūrī noteikti varēs ievietot doto figūriņu tā, lai tā nesaturētu iesvītroto rūtiņu. (Pārbaudiet to paši, aplūkojot visus gadījumus, kur taisnstūrī ar izmēriem 2x4 rūtiņas var atrasties iekrāsotā rūtiņa.)

Kvadrātu ar izmēriem 8x8 var sadalīt 8 savstarpēji nepārklājošos taisnstūros ar izmēriem 2x4 rūtiņas (sk. 43.zīm.). Tātad jāiesvītro vismaz $8\cdot 2=16$ rūtiņas. Savukārt 44.zīm. redzams, ka ar 16 iesvītrotām rūtiņām tiešām pietiek.



43.zīm.



44.zīm.

36. Atbilde a), b) atlikums ir 0.

Risinājums Sagrupēsim dotos skaitļus pa trīs. Tādā gadījumā katra trijnieka skaitļus vispārīgā veidā varam pierakstīt šādi: a; a+1; a+2. Šo triju skaitļu summa a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3(a+1) noteikti dalās ar 3.

a) gadījumā skaitļus no 1 līdz 30 var sadalīt 10 šādos trijniekos. Katrs no tiem summā dod skaitli, kas dalās ar 3. Atlikums ir 0.

b) gadījumā skaitļus no 1 līdz 1992 arī var sadalīt 664 šādos trijniekos. Atliek 1993+1994=3987, kas arī dalās ar 3. Tātad arī otrā summa dalās ar 3 un atlikums ir 0.

37. Atbilde Der, piemēram, skaitļi a=c=e=1, b=d=0. Tad vienādojumi izskatās šādi:

(1) $1\cdot x=0$; **(2)** $0\cdot x=1$; **(3)** $1\cdot x=0$; **(4)** $0\cdot x=1$; **(5)** $1\cdot x=0$

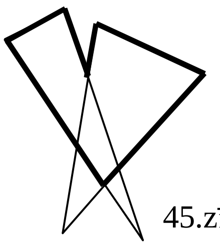
(1), (3) un (5) vienādojumiem ir atrisinājums, bet (2) un (4) atrisinājuma nav.

38. Atbilde a) nevar būt seši šauri leņķi,

b) var; sk., piemēram, 45.zīm.

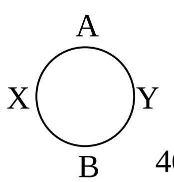
Risinājums Pieņemsim, ka sešstūrim visi seši leņķi ir šauri. Tad sešstūra iekšējo leņķu summa ir mazāka par $6\cdot90^o=540^o$, taču katra sešstūra iekšējo leņķu summa ir $180^o\cdot(6-2)=720^o$. Pretruna. Tātad sešstūrim nevar būt seši šauri leņķi.

Piecus šaurus leņķus var iegūt. Dotais sešstūris iegūts, krustojot divus vienādsānu trijstūrus.



45.zīm.

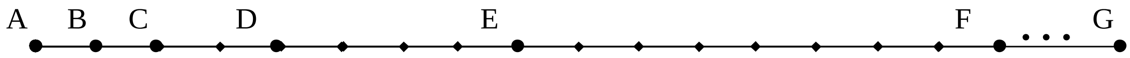
39. Risinājums Ja visi konferences dalībnieki savā starpā ir pazīstami, tad ir vienalga, kurus četrus dalībniekus izvēlēties. Pieņemsim, ka visi nav pazīstami, un aplūkosim divus dalībniekus A un B, kuri savā starpā nav pazīstami. Katram no viņiem starp 8 pārējiem konferences dalībniekiem ir vismaz 5 paziņas. Tātad kopā viņiem abiem ir vismaz 10 pazīšanās. Tā kā bez A un B ir tikai 8 dalībnieki, bet pazīšanos viņiem kopā ir 10, tad būs vismaz 2 tādi (apzīmēsim viņus ar x un y), kas ir pazīstami gan ar A, gan ar B. Tad sasēdināšanu ap galdu var veikt šādi (46.zīm.):



46.zīm.

Uzdevuma prasības ir izpildītas.

40. Atbilde 7 punktus (Sk. 47.zīm.).

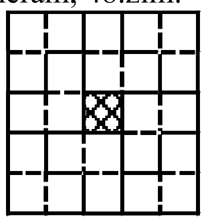


47.zīm.

Risinājums Pierādīsim, ka, atliekot mazāku punktu skaitu, uzdevuma prasība nav izpildāma.

Pieņemsim pretējo: esam atlikuši mazāk nekā 7 punktus un varam atrast visu minēto garumu nogriežņus. Novilksim tos. Tā kā katrs no apskatāmajiem skaitļiem lielāks par visu to apskatāmo skaitļu summu, kuri par to ir mazāki, tad nekādi novilktie nogriežņi neveido slēgtu lauztu līniju (teorēma par lauztas līnijas garumu). Tomēr, ja sešu (vai mazāk) punktu kopā novelk sešus nogriežņus, slēgtai lauztai līnijai ir jāveidojas. Esam ieguvuši pretrunu.

41. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 48.zīm.



48.zīm.

42. Atbilde Jā, var. Piemēram, tā:

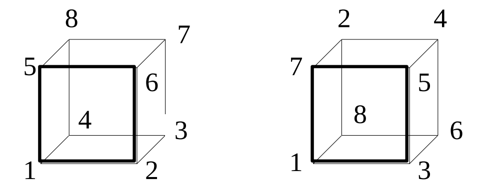
21; 1; 22; 2; 23; 3; 24; 4; 25; 5; 26; 6; 27; 7; 28; 8; 29; 9; 30; 10; 31; 11; 32; 12; 33; 13; 34; 14; 35; 15; 36; 16; 37; 17; 38; 18; 39; 19; 40; 20.

43. Atbilde Nē, tā nevar gadīties.

Risinājums Pieņemsim pretējo: tādu divu filatēlistu, kas nosūtījuši apsveikumu viens otram, nav. Aplūkosim visus iespējamos filatēlistu pārus. Tādu pāru ir $10 \cdot 9/2=45$. Ja katra pāra ietvaros nosūtīts ne vairāk kā 1 apsveikums (tas atbilst situācijai, kad nekādi divi filatēlisti nenosūtīja apsveikumu viens otram), tad kopā nosūtīti ne vairāk kā 45 apsveikumi. Bet pēc dotā tika nosūtīti $10 \cdot 5=50$ apsveikumi. Iegūta pretruna. Tātad noteikti ir tādi filatēlistu pāri (no risinājuma redzam, ka tādu būs vismaz pieci), kuros apsveikumi nosūtīti savstarpēji.

Piezīme. Pamatosim, kāpēc filatēlistu pāru ir 45. Apzīmēsim filatēlistus ar 10 burtiem A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Veidosim visas iespējamās divu dažādu burtu virknes. Burtam A galā var pierakstīt jebkuru no 9 pārējiem burtiem; tātad ir 9 atšķirīgas divu dažādu burtu virknes, kas sākas ar A. Līdzīgi arī ar katru no pārējiem burtiem sākas 9 atšķirīgas divu dažādu burtu virknes. Tātad divu dažādu burtu virknīšu pavisam ir $10 \cdot 9$. Bet dažādu filatēlistu pāru ir divas reizes mazāk nekā iegūto virknīšu, jo katram pārim atbilst divas virknītes (piemēram, virknītes AB un BA abas atbilst filatēlistu A un B pārim). Tāpēc filatēlistu pāru skaits ir $10 \cdot 9/2=45$.

44. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 49.zīm. Mušas sanumurētas ar cipariem no 1 līdz 8.



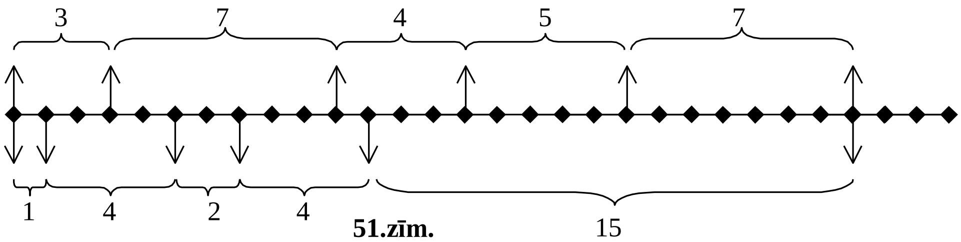
49.zīm.

45. Atbilde Sk., piemēram, 50.zīm.

	3	7	4	5	7
1	1				
4	2	2			
2		2			
4		3	1		
15			3	5	7

50.zīm.

Risinājums Ievērosim, ka 3+7+4+5+7=1+4+2+4+15=26. Tātad arī visu ierakstīto skaitļu summai jābūt 26. Novilksim skaitļu asi. Virs tās pēc kārtas atliksim 3; 7; 4; 5 un 7 vienības garus nogriežņus, bet zem tās - attiecīgi 1; 4; 2; 4 un 15 vienības garus nogriežņus (sk. 51.zīm.).



51.zīm.

Augšējā tabulas stūrī ierakstām 1, jo pirmās rindiņas summa ir 1. Ierakstot tabulas stūrī 1, mēs redzam, ka līdz nākamajai atzīmei virs ass (tā atbilst pirmās kolonnas skaitļu summai) pietrūkst 2. Ierakstām 2 zem 1. Tālāk redzam, ka līdz nākamajai atzīmei zem ass (tā atbilst otrās rindiņas summai) trūkst 2. Ierakstām to blakus iepriekšierakstītajam 2. Līdz nākamajai atzīmei zem ass atkal ir 2 vienības, ierakstām 2 zem pēdējā ieraksta. Tālāk līdz nākamajai atzīmei (otrās kolonnas summai) trūkst 3, ierakstām to otrajā kolonnā. Tādā veidā procesu turpinām, līdz nonākam līdz pēdējai atzīmei.

Protams, iespējami arī citādi paņēmieni, kā aizpildīt tabulu.

46. Atbilde 17 nepāra skaitļi.

1. risinājums Ar 3 dalās katrs trešais skaitlis. Tie ir 3; 6; 9; 12; 15; ...99. Šie skaitļi pamīšus ir nepāra, pāra, nepāra, pāra, ... Šajā virknē pirmā simta robežās ir 33 skaitļi. Tā kā virkne sākas un beidzas ar nepāra skaitli, tad tajā nepāra skaitļu ir par 1 vairāk nekā pāra, tātad 17 skaitļi.

2. risinājums Aplūkosim pēc kārtas ņemtus skaitļu sešiniekus: (1; 2; 3; 4; 5; 6), (7; 8; 9; 10; 11; 12) ... (91; 92; 93; 94; 95; 96). Katrā no tiem viens nepāra skaitlis dalās ar 3. Tādu sešinieku pirmajā simtā ir 16. Paliek neapskatīti skaitļi 97; 98; 99 un 100. No tiem tikai 99 dalās ar 3 un ir arī nepāra skaitlis. Tātad pirmajā simtā ir 17 nepāra skaitļi, kas dalās ar 3.

Risinājums To, lai neviena summa nepārsniegtu 19, var panākt, piemēram, tā, kā redzams 52.zīm.

16	2	14	5
1	15	4	13
8	3	12	6
9	10	7	11

52.zīm.

Lai neviena no minētajām summām nepārsniegtu 18, skaitli 16 drīkst rakstīt vienīgi stūra rūtiņā, jo vienīgi stūra rūtiņām ir tikai 2 "kaimiņi" un skaitlim 16 par "kaimiņu" der tikai skaitļi 1 un 2. Ierakstām 16 stūra rūtiņā (sk. 53.zīm.), ierakstām arī tā kaimiņus - 1 un 2.

16	2		
1	A	B	
	C		

53.zīm.

Skaitlim 15 par "kaimiņiem" der vienīgi 1, 2 un 3. Tā kā 1 un 2 ir ierakstīti, tad skaitlis 15 būtu jāraksta "kaimiņos" ar 1 un 2, proti, rūtiņā A (sk. 53.zīm.). Taču rūtiņai A ir vēl divas neaizpildītas kaimiņrūtiņas B un C, kuru aizpildīšanai der tikai viens skaitlis 3. Tātad prasīto izpildīt nav iespējams.

48. Risinājums Ievērosim, ka $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, ja n ir naturāls skaitlis. Zinot to, aplūkosim šādas stingras nevienādības:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}>\underbrace{\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16\,\text{reizes}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{64}>\underbrace{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{64}}_{32\,\text{reizes}}=\frac{1}{2}$$

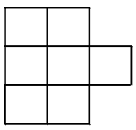
Saskaitot nevienādības, iegūsim

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{62}+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}>2\frac{1}{2}$$

Pieskaitīsim abām pusēm $1\frac{1}{2}$ un iegūsim

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{62}+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}>4,$$ ko arī vajadzēja pierādīt.

49. Risinājums Pamatosim, ka nepieciešamas vismaz 7 krāsas. Aplūkosim lapas centrā novietotu speciālu figūru, kas sastāv no 7 rūtiņām (sk. 54.zīm.).



54.zīm.

Katras 2 šīs figūras rūtiņas ir iespējams pārklāt ar doto figūru, paliekot lapas robežās. (Pārliecinieties par to patstāvīgi, aplūkojot visus 54.zīm. redzamās figūras rūtiņu pārus.) Tātad nekādas divas šīs figūras rūtiņas nedrīkst krāsot vienā krāsā. Tātad nepieciešamas vismaz 7 krāsas.

Ievērosim: mūsu spriedums nepierāda, ka ar 7 krāsām lapu var izkrāsot vajadzīgajā veidā.

50. Atbilde C var būt iedomājies vai nu skaitļus 2; 3, vai arī skaitļus 3; 4.

Risinājums Pēc A pirmā apgalvojuma ir skaidrs, ka A pateiktais skaitlis nav "1". Pretējā gadījumā A apgalvojums būtu aplams, jo, zinot, ka skaitļi ir viens otram sekojoši, viņš konstatētu, ka tie ir 1 un 2. Taču pēc dotā visi apgalvojumi ir patiesi. Analogi spriežot, secinām, ka arī B nav pateikts skaitlis "1". Ievērosim: B zina, ka A nav pateikts skaitlis 1. Tā kā arī B apgalvojums ir patiess, tad B nevar būt pateikts skaitlis 2. Tiešām, ja B būtu pateikts 2, tad viņš, zinot, ka A nav pateikts 1, varētu pateikt abus skaitļus - 2 un 3. Tātad pēc pirmajiem 2 apgalvojumiem A zina, ka B nav pateikts ne 1, ne 2. Tā kā tagad A apgalvo, ka viņš zina pateiktos skaitļus, tad A var būt pateikts vai nu 2, vai 3. Proti, sākotnējie skaitļi var būt vai nu 2 un 3, vai 3 un 4. A nevarētu šādi apgalvot, ja viņa skaitlis būtu 4, jo tad būtu jāšaubās starp skaitļu pāriem 3 un 4 un 4 un 5; līdzīgas šaubas rastos, ja A būtu pateikts skaitlis, kas lielāks par 4.

51. Atbilde Starp a, b, c, d vai nu ir divi vienādu skaitļu pāri, vai arī visi skaitļi ir vienādi.

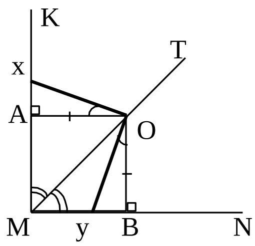
Risinājums Izdarīsim identiskus pārveidojumus:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$$
$$a^2-2ab+b^2+c^2-2cd+d^2=0$$
$$(a-b)^2+(c-d)^2=0$$

Katrs no saskaitāmajiem ir pozitīvs vai nulle. Divu nenegatīvu saskaitāmo summa ir 0 tādā un tikai tādā gadījumā, ja tie abi ir 0, proti, ja $(a - b)^2 = 0$ un $(c - d)^2=0$ jeb $a - b=0$ un $c - d=0$. Iegūstam, ka $a=b$ un $c=d$.

Nedrīkst aizmirst, ka šāds rezultāts pieļauj arī gadījumu, kad $a=b=c=d$, proti, visi skaitļi ir vienādi. Tātad starp dotajiem skaitļiem vai nu ir divi vienādu skaitļu pāri, vai arī visi skaitļi ir vienādi. Atbilstošos piemērus viegli konstruēt.

52. Risinājums



55.zīm.

Novilksim no punkta O perpendikulus OA un OB pret leņķa KMN malām KM un MN. Tā kā $O \in MT$ un MT ir $\angle KMN$ bisektrise, tad punkta O attālumi līdz leņķa malām ir vienādi:

$$OA=OB \quad (1)$$

Aplūkosim vienādības:

$$\angle XOA=\angle XOB-\angle AOB \quad (2)$$
$$\angle YOB=\angle XOB-\angle XOY=\angle XOB-90^o \quad (3).$$

Pamatosim, ka $\angle AOB=90^o$. Tā kā MT ir $\angle KMN$ bisektrise, tad $\angle AMO=45^o$ un $\angle BMO=45^o$. Savukārt ΔOAM un ΔOBM ir taisnleņķa. Tad $\angle AOM=45^o$ un $\angle BOM=45^o$; tāpēc

$$\angle AOB=\angle AOM+\angle BOM=90^o.$$

Tad no (2) un (3) seko

$$\angle XOA=YOB \quad (4)$$

No (1) un (4) izriet, ka $\Delta AOX=\Delta BOY$ kā taisnleņķa trijstūri, kam katete un šaurais pieleņķis ir vienādi. Tāpēc šo trijstūru hipotenūzas arī ir vienādas, proti, OX=OY.

53. Atbilde Piemēram, tā:

Sarkanās:	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15	17
Baltās:	8	7	6	5	4	3	2	1	17	16	15	14	13	12	11	10	9
Summa:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

54. Atbilde Nē, nevar.

Risinājums Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x ciparu summu. No uzdevumā dotā seko, ka $S(A)=S(B)$. Reizinājums $A\cdot B$ dalās ar 3, jo reizinājuma ciparu summa ir 111. Ja reizinājums dalās ar 3, tad kādam no reizinātājiem noteikti jādalās ar 3 (3 ir pirmskaitlis un tātad nevar tikt sadalīts pirmreizinātājos). Pieņemsim, ka A dalās ar 3. Tad $S(A)$ dalās ar 3. Tā kā $S(A)=S(B)$, tad $S(B)$ dalās ar 3. Tātad arī skaitlis B dalās ar 3. Tādā gadījumā reizinājumam $A\cdot B$ noteikti jādalās ar 9, bet $S(A\cdot B)=111$ un ar 9 nedalās. Esam ieguvuši pretrunu.

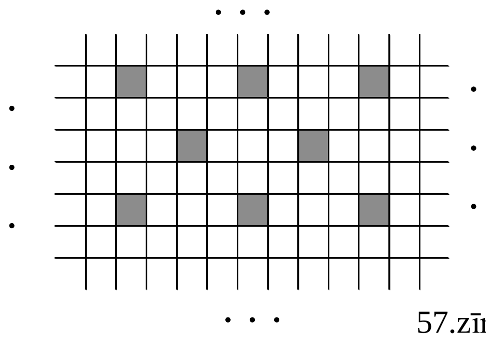
Analogi spriežam arī tad, ja pieņem, ka B dalās ar 3.

55. Risinājums Ierakstīsim rūtiņās ciparus no 1 līdz 8 tā, kā parādīts 56.zīm.

...	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4		...		
...		5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8		...	
	...		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4		...
		...		5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	...

56.zīm.

Vienas krāsas rūtiņas izvietotas tā, kā redzams 57.zīm.:



57.zīm.

Viegli redzēt, ka ar uzdevumā minēto figūru nevar pārklāt vienlaicīgi 2 ieēnotās rūtiņas. Tātad katrā šādā figūrā atrodas augstākais 1 ieēnotā rūtiņa, tātad katra krāsa tajā sastopama augstākais 1 reizi. Tātad visas krāsas tajā ir dažādas.

56. Atbilde Jā, eksistē. Piemēram,

$A=-1$; $B=-2$; $C=-3$, tad

$A^2=1$; $B^2=4$; $C^2=9$

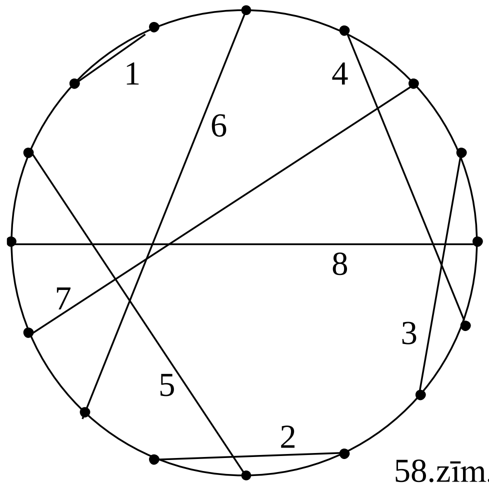
$A^3=-1$; $B^3=-8$; $C^3=-27$.

Risinājums Uzdevuma nosacījumus apmierina jebkuri trīs **negatīvi** skaitļi A, B, C, kuriem $A>B>C$. Tad $|A|<|B|<|C|$. No tā seko

$|A|^2<|B|^2<|C|^2$ (1) un $|A|^3<|B|^3<|C|^3$ (2).

Tā kā katram negatīvam skaitlim x pastāv vienādība $x=-|x|$, tad $x^2=|x|^2$ un $x^3=-|x|^3$. Tāpēc no (1) seko $A^2<B^2<C^2$ un no (2) seko $-A^3<-B^3<-C^3$ jeb $A^3>B^3>C^3$.

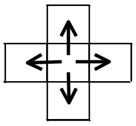
57. Atbilde Jā, var. Skat. 58.zīm.



58.zīm.

Tā kā riņķa līnija sadalīta vienādos lokos, tad hordu garumus varam "mērīt" pēc tām atbilstošo mazo loku skaita: atceramies, ka vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas, bet dažādiem lokiem - dažādas hordas.

58. Risinājums Sauksim par attālumu starp divām rūtiņām A un B mazāko soļu skaitu, ar kuru var aiziet no rūtiņas A uz rūtiņu B, ja katrā solī varam šķērsot divu rūtiņu kopējo malu, bet ne stūri (iespējamie soļi parādīti 59.zīm.)



59.zīm.

Viegli saprast, ka vislielākais attālums ir starp rūtiņām, kas atrodas tabulas pretējos stūros, un tas ir 18.

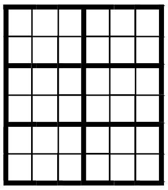
Aplūkosim rūtiņu x, kurā ierakstīts vismazākais no tabulā atrodamajiem skaitļiem (ja tādas rūtiņas ir vairākas, ņemam jebkuru no tām.) Apzīmēsim šo skaitli ar n. Tā kā uz jebkuru rūtiņu var aiziet no x ar ne vairāk kā 18 soļiem un katrā solī mēs pārejam uz rūtiņu, kurā ierakstītais skaitlis atšķiras no iepriekšējā rūtiņā ierakstītā skaitļa ne vairāk kā par 1, tad nevienā rūtiņā nav ierakstīts skaitlis, kas būtu lielāks par n+18. Tā kā n ir vismazākais tabulā ierakstītais skaitlis, tad no šejienes seko: tabulā nav ierakstīti nekādi citi skaitļi kā vien n; n+1; ...; n+18 (varbūt daži no šiem skaitļiem pat nav tur ierakstīti!) Katrā ziņā tabulā nav ierakstīti vairāk par 19 dažādiem skaitļiem. Ja katrs no tiem būtu ierakstīts ne vairāk kā 5 reizes, tad pavisam skaitļi būtu ierakstīti ne vairāk kā $19\cdot5=95$ rūtiņās. Bet tabulā pavisam ir 100 rūtiņas; iegūta pretruna. Tātad kāds no skaitļiem tabulā ierakstīti vairāk nekā 5 reizes, t.i., vismaz 6 reizes.

59. Atbilde Jā, var. Sk., piemēram, 60.zīm.

1	2	-3	10	20	-30
-1	-2	3	-10	-20	30
5	6	-11	15	16	-31
-5	-6	11	-15	-16	31
8	9	-17	18	19	-37
-8	-9	17	-18	-19	37

60.zīm.

Risinājums Sadalīsim doto tabulu taisnstūros ar izmēriem 2x3 rūtiņas (sk. 61.zīm.).



61.zīm.

Skaidrs: ja katrā šajā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summas pa kolonnām un rindiņām būs 0, tad arī visā tabulā ierakstīto skaitļu attiecīgās summas būs 0.

a	b	-(a+b)	= 0
-a	-b	a+b	= 0
||	||	||	
0	0	0	

62.zīm.

Savukārt katrā šajā taisnstūrī skaitļus var ierakstīt, piemēram, tā, kā parādīts 62.zīm. Tā kā visiem tabulā ierakstītajiem skaitļiem jābūt atšķirīgiem, tad, izvēloties skaitļus a un b katram taisnstūrim, tie jāizvēlas "pietiekoši atšķirīgi".

60. Risinājums

a) Ja starp naturāla skaitļa cipariem ir 5 dažādi, tad iespējami 2 gadījumi:

1) vismaz viens no dotajiem cipariem ir pāra cipars. Tādā gadījumā novietosim to skaitļa beigās. Iegūtais skaitlis (kura pirmo ciparu, protams, varam izvēlēties atšķirīgu no 0) ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad dalās ar 2 un nav pirmskaitlis.
2) ja starp dotajiem pieciem cipariem nav neviena pāra cipara, tad dotie cipari ir 1; 3; 5; 7; 9 (pieci dažādi). Šajā gadījumā novietosim ciparu 5 skaitļa beigās. Iegūtais skaitlis dalās ar 5 un ir lielāks par 5, tātad tas nav pirmskaitlis.

b) Ja starp dotajiem četriem cipariem ir kāds pāra cipars vai 5, tad rīkosimies līdzīgi a) gadījumā aprakstītajam. Atliek izanalizēt gadījumu, kad dotais skaitlis sastāv no cipariem 1; 3; 7; 9.

Rīkosimies šādi. Sadalīsim doto skaitli A divu saskaitāmo summā

$$A = \underbrace{\dots\quad\dots}_{\substack{\text{cipari } 1;3;7;9 \\ \text{kaut kādā secibā}}}0000 + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{četrciparu skaitlis,} \\ \text{kura cipari ir } 1;3;7;9}}$$

Dalīsim pirmo saskaitāmo ar 7. Ja tas dod atlikumu 0, tad par otro saskaitāmo ņemsim 1379, jo tas, dalot ar 7, dod atlikumu 0. Ja abi saskaitāmie dalās ar 7, tad arī A dalās ar 7 un nav pirmskaitlis.

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 1, par otro ņemsim 1973 (1973:7=281 atl.6).

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 2, par otro ņemsim 3197 (3197:7=456 atl.5).

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 3, par otro ņemsim 1397 (1397:7=199 atl.4).

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 4, par otro ņemsim 1739 (1739:7=248 atl.3).

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 5, par otro ņemsim 3719 (3719:7=531 atl.2).

Ja pirmais saskaitāmais, dalot ar 7, dod atlikumu 6, par otro ņemsim 3179 (3179:7=454 atl.1).

Visos šajos gadījumos atlikumu summa ir 7, tātad summa dalās ar 7 un ir lielāka par 7; tātad A nav pirmskaitlis.

Jāpiezīmē, ka pēc uzdevuma nosacījumiem mēs drīkstam ciparus pārkārtot, kā mums tīk. Tātad mēs vienmēr varēsim "atdalīt" pēdējo mums vajadzīgo četrciparu skaitli.

61. Atbilde Pie Aijas viesojās 7 meitenes.

Risinājums Tā kā katram zēnam abās pusēs stāvēja meitenes, bet katrai meitenei abās pusēs stāvēja zēni, tad zēni un meitenes pa apli stāv pamīšus. Tā kā aplī ir 8 zēni, tad tur ir arī 8 meitenes (katrā atstarpē starp 2 zēniem pa vienai). Tā kā pati Aija arī stāv aplī, tad pie Aijas ciemos atnākušas 7 meitenes.

62. Atbilde To izdarīt nav iespējams.

Risinājums Visu mūsu rīcībā esošo atsvaru masas ir pāra skaitļi. Pēc tam, kad pirmo reizi uz kausiem tiek novietoti atsvari, smagākais kauss "pārsver" vieglāko par lielumu $(s_1+s_2+...+s_k)$- $(v_1+v_2+...+v_m)$, kur $s_1+s_2+...+s_k$ - uz smagākā kausa novietoto atsvaru masas, bet $v_1+v_2+...+v_m$- uz vieglākā kausa novietoto atsvaru masas. Visu atsvaru masas izsakās ar pāra skaitu gramu. Izdarot saskaitīšanas un atņemšanas darbības tikai ar pāra skaitļiem, rezultāts vienmēr ir pāra skaitlis. Tātad pirmajā svēršanā mēs varam nosvērt miltu kaudzīti, kura sver pāra skaitu gramu. Šo kaudzīti līdz ar atsvariem varam izmantot otrajā svēršanā; pēc tam abas jau iegūtās kaudzītes līdz ar atsvariem varam izmantot trešajā svēršanā, utt. Tomēr, spriežot līdzīgi kā iepriekš, mēs katrā jaunā svēršanā varam izmantot tikai jau zināmus smagumus, kuru masas ir pāra skaits gramu, un tātad atkal iegūt tikai tādu jaunu miltu kaudzīti, kuras masa ir pāra skaits gramu. Apvienojot šādas kaudzītes, mēs iegūsim tādu miltu daudzumu, kura masa gramos ir pāra skaitlis. Bet mums jānosver 255 grami.

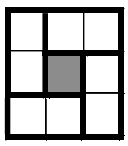
63. Atbilde Mazākā iespējamā summas vērtība ir 4.

Risinājums Piemēru, kur šī summa ir 4, sk. 63.zīm.

0	1	0
1	0	1
0	1	0

63.zīm.

Pamatosim, kāpēc summa nevar būt mazāka par 4. Sadalīsim kvadrātu taisnstūros tā, kā parādīts 64.zīm. (viena rūtiņa paliek ārpus taisnstūriem).



64.zīm.

Visa kvadrāta skaitļu summa veidojas no šo četru taisnstūru skaitļu un skaitļa, kas ierakstīts pelēkajā rūtiņā, summas. Katrā no 4 taisnstūriem ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 1. Tas izriet no dotā. (Tātad 1 ir mazākā šī rūtiņu pāra skaitļu summa). Arī pelēkajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir nenegatīvs. Tātad visu ierakstīto skaitļu summa nevar būt mazāka par 4.

64. Atbilde Tā nevar būt.

Risinājums Pieņemsim, ka starp skaitļiem ab, ac, cd, de, bf un ef ir tieši trīs negatīvi skaitļi. Triju pozitīvu un triju negatīvu skaitļu reizinājums ir negatīvs; tāpēc

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(cd)\cdot(de)\cdot(bf)\cdot(ef)<0.$$

Taču šis reizinājums nevar būt negatīvs, jo katru savu reizinātāju tas satur tieši 2 reizes:

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(cd)\cdot(de)\cdot(bf)\cdot(ef)=a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot d^2\cdot e^2\cdot f^2.$$

Tā kā starp dotajiem skaitļiem nav 0, tad šis reizinājums noteikti ir pozitīvs. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums, ka starp dotajiem sešiem reizinājumiem ir tieši trīs negatīvi, ir bijis aplams.

65. Atbilde Pirmais skaitlis ir lielāks par otro.

Risinājums Aplūkosim visus 80 pirmā skaitļa reizinātājus. Sadalīsim tos grupās pa 8, saliekot iekavas:

$$(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2).$$

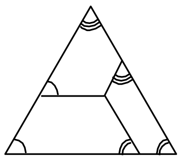
Tā kā katrās iekavās ir 8 reizinātāji, tad pavisam ir 10 iekavas. Iegūto izteiksmi varam pārrakstīt arī šādi:

$(*)$ $\underbrace{256\cdot256\cdot\ldots\cdot256}_{\text{10 reizinātāji}}$, jo katras iekavas vērtība ir 256. Analogi rīkosimies arī ar otro skaitli. Sadalīsim trijniekus 10 iekavās, katrās pa 5 trijniekiem:

$$(**)\quad \underbrace{(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot\ldots\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)}_{\text{10 iekavas}}=\underbrace{243\cdot243\cdot\ldots\cdot243}_{\text{10 reizinātāji}}$$

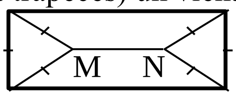
Tagad reizinājumos $(*)$ un $(**)$ ir pa 10 reizinātājiem. Visi reizinātāji ir pozitīvi un katrs pirmā skaitļa reizinātājs ir lielāks par katru otrā skaitļa reizinātāju. Tātad pirmais skaitlis ir lielāks par otro.

66. Risinājums Vispirms parādīsim, kā **vienādmalu** trijstūri var sagriezt vienādsānu trapecēs, izvēloties trijstūra iekšpusē patvaļīgu punktu un novelkot no tā nogriežņus paralēli trijstūra malām (sk. 65.zīm.)



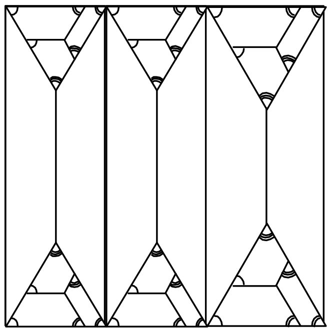
65.zīm.

Tagad ievērosim, ka "garu un šauru" taisnstūri var sadalīt vienādmalu trijstūros (tos mēs jau protam sadalīt trapecēs) un vienādsānu trapecēs (sk. 66.zīm.).



66.zīm.

Risinājumā ir svarīgi, ka taisnstūris ir pietiekami izstiepts, lai abi vienādmalu trijstūri savstarpēji nepārklātos. Ja gadījumā, šādi zīmējot, abi trijstūri pārklājas, tad sākotnējais taisnstūris jāpārdala uz pusēm - divos taisnstūros - un jāveic konstrukcija katrā taisnstūrī atsevišķi. Lai pierādījums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc punkti M un N atrodas vienādos attālumos no taisnstūra horizontālajām malām; izdariet to patstāvīgi. Skaidrs, ka jebkuru kvadrātu var sadalīt taisnstūros, kurus, savukārt, var sadalīt kā parādīts iepriekš (sk. 67.zīm.)



67.zīm.

67. Risinājums Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c un d dalīšanos ar 3. Dalot naturālu skaitli ar 3, iespējami 3 dažādi atlikumi - 0; 1 un 2. Tā kā doti 4 skaitļi, tad vismaz diviem no tiem atlikumi, dalot ar 3, ir vienādi (ja visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 3, būtu atšķirīgi, doto skaitļu nebūtu vairāk par 3). Ja divi skaitļi x un z dod vienādus atlikumus, dalot ar kādu skaitli y, tad skaitļu x un z starpība dalās ar y bez atlikuma. (Tiešām, ja x, dalot ar y, dod atlikumu r, un z, dalot ar y, arī dod atlikumu r, tad $x=k\cdot y+r$ un $z=m\cdot y+r$.

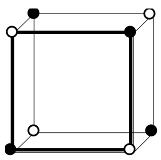
Tad $x-z=(ky+r)-(my+r) = ky+r-my-r = ky-my=y(k-m)$; tātad x-z dalās ar y.) Tā kā uzdevumā dotais reizinājums satur visas iespējamās skaitļu a, b, c, d starpības pa divi, tad viena no tām dalīsies ar 3.

Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c, d dalīšanos ar 4. Iespējami atlikumi, dalot ar 4, ir 0, 1, 2 un 3. Ja starp dotajiem skaitļiem ir divi tādi, kas, dalot ar 4, dod vienādus atlikumus, tad šo skaitļu starpība dalās ar 4.

Apskatīsim tagad gadījumu, kad visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 4, ir dažādi. Tā kā reizinājums satur visas iespējamās šo skaitļu starpības pa divi, tad starp tām ir divas, kas dalās ar 2 - starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 0 un 2, un starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 1 un 3. Ja divas no iekavām dalās ar 2, tad viss reizinājums dalās ar 4. Tātad reizinājums dalās gan ar 3, gan ar 4. Tā kā skaitļu 3 un 4 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad reizinājums dalās ar $3x4=12$.

68. Atbilde Tas nav iespējams.

Risinājums Izkrāsosim kuba virsotnes baltā un melnā krāsā tā, kā parādīts 68.zīm.

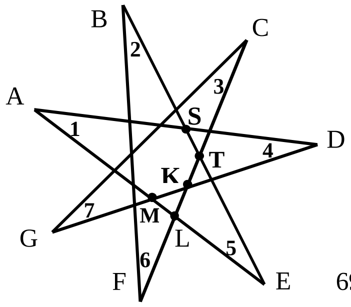


68.zīm.

Skudra, pārvietojoties pa kuba šķautnēm, nokļūs no melnas virsotnes baltā un no baltas virsotnes melnā. Tādā gadījumā viņas maršrutu mēs varam pierakstīt: M-B-M-B-...-M-B-... Ir skaidrs, ka skudras maršrutā balto un melno virsotņu skaits ir vai nu vienāds (ja ceļu sāk vienas krāsas virsotnē, bet beidz otras krāsas virsotnē), vai arī atšķiras par 1 (ja ceļu sāk un beidz vienas un tās pašas krāsas virsotnēs). Ja skudras ceļojuma laikā 7 virsotnēs tā būtu bijusi tieši 4 reizes, bet vienā vismaz 6 reizes, tad, tā kā ir tieši 4 katras krāsas virsotnes, mēs varam apgalvot, ka vienas krāsas visās virsotnēs tā ir bijusi tieši pa 4 reizēm, bet otras krāsas 3 virsotnēs pa 4 reizēm un vienā virsotnē vismaz 6 reizes. Tādā gadījumā skudras maršruta krāsu virknītē viena krāsa parādītos $4x4=16$ reizes, bet otra vismaz $3x4+6=18$ reizes. Tas ir pretrunā ar to, ka dažādu krāsu virsotņu skaits virknītē atšķiras ne vairāk kā par 1.

69. Atbilde 180^o.

1. risinājums



69.zīm.

Risinājumā izmantosim faktu, ka trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.

(1) Apskatām Δ AMD: $\angle 1+\angle 4=\angle KML$

(2) Apskatām Δ GKC: $\angle 7+\angle 3=\angle MKL$

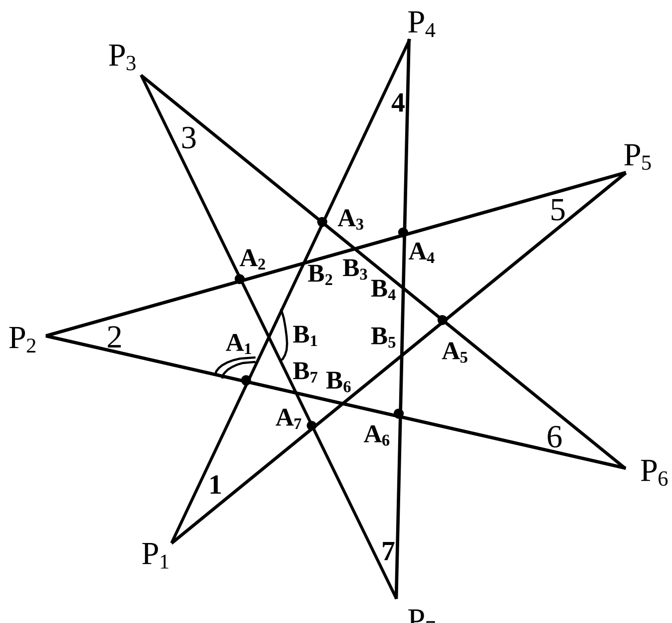
(3) Apskatām Δ BTF: $\angle 2+\angle 6=\angle LTE$

(4) Apskatām Δ TLE: $\angle 5+\angle LTE=\angle MLT$

No (1) - (4) iegūstam:

$$\angle 5+(\angle 2+\angle 6)+(\angle 1+\angle 4)+(\angle 7+\angle 3) =$$
$$=\angle 5+\angle LTE+\angle KML+\angle MKL=$$
$$=\angle MLT+\angle KML+\angle MKL=180^o.$$

2. risinājums



70.zīm.

Ar A_i apzīmēsim leņķi pie virsotnes "zvaigznes iedobumā", bet ar B_i - iekšējo septiņstūra leņķi, i=1; 2; ...; 7 (sk. 70.zīm.).

Aplūkosim četrstūri $P_1A_7B_7A_1$. Tā iekšējo leņķu summa ir 360^o: $\angle 1+\angle A_7+\angle B_7+\angle A_1=360^o$. Analogi spriežam par četrstūriem $P_2A_1B_1A_2$, $P_3A_2B_2A_3$, $P_4A_3B_3A_4$, $P_5A_4B_4A_5$, $P_6A_5B_5A_6$, $P_7A_6B_6A_7$ un iegūstam:

$$\angle 1+\angle A_7+\angle B_7+\angle A_1=360^o$$
$$\angle 2+\angle A_1+\angle B_1+\angle A_2=360^o$$
$$\angle 3+\angle A_2+\angle B_2+\angle A_3=360^o$$
$$\angle 4+\angle A_3+\angle B_3+\angle A_4=360^o$$
$$\angle 5+\angle A_4+\angle B_4+\angle A_5=360^o$$
$$\angle 6+\angle A_5+\angle B_5+\angle A_6=360^o$$
$$\angle 7+\angle A_6+\angle B_6+\angle A_7=360^o$$

Saskaitīsim šīs vienādības, apzīmējot $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=S$;
iegūstam :

$$S+2(\angle A_1+\angle A_2+...+\angle A_7)+(\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7)=7\cdot 360^o \quad (*)$$

Ievērosim, ka $\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7=180^o\cdot(7-2)=900^o$ kā septiņstūra iekšējo leņķu summa.

Aplūkosim $\Delta A_1B_1B_7$. Izmantosim 1. risinājumā minēto teorēmu par ārējā leņķa lielumu. Tad iegūsim:

$$\angle A_1=(180^o-\angle B_1)+(180^o-\angle B_7)=360^o-\angle B_1-\angle B_7$$

Līdzīgi iegūstam: $\angle A_2=360^o-\angle B_1-\angle B_2$

$\angle A_3=360^o-\angle B_2-\angle B_3$

$\angle A_4=360^o-\angle B_3-\angle B_4$

$\angle A_5=360^o-\angle B_4-\angle B_5$

$\angle A_6=360^o-\angle B_5-\angle B_6$

$\angle A_7=360^o-\angle B_6-\angle B_7$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam:

$$\angle A_1+\angle A_2+...+\angle A_7 = 7\cdot 360^o - 2\cdot(\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7) =$$
$$= 2520^o-2\cdot 900^o = 720^o.$$

Ievietojot iegūtos rezultātus vienādībā ($*$), iegūstam:

$$S=2520^o-900^o-1440^o=180^o.$$

70. Atbilde Andrim var būt vai nu 12, vai 13 draugi.

Risinājums

Vienošanās. Risinājumā kā divas atsevišķas draudzības tiks uzskaitītas X draudzēšanās ar Y un Y draudzēšanās ar X (ja X un Y ir draugi)

Andra klasē mācās 26 skolēni (25 klasesbiedri un pats Andris). Aplūkosim 2 gadījumus: Andrim ir klasesbiedrs bez draugiem, vai arī katram ir vismaz 1 draugs.

1) Ja Andrim ir klasesbiedrs bez draugiem, tad lielākais draugu skaits, kāds var būt kādam šīs klases skolēnam, ir 24 (ja kādam būtu 25 draugi, tad viņš draudzētos ar visiem pārējiem šīs klases skolēniem un nebūtu tāda skolēna, kuram nav neviena drauga). Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 0; 1; 2; ...; 24 draugiem. Apvienosim grupā A tos skolēnus, kuriem ir 0; 1; 2; ...; 12 draugi, bet pārējos grupā B, Andri neieskaitot nevienā no grupām. Grupas B skolēniem kopā ir 13+14+15+...+24=222 draudzības. Grupas A skolēniem kopā ir 0+1+2+...+12=78 draudzības. Tātad grupas B skolēniem ir vismaz 222-78=144 draudzības ārpus grupas A, un tikai 144 draudzības ārpus A tai iespējamas vienīgi tad, ja visas A draudzības ir grupā B. No šīm 144 draudzībām pašas grupas B ietvaros nevar būt vairāk kā 12x11=132 draudzības. Tātad grupas B skolēniem vēl atliek vismaz 144-132=12 draudzības ārpus grupām A un B. Tātad visas šīs draudzības ir ar Andri. Tātad Andrim jābūt draugos ar visiem 12 grupas B skolēniem. Ja kāds no grupas A arī draudzētos ar Andri, tad grupai A būtu mazāk draudzību grupā B, un tad grupai B vajadzētu vairāk draudzību ārpus A, kas nav iespējams. Tāpēc neviens no grupas A nedraudzējas ar Andri. Līdz ar to Andrim ir tieši 12 draugi. Uzkonstruēsim piemēru, kurā parādīsim, ka tāda situācija tiešām ir iespējama. Apzīmēsim visus pirmās grupas bērnus ar A0, A1, A2, …, A12, bet otrās - ar B1, B2, …, B12.

A0 nedraudzējas ne ar vienu,
A1 draudzējas ar B1,
A2 draudzējas ar B1, B2
A3 draudzējas ar B1, B2, B3
A4 draudzējas ar B1, B2, B3, B4
utt.
A12 draudzējas ar B1, B2, B3, …, B12

Bez tam liksim visiem grupas B ietvaros draudzēties vienam ar otru un vēl arī ar Andri. Tādā gadījumā A0 ir 0 draugi, A1 ir 1 draugs, A2 ir 2 draugi utt., A12 ir 12 draugi. B1 ir 12(no grupas A) + 11(no grupas B) +1 (Andris) = 24 draugi, B2 ir 11+11+1=23 draugi, B3 ir 10+11+1=22 draugi, utt.…, B1 ir 2+11+1=14 draugi, B12 ir 1+11+1=13 draugi. Tātad esam parādījuši tādu klases modeli, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem un kurā Andrim ir 12 draugi.

2) Aplūkosim otru gadījumu, kad Andra visiem klasesbiedriem ir vismaz viens draugs. Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 1, 2, …, 25 draugiem (Andrim ir 25 klasesbiedri un tiem visiem ir dažāds draugu skaits). Apvienosim tos Andra klasesbiedrus, kuriem ir 1, 2, 3, …, 12 draugi, grupā C, bet pārējos - grupā D. Grupas C bērniem kopā ir 1+2+…+12=78 draudzības, bet grupas D bērniem kopā ir 13+14+…+25=247 draudzības. Grupas D bērniem ārpus C ir vismaz 247-78=169 draudzības, un tikai 169 draudzības ārpus C grupai D iespējamas vienīgi gadījumā, ja visi grupas C skolēnu draugi ir no grupas D. Pašas grupas D ietvaros lielākais iespējamais draudzību skaits ir 13x12=156 (ja katrs katram ir draugs). Tātad vēl grupas D skolēniem paliek 169-156=13 draudzības ārpus grupām C un D. Tā kā D ir tieši 13 bērni, tad tie visi ir Andra draugi.

Ja Andrim būtu kāds draugs no C, tad D draugu skaits ārpus C būtu vēl lielāks, taču tas nav iespējams, jo D lielākais draugu skaits ārpus C var būt 13x12+13=169. Tātad grupā C nav neviena Andra drauga un Andrim ir tieši 13 draugi.

Tagad konstruēsim piemēru, lai parādītu, ka tāda situācija tiešām ir iespējama.

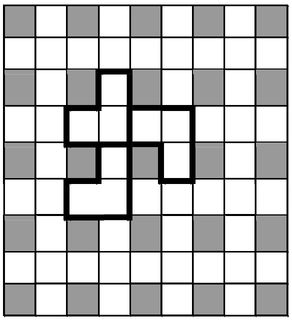
C1 draudzējas ar D1
C2 draudzējas ar D1, D2
C3 draudzējas ar D1, D2, D3
utt.…
C12 draudzējas ar D1, D2, …, D12

Vēl katrs no grupas D draudzējas ar visiem citiem šajā grupā un arī ar Andri.
Tad C1 ir 1 draugs, C2 - 2 draugi, …, C12 - 12 draugi.
D1 - 12(no grupas C)+12(no grupas D)+1(Andris)=25,
D2- 11+12+1=24,
utt.…
D12 - 1+12+1=14,
D13 - 12+1=13 draugi.
Tātad Andrim šajā piemērā ir tieši 13 draugi.

71. <u>Risinājums</u> Apzīmēsim Cipariņa pateikto skaitļu summu ar S, bet reizinājumu ar R. Tā kā tie ir naturāli skaitļi, tad $S \geq 3$. Ja S=3, tad Sandra uzreiz zinātu, ka iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 1. Ja S=4, tad arī Sandra uzreiz zinātu iedomātos skaitļus - 1; 1 un 2. Ja S=5, tad pastāv divas iespējas - 1; 1 un 3, kā arī 1; 2 un 2. Abos gadījumos S>R ($1+1+3>1\cdot1\cdot3$ un $1+2+2>1\cdot2\cdot2$). Tāpēc rodas pretruna ar Sandras izteikumu, ka viņa varētu noteikt skaitļus, ja zinātu, ka R>S. Ja $S \geq 7$, tad arī ir iespējami divi dažādi skaitļu trijnieki (visu iespējamo trijnieku skaits ir lielāks), kuriem reizinājums ir lielāks par summu. Tie ir (1; 2; S-3) un (1;3;S-4). Tiešām, $1+2+S-3<1\cdot2\cdot(S-3)=2S-6$ (ja $S \geq 7$, tad $2S-6>S$) un $1+3+S-4<1\cdot3\cdot(S-4)=3S-12$ (ja $S \geq 7$, tad $3S-12>S$). Tātad Sandra nevarētu pateikt trīs skaitļus, ja arī zinātu, ka to reizinājums ir lielāks par summu. Atliek viena iespēja: S=6. To, tāpat kā mēs, varēja konstatēt arī Regīna. Tad Cipariņa skaitļi ir (1; 1; 4); (1; 2; 3) vai (2; 2; 2). Tikai pirmajā gadījumā R<S, tāpēc Cipariņa iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 4.

72. Atbilde To izdarīt nav iespējams.

Risinājums Iekrāsosim kvadrātu tā, kā tas parādīts 71.zīm.



71.zīm.

Pavisam kvadrātā ir 81 rūtiņa. Deviņas no tām jau izgrieztas, atlikušie stūrīši saturēs kopā 72 rūtiņas. Tā kā katrs stūrītis satur 3 rūtiņas, tad vēl tiks izgriezti 72:3=24 stūrīši. Katrs stūrītis satur lielākais 1 krāsoto rūtiņu. Tātad 24 stūrīši saturēs lielākais 24 krāsotās rūtiņas, bet šādu rūtiņu pavisam ir 25. Tātad atlikušo figūru sagriezt stūrīšos nav iespējams.

73. Atbilde Mazākā iespējamā summa ir 34047.

Risinājums No desmit cipariem jācenšas izveidot divus **piecciparu** skaitļus. Pamatosim to. Divu piecciparu skaitļu summa (attiecīgi izvietojot ciparus) varētu būt piecciparu skaitlis. Ja izveidotu kādu sešciparu skaitli, tad otrs skaitlis būtu četrciparu skaitlis un abu skaitļu summa būtu vismaz sešciparu skaitlis. Katrs sešciparu skaitlis, protams, ir lielāks par jebkuru piecciparu skaitli. Līdzīgi pamato, ka viens no saskaitāmajiem nevar būt septiņciparu, astoņciparu skaitlis utt.

Apzīmēsim pirmo izveidoto skaitli ar $\overline{abcde}$, bet otro - ar $\overline{ABCDE}$. Mūs interesē, kad summa 10000(a+A)+1000(b+B)+100(c+C)+10(d+D)+(e+E) būs pati mazākā. Skaidrs, ka tā notiks tad, ja (a+A) būs pati mazākā iespējamā vērtība, tātad 1+2 vai 2+1. Tiešām, ja a vai A būtu lielāks par kādu no sekojošiem cipariem x, tad, mainot vietām x ar a resp. ar A, mēs iegūtu lielāku summu (vecākā šķirā parādītos lielāks cipars). Līdzīgi iegūstam, ka (b+B) būs nākamā mazākā iespējamā vērtība, t.i., 0+3 vai 3+0 utt. Iegūstam

$$a+A=1+2\ \ (2+1);\quad b+B=0+3\ \ (3+0);\quad c+C=4+5\ \ (5+4);$$
$$d+D=6+7\ \ (7+6);\quad e+E=8+9\ \ (9+8).$$

Tā kā summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības, tad ir vienalga, kuru ciparu no pāra (a,A) kombinējam ar kuru ciparu no pāra (b,B) utt. Pavisam iespējami 16 dažādi pāri ar minimālo summu. Lūk, divi piemēri:

$$\begin{array}{r} 20468 \\ \underline{+13579} \\ 34047 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10569 \\ \underline{+23478} \\ 34047 \end{array}$$

74. Risinājums Atrisināsim vispārīgāku uzdevumu. Pieņemsim, ka dota n pozitīvu skaitļu augoša virkne $a_1<a_2<...<a_n$ un otra n pozitīvu skaitļu augoša virkne $b_1<b_2<...<b_n$. Izveidosim n reizinājumus, katrā reizinājumā ņemot vienu skaitli no pirmās un vienu - no otrās virknes. Pie tam katru skaitli izmantosim kā reizinātāju tikai vienu reizi. Kādā gadījumā iegūto n reizinājumu summa būs vismazākā un kādā - vislielākā?

Mēs pierādīsim, ka vislielākā summa ir $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$ (t.i., ja sareizina savā starpā abu virkņu mazākos skaitļus, abu virkņu otros mazākos skaitļus, abu virkņu lielākos skaitļus), bet vismazākā summa ir $a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$ (t.i., ja sareizina pirmās virknes mazāko un otrās virknes lielāko skaitli, pirmās virknes otro mazāko un otrās virknes otro lielāko skaitli utt.)

Lemma. Ja e<f un g<h, tad eg+fh>eh+fg.

Tiešām, pierādāmo nevienādību var pārveidot par

$$eg+fh-eh-fg>0$$
$$e(g-h)-f(g-h)>0$$
$$(e-f)(g-h)>0,$$

kas ir acīmredzami patiesa nevienādība, jo e-f<0 un g-h<0, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.

No lemmas uzreiz seko mūsu uzdevuma atrisinājums.

Apskatīsim patvaļīgu summu, kas izveidota saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Pieņemsim, ka $a_i<a_j$, $b_x>b_y$ un mūsu apskatāmajā summā a_i sareizināts ar b_x, bet a_j sareizināts ar b_y, t.i., "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Izdarīsim vienu izmaiņu: reizināsim a_i ar b_y, bet a_j ar b_x; citus reizinājumus neaizskarsim. Saskaņā ar lemmu $a_i b_x + a_j b_y < a_i b_y + a_j b_x$, tātad mūsu apskatāmās summas vērtība šīs izmaiņas rezultātā ir pieaugusi. Turpinām šādas izmaiņas, kamēr vien var atrast tādas vietas, kur "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Šo izmaiņu rezultātā apskatāmās summas vērtība visu laiku augs. Agri vai vēlu visas šādas vietas būs atrastas un "izlabotas"; tad a_1 būs reizināts ar b_1, a_2 ar b_2, …, a_n ar b_n. Tā kā n reizinājumu summa visu laiku palielinājās, tad beigās iegūtā summa $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$ ir lielāka par sākotnējo (vai arī vienāda ar to, ja jau pašā sākumā a_1 bija reizināts ar b_1, a_2 ar b_2, utt.) Tātad šī summas vērtība ir lielākā iespējamā.

Līdzīgi pierāda apgalvojumu par to, kad n reizinājumu summas vērtība ir mazākā iespējamā.

Tā kā 1<2<3<4 un $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, tad mūsu apskatāmās izteiksmes

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4} = a\cdot\frac{1}{1}+b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot\frac{1}{3}+d\cdot\frac{1}{4}$$

lielākā iespējamā vērtība ir $4\cdot\frac{1}{1}+1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=6\frac{5}{12}$,

bet mazākā iespējamā vērtība ir $1\cdot\frac{1}{1}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{4}=4$.

75. Atbilde 996 dažādos veidos (ja neņem vērā saskaitāmo kārtību.)

Tie ir: 1993=1+1992; 1993=2+1991; 1993=3+1990; ……; 1993=996+997.

Risinājums Skaidrs, ka citu veidu, kā izsacīt 1993 kā divu naturālu skaitļu summu (pat nerūpējoties, lai saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs ir 1) vispār nav. Pamatosim, kāpēc katrs no šiem skaitļu pāriem apmierina uzdevuma nosacījumus. Pieņemsim, ka skaitli 1993 var izteikt kā divu tādu naturālu skaitļu summu, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir d>1:

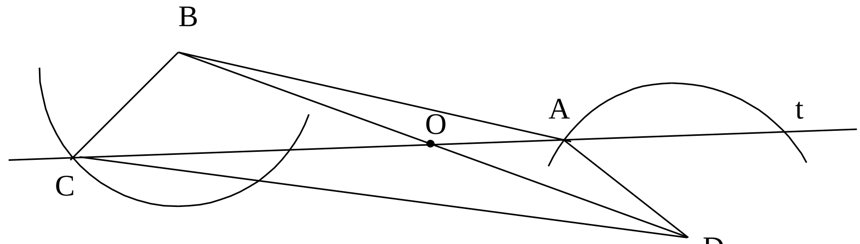
1993=a+b, LKD(a,b)=d, $d \neq 1$. Protams, ka d<1993, jo citādi $a \geq 1993$ un $b \geq 1993$ un summa a+b noteikti pārsniegtu 1993. Tad skaitļus a un b var izteikt šādi: $a=s\cdot d$, $b=t\cdot d$, kur $t,s \in N$. Tādā gadījumā $1993=a+b=s\cdot d+t\cdot d=d(s+t)$. No tā izriet, ka skaitlim 1993 ir vismaz 2 naturāli dalītāji d un (s+t), pie tam 1<d<1993. Taču tas nav iespējams, jo 1993 ir pirmskaitlis un tā vienīgie dalītāji ir 1 un 1993. Tātad d=1 un s+t=1993. Tātad, ja divu naturālu skaitļu summa ir 1993, tad tie ir savstarpēji pirmskaitļi. Savukārt, 1993 var izteikt kā divu naturālu skaitļu summu 996 atšķirīgos veidos.

To, ka 1993 ir pirmskaitlis, pārbauda tāpat kā 12.uzdevuma risinājumā.

76. Atbilde Nē; ir iespējams uzkonstruēt tādu izliektu četrstūri, kurš apmierina uzdevuma nosacījumus, bet nav paralelograms.

Risinājums Konstrukcija. (Sk. 72.zīm.)

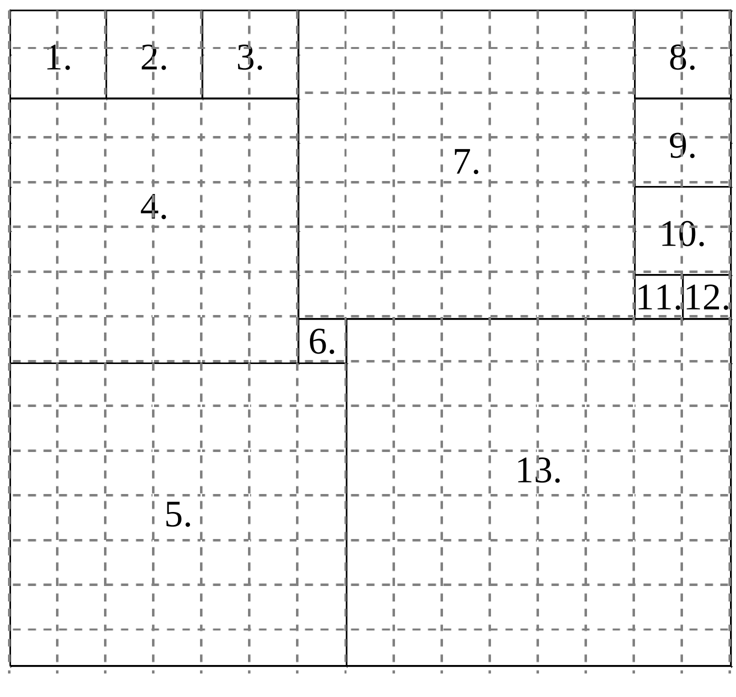
1) Novelkam diagonāli BD un atrodam tās viduspunktu O.
2) Caur O novelkam patvaļīgu taisni t, uz kuras atradīsies otra diagonāle; t nav perpendikulāra BD.
3) Ar rādiusa garumu, kas lielāks nekā B attālums līdz taisnei t un mazāks nekā BO, no centriem A un D novelkam riņķa līnijas lokus; katrs no tiem krusto taisni divos punktos.
4) Par A un C izvēlamies tos krustpunktus, kas ir dažādos attālumos no BD.



72.zīm.

Četrstūris ABCD nav paralelograms, lai gan BO=DO un AD=BC.

77. Atbilde Piemēram, sk. 73.zīm.



73.zīm.

78. Risinājums Pēc uzdevumā dotā ir iespējamas lielākais 2 atšķirīgu masu monētas. Pretējā gadījumā, izvēloties trīs no monētām, varētu gadīties, ka visām izvēlētajām trim monētām masas ir atšķirīgas. Tas neatbilst dotajam.

Pirmajā svēršanas reizē uz katra svaru kausa novietosim pa divām monētām. Aplūkosim divas iespējas.

I. Pieņemsim, ka iestājas līdzsvars. Tas var gadīties tad, ja visu monētu masas ir vienādas, vai arī tad, ja uz katra svaru kausa novietota viena vieglākā un viena smagākā monēta. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē salīdzinām divu monētu masas, kas pirmajā svēršanas reizē atradās uz viena svaru kausa. Ja arī tagad svari ir līdzsvarā, tad visām dotajām monētām masas ir vienādas. Ja svari nav līdzsvarā, tad starp dotajām monētām ir divu atšķirīgu masu monētas. Abas monētas, kas atrodas uz svariem pēdējā svēršanā, tad arī ir abu dažādo masu "pārstāves". Esam atraduši pa vienai monētai no katras masas.

II. Ja pirmajā svēršanas reizē svari nav līdzsvarā, tad **noteikti** visu monētu masas nav vienādas. Tātad ir divu dažādu masu monētas. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai, kas pirmajā svēršanas reizē atradās katra uz sava svaru kausa. Ja iestājas līdzsvars, tad abas otrajā reizē nesvērtās monētas ir ar dažādām masām, jo vienādu masu monētu noņemšana no katra svaru kausa nespēj ietekmēt līdzsvara attiecības. Ja otrajā svēršanas reizē līdzsvars neiestājas, tad uzreiz esam atraduši pa vienai monētai no katras masas (ir tikai divu atšķirīgu masu monētas).

79. Atbilde

1	2	3
4	5	6
7	8	9

vai

1	4	7
2	5	8
3	6	9

74.zīm.

Risinājums Tā kā ne 1, ne 9 nevar būt kādu divu doto skaitļu summas puse, tad gan 1, gan 9 ir ierakstāmi 3x3 kvadrāta stūros. Izšķirosim divas iespējas:

a) 1 un 9 ierakstīti stūros pie vienas malas (sk. 75.zīm.).

1	5	9
$*$	$*$	$*$

75.zīm.

1		$*$
3		$*$
5	7	9

76.zīm.

Tad starp tiem viennozīmīgi ierakstāms skaitlis 5. Lai varētu atrast divu naturālo skaitļu summas pusi, kas arī ir naturāls skaitlis, abiem skaitļiem jābūt vai nu pāra, vai arī nepāra. Tātad 75.zīm. ar $*$ apzīmētajās rūtiņās jāieraksta 3 dažādi nepāra skaitļi, bet mums vēl ir atlikuši tikai 2 neierakstīti nepāra skaitļi. Tātad 1 un 9 nevar rakstīt stūra rūtiņās pie vienas malas.

b) 1 un 9 tiek ierakstīti pretējos stūros (sk. 76.zīm.)

Kā jau iepriekš minējām, tikai vienādas paritātes skaitļu pussumma ir naturāls skaitlis, tāpēc arī abās pārējās stūra rūtiņās jāieraksta nepāra skaitļi. Ja kādā no šiem stūriem ierakstām 5 (sk. 76.zīm.), tad viennozīmīgi tiek ierakstīti arī skaitļi 3 un 7 un atkal nav nepāra skaitļu, ko ierakstīt ar $*$ apzīmētajās rūtiņās. Tātad pretējos stūros jāieraksta 3 un 7. Tālāk tabula aizpildās viennozīmīgi.

Pavisam ir 8 dažādas tabulas ar uzdevumā minēto īpašību. Tās iegūstamas no 74.zīm. attēlotajām tabulām, pagriežot tās par 90^o; 180^o; 270^o; 360^o.

80. Atbilde Līdzīgi kā 74. uzdevuma risinājumā iegūstam, ka mazākā iespējamā summas vērtība ir $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{100}{100}=100$, bet lielākā iespējamā summas vērtība ir $\frac{100}{1}+\frac{99}{2}+\ldots+\frac{2}{99}+\frac{1}{100}$.

81. Atbilde Ar "+1" un ar "-1".

Risinājums Sastādīsim izteiksmi ar vērtību 1, kura satur dotos skaitļus:

$$5\cdot(2n+3) -2\cdot(5n+7)=1 \qquad (*)$$

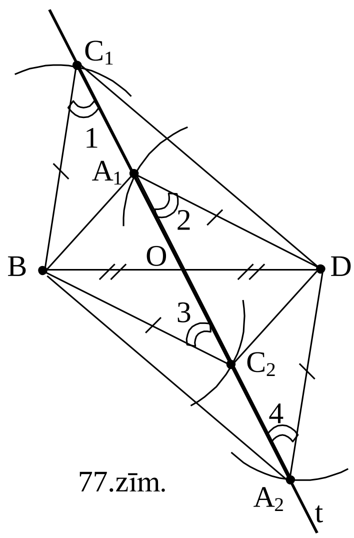
Pieņemsim, ka 2n+3 dalās ar d un arī 5n+7 dalās ar d. Tādā gadījumā abas šīs izteiksmes var izteikt šādi: $2n+3=d\cdot t$ un $5n+7=d\cdot s$. Tad, ievietojot izteiksmē (∗), iegūsim $5\cdot d\cdot t-2\cdot s\cdot d=d\cdot(5t-2s)=1$, tātad skaitļi d un 5t-2s ir skaitļa 1 dalītāji. Bet skaitļa 1 dalītāji ir vienīgi skaitļi "+1" un "-1". Tātad d=1 vai d= -1. Līdz ar to esam pamatojuši, ka (2n+3) un ·(5n+7) vienlaikus var dalīties vienīgi ar skaitļiem "+1" un "-1".

82. Atbilde Jā, četrstūris ar minētajām īpašībām noteikti ir paralelograms.

Risinājums Veiksim šādu konstrukciju:

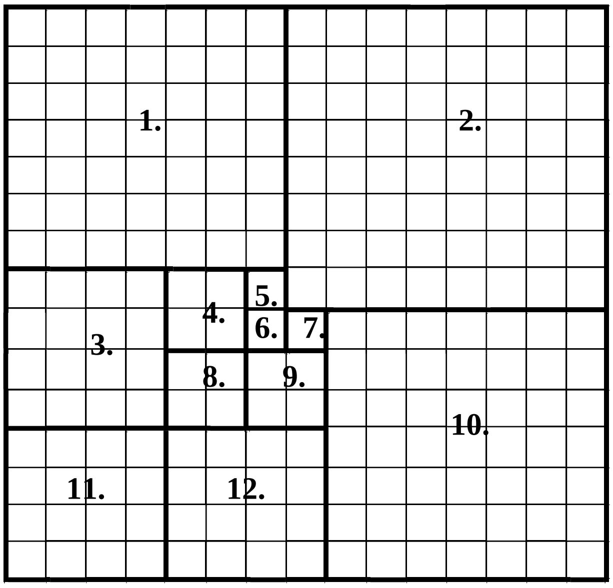
1) Novilksim diagonāli BD un atradīsim tās viduspunktu O.
2) Caur O novilksim taisni t, kas saturēs otru diagonāli AC.
3) Tā kā pēc dotā $BC>\frac{1}{2}BD=BO=OD$, tad velkam lokus, kuru rādiusi lielāki par BO un centri atrodas punktos B un D. Katrs loks krustos taisni t divos punktos - noteikti abi krustpunkti atradīsies dažādās pusēs no punkta O, jo $BC>\frac{1}{2}BD$. Apzīmēsim šos krustpunktus ar C_1, C_2, A_1 un A_2.
4) Iespējamie četrstūri ir BA_1DC_2 vai BA_2DC_1.
5) Saskaņā ar doto un konstrukciju $BC_1=BC_2=DA_1=DA_2$. Tad ΔBC_1C_2 un ΔDA_1A_2 ir vienādsānu trijstūri. Pēc dotā punkti B un D atrodas vienādos attālumos no taisnes t, tāpēc minētajiem vienādsānu trijstūriem ir vienādi augstumi. Tad $\Delta BC_1C_2=\Delta DA_1A_2$. No tā iegūstam, ka $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.
6) Ja $\angle 1=\angle 4$, tad $BC_1 \| DA_2$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi. Tā kā $BC_1=DA_2$, tad BC_1DA_2 ir paralelograms pēc pazīmes par vienādām un paralēlām malām.

Lietojot tādu pašu spriedumu, iegūstam arī to, ka BA_1DC_2 ir paralelograms.



77.zīm.

<u>83. Atbilde</u> Piemēram, tā! Sk. 78.zīm.



78.zīm.

<u>84. Risinājums</u> Apskatīsim vispirms gadījumu, kad ir 8 monētas un atļautas 3 svēršanas.

Tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā konstatējam, ka var būt augstākais divas atšķirīgas monētu masas.

Uzliekam uz katra kausa pa 4 monētām. Ja svari ir līdzsvarā, tad abos monētu četriniekos ir vienāds daudzums vieglāko monētu un vienāds daudzums smagāko monētu; ņemam vienu no šiem četriniekiem un rīkojamies ar to tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā.

Pieņemsim, ka pirmajā svēršanas reizē viens kauss nosveras uz leju. Tad otrajā svēršanas reizē salīdzinām divas monētas no smagākā kausa ar divām monētām no vieglākā kausa.

Ja iestājas līdzsvars, tad **trešajā svēršanas reizē** salīdzinām tādu divu monētu masas, kas pirmajā svēršanas reizē atradās uz dažādiem svaru kausiem, bet otrajā reizē netika svērtas.

Ja līdzsvars neiestājas, tad **trešajā svēršanas reizē** salīdzinām pa monētai, kas otrajā svēršanas reizē atradās uz dažādiem svaru kausiem.

Ja iestājas līdzsvars, tad otrajā un trešajā svēršanas reizē nesvērtās monētas ir katra ar savu masu.

Ja nav līdzsvars, tad esam atraduši pa vienai monētai ar atšķirīgajām masām.

Ja iestājas līdzsvars, tad otrajā reizē svērtās, bet trešajā reizē nesvērtās monētas ir katra ar savu masu.

Ja nav līdzsvars, tad esam atraduši pa vienai monētai ar atšķirīgajām masām.

Tagad aplūkosim gadījumu ar 16 monētām un 4 pieļautām svēršanām.

Pirmajā svēršanas reizē uzliekam uz kausiem pa 8 monētām. Ja kausi ir līdzsvarā, tad uz tiem ir vienāds daudzums smagāko monētu. Ņemam vienu no šiem monētu astotniekiem un rīkojamies ar to, kā aprakstīts iepriekš.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad pirmajā svēršanā viens kauss nosveras uz leju (pieņemsim, ka tas saturēja monētas A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8), bet otrs kaus paceļas augšup (apzīmēsim uz tā esošās monētas ar B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8).

Tālāk 2. svēršanā novietosim uz viena kausa A1, A2, A3, A4, bet uz otra kausa B1, B2, B3, B4. Šķirosim divas iespējas.

1. Kausi ir līdzsvarā. Varam secināt, ka A5, A6, A7, A8 kopā ir smagākas nekā , B5, B6, B7, B8. Nekas mūs netraucē iztēloties, ka sākumā mums bijušas tikai astoņas monētas A5-A8 un B5-B8, un ar pirmo svēršanu mēs esam uzzinājuši pasvītroto informāciju. Tad mēs esam vienā no tām situācijām, kādas rodas iepriekš apskatītā uzdevuma "8 monētas, 3 svēršanas" risināšanā pēc 1. svēršanas, un mēs varam pabeigt meklēšanu ar vēl divām svēršanām, kā iepriekš aprakstīts. Kopā būs patērētas 4 svēršanas.
2. Kausi nav līdzsvarā; varam pieņemt, ka A1, A2, A3, A4 kopā ir smagākas nekā B1, B2, B3, B4. Šo gadījumu analizē līdzīgi nupat apskatītajai iespējai.

Uzdevums atrisināts.

Lasītājs pats var pārliecināties, ka līdzīgā ceļā 32 monētu gadījumā pietiek ar 5 svēršanām, 64 monētu gadījumā - ar 6 svēršanām, …, 2^n monētu gadījumā - ar n svēršanām.

85. Atbilde Nē, nepastāv.

Risinājums Pieņemsim, ka tāds trīsciparu skaitlis eksistē; apzīmēsim to ar $\overline{abc}$. Pārnesot šī skaitļa pirmo ciparu uz beigām, mēs iegūstam trīsciparu skaitli $\overline{bca}$, kurš ir 8 reizes lielāks par pirmo (nevaram iegūt divciparu vai pat viencipara skaitli, kas notiktu, ja b=0 vai b=c=0, jo tad iegūtais skaitlis nebūtu lielāks par sākotnējo.) Tātad ir spēkā vienādība $\overline{bca}=8\cdot\overline{abc}$. Tātad $\overline{bca}$ noteikti ir pāra skaitlis; tātad a vietā var atrasties tikai cipari 0, 2, 4, 6 un 8. Nulle nevar būt $\overline{abc}$ pirmais cipars. Tātad skaitļa $\overline{abc}$ pirmais cipars ir vismaz 2. Tātad $\overline{abc}>200$. Pareizinot abas šīs nevienādības puses ar 8, iegūsim: $\overline{abc}>200\cdot 8$, jeb $\overline{bca}>1600$.

Tātad $\overline{bca}$ noteikti ir vismaz četrciparu skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu.

86. Atbilde Iespējami divi gadījumi:

1) a=1 un b=996
2) a=996 un b=1

Risinājums Pieskaitīsim abām dotās vienādības pusēm 1:

$$a+b+ab=1993 \quad |+1$$
$$a+b+ab+1=1994$$

Sagrupēsim saskaitāmos un iznesīsim b pirms iekavām:

$$(a+1)+(b+ab)=1994;\ (a+1)+b(a+1)=1994$$

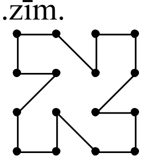
Sadalīsim vienādības abas puses reizinātājos: $(a+1)(1+b)=2\cdot 997$

Ievērosim: ja a un b ir naturāli skaitļi, tad $a+1\geq 2$ un $b+1\geq 2$.

Gan 2, gan 997 ir pirmskaitļi, tāpēc tos nevar sadalīt pirmreizinātājos tālāk. Lai pastāvētu šī vienādība (ievērojot to, ka a un b ir naturāli skaitļi), ir 2 iespējas:

$$\begin{cases} a+1=2 \\ 1+b=997 \end{cases} \text{vai} \begin{cases} a+1=997 \\ 1+b=2 \end{cases}, \text{ no kurienes: } \begin{cases} a=1 \\ b=996 \end{cases} \text{vai} \begin{cases} a=996 \\ b=1 \end{cases}.$$

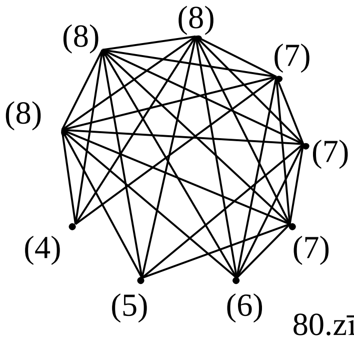
87. Atbilde Sk. piemēram, 79.zīm.



79.zīm.

Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju tās divi blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

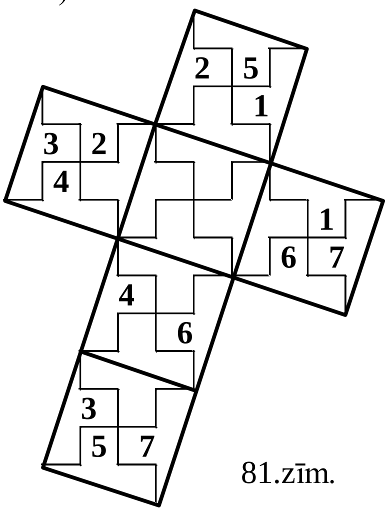
88. Risinājums Parādīsim, ka tā var gadīties. Izveidosim šādu modeli: ansambļa 9 dalībniekus attēlosim ar punktiem. Ja divi no skolēniem ir draugi, tad attiecīgos punktus savienosim ar līniju. Tātad, lai īstenotos uzdevuma prasības, mums jāvar uzzīmētos 9 punktus savienot ar līnijām tā, lai tieši no 3 punktiem izietu pa 8 līnijām, tieši no 3 punktiem izietu pa 7 līnijām, no viena punkta - 6 līnijas, no viena - 5 līnijas un vēl no viena - 4 līnijas. 80.zīm. redzams, ka šāda situācija ir iespējama. Katram punktam blakus iekavās ierakstīts atbilstošais draudzību skaits.



80.zīm.

89. Atbilde Jā, var.

Risinājums Uzzīmēsim kuba izklājumu un parādīsim, kā to var pārklāt ar 12 dotajām figūriņām (sk.81.zīm.)



81.zīm.

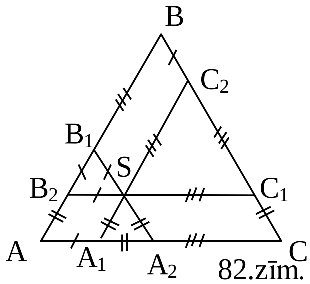
Ar vienādiem cipariem apzīmētās figūru daļas, salokot kubu, veido veselu figūriņu, kas "apliecas" ap kuba šķautni.

90. Atbilde 1, 2 vai 3.

Risinājums

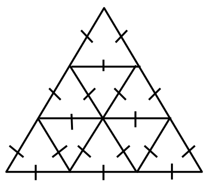
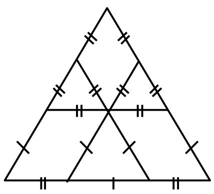
Saskaņā ar konstrukciju četrstūri AB_2SA_1, CA_2SC_1, BC_2SB_1 ir paralelogrami. Tātad $AA_1=B_2S$ (1). Pēc konstrukcijas un dotā (ΔABC ir vienādmalu) arī ΔB_2SB_1 ir vienādmalu, tātad $B_2S=B_1S=B_1B_2$ (2). Tā kā BC_2SB_1 ir paralelograms, tad $B_1S=BC_2$ (3). No (1), (2) un (3) seko, ka $AA_1=B_2S=B_1B_2=B_1S=BC_2$.

Pilnīgi analogi $AB_2=A_1S=A_1A_2=A_2S=C_1C$ un $CA_2=C_1S=C_1C_2=C_2S=BB_1$. Tātad visi apskatāmie nogriežņi ir sadalāmi 3grupās pa 5 katrā (sk.82.zīm.).



82.zīm.

Var gadīties, ka visu triju grupu nogriežņi ir dažāda garuma (sk.82.zīm.). Ir iespējams, ka visu grupu nogriežņi ir vienāda garuma (sk. 83.zīm.). Ir iespējams, ka 2 grupu nogriežņi ir vienāda garuma, bet trešās grupas nogriežņi ir atšķirīga garuma (sk. 84.zīm.)

83.zīm.   84.zīm.

91. Risinājums Apzīmēsim $a=\overline{xyz}$ un $b=\overline{zyx}$. Skaidrs, ka x>0 un z>0; varam pieņemt, ka x>z. Tā kā a^2 un b^2 ir piecciparu skaitļi, tad $x\leq 3$ un $z\leq 3$ (tāda trīsciparu skaitļa kvadrāts, kas sākas ar 4 vai vēl lielāku ciparu, nav mazāks par $400^2=160000$, tātad ir sešciparu skaitlis). Tāpēc vienīgie iespējamie skaitļi a varētu būt $\overline{3y1}$, $\overline{3y2}$ un $\overline{2y1}$, kur y - cipars. Pārbaudot visas 30 iespējas, konstatējam, ka

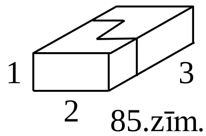
der tikai a= 301; 311; 201; 211; 221
un atbilstoši b=103; 113; 102; 112; 122.

Aplūkojot iespēju, kad z>x, tādā pašā ceļā iegūstam

b=301; 311; 201; 211; 221 un atbilstoši a=103; 113; 102; 112; 122.

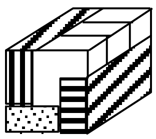
92. Atbilde Jā, var.

Risinājums Vispirms no 6 dotajām figūriņām izveidosim 3 paralēlskaldņus ar izmēriem 1x2x3 (sk.85.zīm.)

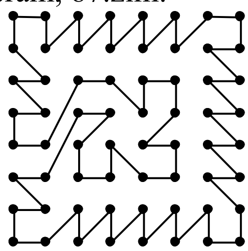


85.zīm.

86. zīmējumā parādīts, kā novietot trīs izveidotos paralēlskaldņus (iesvītroti) un vēl 3 atlikušās figūriņas, lai izveidotos kubs ar izmēriem 3x3x3.


86.zīm.

93. Atbilde Sk., piemēram, 87.zīm.


87.zīm.

Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju divi lauztas līnijas blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

94. Risinājums Trīs pēc kārtas ņemti interesanti skaitļi var būt. Piemēram,

$$33=3\cdot 11,\ 34=2\cdot 17,\ 35=5\cdot 7.$$

Pamatosim, ka četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi visi nevar būt interesanti. Starp četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens noteikti dalās ar 4. Šādu skaitli var uzrakstīt formā 4k un tālāk formā $4k=2\cdot 2\cdot k$. Ja $k\geq 2$, tad k vai nu pats ir pirmskaitlis, vai arī to var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Tātad šāds skaitlis ir uzrakstāms kā vismaz triju pirmskaitļu reizinājums, un tāpēc tas nav interesants.

Ja k=1, nupat izdarītais spriedums nav spēkā, jo 1 ne pats ir pirmskaitlis, ne arī to var sadalīt divu vai vairāku pirmskaitļu reizinājumā. Tāpēc visus četrus pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur skaitli 4, apskatīsim atsevišķi:

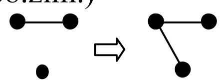
1, 2, 3, 4	skaitļi 1, 2, 3 nav interesanti;
2, 3, 4, 5	skaitļi 2, 3, 5 nav interesanti;
3, 4, 5, 6	skaitļi 3 un 5 nav interesanti;
4, 5, 6, 7	skaitļi 5 un 7 nav interesanti.

Ir aplūkotas visas iespējas, un nevienā no tām nav četru pēc kārtas ņemtu interesantu skaitļu.

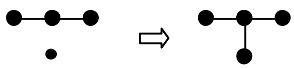
Tātad lielākais pēc kārtas esošu interesantu naturālu skaitļu skaits ir 3.

95. Risinājums Izveidosim šādu modeli: 13 pilsētas apzīmēsim ar 13 punktiem. Ja divas pilsētas savieno aviolīnija, tad starp atbilstošajiem punktiem vilksim taisnu līniju, ja autobusu satiksme - pārtrauktu līniju, ja vilciena satiksme - viļņotu līniju. Pierādīsim šādu faktu: ja n punkti jāsavieno ar līnijām tā, lai no katra punkta varētu pa līnijām nokļūt uz katru citu, tad līniju skaits ir vismaz n-1.

Ja doti 2 punkti, tad, protams, nepieciešama 1līnija. Pievienosim šiem 2 punktiem trešo (sk.88.zīm.)



88.zīm.



89.zīm.

Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vismaz 1 līnija - no pievienotā punkta uz kādu no jau esošiem. Tātad vajag vismaz 2 līnijas. Ja ir 3 punkti un 2 līnijas, pievienosim ceturto punktu. (sk.89.zīm.).

Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vēl vismaz 1 līnija. Tātad pavisam nepieciešamas trīs līnijas.

Šādā veidā turpinot spriedumus, iegūsim, ka n punktiem ir nepieciešamas vismaz n-1 līnijas.

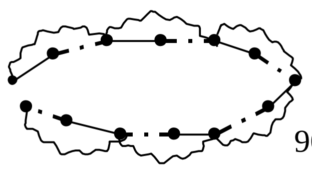
Apzīmēsim autobusa līniju skaitu ar A, aviolīniju skaitu ar L, bet vilciena maršrutu - ar V. Tā kā ir 13 pilsētas, tad noteikti jābūt spēkā

$$\begin{cases} A+V\geq 12 \quad (12=13\text{-}1) \\ A+L\geq 12 \\ L+V\geq 12 \end{cases}$$

Saskaitot šīs 3 nevienādības, iegūsim:

$$2A+2L+2V\geq 36 \text{ jeb } A+L+V\geq 18$$

Tātad kopā nepieciešamas vismaz 18 līnijas. 90.zīm. parādīts, ka ar 18 līnijām pietiek.



90.zīm.

96. Risinājums Ar doto izteiksmi izdarīsim ekvivalentus pārveidojumus:

$$n^{12}-n^8-n^4+1 =$$
$$= n^{12}-n^8+1-n^4 =$$
$$= n^8(n^4-1)-(n^4-1) =$$
$$= (n^8-1)(n^4-1) =$$
$$= (n^4-1)(n^4+1)(n^2-1)(n^2+1) =$$
$$= (n^2-1)(n^2+1)(n^4+1)(n-1)(n+1)(n^2+1) =$$
$$=(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1).$$

Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad visi četri reizinātāji ir pāra skaitļi. Bez tam n-1 un n+1 ir pēc kārtas ņemti pāra skaitļi, tātad viens no tiem dalās ar 4, bet šī skaitļa kvadrāts - ar 16. Divi no atlikušajiem kvadrātiem noteikti dalās ar $2^2=4$, bet (n^4+1) dalās ar 2. Tātad viss reizinājums dalās ar $16\cdot4\cdot4\cdot2=2^4\cdot2^2\cdot2^2\cdot2=2^9=512$. To arī vajadzēja pierādīt.

97. Atbilde Lielākā iespējamā vērtība ir 20.

Risinājums Aplūkosim, kā var tikt izvietotas reizināšanas zīmes:

1) visas trīs pēc kārtas;
2) divas pēc kārtas;
3) blakus esošu reizināšanas zīmju nav.

Tādējādi iegūstam šādus rezultātus:

2x2x2x2+2+2=20
2x2x2+2x2+2=14
2x2+2x2+2x2=12.

Tā kā katrs reizinājums ir atsevišķs saskaitāmais un summa no saskaitāmo kārtības nemainās, tad, pārkārtojot reizināšanas zīmju blokus citādā secībā, rezultāts nemainās. Tātad lielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir 20.

98. Atbilde 2000. uzdevums tiks publicēts 2004./2005. mācību gadā vai 2005./2006. mācību gadā.

Risinājums Vispirms atgādināsim: 1000. uzdevums publicēts 1993./94. m. gadā. Tātad šis mācību gads jāizvēlas par atskaites punktu. Saskaņā ar doto 1993./94. m.g. var beigties vai nu ar 1004.uzdevumu (ja būs notikušas 7 nodarbības) vai ar 1016. uzdevumu (8 nodarbības). Pirmajā gadījumā līdz 2000.uzdevumam vēl jānopublicē 2000-1004=996 uzdevumi (∗),
otrajā gadījumā – 2000 -1016 = 984 uzdevumi (∗ ∗). Viena mācību gada laikā var tikt publicēti vai nu $12\cdot7=84$, vai $12\cdot8=96$ uzdevumi. Skaidrs, ka visātrāk "pie mērķa" nonāksim tad, ja katra nākamā gada laikā notiks 8 nodarbības, vislēnāk - ja katru gadu notiks tikai 7 nodarbības.

Apzīmēsim publicēto uzdevumu skaitu ar n. Pēc 10 gadiem tas var būt šādās robežās:

$$1004+10\cdot84\le n\le 1004+10\cdot96 \text{ vai}$$
$$1016+10\cdot84\le n\le 1016+10\cdot96.$$

Vienkāršojot iegūstam:

$1844\le n\le 1964$ vai $1856\le n\le 1976$. Kā redzam, tad 2000.uzdevums vēl nebūs publicēts. Pēc 11 mācību gadiem situācija būs šāda:

$$1004+11\cdot84\le n\le 1004+11\cdot96 \quad \text{vai} \quad 1016+11\cdot84 \le n \le 1016+11\cdot96$$
$$1928\le n\le 2060 \qquad\qquad 1940 \le n \le 2072$$

Tātad 2004./2005. mācību gadā 2000. uzdevums var tikt publicēts, bet var gadīties (ievērojot novērtējuma apakšējo robežu), ka tas vēl nebūs publicēts. Pēc 12 mācību gadiem, tas ir, 2005./2006. m.g. beigās, publicēto uzdevumu skaits būs šādās robežās:

$$1004+12\cdot 84 \le n \le 1004+12\cdot 96 \quad \text{vai} \quad 1016+12\cdot 84 \le n \le 1016+12\cdot 96$$
$$2012 \le n \le 2156 \qquad\qquad 2024 \le n \le 2168$$

Tātad, beidzoties 2005./2006. m. gadam, 2000. uzdevums noteikti būs publicēts.

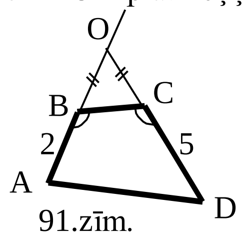
99. Atbilde To izdarīt nav iespējams.

Risinājums Apzīmēsim balto rūtiņu daudzumu ar b, sarkano rūtiņu daudzumu ar s, melno rūtiņu daudzumu ar m. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrai melnai rūtiņai blakus ir vismaz viena sarkana. Tātad katra melnā rūtiņa var būt blakus ne vairāk kā trim baltām. Tā kā katrai baltai rūtiņai blakus ir vismaz viena melna, tad no pasvītrotā apgalvojuma seko, ka $m \ge \frac{1}{3}b$. Līdzīgi iegūstam, ka $s \ge \frac{1}{3}m$.

Ja b>24, tad $b \ge 25$. Tāpēc $m \ge \frac{25}{3}$ jeb $m \ge 8\frac{1}{3}$. Tā kā m ir naturāls skaitlis, tad no šejienes seko, ka $m \ge 9$. Tāpēc $s \ge \frac{1}{3}\cdot 9=3$. Tātad $m+b+s \ge 25+9+3=37$. Bet tā ir pretruna, jo kvadrātā pavisam ir tikai 36 rūtiņas.

100. Risinājums Aplūkosim trīs atšķirīgas iespējas:

1) AB nav paralēls ar CD, $\angle B$ un $\angle C$ ir plati leņķi (sk.91.zīm.)



91.zīm.

Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā $\angle B=\angle C$, tad vienādi ir arī to blakusleņķi $\angle OBC=\angle OCB$. Tad ΔBOC ir vienādsānu, proti, BO=OC. Apskatām ΔAOD. Saskaņā ar trijstūra nevienādību

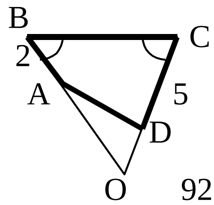
AD>OD-OA jeb

AD>(OC+CD)-(OB+AB)

AD>OC+5-OC-2

AD>3, kas arī bija jāpierāda.

2) AB nav paralēls ar CD, bet $\angle B$ un $\angle C$ ir šauri leņķi (sk.92.zīm.).



92.zīm.

Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā $\angle B=\angle C$, tad ΔOBC ir vienādsānu trijstūris un OB=OC. Izmantojot trijstūra nevienādību trijstūrim AOD, iegūstam:

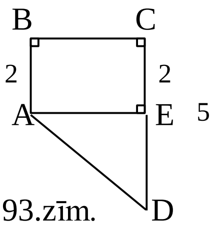
AD>AO-DO

AD>(OB-AB)-(OC-CD)

AD>OB-2-OC+5

AD>3, kas arī bija jāpierāda.

3) Malas AB un CD ir paralēlas. Tādā gadījumā $\angle B=\angle C=90^o$ (sk.93.zīm.)



93.zīm.

Novelkam AE⊥CD. Tad CE=AB=2 cm. Tad ED=5-2=3(cm). AD ir taisnleņķa trijstūra AED hipotenūza, tātad noteikti garāka par katru no katetēm. Tātad AD>ED=3.

101. Atbilde Mazākā iespējamā vērtība ir 12. Lielākā iespējamā vērtība ir 18.

Risinājums Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 94.zīm.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

94.zīm.

Meklēsim mazāko iespējamo summas S=d+e+f vērtību. Skaidrs, ka summa S būs mazākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs mazākais iespējamais. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem d>a, tad mazākā iespējamā d vērtība ir 2. Tātad $d \geq 2$. Novērtēsim e. Tā kā e>b un e>d>a, tad ir vismaz 3 skaitļi, kas mazāki par e. Tādā gadījumā $e \geq 4$. Līdzīgi novērtēsim f: f>c>b>a un f>e>d>a. Tātad ir vismaz 5 skaitļi, kas mazāki par f. Tad $f\cdot \geq 6$. Līdz ar to $S \geq 2+4+6=12$. 95.zīm. parādīts, kā šādu summu S=12 var iegūt.

1	3	5
2	4	6
7	8	9

95.zīm.

Līdzīgi meklēsim lielāko iespējamo summas S vērtību. Skaidrs, ka S būs lielākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs lielākais iespējamais.

Novērtēsim f. Tā kā f<i, tad $f \leq 8$. Novērtēsim e: e<f un e<h<i. Tātad ir vismaz 3 skaitļi, kas lielāki par e. Tātad $e \leq 6$. Novērtēsim d: d<e<f<i un d<g<h<i. Tātad vismaz 5 skaitļi ir lielāki par d. Tātad $d \leq 4$. Līdz ar to $S \leq 4+6+8=18$. 96.zīm. parādīts, ka šāda summa S tiešām ir iespējama.

1	3	5
4	6	8
5	7	9

96.zīm.

102. Atbilde Jā, var.

Risinājums Vispirms parādīsim, ka trīs pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa noteikti dalās ar 3. Aplūkosim trīs pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus: n, n+1, n+2. Aplūkosim to summu: n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1). Viegli saprast, ka šī summa dalās ar 3.

Visus skaitļus no 1 līdz 1992 varam sadalīt šādos trijniekos, jo 1992 dalās ar 3: (1+2+3)+(4+5+6)+…+(1990+1991+1992). Šī summa dalās ar 3, jo katrs tās saskaitāmais (par saskaitāmo nosauksim vienās iekavās ierakstīto summu) dalās ar 3. Bez tam 1993+1994=3987. Skaitlis 3987 dalās ar 3 (3+9+8+7=27). Tātad visu skaitļu no 1 līdz 1994 summa dalās ar 3.

103. Atbilde 50 dažādus trijstūrus.

Risinājums Aplūkosim iespējamo trijstūru īsākās malas. Tā kā visi 10 stienīši ir dažāda garuma, tad nevar izveidot trijstūrus, kuru īsākā mala ir 1 cm, 9 cm un 10 cm garas. Pirmajā gadījumā neizpildās prasība ka trijstūra malas garumam jābūt lielākam par divu pārējo malu garumu starpību, bet abos pārējos gadījumos nav divu lielāka garuma stienīšu.

Veidojot trijstūrus, ievērosim trijstūra nevienādību: ja trijstūra malu garumi ir a, b, c, tad $a>|b-c|$.

Ja trijstūra īsākā mala ir 2 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 3 un 4; 4 un 5; 5 un 6; 6 un 7; 7 un 8; 8 un 9; 9 un 10. Tātad iespējami 7 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 3 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 4 un 5; 4 un 6; 5 un 6; 5 un 7; 6 un 7; 6 un 8; 7 un 8; 7 un 9; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10. Tātad iespējami 11 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 4 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 5 un 6; 5 un 7; 5 un 8; 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10. Tātad iespējami 12 dažādi trijstūri.

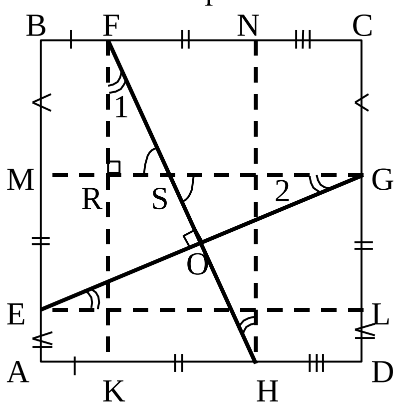
Ja trijstūra īsākā mala ir 5 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 6 un 10; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10. Tātad iespējami 10 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 6 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10. Tātad iespējami 6 dažādi trijstūri.

Ja īsākā mala ir 7 cm, tad iespējami 3 dažādi trijstūri ar abu pārējo malu garumiem: 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10. Ja īsākā mala ir 8 cm, tad iespējams 1 trijstūris ar abu pārējo malu garumiem 9 un 10.

Tātad pavisam iespējams izveidot 7+11+12+10+6+3+1=50 dažādus trijstūrus.

104. Risinājums Pieņemsim, ka taisnes nav paralēlas kvadrāta malām. Novilksim caur punktiem E, F, G un H taisnes paralēli kvadrāta malām (sk 97.zīm.)



97.zīm.

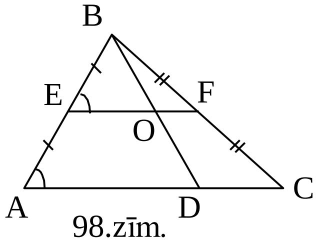
ΔFNH un ΔGME ir vienādi taisnleņķa trijstūri, jo FK=GM un $\angle 1=\angle 2$ (tas izriet no ΔFRS un ΔSOG leņķu vienādības (sk.97.zīm.)). Tad KH=FN=ME=GL=a. Bez tam ievērosim, ka, saskaņā ar mūsu konstrukciju, BF=AK=b, NC=HD=d, BM=CG=c, AE=LD=e. Tad

$$Per(EBFO)+Per(HDGO) = EB+BF+FO+EO+OH+OG+GD+DH=$$
$$=a+c+b+\underline{FO}+\underline{\underline{EO}}+\underline{OH}+\underline{\underline{OG}}+a+e+d = FH+EG+2a+c+b+e+d$$
$$Per(FCGO)+Per(AEOH) = FC+CG+GO+FO+EO+OH+AE+AH=$$
$$=a+d+c+\underline{FO}+\underline{\underline{EO}}+\underline{OH}+\underline{\underline{OG}}+e+b+a = FH+EG+2a+d+b+c+e.$$

Abas šīs summas ir vienādas. Ja novilktās taisnes paralēlas kvadrāta malām, uzdevuma apgalvojums ir acīmredzams

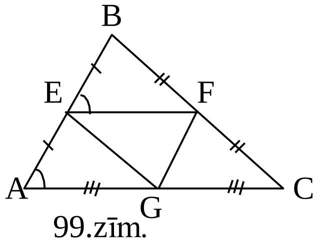
105. Atbilde Nē, tas nav iespējams.

Risinājums Vispirms pamatosim, ka minētā nogriežņa viduspunkts atrodas uz trijstūra viduslīnijas.



98.zīm.

Aplūkosim ΔABC un no virsotnes B novilksim patvaļīgu nogriezni BD, kur D ir malas AC punkts un EF ir ΔABC viduslīnija. ΔEBO ~ ΔABD, jo ∠B abiem trijstūriem ir kopīgs, bet ∠BEO=∠BAD, jo EF||AC kā trijstūra viduslīnija un ∠BEO un ∠BAD ir kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Tā kā EB:AB=1:2, tad arī BO:BD=1:2. Tātad O ir BD viduspunkts. Tātad esam pamatojuši, ka uzdevumā novilkto nogriežņu viduspunkti atrodas pa vienam uz visām trim trijstūra viduslīnijām.



99.zīm.

Aplūkosim viduslīniju veidoto trijstūri EFG. No virsotnēm vilkto nogriežņu viduspunkti atrodas uz šī trijstūra malām. Taču neviena taisne nevar krustot reizē visas trīs trijstūra malas to iekšējos punktos. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

106. Risinājums Aplūkosim saliktu skaitli n, n>6. Ja visi n pirmreizinātāji ir 2, tad n ir viens no skaitļiem 8; 16; 32; ... . Tos visus var iegūt, pakāpeniski pieskaitot 2. Pieņemsim, ka skaitlim n ir kāds cits pirmreizinātājs p, $p \geq 3$. Tad skaitli n var izteikt kā $n=p \cdot k$, $k \geq 2$. Skaitlim 6 ir dalītājs 2. Tāpēc mēs drīkstam pieskaitīt 2. Rezultātā no 6 mēs varam iegūt jebkuru lielāku pāra skaitli, pieskaitot 2. Tātad mēs varam iegūt arī skaitli 2p. Skaitļa 2p dalītājs ir skaitlis p. Tātad mēs drīkstam to pieskaitīt, iegūstot skaitli 3p, kas arī dalās ar p. Turpinām p pieskaitīt tik ilgi, līdz iegūstam skaitli $k \cdot p=n$. Tātad no skaitļa 6 var iegūt skaitli n, veicot atļautās darbības.

107. Atbilde Mazākā iespējamā vērtība ir 112. Lielākā iespējamā vērtība ir 238.

Risinājums Spriedīsim līdzīgi 101.uzdevuma risinājumam. Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 100.zīm.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7

100.zīm.

Tātad mūs interesē summas $S=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7$ lielākā un mazākā iespējamā vērtība. Skaidrs, ka mazākā (lielākā) vērtība tiks sasniegta, ja katrs no saskaitāmajiem būs mazākais (lielākais) iespējamais. Tāpēc novērtēsim katru no saskaitāmajiem.

1) $d_1>c_1>b_1>a_1$. Tātad $d_1 \geq 4$
   $d_1<d_i$, $i \geq 2$
   $d_1<e_i$, $d_1<f_i$, $d_1<g_i$, kur $i \geq 1$
   Tātad ir vismaz 27 skaitļi, kas lielāki par d_1; tāpēc $d_1 \leq 22$.
   Līdz ar to $4 \leq d_1 \leq 22$.
2) $d_2>d_1$. Tātad $d_2 \geq 8$, jo vismaz 7 skaitļi ir mazāki par d_2.
   $d_2>c_2>c_1$, $d_2>b_2>b_1$, $d_2>a_2>a_1$
   $d_2<d_i$, kur $i \geq 3$
   $d_2<e_i$, $d_2<f_i$, $d_2<g_i$, kur $i \geq 2$. Tātad ir vismaz 23 skaitļi, kas lielāki par d_2; tāpēc $d_2 \leq 26$.
   Līdz ar to $8 \leq d_2 \leq 26$.
3) Līdzīgi spriežot, iegūstam:
   $12 \leq d_3 \leq 30$, $16 \leq d_4 \leq 34$, $20 \leq d_5 \leq 38$, $24 \leq d_6 \leq 42$, $28 \leq d_7 \leq 46$
   Līdz ar to $112 \leq S \leq 238$.

101.zīm. un 102.zīm. parādīts, ka šādas vērtības tiešām iespējams iegūt.

1	5	9	13	17	21	25
2	6	10	14	18	22	26
3	7	11	15	19	23	27
4	8	12	16	20	24	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

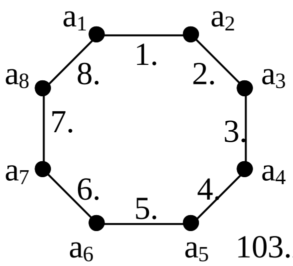
101.zīm.

1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21
22	26	30	34	38	42	46
23	27	31	35	39	43	47
24	28	32	36	40	44	48
25	29	33	37	41	45	49

102.zīm.

108. Atbilde Jā, var.

Risinājums Apzīmēsim astoņstūra virsotnēs ierakstītos skaitļus ar a_i, $1 \leq i \leq 8$, bet malas sanumurēsim ar skaitļiem no 1 līdz 8 (sk.103.zīm.).



103.zīm.

Pēc skaitļu nodzēšanas uz pirmās malas uzrakstīts skaitlis a_1+a_2, uz otrās - a_2+a_3, uz trešās - a_3+a_4, …, uz astotās - a_8+a_1.

Aplūkosim uz 1., 3., 5. un 7. malas uzrakstīto skaitļu summu S_1; redzam, ka

$$S_1=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+ (a_5+a_6) +(a_7+a_8).$$

Aplūkosim uz 2., 4., 6. un 8. malas uzrakstīto skaitļu summu S_2; redzam, ka

$$S_2=(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+ (a_6+a_7) +(a_8+a_1).$$

Viegli redzēt, ka $S_1=S_2$. Nodzēšot vienu no skaitļiem "uz malas", viena no summām S_1 un S_2 paliek "neizbojāta". Tad, atņemot no šīs summas otru, iegūsim nodzēsto skaitli.

109. Atbilde Maija nodejoja 7 dejas.

Risinājums Tā kā katrā dejā katrā pārī dejo divi - meitene un zēns, tad visu meiteņu nodejoto deju kopskaitam jāsakrīt ar visu zēnu nodejoto deju kopskaitu. Tā kā visi zēni kopā nodejojuši 7+8+8+6=29 dejas, tad arī visas meitenes kopā nodejojušas 29 dejas. Tad Maijas nodejoto deju skaits ir 29-(5+7+10)=29-22=7.

Pilnīgā risinājumā jāuzrāda arī piemērs, kur šādi deju daudzumi realizējas. Atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi.

110. Atbilde Der skaitļu pāri (1;1), (5;5), (1;2), (1;3), (1;6), (2;7), (3;4), (5;10), (10;15), kā arī tiem "simetriskie" pāri (2;1), (3;1) utt.

Risinājums Aplūkosim gadījumu, kad m=n. Tā kā m+5 jādalās ar n un n=m, tad m+5 jādalās arī ar m. Tā kā summai (m+5) jādalās ar m un viens no tās saskaitāmajiem dalās ar m, tad arī otram saskaitāmajam jādalās ar m. Tātad 5 dalās ar m. Esam ieguvuši, ka m ir skaitļa 5 dalītājs. Tātad m=1 vai m=5.

Ja m=1, tad n=1. Pārbaudīsim, vai šīs vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus: m+5=1+5=6 un 6 dalās ar 1.

Ja m=5, tad n=5, m+5=10 un 10 dalās ar 5.

Esam ieguvusi divus skaitļu pārus: (1;1) un (5;5). Aplūkosim gadījumu, kad $m \neq n$. Pieņemsim, ka m<n. Vispirms pamatosim, ka m un n nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 5. Pieņemsim pretējo: n=m+i, kur $i \geq 6$, $i \in N$. Pēc dotā m+5 dalās ar n, tātad m+5 jādalās ar m+i. Tā kā $i \geq 6$, tad m+5<m+i. Šādā gadījumā dalīšana naturālos skaitļos nav iespējama. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un m un n atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 5. Tad iegūstam, ka pastāv viena no iespējām:

n=m+1; n=m+2; n=m+3; n=m+4; n=m+5.

Ja n=m+1, tad n+5=m+1+5=m+6, un m+6 jādalās ar m, tātad m ir skaitļa 6 dalītājs, proti, iespējamās m vērtības ir 1; 2; 3 un 6.

Ja m=1, tad n=2. Pārbaudām: m+5=1+5=6 un 6 dalās ar n=2. n+5=2+5=7 un 7 dalās ar m=1. Tātad skaitļu pāris (1;2) der par atrisinājumu.

Ja m=2, tad n=2+1=3. Pārbaudām: m+5=2+5=7, bet 7 nedalās ar n=3. Tātad pāris (2;3) neder par atrisinājumu.

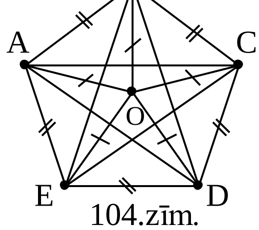
Ja m=3, tad n=3+1=4. Pārbaudām: m+5=3+5=8 un 8 dalās ar n=4. n+5=4+5=9 un 9 dalās ar m=3. Tātad skaitļu pāris (3;4) der par atrisinājumu.

Ja m=6, tad n=7. Pārbaudām: m+5=6+5=11, bet 11 nedalās ar n=7. Tātad pāris (6;7) neder par atrisinājumu.

Līdzīgi aplūko pārējās iespējas, kad n=m+2; n=m+3; n=m+4 un n=m+5, un, veicot pārbaudi, iegūst pārējos atrisinājumus (1;3), (1;6), (2;7), (5;10) un (10;15).

Tā kā var būt arī m>n un šajā gadījumā visi spriedumi būs līdzīgi jau izdarītajiem, tikai m un n mainīsies vietām, tad der arī jau atrastajiem pāriem "simetriskie" pāri (2;1), (4;3), (3;1) utt.

111. Atbilde Jā, var (sk. 104.zīm.)



104.zīm.

Risinājums Aplūkosim regulāru piecstūri. Tā virsotnes būs 5 no atzīmētajiem punktiem, bet centrs - sestais atzīmētais punkts. Tad AB=BC=CD=DE=AE kā regulāra piecstūra malas. Arī AO=BO=CO=DO=EO, jo centrs atrodas vienādā attālumā no virsotnēm. Pamatosim, ka visi trijstūri, kuru virsotnes atrodas šajos punktos, tiešām ir vienādsānu. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru viena virsotne atrodas punktā A. (Tā kā piecstūris ir regulārs, tad visu pārējo trijstūru aplūkošanu varēs veikt analogi). Šādu trijstūru ir 10:

1) ΔABC, ΔABE, ΔADE.
2) ΔABO, ΔACO, ΔADO, ΔAEO.
3) ΔABD, ΔACE, ΔACD.

1) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 regulārā piecstūra malas.

2) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 nogriežņus, kas savieno piecstūra virsotnes ar centru.

3) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 piecstūra diagonāles, bet regulāram piecstūrim visas diagonāles ir vienāda garuma.

112. Atbilde Piemēram, 147; 258; 369. Summa ir 774.

Risinājums Ja kaut viens no izveidotajiem skaitļiem būs vismaz četrciparu skaitlis, tad arī summa būs vismaz četrciparu skaitlis. Ja kāds no skaitļiem būs divciparu skaitlis, tad noteikti kādam no pārējiem skaitļiem būs jābūt vismaz četrciparu skaitlim. Katrs četrciparu skaitlis ir lielāks par jebkuru trīsciparu skaitli, tāpēc izveidosim tādus trīs trīsciparu skaitļus, lai summa arī būtu trīsciparu skaitlis. Lai summa būtu iespējami mazāka, simtu cipari jāņem iespējami mazākie - 1; 2 un 3. Par desmitu cipariem jāizvēlas 4; 5 un 6, bet par vienu cipariem - 7, 8 vai 9. Apzīmēsim izveidotos trīs skaitļus ar $\overline{a_1b_1c_1}$, $\overline{a_2b_2c_2}$, $\overline{a_3b_3c_3}$ un aplūkosim to summu:

$$\overline{a_1b_1c_1}+\overline{a_2b_2c_2}+\overline{a_3b_3c_3}=100a_1+10b_1+c_1+100a_2+10b_2+c_2+100a_3+10b_3+c_3.$$

Sagrupējot saskaitāmos, iegūsim: $100(a_1+a_2+a_3)+10(b_1+b_2+b_3)+(c_1+c_2+c_3)$.

Atcerēsimies, ka a_i vērtības ir 1, 2, 3, un neatkarīgi no tā, kuram skaitlim būs kurš simtu cipars, summa nemainīsies, proti, $a_1+a_2+a_3=6$. Līdzīgi $b_1+b_2+b_3=15$ un $c_1+c_2+c_3=24$. Tad $100\cdot6+10\cdot15+24=774$.

Kā redzam, tad izveidoto triju skaitļu summa nav atkarīga no tā, kādas burtu vērtības vienas šķiras ievaros izvēlamies. Pavisam iespējami 36 dažādi skaitļu trijnieki ar vienu un to pašu minimālo summu 774.

113. Risinājums Piedāvāsim vienu no iespējamajām svēršanas shēmām.

I svēršana: nosveram 4 monētas reizē. Ir trīs iespējas svaru rādījumam - 40g, 41g, 42g. Analizēsim katru no šīm situācijām atsevišķi.

1) 40 grami. Tātad starp nosvērtajām monētām smago monētu nav. Tās abas ir starp nesvērtajām monētām. Tad **II svēršanā** sveram patvaļīgas 2 monētas no piecām nesvērtajām; sauksim tās par A un B, bet trīs atlikušās par C, D, E. Atkal iespējami 3 varianti:

20 grami (A,B)	**21 grams (A,B)**	**22 grami (A,B)**
Tad abas smagās ir starp trīs nesvērtajām monētām C, D, E. Lai atrastu smagās, **III, IV, V svēršanā**C, D, E var svērt pa vienai un noteikt katras monētas masu, tādējādi atrodot smagās.	Tad viena ir uz šī svaru kausa, otra starp C, D, E. **III svēršanā** sveram A; tādējādi mēs noskaidrojam vienu smago monētu, jo tā ir vai nu A, vai B. **IV svēršanā** sveram C. **V svēršanā** sveram D. Ja ne C, ne D nav smagās, tad smagā ir E. Līdz ar to abas smagās ir atrastas.	Šajā gadījumā šīs monētas arī ir abas smagās, ko vajadzēja atrast.

2) **41 grams.** Tātad starp nosvērtajām monētām ir viena smagā, bet otra ir starp nesvērtajām monētām. Pirmās grupas monētas nosauksim par A, B, C, D, bet otrās grupas - par E, F, G, H, I. Atcerēsimies, ka katrā no šīm grupām ir pa vienai smagajai monētai.

II svēršanā sveram A, B, C un E, F, G. Iespējami trīs svaru rādījumi - 60g, 61g un 62g. Analizēsim katru gadījumu atsevišķi:

60 grami

Tātad smago monētu starp A, B, C, E, F, G nav. Tātad smagā ir D, jo starp A, B, C, D viena ir smagā. Otra smagā ir starp H un I. To var noskaidrot **III svēršanā.**

40 grami

Tātad starp šīm monētām nav smago. Abas smagās ir nesvērtās C un G.

61 grams (A,B)

Tātad viena smagā monēta ir starp A, B, C, E, F, G, bet otra - starp nesvērtajām D, H, I (*). Pie tam ievērosim, ka viena smagā monēta ir starp A, B, C, D (**), bet otra starp E, F, G, H, I (***). **III svēršanā** sveram A, B, C un H. Ir iespējami trīs rezultāti:

40 grami

Tad A, B, C, H ir vieglās monētas, un smagās ir D (ievērojot (**)) un viena no E, F, G (ievērojot (*) un (***)). To var noskaidrot **IV un V svēršanā**. Būs atrastas abas smagās monētas.

41 grams

Tad, ievērojot (**), starp A, B, C, D ir viena smagā, un pēc šī svaru rādījuma starp A, B, C, H ir viena smagā monēta. Tātad monētas D un H ir vienāda svara. Ievērojot (*), tās abas nevar būt smagās. Tātad smagā monēta ir I. Tātad otra smagā monēta ir starp A, B, C. To var noskaidrot **IV un V svēršanā**. Līdz ar to abas smagās monētas būs atrastas.

42 grami

Tad starp A, B, C, H ir 2 smagās monētas. Tā kā starp A, B, C, D (**) ir viena smagā monēta, tad starp A, B, C nevar būt 2 smagās monētas. Tātad viena smagā monēta ir H, bet otra - starp A, B, C. To var noskaidrot ar **IV un V svēršanu.**

62 grami (A,B)

Abas smagās monētas ir starp A,B,C un E,F,G, pa vienai katrā grupā. **III svēršanā** sveram A,B un E,F. Ir trīs varianti:

41 grams

Tātad viena smagā monēta ir starp A, B, E, F, bet otra starp C, G. **IV svēršanā** sveram vienu no C, G. Ja smagā ir C, tad **V svēršanā** sveram vienu no E, F (jo starp A, B, C ir viena smagā). Ja smagā ir G, tad **V svēršanā** sveram vienu no A, B. Līdz ar to abas smagās monētas būs atrastas.

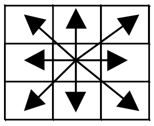
42 grami

Abas smagās ir starp A, B, E, F: viena starp A, B, otra - starp E, F. Tās var noskaidrot **IV un V svēršanā**, sverot pa vienai monētai no katras grupas.

3) **42 grami**. Tātad abas smagās monētas ir starp šīm četrām. Līdz ar to atlikušajās četrās svēršanās var svērt pa vienai, tādējādi noskaidrojot divas smagās monētas.

114. Atbilde Nē, nevar.

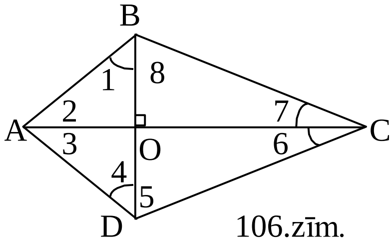
Risinājums Ievērosim, ka, lai "pa īsāko ceļu" nokļūtu no vienas tabulas rūtiņas kādā citā tabulas rūtiņā, jāšķērso ne vairāk kā divas citas tabulas rūtiņas (ar vienu gājienu atļauts šķērsot divu rūtiņu kopējo malu vai kopējo stūri, sk.105.zīm.)



105.zīm.

Atradīsim tabulā ierakstīto pašu mazāko un pašu lielāko skaitli. Aplūkosim īsāko ceļu starp šīm divām rūtiņām. Pēc iepriekš teiktā mēs savā ceļā šķērsosim ne vairāk kā divas citas rūtiņas. Ja mazākais skaitlis ir a, tad nākamajā rūtiņā (ceļā uz lielākā skaitļa rūtiņu) ierakstītais skaitlis nepārsniedz a+2, nākamajā - a+4, bet lielākais tabulas skaitlis nepārsniedz a+6. Ja tabulas mazākais skaitlis ir a, bet lielākais a+6, tad tabulā ierakstītie skaitļi var pieņemt tikai 7 dažādas vērtības, proti, a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5; a+6. Uzdevuma prasība tātad nav izpildāma.

115. Atbilde Var būt 4 vienādi leņķi (sk. 106.zīm.).



106.zīm.

Risinājums Pamatosim, kāpēc nevar būt vairāk kā 4 vienādi leņķi. Apvienosim dotos leņķus pāros - $\angle 1$ un $\angle 5$; $\angle 2$ un $\angle 6$; $\angle 3$ un $\angle 7$; $\angle 4$ un $\angle 8$. Katrā pārī esošie leņķi ir iekšējie šķērsleņķi. Ja kādā pārī abi leņķi būtu vienādi, tad attiecīgās malas būtu paralēlas (piemēram, ja $\angle 8=\angle 4$, tad $AD \| BC$) un dotajam četrstūrim būtu paralēlas malas. Tātad katrā no šiem pāriem var būt ne vairāk kā viens no savstarpēji vienādajiem leņķiem.

106. Atbilde a) Piemēram, skaitlis 133. Tiešām, $133:(1^2+3^2+3^2)=133:19=7$.

b) Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

Risinājums Pieņemsim, ka A ir n-ciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., tas nesatur ciparu 0, tā visi cipari nav vienādi un tas dalās ar savu ciparu kvadrātu summu.

Pierādīsim, ka skaitlis B, kuru iegūst, 3 reizes pēc kārtas uzrakstot skaitli A, arī apmierina uzdevuma nosacījumus:

a) tā kā A visi cipari nav vienādi, tad arī visi B cipari nav vienādi,

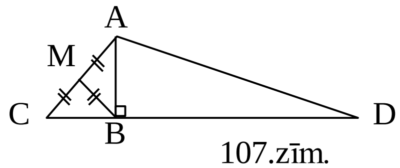
b) tā kā A nesatur nulli, tad arī B nesatur nulli,

c) acīmredzot B var uzrakstīt kā

$A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{2n\text{ nulles}}+A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ nulles}}+A=A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{-}1}1\underbrace{000\ldots0}_{n-1}1$. Apzīmēsim A ciparu kvadrātu summu ar K; tad A dalās ar K. Skaitļa B ciparu kvadrātu summa ir 3K; jāpierāda, ka B dalās ar 3K. Bet tas ir acīmredzams, jo $B=A\cdot 10\ldots010\ldots01$, A dalās ar K un $10\ldots010\ldots01$ dalās ar 3 (tā ciparu summa dalās ar 3).

Tātad B apmierina visas uzdevuma prasības. Tādējādi no skaitļa 133 varam iegūt 133133133, no tā savukārt 133133133133133133133133133, utt. Tie visi apmierina uzdevuma prasības.

117. Risinājums Katru daudzstūri, griežot pa diagonālēm, ir iespējams sagriezt trijstūros. Katru trijstūri, novelkot augstumu, var sagriezt 2 taisnleņķa trijstūros (sk. 107.zīm.).



107.zīm.

Aplūkosim taisnleņķa trijstūri ABC. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas viduspunkts M ir arī apvilktās riņķa līnijas centrs. Tātad AM=BM=CM, no kurienes seko, ka ΔABM un ΔBCM ir vienādsānu. Tāpat rīkojamies arī ar taisnleņķa trijstūri ABD.

Esam aprakstījuši metodi, kā katru daudzstūri iespējams sagriezt vienādsānu trijstūros.

118. Atbilde $147 \cdot 258 \cdot 369 = 13994694$. $(*)$

Risinājums Lasītājs pats var pārbaudīt atbildē norādītās skaitliskās vienādības pareizību. Lai pamatotu, ka tur redzamais reizinājums ir mazākais iespējamais, pietiek pamatot, ka citos gadījumos reizinājums iznāk lielāks par 13994694.

Pieņemsim pretējo: ir iespējams iegūt mazāku reizinājumu par $(*)$.

Vispirms noskaidrosim, kādi var būt reizinātāju pirmie cipari. Ja tie visi lielāki par 1, tad reizinājums ir lielāks par $200 \cdot 300 \cdot 400 = 24000000 > 13994694$. Tātad vienam reizinātājam jāsākas ar 1. Spriežot līdzīgi, konstatējam, ka abu pārējo reizinātāju pirmie cipari varētu būt vienīgi (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;4) $(**)$

Tagad pierādīsim vairākus apgalvojumus par ciparu kārtību minimālā reizinājuma reizinātājos.

Skaidrs: ja kādā reizinātājā desmitu cipars ir lielāks par vienu ciparu, tad, samainot šos ciparus vietām, reizinātāja un tātad arī reizinājuma vērtība samazināsies. Tāpēc turpmāk aplūkosim tikai tādus gadījumus, kur visos trijos reizinātājos cipari ir augošā kārtībā.

Tālākajam būs svarīga vienādība $xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)$,

par kuras pareizību lasītājs var patstāvīgi pārliecināties, atverot iekavas. No tās acīmredzami seko: ja divu skaitļu summa ir konstants lielums, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Apzīmēsim divus no mūsu trīsciparu reizinātājiem ar x un y, turklāt pieņemsim, ka $x<y$. Ja mēs savā starpā mainītu x un y vienu ciparus, tad x un y summa nemainītos; bet x un y viens no otra vairāk atšķirtos tajā gadījumā, ja x vienu cipars būtu mazāks par y vienu ciparu, nevis otrādi. Tas nozīmē, ka, meklējot minimālo reizinājuma vērtību, vērts apskatīt tikai tādus gadījumus, kur skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks vienu cipars. Gluži analoģiski iegūstam, ka minimālā reizinājuma gadījumā skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks desmitu cipars.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad reizinātāju pirmie cipari ir 1; 2; 3. Ierakstīsim reizinātāju ciparus pa rindiņām tabulā ar izmēriem 3x3, pie tam simtu ciparus rakstīsim pirmajā kolonnā no augšas uz leju. Tad saskaņā ar iepriekšējiem spriedumiem katrā rindiņā cipariem jāpieaug no kreisās uz labo pusi, bet katrā kolonnā - no augšas uz leju (sk. 108.zīm. a).

1	A	
2		
3		B

a)

1	4	
2		8
3		9

b)

1	4	
2		
3	8	9

c)

108.zīm.

Pats mazākais no atlikušajiem cipariem 4 nevar būt nekur citur kā rūtiņā A (citādi pa kreisi vai uz augšu no tā atrastos kāds par to lielāks cipars); līdzīgi pats lielākais no atlikušajiem cipariem 9 nevar atrasties nekur citur kā rūtiņā B. Savukārt no cipara 8 pa labi vai uz leju var atrasties tikai 9; tāpēc 8 var novietoties tikai tā, kā tas parādīts 108.zīm. b) vai c) gadījumā.

Tagad, ņemot vērā pieaugšanas nosacījumu rindās un kolonnās, viegli konstatēt, ka pārējie cipari 5; 6; 7 var tikt ierakstīti tikai 5 dažādos veidos; tie visi parādīti 109.zīm. un tiem blakus uzrakstīts atbilstošais reizinājums.

1	4	5
2	6	8
3	7	9

$145 \cdot 268 \cdot 379 = 14727940$

1	4	7
2	5	8
3	6	9

$147 \cdot 258 \cdot 369 = 13994694$

1	4	6
2	5	8
3	7	9

$146 \cdot 258 \cdot 379 = 14276172$

1	4	5
2	6	7
3	8	9

$145 \cdot 267 \cdot 389 = 15060135$

1	4	6
2	5	7
3	8	9

$146 \cdot 257 \cdot 389 = 14596058$

109.zīm.

Redzams, ka reizinājums $147 \cdot 258 \cdot 369$ mūsu apskatāmajā gadījumā ir vismazākais.

Līdzīgā ceļā lasītājs var aplūkot arī citus iespējamos gadījumus saskaņā ar $(**)$ un pārliecināties, ka mazāku reizinājumu kā $(*)$ iegūt neizdodas. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un $(*)$ ir mazākais iespējamais reizinājums.

119. Risinājums Centīsimies izvietot firmas darbiniekus aplī pēc tāda principa. Darbiniekam A_1 vienā pusē novietosim tā draugu A_2, bet otrā pusē tā ienaidnieku A_3. Tā kā A_2 vienīgais draugs ir A_1, tad A_2 blakus otrā pusē novietosim viņa ienaidnieku. Tas būs kāds A_4, jo A_3 ir ienaidnieks A_1. Savukārt A_3 blakus novietosim viņa draugu A_5, utt. Ja kāds aplis noslēdzas, tad sāksim veidot jaunu apli. Tātad katram darbiniekam šajos apļos vienā pusē stāvēs draugs, bet otrā - ienaidnieks. Pierādīsim, ka katrā aplī noteikti stāv pāra skaits darbinieku. Liksim draugiem sadoties rokās. Tā kā katram blakus stāv tikai viens draugs, tad katrā aplī situācija būs šāda: sadotas rokas, nesadotas, sadotas, nesadotas,…. Tātad cilvēki būs sadalījušies pāros, tātad viņi ir pāra skaitā. Visus katra apļa pāra vietās stāvošos nosūtīsim uz vienu filiāli, bet nepāra vietās stāvošos - uz otru. Uzdevuma prasības būs izpildītas, jo jebkuram darbiniekam X, kas stāv pāra vietā, vienīgie, ar kuriem viņš nedrīkst nonākt vienā filiālē, ir viņa kaimiņi, bet viņi stāv nepāra vietās un tāpēc nevar nonākt vienā filiālē ar X.

120. Atbilde Jā, var. Sk. 110.zīm.

4	5	6	7
3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4

110.zīm.

121. Risinājums Katrs trešais naturālais skaitlis dalās ar 3 . Tātad vismaz viens no dotajiem skaitļiem a, b, c, d dalās ar 3. Tā kā katrs otrais naturālais skaitlis ir pāra skaitlis, tad tieši divi no dotajiem skaitļiem ir pāra skaitļi - vai nu a un c, vai b un d dalās ar 2. Tātad reizinājums $a\cdot b\cdot c\cdot d$ dalās ar $3\cdot 2\cdot 2=12$.

122. Risinājums Apzīmēsim dotos skaitļus ar n, n+1, n+2, n+3. Aplūkosim šo skaitļu reizinājumu $A=n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)$. Izdarīsim vairākus pārveidojumus.

$$A=(n^2+n)(n^2+5n+6)=n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n=$$
$$=(n^2)^2+6n^3+11n^2+6n=(n^2)^2+(9n^2+2n^2)+2(n^2\cdot 3n)+2\cdot(1\cdot 3n)=$$
$$=(n^2)^2+(3n)^2+1^2+2\cdot(n^2\cdot 1)+2\cdot(n^2\cdot 3n)+2\cdot(1\cdot 3n)-1=(n^2+3n+1)^2-1$$

[Pārveidojumi tika veikti ar mērķi izmantot formulu
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$].

Tātad $A=(n^2+3n+1)^2-1$, jeb $A+1=(n^2+3n+1)^2$

Vienādības labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad arī A+1 ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ja arī A+5 (kā tas prasīts uzdevumā) ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad mums ir divi naturālu skaitļu kvadrāti, kas atšķiras viens no otra par 4. Bet kvadrātu virknē 1; 4; 9; 16; 25; 36; … nav divu skaitļu, kas atšķirtos viens no otra par 4. Tātad, četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumam pieskaitot 5, nevar iegūt naturāla skaitļa kvadrātu.

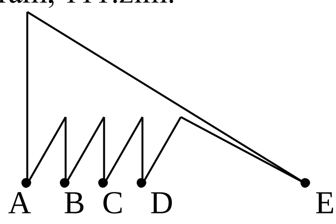
123. Atbilde 16 filmas.

Risinājums No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka neviens no draugiem divas dienas pēc kārtas nepaliek mājās. Piemēram, ja A un B iet uz kino, bet C paliek mājās, tad nākamajā vakarā vai nu A, vai B noteikti paliek mājās, tātad C iet uz kino. Līdz ar to C nav iespējams divus vakarus pēc kārtas palikt mājās.

Tā kā viens no draugiem redzēja 15 filmas, tad maksimālais dienu skaits, kurā notika kino apmeklējumi, ir $15\cdot 2+1=31$. (Ja katru otro vakaru viņš apmeklē filmu un tā viņam nepatīk). Tā kā viens no draugiem ir redzējis tieši 31 filmu, tad viņš uz kino ir gājis katru vakaru. Tā kā viens no draugiem gāja kopā ar viņu 15 vakarus, tad otrs gāja uz kino 31-15=16 atlikušos vakarus, jo visas kinofilmas tika apmeklētas divatā.

124. Risinājums Apzīmēsim strādniekus ar 10 melniem aplīšiem, bet instrumentus - ar 10 baltiem aplīšiem. Divus aplīšus (baltu un melnu) savienosim ar līniju tikai tādā gadījumā, ja atbilstošais strādnieks prot strādāt ar atbilstošo instrumentu. Tā kā katrs strādnieks prot strādāt ar diviem instrumentiem, tad no katra melnā aplīša izies tieši 2 līnijas uz baltiem aplīšiem. Analogi, no katra baltā aplīša izies tieši 2 līnijas uz melniem aplīšiem. Tātad aplīši noteikti izvietosies pamīšus - balts, melns, balts, melns…. Aplīši var izvietoties vienā vai vairākos apļos. Tā kā katrā aplī ir minētais pamīšus izkārtojums, tad blakus esošos aplīšus apvienosim pāros - katrā pāri vienu baltu un vienu melnu aplīti. Atbilstošajam strādniekam no katra pāra iedodam šī paša pāra baltajam aplītim atbilstošo instrumentu. Instrumentu sadale ir notikusi.

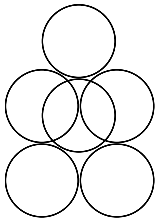
125. Atbilde Sk., piemēram, 111.zīm.



111.zīm.

A, B, C, D un E ir šī desmitstūra īpašās virsotnes.

126. Atbilde Sk., piemēram, 112.zīm.



112.zīm.

127. Risinājums Aplūkosim sešciparu skaitli $A = \overline{abcdef}$. Uzrakstīsim to šādi:

$$A = \overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{def} \ .$$

Izdarīsim vairākus pārveidojumus:

$$A = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{def} + \overline{abc} - \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001 + \overline{def} - \overline{abc} \ .$$

Šīs summas pirmais saskaitāmais $\overline{abc} \cdot 1001$ dalās ar 7, jo 1001=7·143.

Tātad, ja a dalās ar 7, tad noteikti $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ jādalās ar 7. Savukārt, ja $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ dalās ar 7, tad A jādalās ar 7, jo summas abi saskaitāmie $\overline{abc} \cdot 1001$ un $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ dalās ar 7.

128. Risinājums Izdarīsim ar doto vienādību identiskus pārveidojumus:

$2x^2+x=3y^2+y$ (pārnesam $2y^2$ un y uz kreiso pusi).

$$2x^2-2y^2+x-y=y^2$$
$$2(x-y)(x+y)+(x-y)=y^2$$
$$(x-y)(2(x+y)+1)=y^2$$
$$(x-y)(2x+2y+1)=y^2 \quad (1)$$

Analizēsim vienādību (1). Tās labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad katrs tās pirmreizinātājs ir pāra pakāpē. Tā kā $(x-y)(2x+2y+1)=y^2$, tad kreisā puse satur tādus pašus pirmreizinātājus tādās pašās pakāpēs kā labā puse y^2. Ja (x-y) un (2x+2y+1) būtu savstarpēji pirmskaitļi, tad tiem nebūtu kopīgu pirmreizinātāju. Līdz ar to gan (x-y), gan (2x+2y+1) pirmreizinātājiem jābūt pāra pakāpēs: pretējā gadījumā nevarētu pastāvēt vienādība. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) būtu pilni kvadrāti.

Atliek pamatot, ka (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi. Pieņemsim pretējo. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir kopīgs dalītājs; pieņemsim, ka abas šīs izteiksmes dalās ar pirmskaitli p. Ja tā, tad reizinājums (x-y)·(2x+2y+1) dalās ar p^2. Tā kā $(x-y)(2x+2y+1)=y^2$, tad arī y^2 dalās ar p^2. Tātad y dalās ar p. Tā kā x-y dalās ar p un y dalās ar p, tad arī x ir jādalās ar p. Tātad ar p dalās arī izteiksme 2x+2y. Sastādīsim vienādību: (2x+2y+1)-(2x+2y)=1.

Abas kreisās puses izteiksmes dalās ar p, tad arī labajai pusei jādalās ar p. Proti, 1 jādalās ar p. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka p ir pirmskaitlis. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi un saskaņā ar iepriekšpierādīto - pilni kvadrāti.

129. Atbilde Jā, to var izdarīt.

Risinājums Iedomāsimies 16 taisnes, starp kurām nekādas divas nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Katrā taišņu krustpunktā atradīsies pilsēta. Pa katru taisni iet dzelzceļa līnija, kas savieno visas uz tās atrodošās pilsētas. Ja nekādas divas taisnes nav paralēlas, tad katra taisne krustojas ar visām pārējām taisnēm. Tātad katras divas dzelzceļa līnijas krustojas. Pēc dotā izriet, ka caur katru pilsētu iet tieši 2 dzelzceļa līnijas. Tā kā pilsētas atrodas tikai taišņu (dzelzceļa līniju) krustpunktos, tad nav tādas pilsētas, caur kuru iet tikai viena dzelzceļa līnija.

Aplūkosim pilsētu A. Caur to iet divas dzelzceļa līnijas - a un b. Pieņemsim, ka līniju a slēdz. Pamatosim, ka no A tomēr var nokļūt jebkurā citā pilsētā. Pēc dotā līnija b krustojas ar visām citām dzelzceļa līnijām. Lai nokļūtu no A līdz pilsētai, kas atrodas uz konkrētas līnijas, no A pa b vienkārši jāsasniedz šī līnija un tad jāturpina ceļš pa to līdz izraudzītajai pilsētai. Kā no A nokļūt tajās pilsētās, kas atrodas uz slēgtās līnijas a? Tā kā caur šīm pilsētām iet vēl pa vienai dzelzceļa līnijai, tās noteikti krusto līniju b (b krusto visas līnijas). Tātad atkal jābrauc pa b līdz attiecīgajai līnijai.

Ja slēgs patvaļīgas divas dzelzceļa līnijas, tad no pilsētas, kas atradās to krustpunktā (jebkuras 2 līnijas krustojas), nevarēs nokļūt nevienā citā pilsētā.

130. Risinājums Ir iespējams uzkonstruēt piemēru, kad uzdevuma prasības nav izpildāmas. Izveidosim tabulu ar izmēriem 10x10 (sk.113.zīm.).

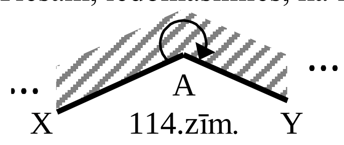
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A_1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_4	x	x	x							
A_5	x	x	x							
A_6	x	x	x							
A_7	x	x	x							
A_8	x	x	x							
A_9	x	x	x							
A_{10}	x	x	x							

113.zīm.

Apzīmēsim instrumentus ar skaitļiem no 1 līdz 10, bet strādniekus - A_1 līdz A_{10}. Ja kāds strādnieks prot strādāt ar kādu instrumentu, attiecīgajā rūtiņā ievilksim krustiņu. Šāds instrumentu sadalījums atbilst uzdevuma nosacījumiem. Viegli redzēt, ka, piemēram, strādnieki A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 un A_{10} prot strādāt tikai ar instrumentiem 1., 2. un 3. Skaidrs, ka 3 instrumentus nevar sadalīt 7 strādniekiem.

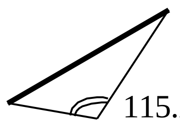
131. Atbilde Pierādīsim, ka divas blakus virsotnes abas vienlaicīgi nevar būt īpašas. No tā izrietēs uzdevuma apgalvojums.

Vispirms pierādīsim, ka neviena virsotne, kurā esošais daudzstūra leņķis ir lielāks par 180°, nav īpaša. Tiešām, iedomāsimies, ka $\angle A > 180^o$ (114.zīm.)



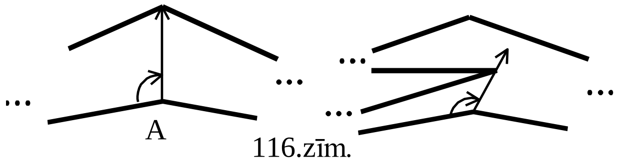
114.zīm.

Nostāsimies virsotnē a ar skatu stara AX virzienā un griezīsimies pa labi, ļaujot skatam slīdēt daudzstūra iekšpusē, līdz tas sasniegs stara AY ieņemto stāvokli. Griešanās procesā mūsu skats visu laiku atdursies pret kādu daudzstūra malu. Tā kā jebkuru nogriezni no punkta ārpus tā redz leņķī, kas mazāks par 180° (sk. 115.zīm.), bet $\angle A > 180^o$, tad griešanās procesā mūsu skats vismaz vienreiz pārslīdēs no vienas malas uz otru.



115.zīm.

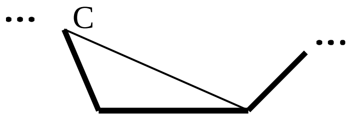
Tas var notikt, tikai skatam šķērsojot kādu daudzstūra virsotni (sk.116.zīm.)



116.zīm.

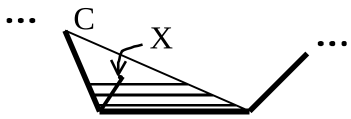
Abos iespējamajos gadījumos uzskatāmi redzama diagonāle, kas atrodas daudzstūra iekšpusē.

Tagad aplūkosim divas blakus esošas daudzstūra virsotnes A un B. Ja vismaz vienā no tām leņķis ir lielāks par 180^o, tad tā nav īpaša. Atliek aplūkot gadījumu, kad $\angle A<180^o$ un $\angle B<180^o$. Apzīmēsim to virsotni, kas pa daudzstūra kontūru atrodas otrā pusē no A nekā virsotne B, ar C.



117.zīm.

Ja ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C nav daudzstūra virsotņu, tad diagonāle BC atrodas daudzstūra iekšpusē (11.zīm.); tāpēc virsotne B nav īpaša. Ja turpretī ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C atrodas dažas daudzstūra virsotnes, tad aplūkosim to no šīm virsotnēm, kura atrodas vistuvāk taisnei AB (118.zīm.); apzīmēsim to ar X.



118.zīm.

Mēs apgalvojam, ka tad diagonāle AX pilnīgi atrodas daudzstūra iekšpusē. Tiešām, lai tā nebūtu, nogrieznim AX jābūt kopīgiem punktiem ar kādu daudzstūra malu. Bet tad viens šīs malas galapunkts atrastos iesvītrotajā apgabalā, un tā būtu virsotne, kas atrodas tuvāk malai AB nekā X; iegūta pretruna ar X izvēli.

Tātad šai gadījumā virsotne A nav īpaša. Vajadzīgais pierādīts.

132. Risinājums Apzīmēsim kvadrāta malas garumu ar A, bet taisnstūru īsākās malas ar a_i, garākās ar b_i, kur i=1; 2; …; n. Tā kā kvadrāta laukums vienāds ar visu taisnstūru laukumu summu, tad $A^2=a_1 \cdot b_1+a_2 \cdot b_2+\ldots+a_n \cdot b_n$.

Izdalīsim abas izteiksmes puses ar A^2: $1= a_1 \cdot b_1 \cdot \frac{1}{A^2} +a_2 \cdot b_2 \frac{1}{A^2} +\ldots+a_n \cdot b_n \frac{1}{A^2}$.

Tā kā $A \geq a_i$ un $A \geq b_i$ katram i, tad $\frac{1}{A^2} \leq \frac{1}{b_i^2}$

Tad $1= a_1 \cdot b_1 \cdot \frac{1}{A^2} +a_2 \cdot b_2 \frac{1}{A^2} +\ldots+a_n \cdot b_n \frac{1}{A^2} \leq a_1 \cdot b_1 \cdot \frac{1}{b_1^2} +a_2 \cdot b_2 \frac{1}{b_2^2} +\ldots+a_n \cdot b_n \frac{1}{b_n^2} =$

$$=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}$$, ko arī vajadzēja pierādīt.

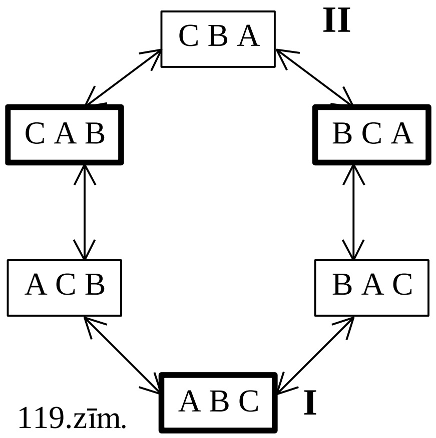
133. Atbilde 1956 dažādas kaudzes.

Risinājums Ja kaudze sastāv no vienas grāmatas, tad ir iespējamas 6 dažādas kaudzes. Ja kaudze sastāv no 2 grāmatām, tad katru no 6 grāmatām var novietot kaudzes apakšā un tai virsū nolikt jebkuru no piecām atlikušajām. Tad iegūsim $6 \cdot 5=30$ dažādas kaudzes. Ja kaudze sastāv no 3 grāmatām, spriedīsim šādi: esošās 30 divu grāmatu kaudzes katru var augšā papildināt ar jebkuru no neizmantotajām 4 grāmatām. Tātad dažādo kaudžu skaits ir $30 \cdot 4=120$ ($6 \cdot 5 \cdot 4=120$). Līdzīgi

spriedīsim arī tālāk. Lai iegūtu 4 grāmatu kaudzes, katru no 120 trīs grāmatu kaudzēm varam augšā papildināt ar jebkuru no neizmantotajām 3 grāmatām. Iegūsim 120·3=360 dažādas četru grāmatu kaudzes. Lai iegūtu 5 grāmatu kaudzes, katru no 360 četru grāmatu kaudzēm varam augšā papildināt ar jebkuru no neizmantotajām 2 grāmatām. Iegūsim 360·2=720 dažādas piecu grāmatu kaudzes. Līdzīgi iegūsim 720·1=720 sešu grāmatu kaudzes.
Kopā iegūsim 6+30+120+360+720+720=1956 dažādas kaudzes.

134. Atbilde Nē, nevar.

Risinājums Izpētīsim, kā vienas apdzīšanas rezultātā var mainīties (no kāda savstarpējā stāvokļa uz kādu) mašīnu A, B, C savstarpējais izvietojums. Visi iespējamie izvietojumi un savstarpējās pārejas parādītas 119.zīm.



119.zīm.

Ievērosim, ka no izvietojuma "biezā rāmītī" var pāriet tikai uz izvietojumu "plānā rāmītī" un otrādi. Izvietojums Cēsīs (tas apzīmēts ar I) ir "biezā rāmītī". Tāpēc pēc 100 apdzīšanām mašīnu izvietojums atkal būs "biezā rāmītī". Tāpēc tas nevar būt izvietojums II, kādam pēc uzdevuma nosacījumiem jābūt, iebraucot Drustos.

135. Risinājums Pamēģināsim vispirms izteikt mazākus skaitļus: 1, 2, 3, …, nelietojot par saskaitāmajiem neko citu kā tikai vieniniekus un divniekus.

Skaitlis 1:	1=1	1 veids
Skaitlis 2:	2=1+1=2	2 veidi
Skaitlis 3:	3=1+1+1=1+2=2+1	3 veidi
Skaitlis 4:	4=1+1+1+1=1+1+2= =1+2+1=2+1+1=2+2	5 veidi
Skaitlis 5:	5=1+1+1+1+1=1+1+1+2= =1+1+2+1=1+2+1+1= =2+1+1+1=1+2+2= =2+1+2=2+2+1	8 veidi

Pagaidām varam novērot interesantu īpašību: katram nākošajam skaitlim meklējamais veidu skaits ir vienāds ar abu iepriekšējo skaitļu veidu skaitu summu. Ja mēs pratīsim šo īpašību pamatot, tad meklējamo skaitu aprēķināt būs viegli. Turpināsim tālāk augstāk iesākto virkni:
5+8=13; 8+13=21; 13+21=34; 21+34=55, 34+55=89; 55+89=144; 89+144=233; 144+233=377, 233+377=610, 377+610=987.

Tātad skaitli 15 prasītajā formā var izsacīt 987 dažādos veidos.

Atliek pamatot augstāk atzīmēto īpašību.

Padomāsim, kā var izsacīt skaitli n+2?

Acīmredzot pastāv divas iespējas, kas viena otru izslēdz:

a) pirmais saskaitāmais ir 1; tad pārējiem saskaitāmajiem jāveido summa ar vērtību n+1. Skaidrs, ka šos saskaitāmos var izvēlēties tieši tik daudzos dažādos veidos, cik veidos skaitli n+1 var izsacīt saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.
b) pirmais saskaitāmais ir 2; tad pārējiem saskaitāmajiem jāveido summa ar vērtību n. Skaidrs, ka šos saskaitāmos var izvēlēties tieši tik daudzos dažādos veidos, cik veidos skaitli n var izsacīt saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.

Līdz ar to vajadzīgā īpašība pamatota.

136. Risinājums Ievērosim, ka skaitļi tabulā izvietoti pēc zināma principa - proti, pirmajā stabiņā atrodas skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumā 1, otrajā stabiņā atrodas skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumā 2, bet trešajā stabiņā atrodas skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumā 0. Izvēloties viena skaitļa (A) sastādīšanai ciparus pēc uzdevumā aprakstītā principa, mēs būsim paņēmuši vienu ciparu, kurš izsakāms formā 3x, vienu ciparu, kurš izsakāms formā 3y+1, un ciparu, kurš izsakāms formā 3z+2 (pa vienam no katra stabiņa). Tad skaitļa A ciparu summa $S(A)=3x+(3y+1)+(3z+2)=3x+3y+3z+3=3(x+y+z+1)$. Tātad skaitļa A ciparu summa dalās ar 3. Tāpēc arī pats skaitlis A dalās ar 3. Līdzīgi spriežam par otra skaitļa (B) veidošanu un secinām, ka arī B dalās ar 3. Tātad $A=3a$ un $B=3b$. Tad $A\cdot B=3a\cdot 3b=9ab$. No tā arī izriet, ka izveidoto skaitļu reizinājums dalās ar 9.

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi ņemti no citiem avotiem:

Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiādes: 9., 40., 72., 100., 106., 113., 116.
Maskavas matemātikas olimpiādes: 24.
Vissavienības matemātikas olimpiādes: 60.
"Pilsētu Turnīrs": 74., 80.
Olimpiāde "Baltijas Ceļš": 91., 92., 94.
Lietuvas matemātikas olimpiāde:132.
I.Muceniece: 30., 87., 93.
A.Zabuļonis: 93.
A.Savins: 104., 108.
V.Prasolovs: 125., 131.