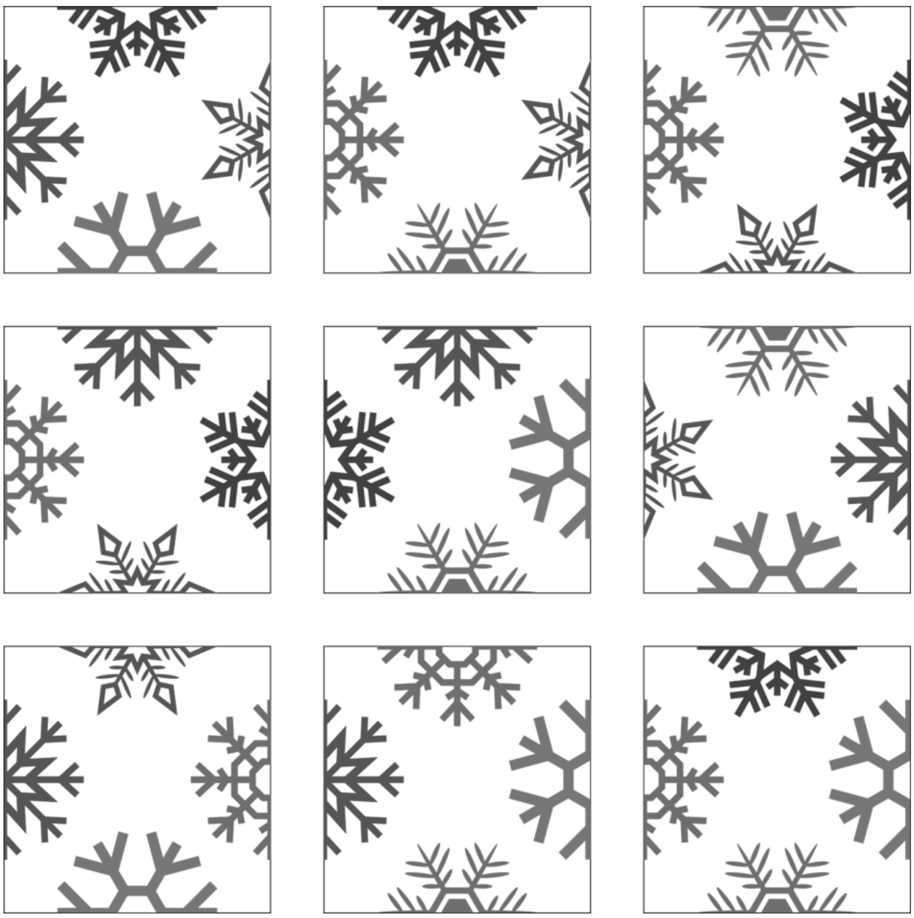
Maruta Avotiņa, Agnese Šuste

Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2015./2016. mācību gadā



RĪGA 2016

M. Avotiņa, A. Šuste

Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2015./2016. mācību gadā

Rīga: Latvijas Universitāte, 2016. – 153. lpp.

Grāmatā apkopoti Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas 2015./2016. mācību gadā organizēto matemātikas sacensību uzdevumi, ieteikumi, kas var palīdzēt patstāvīgi atrisināt uzdevumu, un izvērsti uzdevumu atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija un īss teorijas izklāsts, kas var noderēt uzdevumu risināšanā. Iekļauts arī pārskats par konkursiem un olimpiādēm – skolēnu rezultātu apkopojums, biežāk pieļautās kļūdas, ieteikumi u.tml.

Izsakām pateicību 2015./2016. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Kalvim Apsītim, Andrejam Cibulim, Simonai Klodžai, Mārtiņam Kokainim, Agnesei Ķerubiņai, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Ilzei Ošiņai, Raitim Ozolam, Mārim Valdatam, Annijai Varkalei un Jevgēnijam Vihrovam.

Profesora Cipariņa kluba ilustrāciju autore: Agnese Ķerubiņa.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9934-556-18-0

SATURS

IEVADS

Matemātikas sacensības – olimpiādes un konkursi – paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas sacensību uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Līdzīgi kā sportisti trenējas, lai gūtu panākumus sporta sacensībās, tā arī skolēniem (matemātiķiem) ir jāiegulda ne mazāk apjomīgs darbs, lai sagatavotos un veiksmīgi startētu matemātikas sacensībās. Tam ir nepieciešams ne tikai sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot pamata zināšanas un izkopjot prasmes uzdevumu risināšanā, bet arī darbs ārpus matemātikas stundām, piemēram, matemātikas pulciņos, nodarbībās, olimpiādēs, konkursos, kā arī patstāvīgi trenējoties matemātikas sacensību uzdevumu risināšanā.

Darīšu visu, centīšos, strādāšu un cīnīšos.

Martins Dukurs, skeletonists [1]

Vai Tu, skolēn, esi gatavs darīt visu iespējamo, censties un strādāt, lai gūtu panākumus matemātikas sacensībās? Turklāt ievēro, ka gūt panākumus ne obligāti nozīmē būt laureātam.

Panākumi ir dvēseles miers, kas ir tiešs rezultāts pārliecībai,
ka tu zini, ka esi darījis visu, ko spējis, lai kļūtu tik labs, cik labs esi spējīgs kļūt.

Džons Vudens, basketbola treneris [2]

Atkarībā no klases, kurā skolēns mācās, var izvēlēties kādu no tālāk minētajām Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas (LU A. Liepas NMS; http://nms.lu.lv/) organizētajām matemātikas sacensībām, kurās piedalīties (skat. tabulā). Piekto klašu konkurencē minētajās sacensībās drīkst piedalīties arī jaunāku klašu skolēni.

<table>
<tr><th>4. kl.</th><th>5. kl.</th><th>6. kl.</th><th>7. kl.</th><th>8. kl.</th><th>9. kl.</th><th>10. kl.</th><th>11. kl.</th><th>12. kl.</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Sagatavošanās olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Novada olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">Valsts olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Atklātā matemātikas olimpiāde</td></tr>
<tr><td>TVC</td><td colspan="3">JMK</td><td></td><td colspan="4">NNV</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">PCK</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

- *Sagatavošanās olimpiāde* ir lielisks veids, kā iesākt jauno olimpiāžu gadu. Katras skolas matemātikas skolotāji paši var izlemt, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada olimpiāde* tiek rīkota sadarbībā ar Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministriju (LR IZM). Novada olimpiāde notiek novada/ novadu apvienības/ pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes 9.-12. klašu laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts olimpiāde* arī tiek rīkota sadarbībā ar LR IZM. Šī olimpiāde parasti notiek Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā martā, ceturtdienā un piektdienā tieši pirms skolēnu pavasara brīvdienām. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

- *Atklātā matemātikas olimpiādē* drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Ik gadu šajā olimpiādē piedalās ap 3500 skolēnu, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.
- *"Tik vai… Cik?"* (TVC) ir matemātikas konkurss-olimpiāde, kas notiek četrās kārtās. Atšķirībā no visiem pārējiem LU A. Liepas NMS organizētajiem konkursiem un olimpiādēm, šajā konkursā uzdevumi ir arī testa veidā.
- *Jauno matemātiķu konkurss* (JMK) ir neklātienes konkurss matemātikā piecās kārtās. Katrā kārtā ir pieci uzdevumi, kurus skolēni var risināt aptuveni mēnesi. Risinājumus var iesūtīt pa pastu vai elektroniski. Skolēni drīkst piedalīties arī tikai atsevišķās kārtās. Salīdzinot ar Profesora Cipariņa klubu, JMK ir paredzēts mazāk pieredzējušiem olimpiāžu uzdevumu risinātājiem.
- *Profesora Cipariņa klubs* (PCK) ir senākais un tradīcijām bagātākais neklātienes matemātikas konkurss Latvijā. Kopš 2014./2015. mācību gada tas tiek organizēts piecās kārtās. Skolēni drīkst piedalīties arī tikai atsevišķās kārtās.
- *Neklātienes nodarbības vidusskolēniem* (NNV), kas senāk tika organizētas kā neklātienes apmācības, kopš 2015./2016. mācību gada ir matemātikas konkurss 9.-12. klašu skolēniem. Mācību gada laikā tiek rīkotas 4 kārtas, katrā kārtā tiek dots teorijas materiāls un 5 uzdevumi risināšanai. Risinājumus var iesūtīt pa pastu vai elektroniski. Skolēni drīkst piedalīties arī tikai atsevišķās kārtās.

Konkursa "Tik vai… Cik?" uzdevumu komplektus 2015./2016. mācību gadā veidoja Agnese Šuste un Maruta Avotiņa.

Jauno matemātiķu konkursa uzdevumu komplektus 2015./2016. mācību gadā veidoja Agnese Šuste, Maruta Avotiņa, Simona Klodža un Annija Varkale.

Par Profesora Cipariņa kluba uzdevumu komplektu izveidi 2015./2016. mācību gadā rūpējās Agnese Ķerubiņa un Ilze Ošiņa. Agnese Ķerubiņa ir arī šī konkursa ilustrāciju autore.

Par olimpiāžu uzdevumu komplektiem rūpējas ne tikai LU A. Liepas NMS kolektīvs, bet arī vairāki NMS draugi un palīgi. Izsakām pateicību 2015./2016. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Kalvim Apsītim, Andrejam Cibulim, Mārtiņam Kokainim, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Mārim Valdatam un Jevgēnijam Vihrovam.

Šī grāmata, kurā apkopoti Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas 2015./2016. mācību gadā organizēto matemātikas sacensību uzdevumi, paredzēta gan skolēniem patstāvīgai uzdevumu risināšanai, gan skolotājiem ārpusstundu darbā ar spējīgākajiem skolēniem vai matemātikas stundās uzdevumu dažādībai.

Pirms uzdevumu risināšanas ieteicams izlasīt nodaļu ***Teorija***, kas var būt noderīga uzdevumu risināšanā. Skolēni šo sadaļu var izmantot gan meklējot palīdzību uzdevumu risināšanā, gan gatavojoties matemātikas olimpiādēm, gan patstāvīgi apgūstot jaunas zināšanas. Skolotāji šo sadaļu var izmantot darbam matemātikas pulciņos. Šajā nodaļā iekļauti arī teorijas materiāli, kas 2016. gadā tika publicēti LU A. Liepas NMS mājas lapā pirms Novada olimpiādes un Atklātās matemātikas olimpiādes.

Nodaļā ***Ieteikumi*** doti padomi, kas skolēnam var palīdzēt atrisināt uzdevumu, ja to neizdodas atrisināt patstāvīgi, taču, lai sasniegtu labākus rezultātus, iesakām uzreiz neskatīties ieteikumus vai atrisinājumus, bet mēģināt tikt galā pašu spēkiem. Skolotāji šos ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto uzdevuma atrisinājumu.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Nodaļā ***Atrisinājumi*** doti izvērsti un pilnīgi uzdevumu atrisinājumi, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu un pilnīgu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Daudziem matemātikas uzdevumiem ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi atrisinājumi, tāpēc šajā grāmatā piedāvātos nevajag uztvert kā vienīgos iespējamos, tieši otrādi – aicinām meklēt risinājumus, kas būtu labāki nekā piedāvātie! Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem! Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Iesakām apgūt vēl nezināmos paņēmienus, lai varētu tos izmantot turpmāk!

Grāmatas beigās dots ***uzdevumu sadalījums pa tēmām***, kas var būt labs palīgs skolotājiem, plānojot pulciņu nodarbības vai meklējot uzdevumus, ko iekļaut matemātikas stundās.

Iekļauta arī nodaļa ***Pārskats***, kurā, atkarībā no attiecīgā konkursa vai olimpiādes, dots skolēnu rezultātu apkopojums vai iekļauti komentāri, ieteikumi, aprakstītas skolēnu biežāk pieļautās kļūdas.

Lai šī grāmata ir labs palīgs, darot visu iespējamo, lai gūtu panākumus!

Agnese Šuste, Maruta Avotiņa

TEORIJA

ĪSA PAMĀCĪBA UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Bieži vien skolēni risinājumā uzraksta tikai uzdevuma atbildi, bet ar to nepietiek, lai labotājs spētu noteikt, vai skolēns ir sapratis uzdevumu un atrisinājis to pareizi. Labākajā gadījumā tikai par atbildes uzrakstīšanu skolēns saņem vienu vai pāris punktus, piemēram, no 10 iespējamajiem.

Iegaumē! Visiem uzdevumiem jāraksta ne tikai atbilde, bet arī risinājums – spriedumi, kā nonākt līdz atbildei.

UZDEVUMU VEIDI

Atkarībā no uzdotā jautājuma, uzdevumus var iedalīt šādās grupās:

- **a)** uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības;
- **b)** uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā iespējamā vērtība;
- **c)** uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde;
- **d)** uzdevumi, kuros jāparāda algoritms (plāns), kā nonākt pie vajadzīgā rezultāta.

Tālāk aprakstīti būtiskākie nosacījumi, kas jāņem vērā katrā no šiem uzdevumu veidiem, kā arī doti piemēri.

a) Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

Šāda veida uzdevumos jautājums parasti sākas, piemēram, ar vārdiem

Kāds var būt...? Cik...? Atrisini...!

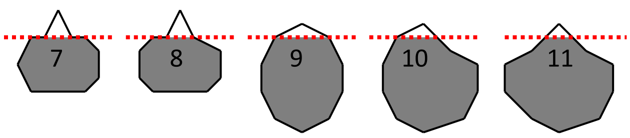
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

a. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
b. jāpamato, ka citu vērtību nav.

Šajos uzdevumos **nepietiek** atrast vienu iespējamo atbildi, kaut arī reizēm tā tik tiešām ir viena pati un bieži vien viegli uzminama.

P No papīra bija izgriezts desmitstūris. Alise ar vienu taisnu griezienu sagrieza to tieši divās daļās, no kurām viena daļa bija trijstūris. Cik malas var būt otrai iegūtajai daļai?

Atrisinājums. Otrai iegūtajai daļai var būt 7, 8, 9, 10 vai 11 malas (skat. 1. att.).



1. att.

Pamatosim, ka nevar iegūt vairāk kā 11 malas. Trijstūris noteikti satur vismaz vienu desmitstūra virsotni, bet taisne, krustojot desmitstūra malas, var radīt ne vairāk kā divas jaunas virsotnes, tāpēc otrai daļai nevar būt vairāk kā $10-1+2=11$ virsotnes un malas.

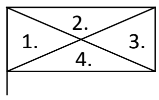
Pamatosim, ka nevar iegūt mazāk kā 7 malas. Katra desmitstūra virsotne ir virsotne vismaz vienai no iegūtajām daļām, tāpēc $n+m \geq 10$, kur n un m atbilstoši ir virsotņu skaits vienai un otrai iegūtajai daļai. Tā kā viena no iegūtajām daļām ir trijstūris, tad $3+m \geq 10$ jeb $m \geq 7$.

■

Ne vienmēr risinājumā ir jāparāda visi piemēri vai arī atsevišķi jāpierāda, ka citu vērtību nav (skat. nākamo piemēru.). Ir uzdevumi, kuros tas nav nepieciešams vai pat nemaz nav iespējams, taču tādā gadījumā uzdevuma risinājumam jābūt tādam, lai ir nepārprotami skaidrs, ka aprakstītajā veidā tiek atrastas pilnīgi visas iespējas.

P

Cik dažādus karogus (skat. 2. att.) var iegūt, ja katru no četriem trijstūriem jānokrāso vienā no četrām krāsām – baltā, sarkanā, zilā vai zaļā – pie tam trijstūri, kam ir kopīga mala, jānokrāso dažādās krāsās?



2. att.

Atrisinājums. Skaidrs, ka 1. trijstūri var nokrāsot jebkurā no 4 krāsām. Kad 1. trijstūris nokrāsots, 2. trijstūri var krāsot jebkurā no atlikušajām trīs krāsām, tātad 1. un 2. trijstūri kopā var nokrāsot $4 \cdot 3 = 12$ dažādos veidos. Krāsojot 3. un 4. trijstūri, jāšķiro divi gadījumi.

1) Ja 3. trijstūris ir tādā pašā krāsā kā 1. trijstūris, tad atlikušo 4. trijstūri var krāsot jebkurā no krāsām, kas atšķiras no 1. trijstūra krāsas, tātad ir 3 iespējas. Līdz ar to var iegūt $12 \cdot 3 = 36$ dažādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir vienā krāsā.

2) Ja 3. trijstūris ir citā krāsā nekā 1. Trijstūris, tad 3. trijstūri var nokrāsot vienā no divām krāsām (kuras vēl nav izmantotas 1. un 2. trijstūra krāsošanai). Pēc tam 4. trijstūri arī varēs izkrāsot vienā no 2 krāsām (tādā, kas vēl nav izmantota 1. un 3. trijstūra krāsošanai). Līdz ar to var iegūt $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ tādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir dažādās krāsās.

Tātad pavisam kopā, izmantojot dotās četras krāsas, var iegūt $36 + 48 = 84$ dažādus karogus.

Piezīme. Šo uzdevumu var risināt arī uzzīmējot visus iespējamos variantus un pēc tam saskaitot, cik tādu variantu ir, tomēr tam jāpatērē daudz laika un ļoti jāuzmanās, lai kāda no iespējām nepaliktu nepamanīta, turklāt vēl būtu jāizdomā, kā pamatot, ka tiešām ir uzzīmēti visi varianti.

■

b) Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā iespējamā vērtība

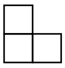
Uzdevumā dotais jautājums varētu saturēt, piemēram, vārdus

Kāds lielākais (mazākais)...? Atrast vislielāko (vismazāko)...!

Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

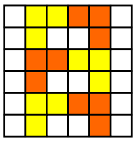
a. jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
b. jāpierāda, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

P Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Kādu mazāko daudzumu stūrīšu (skat. 3. att.) tajā jāiekrāso, lai nevienu citu stūrīti šajā kvadrātā iekrāsot nevarētu? (Stūrīšus drīkst pagriezt; ja kāda rūtiņa ir iekrāsota, tad tā ir nokrāsota pilnībā, tas ir, stūrīšu malas iet pa rūtiņu malām.)

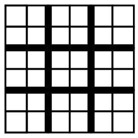


3. att.

Atrisinājums. Jāiekrāso vismaz seši stūrīši. Piemēru, kā to var izdarīt, skat. 4. att.



4. att.



5. att.

Pierādīsim, ka nav iespējams iekrāsot mazāku skaitu stūrīšu, lai izpildītos visas uzdevuma prasības. Sadalām doto kvadrātu deviņos kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas (skat. 5. att.). Katrā šādā kvadrātiņā ir jābūt iekrāsotām vismaz divām rūtiņām, pretējā gadījumā tajā varēs ievietot vēl vienu stūrīti. Tātad jāiekrāso vismaz $9 \cdot 2 = 18$ rūtiņas. Tā kā katrs stūrītis sastāv no 3 rūtiņām, tad nepieciešami vismaz $18 : 3 = 6$ stūrīši.

■

c) Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde

Jautājums varētu sākties, piemēram, ar vārdiem „Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”; „Vai visiem… ir spēkā… ?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”.

Uz šāda veida jautājumiem iespējamas tikai divas atbildes – vai nu „jā”, vai „nē”. Taču var ievērot, ka uzskaitītie jautājumi ir divu tipu: „katram” un „eksistē”.

Atkarībā no tā, kāda ir atbilde uz jautājumu un kura tipa jautājums tas ir, uzdevuma risinājumam ir jāsastāv no atšķirīgām daļām.

Vai eksistē...? Vai iespējams...?

Ja atbilde ir

- „jā”, tad pietiek parādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- „nē”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem (Ar dažiem piemēriem nepietiek!).

Vai katram...? Vai noteikti...? Vai vienmēr...?

Ja atbilde ir

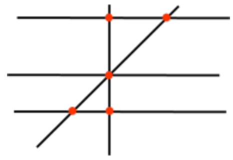
- „jā”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem (Ar dažiem piemēriem nepietiek!);
- „nē”, tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

„Eksistē” tipa jautājumos, ja atbilde ir „nē”, tad ar atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros tiek parādīts, ka uzdevumā prasītais neizpildās, nepietiek, jo varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies atrast uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr pastāv. Atsevišķu piemēru apskatīšana, ja atbilde uz jautājumu ir „nē”, ir skolēnu raksturīgākā kļūda.

Savukārt „katram” tipa jautājumos, ja atbilde ir „jā”, tad nepietiek ar atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros prasītais izpildās. Pierādījums jāveido tā, lai tas aptvertu pilnīgi visus iespējamos gadījumus.

P Vai ir iespējams uzzīmēt piecas taisnes, kurām ir tieši a) 5 krustpunkti; b) 11 krustpunkti?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, skat. 6. att.



6. att.

b) Nē, nav iespējams. Katra no piecām taisnēm var krustoties augstākais ar četrām pārējām taisnēm, tas ir, var veidoties augstākais $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ krustpunkti. Tātad kopējais krustpunktu skaits nevar pārsniegt 10.

■

P Vai visiem veseliem skaitļiem a un b reizinājums $a\cdot(3a+5b)\cdot 7b$ dalās ar 2?

Atrisinājums. Jā, pamatosim, ka reizinājums $a\cdot(3a+5b)\cdot 7b$ vienmēr dalās ar 2 jeb ir pāra skaitlis.

Ja kāds no reizinātājiem a vai b ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis.

Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad summa $(3a+5b)$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitlis.

■

P Vai vienmēr ir patiess apgalvojums, ka negatīvam skaitlim, pieskaitot tā kvadrātu, iegūst pozitīvu skaitli?

Atrisinājums. Nē, piemēram, $-1+(-1)^2=0$, kas nav pozitīvs skaitlis.

■

d) Uzdevumi, kuros jāparāda algoritms (plāns), kā nonākt pie vajadzīgā rezultāta

Jautājums varētu sākties ar vārdu „Kā...?”, arī, piemēram, ar vārdiem „Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt…?”.

Raksturīgākā skolēnu kļūda šādos uzdevumos ir viena gadījuma apskatīšana, proti, labvēlīgākā gadījuma izvēlēšanās, taču korektā risinājumā ir jāapraksta, kā rīkoties pilnīgi visās iespējamajās situācijās. Piemēram, uzdevumos, kuros jāapraksta kāda spēlētāja uzvarošā stratēģija, skolēni kļūdaini raksta, ka nav iespējams noteikt, kurš spēlētājs uzvarēs, jo tas atkarīgs no veiksmes.

P Dotas sešas pēc ārējā izskata vienādas monētas. Četrām no tām masas savā starpā vienādas un pārējām divām – arī savā starpā vienādas, bet mazākas nekā četrām pirmajām. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar trīs svēršanām atrast abas vieglākās monētas?

Atrisinājums. Sadalām monētas 2 grupās pa 3 monētām katrā. Pirmajā svēršanā salīdzinām abas šīs grupas. Iespējami divi gadījumi.

- Ja svari ir līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka katrā grupā atrodas pa vienai vieglajai monētai. Otrajā svēršanā salīdzinām divas monētas no pirmās grupas. Ja svari ir līdzsvarā, tad meklētā monēta ir trešā šīs grupas monēta, ja nē – tad tā, kura otrajā svēršanā ir vieglāka. Trešajā svēršanā tieši tāpat atrod vieglo monētu otrajā grupā.

- Ja svari nav līdzsvarā, tad abas meklētās monētas ir vienā – vieglākajā grupā. Otrajā svēršanā katrā svaru kausā novietojam pa vienai šīs grupas monētai. Ja svari ir līdzsvarā, tad abas uz svariem esošās monētas ir meklētās; ja svari nav līdzsvarā, tad vieglā monēta ir tā, kas otrajā svēršanā palika malā, un tā, kura otrajā svēršanā izrādījās vieglāka.

■

Piezīme. Sviras svari tiek uzskatīti par senākajiem svariem pasaulē. Svirai abos galos ir piestiprināti vienādi svaru kausi (skat. 7. att.). Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, svaru kausi ir līdzsvarā. Lai noteiktu precīzu priekšmetu masu, var izmantot atsvarus ar noteiktu masu.

Parasti olimpiāžu un konkursu uzdevumos doti sviras svari bez atsvariem, turklāt ar dotajiem svariem, ja kausi nav līdzsvarā, ir iespējams tikai noteikt, kurš priekšmets ir smagāks, bet nav iespējams noteikt, par cik smagāks.

7. att.

SAIKĻU NOZĪME

Vēl bez uzdevumā uzdotā jautājuma svarīgi ir pievērst uzmanību tekstā lietotajiem saikļiem „un”, „vai”, „vai nu…, vai”.

UN	Jāizpildās **abiem** minētajiem nosacījumiem
VAI	Jāizpildās **vismaz vienam** minētajam nosacījumam
VAI NU..., VAI	Jāizpildās **tieši vienam** minētajam nosacījumam

P Kurš ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās a) ar 2 un 7; b) ar 2 vai 7; c) ar 2 vai 3; d) vai nu ar 2, vai 7?

Atrisinājums. Neaizmirsīsim, ka tad, ja ir jautājums „Kāds ir lielākais… ?”, tad ir jāpierāda, ka atrastais skaitlis tiešām ir lielākais iespējamais.

a) Vislielākais divciparu skaitlis ir $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, taču tas nedalās ne ar 2, ne 7. Nākamais lielākais skaitlis ir $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$, kas dalās gan ar 2, gan ar 7, tātad der.

b) Meklētais skaitlis ir 98, jo izpildās vismaz viens no nosacījumiem, proti, 98 dalās ar vismaz vienu no skaitļiem 2 vai 7.

c) Šajā gadījumā meklētais skaitlis ir 99, jo tas dalās ar vismaz vienu no skaitļiem 2 vai 3.

d) Skaitlis 98 šajā gadījumā neder, jo tas dalās ar abiem dotajiem skaitļiem, taču drīkst dalīties tieši ar vienu no tiem. Tā kā 97 ir pirmskaitlis, tad arī tas nederēs par atrisinājumu. Nākamais lielākais skaitlis ir $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ un tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7, tātad der.

■

UZDEVUMU RISINĀŠANAS METODES

Matemātikas uzdevumu risināšanai ir izstrādātas dažādas metodes. Dažas no tām ir lietojamas tikai atsevišķu uzdevumu risināšanā, citas – dažādās matemātikas apakšnozarēs un pat citās zinātnēs.

Tālāk nosauktas dažas biežāk lietotās metodes.

- Dirihlē princips (skat. 12. lpp.)
  „Trušu" un „būru" princips
- Invariantu metode (skat. 13. lpp.)
  Meklē nemainīgo!
- Ekstremālā elementa metode (skat. 13. lpp.)
  Meklē īpašo!
- Matemātiskās indukcijas metode
  „Domino" princips
- Interpretāciju metode (skat. 14. lpp.)
  „Tulko" citā valodā
- Kārtošanas un meklēšanas metodes

DIRIHLĒ PRINCIPS

Šī uzdevumu risināšanas metode jeb domāšanas paņēmiens tiek izmantots dažādās matemātikas apakšnozarēs, piemēram, skaitļu teorijā, ģeometrijā un kombinatorikā dažādu grūtības pakāpju uzdevumu atrisināšanai.

Tālāk doti vairāki Dirihlē principa varianti.

- Ja vairāk nekā n objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 objekti.
- Ja vairāk nekā $m \cdot n$ objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $m + 1$ objekts.
- Ja n objekti jāsadala n grupās tā, ka nevienā grupā nav vairāk kā viens objekts, tad katrā grupā būs tieši viens objekts.

Diezgan bieži Dirihlē principu formulē tā:

Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens trusis – tātad vismaz 2 truši.

Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs *būri* un kas – *truši*. Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt tikai vienā *būrī* un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būra*).

P Pierādīt, ka no jebkuriem 14 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība dalās ar 13.

Atrisinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 13, var dot 13 dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 vai 12. Dotos 14 skaitļus uzskatīsim par „trušiem", savukārt vienā „būrī" ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13, tātad ir 13 „būri”. No Dirihlē principa izriet, ka, 14 „trušus” izvietojot pa 13 „būriem”, vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši”; tas ir, vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 13. Šo divu skaitļu starpība dalās ar 13 (skat. Teorēmu par starpības dalīšanos 18. lpp.).

■

INVARIANTU METODE

Par **invariantiem lielumiem** sauc tādus lielumus, kuri kādā procesā ir nemainīgi. Ar vārdiem **invarianta īpašība** apzīmē īpašību, kas kādā procesā saglabājas, nemainās.

Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem – un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **nav** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Atrast piemērotu īpašību, kura

1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;

2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;

3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

P Sākumā bija 10 papīra gabali. Dažus no tiem sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Visus iegūtos gabalus sajauca un dažus no tiem atkal sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Vai, tādā veidā turpinot, var iegūt tieši 999 papīra gabalus?

Atrisinājums. Aplūkosim, kā izmainās kopējais gabalu skaits, atkarībā no tā, cik daļās tiek sagriezts viens gabals.

Bija 1 gabals	Ieguva 5 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 4
Bija 1 gabals	Ieguva 7 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 6

Ievērojam, ka sākumā bija doti 10 papīra gabali – *pāra skaitlis*.

Ja papīra gabalu sagriež

- 5 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 7 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 6 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais papīra gabalu skaits *vienmēr būs pāra skaitlis*. Tā kā 999 ir *nepāra skaitlis*, tad tieši 999 papīra gabalus iegūt nevarēs. Uzdevums atrisināts.

Invariants – kopējais papīra gabalu skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

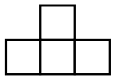
■

Invariantu metodi var izmantot arī uzdevumos par figūru sagriešanu vai salikšanu. Šādos gadījumos bieži tiek izmantota iekrāsošana.

Pats galvenais šāda tipa uzdevumos ir atrast tādu iekrāsošanas veidu, lai rastos pretruna – iekrāsoto rūtiņu skaits lielajā figūrā atšķirtos no kopējā iekrāsoto rūtiņu skaita mazajās figūrās.

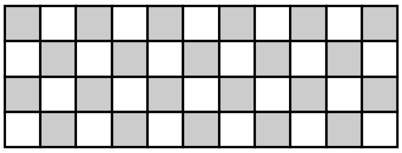
Rūtiņas var iekrāsot dažādi. Visbiežāk tiek lietota iekrāsošana kā šaha galdiņam, taču rūtiņas pēc nepieciešamības var iekrāsot arī, piemēram, joslās, diagonālēs vai vispār atrast kādu citu iekrāsošanas veidu.

P Vai taisnstūri ar izmēriem 4×11 rūtiņas var noklāt ar 8. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

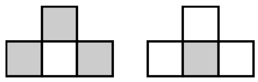


8. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. 9. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 10. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



9. att.



10. att.

■

EKSTREMĀLĀ ELEMENTA METODE

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu, ka cilvēka patiesās īpašības un raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos. Matemātiski tas nozīmē, ka, pētot īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku u. tml.), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos, proti, tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā visizdevīgāk ir lietot tad, kad jāpierāda, vai dotā īpašība ir vai nav spēkā visiem kopas elementiem.

Ekstremālais („īpašais") elements atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, viens vai vairāki lielākie skaitļi, vismazākais attālums, garākā diagonāle, cilvēks, kuram ir vislielākais paziņu skaits, malējā rūtiņa u. tml.

P Vai var gadīties, ka 15 dažādi skaitļi ir uzrakstīti pa apli tā, ka katrs skaitlis vienāds ar savu kaimiņu vidējo aritmētisko?

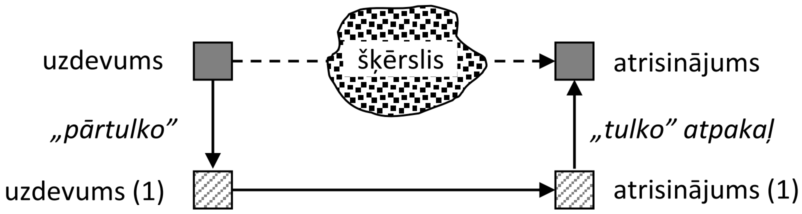
Atrisinājums. Nē, tā nevar gadīties. Ar M apzīmējam vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi M kaimiņi A un B ir lielāki nekā M, tas ir, $A > M$ un $B > M$. Tātad arī skaitļu A un B vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā M, proti, $\frac{A+B}{2} > \frac{M+M}{2} = M$. Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar atrast kaimiņus, tad nevar gadīties, ka 15 skaitļi uzrakstīti atbilstoši uzdevuma prasībām.

■

INTERPRETĀCIJU METODE

Šīs metodes būtība slēpjas šādā cilvēces dzīves pieredzē gūtā secinājumā: „Ja ceļā ir šķērslis, var mēģināt apiet tam apkārt nevis lauzties cauri".

Interpretāciju metodes būtība matemātikā – ja doto uzdevumu ir grūti vai neiespējami atrisināt vienā matemātikas apakšnozarē, tad to aizstāj ar atbilstošu uzdevumu citā nozarē, kur tas atrisināms vienkāršāk, un tad atrisinājumu pārveido atpakaļ uz sākotnēji doto matemātikas apakšnozari.

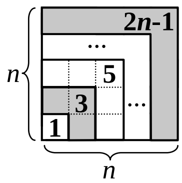


Risinot uzdevumus ar interpretāciju metodes palīdzību, rīkojas pēc šāda plāna:

1. izvēlas atbilstošu interpretāciju;
2. „pārtulko” (interpretē) visus dotos lielumus un sakarības;
3. pārliecinās, ka interpretācija ir korekta (abos virzienos viennozīmīga);
4. atrisina jauno uzdevumu;
5. rezultātu „tulko” atpakaļ.

P Pierādīt, ka $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.

Atrisinājums. Skaties zīmējumu!



■

Par interpretācijas modeli ir svarīgi izvēlēties tādu, kas ļauj uzdevumu atrisināt efektīvāk. Par šādiem modeļiem var kalpot, piemēram, grafi un ģeometrijas elementi. Pamatskolas skolēniem uztverami interpretāciju metodes lietojumi ir teksta uzdevumu risināšana, izmantojot grafus (skat. 16. lpp.), jo bieži vien, izmantojot uzskatāmu zīmējumu, vieglāk nekā citos veidos var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai arī atbilstošā grafa neiespējamību.

MAZLIET NO KOMBINATORIKAS

SASKAITĪŠANAS UN REIZINĀŠANAS LIKUMS

Kombinatorikas saskaitīšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{k}$ veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{n}$ veidos, tad izvēlēties vienu elementu no pirmās vai otrās grupas var $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}$ veidos.

Saskaitīšanas likumu lieto arī tad, ja kāds elements ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.

P Ja Kristaps drīkst izvēlēties tikai vienu no 11. att. redzamajām rotaļlietām, tad viņš var izvēlēties vai nu kādu no divām mašīnām, vai kādu no 3 bumbām. Tātad Kristaps sev vienu rotaļlietu var izvēlēties $2+3=5$ dažādos veidos.

■

11. att.

Kombinatorikas reizināšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties k veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties n veidos, tad vienu elementu no pirmās **un** vienu elementu no otrās grupas var izvēlēties $k \cdot n$ veidos.

Reizināšanas likumu lieto arī tad un , ja kāds elements ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.

P Ja Kristīne gribētu uzrakstīt visas dažādās frāzes, kurās pirmais vārds ir kāds no dotajiem īpašības vārdiem un otrais vārds ir kāds no 12. att. dotajiem lietvārdiem, tad viņai būtu jāuzraksta $3 \cdot 2 = 6$ dažādas frāzes.
■

ROZĀ | PŪKAINS | NIKNS

ĒZELĪTIS | ZILONIS

12. att.

Ievēro!

Ja ir vārds „**vai**” – parasti lieto saskaitīšanas likumu, vārds „**un**” – reizināšanas likumu.

IZLASES

Ja ir dots noteikts skaits dažādu elementu, tad, izvēloties no tiem noteiktu skaitu elementu, varam izveidot dažādas šo atšķirīgo elementu izlases.

P Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties trīs dažādos veidos: ☺😐, ☺☹, 😐☹.
■

Izlases, kurās nav svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par *nesakārtotām*.

P Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties sešos dažādos veidos: ☺😐, 😐☺, ☺☹, ☹☺, 😐☹, ☹😐.
■

Izlases, kurās ir svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par *sakārtotām*.

Lai aprēķinātu *sakārtotu izlašu skaitu*, jānosaka, cik veidos var izvēlēties pirmo elementu un otro elementu, un trešo elementu utt., pēc tam iegūtie skaitļi jāsareizina (jālieto reizināšanas likums).

P Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties $3 \cdot 2 = 6$ dažādos veidos (jo pirmo simbolu var izvēlēties 3 dažādos veidos, bet otro no atlikušajiem diviem var izvēlēties 2 dažādos veidos).
■

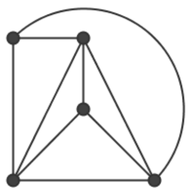
Lai aprēķinātu *nesakārtotu izlašu skaitu*, jāaprēķina, cik ir sakārtotu izlašu, un iegūtais skaitlis jādala ar to, cik veidos var sakārtot izlases elementus.

P Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ dažādos veidos (dalām ar 2, jo tik dažādos veidos var sakārtot izlases elementus, tas ir, pirmo no tiem var izvēlēties 2 dažādos veidos, otro elementu no viena atlikušā var izvēlēties 1 veidā).
■

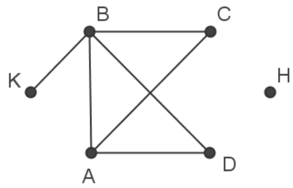
GRAFU TEORIJAS ELEMENTI

Par *grafu* sauc zīmējumu, kas sastāv no punktiem, no kuriem daži pa pāriem ir savienoti ar līnijām (skat., piemēram, 13. att. un 14. att.).

Grafus ir ērti izmantot, ja ir jāattēlo attiecības starp vairākiem objektiem, piemēram, cilvēkiem, kas ir savā starpā draudzējas, ir pazīstami, par ceļu vai avioreisu sistēmu starp vairākām pilsētām, tas ir, gadījumos, kad var pastāvēt vai nepastāvēt sakarības starp diviem objektiem. Zīmējot atbilstošo grafu, parasti objektus attēlo ar punktiem – tos sauc par *grafa virsotnēm*, un ja starp diviem objektiem pastāv uzdevumā minētās attiecības, tad atbilstošos punktus (virsotnes) savieno ar līniju – to sauc par *grafa šķautni*. Bieži vien, domājot par uzskatāmo zīmējumu, vieglāk nekā citā veidā var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai atbilstošā grafa neiespējamību. Grafa šķautņu krustpunkts nav grafa virsotne (skat. 14. att., kur attēlots grafs ar sešām virsotnēm).



13. att.



14. att.

MAZLIET NO SKAITĻU TEORIJAS

Skaitļu iedalījums

$\mathbb{N}$ – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...

$\mathbb{Z}$ – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Q}$ – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}$ – reālie skaitļi: racionālie skaitļi un iracionālie skaitļi (bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi, piemēram, $\sqrt{2}, e, \pi$).

Skaitļa pieraksts

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;

$2n$ – pāra skaitlis un $2n+1$ – nepāra skaitlis;

$3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3, un $3n+1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;

$10n$ – skaitlis, kura pēdējais cipars ir 0.

DALĀMĪBA

Skat arī teorijas materiālus, kas 2015./2016. mācību gadā tika publicēti pirms Novada olimpiādes un Atklātās matemātikas olimpiādes (20. lpp. un 27. lpp.)

Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a *dalās* ar b (apzīmē $a \vdots b$). Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības pazīmes	**Piemēri**
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2+0+1+6=9$ dalās ar 3
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2+0+1+6=9$ dalās ar 9
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	$\underline{1}0\underline{8}6\underline{4}7$ dalās ar 11, jo $(1+8+4)-(0+6+7)=0$, kas dalās ar 11 $\underline{9}4\underline{8}3\underline{1}$ dalās ar 11, jo $(9+8+1)-(4+3)=11$, kas dalās ar 11

Citas dalāmības pazīmes

- Skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n.
- Skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n.
- Skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Par *savstarpējiem pirmskaitļiem* sauc skaitļus, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.

P

Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, kas nav savstarpēji pirmskaitļi, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12. Tāpēc ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi.

Visi tālāk minētie skaitļi ir veseli.

- Ja divi skaitļi a un b dalās ar c, tad arī to summa un starpība dalās ar c.

$$a \vdots c \text{ un } b \vdots c \;\Rightarrow\; (a \pm b) \vdots c$$

- Ja a dalās ar b, tad arī skaitļa a reizinājums ar jebkuru veselu skaitli k dalās ar b.

$$a \vdots b \;\Rightarrow\; (a \cdot k) \vdots b$$

- Ja a dalās ar b un b dalās ar c, tad a dalās ar c.

$$a \vdots b \text{ un } b \vdots c \;\Rightarrow\; a \vdots c$$

- Ja a dalās ar c un b dalās ar d, tad $a \cdot b$ dalās ar $c \cdot d$.

$$a \vdots c \text{ un } b \vdots d \;\Rightarrow\; (a \cdot b) \vdots (c \cdot d)$$

- Ja b un c ir savstarpēji pirmskaitļi un a dalās ar b un a dalās ar c, tad a dalās ar bc.
- *Teorēma par starpības dalīšanos*. Ja divi skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar c, tad šo skaitļu starpība $(a-b)$ dalās ar c.
- Ja vienādības labā puse dalās ar n, tad arī vienādības kreisā puse dalās ar n (un otrādi).

Naturālo skaitļu īpašības

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No k pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar k.

SKAITĻA SADALĪJUMS PIRMREIZINĀTĀJOS

Par *pirmskaitli* sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.

Tā kā skaitlis 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad skaitlis 1 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli var vienā vienīgā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).

Piemēram, $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Iegūto pirmskaitļu reizinājumu sauc par skaitļa *sadalījumu pirmreizinātājos*.

Pirmskaitļi līdz 1000

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

Par *saliktu skaitli* sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.

Salikta skaitļa n mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.

Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis n ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

SKAITĻU DALĀMĪBA UN KONGRUENCES

TEORIJA UN PIEMĒRI, GATAVOJOTIES NOVADA OLIMPIĀDEI 2015./2016. MĀCĪBU GADĀ

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Novada matemātikas olimpiādē skaitļu teorijas uzdevums 5.-8. klasei būs par tēmu "Dalāmības pazīmes", bet 9.-12. klasei par tēmu "Kongruences" (vecāko klašu skolēniem ieteicams izskatīt visu materiālu).

Skaitļu teorija ir matemātikas apakšnozare, kas pēta veselo skaitļu dalāmību.

SKAITĻU DALĀMĪBA

Ja a un b ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot a ar b, dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka a dalās ar b, pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Definīcija. Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a dalās ar b. Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

DALĀMĪBAS PAZĪMES

Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tālāk dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

Dalāmības pazīme	Piemēri
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 3
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 9
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	<u>1</u>0<u>8</u>6<u>4</u>7 dalās ar 11, jo $(1 + 8 + 4) - (0 + 6 + 7) = 0$, kas dalās ar 11 <u>9</u>4<u>8</u>3<u>1</u> dalās ar 11, jo $(9 + 8 + 1) - (4 + 3) = 11$, kas dalās ar 11

Citas dalāmības pazīmes

- Skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n.
- Skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n.
- Skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Definīcija. Par savstarpējiem pirmskaitļiem sauc skaitļus, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.

Piemērs. Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12. Tāpēc ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi.

Teorēma. Ja b un c ir savstarpēji pirmskaitļi un a dalās ar b un a dalās ar c, tad a dalās ar bc.

UZDEVUMU PIEMĒRI

1. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, bet nedalās ar 4. Vai skaitlis $\overline{OLA}$ var dalīties ar 5?

Piezīme. Ar $\overline{abc}$ apzīmē trīsciparu skaitli, kura pirmais cipars ir a, otrais – b, trešais – c.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, tad $S = 0$ vai $S = 5$.

1. Ja $S = 0$, tad iegūstam skaitli $\overline{A00}$, kas dalās ar 4, bet tā ir pretruna ar doto, ka $\overline{ASS}$ nedalās ar 4. Tātad S nevar būt 0.
2. Apskatīsim gadījumu, kad $S = 5$. Lai skaitlis $\overline{OLA}$ dalītos ar 5, tad vai nu $A = 0$, vai $A = 5$. Tā kā dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tad A nevar būt 5 un tāpēc $A = 0$. Bet tad skaitlis $\overline{ASS}$ nebūtu trīsciparu skaitlis, jo tā pirmais cipars būtu 0. Tātad S nevar būt arī 5.

Esam ieguvuši, ka skaitlis $\overline{OLA}$ nevar dalīties ar 5.

2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu $PĀRSTEIGUMS$. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Noteikt, kurš cipars aizstāts ar burtu S.

Atrisinājums. Vārdā $PĀRSTEIGUMS$ pavisam ir 11 burti, no tiem pirmie 10 dažādi, tātad pirmie 10 burti apzīmē visus desmit ciparus. Tad

$$P + \bar{A} + R + S + T + E + I + G + U + M + S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + S = 45 + S$$

Tā kā dotais vienpadsmitciparu skaitlis dalās ar 18, tad tas dalās ar 2 un 9. Tas nozīmē, ka tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar 9. Tātad S ir pāra cipars un $45 + S$ dalās ar 9. Tā kā $45 + S$ jādalās ar 9 un skaitlis 45 dalās ar 9, tad arī S jādalās ar 9. Tātad ar burtu S ir aizstāts cipars 0.

Piezīme. Lai noteiktu, kurš cipars aizstāts ar burtu S, izteiksmē $45 + S$ var arī ievietot visas iespējamās S vērtības – 0, 2, 4, 6, 8 – un pārbaudīt katru no šiem gadījumiem.

3. Kādi cipari var būt burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

Atrisinājums. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36, tam jādalās gan ar 9, gan ar 4. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 4. Tātad pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jābūt vai nu 32, vai 36, līdz ar to $b = 2$ vai $b = 6$. Lai dotais skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9.

- Ja $b = 2$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 2 = 14 + a$. Der $a = 4$, jo $14 + 4 = 18$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.
- Ja $b = 6$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 6 = 18 + a$. Vērtība $a = 0$ neder, jo a ir skaitļa pirmais cipars. Der $a = 9$, jo $18 + 9 = 27$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.

Tātad esam ieguvuši, ka $a = 4,\ b = 2$ vai $a = 9,\ b = 6$ ir vienīgās iespējamās vērtības.

4. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

Atrisinājums. Mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33, ir 6, piemēram, skaitlim 3300000000.

Pierādīsim, ka ciparu summa nevar būt mazāka kā 6. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11. Tā kā skaitlim jādalās ar 3, tad arī tā ciparu summai jādalās ar 3. Tas nozīmē, ka ir jāpierāda, ka ciparu summa nevar būt 3. Apzīmēsim skaitļa ciparu summu nepāra pozīcijās ar a un pāra pozīcijās – ar b, tad, lai skaitlis dalītos ar 11, $(a-b)$ jādalās ar 11. Pieņemsim, ka $a \geq b$, otru gadījumu aplūko analogi. Iespējami 2 gadījumi:

- $a-b=0$, tad $a=b$ un skaitļa ciparu summa ir $a+b$, kas ir pāra skaitlis, tātad tā nevar būt 3;
- $a-b \geq 11$, tad $a \geq 11$ un skaitļa ciparu summa ir lielāka kā 11, tātad tā nevar būt 3.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī, pārbaudot visus iespējamos gadījumus, kādus ciparus var saturēt desmitciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 3: skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles; skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles; skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

KONGRUENCES JĒDZIENS

Tālāk dotais materiāls paredzēts 9.-12. klašu skolēniem.

Lai pilnvērtīgāk apgūtu tematu par kongruencēm, ļoti ieteicams patstāvīgi risināt, piemēram, grāmatā A. Bērziņa, A. Bērziņš "Diferencēti uzdevumi skaitļu teorijā" dotos vingrinājumus un uzdevumus. Grāmata pieejama arī elektroniski: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/06/BerzinsBerzina_DiferencetiUzdSkT.pdf

Viens no pazīstamākajiem veselo skaitļu iedalījumiem ir to dalījums pāra un nepāra skaitļos. Katrs vesels skaitlis ir vai nu pāra, vai nepāra, taču neviens nav vienlaikus gan pāra, gan nepāra skaitlis. Tā visi veselie skaitļi tiek sadalīti divās klasēs: skaitļi, kas dalās ar 2 (pāra skaitļi), un skaitļi, kas nedalās ar 2 (nepāra skaitļi).

Ja dalītāju 2 aizvieto ar 3, tad līdzīgi var runāt par skaitļiem, kas dalās vai nedalās ar 3. Tomēr izrādās, ka lietderīgāk ir veselos skaitļus sadalīt klasēs atkarībā no tā, kādu atlikumu tie dod, dalot ar 3. Arī pāra un nepāra skaitļus var uztvert kā skaitļus, kas, dalot ar 2, dod attiecīgi atlikumu 0 vai 1. Ja nomainām 2 ar 3, tad veselos skaitļus mēs sadalām trīs klasēs – šķirojot gadījumus, vai skaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 0, 1 vai 2.

Teorēma par dalīšanu ar atlikumu. Ja a ir vesels skaitlis un b ir naturāls skaitlis, tad noteikti var atrast tādus veselus skaitļus q un r, ka $a = b \cdot q + r$, turklāt $0 \leq r < b$.

Iegaumē! Atlikums nekad nav mazāks kā 0 un vienmēr ir mazāks nekā skaitlis, ar kuru dala, tas ir, dalot ar b, atlikumam var būt vērtības $0, 1, 2, \dots, b-1$.

Skaitļu sadalīšanu klasēs var salīdzināt ar ''skaitļu krāsošanu''. Pieņemsim, ka visi veselie skaitļi sarakstīti uz bezgalīgas rūtiņu lentes. Ja vēlamies veselos skaitļus sašķirot klasēs atkarībā no tā, piemēram, kādus atlikumus tie dod, dalot ar 3, tad grafiski var iztēloties, ka katram skaitlim atbilstošā rūtiņa tiek nokrāsota vienā no trim krāsām: tie skaitļi, kas dalās ar trīs, tiek krāsoti vienā krāsā, tie skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 – citā krāsā, un skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2 – vēl citā krāsā. Tādējādi visi skaitļi tiek nokrāsoti kādā no trim krāsām, turklāt katrs skaitlis tiek nokrāsots tieši vienā krāsā:

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...

15. att.

Lai šos spriedumus vispārinātu un lietotu uzdevumu risināšanā, definē kongruences jēdzienu.

Definīcija. Doti veseli skaitļi a un b un naturāls skaitlis $m \geq 2$. Skaitļi a un b ir kongruenti pēc moduļa m un pieraksta $a \equiv b \ (mod\ m)$ vai $a \equiv_m b$, ja a un b, dalot tos ar m, dod vienādu atlikumu.

Piemēri

- $7 \equiv 3\ (mod\ 2)$, jo gan 7, gan 3, dalot ar 2, dod atlikumu 1
- $17 \equiv 73\ (mod\ 14)$, jo gan 17, gan 73, dalot ar 14, dod atlikumu 3
- $71 \equiv 8\ (mod\ 9)$, jo gan 71, gan 8, dalot ar 9, dod atlikumu 8
- $-2 \equiv 4\ (mod\ 3)$, jo gan -2, gan 4, dalot ar 3, dod atlikumu 1
- $-6 \equiv 85\ (mod\ 7)$, jo gan -6, gan 85, dalot ar 7, dod atlikumu 1

Bieži vien, lai pārbaudītu, vai skaitļi ir kongruenti pēc kāda moduļa, ir ērti lietot tālāk doto teorēmu.

Teorēma. $a \equiv b\ (mod\ m)$ tad un tikai tad, ja starpība $a - b$ dalās ar m.

Piemēri

- $7 \equiv 3\ (mod\ 2)$, jo starpība $7 - 3 = 4$ dalās ar 2
- $17 \equiv 73\ (mod\ 14)$, jo starpība $17 - 73 = -56$ dalās ar 14
- $71 \equiv 8\ (mod\ 9)$, jo starpība $71 - 8 = 63$ dalās ar 9
- $-2 \equiv 4\ (mod\ 3)$, jo starpība $-2 - 4 = -6$ dalās ar 3
- $-6 \equiv 85\ (mod\ 7)$, jo starpība $-6 - 85 = -91$ dalās ar 7

KONGRUENČU ĪPAŠĪBAS

Lai kongruences jēdzienu varētu lietot dažādu uzdevumu risināšanā, var izmantot kongruenču īpašības, kas ļauj daudzus aprēķinus veikt ievērojami vienkāršāk.

1. Ja a, dalot ar m, dod atlikumu r, tad $a \equiv r\ (mod\ m)$.
2. Ja $a \equiv b\ (mod\ m)$, tad $ka \equiv kb\ (mod\ m)$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis.
3. Ja $a \equiv b\ (mod\ m)$, tad $a^n \equiv b^n\ (mod\ m)$, kur n ir jebkurš naturāls skaitlis.
4. Ja $a \equiv b\ (mod\ m)$ un $c \equiv d\ (mod\ m)$, tad
   - $a + c \equiv b + d\ (mod\ m)$,
   - $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$,
   - $ac \equiv bd\ (mod\ m)$.
5. Visiem veseliem a izpildās kongruence $a \equiv a\ (mod\ m)$ (refleksivitāte).
6. Ja $a \equiv b\ (mod\ m)$, tad $b \equiv a\ (mod\ m)$ (simetrija).
7. Ja $a \equiv b\ (mod\ m)$ un $b \equiv c\ (mod\ m)$, tad $a \equiv c\ (mod\ m)$ (transitivitāte).

Uzdevumos par veselu skaitļu pakāpēm ar mainīgu vai lielu kāpinātāju var noderēt nākamā teorēma.

Teorēma. Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa m ir periodiska.

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus a^n pēc moduļa m. Tiklīdz virknē $a^n\ (mod\ m)$ parādās kāds jau bijis skaitlis, ir atrasts periods. Perioda garums nepārsniedz m.

Tā kā kongruence pēc moduļa m sadala visus veselos skaitļus m klasēs, kur katrā klasē ietilpst skaitļi, kas dod vienādus atlikumus pēc moduļa m (skat., piemēram, 15. att., kur $m = 3$ un vienā krāsā ir nokrāsoti skaitļi, kas ir vienā klasē), tad īpašību, kas jāpierāda visiem veseliem skaitļiem, pietiek pierādīt katras klases skaitļiem atsevišķi.

UZDEVUMU PIEMĒRI

1. Kādu atlikumu var iegūt, vesela skaitļa kvadrātu dalot ar 3?

Atrisinājums. Ievērojam, ka veselu skaitli n, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2:

- ja $n \equiv 0\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$;
- ja $n \equiv 1\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$;
- ja $n \equiv 2\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1\ (mod\ 3)$.

Tātad vesela skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Piezīmes

1. Uzdevumu varēja atrisināt arī aplūkojot gadījumus $n = 3k$, $n = 3k + 1$ un $n = 3k + 2$, kur k – vesels skaitlis.
2. Aplūkotajā risinājumā pēdējos divus gadījumus varēja apvienot, ievērojot, ka $2 \equiv -1\ (mod\ 3)$, tas ir, ja $n \equiv \pm 1\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$.

2. Kādu atlikumu dod skaitlis 3^{50}, dalot to ar 7?

Atrisinājums. Virkne 3^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ir periodiska pēc moduļa 7, apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

- ja $n = 0$, tad $3^0 \equiv \mathbf{1}\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 1$, tad $3^1 \equiv 3\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 2$, tad $3^2 \equiv 9 \equiv 2\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 3$, tad $3^3 \equiv 3^2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 4$, tad $3^4 \equiv 3^3 \cdot 3 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 4\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 5$, tad $3^5 \equiv 3^4 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 6$, tad $3^6 \equiv 3^5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv \mathbf{1}\ (mod\ 7)$;
- ja $n = 7$, tad $3^7 \equiv 3^6 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3\ (mod\ 7)$;
- ...

Šo informāciju ērti apkopot tabulā:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$3^n (mod\ 7)$	**1**	3	2	6	4	5	**1**	3	...

Redzam, ka virkne $3^n (mod\ 7)$ ir periodiska ar perioda garumu 6.

Tā kā $3^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$, tad secinām, ka

$$3^{50} \equiv 3^{6 \cdot 8 + 2} \equiv 3^2 \equiv 2\ (mod\ 7).$$

Tātad skaitlis 3^{50} dod atlikumu 2, dalot ar 7.

3. Trīs veselu skaitļu kvadrātu summa dalās ar 9. Pierādiet, ka var izvēlēties divus no šiem kvadrātiem tā, ka to starpība dalās ar 9.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9:

- ja $n \equiv 0\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 1\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 2\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 3\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 0\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 4\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 7\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -4\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv (-4)^2 \equiv 4^2 \equiv 7\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -3\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv (-3)^2 \equiv 3^2 \equiv 0 (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 7 \equiv -2\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv (-2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4\ (mod\ 9)$;
- ja $n \equiv 8 \equiv -1\ (mod\ 9)$, tad $n^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (mod\ 9)$.

Šo informāciju ērti apkopot tabulā:

$n\ (mod\ 9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2\ (mod\ 9)$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Tātad veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 var būt kongruenti ar 0, 1, 4 vai 7. Pārbaudām, ka trīs dažādi atlikumi nevar dot summā skaitli, kas dalās ar 9:

- $0 + 1 + 4 \equiv 5\ \not\equiv 0\ (mod\ 9)$;
- $0 + 1 + 7 \equiv 8\ \not\equiv 0\ (mod\ 9)$;

- $0 + 4 + 7 \equiv 2 \not\equiv 0\ (mod\ 9)$;
- $1 + 4 + 7 \equiv 3 \not\equiv 0\ (mod\ 9)$.

Tātad vismaz divi no atlikumiem ir vienādi, bet tas nozīmē, ka šo kvadrātu starpība dalās ar 9.

4. Vai var atrast tādus divus veselus skaitļus, kuru kubu summa, dalot ar 7, dod atlikumu 3?

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 7:

- ja $n \equiv 0\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 1\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 2\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 3\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 6 \equiv -1\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 4 \equiv -3\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv (-3)^3 \equiv -3^3 \equiv -(-1) \equiv 1\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -2\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv (-2)^3 \equiv -2^3 \equiv -1\ (mod\ 7)$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -1\ (mod\ 7)$, tad $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1\ (mod\ 7)$.

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar 0 vai ± 1 pēc moduļa 7. Aplūkosim, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 7.

$a^3\ (mod\ 7)$ / $b^3\ (mod\ 7)$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitļu summa pēc moduļa 7 var pieņemt jebkuru no vērtībām $-2, -1, 0, 1, 2$, taču nekādas citas. Tā kā $3 \equiv -4\ (mod\ 7)$ neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar dot atlikumu 3, dalot ar 7.

Piezīme. Tabulā -1 vietā varēja aplūkot tam pēc moduļa 7 kongruentu skaitli 6.

5. Pierādīt: ja trīs veselu skaitļu kubu summa dalās ar 9, tad šo skaitļu reizinājums dalās ar 3.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9:

$n\ (mod\ 9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 (mod\ 9)$	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

Pieņemsim pretējo, ka doto trīs skaitļu reizinājums nedalās ar 3; tad arī neviens no šiem skaitļiem nedalās ar 3, līdz ar to katra skaitļa kubs ir kongruents ar 1 vai -1 pēc moduļa 9. Secinām, ka visu doto skaitļu kubu summa pēc moduļa 9 ir pierakstāma formā $\pm 1 \pm 1 \pm 1$.

Ievērosim, ka tas ir nepāra skaitlis, kas pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 3, tātad nevar būt kongruents ar 0 pēc moduļa 9. Taču tā ir pretruna ar to, ka doto skaitļu kubu summa dalās ar 9. Līdz ar to pieņēmums bijis aplams un doto skaitļu reizinājums dalās ar 3.

6. Pierādīt apgalvojumu: ja $p > 3$ ir pirmskaitlis, tad skaitlis p^2, dalot 24, dod atlikumu 1.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $24 = 8 \cdot 3$. Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka visiem pirmskaitļiem $p \geq 5$ izpildās kongruences

$$p^2 \equiv 1\ (mod\ 8) \text{ un } p^2 \equiv 1\ (mod\ 3),$$

jo tas nozīmēs, ka $p^2 - 1$ dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad $p^2 - 1$ dalās ar $8 \cdot 3 = 24$.

1) Pamatosim, ka $p^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$. Tā kā visi pirmskaitļi $p \geq 5$ ir nepāra skaitļi, tad pēc moduļa 8 šāds skaitlis p var pieņemt tikai vērtības 1, 3, 5 vai 7 (var arī teikt, ka p pēc moduļa 8 var pieņemt tikai vērtības ± 1 vai ± 3). Pārbaudām, ka visu šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 8:

$p \ (mod\ 8)$	1	3	5	7
$p^2 (mod\ 8)$	1	$9 \equiv 1$	$25 \equiv 1$	$49 \equiv 1$

Redzam, ka šādiem pirmskaitļiem p izpildās $p^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$, t.i., $p^2 - 1$ dalās ar 8.

2) Pamatosim, ka $p^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$. Neviens pirmskaitlis $p \geq 5$ nedalās ar 3. Tātad pēc moduļa 3 šāds pirmskaitlis p var pieņemt tikai vērtības 1, 2 (jeb tikai vērtības ± 1). Pārbaudām, ka šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 3:

$p \ (mod\ 3)$	1	2
$p^2 (mod\ 3)$	1	$4 \equiv 1$

Secinām, ka visiem pirmskaitļiem $p > 3$ skaitlis $p^2 - 1$ dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad $p^2 - 1$ dalās ar 24, kas nozīmē, ka p^2, dalot ar 24, dod atlikumu 1.

Piezīmes

1. Pēc moduļa 8 varēja aplūkot arī vērtības ± 1 un ± 3, bet pēc moduļa 3 – vērtības ± 1 un ņemt vērā, ka $(\pm a^2) \equiv a^2\ (mod\ n)$.
2. Ievērojot, ka p ir nepāra skaitlis un $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ ir divu viens otram sekojošu pāra skaitļu reizinājums (no kuriem viens noteikti dalās ar 2, bet otrs – ar 4), var secināt, ka $p^2 - 1$ dalās ar 8.

7. Atrast skaitļu $3^3 - 3$, $5^5 - 5$, $7^7 - 7$, …, $2015^{2015} - 2015$ lielāko kopīgo dalītāju!

Atrisinājums. Ievērosim, ka $3^3 - 3 = 24$, tātad meklētais lielākais kopīgais dalītājs d nevar būt lielāks kā 24. Pamatosim, ka visi skaitļi dalās ar 24, līdz ar to būs pierādīts, ka $d = 24$. Ievērosim, ka $24 = 8 \cdot 3$. Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka katrs no dotajiem skaitļiem dalās gan ar 3, gan ar 8.

Ievērosim, ka visi apskatāmie skaitļi ir formā $n^n - n = n\,(n^{n-1} - 1)$, turklāt n ir nepāra skaitlis, tas ir, $n = 2k + 1$.

1) Pamatosim, ka visi skaitļi dalās ar 3.
   - Ja n dalās ar 3, tad arī reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 3.
   - Ja n nedalās ar 3, tad $n \equiv \pm 1\ (mod\ 3)$, līdz ar to $n^{n-1} - 1 \equiv (\pm 1)^{2k} - 1 \equiv 0\ \ (mod\ 3)$; taču tad reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 3.
2) Pamatosim, ka visi skaitļi dalās ar 8. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad n pēc moduļa 8 pieņem vērtības 1, 3, 5, 7. Ērti ir izmantot faktu $5 \equiv -3\ (mod\ 8)$ un $7 \equiv -1\ (mod\ 8)$, kas nozīmē, ka $n \equiv\ \pm 1\ (mod\ 8)$ vai arī $n \equiv\ \pm 3\ (mod\ 8)$.

   Ievērosim, ka $(\pm 1)^2\ \ \equiv 1\ (mod\ 8)$ un $(\pm 3)^2\ \ \equiv 9 \equiv 1\ (mod\ 8)$. Tātad $n^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$ un
   $$n^{n-1} - 1 \equiv (n^2)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0\ (mod\ 8).$$
   Taču tas nozīmē, ka skaitlis $n^{n-1} - 1$ un arī reizinājums $n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās ar 8.

Esam pierādījuši, ka nepāra skaitļiem n skaitlis $n^n - n = n\,(n^{n-1} - 1)$ dalās gan ar 3, gan ar 8, tātad doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 24.

VIENĀDOJUMI VESELOS SKAITĻOS

TEORIJA UN PIEMĒRI, GATAVOJOTIES ATKLĀTAJAI MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDEI 2016. GADĀ

Ieteicams arī izskatīt teorijas materiālu, kas tika publicēts, gatavojoties Novada olimpiādei (skat. 20. lpp.).

Dažreiz, lai pamatotu, ka nav iespējams atrast tādus skaitļus, kam izpildās uzdevumā prasītās īpašības, ir izdevīgi izmantot dalāmības īpašības.

Atceries! Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a *dalās* ar b (apzīmē $a \vdots b$). Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības īpašības (Visi tālāk minētie skaitļi ir veseli.)

- Ja katrs no vairākiem saskaitāmajiem dalās ar n, tad to visu summa dalās ar n.

  Piemēram, $123456 + 7890 + 20152016$ dalās ar 2, jo katrs saskaitāmais dalās ar 2.
- Ja divi skaitļi dalās ar n, tad arī to starpība dalās ar n.

  Piemēram, tā kā 201420152016 un 2142020 dalās ar 4, tad ar 4 dalās arī $201420152016 - 2142020$.
- Ja kaut viens no vairākiem naturāliem skaitļiem dalās ar n, tad to visu reizinājums dalās ar n.

  Piemēram, $2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ dalās ar 5, jo 2015 dalās ar 5.
- Ja vairāku skaitļu summa un visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar n, tad arī šis pēdējais skaitlis dalās ar n.

  Piemēram, ja $x + 40 + 50 = 120$, tad, tā kā 40, 50 un 120 dalās ar 10, arī x dalās ar 10.

Uzdevumos izmantosim ideju:

ja vienādības labā puse dalās ar n, tad arī vienādības kreisajai pusei jādalās ar n (un otrādi).

Atceries! Naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...; veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

1. piemērs. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $6 \cdot x + 16 \cdot y = 2015$?

Atrisinājums. Ievērojam, ka dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis (dalās ar 2), bet labajā pusē ir nepāra skaitlis (nedalās ar 2). Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus x un y , lai dotā vienādība būtu patiesa.

2. piemērs. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka **a)** $12 \cdot x - 8 \cdot y = 2$; **b)** $11 \cdot x - 7 \cdot y = 2$?

Atrisinājums. a) Nē, nevar atrast. Gan 12, gan 8 dalās ar 4, tātad arī $12 \cdot x$ un $8 \cdot y$ dalās ar 4, kā arī to starpība dalās ar 4. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 4, tad ar 4 ir jādalās arī vienādības labajai pusei, taču skaitlis 2 ar 4 nedalās.

b) Jā, piemēram, der $x = 4$ un $y = 6$, jo $11 \cdot 4 - 7 \cdot 6 = 44 - 42 = 2$.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir

- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

3. piemērs. Pa sienu rāpo mušas un zirnekļi. Cik mušas un cik zirnekļi rāpo pa šo sienu, ja pavisam kopā ir 80 kājas?

Atrisinājums. Mušai ir sešas kājas, bet zirneklim ir astoņas kājas. Mušu skaitu uz sienas apzīmēsim ar m, bet zirnekļu skaitu – ar z. Tad no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ jeb $3 \cdot m + 4 \cdot z = 40$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 4, tad arī vienādojuma kreisai pusei jādalās ar 4, bet tas nozīmē, ka m dalās ar 4. Tā kā uzdevumā teikts, ka pa sienu rāpo gan mušas, gan zirnekļi, tad $m > 0$, un tā kā kopā ir ne vairāk kā 80 kājas, tad $m < 14$. Tātad m var pieņemt trīs dažādas vērtības:

- ja $m = 4$, tad $6 \cdot 4 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 7$;
- ja $m = 8$, tad $6 \cdot 8 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 4$;
- ja $m = 12$, tad $6 \cdot 12 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 1$.

Līdz ar to pa sienu rāpo vai nu 7 zirnekļi un 4 mušas, vai 4 zirnekļi un 8 mušas, vai 1 zirneklis un 12 mušas.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izteiksmē $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ ievietojot visas z vērtības no 1 līdz 10 (ja z ir lielāks nekā 10, tad sanāktu, ka kopā ir vairāk nekā 80 kājas) un pārbaudot, kuros gadījumos m ir vesels skaitlis.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
2. jāpamato, ka citu vērtību nav.

4. piemērs. Kādus naturālus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $5 \cdot x + 2 \cdot y = 30$?

Atrisinājums. Doto vienādojumu pārveidojam par $2 \cdot y = 30 - 5 \cdot x$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 5, tas ir, $2 \cdot y$ jādalās ar 5. Skaitlis 2 ar 5 nedalās, tātad y jādalās ar 5.

- Ja $y = 5$, tad $2 \cdot 5 = 30 - 5 \cdot x$ jeb $x = 4$;
- ja $y = 10$, tad $2 \cdot 10 = 30 - 5 \cdot x$ jeb $x = 2$;
- ja $y \geq 15$, tad $x \leq 0$ un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Līdz ar to vai nu $x = 4$ un $y = 5$, vai $x = 2$ un $y = 10$.

5. piemērs. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Vai var būt, ka vienā rindā ierakstīto skaitļu summa ir 2015, vienā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 2016, bet pārējās rindās un kolonnās visas ierakstīto skaitļu summas dalās ar 3?

Atrisinājums. Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim pārējās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar r, R, k, K, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar S. Tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa, skaitot pa rindām, ir $S = 2015 + r + R$, bet, skaitot pa kolonnām, tā ir $S = 2016 + k + K$. Tātad $2015 + r + R = 2016 + k + K$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 3 (jo katrs saskaitāmais dalās ar 3), tad ar 3 ir jādalās ar kreisajai pusei, bet tā nav, jo r un R dalās ar 3, bet 2015 – nedalās.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem. Skat arī A. Andžāns "Algebra 10.-12. klasei Profilkursam", II daļa – Rīga, 1998.

Ja vienādojums satur mainīgos $x_1, x_2, \dots, x_n$, tad par tā atrisinājumu sauc skaitļu komplektu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ar šādu īpašību: ievietojot vienādojumā x_1 vietā a_1, x_2 vietā a_2 , ..., x_n vietā a_n, iegūst patiesu skaitlisku vienādību.

Atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visus vienādojuma atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu bez atrastajiem nav.

Apskatīsim algebriskus vienādojumus ar veseliem koeficientiem, kuriem atrisinājums jāmeklē veselo vai naturālo skaitļu kopā. Uzdevumos izmantosim ideju:

ja var pierādīt, ka vienādojuma abas puses, dalot ar kādu šim vienādojumam īpaši izvēlētu skaitli, noteikti dod dažādus atlikumus, tad vienādojumam nav atrisinājuma.

Ievēro! Ja vienādojuma abas puses dalās ar kādu skaitli, tad no tā **nevar** secināt, ka vienādojumam ir atrisinājums veselos skaitļos.

Daži *īpašā skaitļa* izvēles principi

- Izvēlamies tikai pirmskaitļus vai to pakāpes.
- Sākam ar maziem skaitļiem 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; ... .
- Izvēlamies skaitļus, kas ir vienādojuma koeficientu dalītāji.
- Vienādojumos, kuros parādās skaitļu k-tās pakāpes, izvēlamies skaitļus k^2 un visus pirmskaitļus, kas izsakāmi formā $mk + 1$. Piemēram, vienādojumos, kas saistīti ar skaitļu kubiem, sākotnējie *īpašie* skaitļi ir 9; 7; 13; 19; ... .
- Vienādojumos, kuri satur veselu skaitļu kvadrātus, parasti izdevīgi aplūkot atlikumus, dalot ar 4, 8 vai 16, dažreiz ar 3;
- Jācenšas izvēlēties tādu skaitli, lai, dalot ar to, iespējami daudziem vienādojuma kreisās un labās puses saskaitāmajiem būtu pēc iespējas mazāk dažādu iespējamu vērtību.

Lietojot šo ideju, lietderīgi atcerēties par darbībām ar atlikumiem, kā arī to, kādus atlikumus var dot veselu skaitļu kvadrāti, kubi, ceturtās pakāpes utt.

Piezīme. Vienam vienādojumam var būt vairāki *īpašie* skaitļi un tālāk dotajos piemēros norādītie nav jāuzskata par vienīgajiem vai pašiem labākajiem.

6. piemērs. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + y^2 = 2015$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

Atrisinājums. Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu 0 vai 1. Tāpēc $x^2 + y^2$, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu $0 + 0$, $0 + 1$, $1 + 0$ vai $1 + 1$, tas ir, atlikumu 0, 1 vai 2. Taču skaitlis 2015 dod atlikumu 3, dalot ar 4. Tāpēc dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

7. piemērs. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $5x^2 - 2y^2 = 4$.

Atrisinājums. Pārrakstām vienādojumu formā $5x^2 = 2y^2 + 4$. Apskatām iegūtā vienādojuma labās puses izteiksmi pēc moduļa 5.

$\boldsymbol{y}\ (\mathbf{mod}\ \mathbf{5})$	$\mathbf{2}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}\ (\mathbf{mod}\ \mathbf{5})$
0	$2 \cdot 0^2 + 4 \equiv 4 \pmod 5$
1	$2 \cdot 1^2 + 4 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$
2	$2 \cdot 2^2 + 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod 5$
3	$2 \cdot 3^2 + 4 \equiv 22 \equiv 2 \pmod 5$
4	$2 \cdot 4^2 + 4 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 5$

Esam ieguvuši, ka $2y^2 + 4$ nekad nedalās ar 5, bet $5x^2$ vienmēr dalās ar 5. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

8. piemērs. Pierādīt, ka vienādojumam $(x-y)^2 = 6xy + 7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

1. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu formā $x^2 + y^2 = 8xy + 7$. Gan x^2, gan y^2 pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0 un 1, tāpēc vienādojuma kreisā puse pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 2, bet $8xy + 7 \equiv 3 \pmod 4$. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

2. atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 6xy + 7;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 10xy + 7;$$
$$(x+y)^2 = 10xy + 7.$$

Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai 0; 1; 4; 5; 6; 9, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Piezīme. Principā risinājumā tika izmantota kongruence pēc moduļa 10.

3. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādību formā $(x+y)^2 = 10xy + 7$ un apskatām to pēc moduļa 5. Veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 5 var dot atlikumus 0, 1 vai 4, taču labā puse ir kongruenta ar 2 pēc moduļa 5. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

9. piemērs. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x + 8^y = 13^z$.

Atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tā kā $7 \equiv 1 \pmod 3$, $8 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$ un $13 \equiv 1 \pmod 3$, tad iegūstam $1^x + (-1)^y \equiv 1^z \pmod 3$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

10. piemērs. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka izpildās vienādība $6^x + 13^y = 29^z$.

Atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 7. Tā kā $6 \equiv -1 \pmod 7$, $13 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$ un $29 \equiv 1 \pmod 7$, tad iegūstam $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1^z \pmod 7$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai ± 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

11. piemērs. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^2 + 8z = 2y^2 + 3$.

Atrisinājums. Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Viegli pārbaudīt, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4.

$\boldsymbol{a} \pmod{\mathbf{8}}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{a^2} \pmod{\mathbf{8}}$	0	1	4	1	0	1	4	1

Tas nozīmē, ka dotā vienādojuma kreisā puse $x^2 + 8z$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4. Savukārt skaitlis $2y^2$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0 vai 2. Tātad vienādojuma labā puse $2y^2 + 3$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 3 vai 5. Tātad nav tādu veselu x un y vērtību, pie kurām dotā vienādojuma abas puses dotu vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 8. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

UZDEVUMI

TIK VAI… CIK?

1. KĀRTA

T.1.1. Aprēķini $1000 - 100 + 10 - 1 =$

A 111 **B** 900 **C** 909 **D** 990 **E** 999

T.1.2. Kura no dotajām vienādībām ir patiesa?

A $0 \cdot 9 + 9 \cdot 0 = 9$ **B** $1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 = 18$ **C** $2 \cdot 7 + 7 \cdot 2 = 27$
D $3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 36$ **E** $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 45$

T.1.3. Skolas "Veselības nedēļā" 4. klašu skolēni vāca datus, cik kilogramus ābolu un burkānu tie nedēļas laikā apēd. Tabulā attēlots, cik kilogramus ābolu un burkānu kopā apēda katras klases skolēni. Kuras klases skolēni kopā apēda visvairāk ābolus un burkānus?

	4.a	**4.b**	**4.c**
Burkāni	15	10	4
Āboli	25	25	35

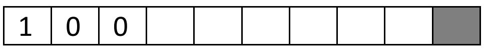
A 4.a **B** 4.b **C** 4.c **D** ābolus **E** nevar noteikt

T.1.4. Kā mainīsies reizinājums, ja abus reizinātājus palielina divas reizes?

A palielināsies par 2 **B** palielināsies 2 reizes **C** palielināsies par 4
D palielināsies 4 reizes **E** cita atbilde

T.1.5. Pirmajās trīs rūtiņās ierakstīti skaitļi 1, 0, 0 (skat. 16. att.). Katrā nākamajā rūtiņā ieraksta skaitli, kuru iegūst, saskaitot iepriekšējās trīs rūtiņās ierakstītos skaitļus. Kāds skaitlis būs ierakstīts iekrāsotajā rūtiņā?

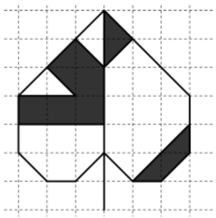
A 0 **B** 1 **C** 13 **D** 24 **E** cits skaitlis

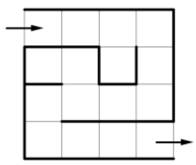


16. att.

T.1.6. Kāda daļa no 17. att. dotās figūras ir iekrāsota?

A $\frac{4}{25}$ **B** $\frac{8}{25}$ **C** $\frac{25}{8}$ **D** 8 **E** cita atbilde

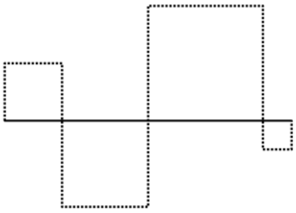

17. att.


18. att.

T.1.7. Alisei jāiziet caur labirintu, katrā rūtiņā nonākot vismaz vienu reizi (skat. 18. att.). Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kurās viņa ir bijusi vairāk nekā vienu reizi?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 5

T.1.8. Visi 19. att. dotie četrstūri ir kvadrāti. Kāds ir punktētās līnijas kopējais garums, ja nepārtrauktās līnijas garums ir 17 cm?



19. att.

A 17 cm **B** 34 cm **C** 51 cm **D** 68 cm **E** nevar noteikt

T.1.9. Gatis un Artis dārzā salasīja ābolus. Gatis teica: "Dod man vienu ābolu no savējiem, tad man būs divreiz vairāk ābolu nekā tev." Artis atbildēja: "Dod man vienu no saviem āboliem, tad mums abiem būs vienāds skaits ābolu." Cik ābolus salasīja Gatis?

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** cita atbilde

T.1.10. Anetei kabatā ir 8 ķiršu želejas konfektes, 4 ābolu želejas konfektes un 4 zemeņu želejas konfektes. Kāds ir mazākais skaits konfekšu, kas jāizņem no kabatas, lai noteikti būtu izņemta katras garšas konfekte?

A 3 **B** 4 **C** 8 **D** 9 **E** 13

2. KĀRTA

T.2.1. Aprēķini $98 + 2 \cdot 34 - 24 =$

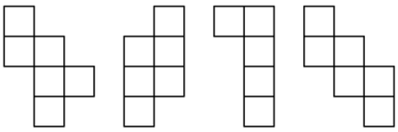
A 118 **B** 142 **C** 316 **D** 1000 **E** 3376

T.2.2. Kāds ir atlikums, skaitli 2015 dalot ar 10?

A 0 **B** 1 **C** 5 **D** 10 **E** 15

T.2.3. No kartona izgrieza četras 20. att. redzamās figūras. No cik izgrieztajām figūrām var izlocīt kubu?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4



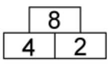
20. att.

T.2.4. Trīs rūķi dienā apēd p kilogramus piparkūku. Cik kilogramus piparkūku apēd septiņi rūķi d dienās?

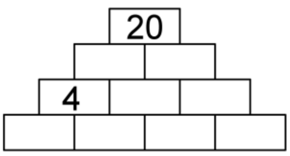
A $p \cdot 7 \cdot d$ **B** $p : 3 \cdot 7$ **C** $p \cdot 3 \cdot d \cdot 7$ **D** $3 : p \cdot 7 \cdot d$ **E** $p : 3 \cdot 7 \cdot d$

T.2.5. Aplītī ieraksti skaitli, lai dotā vienādība būtu patiesa!

$$14 : \bigcirc + 53 = 60 \qquad (82 - 76) \cdot (\bigcirc + 4) = 54$$

T.2.6. Aizpildi tukšos lodziņus (skat. 21. att.) tā, lai katru divu blakus esošo skaitļu reizinājums ir virs tiem uzrakstītais skaitlis! Piemēram, 

, jo $4 \cdot 2 = 8$.



21. att.

22. att.

T.2.7. No papīra izgrieza divus vienādus kvadrātus, kuru malas garums ir 7 cm. Tos uzlika vienu otram virsū tā, ka izveidojas taisnstūris (skat. 22. att.), kura vienas malas garums ir 7 cm, bet otras malas garums ir 9 cm. Aprēķini abu kvadrātu kopīgās (iekrāsotās) daļas perimetru!

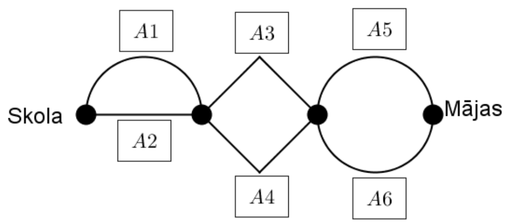
T.2.8. Sniegotajā ciemā dzīvo tikai divas ģimenes: Meļi un Patieši. Meļu ģimene vienmēr melo, bet Patiešu ģimene vienmēr saka patiesību. Uz ielas stāv divi zēni – Niks un Niklāvs. Niks saka: “Mēs abi esam Meļi.” No kuras ģimenes ir Niks? No kuras ģimenes ir Niklāvs?

3. KĀRTA

T.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki litros!

$$\frac{1}{2}\,hl\; + 500\,ml \cdot 2 + 48\,l =$$

T.3.2. Cik dažādos veidos Paula no skolas var aiziet uz mājām (skat. 23. att.)? Uzraksti visus iespējamos ceļus, izmantojot dotos apzīmējumus!

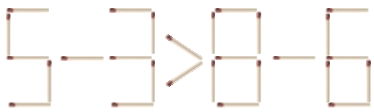


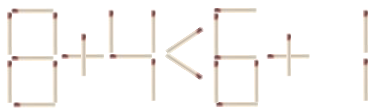
23. att.

T.3.3. Vai var atrast tādu skaitli, ko var ielikt burta vietā, lai dotā vienādība būtu patiesa? Ja var, tad parādi piemēru, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!

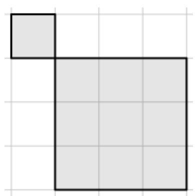
		Risinājums
1)	$x + x = 0$	
2)	$y \cdot (1 - y : y) = 0$	
3)	$a : a = 10$	

T.3.4. Pārliec katrā nepatiesajā nevienādībā vienu sērkociņu, lai iegūtu patiesu nevienādību! Nevienādības zīmi mainīt nedrīkst! *Piezīme*. No sērkociņiem var izveidot šādus ciparus: .





T.3.5. Abu iekrāsoto kvadrātu perimetru summa ir 80 cm (skat. 24. att.). Lielā kvadrāta mala ir 3 reizes garāka nekā mazā kvadrāta mala. Aprēķini katra kvadrāta malas garumu!



24. att.

T.3.6. Šokolādes tāfelītes tiek pakotas kastēs pa 5 vai 12 katrā kastē. Kāds mazākais skaits kastu ir nepieciešams, lai sapakotu 145 šokolādes tāfelītes (visām kastēm jābūt pilnām)?

T.3.7. Divi velosipēdisti, starp kuriem attālums bija 24 km, devās viens otram pretī. Pēc stundas attālums starp viņiem bija 12 km. Kāds attālums starp viņiem būs vēl pēc pusstundas? Velosipēdistu ātrumi ir nemainīgi. *Apskati visus iespējamos gadījumus!*

4. KĀRTA

T.4.1. Aprēķini: $2016 : 4 - 4 \cdot 8 =$

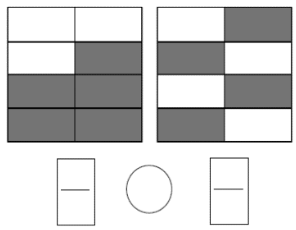
T.4.2. **a)** Saliec darbību zīmes vai iekavas, lai rezultāts būtu 7!

5 5 5 5 = 7

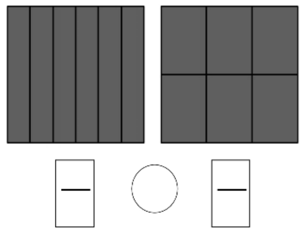
b) Parādi, kā līdzīgā veidā, vairākas reizes izmantojot ciparu 5, iegūt rezultātu 8!

T.4.3. Zem katras figūras tukšajās rūtiņās ieraksti, kāda daļa figūras ir iekrāsota! Salīdzini daļas: aplītī ieraksti >, < vai = !

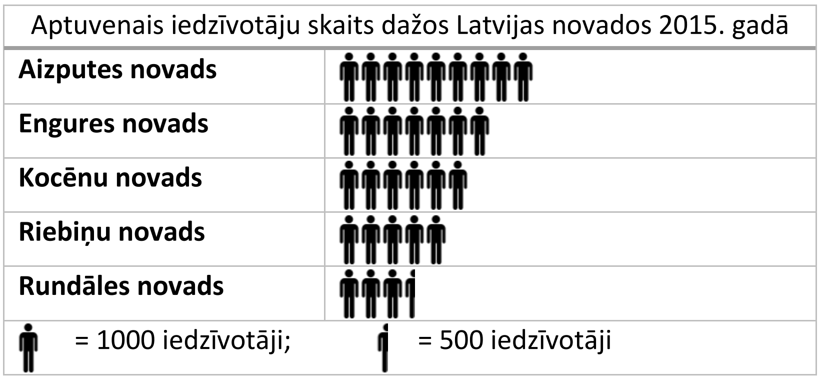
a)



b)



T.4.4. Apskati diagrammu un atbildi uz jautājumiem!



a) Kurā novadā bija visvairāk iedzīvotāju?

b) Cik iedzīvotāju bija Rundāles novadā?

c) Par cik iedzīvotājiem Engures novadā bija vairāk nekā Riebiņu novadā?

T.4.5. Aizpildi *starpību piramīdu*! Katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar to divu skaitļu starpību, kas ierakstīti rūtiņās tieši virs tā.

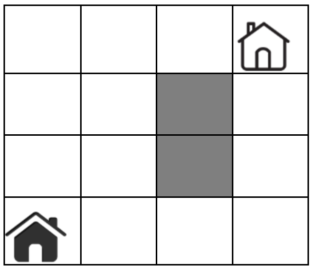
5102		**4102**	
3086		**2089**	
997			

T.4.6. Arbūza masa ir 2 kg un vēl trešdaļa no visas tā masas. Kāda ir arbūza masa?

T.4.7. Briedis spēj skriet ar ātrumu 72 km/h, zilonis – ar ātrumu 10 m/s, bet lācis – ar ātrumu 900 m/min.

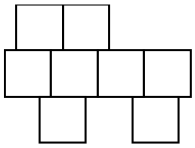
No šiem dzīvniekiem visātrāk spēj skriet ………………………………; vislēnāk – …………………………………….
Pamato savu atbildi!

T.4.8. Egils var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos Egils no melnās mājiņas var nokļūt baltajā mājiņā (skat. 25. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās Egils nedrīkst iet. *Pamato savu atbildi!*



25. att.

T.4.9. No vienādiem kvadrātiem, kuru malas garums ir 1 cm, salika 26. att. redzamo figūru. Aprēķini šīs figūras perimetru!



26. att.

T.4.10. Vai tukšajos lodziņos var ierakstīt naturālus skaitļus, lai iegūtu patiesu vienādību? *Ja var, tad ieraksti, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!*

$$2 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{} = 2015$$

T.4.11. Sarunājās četri rūķīši:

Gastons: "Es nočiepu medus burku."
Alfs: "Gastons melo."
Vilnis: "Alfs melo."
Rūdis: "Vilnis melo."

Cik no četriem rūķīšiem teica patiesību? *Pamato savu atbildi!*

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

1. KĀRTA

J.1.1. Rudens rēbuss

Atrodi vienu piemēru, ar kādu burtu dotajā skaitļu rēbusā aizstāts katrs cipars, ja vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus (izņemot E un Ē, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu, un arī A un Ā, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu).

		M	E	Ž	Ā
	S	Ē	N	E	S
	B	E	K	A	S
L	I	E	L	A	S

J.1.2. Laika skaitīšana

Desmit minūtes pirms es ieliku kūku krāsnī, es izlaidu savu kaķi laukā. Kūkai ir jācepas 35 minūtes, tāpēc es iestatīju taimeri uz 35 minūtēm. Nekavējoties es sev pagatavoju tēju, kas man aizņēma sešas minūtes. Trīs minūtes pirms es biju izdzērusi savu tēju, kaķis atgriezās mājās, tas bija piecas minūtes pirms cepeškrāsns taimeris sāka pīkstēt. Tieši pa vidu starp laiku, kad es pabeidzu gatavot tēju, un laiku, kad kaķis atgriezās mājās, es atbildēju uz telefona zvanu. Pēc piecām minūtēm es beidzu runāt pa telefonu, un tajā brīdī pulkstenis rādīja 15:59.

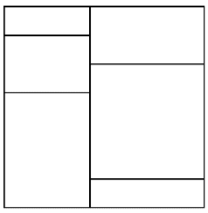
a) Cik minūtes pēc tam, kad kaķis bija izlaists laukā, cepeškrāsns taimeris sāka pīkstēt?

b) Cik minūtes pagāja no brīža, kad tēja bija pagatavota, līdz brīdim, kad tējas krūze bija tukša?

c) Cikos es izlaidu savu kaķi laukā?

J.1.3. Taisnstūri

Kvadrātveida papīra lapu sagrieza sešos mazākos taisnstūros (skat. 27. att.). Mazo taisnstūru perimetru summa ir 120 cm. Kāds ir kvadrātveida papīra lapas laukums?



27. att.

J.1.4. Šautriņas

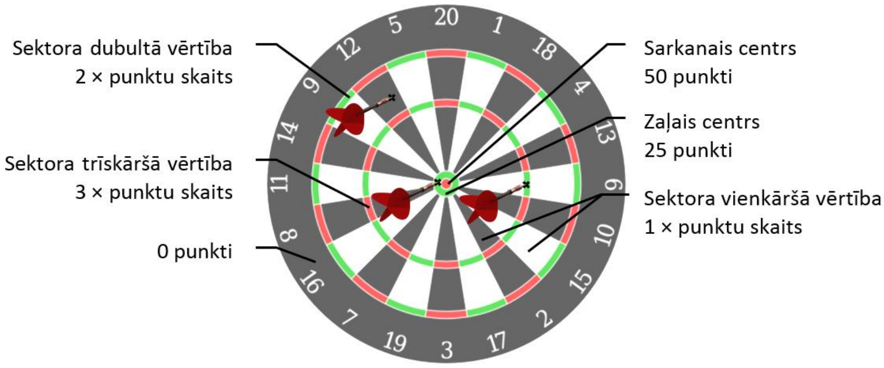
Šautriņu mešanā par katru no trīs iemestajām šautriņām tiek saņemts noteikts skaits punktu, atkarībā no tā, kurā vietā mērķī (skat. 28. att.) šautriņa ir trāpījusi:

- 50 punkti, ja sarkanajā centrā;
- 25 punkti, ja zaļajā centrā;
- pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi melnajā vai baltajā sektorā (sektora vienkāršā vērtība);
- divkāršots pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi ārējā sarkani-zaļajā gredzenā (sektora dubultā vērtība);
- trīskāršots pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi iekšējā sarkani-zaļajā gredzenā (sektora trīskāršā vērtība);
- 0 punkti, ja trāpa ārpus ārējā sarkani-zaļā gredzena.

Piemēram, kopējais iegūto punktu skaits 28. att. dotajā situācijā ir $25 + (3 \cdot 6) + 12 = 55$.

a) Uzraksti vienu piemēru, kur trāpīja trīs šautriņas, ja kopējais iegūto punktu skaits ir 177.

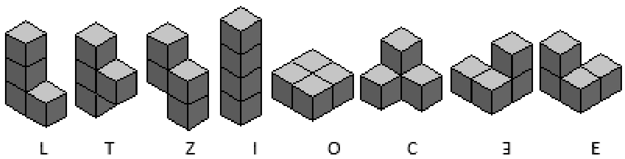
b) Kur varēja trāpīt trīs šautriņas, ja kopējais iegūto punktu skaits ir 137 un zināms, ka bija divas trīskāršās vērtības un trešā šautriņa netrāpīja ne sarkanajā, ne zaļajā centrā?



28. att.

J.1.5. Tetrakubi

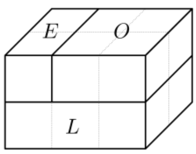
Doti astoņi dažādi tetrakubi (skat. 29. att.). Katrs tetrakubs sastāv no četriem vienības kubiņiem.



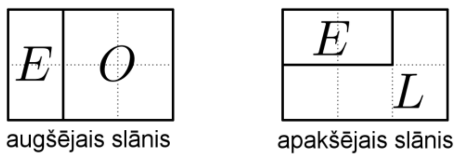
29. att.

No šiem tetrakubiem izvēlējās trīs un salika taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $3 \times 2 \times 2$ (skat. 30. att., kurā ir izmantoti tetrakubi E, O un L). Lai būtu vieglāk uztverams, kā tetrakubi salikti, to var attēlot, parādot katru slāni atsevišķi (skat. 31. att.). Atrodi vēl četrus citus veidus, kā no trīs dažādiem tetrakubiem salikt taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $3 \times 2 \times 2$.

Piezīme. Divus veidus uzskata par dažādiem, ja tiem atšķiras vismaz viens izmantotais tetrakubs.



30. att.



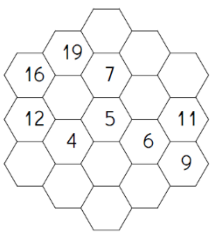
31. att.

2. KĀRTA

J.2.1. Maģiskais sešstūris

Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 19 dotajā figūrā (skat. 32. att.) jāparādās tieši vienu reizi. Aizpildi tukšos lodziņus tā, lai katrā joslā ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati!

Piezīme. Visas iespējamās joslas skat. 33. att., tās var būt pagrieztas.

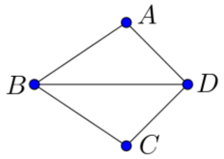


32. att.

33. att.

2.2. Kalnainās takas

Četri ciemati A, B, C un D ir savienoti ar takām (skat. 34. att.). Maršrutā $A \rightarrow B \rightarrow C$ un maršrutā $B \rightarrow C \rightarrow D$ katrā ir 10 kalni, maršrutā $A \rightarrow B \rightarrow D$ ir 22 kalni un maršrutā $A \rightarrow D \rightarrow B$ ir 45 kalni. Tūristu grupa sāk ceļojumu ciematā A un vēlas nokļūt ciematā D. Viņi grib izvēlēties maršrutu, kurā ir vismazāk kalnu. Kurš maršruts viņiem jāizvēlas?



34. att.

J.2.3. Baltas un melnas bumbiņas

Kastē ir 75 baltas un 150 melnas bumbiņas. Pie kastes ir liela kaudze ar melnām bumbiņām. No kastes uz labu laimi izvelk divas bumbiņas.

- Ja tās abas ir melnas, tad vienu no tām atliek atpakaļ, bet otru aizsviež prom.
- Ja viena no tām ir melna, bet otra – balta, tad balto atliek atpakaļ, bet melno aizsviež prom.
- Ja tās abas ir baltas, tad tās abas aizsviež prom, paņem vienu melnu bumbiņu no kaudzes un ieliek kastē.

Tādā veidā turpinot, beigās kastē paliks viena bumbiņa. Kādā krāsā tā būs?

J.2.4. Vai nu pirmskaitlis, vai kvadrāts

Tabulā dotajiem skaitļiem ir šādas īpašības:

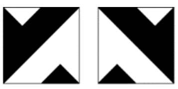
- skaitlī nav cipara 0;
- visi skaitļa cipari ir dažādi;
- skaitļa pirmais un pēdējais cipars ir vai nu viencipara pirmskaitlis, vai viencipara kvadrāts;
- katri divi viens otram blakus esoši cipari veido vai nu pirmskaitli, vai kvadrātu.

971643	**17364**
9 – kvadrāts	1 – kvadrāts
97 – pirmskaitlis	17 – pirmskaitlis
71 – pirmskaitlis	73 – pirmskaitlis
16 – kvadrāts	36 – kvadrāts
64 – kvadrāts	64 – kvadrāts
43 – pirmskaitlis	4 – kvadrāts
3 – pirmskaitlis	

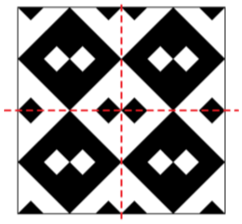
a) Atrodi sešciparu skaitli, kuram ir tādas pašas īpašības un kurš ir lielāks nekā 971643.
b) Pierādi, ka nav tāds skaitlis ar minētajām četrām īpašībām, kurš satur ciparu 8.
c) Kāds ir lielākais iespējamais skaitlis ar minētajām četrām īpašībām?

J.2.5. Simetriskie raksti

Izmantojot divu veidu flīzes (skat. 35. att.), izveidoja 4×4 flīžu laukumu ar 36. att. redzamo rakstu. Tam ir divas simetrijas asis.



35. att.



36. att.

a) Izveido 4×4 flīžu laukumu, lai tā rakstam ir vertikālā simetrijas ass, bet nav horizontālā simetrijas ass! Izveido divus dažādus šādus rakstus!

b) Vai ir iespējams izveidot 4×4 flīžu laukumu, kuram būtu vairāk nekā divas simetrijas asis?

3. KĀRTA

J.3.1. Ceļš vērtībā 100

Iezīmē ceļu, kā no *Starta* nokļūt *Finišā* (skat. 37. att.), ja

- pārvietoties drīkst tikai uz *blakus rūtiņu* (*blakus rūtiņas* ir tās, kurām ir kopīga mala);
- katrā rūtiņā drīkst nonākt ne vairāk kā vienu reizi;
- visu skaitļu, kas ierakstīti apstaigātajās rūtiņās, summai jābūt 100.

Starts				
9	13	7	8	10
9	13	10	14	10
13	11	12	13	11
				Finišs

37. att.

J.3.2. Trīs reizinātāju summa

Trīs dažādu naturālu skaitļu reizinājums ir 36. Kāda var būt šo skaitļu summa?

J.3.3. Skaitļu virkne

Skaitļu virknē katru nākamo locekli iegūst, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa ciparu kvadrātus.

Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 12, tad otrais loceklis ir $1^2+2^2=5$, trešais loceklis ir $5^2=25$, ceturtais loceklis ir $2^2+5^2=29$ utt.

a) Aprēķini virknes pirmos piecus locekļus, ja pirmais loceklis ir 25.

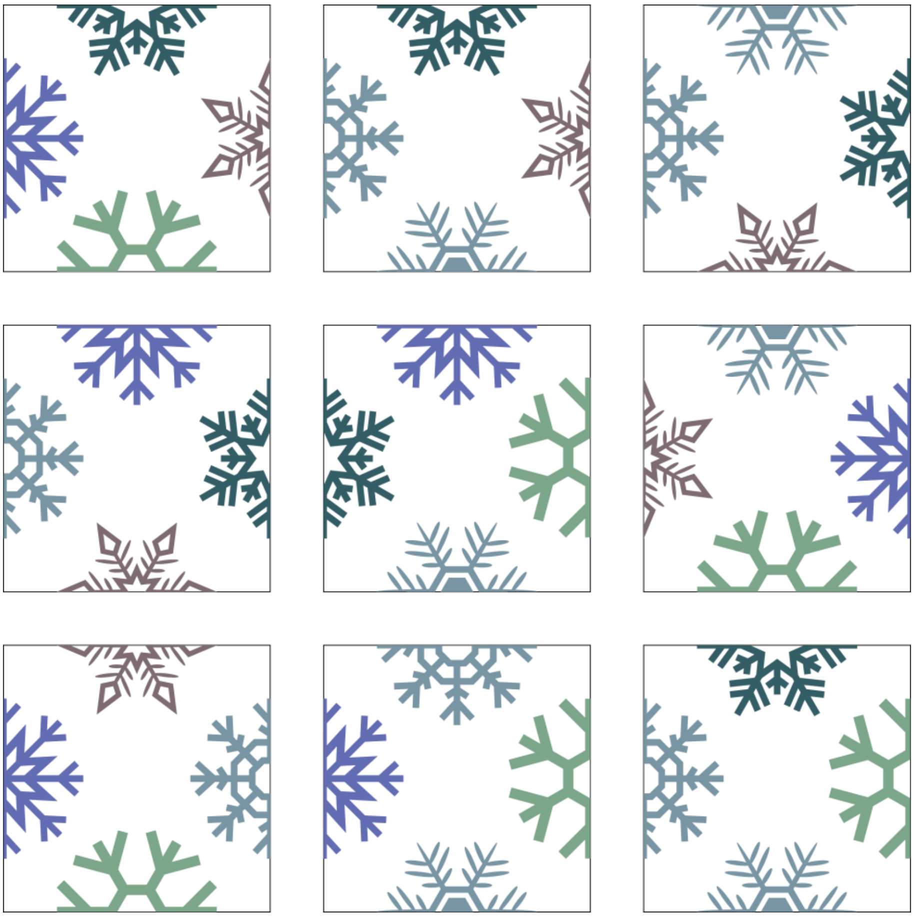
b) Kāds ir virknes 2016. loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 25?

J.3.4. Kad mazais Bobs noraugās abu pārējo izdarībās…

Apņēmīgais Kevins uz lielas lapas atzīmēja 10 punktus tā, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pēc tam viņš katrus divus punktus savienoja ar nogriezni. Dumpīgais Stjuarts pāri Kevina zīmējumam novilka taisni. Zināms, ka neviens no Kevina atliktajiem punktiem neatrodas uz Stjuarta novilktās taisnes. Kāds ir lielākais skaits nogriežņu, ko Stjuarta uzzīmētā taisne var krustot?

J.3.5. Sniegpārsliņu prāta mežģis

No deviņām 38. att. dotajām kartītēm saliec 3 × 3 kvadrātu tā, lai, saskaroties kartīšu malām, veidotos saderīgs zīmējums! (Piemēram, 39. att. parādīts saderīgs zīmējums, bet 40. att. – nesaderīgs.)



38. att.

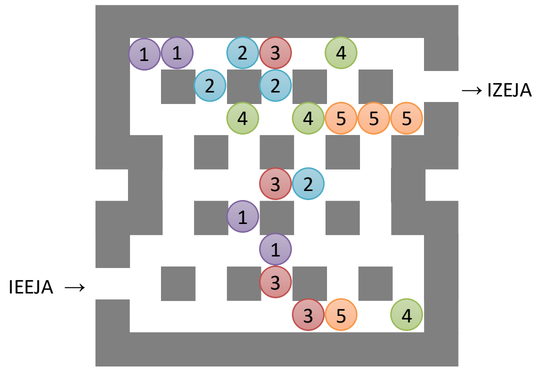
39. att.

40. att.

4. KĀRTA

J.4.1. Putnu vērotājs

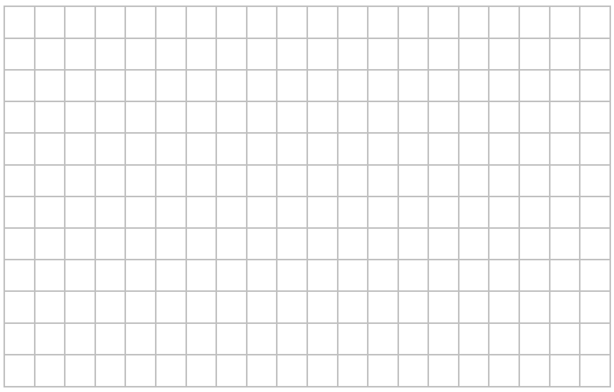
Putnu vērotājs grib iziet cauri parkam un apskatīt putnus (skat. 41. att.). Visu piecu krāsu putnus viņš grib redzēt vienādā skaitā (piemēram, katras krāsas putnu viņš varētu apskatīt tieši vienu reizi). Putnu vērotājs ir redzējis putnu, ja tas atrodas viņa ceļā. Uzzīmē, kā jāpārvietojas putnu vērotājam, ja viņš nekad neiet vairāk kā vienu reizi pa vienu un to pašu vietu!



41. att.

J.4.2. Ģeometriskā ferma

Fermā ir tik daudz vietas, lai tajā varētu izmitināt 240 cūkas, katru atsevišķā aplokā (skat. 42. att.). Noņemot žogus starp aplokiem, tos var piemērot govju izmitināšanai, kurām nepieciešams četras reizes vairāk vietas nekā cūkām, vai zirgu izmitināšanai, kuriem nepieciešams 10 reizes vairāk vietas nekā cūkām. Govju aplokiem jābūt kvadrāta formā, bet zirgu aploki var būt jebkādā formā.



42. att.

a) Vai fermā varētu izmitināt 20 zirgus, 6 govis un 16 cūkas?

b) Kāds ir lielākais skaits govju, ko varētu izmitināt fermā, ja govis un zirgi būtu vienādā skaitā?

c) Ja fermā būtu 2 govis, tad kāds ir lielākais skaits zirgu, kurus varētu izmitināt?

J.4.3. Spēļu nauda

Mazā māsa izveidoja spēļu naudu. Katra banknote ir vai nu sarkana, vai zaļa; visām sarkanajām banknotēm ir vienāda vērtība un visām zaļajām banknotēm ir vienāda vērtība. Trīs zaļo un astoņu sarkano banknošu kopējā vērtība ir 46 eiro, bet astoņu zaļo un trīs sarkano banknošu kopējā vērtība ir 31 eiro. Kāda ir divu zaļo un trīs sarkano banknošu kopējā vērtība?

J.4.4. Anša PIN kods

Ansis vienmēr atceras savu četrciparu PIN kodu, jo zina, ka tam vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

1) tas ir naturāla skaitļa kvadrāts;
2) kad to dala ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9, tad atlikumā iegūst 1.

Kāds ir Anša PIN kods?

J.4.5. Krāsainās bumbiņas

Uz galda atrodas vairākas kastītes, katrā kastītē ir trīs bumbiņas. Zināms, ka katrās divās kastītēs tieši vienai bumbiņai sakrīt krāsa, bet nav tādas krāsas bumbiņa, kas būtu visās kastītēs. Kāds ir lielākais skaits kastīšu, kas var atrasties uz galda?

5. KĀRTA

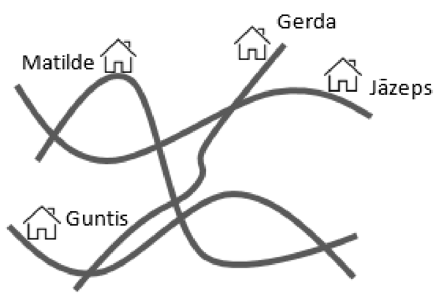
J.5.1. Mīnas

Izkrāso 43. att. tukšās rūtiņas, ja katrs skaitlis norāda, cik melnu rūtiņu atrodas ap rūtiņu, kurā tas ierakstīts!

Piezīme. Ap rūtiņu atrodas tās rūtiņas, kurām ar to ir kopīga mala vai stūris.

	2	2		2	3		3
2			3				
	3	3		2	3		3
3			3	3		2	2
	3	4			1	2	
1				3			
2	4	4	3		2		
			1	1		2	1

43. att.



44. att.

J.5.2. Daļu summa

Izmantojot naturālus skaitļus no 1 līdz 20, katru tieši vienu reizi, izveido desmit parastas daļas, kuru summa ir naturāls skaitlis!

J.5.3. Apslēptie skaitļi

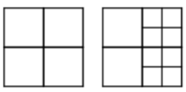
Kādi naturāli skaitļi var būt ierakstīti x un y vietā, lai vienādība $x^2 \cdot y - 1 = 2015$ būtu patiesa?

J.5.4. Ne pārāk precīzā karte

Amalda uzzīmēja karti (44. att.), kurā attēloja četras ielas un četru savu draugu mājas. Vienīgais, kas kartē neatbilst patiesībai ir tas, ka trīs no šīm ielām ir jābūt taisnēm. Kurš no Amaldas draugiem dzīvo līkumainajā ielā?

J.5.5. Jaukie skaitļi

Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par *jauku*. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir *jauki* (45. att.).



45. att.

a) Pierādi, ka skaitlis 6 ir *jauks*!

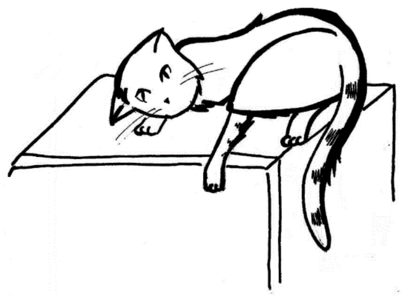
b) Pierādi, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!

c) Pierādi, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*!

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

1. NODARBĪBA

P.1.1. Vakars uz ledusskapja



Saimnieki kaķi Miķeli uz nakti netīšām ieslēdza virtuvē. Tā kā virtuvē nebija nekā ēdama vai kā cita ievērības cienīga, Miķelis mēģināja sevi izklaidēt, skaitot flīzes. Viņš flīzes sanumurēja tā, kā redzams 46. att.

7	8	9	10	11	12	13
6	29	30	31	32	33	14
5	28	43	44	45	34	15
4	27	42	49	46	35	16
3	26	41	48	47	36	17
2	25	40	39	38	37	18
1	24	23	22	21	20	19

46. att.

Viņš iztēlojās, ka uz laucina ar numuru 1 uzliek kubu, kas ar savu skaldni precīzi noklāj tieši vienu flīzi. Tad viņš domās nokrāsoja kuba augšējo skaldni ar slapju krāsu un sāka kubu velt pa numurētājām flīzēm, katru reizi ar skaldni noklājot numurētu flīzi augošā secībā, līdz kubs nonāca uz flīzes ar numuru 49. Ja nokrāsotā skaldne saskaras ar flīzi, tā to pilnībā nokrāso. Kāda ir uz nokrāsotajām flīzēm uzrakstīto skaitļu summa?

P.1.2. Eskalators

Pa augšup slīdoša eskalatora kāpnēm uz augšu devās divi cilvēki, pie tam pirmais no viņiem gāja ar trīsreiz lielāku ātrumu nekā otrais. Viens no gājējiem, kāpdams augšup, veica 16 pakāpienus, bet otrs – 24 pakāpienus. Cik pakāpienu ir eskalatoram?

P.1.3. Gudrais ceļinieks

Reiz sen senos laikos kādā tāltālā karaļvalstī karalis nolēma, ka ir jāizprecina sava vienīgā meita. Pēc karaļvalsts noteikumiem princese drīkst izvēlēties spēli, kuras uzvarētājs viņai būs jāapprec. Karaļa meita, negribēdama vēl iet pie vīra, izvēlējās vārdu spēli. Viņa pie sevis pa vienam aicināja prinčus un jautāja – kāpēc tu pie manis atnāci? Ja princis teica patiesību, princese viņu atraidīja. Bet, ja princis meloja, princese lika sargiem viņu iemest cietumā. Tomēr kādam nejaušam ceļotājam, kurš bija dzirdējis par princeses jautājumu un prinču likteni, izdevās viņu apprecēt. Ko viņš atbildēja princesei?

Piezīme. Princese vienmēr var precīzi pateikt, kuri ir meli un kura ir patiesība.

P.1.4. Starpbrīdis

Andris un Juris pie pusdienu galda smagi sastrīdējās. Andris bija pilnīgi pārliecināts, ja ir dots, ka

$$xy + z = xz + y = yz + x,$$

tad var pierādīt, ka $(x - y)(x - z)(y - z) = 0$. Savukārt Juris viņam mēģināja ieskaidrot, ka viņa risinājums nav matemātiski korekts. Palīdzi izšķirt puišu strīdu!

P.1.5. Troņu spēle

Divi karaļi spēlē spēli. Viņiem ir tāfele, uz kuras ir uzrakstīts skaitlis 1000. Viņu rīcībā ir arī 1000 nevienam vēl nepiederoši zemes gabali. Katrā gājienā karalis var

- vai nu paņemt savā īpašumā no 1 līdz 5 zemes gabaliem (tas ir, 1, 2, 3, 4, 5 zemes gabalus),
- vai arī atteikties no īpašuma tiesībām uz 1 līdz 5 zemes gabaliem (tas ir, 1, 2, 3, 4, 5 zemes gabaliem).

Sākumā karaļiem nepieder neviens zemes gabals. Kad karalis izdara savu gājienu, viņam uz tāfeles ir jāuzraksta atlikušais nevienam nepiederošo zemju gabalu skaits. Zaudē tas karalis, kurš ir spiests uzrakstīt skaitli, kas uz tāfeles jau ir uzrakstīts, uzvarētājs savā īpašumā iegūst visus 1000 zemes gabalus. Kurš no karaļiem noteikti var uzvarēt?

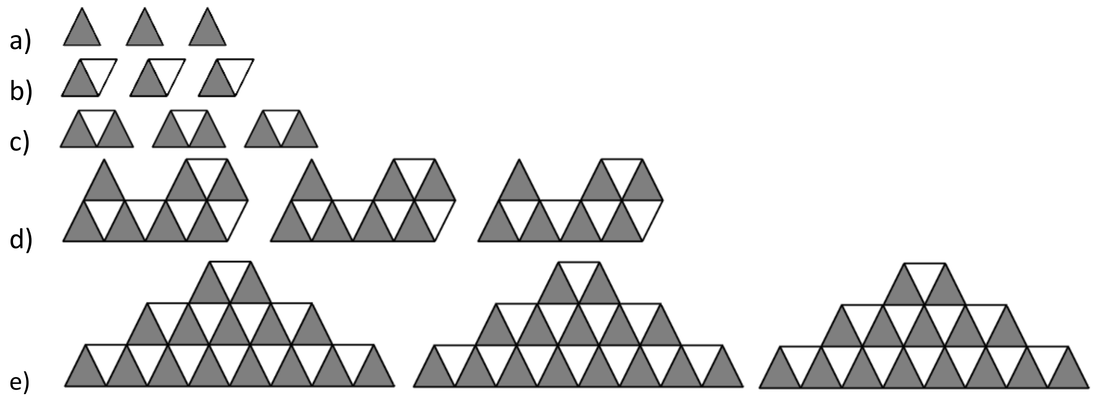
2. NODARBĪBA

P.2.1. Kaķu valūta

Miķelim ir 68 sardīnes, kas ir vienādas pēc ārējā izskata, bet visas to masas ir dažādas. Kā ar 100 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast visvieglāko un vissmagāko sardīni?

P.2.2. Vienādmalu trijstūri

Doti pieci figūru komplekti (skat. 47. att.), katra figūra tajā ir trijos identiskos eksemplāros un sastāv no vienādiem vienādmalu trijstūriem. No kuriem figūru komplektiem, bez pārklāšanās un spraugām var salikt vienādmalu trijstūri? Ja vienādmalu trijstūri izveidot nav iespējams, tad pamato, kāpēc!



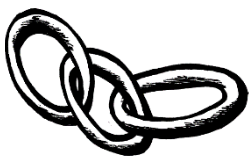
47. att.

P.2.3. Neiespējamā ķēdīte

a) Kā izveidot ķēdīti ar trim posmiem no trim lentītēm, lai, pārgriežot **jebkuru vienu** posmu, visa ķēdīte sadalītos trīs daļās?

Piemēram, 48. att. dotā ķēdīte neder, jo šajā gadījumā ķēdīte sadalīsies trīs atsevišķās daļās tikai tad, ja pārgriezīs vidējo posmu nevis jebkuru posmu, kā prasīts uzdevuma nosacījumos.

b) Kā izveidot ķēdīti ar pieciem posmiem no piecām lentītēm, lai, pārgriežot **jebkuru vienu** posmu, visa ķēdīte sadalītos piecās daļās?



48. att.

P.2.4. Starpbrīdis

Andris pusdienu laikā izdomāja uzdevumu un pierakstīja to uz salvetes:

Pierādi, ka jebkuram naturālam n, skaitlis $\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$ ir vesels skaitlis!

Juris, pusdienu biedra uzdevumu ieraudzījis, tūlīt pat sāka to rēķināt. Palīdzi Jurim atrisināt uzdevumu!

P.2.5. Apaļā galda bruņinieki

Karalis Artūrs, lai pateiktos saviem 15 labākajiem bruņiniekiem par varoņdarbiem, sarīkoja banketu. Ap apaļu galdu tika novietotas 15 vārdu kartītes – pa vienai katram no 15 bruņiniekiem (viņu vārdi ir dažādi). Kartītes uz galda ir novietotas ļoti rūpīgi – tā, lai tās veidotu regulāru 15-stūri. Katrai kartītei pretī ir novietots krēsls. Diemžēl, kad bruņinieki ieraudzīja ar gardumiem piekrauto banketa galdu, neviens neievēroja vārdu kartītes un apsēdās tā, ka neviens bruņinieks neapsēdās sev paredzētajā vietā. Vai noteikti ir iespējams apaļo galdu pagriezt tā, lai vismaz diviem bruņiniekiem atbilstu viņu vārdu kartītes? Atbildi pamato!

3. NODARBĪBA

P.3.1. Biznesmenis

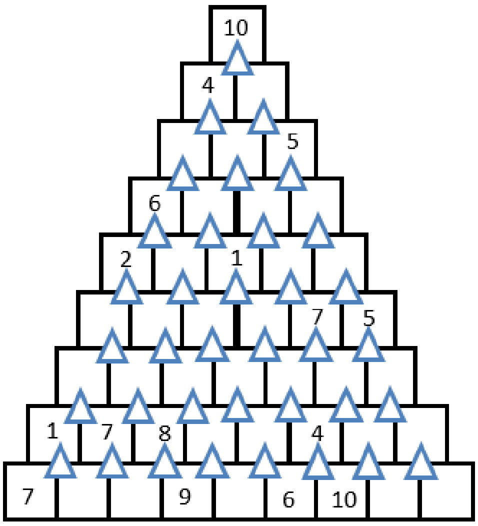
Miķelis ieradās tirgū ar kādu daudzumu lašu. Pirmajam pircējam viņš pārdeva pusi no šiem lašiem un vēl puslasi; otrajam – pusi no atlikušajiem lašiem un vēl puslasi; trešajam – pusi no jaunā atlikuma un puslasi; ceturtajam – pusi no atlikuma un vēl puslasi. Rezultātā visi laši tika pārdoti. Aprēķini, cik lašu Miķelim bija sākumā!

P.3.2. Režģis

Aizpildi tukšās rūtiņas (skat. 49. att.) tā, lai

- tajās būtu ierakstīti tikai naturāli skaitļi no 1 līdz 12;
- katrā trijniekā (skaitļi, kas savienoti ar trijstūrīti), saskaitot kādus divus skaitļus, iegūtu trešo skaitli;
- skaitļi horizontālajās rindās neatkārtotos!

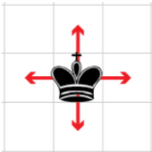
Pietiek parādīt vienu piemēru.



49. att.

P.3.3. Parādes gājiens

Šaha figūriņa Karalis vienā gājienā var pārvietoties uz jebkuru blakus esošu lauciņu, kam ar pašreizējo ir kaut viens kopīgs punkts. Ja karalis pāriet uz rūtiņu, kam ar pašreizējo ir kopīga mala, tad viņš ir nogājis ceļu garumā 1 (skat. 50. att.); ja karalis pāriet uz rūtiņu, kam ar pašreizējo ir kopīgs stūris, tad viņš ir nogājis ceļu garumā $\sqrt{2}$ (skat. 51. att.). Karalis apstaigāja 9×9 šaha galdiņu, katrā lauciņā paviesojoties tieši vienu reizi. Kāds ir garākais iespējamais ceļš, ko Karalis varēja veikt?



50. att.

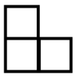
51. att.

P.3.4. Starpbrīdis

Juris uz tāfeles uzrakstīja divus vienādojumus: $a^3 + 3ab^2 = 14$ un $b^3 + 3a^2b = 13$. Savukārt Andris, tos izmantojot, aprēķināja izteiksmes $a^2 - b^2$ vērtību. Aprēķini šo vērtību un pierādi, ka tā ir vienīgā iespējamā!

P.3.5. Prāta spēles

Ansītis un Grietiņa spēlē spēli. Viņiem ir 5×5 rūtiņu kvadrāts, kuram sākumā visas rūtiņas ir baltas, melna krāsa un neierobežots skaits *stūrīšu* (skat. 52. att.). *Stūrīša* rūtiņa precīzi noklāj kvadrāta rūtiņu.



52. att.

Spēles sākumā Ansītis izvēlas naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 25. Tad Ansītis izvēlas vienu balto rūtiņu un nokrāso melnā krāsā, pēc tam vienu balto rūtiņu melnā krāsā nokrāso Grietiņa, tad atkal Ansītis un tā tālāk, līdz uz laukuma melnā krāsā ir nokrāsotas tieši n rūtiņas.

Ansītis ir uzvarējis, ja spēles beigās baltās rūtiņas var noklāt ar *stūrīšiem* tā, lai nenoklātas būtu ne vairāk kā divas baltas rūtiņas. *Stūrīšus* drīkst likt tikai uz baltajām rūtiņām, *stūrīši* nedrīkst pārklāties, bet tos drīkst pagriezt. Ja nenoklātas paliek vismaz trīs rūtiņas, uzvarējusi ir Grietiņa.

Kāds ir mazākais skaitlis, kuru Ansītis nedrīkst nosaukt, ja vēlas uzvarēt?

4. NODARBĪBA

P.4.1. Matemātiskais motocikls

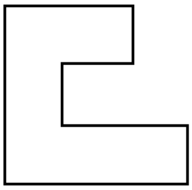
Gājēja ātrums ir 5 km/h, bet divvietīga motocikla ātrums – 50 km/h. Plkst. 12:00 punktā A atrodas trīs cilvēki un viens divvietīgs motocikls. Vai visi trīs cilvēki līdz plkst. 15:00 var nokļūt punktā B, kas atrodas 60 km attālumā no punkta A, izmantojot tikai šo motociklu vai pārvietojoties ar kājām?

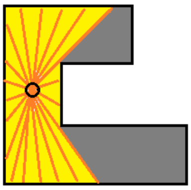
P.4.2. Ruka namiņš

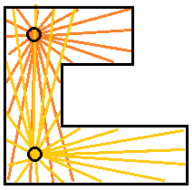
Reiz sensenos laikos kādā tāltālā zemē rūķīšu ciemā izdzisa elektrība. Lai atrisinātu šo problēmu, ciema vecākais rūķis izdalīja visiem rūķīšiem pa svecītei, lai vakara darbi nebūtu jādara pilnīgā tumsā. Svecītes spēj apgaismot visus telpas punktus, kurus spēj aizsniegt taisni, no sveces nākoši stari. Rūķītis Ruks par ciema vecākā lēmumu bija īpaši neapmierināts, jo viņa vienistabas namiņā ir 15 sienas un viņš izskaitļoja, ka visu sienu pilnīgai apgaismošanai būtu nepieciešamas vismaz 5 sveces. Rūķīša istaba no augšas izskatās kā slēgta lauzta līnija, kas sevi nekrusto, un katra siena ir viens nogrieznis šajā daudzstūrī. Uzzīmē vienu piemēru, kāds varētu izskatīties Ruka namiņš!

Piemērs. Pieņemsim, ka Ruka istabai ir tikai 8 sienas (skat. 53. att.). Tad šādu istabu nav iespējams apgaismot tikai ar vienu sveci (skat. 54. att.). Tātad ir nepieciešamas vismaz divas sveces un tās var novietot, piemēram, kā attēlots 55. att.

Piezīme. Zīmējumos ar līnijām parādīts, kā iet sveces gaismas stari un kādu platību spēj apgaismot katra svece.


53. att.


54. att.


55. att.

P.4.3. Starpbrīdis

Juris vienu dienu neieradās skolā, un tajā dienā Andrim starpbrīžos vairs nebija ar ko kopīgi rēķināt. Tāpēc viņš rēķināja viens pats. Kādā grāmatā viņš atrada uzdevumu:

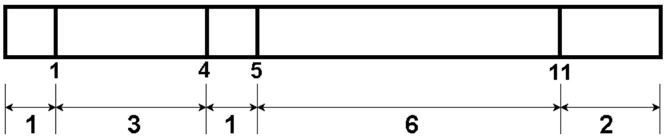
Katram veselam skaitlim x izteiksmes $ax^3 + bx^2 + cx + d$, kur a, b, c, d ir veseli skaitļi, vērtība dalās ar 5. Pierādīt, ka katrs no skaitļiem a, b, c un d dalās ar 5.

Palīdzi Andrim atrisināt uzdevumu!

P.4.4. Rasēšanas stundā

Emīlam ir lineāls, kura garums ir tieši 33 cm. Tam ir palikušas tikai astoņas iedaļas, pārējās ir izdzisušas. Un tomēr ar šo lineālu Emīls līdz stundas beigām iemanījās izmērīt jebkuru garumu veselos centimetros no 1 līdz 33. Katra garuma izmērīšanai pietiek tikai vienreiz pielikt lineālu. Kā izvietotas neizdzisušās lineāla iedaļas?

Piemērs. Dots 13 cm garš lineāls ar četrām iedaļām (skat. 56. att.), ar kuru var nomērīt jebkuru garumu veselos centimetros no 1 līdz 13. Piemēram, lai nomērītu 4 cm, var izmantot iedaļas platumā 1 cm un 3 cm, lai nomērītu 8 cm, var izmantot iedaļas platumā 6 cm un 2 cm.



56. att.

P.4.5. Maģiskās rūtis

Dots $n \times m$ rūtiņu laukums. Katrā rūtiņā sākumā ir ierakstīts kāds naturāls skaitlis. Viena gājiena laikā drīkst vai nu patvaļīgi izvēlētas rindiņas visus skaitļus dubultot, vai arī patvaļīgi izvēlētas kolonnas visus skaitļus samazināt par 1. Vai vienmēr ir iespējams panākt situāciju, kad pēc galīga skaita gājienu katrā laukuma rūtiņā ir ierakstīta 0?

5. NODARBĪBA

P.5.1. Tējas laiks

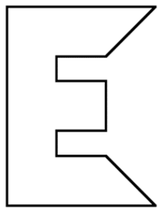
Pieci cilvēki var izdzert visu ūdeni no patvāra, kas turpina vārīties visu tējas dzeršanas laiku, vienā stundā, bet 10 cilvēki – 35 minūtēs. Cik ilgā laikā visu patvārī esošo ūdeni izdzers 8 cilvēki, ja visi uzdevumā minētie cilvēki dzer tēju ar vienādu ātrumu? Ievēro, ka ūdens iztvaiko!

P.5.2. Baraviku iela

Rūķu pilsētā, Baraviku ielā atrodas seši nami. Katrā namā dzīvo pa rūķītim: Antons, Brencis, Cukuriņš, Dāvis, Emīls un Foršais. Zināms, ka Antons un 1. nama iedzīvotājs strādā ogļu raktuvēs, Emīls un 2. nama iemītnieks ir zeltrači, bet 3. nama iemītnieks un Cukuriņš – meža uzraugi. Brenča un Foršā mīļākais ēdiens ir sēņu sacepums, taču 3. nama iemītnieks sēnes neēd, 5. nama iemītnieks ir vecāks nekā Antons, 6. nama iemītnieks – vecāks nekā Cukuriņš. Brencis un 1. nama iemītnieks nēsā tikai sarkanas krāsas cepures, bet Cukuriņš un 5. nama iemītnieks – tikai zaļas. Nosaki, kurā namā dzīvo katrs rūķis un kāda ir katra rūķa profesija!

P.5.3. Burta šķērēšana

Sagriez 57. att. doto figūru septiņās daļās ar ne vairāk kā četriem taisniem griezieniem un no iegūtajām daļām saliec kvadrātu!



57. att.

P.5.4. Starpbrīdis

Andris un Juris ieradās pusdienās ar novēlošanos, un bija vairs palicis tikai viens ābols. Viņi nolēma strīdu izšķirt tā, kā viņi to parasti dara – ābolu saņems tas, kurš visātrāk atrisinās uzdevumu.

Dots, ka a, b, c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ un $\frac{b+c}{a}$ ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}<9$.

Pamēģini atrisināt arī Tu!

P.5.5. Profesora mīkla

Profesoram Cipariņam uzdāvināja 200 gabaliņu puzli. Taču tā nebija parasta puzle. Visa puzle kopumā ir izkrāsota n krāsās. Atrodi mazāko iespējamo n vērtību, ja jebkuriem 25 puzles gabaliņiem ir kopīga krāsa, taču nav tādas krāsas, kas ir sastopama visos puzles gabaliņos!

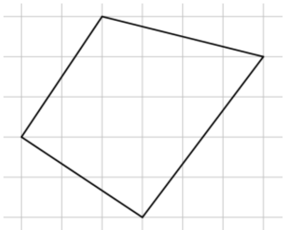
SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

5. KLASE

S.5.1. Katrā lodziņā ieraksti “$+$” vai “$-$” zīmi tā, lai iegūtu patiesu vienādību!

$$64 \square 32 \square 16 \square 8 \square 4 \square 2 \square 1 = 81$$

S.5.2. Nosaki izmērus visiem tādiem taisnstūriem, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru laukums ir tikpat liels kā 58. att. dotā četrstūra laukums!



58. att.

S.5.3. Atrodi lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 3 un kam visi cipari ir dažādi!

S.5.4. Vai astoņstūra virsotnēs var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 8 (katrā virsotnē citu skaitli) tā, lai, katrai malai, aprēķinot tās galos ierakstīto skaitļu starpību, visas astoņas iegūtās starpības būtu dažādas?

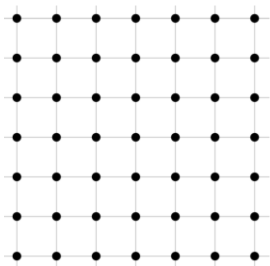
S.5.5. Kādā mēnesī trīs trešdienas bija pāra datumos. Kāda nedēļas diena bija šī mēneša 18. datums?

6. KLASE

S.6.1. Atrodi tādu skaitli, kas dalot ar 11, dod atlikumu 5, bet, dalot ar 13, dod atlikumu 9.

S.6.2. Kādā valstī ir tikai 15-solāru un 20-solāru monētas. Makvīnam bija dažas monētas. Divas monētas jeb piekto daļu savas naudas viņš atdeva māsai, bet pusi no atlikušās naudas jeb trīs monētas samaksāja par saldumiem. Cik naudas Makvīnam bija sākumā?

S.6.3. Uz rūtiņu lapas, rūtiņu virsotnēs atzīmēti 49 punkti (skat. 59. att.). Cik ir tādu kvadrātu, kuru virsotnes ir šajos punktos un kuru malas iet pa rūtiņu līnijām?



59. att.

S.6.4. Kāds ir lielākais iespējamais svētdienu skaits gadā?

S.6.5. Vai kubu var sagriezt 20 mazākos kubos?

7. KLASE

S.7.1. Apskata visus tādus vienādojumus $ax + b = cx + d$, kur a, b, c, d katrs ir ar vērtību 1; 2 vai 3.

a) Uzraksti vienu šādu vienādojumu, kuram nav sakņu!

b) Cik starp šiem vienādojumiem ir tādu, kuriem nav sakņu?

S.7.2. Pierādi, ka blakusleņķu bisektrises ir perpendikulāras!

S.7.3. Atrodi visus tādus trīsciparu skaitļus, kuriem vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

- visi cipari ir dažādi,
- pirmais cipars ir vislielākais un pēdējais – vismazākais,
- ciparu summa ir pāra skaitlis,
- starpība starp pirmo un otro ciparu ir 3 reizes lielāka nekā starpība starp otro un trešu ciparu!

S.7.4. Vai kubu var sagriezt 148 mazākos kubos?

S.7.5. Sešas figūriņas novietotas tā, kā parādīts 60. att.

○	○	○	●	●	●	

60. att.

	●	●	●	○	○	○

61. att.

Vienā gājienā vienu figūriņu var pārbīdīt uz blakus rūtiņu, ja tā ir tukša, vai arī pārcelt pāri vienai, divām vai trim figūriņām, ja rūtiņa, uz kuru to pārceļ, ir tukša. Jāiegūst 61. att. parādītais figūriņu izvietojums.

a) Parādi, kā to var izdarīt, izmantojot 5 gājienus!

b) Vai to var izdarīt, izmantojot tikai 4 gājienus?

8. KLASE

S.8.1. Doti astoņi skaitļi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Sadali tos divās grupās tā, lai pirmās grupas skaitļu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu summu un pirmās grupas skaitļu kvadrātu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu kvadrātu summu!

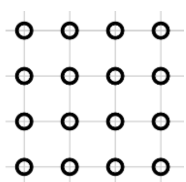
S.8.2. Vienādojumam $ax = b$, kur a un b – kaut kādi doti skaitļi, x – mainīgais, nav atrisinājuma. Cik atrisinājumu ir vienādojumam $bx = a$?

S.8.3. Cik virsotņu ir izliektam daudzstūrim, kuram diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu?

S.8.4. Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 balti punkti (skat. 62. att.).

a) Vai dažus punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?

b) Vai to var izdarīt, ja melnā krāsā jānokrāso tieši septiņi punkti?



62. att.

S.8.5. Uz lapas uzrakstīti vairāki naturāli skaitļi, kas katrs dalās ar 3. Visi šie skaitļi kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi. Kāds ir lielākais iespējamais uzrakstīto skaitļu skaits?

9. KLASE

S.9.1. Kvadrātvienādojuma $3x^2 + 3ax + (x - 1)b = 0$ saknes ir 1 un 2. Noteikt skaitļus a un b.

S.9.2. Vai kvadrātu var sadalīt piecās daļās, no kurām viena ir trijstūris, otra – četrstūris, trešā – piecstūris, ceturtā – sešstūris un piektā – septiņstūris?

S.9.3. Atrast tādu naturālu skaitli n, kam vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- n nedalās ne ar vienu no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- $n - 1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

S.9.4. Četrstūrī $ABCD$ novilkti nogriežņi, kas savieno pretējo malu viduspunktus (skat. 63. att.). Pierādīt, ka iekrāsoto laukumu summa ir puse no četrstūra $ABCD$ laukuma!

63. att.

S.9.5. Futbola turnīrā piedalījās piecas komandas: A, B, C, D, E. Katra ar katru spēlēja vienu spēli. Par uzvaru komanda saņēma 2 punktus, par neizšķirtu 1 punktu, par zaudējumu 0 punktus. Komanda A nezaudēja nevienu spēli, bet B un E savā starpā spēlēja neizšķirti. Turnīra beigās komandai A bija 6 punkti, komandai B – 6 punkti, C – 5 punkti, D – 2 punkti, E – 1 punkts. Noskaidrot, kā beidzās visas turnīra spēles!

NOVADA OLIMPIĀDE

5. KLASE

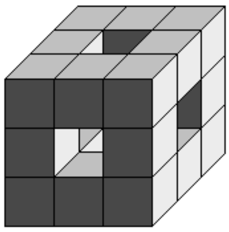
N.5.1. Daļas ir uzrakstītas augošā secībā. Kāds naturāls skaitlis var būt ierakstīts $\square$ vietā?

$$\frac{5}{16};\ \frac{\square}{5};\ \frac{3}{4}$$

N.5.2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).

Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 8; **b)** 18?

N.5.3. No 20 vienādiem kubiņiem, kuriem katras šķautnes garums ir 1 cm, salīmēja 64. att. redzamo figūru, kurai katrā skaldnē trūkst centrālais kubiņš, kā arī iztrūkst pašas figūras centrālais kubiņš. Cik kvadrātiņi, kuriem katras malas garums ir 1 cm, ir nepieciešami, lai aplīmētu visu šo figūru?



64. att.

N.5.4. Vienādi burti apzīmē vienādus skaitļus, dažādi – dažādus. Atrodi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāliek burtu vietā, lai abas dotās vienādības būtu patiesas!

$$A + B = C \cdot D$$

$$A \cdot B = C + D$$

N.5.5. Sadali taisnstūri ar izmēriem 11×13 rūtiņas sešos kvadrātos tā, lai dalījuma līnijas ietu pa rūtiņu līnijām!

6. KLASE

N.6.1. Trīs brāļiem – Rihardam, Haraldam un Olafam – kopā ir 13,20 eiro. Zināms, ka Haraldam ir par 2,10 eiro vairāk nekā Rihardam un par 3,30 eiro mazāk nekā Olafam. Cik naudas ir katram brālim?

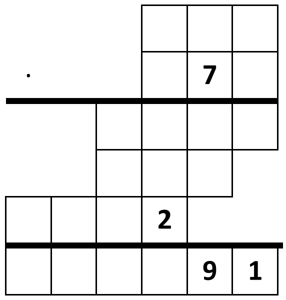
N.6.2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).

Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 9; **b)** 24?

N.6.3. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!

N.6.4. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

N.6.5. Katrā tukšajā kvadrātiņā (skat. 65. att.) ieraksti vienu ciparu tā, lai iegūtu pareizu reizināšanas piemēru! Neviens skaitlis tajā nedrīkst sākties ar 0.



65. att.

7. KLASE

N.7.1. Saldumu veikalā vienas konfektes cena ir 3 centi. Aivaram ir vairāk naudas nekā Bruno, Cildai ir vairāk naudas nekā Aivaram, Dainai – vairāk nekā Cildai.

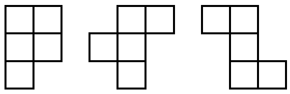
a) Vai Daina noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?

b) Vai Cilda noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?

N.7.2. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

N.7.3. No trīs dotajām figūrām (skat. 66. att.) saliec simetrisku daudzstūri un uzzīmē tā simetrijas asi! Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.

Piezīme. Figūra ir simetriska, ja to var pārlocīt tā, ka tās abas puses sakrīt.


66. att.

N.7.4. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām? Pašu monētu atrast nav nepieciešams.

N.7.5. **a)** Vai var atrast tādus dažādus veselus skaitļus a, b, c un d, ka izpildās vienādības $a + b = cd$ un $ab = c + d$?

b) Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a > 2016$?

8. KLASE

N.8.1. Aprēķini izteiksmes $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-d} + \sqrt{d-a}$ vērtību!

N.8.2. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrs skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

N.8.3. Caur taisnstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu O novilkta taisne PQ tā, ka P atrodas uz AD, Q – uz BC un $PQ = QD$. Pierādīt, ka $DP = 2AP$.

N.8.4. Kādu lielāko skaitu rūtiņu diagonāļu var novilkt 4×4 rūtiņas lielā tabulā, lai šīs diagonāles veidotu slēgtu lauztu līniju? Lauztā līnija nedrīkst pati sevi krustot vai pieskarties.

N.8.5. Smaragda pilsētā naudas vienība ir centi. Tur ir 21% PVN (pievienotās vērtības nodokļa) likme. Tas nozīmē, ka ikvienas pārdodamās preces cenu iegūst, pareizinot kādu veselu skaitu centu (cenu bez PVN) ar skaitli 1,21 un reizinājumu noapaļojot līdz tuvākajam veselajam centu skaitam. Cenu sauc par neiespējamu, ja to nevar iegūt minētajā veidā. Cik pavisam ir neiespējamu cenu no 1 līdz 1000 centiem ieskaitot?

Piemēram, 3 centi ir neiespējama cena, jo $2 \cdot 1{,}21 = 2{,}42$, pēc noapaļošanas 2 centi, savukārt, $3 \cdot 1{,}21 = 3{,}63$, pēc noapaļošanas 4 centi. Tā kā nekāda cita vesela skaitļa starp 2 un 3 nav, tad cenu, kas ir tieši 3 centi, nevar iegūt pēc PVN pievienošanas.

9. KLASE

N.9.1. Nosaki funkciju $y = 2016 - x$ un $y = \frac{2015}{x}$ grafiku krustpunktu koordinātas!

N.9.2. Pierādīt, ka

a) no pieciem naturāliem skaitļiem vienmēr var izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4;

b) var atrast četrus tādus naturālus skaitļus, ka no tiem nevar izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4.

N.9.3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BD. Zināms, ka $AD = DB$ un $AB = 2BC$. Aprēķināt $\sphericalangle BAC$ lielumu!

N.9.4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu, pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir izspēlējis 10 partijas, bet Puszābaks – 21. Cik partijas izspēlēja Uzrocis?

N.9.5. Doti 2016 skaitļi: 1^2; 2^2 ; 3^2; … ; 2015^2; 2016^2. Vai starp šiem skaitļiem var salikt ”$+$” un “$-$” zīmes tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0?

VALSTS OLIMPIĀDE

9. KLASE

V.9.1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^2 ir naturāla skaitļa kubs. Pierādīt, ka arī x^2y ir naturāla skaitļa kubs!

V.9.2. Trijstūrī ABC novilkta mediāna AF, punkts D ir tās viduspunkts. Taisne CD krusto malu AB punktā E. Pierādīt: ja $BD = BF$, tad $AE = DE$!

V.9.3. Vai tabulā, kuras izmēri ir 4×4 rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

V.9.4. Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

V.9.5. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi: virknes pirmais loceklis s_1 ir 2; virknes otrais loceklis s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0; virknes trešais loceklis s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1; virknes ceturtais loceklis s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6. Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50. Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

5. KLASE

A.5.1. Uzraksti dotos skaitļus augošā secībā! Atbildi pamato!

$$DLV; MMXVI; CMXCIV; XXXVII$$

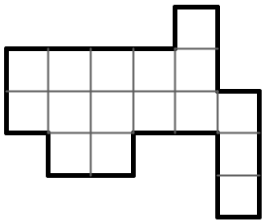
A.5.2. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $14 \cdot a + 2 \cdot b + 1 = 2016$?

A.5.3. Starp dotajiem skaitļiem vienādības kreisajā pusē saliec darbību zīmes un iekavas tā, lai iegūtu patiesu vienādību!

a) 3 3 7 7 = 14

b) 3 3 7 7 = 24

A.5.4. Sadali 67. att. redzamo figūru trīs daļās, no kurām var salikt kvadrātu! Saliekot daļas nedrīkst pārklāties, daļas drīkst pagriezt, bet nedrīkst apgāzt otrādi.

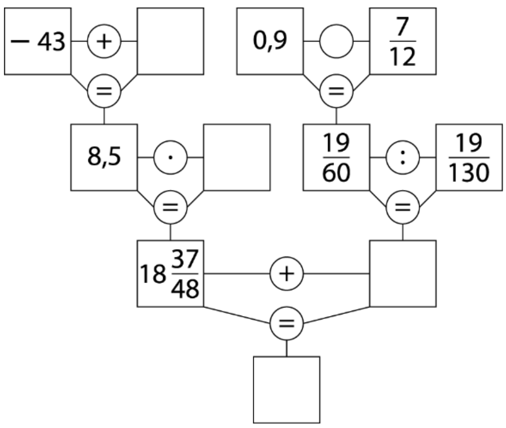


67. att.

A.5.5. Klasē ir 12 skolēni, katrs no tiem nosūtīja īsziņu tieši sešiem citiem saviem klases biedriem. Pierādi, ka noteikti ir tādi divi skolēni, kas nosūtījuši īsziņu viens otram!

6. KLASE

A.6.1. Aplīšos (skat. 68. att.) ieraksti trūkstošās darbību zīmes un kvadrātiņos – trūkstošos skaitļus, lai iegūtu patiesas vienādības! Parādi arī risinājumu!

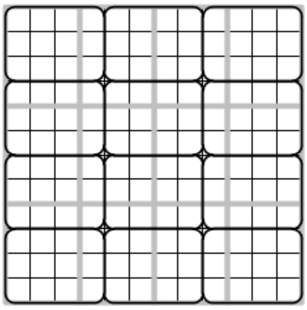


68. att.

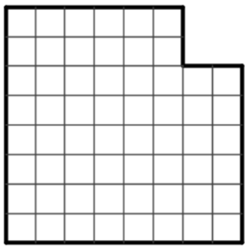
A.6.2. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $14 \cdot a + 15 = 2016 - 6 \cdot b$?

A.6.3. Vairākas tantītes piedalījās sēņošanas sacensībās. Kad sacensību beigās saskaitīja atrastās baravikas, tad izrādījās, ka katrai no divām tantītēm, kurām bija vislielākais baraviku skaits, bija tieši $\frac{1}{5}$ no visu baraviku kopskaita. Savukārt, katrai no piecām tantītēm, kurām bija vismazākais baraviku skaits, bija tieši $\frac{1}{13}$ no visu baraviku kopskaita. Cik pavisam tantītes piedalījās sacensībās?

A.6.4. Kvadrāts ar izmēriem 12×12 rūtiņas divos veidos ir sadalīts taisnstūros ar izmēriem 3×4 rūtiņas (skat. 69. att.): trīs rindās pa četriem taisnstūriem katrā (ar gaiši pelēkajām līnijām) un četrās rindās pa trim taisnstūriem katrā (ar melnajām līnijām). Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso 12×12 rūtiņu kvadrātā, lai katrā gaišpelēkajā un katrā melnajā taisnstūrī būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?



69. att.



70. att.

A.6.5. Sadali 70. att. redzamo figūru trīs vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās! Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt gan pagriezti, gan „apmesti otrādi”.

7. KLASE

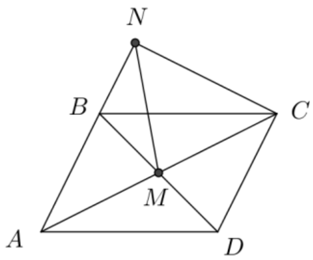
A.7.1. Dota lineāra funkcija $y = 2015x + 2016$.

a) Nosaki dotās funkcijas krustpunktus ar koordinātu asīm!

b) Uzraksti vienādojumu lineārai funkcijai, kuras grafiks nekrusto dotās funkcijas grafiku un iet caur punktu (1; 43)!

A.7.2. Karlsons sev pusdienām nopirka 8 pīrādziņus un 15 magoņmaizītes, bet Brālītis – vienu pīrādziņu un vienu magoņmaizīti. Karlsons par savām pusdienām samaksāja tieši divus eiro (katra maizīte un pīrādziņš maksā veselu skaitu centu). Cik samaksāja Brālītis?

A.7.3. Dots, ka $AB||CD$ un $AD||BC$ (skat. 71. att.). Nogriežņu AC un BD krustpunkts ir M. Uz taisnes AB izvēlēts tāds punkts N, ka $AM = MN$. Pierādīt, ka $\sphericalangle ANC = 90°$.



71. att.

A.7.4. Divi rūķi – Svirpulnieks un Pukstiņš – katru dienu tīra zobus. Katrs lieto savu zobu birsti un katrs sava veida zobu pastas tūbiņas. Katram rūķim viena zobu pastas tūbiņa pietiek veselam skaitam dienu. Ja vienā dienā rūķim beidzas viena zobu pastas tūbiņa, tad nākamajā dienā viņš iesāk tādu pašu jaunu tūbiņu. Svirpulniekam viena zobu pastas tūbiņa pietiek divas dienas ilgāk nekā Pukstiņam. Ja abi sāk jaunas zobu pastas tūbiņas vienā un tajā pašā dienā, tad dienā, kad Pukstiņš pēdējo dienu izmanto trešo zobu pastas tūbiņu, Svirpulnieks pirmo dienu ir iesācis jaunu tūbiņu. Cik dienas katram rūķim pietiek ar vienu zobu pastas tūbiņu?

A.7.5. Kvadrāts sadalīts 12×12 vienādās kvadrātiskās rūtiņās un izkrāsots kā šaha galdiņš. Četrdesmit trijās baltajās rūtiņās sēž pa vienai mušai. Varde lēkā pa kvadrātu, katrā lēcienā šķērsojot divu rūtiņu kopējo malu. Tā nelec caur rūtiņu stūri un nelec rūtiņā, kurā tā jau ir bijusi. Ielecot rūtiņā, kurā sēž muša, varde to apēd. Zināms, ka varde ir bijusi vismaz 100 rūtiņās. Pierādīt, ka varde ir apēdusi vismaz 21 mušu!

8. KLASE

A.8.1. Aprēķini dotās izteiksmes vērtību!

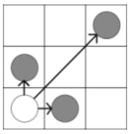
$$\frac{2000016 \cdot 1999984}{5^{12} \cdot 2^{13} - 128}$$

A.8.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, ka $ab(a + 43b) = 434343$?

A.8.3. Zināms, ka skaitlis dalās ar 2016 un ka visi tā cipari ir dažādi. Kāds ir lielākais ciparu skaits, kas var būt šajā skaitlī?

A.8.4. Dota taisnleņķa trapece $ABCD$, kuras īsākā sānu mala ir BC. Malu AD un CD viduspunkti attiecīgi ir M un K, bet diagonāles AC viduspunkts ir N. Pierādīt, ka $\Delta MNB = \Delta CKM$.

A.8.5. Divi spēlētāji spēlē spēli uz $N \times N$ rūtiņas liela laukuma. Sākumā laukuma kreisajā apakšējā rūtiņā atrodas spēļu kauliņš. Katrā gājienā spēļu kauliņu drīkst pārvietot vai nu vienu lauciņu pa labi, vai vienu lauciņu uz augšu, vai arī divus lauciņus pa diagonāli uz augšu pa labi (skat. 72. att., kur kauliņa sākumpozīcija apzīmēta ar baltu, bet atļautie gājieni – ar pelēkiem aplīšiem). Kauliņu nedrīkst pārvietot ārpus laukuma robežām. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Zaudē spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar, ja **a)** $N = 7$, **b)** $N = 8$?



72. att.

9. KLASE

A.9.1. Atrisināt nevienādību $\frac{x-1}{x^2-4} \leq 0$.

A.9.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x, y un z, ka $x^3 - 2016xyz = 10$?

3, bet $10 \equiv 2 \pmod{4}$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

A.9.3. Dots taisnstūris $ABCD$. Malas AB viduspunkts ir M. Zināms, ka uz malas BC var izvēlēties tādu punktu N, ka $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN = 30°$. Pierādīt, ka trijstūris CDM ir vienādmalu!

A.9.4. Naturālu skaitļu virknes 1; 2; 2; 4; 8; 32; 48; ... katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2016. loceklis?

A.9.5. Sivēnam ir 10 podi ar medu, kas pēc kārtas sanumurēti ar skaitļiem no 1 līdz 10. Kādu dienu viņš uzzināja, ka Vinnijs Pūks slepeni ir izēdis četrus no tiem, pie tam to numuri veido aritmētisko progresiju. Katra poda saturu Sivēns var pārbaudīt. Pierādīt, ka viņš var noskaidrot, kuri tieši ir izēstie podi, pārbaudot ne vairāk kā četrus podus!

IETEIKUMI

TIK VAI… CIK?

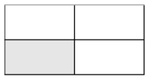
1. KĀRTA

T.1.1. Turpini: $1000 - 100 + 10 - 1 = 900 + 10 - 1 =$

T.1.2. Aprēķini katras vienādības kreisās puses vērtību un salīdzini to ar skaitli vienādības labajā pusē! Ja abi skaitļi sakrīt, tad vienādība ir patiesa.

T.1.3. 4.a klases skolēni kopā apēda 40 kg. Vai abu pārējo klašu skolēni apēda vairāk?

T.1.4. Ņem palīgā taisnstūri: cik reižu palielināsies taisnstūra laukums (reizinājums), ja katras malas garumu (reizinātāju) palielina divas reizes (skat. 73. att.)?



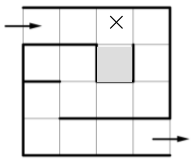
73. att.

T.1.5. Turpini ierakstīt skaitļus tukšajās rūtiņās!

1	0	0	1	1	2				

T.1.6. Dotā figūra satur 25 rūtiņas. Cik rūtiņas ir iekrāsotas? Kāda daļa no visām tā ir?

T.1.7. Lai nokļūtu iekrāsotajā rūtiņā (skat. 74. att.), Alisei ar $\times$ atzīmētajā rūtiņā ir jānonāk divas reizes. Kurās rūtiņās vēl Alisei noteikti ir jānonāk divas reizes?



74. att.

T.1.8. Punktētā līnija sastāv no trīs katra kvadrāta malām, un kvadrātam visu malu garumi ir vienādi. Cik reižu punktētā līnija ir garāka nekā nepārtrauktā līnija?

T.1.9. Pārbaudi, kurš no atbilžu variantiem atbilst uzdevuma nosacījumiem!

T.1.10. Parādi piemēru, kurā parādīts, ka nepietiek izņemt 12 konfektes, lai noteikti būtu izņemtas visu trīs garšu konfektes!

2. KĀRTA

T.2.1. Ievēro darbību secību!

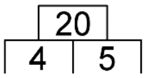
T.2.2. $2015 : 10 = 201, atl.$ ______

T.2.3. No pirmās figūras var izlocīt kubu, bet no otrās figūras – nevar. Vai no pēdējām divām figūrām var izlocīt kubu? Vari izgriezt dotās figūras un mēģināt izlocīt kubu.

T.2.4. Ja trīs rūķi dienā apēd p kilogramus piparkūku, tad viens rūķis dienā apēd $p : 3$ kilogramus piparkūku. Cik kilogramus piparkūku apēd septiņi rūķi vienā dienā?

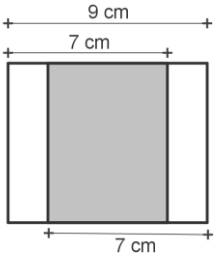
T.2.5. **a)** Cik jāpieskaita pie skaitļa 53, lai iegūtu 60? **b)** Izpildot atņemšanu iegūstam izteiksmi $6 \cdot (\bigcirc + 4) = 54.$ Ar kādu skaitli jāreizina skaitlis 6, lai iegūtu 54?

T.2.6. Skat. 75. att. aizpildītas augšējās divas rindiņas.



75. att.

T.2.7. Aprēķini katras baltās joslas platumu un garumu (skat. 76. att.)!



76. att.

T.2.8. Pamato, ka Nika teiktais “Mēs abi esam meļi” nevar būt patiesība!

3. KĀRTA

T.3.1. Atceries, ka $1\ hl = 100\ l$ un $1\ l = 1000\ ml$.

T.3.2. Paula no skolas uz mājām var aiziet astoņos dažādos veidos. Uzraksti visus iespējamos dažādos ceļus, izmantojot dotos apzīmējumus!

T.3.3. Gadījumos 1) un 2) atrodi burta vērtību, ar kuru dotā vienādība ir patiesa! Gadījumā 3) pamato, ka nav iespējams atrast tādu burta vērtību, lai dotā vienādība būtu patiesa!

T.3.4. Abās nevienādībās noņem vienu sērkociņu no skaitļa 8.

T.3.5. Tā kā katra kvadrāta perimetru veido četru vienādu malu garumu summa, tad abu iekrāsoto kvadrātu perimetru summu, dalot ar 4, iegūsim vienas mazā kvadrāta malas un vienas lielā kvadrāta malas garumu summu, tas ir, $80 : 4 = 20$ (cm).

T.3.6. Mazāk kastes būs nepieciešamas tad, ja pēc iespējas vairāk šokolādes tiks sapakotas lielajās kastēs pa 12 šokolādēm katrā. Vai varēs izmantot 12 lielās kastes?

T.3.7. Apskati divus gadījumus: 1) pēc stundas velosipēdisti vēl nebija viens otru sastapuši; 2) pēc stundas velosipēdisti jau bija pabraukuši viens otram garām.

4. KĀRTA

T.4.1. Ievēro darbību secību!

T.4.2. **a)** Cik jāpieskaita skaitlim 5, lai iegūtu 7? **b)** Cik jāpieskaita skaitlim 5, lai iegūtu 8?

T.4.3. Cik vienādās daļās sadalīta katra figūra? Cik no tām ir iekrāsotas?

T.4.4. Gadījumos b) un c) neaizmirsti, ka ar  apzīmēti 1000 iedzīvotāji!

T.4.5. Sāc *piramīdu* aizpildīt no pašas augšējās rindas! Piemēram, $5102 - 2016 = 3086$.

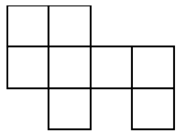
T.4.6. Kāda daļa no arbūza ir iekrāsota (skat. 77. att.)? Kāda ir iekrāsotās daļas masa?

77. att.

T.4.7. Pārveido visas mērvienības uz m/min!

T.4.8. Egils no melnās mājiņas baltajā mājiņā var nokļūt piecos dažādos veidos. Parādi visus dažādos veidus!

T.4.9. Ievēro, ka figūras perimetrs nemainīsies, ja augšējās un apakšējās rindas kvadrātus pabīdīsim (skat. 78. att.).



78. att.

T.4.10. Kādu skaitli – pāra vai nepāra – vienmēr iegūst vienādības kreisajā pusē?

T.4.11. Apskati divus iespējamos gadījumus: 1) Gastons teica patiesību; 2) Gastons meloja.

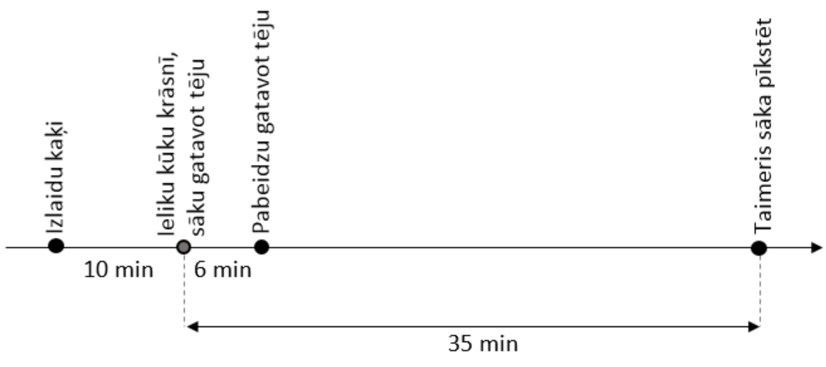
JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

1. KĀRTA

J.1.1. Ievērojam, ka L ir skaitļa pirmais cipars, tātad tas nav 0. Tā kā dažādi cipari apzīmē dažādus burtus un pārnesums x no iepriekšējās skaitļu šķiras nav lielāks kā 2, tad $S + B + x < 20$ un vienīgā iespēja, ka $L = 1$. Cik ir $\bar{\mathrm{A}} + S$?

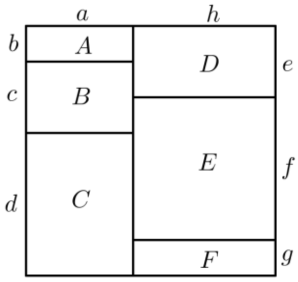
$$\begin{array}{cccccc} & x & & & & \\ & & \text{M} & \text{E} & \check{\text{Z}} & \bar{\text{A}} \\ & \text{S} & \bar{\text{E}} & \text{N} & \text{E} & \text{S} \\ & \text{B} & \text{E} & \text{K} & \text{A} & \text{S} \\ \hline \text{L} & \text{I} & \text{E} & \text{L} & \text{A} & \text{S} \end{array}$$

J.1.2. Turpini attēlot doto shematiski (skat. 79. att.)!



79. att.

J.1.3. Kvadrātveida lapas malas garumu apzīmē ar x, mazo taisnstūru malas apzīmē tā, kā parādīts 80. att. Izsaki mazo taisnstūru perimetru summu, izmantojot ieviestos apzīmējumus!



80. att.

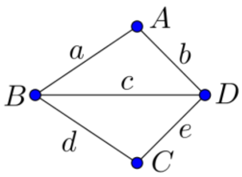
J.1.4. **a)** Ievēro, ka 177 dalās ar 3. **b)** Iespējami trīs gadījumi, kur varēja trāpīt trešā šautriņa: sektora vienkāršajā vērtībā, sektora divkāršajā vērtībā vai sektora trīskāršajā vērtībā. Katrā no šiem gadījumiem atrodi visas iespējas, kur jātrāpa šautriņām, lai kopējais iegūto punktu skaits būtu 137.

J.1.5. Taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $3 \times 2 \times 2$ var salikt no tetrakubiem 1) Ǝ, O un L; 2) Ǝ, T un C; 3) E, T un C; 4) Ǝ, E un L. Lai vieglāk atrisināt šo uzdevumu, tetrakubus vari izveidot, piemēram, no plastilīna.

2. KĀRTA

J.2.1. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $1 + 2 + \cdots + 19 = 190$. Tā kā ir piecas vertikālās joslas, un tajās ierakstīto skaitļu summām jābūt vienādām, tad iegūstam, ka katrā joslā ierakstīto skaitļu summa ir $190 : 5 = 38$.

J.2.2. Kalnu skaitu katrā takā apzīmējam ar a, b, c, d, e (skat. 81. att.). Cik dažādu maršrutu ved no A uz D? Izmantojot ieviestos apzīmējumus, uzraksti sakarības, kas apraksta kalnu skaitu katrā no šiem maršrutiem! Novērtē, kurā maršrutā ir mazāk kalnu!



81. att.

J.2.3. Ievēro, ka sākumā kastē ir nepāra skaits balto bumbiņu! Aplūko, kā mainās melno un balto bumbiņu skaits kastē pēc katras divu bumbiņu izvilkšanas!

J.2.4. **a)** Meklētā sešciparu skaitļa pirmie trīs cipari ir 9, 7, 3. **b)** Vai pirmskaitļa pēdējais cipars var būt 8? Vai skaitļa kvadrāta pēdējais cipars var būt 8? **c)** Cik ciparu var būt lielākajam šādam skaitlim? Kur var atrasties cipars 2?

J.2.5. **a)** Rakstu, kuram ir vertikālā simetrijas ass, bet nav horizontālā simetrijas ass, skat. 82. att. Izveido vēl vienu! **b)** Pamato, ka tas nav iespējams! Izmanto to, ka izveidotā flīžu raksta simetrijas asis ir arī paša kvadrāta simetrijas asis!

82. att.

3. KĀRTA

J.3.1. Var ievērot, ka ceļā noteikti jāiekļauj iekrāsotās rūtiņas (skat. 83. att.). Tā kā tajās ierakstīto skaitļu summa ir $9 + 11 = 20$, tad pārējo apstaigātajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt $100 - 20 = 80$. Tālāk vari izmantot stratēģiju “mini un pārbaudi”.

Starts				
9	13	7	8	10
9	13	10	14	10
13	11	12	13	11
				Finišs

83. att.

J.3.2. Sadali skaitli 36 pirmreizinātājos! Apskati gadījumus, kāds var būt mazākais no trim dažādiem naturāliem skaitļiem, kuru reizinājums ir 36.

J.3.3. **a)** Virknes pirmie trīs locekļi doti tabulā. Aprēķini vēl divus nākamos virknes locekļus!

1.	2.	3.	4.	5.
25	$2^2 + 5^2 = 29$	$2^2 + 9^2 = 85$		

b) Turpini virkni, līdz iegūsti kādu skaitli, kas jau iepriekš ir bijis virknē! Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties. Ik pēc cik skaitļiem virknes locekļi atkārtojas?

J.3.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: 1) atrast lielāko nogriežņu skaitu, ko taisne var krustot un parādīt piemēru; 2) pamatot, ka vairāk nogriežņu taisne krustot nevar. Apskati visus gadījumus, cik punktu var atrasties katrā pusē no taisnes un cik nogriežņus katrā no šiem gadījumiem tā krustos!

J.3.5. Kvadrāta centrā novieto 84. att. parādīto kartīti.

84. att.

4. KĀRTA

J.4.1. Uzzīmē maršrutu, kurā katras krāsas putns ir apskatīts tieši divas reizes!

J.4.2. **a)** Jā, var. Parādi piemēru! **b)** Parādi piemēru, ka var izmitināt 17 govis, un pamato, ka vairāk kā 17 govis izmitināt nevar! **c)** Parādi piemēru, ka var izmitināt 23 zirgus, un pamato, ka vairāk kā 23 zirgus izmitināt nevar!

J.4.3. Apzīmējot sarkanās banknotes vērtību ar s, bet zaļās – ar z, iegūst $3z + 8s = 46$ un $8z + 3s = 31$. Kāda ir 11 zaļu un 11 sarkanu banknošu kopējā vērtība? Kāda ir vienas zaļas un vienas sarkanas banknotes kopējā vērtība?

J.4.4. Anša PIN kodu apzīmē ar N. Tā kā N dalot ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 atlikumā dod 1, tad skaitlis $(N - 1)$ dalās ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9. Tas nozīmē, ka $(N - 1)$ dalās ar šo skaitļu mazāko kopīgo dalāmo. Kāds ir skaitļu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9 mazākais kopīgais dalāmais?

J.4.5. Parādi piemēru, ka uz galda var atrasties septiņas kastītes. Pamato, ka vairāk kastītes uz galda atrasties nevar: pieņem, ka uz galda atrodas vairāk nekā septiņas kastītes, un atrodi pretrunu, kas pamatotu, ka tavs pieņēmums ir aplams!

5. KĀRTA

J.5.1. Dažas pareizi iekrāsotas rūtiņas skat. 85. att. Turpini!

	2	2		2	3		3
2			3				
	3	3		2	3		3
3			3	3		2	2
	3	4			1	2	
1				3			
2	4	4	3		2		
			1	1		2	1

85. att.

J.5.2. Atrodi pārējās septiņas parastās daļas, ja trīs no desmit daļām ir $\frac{17}{3}; \frac{13}{2}; \frac{11}{6}$.

J.5.3. Ievēro, ka $x^2 \cdot y = 2016$ jeb $y = \frac{2016}{x^2}$. Sadali skaitli 2016 pirmreizinātājos un atrodi visus tādus skaitļus x, kuriem 2016 dalās ar x^2.

J.5.4. Kartē ir attēlotas četras ielas un septiņi krustojumi, kas atbilst patiesībai. Izmantojot to, ka divām taisnēm var būt ne vairāk kā viens krustpunkts, nosaki, kura iela ir līkumaina!

J.5.5. **a)** Sadali kvadrātu sešos kvadrātos tā, lai no iegūtajiem kvadrātiem viens kvadrāts ir lielāks nekā pieci pārējie kvadrāti! **b)** Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadali 1006 vienāda garuma nogriežņos! Uzzīmē mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis ir mala tieši vienam no šiem kvadrātiem! Cik kvadrāti ir iegūti? Kā jāsadala atlikusī dotā kvadrāta daļa? **c)** Apskati divus gadījumus: 1) ja n ir nepāra skaitlis; 2) ja n ir pāra skaitlis. Katram no šiem diviem gadījumiem apraksti plānu, kā jādala dotais kvadrāts!

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

1. NODARBĪBA

P.1.1. Katrā gājienā skaties uz kubu no tās flīžu laukuma malas, kurā ierakstīti numuri 1, 24, 23, 22, 21, 20, 19 un katrā laucīņā pieraksti, kur tajā brīdī atrodas nokrāsotā skaldne: raksti V, ja tā atrodas kuba virspusē, A – ja tā atrodas kuba apakšpusē, P – ja priekšpusē, ar M – ja mugurpusē, L – ja labajā pusē, K – ja kreisajā pusē. Lai vieglāk atrisināt šo uzdevumu, izveido kuba modeli un pārbaudi praktiski!

P.1.2. Izmanto, ka veiktais attālums ir vienāds ar kustības ātruma un ceļā pavadītā laika reizinājumu. Ievēro, ja ķermenis, kura ātrums ir m, kustas pa eskalatoru, kura ātrums ir n, tad kustības ātrums eskalatora kustības virzienā ir vienāds ar $m + n$. Izmanto, ka abi cilvēki veica vienādu attālumu, kas ir vienāds ar eskalatora pakāpienu skaitu.

P.1.3. Aplūko divus gadījumus: 1) kas notiktu, ja ceļotāju mestu cietumā, 2) kas notiktu, ja ceļotāju atraidītu.

P.1.4. Apskati divus gadījumus: 1) $y - z = 0$; 2) $y - z \neq 0$.

P.1.5. Noteikti var uzvarēt karalis, kurš savu gājienu izdara otrais. Apraksti otrā karaļa uzvarošo stratēģiju!

2. NODARBĪBA

P.2.1. Sadali sardīnes pa pāriem un salīdzini katra pāra sardīnes – nosaki vieglāko un smagāko sardīni katrā pārī.

P.2.2. Parādi piemērus, ka vienādmalu trijstūri var salikt no komplekta c), d) un e)! Pamato, ka no komplekta a) un b) nav iespējams salikt vienādmalu trijstūri! Izmantojot formulu $S = \frac{a \cdot h}{2}$, kur a – mazā trijstūra mala, h – augstums, kas novilkts pret malu a, izsaki lielā trijstūra laukumu!

P.2.3. Abās ķēdītēs iekļauj vienu vai vairākus tādus posmiņus, kā parādīts 86. att.!

86. att.

P.2.4. Parādi, kā doto izteiksmi pārveidot tā, lai iegūtu $\frac{10^n-1}{81} - \frac{n}{9} = \frac{A-n}{9}$, kur ar A ir apzīmēts $A = \frac{10^n-1}{9}$. Tātad ir jāpierāda, ka $(A - n)$ dalās ar 9. Pierādījumā izmanto divas teorēmas: 1) naturāls skaitlis, dalot to ar 9, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 9; 2) divu veselu skaitļu a un b starpība dalās ar veselu skaitli $k > 0$ tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar k.

P.2.5. Jā, prasītais ir iespējams. Pagriezīsim galdu 14 reizes, katru reizi pagriežot galdu par vienu kartīti uz priekšu. Tālāk izmanto Dirihlē principu (skat. 12. lpp.), lai pamatotu, ka prasītais ir iespējams!

3. NODARBĪBA

P.3.1. Analizē uzdevumu no beigām! Cik lašu Miķelim bija pirms tikšanās ar pēdējo pircēju?

P.3.2. Vienīgā iespēja, ka otrajā rindiņā no augšas ir ierakstīts skaitlis $10 - 4 = 6$, jo $10 + 4 = 14$, bet rūtiņās jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 12. Kuras rūtiņas vēl var aizpildīt, spriežot līdzīgi?

P.3.3. Garākais iespējamais ceļš ir $16 + 64\sqrt{2}$. Parādi piemēru, kā to iegūt! Pamato, ka vēl garāku ceļu nav iespējams iegūt!

P.3.4. Risinājumā izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

P.3.5. Ansītis nedrīkst nosaukt skaitli 4. Pamato, ka gadījumā, ja n ir 1; 2 vai 3 Ansītis vienmēr var uzvarēt, bet gadījumā, ja $n = 4$, Grietiņa vienmēr var uzvarēt.

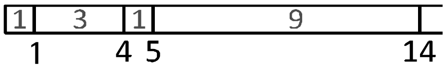
4. NODARBĪBA

P.4.1. Jā, var. Pamato, ka to var izdarīt, rīkojoties šādi: divi cilvēki ar motociklu brauc 55 km, pasažieris izkāpj un pēdējos 5 km iet ar kājām, bet motociklists atgriežas pēc otrā pasažiera, kurš pa šo laiku arī ir gājis ar kājām!

P.4.2. Sāc veidot Ruka namiņa formu no pieciem trijstūriem, kuriem nav kopīgu punktu!

P.4.3. Ievieto izteiksmē vērības $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, lai pakāpeniski pierādītu, ka skaitļi a, b, c, d dalās ar 5.

P.4.4. Pirmās četras iedaļas redzamas 87. att. Kā jābūt izvietotām atlikušajām četrām iedaļām?



87. att.

P.4.5. Sākumā apskati tikai vienu kolonnu! Izdomā algoritmu (plānu), kā panākt, ka visi vienas kolonnas elementi pēc galīga darbību skaita ir 0. Tad atkārto šo algoritmu, lai iegūtu, ka arī visās citās kolonnās ir ierakstīta 0.

5. NODARBĪBA

P.5.1. Izmantojot doto informāciju, iegūst divus vienādojumus $(5x + y) \cdot 60 = V$ un $(10x + y) \cdot 35 = V$, kur ar x apzīmēts tējas daudzums, ko viens cilvēks izdzer vienā minūtē, ar y – tējas daudzums, kas iztvaiko vienā minūtē, ar V – patvāra tilpums. Tā kā abu vienādojumu labās puses ir vienādas, tad vienādas ir arī to kreisās puses. Izsaki mainīgo y!

P.5.2. Lai būtu vieglāk risināt uzdevumu, pakāpeniski aizpildi tabulu: ievelc "x" pie iespējamiem savienojumiem, ievelc "–" pie neiespējamiem savienojumiem!

	1. nams	2. nams	3. nams	4. nams	5. nams	6. nams	Zeltracis	Ogļracis	Meža uzraugs
Antons									
Brencis									
Cukuriņš									
Dāvis									
Emīls									
Foršais									
Zeltracis									
Ogļracis									
Meža uzraugs									

P.5.3. Sagriez doto figūru 7 daļās ar 3 taisniem griezieniem (viens vertikāli un divi pa rūtiņu diagonālēm)!

P.5.4. Aplūko divus gadījumus: 1) $a = b = c$; 2) $a \geq b \geq c$, turklāt visi skaitļi nav vienādi.

P.5.5. Mazākā iespējamā n vērtība ir 26. Parādi piemēru, kā var būt izkrāsoti puzles gabaliņi un pamato, ka n nevar būt mazāks!

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

5. KLASE

S.5.1. Starp skaitļiem 64 un 32 ieraksti "+" zīmi!

S.5.2. Sadali doto četrstūri vairākos trijstūros un aprēķini katra trijstūra laukumu!

S.5.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais piecciparu skaitlis, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, 2) jāpamato, ka lielāku skaitli atrast nevar.

S.5.4. Cik dažādas starpības var iegūt?

S.5.5. Ievēro: ja kādai no mēneša trešdienām ir pāra datums, tad nākamajā nedēļā trešdienai ir nepāra datums, un otrādi!

6. KLASE

S.6.1. Ja skaitlis, dalot ar 11, dod atlikumu 5, tad to var pierakstīt kā $11 \cdot x + 5$. Šādi skaitļi ir 5; 16; 27; 38 utt.

S.6.2. Apskati visas iespējas, kādas divas monētas Makvīns varētu atdot māsai!

S.6.3. Saskaiti, cik ir kvadrātu ar izmēriem 1×1. Kādu izmēru kvadrāti vēl ir redzami attēlā?

S.6.4. Kāds ir lielākais pilno nedēļu skaits gadā?

S.6.5. Parādi, kā kubu var sagriezt prasītajā veidā!

7. KLASE

S.7.1. Atceries, ka lineāram vienādojumam $ax = b$ nav sakņu, ja $a = 0$ un $b \neq 0$.

S.7.2. Izmanto bisektrises definīciju un blakusleņķu īpašību!

S.7.3. Apzīmē doto skaitli ar $\overline{abc}$, $a > b > c$. Aplūko gadījumus, kāda var būt starpība starp otro un trešo ciparu, tas ir, $(b - c)$.

S.7.4. Parādi, kā kubu var sagriezt prasītajā veidā!

S.7.5. **a)** Apraksti vai attēlo, kā prasīto var izdarīt 5 gājienos! **b)** Pierādi, ka četros gājienos prasīto nevar izdarīt! Ievēro, ka sākumā visas trīs baltās figūras atrodas lauciņos, kuros beigās tās neatradīsies. Cik gājieni nepieciešami, lai šīs figūras pārvietotu uz citiem lauciņiem?

8. KLASE

S.8.1. Kāda būs skaitļu summa katrā grupā? Kāda būs skaitļu kvadrātu summa katrā grupā?

S.8.2. Atceries, ka lineāram vienādojumam $ax = b$ nav sakņu, ja $a = 0$ un $b \neq 0$.

S.8.3. Daudzstūra diagonāļu skaitu var aprēķināt pēc sakarības $\frac{m \cdot (m-3)}{2}$, kur m – daudzstūra malu skaits.

S.8.4. **a)** Parādi piemēru, kā prasīto var izdarīt! **b)** Pierādi, ka prasīto nevar izdarīt! Cik ir balto punktu? Cik ir rindu?

S.8.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais skaits skaitļu, ko var uzrakstīt, un jāparāda piemērs, 2) jāpamato, ka vairāk skaitļu nevar uzrakstīt.

9. KLASE

S.9.1. Atceries, ka, ievietojot vienādojuma sakni vienādojumā, iegūst patiesu vienādību!

S.9.2. Parādi, kā kvadrātu sadalīt prasītajā veidā!

S.9.3. Ievēro: ja skaitlis n dalās ar kādu skaitli d $(d \neq 1)$, tad skaitlis $(n - 1)$ nedalās ar d.

S.9.4. Izmanto, ka trijstūriem, kuru pamati ir vienādi un augstumi pret šiem pamatiem ir vienādi, ir vienādi arī laukumi!

S.9.5. Kā spēlēja komanda B, lai savāktu 6 punktus?

NOVADA OLIMPIĀDE

5. KLASE

N.5.1. Nosaki daļu kopsaucēju! Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!

N.5.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais skaitlis, 2) jāpamato, ka vēl mazāku skaitli nevar atrast. **a)** Izmanto dalāmības pazīmi ar 8: skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. **b)** Lai skaitlis dalītos ar 18, tam jādalās gan ar 2, gan ar 9.

N.5.3. Cik kvadrātiņi nepieciešami vienas skaldnes pārklāšanai? Cik kvadrātiņi nepieciešami viena "cauruma" pārklāšanai?

N.5.4. Apskati divu dažādu ciparu iespējamās summas un reizinājumu vērtības!

N.5.5. Kvadrāti var nebūt vienādi.

6. KLASE

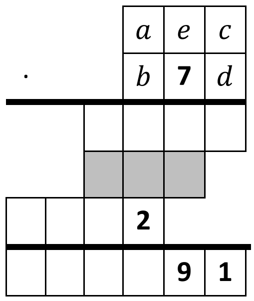
N.6.1. Cik eiro ir Rihardam un Olafam, ja Haraldam ir x eiro?

N.6.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais skaitlis, 2) jāpamato, ka vēl mazāku skaitli nevar atrast. **a)** Izmanto dalāmības pazīmi ar 9. **b)** Lai skaitlis dalītos ar 18, tam jādalās gan ar 3, gan ar 8.

N.6.3. Uzzīmē malas ar garumiem 3 un 4 vienības! Kā var būt novietota mala ar garumu 5 vienības?

N.6.4. Sadali monētas pa pāriem un salīdzini katra pāra monētas – nosaki vieglāko un smagāko monētu katrā pārī!

N.6.5. Apzīmē skaitļus tā, kā parādīts 88. att. Pamato, ka $a = 1$. Ko var secināt par skaitļiem c un d?



88. att.

7. KLASE

N.7.1. **a)** Par vismaz cik centiem Dainai ir vairāk naudas nekā Bruno? **b)** Atrodi pretpiemēru!

N.7.2. Lai skaitlis dalītos ar 99, tam vienlaicīgi jādalās gan ar 9, gan ar 11.

N.7.3. Simetriskā figūra ir divpadsmitstūris.

N.7.4. Katrā svaru kausā liec 6 monētas! Iespējami divi gadījumi: 1) svari ir līdzsvarā, 2) svari nav līdzsvarā.

N.7.5. Jā, šādus skaitļus var atrast, abos gadījumos pietiek parādīt vienu derīgu piemēru.

8. KLASE

N.8.1. Atceries, ka zemsaknes izteiksmei jābūt nenegatīvai, lai varētu aprēķināt kvadrātsaknes vērtību!

N.8.2. Ar ko vēl dalās skaitlis *DUBĻUNNN*?

N.8.3. Pierādi, ka $\Delta AOP = \Delta COQ$.

N.8.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais skaits diagonāļu, ko var novilkt, un jāparāda piemērs, 2) jāpamato, ka vairāk diagonāles novilkt nevar.

N.8.5. Pamato: ja sākumā preču cenas bija dažādas, tad pēc PVN pievienošanas un noapaļošanas tās arī būs dažādas!

9. KLASE

N.9.1. Krustpunktā abām funkcijām sakrīt x un y vērtības, tāpēc krustpunkta abscisu iegūst no vienādojuma $2016 - x = \frac{2015}{x}$.

N.9.2. **a)** Atceries, ka ar dažiem piemēriem nepietiek, vajadzīgs vispārīgs pierādījums, ka prasītais izpildās vienmēr. Ievēro, ka naturāls skaitlis, dalot ar 4, dod atlikumu 0, 1, 2 vai 3, pāra skaitļi dod atlikumu 0 vai 2, nepāra – atlikumu 1 vai 3. **b)** Atrodi četrus skaitļus, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem! Pietiek atrast vienu piemēru.

N.9.3. Malas AB viduspunktu apzīmē ar E! Pierādi, ka $\Delta BED = \Delta BCD$!

N.9.4. Pamato, ka tika izspēlēta tieši 21 partija!

N.9.5. Parādi piemēru, ka zīmes var salikt tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0! Grupē skaitļus pa 8.

VALSTS OLIMPIĀDE

9. KLASE

V.9.1. Apzīmē $xy^2 = z^3$, kur z – naturāls skaitlis, un kāpini abas puses kvadrātā!

V.9.2. Pierādi, ka $\Delta ADB = \Delta DFC$!

V.9.3. **a)** Skaitļus tabulā var ierakstīt. Pietiek parādīt vienu piemēru. Neaizmirsti uzrakstīt arī, kādas starpības iegūst! **b)** Pamato, ka skaitļus tabulā nevar ierakstīt! Izdomā, kādi skaitļi varētu būt blakus skaitlim 7 un 8.

V.9.4. Pamato, ka skaitļa mazākais pirmreizinātājs ir 11, tas ir, pierādi, ka dotais skaitlis dalās ar 11, bet nedalās ar 2, 3, 5 un 7.

V.9.5. Izdomā, pēc kāda *gājiena* tika sasniegts skaitlis 2016.

ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

5. KLASE

A.5.1. Uzraksti dotos skaitļus ar arābu cipariem!

A.5.2. Pamato, ka tādus skaitļus nevar atrast! Ievēro, ka $14 \cdot a$ un $2 \cdot b$ ir pāra skaitļi!

A.5.3. **a)** Izmanto divas “+” un vienu “–“ zīmi! **b)** Izmanto iekavas, “+”, “:” un “·”!

A.5.4. Cik gara ir kvadrāta mala? Sadali doto figūru 3 daļās un parādi, kā no iegūtajām daļām var salikt kvadrātu!

A.5.5. Cik īsziņas pavisam tika nosūtītas? Cik dažādus skolēnu pārus var izveidot no 12 skolēniem?

6. KLASE

A.6.1. Augšējās rindas tukšajā kvadrātiņā jāieraksta skaitlis $51{,}5$, jo $-43 + 51{,}5 = 8{,}5$. Turpini!

A.6.2. Pamato, ka tādus skaitļus nevar atrast! Ievēro, ka $14 \cdot a$ un $6 \cdot b$ ir pāra skaitļi!

A.6.3. Kādu daļu no visa baraviku kopskaita salasīja citas tantītes (ne tās, kuras salasīja visvairāk vai vismazāk baraviku)?

A.6.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais iekrāsoto rūtiņu skaits un jāparāda piemērs, kā rūtiņas iekrāsot, 2) jāpamato, ka mazāk rūtiņu iekrāsot nevar.

A.6.5. Cik rūtiņu ir katrā no trim daļām?

7. KLASE

A.7.1. **a)** Atceries, ka funkcijas grafiks krusto y asi punktā, kura abscisa $x = 0$, un funkcijas grafiks krusto x asi punktā, kura ordināta $y = 0$. **b)** Lai lineāru funkciju grafiki nekrustotos, tiem jābūt paralēliem. Kādi ir paralēlu taišņu virziena koeficienti?

A.7.2. Atrodi visas iespējamās vērtības, cik samaksāja Brālītis, un pamato, ka citu nav! Apzīmē pīrādziņu cenu centos ar p un magoņmaizīšu cenu centos ar m, uzraksti un atrisini vienādojumu!

A.7.3. Pamato, ka $\Delta ABD = \Delta CDB$ un $\Delta AMD = \Delta CMB$. Izmanto vienādsānu trijstūra īpašības!

A.7.4. Pukstiņam viena tūbiņa pietiek n dienām. Cik dienās Svirpulnieks izlieto vienu tūbiņu? No dotā izriet, ka $(3n-1)$-ajā dienā Svirpulnieks ir pabeidzis kārtējo zobu pastas tūbiņu. Cik tūbiņas viņš ir izlietojis?

A.7.5. Ievēro, ka varde ir pamīšus baltās un melnās rūtiņās! Vismaz cik baltas rūtiņas tā ir apmeklējusi?

8. KLASE

A.8.1. Ievēro, ka $2000016 \cdot 1999984 = (2000000 + 16)(2000000 - 16)$. Izmanto formulu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Izmanto pakāpju īpašību $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

A.8.2. Noskaidro kreisās puses izteiksmes vērtību (paritāti), apskatot divus gadījumus: 1) ja a vai b ir pāra skaitlis, 2) ja a un b abi ir nepāra skaitļi!

A.8.3. Pamato, kāpēc meklētajam skaitlim nav vairāk kā 10 cipari! Atrodi vienu derīgu piemēru!

A.8.4. Ievēro, ka nogrieznis MN ir trijstūra CAD viduslīnija! Pamato, ka NM atrodas uz malas BC vidusperpendikula! Izmanto nogriežņa viduslīnijas un vidusperpendikula īpašības!

A.8.5. Analizē spēli no beigām!

9. KLASE

A.9.1. Lai atrisinātu doto nevienādību, izmanto Intervālu metodi vai doto nevienādību pārraksti ekvivalenti kā divas nevienādību sistēmas!

A.9.2. Apskati dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 4.

A.9.3. Pietiek pierādīt, ka $MD = CD$.

A.9.4. Turpini rēķināt virknes locekļus, kamēr saskati kādu sakarību (virknes elementi sāk atkārtoties)!

A.9.5. Ievēro, ka attiecīgās progresijas diference d var būt tikai 1, 2 vai 3. Pierādi, ka Sivēns var izdomāt atbildi, pārbaudot 4., 5., 6. podu un vēl vienu podu!

ATRISINĀJUMI

TIK VAI… CIK?

1. KĀRTA

T.1.1. Aprēķini $1000 - 100 + 10 - 1 =$

A 111 **B** 900 **C** 909 **D** 990 **E** 999

Atrisinājums. C $1000 - 100 + 10 - 1 = 900 + 10 - 1 = 910 - 1 = 909$

T.1.2. Kura no dotajām vienādībām ir patiesa?

A $0 \cdot 9 + 9 \cdot 0 = 9$ **B** $1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 = 18$ **C** $2 \cdot 7 + 7 \cdot 2 = 27$
D $3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 36$ **E** $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 45$

Atrisinājums. D Aprēķinot katras vienādības kreisās puses vērtību, iegūstam A) $0 \neq 9$; B) $16 \neq 18$; C) $28 \neq 27$; D) $36 = 36$; E) $40 \neq 45$. Tātad patiesa ir vienādība $3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 36$.

T.1.3. Skolas "Veselības nedēļā" 4. klašu skolēni vāca datus, cik kilogramus ābolu un burkānu tie nedēļas laikā apēd. Tabulā attēlots, cik kilogramus ābolu un burkānu kopā apēda katras klases skolēni. Kuras klases skolēni kopā apēda visvairāk ābolus un burkānus?

	4.a	**4.b**	**4.c**
Burkāni	15	10	4
Āboli	25	25	35

A 4.a **B** 4.b **C** 4.c **D** ābolus **E** nevar noteikt

Atrisinājums. A 4.a klases skolēni kopā apēda 40 kg, 4.b klases skolēni apēda 35 kg, 4.c klases skolēni apēda 39 kg. Tātad visvairāk ābolus un burkānus apēda 4.a klases skolēni.

T.1.4. Kā mainīsies reizinājums, ja abus reizinātājus palielina divas reizes?

A palielināsies par 2 **B** palielināsies 2 reizes **C** palielināsies par 4
D palielināsies 4 reizes **E** cita atbilde

Atrisinājums. D Ja katru reizinātāju palielina 2 reizes, tad reizinājums palielinās $2 \cdot 2 = 4$ reizes.

T.1.5. Pirmajās trīs rūtiņās ierakstīti skaitļi 1, 0, 0 (skat. 89. att.). Katrā nākamajā rūtiņā ieraksta skaitli, kuru iegūst, saskaitot iepriekšējās trīs rūtiņās ierakstītos skaitļus. Kāds skaitlis būs ierakstīts iekrāsotajā rūtiņā?

A 0 **B** 1 **C** 13 **D** 24 **E** cits skaitlis

1	0	0							

89. att.

Atrisinājums. D Iekrāsotajā rūtiņā būs ierakstīts skaitlis 24 (skat. 90. att.).

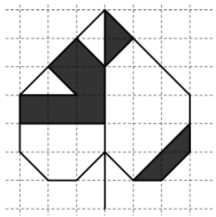
1	0	0	1	1	2	4	7	13	**24**

90. att.

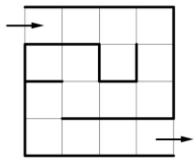
T.1.6. Kāda daļa no 91. att. dotās figūras ir iekrāsota?

A $\frac{4}{25}$ **B** $\frac{8}{25}$ **C** $\frac{25}{8}$ **D** 8 **E** cita atbilde

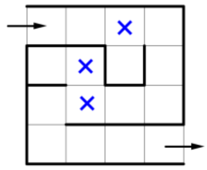
Atrisinājums. **B** Dotā figūra satur 25 rūtiņas, iekrāsotas ir 8 rūtiņas, tātad iekrāsotas ir $\frac{8}{25}$ no figūras.



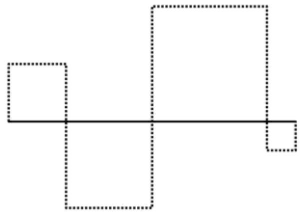
91. att.



92. att.



93. att.



94. att.

T.1.7. Alisei jāiziet caur labirintu, katrā rūtiņā nonākot vismaz vienu reizi (skat. 92. att.). Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kurās viņa ir bijusi vairāk nekā vienu reizi?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 5

Atrisinājums. **D** Tā kā Alisei katrā rūtiņā ir jānonāk vismaz vienu reizi, tad 93. att. atzīmētajās rūtiņās Alise būs bijusi vairāk nekā vienu reizi (divas reizes). Tātad mazākais rūtiņu skaits, kurās Alise ir bijusi vairāk nekā vienu reizi, ir 3 rūtiņas.

T.1.8. Visi 94. att. dotie četrstūri ir kvadrāti. Kāds ir punktētās līnijas kopējais garums, ja nepārtrauktās līnijas garums ir 17 cm?

A 17 cm **B** 34 cm **C** 51 cm **D** 68 cm **E** nevar noteikt

Atrisinājums. **C** Tā kā punktētā līnija sastāv no trīs katra kvadrāta malām un kvadrātam visu malu garumi ir vienādi, tad punktētās līnijas garums ir trīs reizes garāks nekā nepārtrauktās līnijas garums un tas ir $17 \cdot 3 = 51$ cm.

T.1.9. Gatis un Artis dārzā salasīja ābolus. Gatis teica: “Dod man vienu ābolu no savējiem, tad man būs divreiz vairāk ābolu nekā tev.” Artis atbildēja: “Dod man vienu no saviem āboliem, tad mums abiem būs vienāds skaits ābolu.” Cik ābolus salasīja Gatis?

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** cita atbilde

Atrisinājums. **D** Pareizo atbildi var iegūt, piemēram, pārbaudot katru atbilžu variantu (skat. tabulā). Vienīgais variants, kad pēc Gata un Arta teiktā sakrīt, cik ābolu Artim bija sākumā, ir tad, ja Gatim sākumā bija 7 āboli.

Gatim sākumā	2	3	5	7
Gatis teica: “Dod man vienu ābolu no savējiem, tad man būs divreiz vairāk ābolu nekā tev.”	$2+1=2\cdot x$ $x=1\frac{1}{2}$	$3+1=2\cdot x$ $x=2$	$5+1=2\cdot x$ $x=3$	$7+1=2\cdot x$ $x=4$
Artim sākumā	$1\frac{1}{2}+1=2\frac{1}{2}$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=\mathbf{5}$
Artis atbildēja: “Dod man vienu no saviem āboliem, tad mums abiem būs vienāds skaits ābolu.”	$2-1=y$ $y=1$	$3-1=y$ $y=2$	$5-1=y$ $y=4$	$7-1=y$ $y=6$
Artim sākumā	$1-1=0$	$2-1=1$	$4-1=3$	$6-1=\mathbf{5}$

T.1.10. Anetei kabatā ir 8 ķiršu želejas konfektes, 4 ābolu želejas konfektes un 4 zemeņu želejas konfektes. Kāds ir mazākais skaits konfekšu, kas jāizņem no kabatas, lai noteikti būtu izņemta katras garšas konfekte?

A 3 **B** 4 **C** 8 **D** 9 **E** 13

Atrisinājums. **E** Jāizņem vismaz 13 konfektes. Ja ir izņemtas ne vairāk kā 12 konfektes, tad var gadīties, ka ir paņemtas, piemēram, 8 ķiršu želejas konfektes un 4 ābolu želejas konfektes.

2. KĀRTA

T.2.1. Aprēķini $98 + 2 \cdot 34 - 24 =$

A 118 **B** 142 **C** 316 **D** 1000 **E** 3376

Atrisinājums. **B** $98 + 2 \cdot 34 - 24 = 98 + 68 - 24 = 166 - 24 = 142$

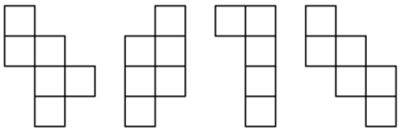
T.2.2. Kāds ir atlikums, skaitli 2015 dalot ar 10?

A 0 **B** 1 **C** 5 **D** 10 **E** 15

Atrisinājums. **C** $2015 : 10 = 201, atl. 5$

T.2.3. No kartona izgrieza četras 95. att. redzamās figūras. No cik izgrieztajām figūrām var izlocīt kubu?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4



95. att.

Atrisinājums. **C** Kubu var izlocīt no pirmās un ceturtās figūras.

T.2.4. Trīs rūķi dienā apēd p kilogramus piparkūku. Cik kilogramus piparkūku apēd septiņi rūķi d dienās?

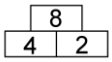
A $p \cdot 7 \cdot d$ **B** $p : 3 \cdot 7$ **C** $p \cdot 3 \cdot d \cdot 7$ **D** $3 : p \cdot 7 \cdot d$ **E** $p : 3 \cdot 7 \cdot d$

Atrisinājums. **E** Viens rūķis dienā apēd $p : 3$ kilogramus piparkūku. Septiņi rūķi vienā dienā apēd $p : 3 \cdot 7$ kilogramus piparkūku. Tātad septiņi rūķi d dienās apēd $p : 3 \cdot 7 \cdot d$ kilogramus piparkūku.

T.2.5. Aplītī ieraksti skaitli, lai dotā vienādība būtu patiesa!

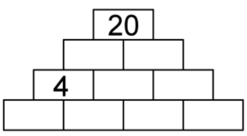
$$14 : \bigcirc + 53 = 60 \qquad (82 - 76) \cdot (\bigcirc + 4) = 54$$

Atrisinājums. $14 : 2 + 53 = 60$ un $(82 - 76) \cdot (5 + 4) = 54$.

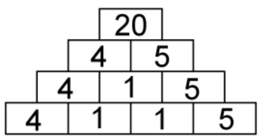
T.2.6. Aizpildi tukšos lodziņus (skat. 96. att.) tā, lai katru divu blakus esošo skaitļu reizinājums ir virs tiem uzrakstītais skaitlis! Piemēram, 

, jo $4 \cdot 2 = 8$.

Atrisinājums. Risinājumu skat. 97. att.



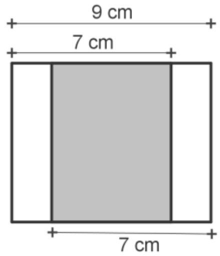
96. att.



97. att.

T.2.7. No papīra izgrieza divus vienādus kvadrātus, kuru malas garums ir 7 cm. Tos uzlika vienu otram virsū tā, ka izveidojas taisnstūris (skat. 98. att.), kura vienas malas garums ir 7 cm, bet otras malas garums ir 9 cm. Aprēķini abu kvadrātu kopīgās (iekrāsotās) daļas perimetru!

98. att.



99. att.

Atrisinājums. Dotajiem kvadrātiem un taisnstūrim ir vienāds platums, tātad arī kopīgās daļas platums ir 7 cm. Tā kā kvadrātus salika tā, ka tie pārklājas, tad kopīgās daļas garums ir $9-(9-7)\cdot 2=9-2\cdot 2=9-4=5$ cm (skat. 99. att.). Līdz ar to kopīgās daļas perimetrs ir $(7+5)\cdot 2=12\cdot 2=24$ cm.

T.2.8. Sniegotajā ciemā dzīvo tikai divas ģimenes: Meļi un Patieši. Meļu ģimene vienmēr melo, bet Patiešu ģimene vienmēr saka patiesību. Uz ielas stāv divi zēni – Niks un Niklāvs. Niks saka: “Mēs abi esam Meļi.” No kuras ģimenes ir Niks? No kuras ģimenes ir Niklāvs?

Atrisinājums. Ja Nika teiktais “Mēs abi esam meļi” ir patiesība, tad Niks ir no Meļu ģimenes, bet Meļu ģimene vienmēr melo, tātad Niks nevar teikt patiesību. No tā izriet, ka Niks melo un tāpēc viņš ir no Meļu ģimenes. Tā kā Niks melo, tad abi zēni nav no Meļu ģimenes, līdz ar to Niklāvs ir no Patiešu ģimenes.

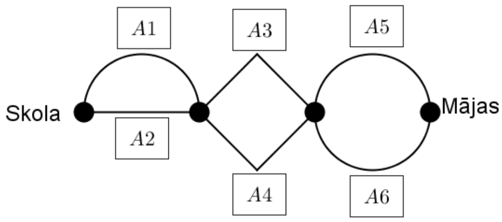
3. KĀRTA

T.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki litros!

$$\frac{1}{2}\,hl\ +500\,ml\cdot 2+48\,l=$$

Atrisinājums. $\frac{1}{2}\,hl\ +500\,ml\cdot 2+48\,l=50\,l+1000\,ml+48\,l=50\,l+1\,l+48\,l=99\,l$

T.3.2. Cik dažādos veidos Paula no skolas var aiziet uz mājām (skat. 100. att.)? Uzraksti visus iespējamos ceļus, izmantojot dotos apzīmējumus!



100. att.

Atrisinājums. Paula no skolas uz mājām var aiziet astoņos dažādos veidos:

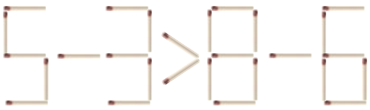
1) A1; A3; A5; 2) A1; A3; A6; 3) A1; A4; A5; 4) A1; A4; A6; 5) A2; A3; A5;
6) A2; A3; A6; 7) A2; A4; A5; 8) A2; A4; A6.

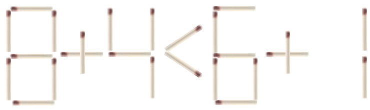
T.3.3. Vai var atrast tādu skaitli, ko var ielikt burta vietā, lai dotā vienādība būtu patiesa? Ja var, tad parādi piemēru, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!

		Risinājums
1)	$x + x = 0$	
2)	$y \cdot (1 - y : y) = 0$	
3)	$a : a = 10$	

Atrisinājums. 1) Jā, var, ja $x = 0$, tad $0 + 0 = 0$. **2)** Jā, var, piemēram, ja $y = 1$, tad $1 \cdot (1 - 1 : 1) = 0$. (*Piezīme*. Burta y vietā var būt jebkurš skaitlis, izņemot 0). **3)** Nē, nevar atrast tādu skaitli, jo jebkuru skaitli, kas nav 0, dalot ar sevi, dalījums ir vienāds ar 1.

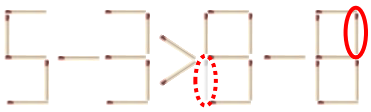
T.3.4. Pārliec katrā nepatiesajā nevienādībā vienu sērkociņu, lai iegūtu patiesu nevienādību! Nevienādības zīmi mainīt nedrīkst! *Piezīme*. No sērkociņiem var izveidot šādus ciparus: .



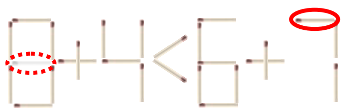


Atrisinājums. Piemēram, pārvietojot sērkociņus tā, kā parādīts 101. att. un 102. att., iegūsim patiesas nevienādības $5 - 3 > 9 - 8$ un $0 + 4 < 6 + 7$.

Piezīme. Ir arī citi atrisinājumi.

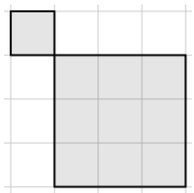


101. att.



102. att.

T.3.5. Abu iekrāsoto kvadrātu perimetru summa ir 80 cm (skat. 103. att.). Lielā kvadrāta mala ir 3 reizes garāka nekā mazā kvadrāta mala. Aprēķini katra kvadrāta malas garumu!



103. att.

Atrisinājums. Tā kā katra kvadrāta perimetru veido četru vienādu malu garumu summa, tad abu iekrāsoto kvadrātu perimetru summu, dalot ar 4, iegūsim vienas mazā kvadrāta malas un vienas lielā kvadrāta malas garumu summu, tas ir, $80 : 4 = 20$ (cm). No uzdevumā dotā izriet, ja mazā kvadrāta mala ir vienu vienību gara, tad lielā kvadrāta mala ir 3 vienības gara, tātad vienas vienības garums ir $20 : 4 = 5$ (cm). Līdz ar to mazā kvadrāta malas garums ir 5 cm, bet lielā kvadrāta malas garums ir $5 \cdot 3 = 15$ (cm).

T.3.6. Šokolādes tāfelītes tiek pakotas kastēs pa 5 vai 12 katrā kastē. Kāds mazākais skaits kastu ir nepieciešams, lai sapakotu 145 šokolādes tāfelītes (visām kastēm jābūt pilnām)?

Atrisinājums. Mazāk kastes būs nepieciešamas tad, ja pēc iespējas vairāk šokolādes tiks sapakotas lielajās kastēs pa 12 šokolādēm katrā. Tā kā $145 : 12 = 12, atl. 1$, tad, izmantojot 12 lielās kastes, viena šokolāde paliks neiepakota. Ja tiks izmantotas 11 lielās kastes, tad pāri paliks $145 - 11 \cdot 12 = 145 - 132 = 13$ šokolādes, kuras nevar sapakot mazajās kastēs pa 5 katrā, lai neviena šokolāde nepaliktu pāri. Ja tiks izmantotas 10 lielās kastes, tad pāri paliks $145 - 10 \cdot 12 = 145 - 120 = 25$ šokolādes, kuras varēs sapakot piecās mazajās kastēs pa 5 šokolādēm katrā. Tātad mazākais skaits kastu, kas ir nepieciešamas, lai sapakotu 145 šokolādes tāfelītes, ir $10 + 5 = 15$.

T.3.7. Divi velosipēdisti, starp kuriem attālums bija 24 km, devās viens otram pretī. Pēc stundas attālums starp viņiem bija 12 km. Kāds attālums starp viņiem būs vēl pēc pusstundas? Velosipēdistu ātrumi ir nemainīgi. *Apskati visus iespējamos gadījumus!*

Atrisinājums. Iespējami divi gadījumi.

1) Ja pēc stundas velosipēdisti vēl nebija viens otru sastapuši, tad stundas laikā tie veica $24 - 12 = 12$ (km). Tātad nākamās pusstundas laikā tie pietuvosies viens otram attālumā $12 : 2 = 6$ (km).

2) Ja pēc stundas velosipēdisti bija pabraukuši viens otram garām, tad stundas laikā tie veica $24 + 12 = 36$ (km). Tātad nākamās pusstundas laikā tie attālināsies viens no otra vēl par $36 : 2 = 18$ (km), un attālums starp tiem būs $12 + 18 = 30$ (km).

4. KĀRTA

T.4.1. Aprēķini: $2016 : 4 - 4 \cdot 8 =$

Atrisinājums. $2016 : 4 - 4 \cdot 8 = 504 - 32 = 472$

T.4.2. **a)** Saliec darbību zīmes vai iekavas, lai rezultāts būtu 7!

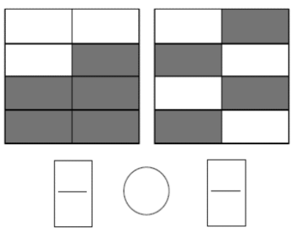
5 5 5 5 = 7

b) Parādi, kā līdzīgā veidā, vairākas reizes izmantojot ciparu 5, iegūt rezultātu 8!

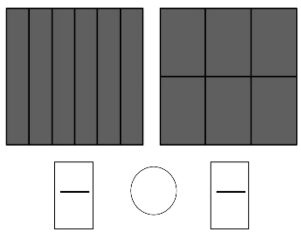
Atrisinājums. a) Piemēram, $5 + (5 + 5) : 5 = 7$. **b)** Piemēram, $5 + (5 + 5 + 5) : 5 = 8$.

T.4.3. Zem katras figūras tukšajās rūtiņās ieraksti, kāda daļa figūras ir iekrāsota! Salīdzini daļas: aplītī ieraksti >, < vai = !

a)

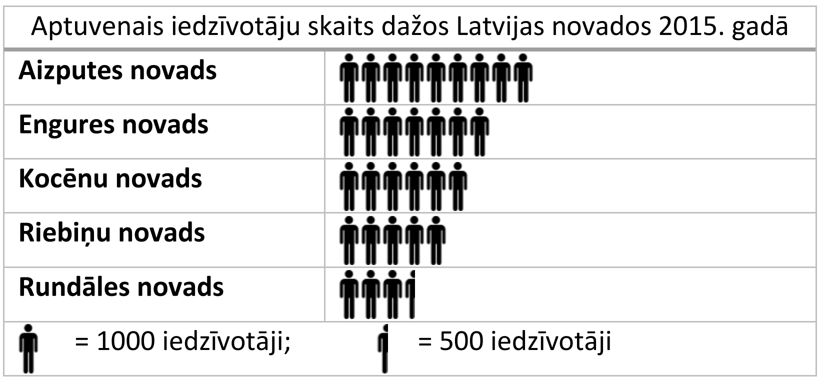


b)



Atrisinājums. a) $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$; **b)** $\frac{6}{6} = \frac{6}{6}$

T.4.4. Apskati diagrammu un atbildi uz jautājumiem!



a) Kurā novadā bija visvairāk iedzīvotāju?

b) Cik iedzīvotāju bija Rundāles novadā?

c) Par cik iedzīvotājiem Engures novadā bija vairāk nekā Riebiņu novadā?

Atrisinājums. a) Visvairāk iedzīvotāju bija Aizputes novadā. **b)** Rundāles novadā bija $3 \cdot 1000 + 500 = 3500$ iedzīvotāju. **c)** Engures novadā bija par $2 \cdot 1000 = 2000$ iedzīvotājiem vairāk nekā Riebiņu novadā.

T.4.5. Aizpildi *starpību piramīdu*! Katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar to divu skaitļu starpību, kas ierakstīti rūtiņās tieši virs tā.

5102		**4102**	
3086		**2089**	
997			

Atrisinājums. Ir četri dažādi varianti, kā var būt aizpildītas rūtiņas, bet šajā uzdevumā pietiek atrast vienu no tiem.

5102	2016	**4102**	2013
3086	2086	**2089**	
100	3		
997			

5102	2016	**4102**	6191
3086	2086	**2089**	
1000	3		
997			

5102	8188	**4102**	2013
3086	4086	**2089**	
1000	1997		
997			

5102	8188	**4102**	6191
3086	4086	**2089**	
1000	1997		
997			

T.4.6. Arbūza masa ir 2 kg un vēl trešdaļa no visas tā masas. Kāda ir arbūza masa?

Atrisinājums. Ja arbūza masa ir 2 kg un vēl trešdaļa no visas tā masas, tad šie 2 kg ir divas trešdaļas no visas tā masas (skat. 104. att.). Tas nozīmē, ka viena trešdaļa no arbūza masas ir 1 kg. Tātad visa arbūza masa ir 3kg.

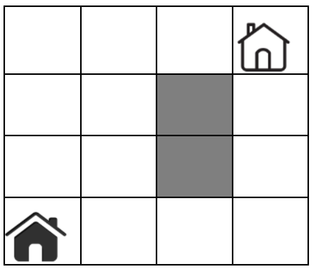
104. att.

T.4.7. Briedis spēj skriet ar ātrumu 72 km/h, zilonis – ar ātrumu 10 m/s, bet lācis – ar ātrumu 900 m/min.

No šiem dzīvniekiem visātrāk spēj skriet ……………………………….; vislēnāk – …………………………………….
Pamato savu atbildi!

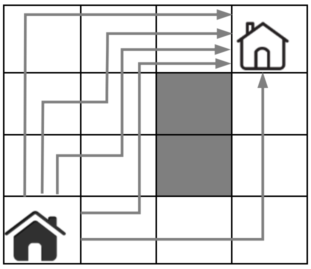
Atrisinājums. Briedis skrien ar ātrumu $72000 : 60 = 1200$ (m/min), bet zilonis – ar ātrumu $10 \cdot 60 = 600$ (m/min). Tātad no šiem dzīvniekiem visātrāk spēj skriet briedis, bet vislēnāk – zilonis.

T.4.8. Egils var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos Egils no melnās mājiņas var nokļūt baltajā mājiņā (skat. 105. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās Egils nedrīkst iet. *Pamato savu atbildi!*



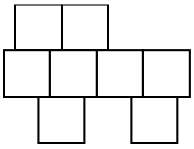
105. att.

Atrisinājums. Egils no melnās mājiņas baltajā mājiņā var nokļūt piecos dažādos veidos (skat. 106. att.).

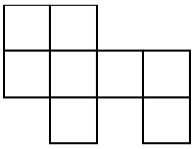


106. att.

T.4.9. No vienādiem kvadrātiem, kuru malas garums ir 1 cm, salika 107. att. redzamo figūru. Aprēķini šīs figūras perimetru!



107. att.



108. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ka figūras perimetrs nemainīsies, ja augšējās un apakšējās rindas kvadrātus pabīdīsim (skat. 108. att.). Tad figūras perimetrs ir 16 cm.

T.4.10. Vai tukšajos lodziņos var ierakstīt naturālus skaitļus, lai iegūtu patiesu vienādību? *Ja var, tad ieraksti, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!*

$$2 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{} = 2015$$

Atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka gan skaitlis 2, gan 4 ir pāra skaitļi. Pāra skaitli reizinot ar jebkuru naturālu skaitli, vienmēr iegūst pāra skaitli. Arī saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli. Tātad vienādības kreisajā pusē vienmēr tiks iegūts pāra skaitlis, bet vienādības labajā pusē ir skaitlis 2015, kas ir nepāra skaitlis. Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitlis, tad rūtiņās ierakstīt skaitļus nav iespējams.

T.4.11. Sarunājās četri rūķīši:

Gastons: "Es nočiepu medus burku."
Alfs: "Gastons melo."
Vilnis: "Alfs melo."
Rūdis: "Vilnis melo."

Cik no četriem rūķīšiem teica patiesību? *Pamato savu atbildi!*

Atrisinājums. Patiesību teica divi rūķīši. Ir divi iespējami gadījumi: Gastons teica patiesību; Gastons meloja. Abos gadījumos pārliecināmies, ka patiesību saka tieši divi rūķīši (skat. tabulā).

Gastons: "Es nočiepu medus burku."	Patiesība	Meli
Alfs: "Gastons melo."	Meli	Patiesība
Vilnis: "Alfs melo."	Patiesība	Meli
Rūdis: "Vilnis melo."	Meli	Patiesība

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

1. KĀRTA

J.1.1. Rudens rēbuss

Atrodi vienu piemēru, ar kādu burtu dotajā skaitļu rēbusā aizstāts katrs cipars, ja vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus (izņemot E un Ē, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu, un arī A un Ā, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu).

		M	E	Ž	Ā
	S	Ē	N	E	S
	B	E	K	A	S
L	I	E	L	A	S

Atrisinājums. Dotajam rēbusam ir divi atrisinājumi, taču pietiek uzrādīt vienu no tiem.

		3	5	4	8
	2	5	9	5	2
	7	5	6	8	2
1	0	5	1	8	2

$A = 8, B = 7, E = 5, I = 0, K = 6,$

$L = 1, M = 3, N = 9, S = 2, Ž = 4$

		3	5	4	8
	2	5	6	5	2
	7	5	9	8	2
1	0	5	1	8	2

$A = 8, B = 7, E = 5, I = 0, K = 9,$

$L = 1, M = 3, N = 6, S = 2, Ž = 4$

J.1.2. Laika skaitīšana

Desmit minūtes pirms es ieliku kūku krāsnī, es izlaidu savu kaķi laukā. Kūkai ir jācepas 35 minūtes, tāpēc es iestatīju taimeri uz 35 minūtēm. Nekavējoties es sev pagatavoju tēju, kas man aizņēma sešas minūtes. Trīs minūtes pirms es biju izdzērusi savu tēju, kaķis atgriezās mājās, tas bija piecas minūtes pirms cepeškrāsns taimeris sāka pīkstēt. Tieši pa vidu starp laiku, kad es pabeidzu gatavot tēju, un laiku, kad kaķis atgriezās mājās, es atbildēju uz telefona zvanu. Pēc piecām minūtēm es beidzu runāt pa telefonu, un tajā brīdī pulkstenis rādīja 15:59.

a) Cik minūtes pēc tam, kad kaķis bija izlaists laukā, cepeškrāsns taimeris sāka pīkstēt?

b) Cik minūtes pagāja no brīža, kad tēja bija pagatavota, līdz brīdim, kad tējas krūze bija tukša?

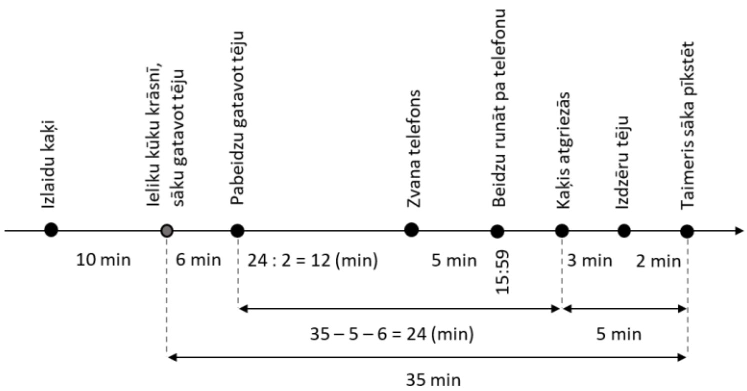
c) Cikos es izlaidu savu kaķi laukā?

Atrisinājums. Attēlojam doto situāciju shematiski (skat. 109. att.).

a) Taimeris sāka pīkstēt $10 + 35 = 45$ minūtes pēc tam, kad kaķis bija izlaists laukā.

b) No brīža, kad tēja bija pagatavota, līdz tam, kad tējas krūze bija tukša, pagāja $24 + 3 = 27$ minūtes.

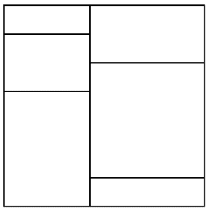
c) Brīdī, kad beidzu runāt pa telefonu, kaķis laukā bija bijis $10 + 6 + 12 + 5 = 33$ minūtes. Tātad kaķi es izlaidu laukā plkst. 15:26.



109. att.

J.1.3. Taisnstūri

Kvadrātveida papīra lapu sagrieza sešos mazākos taisnstūros (skat. 110. att.). Mazo taisnstūru perimetru summa ir 120 cm. Kāds ir kvadrātveida papīra lapas laukums?

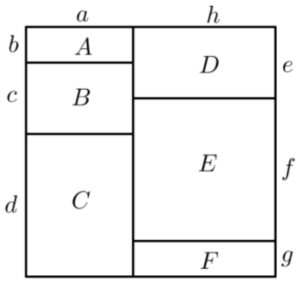


110. att.

Atrisinājums. Kvadrātveida lapas malas garumu apzīmējam ar x, mazo taisnstūru malas apzīmējam tā, kā parādīts 111. att. Tad mazo taisnstūru perimetri ir $P(A) = 2 \cdot (a+b)$, $P(B) = 2 \cdot (a+c)$, $P(C) = 2 \cdot (a+d)$, $P(D) = 2 \cdot (h+e)$, $P(E) = 2 \cdot (h+f)$, $P(F) = 2 \cdot (h+g)$. Visu mazo taisnstūru perimetru summa ir

$$2 \cdot (a+b+a+c+a+d+h+e+h+f+h+g) =$$
$$= 2 \cdot \big(3 \cdot (a+h) + (b+c+d) + (e+f+g)\big)$$

Ievērojam, ka $a+h = b+c+d = e+f+g = x$. Tātad $2 \cdot (3 \cdot x + x + x) = 120$ jeb $10x = 120$ un $x = 12$ cm. Līdz ar to kvadrātveida papīra lapas laukums ir $12 \cdot 12 = 144$ cm^2.



111. att.

J.1.4. Šautriņas

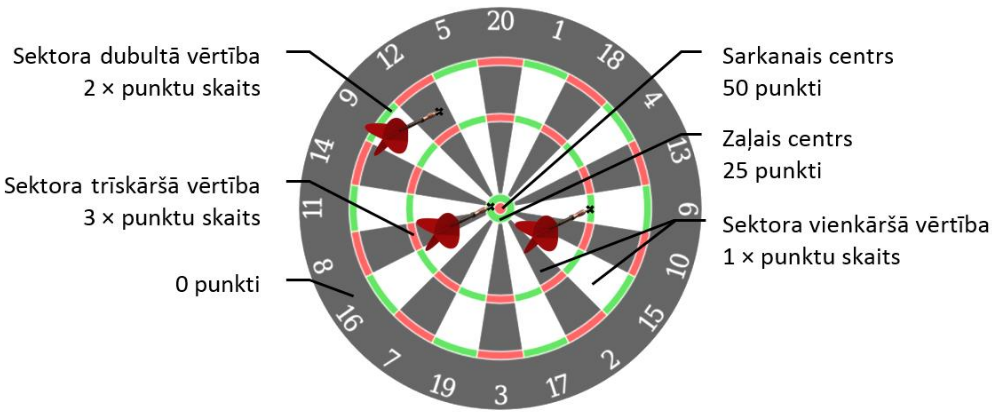
Šautriņu mešanā par katru no trīs iemestajām šautriņām tiek saņemts noteikts skaits punktu, atkarībā no tā, kurā vietā mērķī (skat. 112. att.) šautriņa ir trāpījusi:

- 50 punkti, ja sarkanajā centrā;
- 25 punkti, ja zaļajā centrā;
- pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi melnajā vai baltajā sektorā (sektora vienkāršā vērtība);
- divkāršots pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi ārējā sarkani-zaļajā gredzenā (sektora dubultā vērtība);
- trīskāršots pie sektora norādītais punktu skaits, ja trāpījusi iekšējā sarkani-zaļajā gredzenā (sektora trīskāršā vērtība);
- 0 punkti, ja trāpa ārpus ārējā sarkani-zaļā gredzena.

Piemēram, kopējais iegūto punktu skaits 112. att. dotajā situācijā ir $25 + (3 \cdot 6) + 12 = 55$.

a) Uzraksti vienu piemēru, kur trāpīja trīs šautriņas, ja kopējais iegūto punktu skaits ir 177.

b) Kur varēja trāpīt trīs šautriņas, ja kopējais iegūto punktu skaits ir 137 un zināms, ka bija divas trīskāršās vērtības un trešā šautriņa netrāpīja ne sarkanajā, ne zaļajā centrā?



112. att.

Atrisinājums. a) Divas šautriņas trāpīja 20 punktu sektora trīskāršajā vērtībā un viena 19 punktu sektora trīskāršajā vērtībā: $3 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 19 = 177$.

b) To sektoru, kuros trāpījušas trīs šautriņas, punktu skaitu apzīmēsim attiecīgi ar x, y un z. Iespējami trīs gadījumi, kur varēja trāpīt trešā šautriņa.

- Ja trešā šautriņa trāpījusi sektora vienkāršajā vērtībā, tad iegūstam $3x + 3y + z = 137$.
  - Ja trešā šautriņa trāpījusi lielākajā iespējamā vienkāršajā vērtībā 20, tad trīskāršo vērtību summai jābūt $137 - 20 = 117$ un iegūstam, ka $117 = 3 \cdot 39 = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 19$. Līdz ar to $x = 20, y = 19$ un $z = 20$.
  - Trešā šautriņa nevar būt trāpījusi 19 punktu sektorā, jo trīskāršo vērtību summai $3x + 3y$ jādalās ar 3, bet $137 - 19 = 118$ ar 3 nedalās.
  - Trešā šautriņa nevar būt trāpījusi arī 19 punktu sektorā, jo $137 - 18 = 119$ nedalās ar 3.
  - Ja šautriņa trāpījusi 17 punktu sektorā, tad trīskāršo vērtību summai jābūt $137 - 17 = 120$ un iegūstam, ka $120 = 3 \cdot 40 = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 20$. Līdz ar to $x = 20, y = 20$ un $z = 17$.
  - Tā kā lielākā iespējamā trīskāršo vērtību summa ir $3 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 120$, tad mazākas vienkāršās vērtības neder.

  Tātad iespējami 2 gadījumi, kur varēja trāpīt trīs šautriņas.
- Ja trešā šautriņa trāpījusi sektora divkāršajā vērtībā, tad iegūstam $3x + 3y + 2z = 137$. Lielākā iespējamā divu trīskāršo vērtību summa ir $3 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 120$. Tā kā lielākā iespējamā divkāršā vērtība ir $2 \cdot 20 = 40$, tad mazākā iespējamā divu trīskāršo vērtību summa ir $137 - 40 = 97$. Jebkura sektora divkāršā vērtība ir pāra skaitlis, tad abu trīskāršo vērtību summai ir jābūt **nepāra skaitlim**, jo visu trīs šautriņu punktu summa 137 ir nepāra skaitlis, un tai **jādalās ar 3**. Tātad jāapskata tikai šādas divu trīskāršo vērtību summas: 117, 111, 105 un 99.

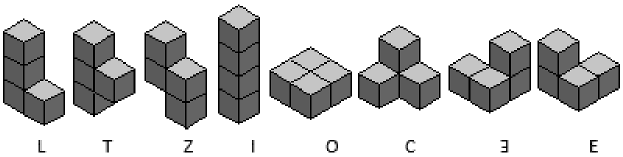
Divu trīskāršo vērtību suma	Trīskāršās vērtības	Divkāršā vērtība
$117 = 3 \cdot 39$	$3 \cdot 20 + 3 \cdot 19$	$2 \cdot 10$
$111 = 3 \cdot 37$	$3 \cdot 20 + 3 \cdot 17$ $3 \cdot 19 + 3 \cdot 18$	$2 \cdot 13$
$105 = 3 \cdot 35$	$3 \cdot 20 + 3 \cdot 15$ $3 \cdot 19 + 3 \cdot 16$ $3 \cdot 18 + 3 \cdot 17$	$2 \cdot 16$
$99 = 3 \cdot 33$	$3 \cdot 20 + 3 \cdot 13$ $3 \cdot 19 + 3 \cdot 14$ $3 \cdot 18 + 3 \cdot 15$ $3 \cdot 17 + 3 \cdot 16$	$2 \cdot 19$

  Tātad iespējami 10 gadījumi, kur varēja trāpīt trīs šautriņas.
- Ja trešā šautriņa trāpījusi sektora trīskāršajā vērtībā, tad $3x + 3y + 3z = 137$. Tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, tad arī vienādojuma labajai pusei jādalās ar 3, bet 137 ar 3 nedalās, tāpēc šāda situācija nav iespējama.

Tātad pavisam kopā iespējami 12 dažādi gadījumi, kur varēja trāpīt trīs šautriņas.

J.1.5. Tetrakubi

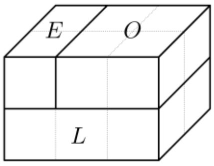
Doti astoņi dažādi tetrakubi (skat. 113. att.). Katrs tetrakubs sastāv no četriem vienības kubiņiem.



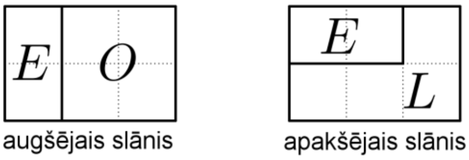
113. att.

No šiem tetrakubiem izvēlējās trīs un salika taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $3 \times 2 \times 2$ (skat. 114. att., kurā ir izmantoti tetrakubi E, O un L). Lai būtu vieglāk uztverams, kā tetrakubi salikti, to var attēlot, parādot katru slāni atsevišķi (skat. 115. att.). Atrodi vēl četrus citus veidus, kā no trīs dažādiem tetrakubiem salikt taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $3 \times 2 \times 2$.

Piezīme. Divus veidus uzskata par dažādiem, ja tiem atšķiras vismaz viens izmantotais tetrakubs.

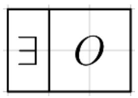
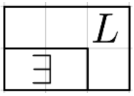
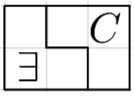
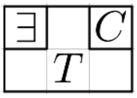
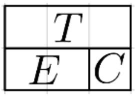
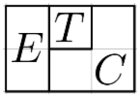
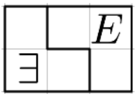
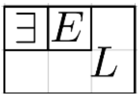


114. att.



115. att.

Atrisinājums. Tabulā parādīti četri veidi, kā no tetrakubiem var salikt taisnstūra paralēlskaldni.

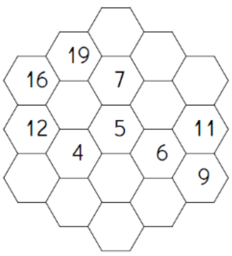
Augšējais slānis	Apakšējais slānis
	
	
	
	

2. KĀRTA

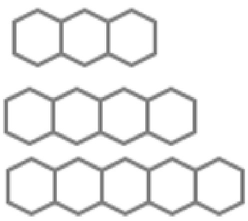
J.2.1. Maģiskais sešstūris

Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 19 dotajā figūrā (skat. 116. att.) jāparādās tieši vienu reizi. Aizpildi tukšos lodziņus tā, lai katrā joslā ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati!

Piezīme. Visas iespējamās joslas skat. 117. att., tās var būt pagrieztas.

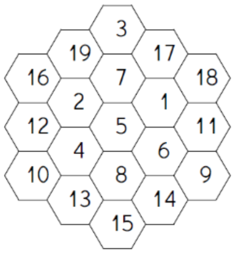


116. att.


117. att.

Atrisinājums. Skat. 118. att. Katrā joslā ierakstīto skaitļu summa ir 38.

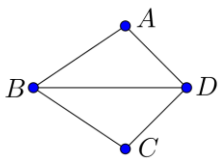
Piezīme. Atrast skaitļu izvietojumu var palīdzēt tālāk dotie spriedumi. Tā kā ir piecas vertikālās joslas, un tajās ierakstīto skaitļu summām jābūt vienādām, tad iegūstam, ka katrā joslā ierakstīto skaitļu summa ir $190 : 5 = 38$. Tālāk aizpildām joslas, kurās ir tikai viens tukšs lodziņš (piemēram, pirmo un pēdējo vertikālo joslu).



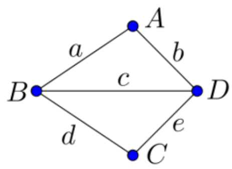
118. att.

J.2.2. Kalnainās takas

Četri ciemati A, B, C un D ir savienoti ar takām (skat. 119. att.). Maršrutā $A \to B \to C$ un maršrutā $B \to C \to D$ katrā ir 10 kalni, maršrutā $A \to B \to D$ ir 22 kalni un maršrutā $A \to D \to B$ ir 45 kalni. Tūristu grupa sāk ceļojumu ciematā A un vēlas nokļūt ciematā D. Viņi grib izvēlēties maršrutu, kurā ir vismazāk kalnu. Kurš maršruts viņiem jāizvēlas?



119. att.



120. att.

Atrisinājums. Kalnu skaitu katrā takā apzīmējam ar a, b, c, d, e (skat. 120. att.). No A uz D var nokļūt pa trīs dažādiem maršrutiem: $A \to B \to D$; $A \to D$; $A \to B \to C \to D$. Noteiksim, kurā no šiem maršrutiem ir mazāk kalnu.

- Uzdevumā dots, ka maršrutā $A \to B \to D$ ir 22 kalni jeb $a + c = 22$.
- Aprēķināsim, cik kalnu ir maršrutā $A \to D$. No iepriekšējā punkta varam secināt, ka c nav lielāks kā 22 jeb $c \leq 22$, un tā kā uzdevumā dots, ka $b + c = 45$, tad varam secināt, ka b noteikti nav mazāks kā 23, tas ir, $b = 45 - c \geq 45 - 22 = 23$ jeb maršrutā $A \to D$ ir vismaz 23 kalni.
- Aprēķināsim, cik kalnu ir maršrutā $A \to B \to C \to D$. No uzdevumā dotā, ka $a + d = 10$ un $d + e = 10$, varam secināt, ka $a + d + d + e = 20$, bet tas nozīmē, ka $a + d + e \leq 20$ jeb ceļā $A \to B \to C \to D$ nav vairāk kā 20 kalni.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka tūristiem ir jāizvēlas maršruts $A \to B \to C \to D$, jo tajā ir vismazāk kalnu.

J.2.3. Baltas un melnas bumbiņas

Kastē ir 75 baltas un 150 melnas bumbiņas. Pie kastes ir liela kaudze ar melnām bumbiņām. No kastes uz labu laimi izvelk divas bumbiņas.

- Ja tās abas ir melnas, tad vienu no tām atliek atpakaļ, bet otru aizsviež prom.
- Ja viena no tām ir melna, bet otra – balta, tad balto atliek atpakaļ, bet melno aizsviež prom.
- Ja tās abas ir baltas, tad tās abas aizsviež prom, paņem vienu melnu bumbiņu no kaudzes un ieliek kastē.

Tādā veidā turpinot, beigās kastē paliks viena bumbiņa. Kādā krāsā tā būs?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā kastē ir nepāra skaits balto bumbiņu. Aplūkosim, kā mainās melno un balto bumbiņu skaits kastē pēc katras divu bumbiņu izvilkšanas.

- Ja no kastes tiek izvilktas divas melnas bumbiņas, tad balto bumbiņu skaits kastē nemainās – tātad paliek nepāra skaits. Melno bumbiņu skaits kastē samazinās par 1.
- Ja no kastes tiek izvilkta viena melna un viena balta bumbiņa, tad balto bumbiņu skaits kastē nemainās – tātad paliek nepāra skaits. Melno bumbiņu skaits kastē samazinās par 1.

- Ja no kastes tiek izvilktas divas baltas bumbiņas, tad balto bumbiņu skaits kastē samazinās par 2 – tātad balto bumbiņu skaits kastē paliek nepāra skaits. Melno bumbiņu skaits kastē palielinās par 1.

Tātad pēc katras divu bumbiņu izvilkšanas melno bumbiņu skaits kastē izmainās par 1, bet balto bumbiņu skaits kastē paliek nepāra skaits. Tā kā 0 ir pāra skaitlis, tad nevar būt tā, ka kastē nav nevienas baltas bumbiņas. Līdz ar to pēdējā bumbiņa būs balta.

J.2.4. Vai nu pirmskaitlis, vai kvadrāts

Tabulā dotajiem skaitļiem ir šādas īpašības:

- skaitlī nav cipara 0;
- visi skaitļa cipari ir dažādi;
- skaitļa pirmais un pēdējais cipars ir vai nu viencipara pirmskaitlis, vai viencipara kvadrāts;
- katri divi viens otram blakus esoši cipari veido vai nu pirmskaitli, vai kvadrātu.

971643	**17364**
9 – kvadrāts 97 – pirmskaitlis 71 – pirmskaitlis 16 – kvadrāts 64 – kvadrāts 43 – pirmskaitlis 3 – pirmskaitlis	1 – kvadrāts 17 – pirmskaitlis 73 – pirmskaitlis 36 – kvadrāts 64 – kvadrāts 4 – kvadrāts

a) Atrodi sešciparu skaitli, kuram ir tādas pašas īpašības un kurš ir lielāks nekā 971643.

b) Pierādi, ka nav tāds skaitlis ar minētajām četrām īpašībām, kurš satur ciparu 8.

c) Kāds ir lielākais iespējamais skaitlis ar minētajām četrām īpašībām?

Atrisinājums. a) Der, piemēram, 973641 vai 973164 (pietiek uzrādīt vienu piemēru), skat. tabulā.

973641	**973164**
9 – kvadrāts 97 – pirmskaitlis 73 – pirmskaitlis 36 – kvadrāts 64 – kvadrāts 41 – pirmskaitlis 1 – kvadrāts	9 – kvadrāts 97 – pirmskaitlis 73 – pirmskaitlis 31 – pirmskaitlis 16 – kvadrāts 64 – kvadrāts 4 – kvadrāts

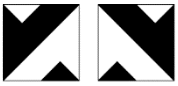
b) Skaitļa pēdējais cipars var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tātad skaitļa kvadrāta pēdējais cipars var būt attiecīgi 0, 1, 4, 9 ,6, 5, 6, 9, 4, 1. Līdz ar to skaitļa kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 8. Neviena pirmskaitļa pēdējais cipars arī nav 8. Tātad nav tāds skaitlis ar minētajām četrām īpašībām, kurš satur ciparu 8.

c) Tā kā visiem meklētā skaitļa cipariem jābūt dažādiem, tad lielākajam šādam skaitlim nav vairāk kā astoņi cipari, jo tas nevar saturēt ne 0, ne 8.
Ja tiek izmantots cipars 2, tad tam ir jābūt skaitļa pirmajam ciparam, jo neviena skaitļa kvadrāta un neviena divciparu pirmskaitļa pēdējais cipars nav 2.
Neviena divciparu pirmskaitļa pēdējais cipars nav 5, un vienīgais skaitļa kvadrāts, kas ir divciparu un kura pēdējais cipars ir 5, ir skaitlis 25. Tātad, ja izmantojam ciparu 5, tam jābūt pēc cipara 2. Līdz ar to skaitļa otrais cipars ir 5. Tā kā jāatrod lielākais skaitlis, tad trešais cipars jāizvēlas pēc iespējas lielāks. Skaitlis 59 ir pirmskaitlis, tāpēc trešais cipars var būt 9. Līdzīgi spriežot, iegūstam, ka skaitļa ceturtais cipars ir 7, jo 97 ir pirmskaitlis. Piektais cipars nevar būt ne 6, ne 4, jo 76 un 74 nav ne kvadrāts, ne pirmskaitlis. Tātad piektais cipars ir 3, jo 73 ir pirmskaitlis. Sestais cipars ir 6,

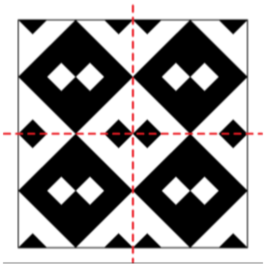
jo 36 ir kvadrāts. Septītais cipars ir 4, jo 64 ir kvadrāts. Tātad pēdējais cipars var būt 1, jo 41 ir pirmskaitlis un 1 ir skaitļa kvadrāts.
Tātad lielākais skaitlis ar minētajām četrām īpašībām ir 25973641.
Piezīme. Ir tikai desmit astoņciparu skaitļi ar minētajām īpašībām: 25316479, 25316497, 25364179, 25364197, 2536719, 25364719, 25364719, 25371649, 25971643, 25973164, 25973641.

J.2.5. Simetriskie raksti

Izmantojot divu veidu flīzes (skat. 121. att.), izveidoja 4×4 flīžu laukumu ar 122. att. redzamo rakstu. Tam ir divas simetrijas asis.



121. att.

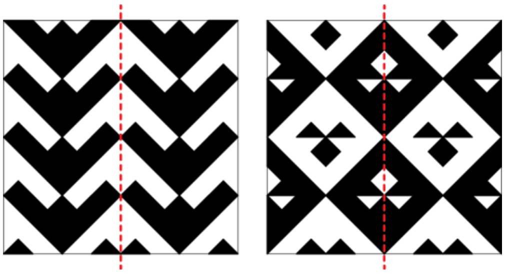


122. att.

a) Izveido 4×4 flīžu laukumu, lai tā rakstam ir vertikālā simetrijas ass, bet nav horizontālā simetrijas ass! Izveido divus dažādus šādus rakstus!

b) Vai ir iespējams izveidot 4×4 flīžu laukumu, kuram būtu vairāk nekā divas simetrijas asis?

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 123. att.



123. att.

b) Nē, nav iespējams. Izveidotā flīžu raksta simetrijas asis ir arī paša kvadrāta simetrijas asis. Kvadrātam ir tikai četras simetrijas asis: abas diagonāles un taisnes, kas savieno pretējo malu viduspunktus. Neviena no kvadrāta diagonālēm nevar būt flīžu raksta simetrijas ass, jo kvadrāta diagonāle satur kvadrāta stūrī novietotās flīzes diagonāli, bet neviena no dotajām flīzēm nav simetriska attiecībā pret tās diagonāli.

3. KĀRTA

J.3.1. Ceļš vērtībā 100

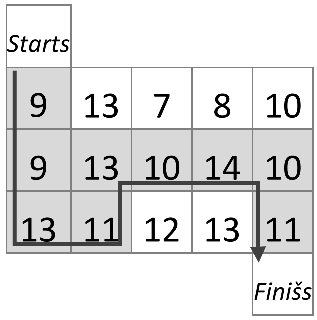
Iezīmē ceļu, kā no *Starta* nokļūt *Finišā* (skat. 124. att.), ja

- pārvietoties drīkst tikai uz *blakus rūtiņu* (*blakus rūtiņas* ir tās, kurām ir kopīga mala);
- katrā rūtiņā drīkst nonākt ne vairāk kā vienu reizi;
- visu skaitļu, kas ierakstīti apstaigātajās rūtiņās, summai jābūt 100.

Atrisinājums. Ceļu, kā no *Starta* nokļūt *Finišā,* skat. 125. att.

Starts				
9	13	7	8	10
9	13	10	14	10
13	11	12	13	11
				Finišs

124. att.



125. att.

J.3.2. Trīs reizinātāju summa

Trīs dažādu naturālu skaitļu reizinājums ir 36. Kāda var būt šo skaitļu summa?

Atrisinājums. Sadalot skaitli 36 pirmreizinātājos, iegūstam $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Apskatīsim, kāds var būt mazākais no trim dažādiem naturāliem skaitļiem, kuru reizinājums ir 36.

- Ja mazākais no trim reizinātājiem ir skaitlis 1, tad divu pārējo dažādo skaitļu reizinājums ir 36, kuru var izteikt kā $36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$. Tad šo reizinātāju summa attiecīgi ir $1 + 2 + 18 = 21$; $1 + 3 + 12 = 16$ vai $1 + 4 + 9 = 14$.
- Ja mazākais no trim reizinātājiem ir skaitlis 2, tad divu pārējo dažādo skaitļu reizinājums ir $18 = 3 \cdot 6$ un reizinātāju summa ir $2 + 3 + 6 = 11$.
- Ja mazākais no trim reizinātājiem ir skaitlis 3, 4 vai 6, tad nevar atrast vēl divus dažādus lielākus reizinātājus, kuru reizinājums būtu attiecīgi 12, 9 vai 6. Mazākais no trim pirmreizinātājiem nevar būt lielāks kā 6, jo tad abu pārējo dažādo skaitļu reizinājumam būtu jābūt mazākam nekā mazākais pirmreizinātājs.

Esam ieguvuši, ka dažādo reizinātāju summa var būt 11, 14, 16 vai 21.

J.3.3. Skaitļu virkne

Skaitļu virknē katru nākamo locekli iegūst, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa ciparu kvadrātus.

Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 12, tad otrais loceklis ir $1^2 + 2^2 = 5$, trešais loceklis ir $5^2 = 25$, ceturtais loceklis ir $2^2 + 5^2 = 29$ utt.

a) Aprēķini virknes pirmos piecus locekļus, ja pirmais loceklis ir 25.

b) Kāds ir virknes 2016. loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 25?

Atrisinājums. a) Virknes pirmie pieci locekļi doti tabulā.

1.	2.	3.	4.	5.
25	$2^2 + 5^2 = 29$	$2^2 + 9^2 = 85$	$8^2 + 5^2 = 89$	$8^2 + 9^2 = 145$

b) Virknes sākums ir 25; 29; 85; <u>89</u>; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58; <u>89</u>; 145; 42; 20; ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties. Tā kā periodā ietilpst astoņi skaitļi (<u>89</u>; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58), tad 4., 12., 20., 28., ..., 2004., 2012. virknes loceklis ir 89. Tātad 2016. virknes loceklis ir 4.

J.3.4. Kad mazais Bobs noraugās abu pārējo izdarībās…

Apņēmīgais Kevins uz lielas lapas atzīmēja 10 punktus tā, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pēc tam viņš katrus divus punktus savienoja ar nogriezni. Dumpīgais Stjuarts pāri Kevina zīmējumam novilka taisni. Zināms, ka neviens no Kevina atliktajiem punktiem neatrodas uz Stjuarta novilktās taisnes. Kāds ir lielākais skaits nogriežņu, ko Stjuarta uzzīmētā taisne var krustot?

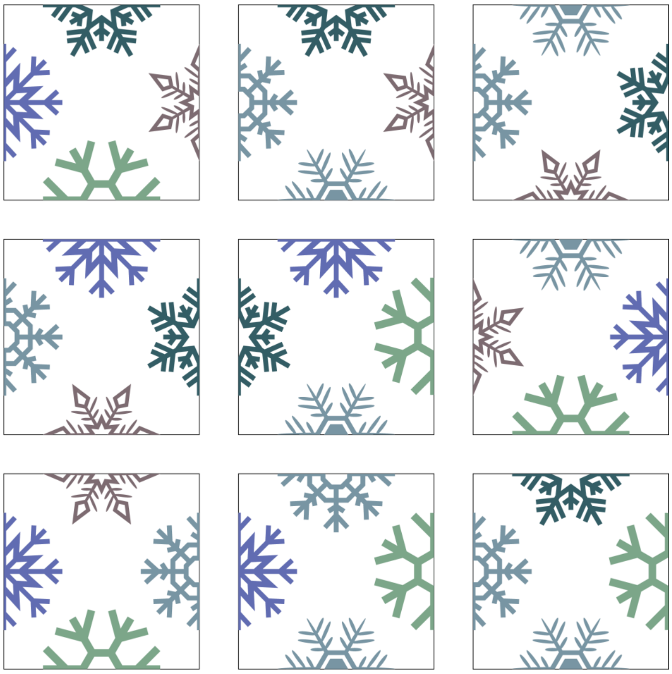
Atrisinājums. Lielākais skaits nogriežņu, ko Stjuarta uzzīmētā taisne var krustot, ir 25. Ja Stjuarts novelk taisni tā, ka katrā taisnes pusē ir pieci punkti, tad, savienojot katru no pieciem punktiem, kas atrodas taisnes vienā pusē ar pieciem punktiem, kas atrodas taisnes otrā pusē, iegūstam, ka novilktā taisne krusto $5 \cdot 5 = 25$ nogriežņus.

Pamatosim, ka vairāk nekā 25 nogriežņus Stjuarta novilktā taisne krustot nevar. Ja taisne novilkta tā, ka vienā pusē ir vai nu 4, vai 3, vai 2, vai 1 punkts un atbilstoši otrā pusē ir 6, 7, 8 vai 9 punkti, tad Stjuarta taisne krustosies ar attiecīgi $4 \cdot 6 = 24$, $3 \cdot 7 = 21$, $2 \cdot 8 = 16$ vai $1 \cdot 9 = 9$ nogriežņiem, kas ir mazāk nekā 25.

J.3.5. Sniegpārsliņu prāta mežģis

No deviņām 126. att. dotajām kartītēm saliec 3×3 kvadrātu tā, lai, saskaroties kartīšu malām, veidotos saderīgs zīmējums! (Piemēram, 127. att. parādīts saderīgs zīmējums, bet 128. att. – nesaderīgs.)

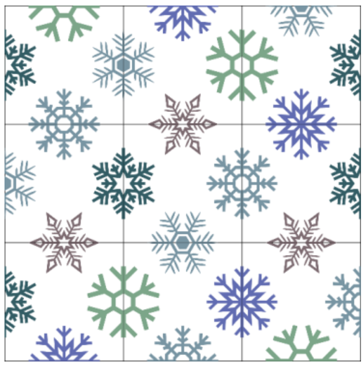
Atrisinājums. Skat. 129. att.



126. att.

127. att.

128. att.



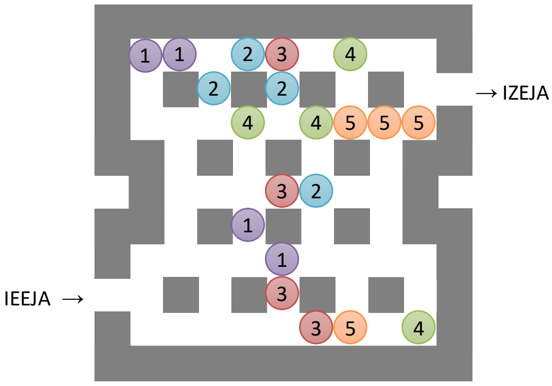
129. att.

4. KĀRTA

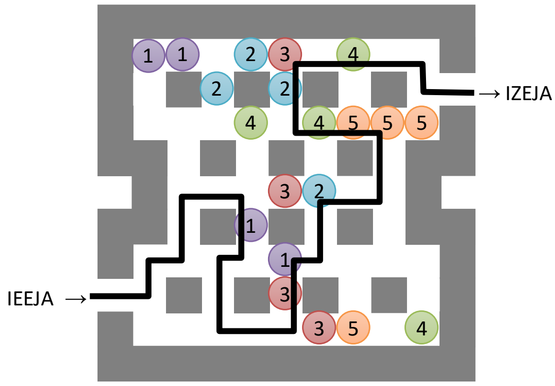
J.4.1. Putnu vērotājs

Putnu vērotājs grib iziet cauri parkam un apskatīt putnus (skat. 130. att.). Visu piecu krāsu putnus viņš grib redzēt vienādā skaitā (piemēram, katras krāsas putnu viņš varētu apskatīt tieši vienu reizi). Putnu vērotājs ir redzējis putnu, ja tas atrodas viņa ceļā. Uzzīmē, kā jāpārvietojas putnu vērotājam, ja viņš nekad neiet vairāk kā vienu reizi pa vienu un to pašu vietu!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 131. att. Putnu vērotājs katras krāsas putnu ir apskatījis tieši divas reizes.



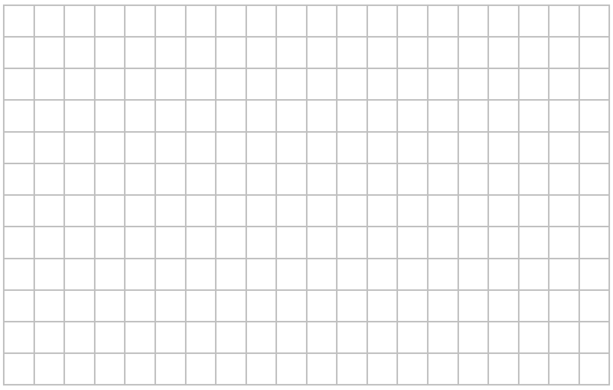
130. att.



131. att.

J.4.2. Ģeometriskā ferma

Fermā ir tik daudz vietas, lai tajā varētu izmitināt 240 cūkas, katru atsevišķā aplokā (skat. 132. att.). Noņemot žogus starp aplokiem, tos var piemērot govju izmitināšanai, kurām nepieciešams četras reizes vairāk vietas nekā cūkām, vai zirgu izmitināšanai, kuriem nepieciešams 10 reizes vairāk vietas nekā cūkām. Govju aplokiem jābūt kvadrāta formā, bet zirgu aploki var būt jebkādā formā.



132. att.

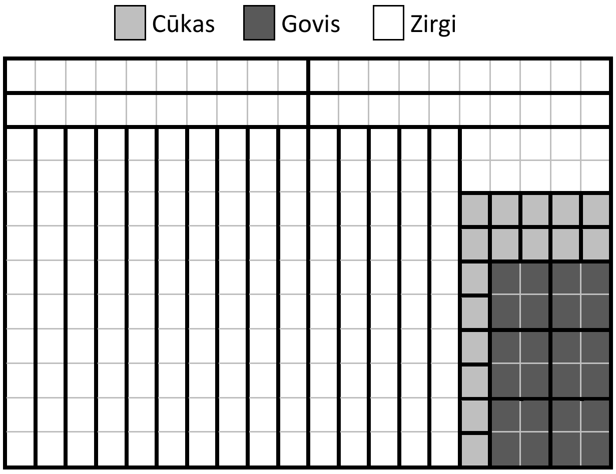
a) Vai fermā varētu izmitināt 20 zirgus, 6 govis un 16 cūkas?

b) Kāds ir lielākais skaits govju, ko varētu izmitināt fermā, ja govis un zirgi būtu vienādā skaitā?

c) Ja fermā būtu 2 govis, tad kāds ir lielākais skaits zirgu, kurus varētu izmitināt?

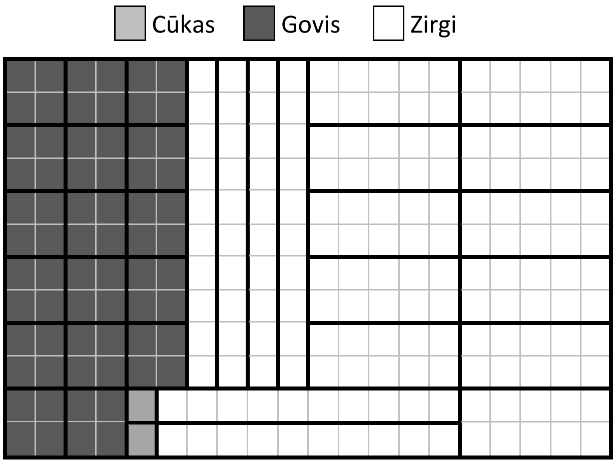
Atrisinājums. Uzskatīsim, ka cūkas aploks ir viena vienība. Tad fermā kopā ir 240 vienības.

a) Jā, var izmitināt, skat., piemēram, 133. att.



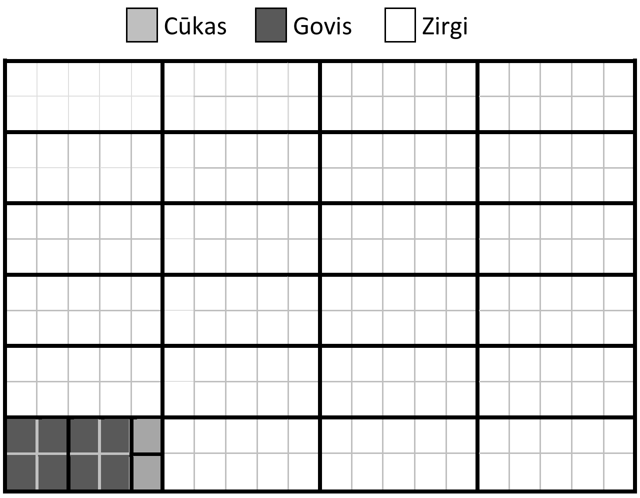
133. att.

b) Lielākais skaits govju, ko varētu izmitināt fermā, ir 17, skat., piemēram, 134. att. Tā kā govīm un zirgiem jābūt vienādā skaitā, tad vairāk kā 17 govis izmitināt nevar, jo 18 govis un 18 zirgi kopā aizņem $18 \cdot (4+10) = 252$ vienības, kas ir vairāk nekā 240.



134. att.

c) Lielākais skaits zirgu, kurus varētu izmitināt, ir 23, skat., piemēram, 135. att. Tā kā jābūt izmitinātām divām govīm, kas kopā aizņem 8 vienības, tad vairāk kā 23 zirgus izmitināt nevar, jo paliek 232 vienības, bet $24 \cdot 10 = 240$, kas ir vairāk nekā 232.



135. att.

J.4.3. Spēļu nauda

Mazā māsa izveidoja spēļu naudu. Katra banknote ir vai nu sarkana, vai zaļa; visām sarkanajām banknotēm ir vienāda vērtība un visām zaļajām banknotēm ir vienāda vērtība. Trīs zaļo un astoņu sarkano banknošu kopējā vērtība ir 46 eiro, bet astoņu zaļo un trīs sarkano banknošu kopējā vērtība ir 31 eiro. Kāda ir divu zaļo un trīs sarkano banknošu kopējā vērtība?

Atrisinājums. Apzīmējam sarkanās banknotes vērtību ar s, bet zaļās – ar z. Tad no dotā iegūstam

$$3z + 8s = 46 \text{ un} \tag{1}$$

$$8z + 3s = 31. \tag{2}$$

No (1) un (2), iegūstam, ka 11 zaļu un 11 sarkanu banknošu kopējā vērtība ir 77, tas ir, $11z + 11s = 77$ jeb

$$z + s = 7. \tag{3}$$

Tātad trīs zaļu un trīs sarkanu banknošu kopējā vērtība ir 21, tas ir,

$$3z + 3s = 21. \tag{4}$$

Pārrakstot (1), iegūstam

$$3z + 3s + 5s = 46 \tag{5}$$

Tad, izmantojot (4) un (5), iegūstam, ka piecu sarkano banknošu vērtība ir 25, tas ir, $5s = 25$ jeb $s = 5$. Izmantojot (3), iegūstam, ka zaļās banknotes vērtība ir $z = 2$. Līdz ar to divu zaļo un trīs sarkano banknošu kopējā vērtība ir $2z + 3s = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$.

J.4.4. Anša PIN kods

Ansis vienmēr atceras savu četrciparu PIN kodu, jo zina, ka tam vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

1) tas ir naturāla skaitļa kvadrāts;
2) kad to dala ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9, tad atlikumā iegūst 1.

Kāds ir Anša PIN kods?

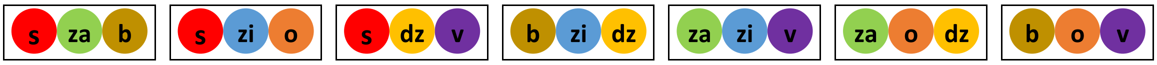
Atrisinājums. Anša PIN kodu apzīmējam ar N. Tā kā N dalot ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 atlikumā dod 1, tad skaitlis $(N-1)$ dalās ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9. Tas nozīmē, ka $(N-1)$ dalās ar šo skaitļu mazāko kopīgo dalāmo, kurš ir 2520. Tā kā N ir četrciparu skaitlis, tad tas ir starp 1000 un 9999. Šajā intervālā ir trīs skaitļi, kas dalās ar 2520, tie ir 2520, 5040 un 7560. Tātad iespējamās N vērtības ir attiecīgi 2521, 5041 un 7561. Ievērojam, ka $50^2 = 2500 < 2521 < 2601 = 51^2$; $5041 = 71^2$ un $86^2 = 7396 < 7561 < 7569 = 82^2$. Tātad vienīgā no iespējamajām N vērtībām, kas ir arī skaitļa kvadrāts, ir $5041 = 71^2$. Līdz ar to Anša PIN kods ir 5041.

J.4.5. Krāsainās bumbiņas

Uz galda atrodas vairākas kastītes, katrā kastītē ir trīs bumbiņas. Zināms, ka katrās divās kastītēs tieši vienai bumbiņai sakrīt krāsa, bet nav tādas krāsas bumbiņa, kas būtu visās kastītēs. Kāds ir lielākais skaits kastīšu, kas var atrasties uz galda?

Atrisinājums. Lielākais skaits kastīšu, kas var atrasties uz galda, ir 7. Bumbiņas var būt izvietotas, piemēram, tā, kā parādīts 136. att. Pamatosim, ka vairāk kastīšu uz galda nevar atrasties.

Pieņemam, ka uz galda ir vairāk nekā 7 kastītes. Vienu no šīm kastītēm apzīmējam ar K un pieņemam, ka tajā ir sarkana bumbiņa. Zināms, ka katrā kastītē ir tieši viena bumbiņa, kuras krāsa sakrīt ar kastītē K esošas bumbiņas krāsu. Tā kā kastītē K ir trīs bumbiņas un vēl ir vismaz 7 kastītes, tad šajā kastītē noteikti ir bumbiņa, kurai sakrīt krāsa ar vismaz trīs citu kastīšu bumbiņu krāsu (ja tā nebūtu, tad uz galda vēl būtu ne vairāk kā 6 kastītes (Dirihlē princips) – pretruna). Apzīmējam trīs no šīm kastītēm ar K_1, K_2 un K_3 un pieņemam, ka tajās ir sarkana bumbiņa. Tā kā nav tādas krāsas bumbiņa, kura būtu visās kastītēs, tad ir tāda kastīte K_0, kurā nav sarkanas bumbiņas un kurai ar kastīti K sakrīt kādas citas bumbiņas krāsa. Tā kā kastītēm K, K_1, K_2 un K_3 savā starpā jau ir tieši viena bumbiņa, kuras krāsa sakrīt, tad šo kastīšu kopīgo bumbiņu krāsa ar K_0 katrai ir citādāka. No tā izriet, ka kastītē K_0 jābūt vismaz četrām bumbiņām, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc $n \leq 7$.



136. att.

5. KĀRTA

J.5.1. Mīnas

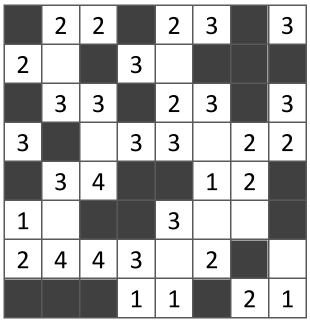
Izkrāso 137. att. tukšās rūtiņas, ja katrs skaitlis norāda, cik melnu rūtiņu atrodas ap rūtiņu, kurā tas ierakstīts!

Piezīme. Ap rūtiņu atrodas tās rūtiņas, kurām ar to ir kopīga mala vai stūris.

Atrisinājums. Skat. 138. att.

	2	2		2	3		3
2			3				
	3	3		2	3		3
3			3	3		2	2
	3	4			1	2	
1				3			
2	4	4	3		2		
			1	1		2	1

137. att.



138. att.

J.5.2. Daļu summa

Izmantojot naturālus skaitļus no 1 līdz 20, katru tieši vienu reizi, izveido desmit parastas daļas, kuru summa ir naturāls skaitlis!

Atrisinājums

$$\frac{17}{3}+\frac{13}{2}+\frac{11}{6}+\frac{19}{1}+\frac{14}{7}+\frac{18}{9}+\frac{20}{10}+\frac{16}{8}+\frac{15}{5}+\frac{12}{4}=$$

$$=\frac{34}{6}+\frac{39}{6}+\frac{11}{6}+19+2+2+2+2+3+3=\frac{84}{6}+19+2+2+2+2+3+3=$$

$$=14+19+2+2+2+2+3+3=47$$

J.5.3. Apslēptie skaitļi

Kādi naturāli skaitļi var būt ierakstīti x un y vietā, lai vienādība $x^2 \cdot y - 1 = 2015$ būtu patiesa?

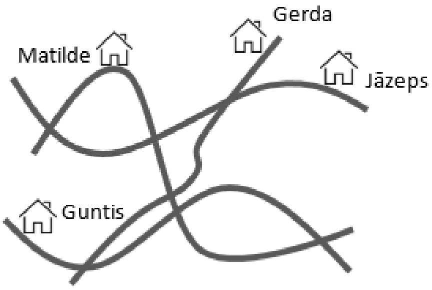
Atrisinājums. No dotā vienādojuma iegūstam, ka $x^2 \cdot y = 2016$ jeb $y = \frac{2016}{x^2}$. Tātad ir jāatrod visi tādi skaitļi x, kuru kvadrāti ir 2016 dalītāji. Izmantojot, ka $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, atrodam visas iespējamās x^2 vērtības un tām atbilstošās y vērtības (skat. tabulā).

$\boldsymbol{x \cdot x = x^2}$	$\boldsymbol{y}$
$1 \cdot 1 = 1^2$	2016
$2 \cdot 2 = 2^2$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$
$3 \cdot 3 = 3^2$	$2^5 \cdot 7 = 224$
$(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 4^2$	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$
$(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^2$	$2^3 \cdot 7 = 56$
$(2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 12^2$	$2 \cdot 7 = 14$

Tātad esam ieguvuši, ka x vietā var būt ierakstīti skaitļi $1, 2, 3, 4, 6, 12$, tad y vietā atbilstoši var būt ierakstīti skaitļi $2016, 504, 224, 126, 56, 14$.

J.5.4. Ne pārāk precīzā karte

Amalda uzzīmēja karti (139. att.), kurā attēloja četras ielas un četru savu draugu mājas. Vienīgais, kas kartē neatbilst patiesībai ir tas, ka trīs no šīm ielām ir jābūt taisnēm. Kurš no Amaldas draugiem dzīvo līkumainajā ielā?

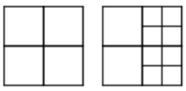


139. att.

Atrisinājums. Kartē ir attēlotas četras ielas un septiņi krustojumi, kas atbilst patiesībai. Zināms, ka divām taisnēm var būt ne vairāk kā viens krustpunkts. Ielai, kurā dzīvo Matilde, un ielai, kurā dzīvo Jāzeps, ir divi krustpunkti, tātad viena no šīm ielām ir līkumaina. Līdzīgi arī ielai, kurā dzīvo Matilde, un ielai, kurā dzīvo Guntis, ir divi krustpunkti, tāpēc viena no šīm ielām ir līkumaina. Tā kā pēc dotā līkumaina iela ir tikai viena, tad tā ir iela, kurā dzīvo Matilde.

J.5.5. Jaukie skaitļi

Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par *jauku*. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir *jauki* (140. att.).



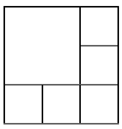
140. att.

a) Pierādi, ka skaitlis 6 ir *jauks*!

b) Pierādi, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!

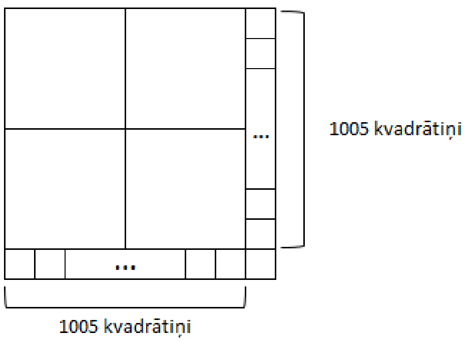
c) Pierādi, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*!

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 141. att.



141. att.

b) Skat., piemēram, 142. att. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām 1006 vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat. 142. att.). Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos mazākos kvadrātos (skat. 142. att.)

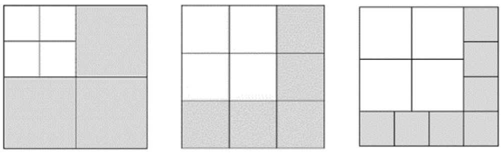


142. att.

c) Šķirojam divus gadījumus.

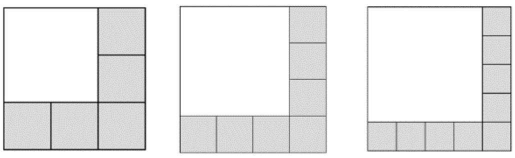
- Ja n ir nepāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 5$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 143. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos kvadrātos (skat., piemēram, 143. att. baltos kvadrātus). Tātad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 5$ kvadrātos, līdz ar to skaitlis n ir *jauks*.

  Piezīme. Ir arī citi veidi, kā, izmantojot līdzīgu principu, var iegūt prasīto.
  No n atņemot jebkuru pāra skaitļa kvadrātu, kas ir vismaz par 3 mazāks nekā n, iegūsim to (balto) kvadrātu skaitu, kas būs novietoti augšējā kreisajā stūrī. Atlikušie (iekrāsotie) kvadrāti būs novietoti pie dotā kvadrāta labās un apakšējās malas. Piemēram, ja jāpierāda, ka skaitlis 2015 ir jauks, mēs varam atņemt jebkuru pāra skaitļa kvadrātu no $2^2 = 4$ līdz $44^2 = 1936$ ($46^2 = 2116$ vairs neder, jo tas pārsniedz 2015). Piemēram, ja augšējā kreisajā stūrī būtu novietoti 1936 (baltie) kvadrāti, tad pie labās un apakšējās malas būtu novietoti atlikušie $2015 - 1936 = 79$ kvadrāti (39 vertikāli, 39 horizontāli un 1 apakšējā labajā stūrī).



143. att.

- Ja n ir pāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 2$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 144. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Tā kā atlikusī dotā kvadrāta daļa arī ir kvadrāts, tad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 2$ kvadrātos un skaitlis n ir *jauks*.



144. att.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

1. NODARBĪBA

P.1.1. Vakars uz ledusskapja

Saimnieki kaķi Miķeli uz nakti netīšām ieslēdza virtuvē. Tā kā virtuvē nebija nekā ēdama vai kā cita ievērības cienīga, Miķelis mēģināja sevi izklaidēt, skaitot flīzes. Viņš flīzes sanumurēja tā, kā redzams 145. att.

7	8	9	10	11	12	13
6	29	30	31	32	33	14
5	28	43	44	45	34	15
4	27	42	49	46	35	16
3	26	41	48	47	36	17
2	25	40	39	38	37	18
1	24	23	22	21	20	19

145. att.

Viņš iztēlojās, ka uz lauciņa ar numuru 1 uzliek kubu, kas ar savu skaldni precīzi noklāj tieši vienu flīzi. Tad viņš domās nokrāsoja kuba augšējo skaldni ar slapju krāsu un sāka kubu velt pa numurētājām flīzēm, katru reizi ar skaldni noklājot numurētu flīzi augošā secībā, līdz kubs nonāca uz flīzes ar numuru 49. Ja nokrāsotā skaldne saskaras ar flīzi, tā to pilnībā nokrāso. Kāda ir uz nokrāsotajām flīzēm uzrakstīto skaitļu summa?

Atrisinājums. Visos gājienos skatīsimies uz kubu no tās flīžu laukuma malas, kurā ierakstīti numuri 1, 24, 23, 22, 21, 20, 19 un katrā lauciņā pierakstīsim, kur tajā brīdī atrodas nokrāsotā skaldne: rakstīsim V, ja tā atrodas kuba virspusē, A – ja tā atrodas kuba apakšpusē, P – ja priekšpusē, M – ja mugurpusē, L – ja labajā pusē, K – ja kreisajā pusē, skat. 146. att. Tātad uz nokrāsotajām flīzēm uzrakstīto skaitļu summa ir $3+7+11+15+19+23+30+40=148$.

A	K	V	L	**A**	K	V
M	L	**A**	K	V	L	P
V	L	M	M	M	L	**A**
P	L	V	V	V	L	M
A	L	P	P	P	L	V
M	L	**A**	K	V	L	P
V	L	**A**	K	V	L	**A**

↑ SKATĀMIES ↑

146. att.

P.1.2. Eskalators

Pa augšup slīdoša eskalatora kāpnēm uz augšu devās divi cilvēki, pie tam pirmais no viņiem gāja ar trīsreiz lielāku ātrumu nekā otrais. Viens no gājējiem, kāpdams augšup, veica 16 pakāpienus, bet otrs – 24 pakāpienus. Cik pakāpienu ir eskalatoram?

Atrisinājums. Apzīmēsim: x – pakāpienu skaits; y – eskalatora ātrums; t_1 – laiks, cik ilgi pa eskalatoru kāpj ātrākais gājējs; t_2 – laiks, cik ilgi pa eskalatoru kāpj lēnākais gājējs; v – lēnākā gājēja iešanas ātrums.

Izmantosim, ka $s = v \cdot t$, tas ir, veiktais attālums ir vienāds ar kustības ātruma un ceļā pavadītā laika reizinājumu. Ja ķermenis, kura ātrums ir m, kustas pa eskalatoru, kura ātrums ir n, tad kustības ātrums eskalatora kustības virzienā ir vienāds ar $m + n$.

Tā kā abi cilvēki veica vienādu ceļu, tad $x = (y + 3v) \cdot t_1 = (y + v) \cdot t_2$ un iegūstam, ka

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{y+v}{y+3v} \tag{1}$$

No $3v \cdot t_1 = 24$ un $v \cdot t_2 = 16$ izriet, ka

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

No (1) un (2) izriet, ka $\frac{t_1}{t_2} = \frac{y+v}{y+3v} = \frac{1}{2}$. Tad iegūstam $2(y + v) = y + 3v$ jeb $y = v$.

No sakarībām $v \cdot t_1 = 8$ un $x = (y + 3v) \cdot t_1$, ievērojot $y = v$, iegūstam

$$x = (v + 3v) \cdot t_1 = 4v \cdot t_1 = 4 \cdot 8 = 32.$$

Tātad eskalatoram ir 32 pakāpieni.

P.1.3. Gudrais ceļinieks

Reiz sen senos laikos kādā tāltālā karaļvalstī karalis nolēma, ka ir jāizprecina sava vienīgā meita. Pēc karaļvalsts noteikumiem princese drīkst izvēlēties spēli, kuras uzvarētājs viņai būs jāapprec. Karaļa meita, negribēdama vēl iet pie vīra, izvēlējās vārdu spēli. Viņa pie sevis pa vienam aicināja prinčus un jautāja – kāpēc tu pie manis atnāci? Ja princis teica patiesību, princese viņu atraidīja. Bet, ja princis meloja, princese lika sargiem viņu iemest cietumā. Tomēr kādam nejaušam ceļotājam, kurš bija dzirdējis par princeses jautājumu un prinču likteni, izdevās viņu apprecēt. Ko viņš atbildēja princesei?

Piezīme. Princese vienmēr var precīzi pateikt, kuri ir meli un kura ir patiesība.

Atrisinājums. Ceļotājs princesei atbildēja: “Es atnācu, lai mani iemestu cietumā.”

Ja ceļotāju mestu cietumā, tad viņa sacītais – “Es atnācu, lai mani iemestu cietumā,” – izrādītos patiesība un princesei ceļotājs tomēr būtu bijis jāatraida.

Ja ceļotāju atraidītu, tad viņa sacītais – “Es atnācu, lai mani iemestu cietumā,” – izrādītos meli un viņš tomēr būtu jāmet cietumā.

P.1.4. Starpbrīdis

Andris un Juris pie pusdienu galda smagi sastrīdējās. Andris bija pilnīgi pārliecināts, ja ir dots, ka

$$xy + z = xz + y = yz + x,$$

tad var pierādīt, ka $(x - y)(x - z)(y - z) = 0$. Savukārt Juris viņam mēģināja ieskaidrot, ka viņa risinājums nav matemātiski korekts. Palīdzi izšķirt puišu strīdu!

Atrisinājums. No vienādības $xy + z = xz + y$ pakāpeniski iegūstam

$$xy - xz = y - z;$$

$$x(y - z) = y - z. \tag{1}$$

Iespējami divi gadījumi.

1) Ja $y - z = 0$ jeb $y = z$, tad
$$(x-y)(x-z)(y-z) = (x-y)(x-z) \cdot 0 = 0.$$
2) Ja $y - z \neq 0$, tad, vienādojuma (1) abas puses dalot ar $y - z \neq 0$, iegūstam $x = \frac{y-z}{y-z} = 1$. Tad no $xy + z = xz + y = yz + x$ iegūstam
$$y + z = z + y = yz + 1;$$
$$z + y = yz + 1;$$
$$yz - y - z + 1 = 0;$$
$$-y(1-z) + (1-z) = 0;$$
$$(1-z)(1-y) = 0.$$
Tā kā $x = 1$, tad iegūstam, ka
$$(x-y)(x-z)(y-z) = (1-y)(1-z)(y-z) = 0 \cdot (y-z) = 0.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ja ir dots $xy + z = xz + y = yz + x$, tad var pierādīt, ka $(x-y)(x-z)(y-z) = 0$, un Adrim ir taisnība.

P.1.5. Troņu spēle

Divi karaļi spēlē spēli. Viņiem ir tāfele, uz kuras ir uzrakstīts skaitlis 1000. Viņu rīcībā ir arī 1000 nevienam vēl nepiederoši zemes gabali. Katrā gājienā karalis var

- vai nu paņemt savā īpašumā no 1 līdz 5 zemes gabaliem (tas ir, 1, 2, 3, 4, 5 zemes gabalus),
- vai arī atteikties no īpašuma tiesībām uz 1 līdz 5 zemes gabaliem (tas ir, 1, 2, 3, 4, 5 zemes gabaliem).

Sākumā karaļiem nepieder neviens zemes gabals. Kad karalis izdara savu gājienu, viņam uz tāfeles ir jāuzraksta atlikušais nevienam nepiederošo zemju gabalu skaits. Zaudē tas karalis, kurš ir spiests uzrakstīt skaitli, kas uz tāfeles jau ir uzrakstīts, uzvarētājs savā īpašumā iegūst visus 1000 zemes gabalus. Kurš no karaļiem noteikti var uzvarēt?

Atrisinājums. Noteikti var uzvarēt karalis, kurš savu gājienu izdara otrais. Aprakstām uzvarošo stratēģiju.

1) Otrajam karalim iepriekš visi skaitļi no 0 līdz 999 ir jāsadala 125 grupās pa astoņiem skaitļiem katrā:

1. grupā – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
2. grupā – 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15;
…
125. grupā – 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999.

2) Tad, kad pirmais karalis uz tāfeles uzraksta vienu skaitli no kādas grupas (ne obligāti lielāko skaitli no grupas), otrais karalis veic atbildes gājienu, uz tāfeles vai nu pierakstot mazāko skaitli, kas ir šajā grupā vēl palicis, ja šo skaitli ir iespējams pierakstīt, vai arī mazāko, ko vien ir iespējams paņemt no šīs grupas.

1. piemērs. Ja pirmais karalis savā pirmajā gājienā paņem 5 zemes gabalus un uzraksta uz tāfeles 995, tad tas ir no grupas {992, 993, 994, ~~995~~, 996, 997, 998, 999}. Otrajam karalim ir jāatbild ar mazāko skaitli grupā, tas ir, jāuzraksta 992, paņemot 3 zemes gabalus savā īpašumā. Tad grupā paliek skaitļi {~~992~~, 993, 994, ~~995~~, 996, 997, 998, 999}.

2. piemērs. Ja pirmais karalis savā pirmajā gājienā paņem 1 zemes gabalu un uzraksta uz tāfeles 999, tad tas ir no grupas {992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, ~~999~~}. Otrajam karalim ir jāatbild ar mazāko skaitli grupā, ko vien iespējams paņemt, tas ir, jāuzraksta 993, paņemot 5 zemes gabalus savā īpašumā. Tad grupā paliek skaitļi {992, ~~993~~, 994, 995, 996, 997, 998, ~~999~~}.

3) Atlikušos sešus skaitļus grupā otrais karalis domās sadala trīs pāros augošā secībā (vismazāko ar otro mazāko, trešo mazāko ar ceturto, vislielāko ar otro lielāko).

1. piemērā 125. grupā palika skaitļi 993, 994, 996, 997, 998, 999. Otrais spēlētājs no tiem izveido trīs pārus: {993; 994}; {996; 997}; {998; 999}.

2. piemērā 125. grupā palika skaitļi 992, 994, 995, 996, 997, 998. Otrais spēlētājs no tiem izveido trīs pārus: {992; 994}; {995; 996}; {997; 998}.

4) Pēc katra pirmā karaļa gājienā, kurā tas uz tāfeles uzraksta kādu skaitli no viena pāra, otrais karalis atbild ar atlikušo skaitli no tā paša pāra.

Ja pirmais karalis *1. piemērā* savā otrajā gājienā atsakās no 1 zemes gabala un uzraksta skaitli 993, tad otrais karalis atbild ar atlikušo skaitli no pāra, tas ir, uzraksta 994 un atsakās no 1 sava zemes gabala. Ja tomēr pirmais karalis savā otrajā gājienā ņems zemes gabalus, tad viņam jau būs jāuzraksta skaitlis no 124. grupas {984; 985; 986; 987; 988; 989; 990; 991}, tātad otrajam karalim tālāk ir jārīkojas attiecīgi kā 2) un 3) punktā – katrreiz, kad pirmais karalis uzraksta skaitli no jaunas grupas, no tās tiek izveidoti trīs pāri.

Rīkojoties pēc aprakstītā algoritma, otrajam karalim vienmēr pietiks zemes gabali, kā arī nebūs nepieciešams pārsniegt uzdevuma nosacījumos minēto zemju limitu (ņemt vai atdod no 1 līdz 5 zemes gabaliem), lai uzrakstītu skaitļus no attiecīgās grupas vai pāra.

Šādi rīkojoties, otrajam karalim vienmēr ir atbildes gājiens neatkarīgi no tā, ko izdara pirmais karalis. Tātad otrais karalis vienmēr var uzvarēt.

2. NODARBĪBA

P.2.1. Kaķu valūta

Miķelim ir 68 sardīnes, kas ir vienādas pēc ārējā izskata, bet visas to masas ir dažādas. Kā ar 100 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast visvieglāko un vissmagāko sardīni?

Atrisinājums. Sadalām sardīnes pa pāriem un salīdzinām katra pāra sardīnes – nosakām vieglāko un smagāko sardīni katrā pārī. Vieglāko sardīni no katra pāra liekam vienā kaudzē, bet smagāko – otrā. Tā kā ir $68 : 2 = 34$ pāri, tad svarus esam izmantojuši 34 reizes (esam izmantojuši 34 svēršanas no 100 atļautajām). Skaidrs, ka visvieglākā sardīne jāmeklē vieglāko sardīņu kaudzē, bet vissmagākā – smagāko sardīņu kaudzē.

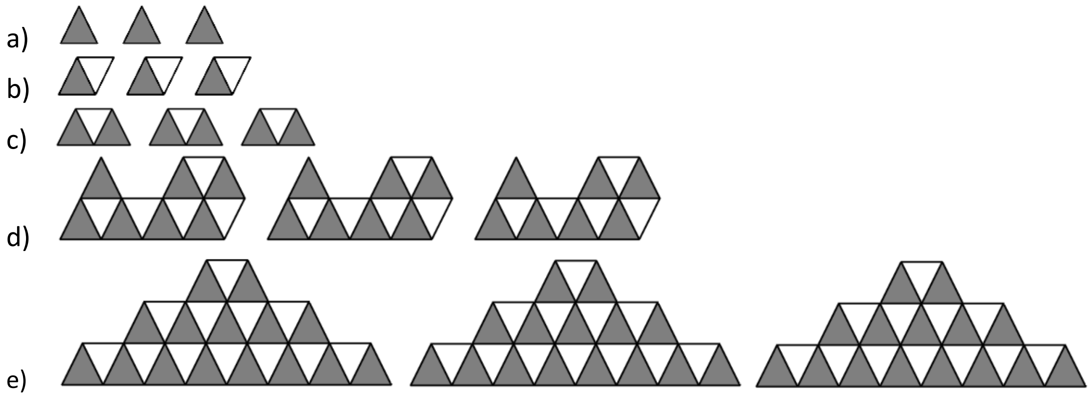
No kaudzes, kurā ir vieglākās sardīnes, paņemam divas un salīdzinām tās (viena svēršana). Smagāko liekam nost – tā mūs vairs neinteresē, bet vieglāko salīdzinām ar nākamo (trešo) sardīni no kaudzes (otra svēršana). Skaidrs, ka vieglākā no šīm trīs sardīnēm ir vieglāka par pirmo nolikto. Vieglāko no abām iepriekšējām salīdzinām ar ceturto sardīni no kaudzes (trešā svēršana), vieglāko no šīm (kas ir vieglākā no visām četrām jau apskatītajām) – ar piekto sardīni no kaudzes utt. Ar trīsdesmit trešo svēršanu salīdzinām pēdējo sardīni ar vieglāko no iepriekšējām divām (tā arī ir vieglākā no visām 33 iepriekšējām) un šādi esam atraduši visvieglāko sardīni.

Tieši tāpat ar 33 svēršanām atrodam vissmagāko sardīni, salīdzinot savā starpā sardīnes no otras kaudzes, tikai šajā gadījumā turpinām salīdzināt smagāko sardīni ar atlikušajām.

Līdz ar to svarus esam izmantojuši $34 + 33 + 33 = 100$ reizes un esam atraduši visvieglāko un vissmagāko sardīni.

P.2.2. Vienādmalu trijstūri

Doti pieci figūru komplekti (skat. 147. att.), katra figūra tajā ir trijos identiskos eksemplāros un sastāv no vienādiem vienādmalu trijstūriem. No kuriem figūru komplektiem, bez pārklāšanās un spraugām var salikt vienādmalu trijstūri? Ja vienādmalu trijstūri izveidot nav iespējams, tad pamato, kāpēc!



147. att.

Atrisinājums. Vienādmalu trijstūri var salikt no komplekta c), d) un e), skat. attiecīgi 148. att., 149. att. un 150. att. Pamatosim, ka no komplekta a) un b) vienādmalu trijstūri salikt nevar.

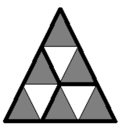
Ja vienādmalu trijstūris ir sadalīts vairākos mazos vienādmalu trijstūros, tad lielā trijstūra malas garumam jābūt vienādam ar vairāku mazo trijstūru malu garumu summu, šāda sakarība ir spēkā arī augstumiem. Apzīmējam mazā trijstūra malas garumu ar a un augstumu, kas vilkts pret šo malu, apzīmējam ar h, tad mazā trijstūra laukums ir

$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$

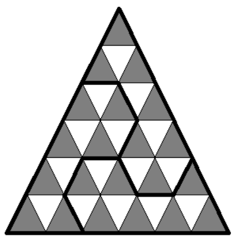
Tādā gadījumā lielā trijstūra laukums ir

$$S_{lielajam} = \frac{(n \cdot a) \cdot (n \cdot h)}{2} = \frac{n^2 \cdot a \cdot h}{2} = n^2 \cdot S,$$

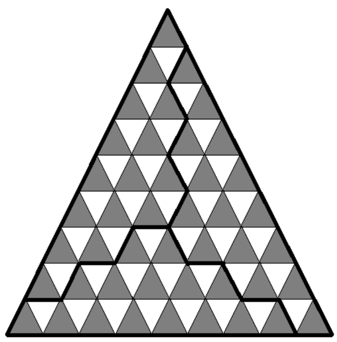
kur n – mazo trijstūru skaits pie pamata. No tā varam secināt, ka lielais trijstūris sastāv no n^2 mazajiem trijstūriem. Tā kā komplektā a) ir 3 mazie trijstūri un komplektā b) ir 6 mazie trijstūri, un ne 3, ne 6 nav naturāla skaitļa kvadrāts, tad no šiem komplektiem nav iespējams salikt vienādmalu trijstūri.



148. att.



149. att.



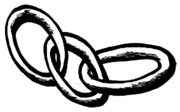
150. att.

P.2.3. Neiespējamā ķēdīte

a) Kā izveidot ķēdīti ar trim posmiem no trim lentītēm, lai, pārgriežot **jebkuru vienu** posmu, visa ķēdīte sadalītos trīs daļās?

Piemēram, 151. att. dotā ķēdīte neder, jo šajā gadījumā ķēdīte sadalīsies trīs atsevišķās daļās tikai tad, ja pārgriezīs vidējo posmu nevis jebkuru posmu, kā prasīts uzdevuma nosacījumos.

b) Kā izveidot ķēdīti ar pieciem posmiem no piecām lentītēm, lai, pārgriežot **jebkuru vienu** posmu, visa ķēdīte sadalītos piecās daļās?

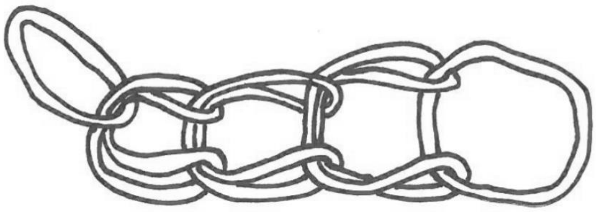


151. att.

Atrisinājums. a) Viens no iespējamajiem risinājumiem parādīts 152. att.

152. att.

b) Piecu posmu ķēdītes gadījumā var rīkoties līdzīgi, kā a) gadījumā, skat. 153. att.



153. att.

P.2.4. Starpbrīdis

Andris pusdienu laikā izdomāja uzdevumu un pierakstīja to uz salvetes:

Pierādi, ka jebkuram naturālam n, skaitlis $\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$ ir vesels skaitlis!

Juris, pusdienu biedra uzdevumu ieraudzījis, tūlīt pat sāka to rēķināt. Palīdzi Jurim atrisināt uzdevumu!

Atrisinājums. Pārrakstām doto izteiksmi formā

$$\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}=\frac{1}{9}\cdot\frac{10^n-1}{9}-\frac{n}{9}$$

Apzīmējot $\frac{10^n-1}{9}=A$, iegūstam

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{10^n-1}{9}-\frac{n}{9}=\frac{A}{9}-\frac{n}{9}=\frac{A-n}{9}$$

Lai pierādītu prasīto, ir jāpamato, ka $(A-n)$ dalās ar 9.

Ievērojam, ka skaitlis A ir formā $A=\frac{10^n-1}{9}=\frac{\overbrace{100\ldots000}^{n\text{ nulles}}-1}{9}=\frac{\overbrace{99\ldots999}^{n\text{ deviņnieki}}}{9}=\underbrace{11\ldots111}_{n\text{ vieninieki}}$. Tātad skaitļa A ciparu summa ir n.

Izmantosim teorēmu: naturāls skaitlis, dalot to ar 9, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 9. Tātad skaitlis A, dalot to ar 9, dod tādu pašu atlikumu, kā skaitlis n (skaitļa A ciparu summa), dalot to ar 9.

Izmantosim vēl vienu teorēmu: divu veselu skaitļu a un b starpība dalās ar veselu skaitli $k>0$ tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar k. Tā kā skaitlis A un n dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 9, tad starpība $(A-n)$ dalās ar 9, kas arī bija jāpierāda.

P.2.5. Apaļā galda bruņinieki

Karalis Artūrs, lai pateiktos saviem 15 labākajiem bruņiniekiem par varoņdarbiem, sarīkoja banketu. Ap apaļu galdu tika novietotas 15 vārdu kartītes – pa vienai katram no 15 bruņiniekiem (viņu vārdi ir dažādi). Kartītes uz galda ir novietotas ļoti rūpīgi – tā, lai tās veidotu regulāru 15-stūri. Katrai kartītei pretī ir novietots krēsls. Diemžēl, kad bruņinieki ieraudzīja ar gardumiem piekrauto banketa galdu, neviens neievēroja vārdu kartītes un apsēdās tā, ka neviens bruņinieks neapsēdās sev paredzētajā vietā. Vai noteikti ir iespējams apaļo galdu pagriezt tā, lai vismaz diviem bruņiniekiem atbilstu viņu vārdu kartītes? Atbildi pamato!

Atrisinājums. Visas kartītes sākumā ir nepareizajās vietās. Pagriezīsim galdu 14 reizes, katru reizi pagriežot galdu par vienu kartīti uz priekšu. Šajos 14 pagriezienos katra no 15 kartītēm būs tieši vienu reizi atradusies pareizajā vietā. Tā kā pagriezienu skaits ir 14, bet kartītes ir 15, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir vismaz viens pagrieziens, kurā vismaz divas kartītes atradās pareizajā vietā.

3. NODARBĪBA

P.3.1. Biznesmenis

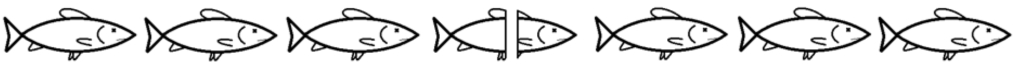
Miķelis ieradās tirgū ar kādu daudzumu lašu. Pirmajam pircējam viņš pārdeva pusi no šiem lašiem un vēl puslasi; otrajam – pusi no atlikušajiem lašiem un vēl puslasi; trešajam – pusi no jaunā atlikuma un puslasi; ceturtajam – pusi no atlikuma un vēl puslasi. Rezultātā visi laši tika pārdoti. Aprēķini, cik lašu Miķelim bija sākumā!

Atrisinājums. Pamatosim, ka Miķelim sākumā bija 15 laši. Analizēsim uzdevumu no beigām.

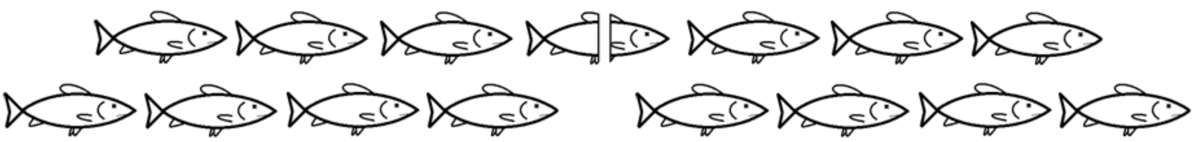
Ceturtajam pircējam tika pārdota puse no atlikušajiem lašiem un vēl puslasis. Tātad pirms tikšanās ar pēdējo pircēju Miķelim bija palicis 1 lasis:

Kad trešais pircējs bija veicis pirkumu, palika viens lasis. Tātad, pieskaitot tam puslasi, zināsim, cik ir puse no lašiem, kas bija Miķelim, pirms viņš satika trešo pircēju. Pirms trešā pircēja Miķelim bija $(1 + 0{,}5) \cdot 2 = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ laši:

Kad otrais pircējs bija veicis pirkumu, palika trīs laši. Tātad, pieskaitot tiem puslasi, zināsim, cik ir puse no lašiem, kas bija Miķelim, pirms viņš satika otro pircēju. Pirms otrā pircēja Miķelim bija $(3 + 0{,}5) \cdot 2 = 3{,}5 \cdot 2 = 7$ laši:



Kad pirmais pircējs bija veicis pirkumu, palika septiņi laši. Tātad, pieskaitot tiem puslasi, zināsim, cik ir puse no lašiem, kas bija Miķelim, pirms viņš satika pirmo pircēju. Pirms pirmā pircēja Miķelim bija $(7 + 0{,}5) \cdot 2 = 7{,}5 \cdot 2 = 15$ laši:



Veicam pārbaudi:

1) pirmajam pircējam tika pārdota puse no 15 lašiem un vēl puslasis, tas ir, septiņi ar pusi lašu un vēl puslasis, kas kopā ir 8 laši. Pāri palika $15 - 8 = 7$ laši;

2) otrajam pircējam tika pārdota puse no 7 lašiem un vēl puslasis, tas ir, trīs ar pusi lašu un vēl puslasis, kas kopā ir 4 laši. Pāri palika $7-4=3$ laši;
3) trešajam pircējam tika pārdota puse no 3 lašiem un vēl puslasis, tas ir, viens ar pusi lasis un vēl puslasis, kas kopā ir 2 laši. Pāri palika $3-2=1$ lasis;
4) ceturtajam pircējam tika pārdota puse no 1 laša un vēl puslasis, tas ir, puslasis un vēl puslasis, kas kopā ir pēdējais lasis.

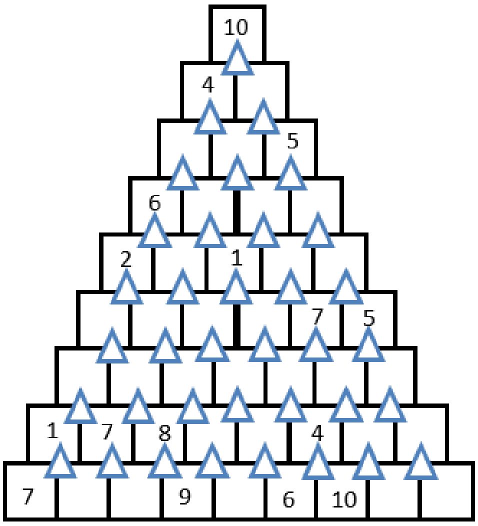
P.3.2. Režģis

Aizpildi tukšās rūtiņas (skat. 154. att.) tā, lai

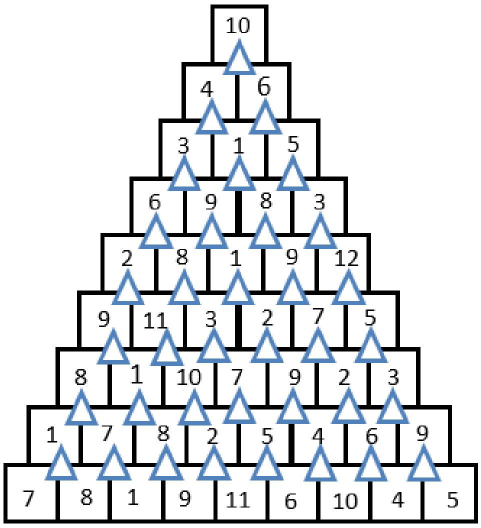
- tajās būtu ierakstīti tikai naturāli skaitļi no 1 līdz 12;
- katrā trijniekā (skaitļi, kas savienoti ar trijstūrīti), saskaitot kādus divus skaitļus, iegūtu trešo skaitli;
- skaitļi horizontālajās rindās neatkārtotos!

Pietiek parādīt vienu piemēru.

Atrisinājums. Vienu derīgu skaitļu izvietojumu skat. 155. att.



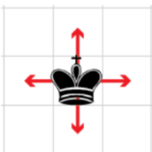
154. att.



155. att.

P.3.3. Parādes gājiens

Šaha figūriņa Karalis vienā gājienā var pārvietoties uz jebkuru blakus esošu lauciņu, kam ar pašreizējo ir kaut viens kopīgs punkts. Ja karalis pāriet uz rūtiņu, kam ar pašreizējo ir kopīga mala, tad viņš ir nogājis ceļu garumā 1 (skat. 156. att.); ja karalis pāriet uz rūtiņu, kam ar pašreizējo ir kopīgs stūris, tad viņš ir nogājis ceļu garumā $\sqrt{2}$ (skat. 157. att.). Karalis apstaigāja 9×9 šaha galdiņu, katrā lauciņā paviesojoties tieši vienu reizi. Kāds ir garākais iespējamais ceļš, ko Karalis varēja veikt?

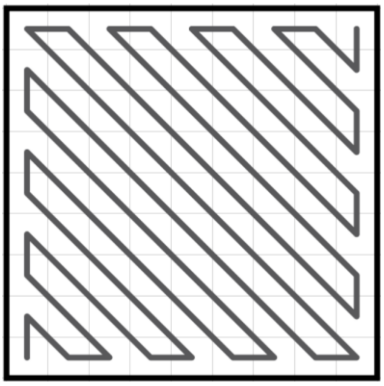


156. att.

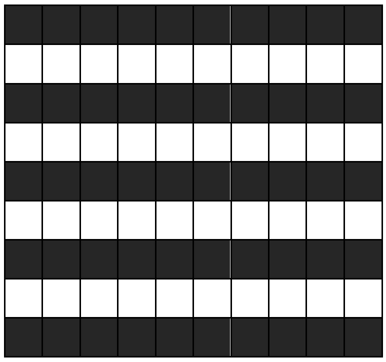
157. att.

Atrisinājums. Garākais iespējamais ceļš ir $16+64\sqrt{2}$, to var iegūt tā, kā parādīts 158. att. Pamatosim, ka garāku ceļu nav iespējams iegūt.

Karalim ir jāapstaigā 9×9 šaha galdiņš, tātad 80 gājienos viņš pabūs visos lauciņos (kopā 81 lauciņš). Karalim ir iespējamas divu dažādu garumu trajektorijas – *uz blakus lauciņu* ar garumu 1 un *pa diagonāli* ar garumu $\sqrt{2}$. Tā kā jāatrod garākais ceļš, tad jācenšas iegūt pēc iespējas vairāk diagonālo gājienu. Lai aprēķinātu maksimālo iespējamo diagonālo gājienu skaitu, pārkrāsosim rūtiņas tā, kā parādīts 159. att. Tādējādi iegūstam 45 melnus lauciņus. Vismaz 44 no šiem melnajiem laiciņiem Karalis savu "parādes gājienu" nebeigs. Jebkurš diagonālais gājiens, veikts no melnā lauciņa, pārvieto karali uz balto lauciņu. Tā kā balto lauciņu pavisam kopā ir 36, tad horizontālo gājienu skaits uz blakus lauciņu būs ne mazāks kā $44 - 36 = 8$. Analoģiskā veidā (pārkrāsojot kolonnas) var secināt, ka nepieciešami ne mazāk kā 8 gājieni vertikālā virzienā. Tātad maršruta garums nepārsniedz $16 + (80 - 16)\sqrt{2} = 16 + 64\sqrt{2}$.



158. att.



159. att.

P.3.4. Starpbrīdis

Juris uz tāfeles uzrakstīja divus vienādojumus: $a^3 + 3ab^2 = 14$ un $b^3 + 3a^2b = 13$. Savukārt Andris, tos izmantojot, aprēķināja izteiksmes $a^2 - b^2$ vērtību. Aprēķini šo vērtību un pierādi, ka tā ir vienīgā iespējamā!

Atrisinājums. Saskaitot abus dotos vienādojumus, iegūstam

$$a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = 14 + 13;$$

$$a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = 27.$$

Ievērojam, ka $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = (a + b)^3$. Tātad $(a + b)^3 = 27$, no kā secinām, ka

$$a + b = 3.$$

Atņemot otro doto vienādojumu no pirmā, iegūstam

$$a^3 + 3ab^2 - (b^3 + 3a^2b) = 14 - 13;$$

$$a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3 = 1.$$

Ievērojam, ka $a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3 = (a - b)^3$. Tātad $(a - b)^3 = 1$ no kā iegūstam, ka

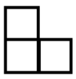
$$a - b = 1.$$

Izmantojot kvadrātu starpības formulu, aprēķinām prasīto

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 3 \cdot 1 = 3.$$

P.3.5. Prāta spēles

Ansītis un Grietiņa spēlē spēli. Viņiem ir 5×5 rūtiņu kvadrāts, kuram sākumā visas rūtiņas ir baltas, melna krāsa un neierobežots skaits *stūrīšu* (skat. 160. att.). *Stūrīša* rūtiņa precīzi noklāj kvadrāta rūtiņu.



160. att.

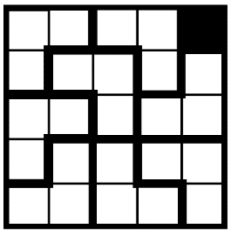
Spēles sākumā Ansītis izvēlas naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 25. Tad Ansītis izvēlas vienu balto rūtiņu un nokrāso melnā krāsā, pēc tam vienu balto rūtiņu melnā krāsā nokrāso Grietiņa, tad atkal Ansītis un tā tālāk, līdz uz laukuma melnā krāsā ir nokrāsotas tieši n rūtiņas.

Ansītis ir uzvarējis, ja spēles beigās baltās rūtiņas var noklāt ar *stūrīšiem* tā, lai nenoklātas būtu ne vairāk kā divas baltas rūtiņas. *Stūrīšus* drīkst likt tikai uz baltajām rūtiņām, *stūrīši* nedrīkst pārklāties, bet tos drīkst pagriezt. Ja nenoklātas paliek vismaz trīs rūtiņas, uzvarējusi ir Grietiņa.

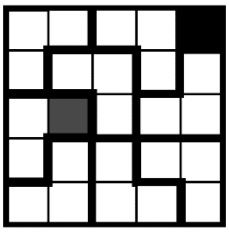
Kāds ir mazākais skaitlis, kuru Ansītis nedrīkst nosaukt, ja vēlas uzvarēt?

Atrisinājums. Mazākais skaitlis, kuru Ansītis nedrīkst nosaukt, ja viņš vēlas uzvarēt, ir skaitlis 4. Pamatosim, ka šis skaitlis ir mazākais.

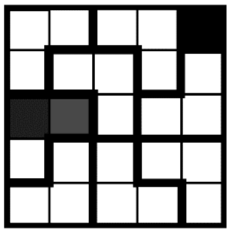
Ja $\boldsymbol{n = 1}$, tad Ansītis var uzvarēt, ja savā pirmajā gājienā nokrāso stūra rūtiņu (skat. 161. att.).



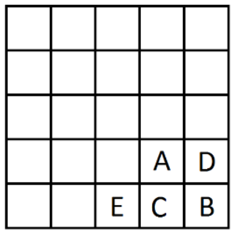
161. att.



162. att.



163. att.



164. att.

Ja $\boldsymbol{n = 2}$, tad Ansītis var uzvarēt, ja savā pirmajā gājienā nokrāso stūra rūtiņu (skat. 162. att.). Atlikušo laukumu domās sadalām stūrīšos. Lai kuru rūtiņu Grietiņa nokrāsotu (piemēram, pelēkā rūtiņa 162. att.), nenoklātas paliks divas baltas rūtiņas vienā no iedomātajiem stūrīšiem. Pārējo laukumu var noklāt ar stūrīšiem, tāpēc Ansītis būs uzvarējis.

Arī gadījumā, kad $\boldsymbol{n = 3}$, Ansītim jārīkojas līdzīgi, tas ir, jānoklāj stūra rūtiņa (skat. 163. att.). Lai kuru rūtiņu Grietiņa nokrāsotu (piemēram, pelēkā rūtiņa 163. att.), Ansītis varēs nokrāsot vienu no divām atlikušajām rūtiņām tajā pašā *stūrītī*. Tad nenoklāta paliks viena balta rūtiņa un Ansītis būs uzvarējis.

Gadījumā, kad $\boldsymbol{n = 4}$, neatkarīgi no Ansīša rīcības, Grietiņa var uzvarēt. Pēc četru gājienu veikšanas būs palikusi 21 balta rūtiņa. Tā kā *stūrītis* sastāv no trīs rūtiņām, tad Ansītim, lai uzvarētu, pēc spēles **visas** baltās rūtiņas būtu jānoklāj ar stūrīšiem.

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka savā pirmajā gājienā Ansītis nenokrāso nevienu no rūtiņām, kas atrodas pēdējās divās rindās (jeb mēs vienmēr varam pagriezt laukumu tā, lai pēdējo divu rindu rūtiņas būtu nenokrāsotas). Grietiņa nākamajā gājienā iekrāso rūtiņu, kas 164. att. atzīmēta ar burtu A (jau ir iekrāsotas 2 rūtiņas). Iespējami trīs gadījumi.

1. Ja Ansītis savā nākamajā gājienā nenokrāso nevienu no rūtiņām B, C vai D, tad Grietiņa nokrāso rūtiņu C. Grietiņa uzvar, jo rūtiņa, kas atzīmēta ar B, paliek nenokrāsota un to nevar noklāt ar *stūrīti*.
2. Ja Ansītis nokrāso rūtiņu B, tad Grietiņa nokrāso rūtiņu E. Grietiņa uzvar, jo rūtiņa, kas atzīmēta ar C, paliek nenokrāsota un to nevar noklāt ar *stūrīti*.
3. Ja Ansītis nokrāso rūtiņu C, Grietiņa nokrāso D (līdzīgi, ja Ansītis izvēlējās rūtiņu D, Grietiņa nokrāso rūtiņu C). Grietiņa uzvar, jo rūtiņa, kas atzīmēta ar B, paliek nenokrāsota un to nevar noklāt ar *stūrīti*.

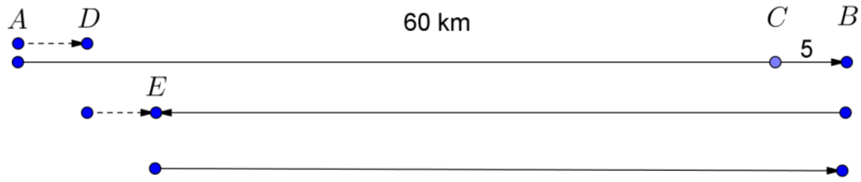
Tātad esam ieguvuši, ka mazākais skaitlis, kuru Ansītis nedrīkst nosaukt, ja viņš vēlas uzvarēt, ir skaitlis 4.

4. NODARBĪBA

P.4.1. Matemātiskais motocikls

Gājēja ātrums ir 5 km/h, bet divvietīga motocikla ātrums – 50 km/h. Plkst. 12:00 punktā A atrodas trīs cilvēki un viens divvietīgs motocikls. Vai visi trīs cilvēki līdz plkst. 15:00 var nokļūt punktā B, kas atrodas 60 km attālumā no punkta A, izmantojot tikai šo motociklu vai pārvietojoties ar kājām?

Atrisinājums. Jā, var. Divi cilvēki ar motociklu brauc 55 km (līdz punktam C, skat 165. att.), pasažieris izkāpj un pēdējos 5 km iet ar kājām (līdz plkst. 15:00 viņš paspēj tos veikt). Motociklists ar pirmo pasažieri ceļā līdz punktam C pavada $\frac{55}{50} = 1{,}1$ stundu. Pa šo laiku otrais cilvēks no punkta A ar kājām ir nokļuvis punktā D, tas ir, veicis $5 \cdot 1{,}1 = 5{,}5$ kilometrus. Lai motociklists satiktos ar nākamo pasažieri, motociklistam un gājējam kopīgi jāveic $55 - 5{,}5 = 49{,}5$ kilometri. Tā kā tuvošanās ātrums ir 55 km/h, satikšanās notiks punktā E pēc $49{,}5 : 55 = 0{,}9$ stundām, kad gājējs būs veicis $5 \cdot 0{,}9 = 4{,}5$ kilometrus. Tātad vēl ir palikusi viena stunda un viņiem kopā vēl jābrauc $60 - (5{,}5 + 4{,}5) = 50$ kilometri. Tos viņi stundas laikā paspēj veikt.



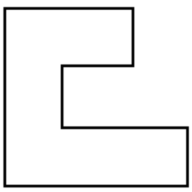
165. att.

P.4.2. Ruka namiņš

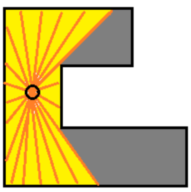
Reiz sensenos laikos kādā tāltālā zemē rūķīšu ciemā izdzisa elektrība. Lai atrisinātu šo problēmu, ciema vecākais rūķis izdalīja visiem rūķīšiem pa svecītei, lai vakara darbi nebūtu jādara pilnīgā tumsā. Svecītes spēj apgaismot visus telpas punktus, kurus spēj aizsniegt taisni, no sveces nākoši stari. Rūķītis Ruks par ciema vecākā lēmumu bija īpaši neapmierināts, jo viņa vienistabas namiņā ir 15 sienas un viņš izskaitļoja, ka visu sienu pilnīgai apgaismošanai būtu nepieciešamas vismaz 5 sveces. Rūķīša istaba no augšas izskatās kā slēgta lauzta līnija, kas sevi nekrusto, un katra siena ir viens nogrieznis šajā daudzstūrī. Uzzīmē vienu piemēru, kāds varētu izskatīties Ruka namiņš!

Piemērs. Pieņemsim, ka Ruka istabai ir tikai 8 sienas (skat. 166. att.). Tad šādu istabu nav iespējams apgaismot tikai ar vienu sveci (skat. 167. att.). Tātad ir nepieciešamas vismaz divas sveces un tās var novietot, piemēram, kā attēlots 168. att.

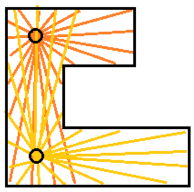
Piezīme. Zīmējumos ar līnijām parādīts, kā iet sveces gaismas stari un kādu platību spēj apgaismot katra svece.



166. att.

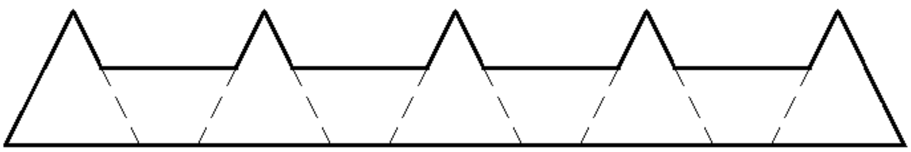


167. att.



168. att.

Atrisinājums. Ruka namiņa formu skat. 169. att. Lai apgaismotu sienas pie trijstūru virsotnēm, svecēm jāatrodas šo trijstūru iekšpusē. Tā kā trijstūriem nav kopīgu punktu, ir vajadzīgas vismaz 5 sveces.



169. att.

P.4.3. Starpbrīdis

Juris vienu dienu neieradās skolā, un tajā dienā Andrim starpbrīžos vairs nebija ar ko kopīgi rēķināt. Tāpēc viņš rēķināja viens pats. Kādā grāmatā viņš atrada uzdevumu:

> Katram veselam skaitlim x izteiksmes $ax^3 + bx^2 + cx + d$, kur a, b, c, d ir veseli skaitļi, vērtība dalās ar 5. Pierādīt, ka katrs no skaitļiem a, b, c un d dalās ar 5.

Palīdzi Andrim atrisināt uzdevumu!

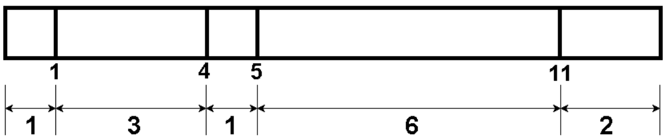
Atrisinājums. Ievietojot izteiksmē $x = 0$, iegūstam, ka d dalās ar 5. Ievietojot $x = 1$, iegūstam, ka $a + b + c + d$ un tātad arī $a + b + c$ dalās ar 5. Ievietojot $x = -1$, iegūstam, ka $-a + b - c + d$ dalās ar 5. No tā un no iepriekšējā izriet, ka $(a + b + c + d) + (-a + b - c + d) - 2d = 2b$ dalās ar 5 (jo katrs no trim saskaitāmajiem dalās ar 5), tātad arī b dalās ar 5. Secinām, ka $a + c$ dalās ar 5.

Ievietojot $x = 2$, iegūstam, ka $(8a + 4b + 2c + d)$ dalās ar 5. Tātad $(8a + 4b + 2c + d) - (4b + d) = 2(4a + c)$ dalās ar 5, no kā iegūstam, ka $4a + c$ dalās ar 5. Tātad arī $(4a + c) - (a + c) = 3a$ dalās ar 5. Līdz ar to skaitļi a un c dalās ar 5. Tātad esam ieguvuši, ka katrs no skaitļiem a, b, c un d dalās ar 5.

P.4.4. Rasēšanas stundā

Emīlam ir lineāls, kura garums ir tieši 33 cm. Tam ir palikušas tikai astoņas iedaļas, pārējās ir izdzisušas. Un tomēr ar šo lineālu Emīls līdz stundas beigām iemanījās izmērīt jebkuru garumu veselos centimetros no 1 līdz 33. Katra garuma izmērīšanai pietiek tikai vienreiz pielikt lineālu. Kā izvietotas neizdzisušās lineāla iedaļas?

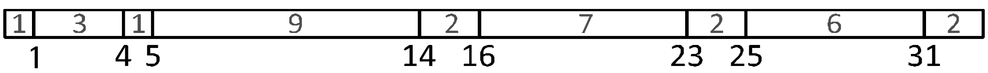
Piemērs. Dots 13 cm garš lineāls ar četrām iedaļām (skat. 170. att.), ar kuru var nomērīt jebkuru garumu veselos centimetros no 1 līdz 13. Piemēram, lai nomērītu 4 cm, var izmantot iedaļas platumā 1 cm un 3 cm, lai nomērītu 8 cm, var izmantot iedaļas platumā 6 cm un 2 cm.



170. att.

Atrisinājums. Neizdzisušās iedaļas var būt izvietotas tā, kā parādīts 171. att. Tad ar šo lineālu var nomērīt jebkuru garumu veselos centimetros:

$1 = 1;$	$12 = 1 + 9 + 2;$	$23 = 1 + 3 + 1 + 9 + 2 + 7;$
$2 = 2;$	$13 = 3 + 1 + 9;$	$24 = 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2;$
$3 = 3;$	$14 = 1 + 3 + 1 + 9;$	$25 = 1 + 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2;$
$4 = 1 + 3;$	$15 = 7 + 2 + 6;$	$26 = 9 + 2 + 7 + 2 + 6;$
$5 = 1 + 3 + 1;$	$16 = 1 + 3 + 1 + 9 + 2;$	$27 = 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6;$
$6 = 6;$	$17 = 7 + 2 + 6 + 2;$	$28 = 9 + 2 + 7 + 2 + 6 + 2;$
$7 = 7;$	$18 = 9 + 2 + 7;$	$29 = 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6 + 2;$
$8 = 6 + 2;$	$19 = 1 + 9 + 2 + 7;$	$30 = 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6;$
$9 = 9;$	$20 = 9 + 2 + 7 + 2;$	$31 = 1 + 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6;$
$10 = 1 + 9;$	$21 = 1 + 9 + 2 + 7 + 2;$	$32 = 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6 + 2;$
$11 = 9 + 2;$	$22 = 3 + 1 + 9 + 2 + 7;$	$33 = 1 + 3 + 1 + 9 + 2 + 7 + 2 + 6 + 2.$



171. att.

P.4.5. Maģiskās rūtis

Dots $n \times m$ rūtiņu laukums. Katrā rūtiņā sākumā ir ierakstīts kāds naturāls skaitlis. Viena gājiena laikā drīkst vai nu patvaļīgi izvēlētas rindiņas visus skaitļus dubultot, vai arī patvaļīgi izvēlētas kolonnas visus skaitļus samazināt par 1. Vai vienmēr ir iespējams panākt situāciju, kad pēc galīga skaita gājienu katrā laukuma rūtiņā ir ierakstīta 0?

Atrisinājums. Jā, vienmēr ir iespējams panākt situāciju, kad pēc galīga skaita gājienu katrā laukuma rūtiņā var būt ierakstīta 0.

Parādīsim, kā vienas kolonnas visus skaitļus pārvērst par 0. Apskatām vienu kolonnu, kas satur n rūtiņas. Sanumurēsim tās rūtiņas no 1 līdz n (uz leju). Pieņemsim, ka a_i ir i-tās rūtiņas vērtība. Tā kā rindu secība neko nemaina, tad varam tās sakārtot tā, lai izvēlētajā kolonnā skaitļi būtu nedilstošā secībā: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

- Ja $a_n = 1$, tad samazinām visus kolonnas skaitļus par 1 un iegūstam, ka šajā kolonnā katrā rūtiņā ir ierakstīta 0.
- Ja $a_n \neq 1$, tad pieņemsim, ka visi skaitļi, kas atrodas virs $j+1$ rūtiņas, ir 1. Apskatīsim algoritmu, kā pārveidot a_{j+1} vērtību par 1, saglabājot visu pārējo rūtiņu, kuras atrodas virs izvēlētās rūtiņas, vērtības 1.
  - Gadījumā, ja $a_{j+1} = 2$, tad jādubulto visas augšējās rindas, bet kolonnas skaitļi jāsamazina par 1. Iegūsim, ka visi skaitļi kolonnā līdz $j+1$ (ieskaitot) ir 1.
  - Gadījumā, ja $a_{j+1} > 2$. Tad jādubulto visas augšējās rindas tā, ka tajās ierakstītais skaitlis 1 pārvēršas par skaitli 2. Tad no visas kolonnas atņem 1. Tagad visās augšējās rindās ir ierakstīts 1, bet a_{j+1} ir samazināts par 1. Atkārtojot šo algoritmu, ir iespējams iegūt, ka $a_{j+1} = 1$. Šādā veidā var panākt, ka visi vienas kolonnas elementi pēc galīga darbību skaita ir 1.

  Tad no kolonnas visiem elementiem atņem 1, un iegūst kolonnu, kuras elementi ir tikai 0.

Gadījumā, ja kolonnu skaits ir lielāks nekā 1, tad vispirms pārveido vienas kolonnas visus skaitļus par 1, kā aprakstīts iepriekš. Tad no kolonnas visiem elementiem atņem 1, un iegūst kolonnu, kuras elementi ir tikai 0. Tādā pat veidā nākamo kolonnu pārveido par visām nullēm, līdz gājienu katrā laukuma rūtiņā ir ierakstīta 0.

5. NODARBĪBA

P.5.1. Tējas laiks

Pieci cilvēki var izdzert visu ūdeni no patvāra, kas turpina vārīties visu tējas dzeršanas laiku, vienā stundā, bet 10 cilvēki – 35 minūtēs. Cik ilgā laikā visu patvārī esošo ūdeni izdzers 8 cilvēki, ja visi uzdevumā minētie cilvēki dzer tēju ar vienādu ātrumu? Ievēro, ka ūdens iztvaiko!

Atrisinājums. Apzīmējam: x – tējas daudzums, ko viens cilvēks izdzer vienā minūtē; y – tējas daudzums, kas iztvaiko vienā minūtē; V – patvāra tilpums; t – laiks minūtēs, kāds nepieciešams, lai 8 cilvēki izdzertu patvārī esošo ūdeni.

Izmantojot doto informāciju, iegūstam divus vienādojumus:

$$(5x + y) \cdot 60 = V \tag{1}$$
$$(10x + y) \cdot 35 = V \tag{2}$$

Tā kā vienādojumu (1) un (2) labās puses ir vienādas, tad vienādas ir arī to kreisās puses:

$$(5x + y) \cdot 60 = (10x + y) \cdot 35;$$
$$300x + 60y = 350x + 35y;$$
$$25y = 50x;$$
$$y = 2x. \tag{3}$$

Ievietojot sakarību (3) vienādojumā (1), iegūstam

$$(5x + 2x) \cdot 60 = V;$$
$$7x \cdot 60 = V;$$
$$420x = V. \tag{4}$$

Gadījumā, ja tēju dzer 8 cilvēki, iegūstam

$$(8x + y) \cdot t = V \tag{5}$$

Ievietojot vienādojumā (5) sakarības (3) un (4), iegūstam

$$(8x + 2x) \cdot t = 420x;$$
$$10x \cdot t = 420x;$$
$$t = 42.$$

Tātad laiks, kurā visu patvārī esošo ūdeni izdzers 8 cilvēki, ir 42 minūtes.

P.5.2. Baraviku iela

Rūķu pilsētā, Baraviku ielā atrodas seši nami. Katrā namā dzīvo pa rūķītim: Antons, Brencis, Cukuriņš, Dāvis, Emīls un Foršais. Zināms, ka Antons un 1. nama iedzīvotājs strādā ogļu raktuvēs, Emīls un 2. nama iemītnieks ir zeltrači, bet 3. nama iemītnieks un Cukuriņš – meža uzraugi. Brenča un Foršā mīļākais ēdiens ir sēņu sacepums, taču 3. nama iemītnieks sēnes neēd, 5. nama iemītnieks ir vecāks nekā Antons, 6. nama iemītnieks – vecāks nekā Cukuriņš. Brencis un 1. nama iemītnieks nēsā tikai sarkanas krāsas cepures, bet Cukuriņš un 5. nama iemītnieks – tikai zaļas. Nosaki, kurā namā dzīvo katrs rūķis un kāda ir katra rūķa profesija!

Atrisinājums. Uzskaitīsim faktus, kas minēti uzdevuma nosacījumos.

1) Antons un 1. nama iedzīvotājs strādā ogļu raktuvēs.
2) Emīls un 2. nama iemītnieks ir zeltrači.
3) 3. nama iemītnieks un Cukuriņš ir meža uzraugi.
4) Brenča un Foršā mīļākais ēdiens ir sēņu sacepums, taču 3. nama iemītnieks sēnes neēd.
5) 5. nama iemītnieks ir vecāks nekā Antons.
6) 6. nama iemītnieks ir vecāks nekā Cukuriņš.
7) Brencis un 1. nama iemītnieks nēsā tikai sarkanas krāsas cepures.
8) Cukuriņš un 5. nama iemītnieks nēsā tikai zaļas krāsas cepures.

Lai būtu vieglāk atrisināt šo uzdevumu, pakāpeniski var aizpildīt tabulu (skat. 172. att.).

- No 1) izriet, ka Antons nav 1. nama iedzīvotājs (tabulā atzīmējam ar "–"). Tā kā Antons strādā ogļu raktuvēs (atzīmējam ar "x"), tad viņš nav ne zeltracis, ne meža uzraugs. Atzīmējam, ka 1. namā dzīvo ogļracis.
- No 2) iegūstam, ka Emīls nedzīvo 2. namā; Emīls un 2. nama iedzīvotājs ir zeltracis, tātad viņi nav ogļrači un meža uzraugi. Tā kā Emīls ir zeltracis, tad no 1) izriet, ka viņš nedzīvo 1. namā.
- No 3) iegūstam, ka Cukuriņš nedzīvo 3. namā; Cukuriņš un 3. nama iedzīvotājs ir meža uzraugi, tātad nav ne zeltrači, ne ogļrači.
- Tā kā Cukuriņš nav zeltracis, tad viņš nedzīvo 2. namā. Tā kā Emīls nav meža uzraugs, tad viņš nedzīvo 3. namā. Līdzīgi arī Antons nedzīvo ne 2., ne 3. namā.
- No 4) izriet, ka Brencis un Foršais nedzīvo 3. namā. Tātad 3. namā dzīvo Dāvis. Tas nozīmē, ka Dāvis nevar dzīvot nevienā no pārējiem namiem. Tā kā 3. nama iedzīvotājs ir meža uzraugs, tad Dāvis ir meža uzraugs un viņam nav neviena no abām pārējām profesijām.
- No 6) iegūstam, ka Cukuriņš nedzīvo 6. namā, no 8) izriet, ka Cukuriņš nedzīvo 5. namā, no 7) iegūstam, ka Cukuriņš nedzīvo arī 1. namā. Iegūstam, ka Cukuriņš dzīvo 4. namā. Tātad 4. namā nedzīvo neviens no pārējiem rūķiem.
- No 5) iegūstam, ka Antons nedzīvo 5. namā. Tātad vienīgā iespēja, ka Antons dzīvo 6. namā un šajā namā nedzīvo neviens no pārējiem rūķiem.

- No 7) iegūstam, ka Brencis nedzīvo 1. namā, no 8) izriet, ka Brencis nedzīvo arī 5. namā. Iegūstam, ka Brencis dzīvo 2. namā un šajā namā nedzīvo neviens no pārējiem rūķiem. Tā kā 2. namā dzīvo zeltracis, tad Brencis ir zeltracis.
- Ievērojam, ka Emīls dzīvo 5. namā, tātad Foršais dzīvo 1. namā. Tā kā 1. namā dzīvo ogļracis, tad Foršais ir ogļracis.

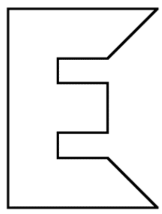
	1. nams	2. nams	3. nams	4. nams	5. nams	6.nams	Zeltracis	Ogļracis	Meža uzraugs
Antons	–	–	–	–	–	x	–	x	–
Brencis	–	x	–	–	–	–	x	–	–
Cukuriņš	–	–	–	x	–	–	–	–	x
Dāvis	–	–	x	–	–	–	–	–	x
Emīls	–	–	–	–	x	–	x	–	–
Foršais	x	–	–	–	–	–	–	x	–
Zeltracis	–	x	–	–	x	–			
Ogļracis	x	–	–	–	–	x			
Meža uzraugs	–	–	x	x	–	–			

172. att.

Esam ieguvuši, ka Antons strādā ogļu raktuvēs un dzīvo 6. namā, Brencis ir zeltracis un dzīvo 2. namā, Cukuriņš ir meža uzraugs un dzīvo 4. namā, Dāvis ir meža uzraugs un dzīvo 3. namā, Emīls ir zeltracis un dzīvo 5. namā, Foršais ir ogļracis un dzīvo 1. namā.

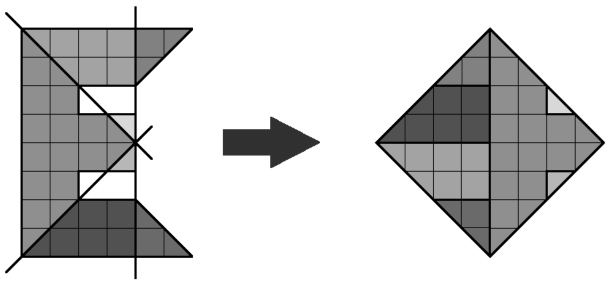
P.5.3. Burta šķērēšana

Sagriez 173. att. doto figūru septiņās daļās ar ne vairāk kā četriem taisniem griezieniem un no iegūtajām daļām saliec kvadrātu!



173. att.

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt ar 3 taisniem griezieniem, skat. 174. att.



174. att.

P.5.4. Starpbrīdis

Andris un Juris ieradās pusdienās ar novēlošanos, un bija vairs palicis tikai viens ābols. Viņi nolēma strīdu izšķirt tā, kā viņi to parasti dara – ābolu saņems tas, kurš visātrāk atrisinās uzdevumu.

Dots, ka a, b, c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ un $\frac{b+c}{a}$ ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}<9$.

Pamēģini atrisināt arī Tu!

Atrisinājums. Aplūkosim divus gadījumus.

1) Ja $a=b=c$; tad $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{a+a}{a}+\frac{a+a}{a}+\frac{a+a}{a}=2+2+2=6<9$.
2) Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $a \geq b \geq c$ un tie visi nav vienādi. No $a \geq b$, nevienādības abām pusēm pieskaitot a, iegūstam, ka $2a \geq b+a$. Ievērojam, ka $b+a>b+c$ (nevar būt $b+a \geq b+c$, jo tad $a \geq c$, bet jābūt $a>c$ – pretējā gadījumā visi trīs skaitļi a, b, c būtu vienādi). Tātad esam ieguvuši, ka $2a \geq b+a>b+c$, turklāt tā kā $\frac{b+c}{a}$ ir naturāls skaitlis, tas ir, $b+c$ dalās ar a, tad iegūstam, ka $b+c=a$. Tātad
$$\frac{b+c}{a}=\frac{a}{a}=1;$$
$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+c+c}{b}=\frac{b+2c}{b};$$
$$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c+b}{c}=\frac{2b+c}{c}.$$
Tā kā $\frac{a+c}{b}=\frac{b+2c}{b}=1+\frac{2c}{b}$ ir naturāls skaitlis, tad $2c$ dalās ar b un $b \leq 2c$. Tātad
$$\frac{2b+c}{c} \leq \frac{4c+c}{c}=5. \qquad (1)$$
Tā kā $c \leq b$, tad
$$\frac{b+2c}{b} \leq \frac{b+2b}{b}=3. \qquad (2)$$
Vienādība sakarībai (1) ir spēkā tikai, ja $b=2c$, un vienādība sakarībai (2) ir spēkā, ja $b=c$. Pēdējās divas vienādības vienlaicīgi var pastāvēt tikai gadījumā, ja $b=c=0$, kas neder, jo b un c ir naturāli skaitļi.
Līdz ar to iegūstam, ka
$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{2b+c}{c}+\frac{b+2c}{b}+1<5+3+1=9.$$

P.5.5. Profesora mīkla

Profesoram Cipariņam uzdāvināja 200 gabaliņu puzli. Taču tā nebija parasta puzle. Visa puzle kopumā ir izkrāsota n krāsās. Atrodi mazāko iespējamo n vērtību, ja jebkuriem 25 puzles gabaliņiem ir kopīga krāsa, taču nav tādas krāsas, kas ir sastopama visos puzles gabaliņos!

Atrisinājums. Mazākā iespējamā n vērtība ir 26. Apzīmēsim krāsas ar $K_1, K_2, \ldots, K_{26}$. Tad puzle var būt nokrāsota šādi: puzles gabaliņš P_1 satur visas krāsas, izņemot K_1, puzles gabaliņš P_2 satur visas krāsas, izņemot K_2, ..., puzles gabaliņš P_{26} satur visas krāsas, izņemtot K_{26}, un katrs no atlikušajiem gabaliņiem satur visas 26 krāsas.

Pamatosim, ka n vērtība nevar būt mazāka. Pieņemsim, ka $n \leq 25$. Tā kā nav tādas krāsas, kas ir izmantota visos puzles gabaliņos, tad noteikti ir tāds puzles gabaliņš, kas nesatur krāsu K_1, tāds puzles gabaliņš, kas nesatur krāsu K_2, ..., tāds puzles gabaliņš, kas nesatur krāsu K_n (pretējā gadījumā kāda no krāsām būtu sastopama visos puzles gabaliņos, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem). Paņemot šos puzles gabaliņus un vēl citus no atlikušajiem gabaliņiem tā, lai kopā būtu paņemti 25 gabaliņi, iegūstam, ka tiem visiem nav nevienas kopīgas krāsas. Tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad ir nepieciešamas vismaz 26 krāsas.

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

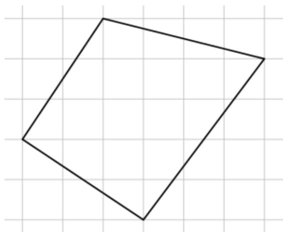
5. KLASE

S.5.1. Katrā lodziņā ieraksti “+” vai “−” zīmi tā, lai iegūtu patiesu vienādību!

$$64 \square 32 \square 16 \square 8 \square 4 \square 2 \square 1 = 81$$

Atrisinājums. Zīmes jāizvēlas šādi: $64 + 32 - 16 + 8 - 4 - 2 - 1 = 81$.

S.5.2. Nosaki izmērus visiem tādiem taisnstūriem, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru laukums ir tikpat liels kā 175. att. dotā četrstūra laukums!



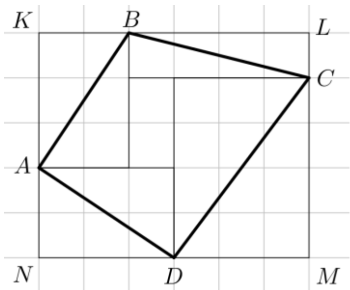
175. att.

Atrisinājums. Lai aprēķinātu dotā četrstūra laukumu, ievietosim to taisnstūrī $KLMN$ (skat. 176. att.). Tad

$$S_{ABCD} = S_{KLMN} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMD} - S_{DNA} =$$

$$= 5 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 30 - 3 - 2 - 6 - 3 = 16$$

Tātad meklēto taisnstūru izmēri var būt 1×16, 2×8 vai 4×4.



176. att.

Piezīme. Četrstūra $ABCD$ laukumu var aprēķināt arī saskaitot četru trijstūru un taisnstūra laukumu.

S.5.3. Atrodi lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 3 un kam visi cipari ir dažādi!

Atrisinājums. Lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir 98765, taču, to dalot ar 3, atlikumā ir 2. Nākamais lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir 98764, bet, to dalot ar 3, atlikumā ir 1. Nākamais lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir **98763** un tas dalās ar 3, tātad ir meklētais skaitlis.

S.5.4. Vai astoņstūra virsotnēs var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 8 (katrā virsotnē citu skaitli) tā, lai, katrai malai, aprēķinot tās galos ierakstīto skaitļu starpību, visas astoņas iegūtās starpības būtu dažādas?

Atrisinājums. Ir iespējamas septiņas dažādas starpības: no 1 (ja blakus virsotnēs ierakstīti divi pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi) līdz 7 (ja blakus virsotnēs ierakstīti skaitļi 8 un 1). Tā kā astoņstūrim ir astoņas malas, tad kopā būs astoņas starpības, bet tas nozīmē, ka vismaz divas no tām būs vienādas (Dirihlē princips).

S.5.5. Kādā mēnesī trīs trešdienas bija pāra datumos. Kāda nedēļas diena bija šī mēneša 18. datums?

Atrisinājums. Ja kādai no mēneša trešdienām ir pāra datums, tad nākamajā nedēļā trešdienai ir nepāra datums, un otrādi. Datumu tai mēneša trešdienai, kurai pirmajai datums ir pāra skaitlis, apzīmēsim ar n. Tad nākamā "pāra" trešdiena ir pēc divām nedēļām un tās datums ir $n+14$. Līdzīgi trešās "pāra" trešdienas datums ir $n+28$. Tā kā vienā mēnesī nav vairāk kā 31 diena, tad n nav lielāks kā 3, un tā kā n ir pāra skaitlis, tad $n=2$. Tātad mēneša 2. un 16. datums ir trešdiena, bet 18. datums ir piektdiena.

6. KLASE

S.6.1. Atrodi tādu skaitli, kas dalot ar 11, dod atlikumu 5, bet, dalot ar 13, dod atlikumu 9.

Atrisinājums. Der, piemēram, skaitlis 126, jo $126 : 11 = 11, atl. 5$ un $126 : 13 = 9, atl. 9$.

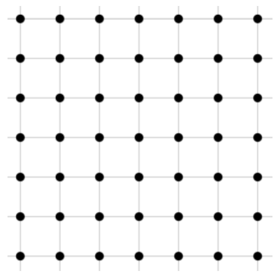
S.6.2. Kādā valstī ir tikai 15-solāru un 20-solāru monētas. Makvīnam bija dažas monētas. Divas monētas jeb piekto daļu savas naudas viņš atdeva māsai, bet pusi no atlikušās naudas jeb trīs monētas samaksāja par saldumiem. Cik naudas Makvīnam bija sākumā?

Atrisinājums. Iespējami trīs gadījumi, kādas divas monētas Makvīns varētu atdot māsai.

1) Ja viņš atdotu divas 15-solāru monētas, tad sākumā viņam būtu bijuši $2 \cdot 15 \cdot 5 = 150$ solāri. Pēc atdošanas viņam atliktu 120 solāri un puse no atlikuma ir 60 solāri, ko var samaksāt ar trīs 20-solāru monētām.
2) Ja viņš atdotu vienu 15-solāru un vienu 20-solāru monētu, tad sākumā viņam būtu bijuši $(15+20) \cdot 5 = 175$ solāri. Pēc atdošanas viņam atliktu $175 - 35 = 140$ solāri, bet puse no atlikuma ir 70 solāri, ko nevar samaksāt ar trīs monētām. Tātad šis gadījums neder.
3) Ja viņš atdotu divas 20-solāru monētas, tad sākumā viņam būtu bijuši $2 \cdot 20 \cdot 5 = 200$ solāri. Pēc atdošanas viņam atliktu 160 solāri, bet puse no atlikuma ir 80 solāri, ko nevar samaksāt ar trīs monētām.

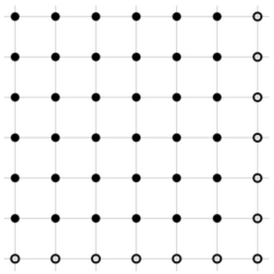
Tātad vienīgā iespēja, ka sākumā Makvīnam bija 150 solāri.

S.6.3. Uz rūtiņu lapas, rūtiņu virsotnēs atzīmēti 49 punkti (skat. 177. att.). Cik ir tādu kvadrātu, kuru virsotnes ir šajos punktos un kuru malas iet pa rūtiņu līnijām?

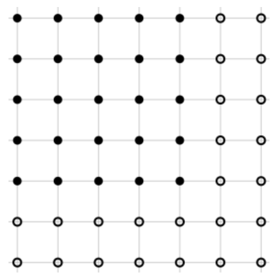


177. att.

Atrisinājums. Kvadrātu ar izmēriem 1×1 augšējā kreisā virsotne var atrasties jebkurā no $6 \cdot 6 = 36$ melnajiem punktiem (skat. 178. att.). Tātad pavisam ir 36 kvadrāti ar izmēriem 1×1.



178. att.



179. att.

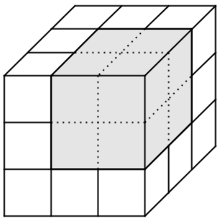
Kvadrātu ar izmēriem 2×2 augšējā kreisā virsotne var atrasties jebkurā no $5 \cdot 5 = 25$ melnajiem punktiem (skat. 179. att.). Tātad pavisam ir 25 kvadrāti ar izmēriem 2×2. Līdzīgi iegūst, ka ir 16 kvadrāti ar izmēriem 3×3, deviņi kvadrāti ar izmēriem 4×4, četri kvadrāti ar izmēriem 5×5 un viens kvadrāts ar izmēriem 6×6. Tātad pavisam kopā ir $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$ kvadrāts ar uzdevumā aprakstītajām īpašībām.

S.6.4. Kāds ir lielākais iespējamais svētdienu skaits gadā?

Atrisinājums. Tā kā gadā nav vairāk kā 366 dienas, tad gadā nav vairāk kā 52 pilnas nedēļas, jo $7 \cdot 52 = 364$. Ja svētdienā ir arī gada pirmā diena, tad gadā būs 53 svētdienas, vairāk svētdienu nevar būt.

S.6.5. Vai kubu var sagriezt 20 mazākos kubos?

Atrisinājums. Jā, to var izdarīt, skat., piemēram, 180. att., kurā dots kubs, kas sagriezts 19 kubiņos ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$ un vienā kubā ar izmēriem $2 \times 2 \times 2$.



180. att.

7. KLASE

S.7.1. Apskata visus tādus vienādojumus $ax + b = cx + d$, kur a, b, c, d katrs ir ar vērtību 1; 2 vai 3.

a) Uzraksti vienu šādu vienādojumu, kuram nav sakņu!

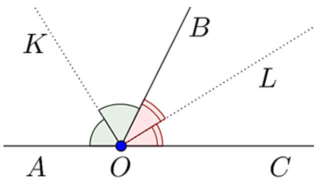
b) Cik starp šiem vienādojumiem ir tādu, kuriem nav sakņu?

Atrisinājums. a) Piemēram, der vienādojums $3x + 1 = 3x + 2$.

b) Lai dotajam vienādojumam nebūtu sakņu, jāizpildās $a = c$ un $b \neq d$. Vienādība $a = c$ var izpildīties trīs gadījumos: vai nu $a = c = 1$, vai $a = c = 2$, vai $a = c = 3$. Katrā no šiem gadījumiem b un d var izvēlēties sešos veidos. Tātad pavisam kopā tādu vienādojumu ir $3 \cdot 6 = 18$.

S.7.2. Pierādi, ka blakusleņķu bisektrises ir perpendikulāras!

Atrisinājums. Blakusleņķus apzīmējam ar $\sphericalangle AOB$ un $\sphericalangle BOC$, ar KO apzīmējam $\sphericalangle AOB$ bisektrisi un ar OL – leņķa $\sphericalangle BOC$ bisektrisi (skat. 181. att.). No blakusleņķu īpašības izriet, ka $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180°$. No bisektrises definīcijas iegūstam, ka $\sphericalangle KOB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$ un $\sphericalangle BOL = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC$. Tad $\sphericalangle KOB + \sphericalangle BOL = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC) = 180° : 2 = 90°$. Tātad $KO \perp OL$, kas arī bija jāpierāda.



181. att.

S.7.3. Atrodi visus tādus trīsciparu skaitļus, kuriem vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

- visi cipari ir dažādi,
- pirmais cipars ir vislielākais un pēdējais – vismazākais,
- ciparu summa ir pāra skaitlis,
- starpība starp pirmo un otro ciparu ir 3 reizes lielāka nekā starpība starp otro un trešu ciparu!

Atrisinājums. Apzīmēsim doto skaitli ar $\overline{abc}$, $a > b > c$.

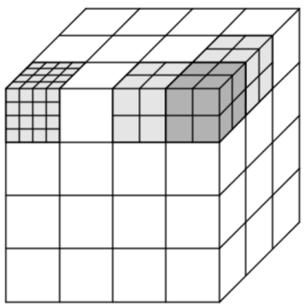
Aplūkosim gadījumus, kāda var būt starpība starp otro un trešo ciparu, tas ir, $b - c$.

1) Ja $b - c = 1$ jeb $b = c + 1$, tad $a - b = 3$ jeb $a = b + 3$. Pēc kārtas ievietojot c vietā visus iespējamos ciparus, iegūstam skaitļus 410, 521, 632, 743, 854, 965. Tā kā ciparu summai ir jābūt pāra skaitlim, tad der tikai skaitļi 521, 743 un 965.
2) Ja $b - c = 2$ jeb $b = c + 2$, tad $a - b = 6$ jeb $a = b + 6$. Pēc kārtas ievietojot c vietā visus iespējamos ciparus, iegūstam skaitļus 820 un 931. Der tikai skaitlis 820, jo tā ciparu summa ir pāra skaitlis.
3) Ja $b - c \geq 3$, tad $a - b \geq 9$, taču tā kā a un b ir cipari, tad vienīgā iespēja, ka $a = 9$ un $b = 0$, bet tas neder, jo tad nav tāda cipara c, ka $c < b$.

Tātad meklētie skaitļi ir 521, 743, 820 un 965.

S.7.4. Vai kubu var sagriezt 148 mazākos kubos?

Atrisinājums. Jā, to var izdarīt (skat. 182. att.). Sākumā sadalām kubu $4 \times 4 \times 4 = 64$ vienādos kubos. Tad vienu no mazajiem kubiem vēlreiz sadalām 64 mazākos kubiņos. Kubiņu skaits palielinās par 63 (rodas 64 jauni kubiņi, bet pazūd viens iepriekšējais). Tātad tagad kubs ir sadalīts $64 + 63 = 127$ kubos. Vēl pietrūkst $148 - 127 = 21$ kubiņš. Tos var iegūt, sadalot vēl trīs kubus pa $2 \times 2 \times 2 = 8$ mazākiem kubiņiem, jo tad radīsies $3 \cdot 8 = 24$ jauni kubiņi, bet pazudīs trīs iepriekšējie.



182. att.

S.7.5. Sešas figūriņas novietotas tā, kā parādīts 183. att.

○	○	○	●	●	●	

183. att.

	●	●	●	○	○	○

184. att.

Vienā gājienā vienu figūriņu var pārbīdīt uz blakus rūtiņu, ja tā ir tukša, vai arī pārcelt pāri vienai, divām vai trim figūriņām, ja rūtiņa, uz kuru to pārceļ, ir tukša. Jāiegūst 184. att. parādītais figūriņu izvietojums.

a) Parādi, kā to var izdarīt, izmantojot 5 gājienus!

b) Vai to var izdarīt, izmantojot tikai 4 gājienus?

Atrisinājums. a) Piecos gājienos to var izdarīt tā, kā parādīts 185. att.

	○	○	○	●	●	●	
1.	○	○		●	●	●	○
2.	○	○	●	●	●		○
3.	○		●	●	●	○	○
4.	○	●	●	●		○	○
5.		●	●	●	○	○	○

185. att.

b) Nē, četros gājienos to nevar izdarīt. Sākumā visas trīs baltās figūriņas atrodas lauciņos, kuros beigās tās neatradīsies, tātad katra baltā figūriņa tiks pārvietota uz citu rūtiņu un tam nepieciešami trīs gājieni. Arī divas melnās figūriņas atrodas lauciņos, kuros beigu stāvoklī tās neatradīsies, tātad arī abu melno figūriņu pārvietošanai uz citu rūtiņu nepieciešami divi gājieni. Līdz ar to pavisam kopā tiks izdarīti vismaz pieci gājieni.

8. KLASE

S.8.1. Doti astoņi skaitļi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Sadali tos divās grupās tā, lai pirmās grupas skaitļu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu summu un pirmās grupas skaitļu kvadrātu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu kvadrātu summu!

Atrisinājums. Der šādas skaitļu grupas: {1; 4; 6; 7} un {2; 3; 5; 8}. Skaitļu summa abās grupās ir 18, bet skaitļu kvadrātu summa ir 102.

S.8.2. Vienādojumam $ax = b$, kur a un b – kaut kādi doti skaitļi, x – mainīgais, nav atrisinājuma. Cik atrisinājumu ir vienādojumam $bx = a$?

Atrisinājums. Tā kā vienādojumam $ax = b$ nav atrisinājuma, tad $a = 0$ un $b \neq 0$. Tātad vienādojumam $bx = a$ jeb $bx = 0$ ir viens atrisinājums $x = 0$.

S.8.3. Cik virsotņu ir izliektam daudzstūrim, kuram diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu?

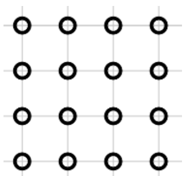
1. atrisinājums. Ja daudzstūrim diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu, tad arī no katras virsotnes iziet 14 reizes vairāk diagonāļu nekā malu. Tātad no vienas virsotnes iziet 28 diagonāles. Tātad daudzstūrim ir 31 virsotne (izejas virsotne, divu izejošo malu galapunkti, 28 izejošo diagonāļu galapunkti).

2. atrisinājums. Daudzstūra diagonāļu skaitu var aprēķināt pēc sakarības $\frac{m\cdot(m-3)}{2}$, kur m – daudzstūra malu skaits. Tā kā daudzstūrim diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu, tad $14m = \frac{m\cdot(m-3)}{2}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar 2 un izdalot ar $m \neq 0$, iegūsim $m - 3 = 28$ jeb $m = 31$.

S.8.4. Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 balti punkti (skat. 186. att.).

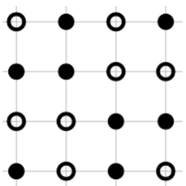
a) Vai dažus punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?

b) Vai to var izdarīt, ja melnā krāsā jānokrāso tieši septiņi punkti?



186. att.

Atrisinājums. a) Jā, to var izdarīt, skat., piemēram, 187. att.



187. att.

b) Nē, to nevar izdarīt. Ja melnā krāsā nokrāsoti septiņi punkti, tad paliek deviņi balti punkti. Tā kā visi punkti izvietoti četrās rindās, tad kādā no šīm rindām būs vismaz trīs balti punkti (Dirihlē princips), bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

S.8.5. Uz lapas uzrakstīti vairāki naturāli skaitļi, kas katrs dalās ar 3. Visi šie skaitļi kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi. Kāds ir lielākais iespējamais uzrakstīto skaitļu skaits?

Atrisinājums. Var uzrakstīt sešus skaitļus, piemēram, 3; 6; 9; 12; 45; 780. Pamatosim, ka tas ir lielākais skaits. Ir trīs viencipara naturāli skaitļi, kas dalās ar 3. No atlikušajiem septiņiem cipariem nevar uzrakstīt vairāk kā trīs skaitļus, kuriem ir vismaz divi cipari. Rakstot viencipara skaitļu vietā skaitļus ar vairāk cipariem, kopējais iespējamais skaitļu skaits nepalielinās.

9. KLASE

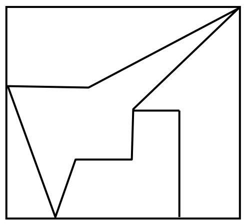
S.9.1. Kvadrātvienādojuma $3x^2 + 3ax + (x-1)b = 0$ saknes ir 1 un 2. Noteikt skaitļus a un b.

Atrisinājums. Tā kā $x = 1$ ir vienādojuma sakne, tad, ievietojot to dotajā vienādojumā, iegūstam patiesu vienādību $3 + 3a = 0$ jeb $a = -1$.

Ievietojot iegūto a vērtību un $x = 2$ dotajā vienādojumā, iegūst $3 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + b = 0$ jeb $b = -6$.

S.9.2. Vai kvadrātu var sadalīt piecās daļās, no kurām viena ir trijstūris, otra – četrstūris, trešā – piecstūris, ceturtā – sešstūris un piektā – septiņstūris?

Atrisinājums. Jā, uzdevumā prasīto var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 188. att.



188. att.

S.9.3. Atrast tādu naturālu skaitli n, kam vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- n nedalās ne ar vienu no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

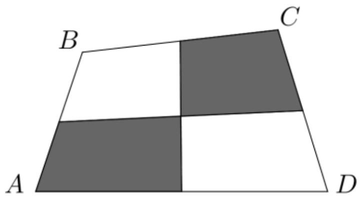
Atrisinājums. Ja skaitlis $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, tad skaitlis n nedalās ne ar vienu no šiem skaitļiem, jo $n-1$ un n ir divi pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Skaitli $n-1$ var izvēlēties kā norādīto skaitļu mazāko kopīgo dalāmo:

$$MKD(2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Tātad der skaitlis $n = 2521$.

Piezīme. Mazākā kopīgā dalāmā vietā var ņemt, piemēram, arī skaitļu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 reizinājumu.

S.9.4. Četrstūrī $ABCD$ novilkti nogriežņi, kas savieno pretējo malu viduspunktus (skat. 189. att.). Pierādīt, ka iekrāsoto laukumu summa ir puse no četrstūra $ABCD$ laukuma!

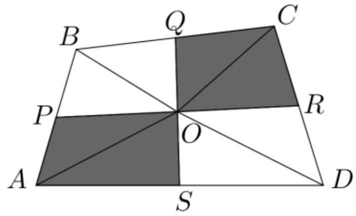


189. att.

Atrisinājums. Ar O apzīmējam viduslīniju krustpunktu un novelkam nogriežņus OA, OB, OC, OD (skat. 190. att.). Tā kā $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, tad trijstūriem, kuru pamati ir vienādi un augstumi pret šiem pamatiem ir vienādi, ir vienādi arī laukumi. No šī apgalvojuma izriet, ka

$$S_{AOS} = S_{DOS}, \quad S_{COR} = S_{ROD}, \quad S_{COQ} = S_{BOQ}, \quad S_{AOP} = S_{BOP}.$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam, ka $S_{AOS} + S_{COR} + S_{COQ} + S_{AOP} = S_{DOS} + S_{ROD} + S_{BOQ} + S_{BOP}$ jeb iekrāsoto laukumu summa ir vienāda ar neiekrāsoto laukumu summu, tātad iekrāsoto laukumu summa ir puse no četrstūra $ABCD$ laukuma.



190. att.

S.9.5. Futbola turnīrā piedalījās piecas komandas: A, B, C, D, E. Katra ar katru spēlēja vienu spēli. Par uzvaru komanda saņēma 2 punktus, par neizšķirtu 1 punktu, par zaudējumu 0 punktus. Komanda A nezaudēja nevienu spēli, bet B un E savā starpā spēlēja neizšķirti. Turnīra beigās komandai A bija 6 punkti, komandai B – 6 punkti, C – 5 punkti, D – 2 punkti, E – 1 punkts. Noskaidrot, kā beidzās visas turnīra spēles!

Atrisinājums. Tā kā B ar E spēlēja neizšķirti, tad, lai savāktu 6 punktus, B ar A spēlēja neizšķirti (jo A nezaudēja nevienu spēli), pārējās komandas B uzvarēja. Tā kā E ieguva 1 punktu un ar B spēlēja neizšķirti, tad pārējām komandām E zaudēja. Iegūstam šādu turnīra tabulu:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	---	1			2
B	1	---	2	2	1
C		0	---		2
D		0		---	2
E	0	1	0	0	---

Ņemot vērā, ka D ieguva 2 punktus, tad D zaudēja gan A, gan C. No šejienes secinām, ka A ar C spēlēja neizšķirti.

NOVADA OLIMPIĀDE

5. KLASE

N.5.1. Daļas ir uzrakstītas augošā secībā. Kāds naturāls skaitlis var būt ierakstīts $\square$ vietā?

$$\frac{5}{16}; \frac{\square}{5}; \frac{3}{4}$$

Atrisinājums. Paplašinot visas daļas, lai to saucēji būtu 80, iegūstam $\frac{25}{80}; \frac{16\cdot\square}{80}; \frac{60}{80}$. Vidējās daļas skaitītājam $16\cdot\square$ jābūt lielākam nekā 25 un mazākam nekā 60, turklāt tam jādalās ar 16. Vienīgie skaitļi, kas atbilst, ir $32 = 16\cdot 2$ un $48 = 16\cdot 3$, tāpēc kvadrātiņā var būt ierakstīts skaitlis 2 vai 3.

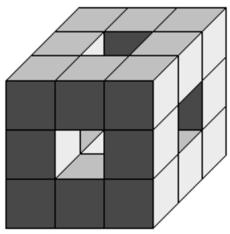
N.5.2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).

Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 8; **b)** 18?

Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. Pārbaudot trīs ciparu veidotos skaitļus iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 8, ir 123456.

b) Lai skaitlis dalītos ar 18, tam vienlaicīgi jādalās ar 2 un 9. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 9 (pārbaudām pēc ciparu summas), ir 12345678. Tā kā šis ir arī pāra skaitlis, tad tas dalās ar 2 un līdz ar to tas dalās arī ar 18, jo skaitļi 2 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 12345678.

N.5.3. No 20 vienādiem kubiņiem, kuriem katras šķautnes garums ir 1 cm, salīmēja 191. att. redzamo figūru, kurai katrā skaldnē trūkst centrālais kubiņš, kā arī iztrūkst pašas figūras centrālais kubiņš. Cik kvadrātiņi, kuriem katras malas garums ir 1 cm, ir nepieciešami, lai aplīmētu visu šo figūru?



191. att.

1. atrisinājums. Katras skaldnes pārklāšanai nepieciešami 8 kvadrātiņi, tātad, lai pārklātu visas sešas skaldnes, vajag $6\cdot 8 = 48$ kvadrātiņus. Lai pārklātu katrā skaldnē esošo caurumu, vajag 4 kvadrātiņus, tātad, lai pārklātu visus sešus caurumus, vajag $6\cdot 4 = 24$ kvadrātiņus. Kopā figūras pārklāšanai vajag $48 + 24 = 72$ kvadrātiņus.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka salīmētajā figūrā ir tikai divu veidu kubiņi – astoņi stūra kubiņi, kuriem nesalīmētas ir atlikušas trīs skaldnes, un 12 vidus kubiņi, kuriem nesalīmētas ir palikušas četras skaldnes. Tātad figūras pārklāšanai vajag $8\cdot 3 + 12\cdot 4 = 24 + 48 = 72$ kvadrātiņus.

N.5.4. Vienādi burti apzīmē vienādus skaitļus, dažādi – dažādus. Atrodi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāliek burtu vietā, lai abas dotās vienādības būtu patiesas!

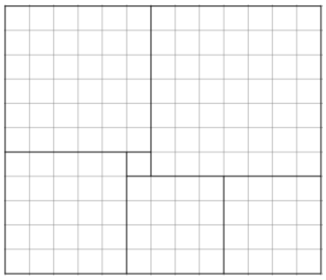
$$A + B = C\cdot D$$

$$A\cdot B = C + D$$

Atrisinājums. Der, piemēram, $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$ un $D = 5$, jo $2 + 3 = 1\cdot 5$ un $2\cdot 3 = 1 + 5$.

N.5.5. Sadali taisnstūri ar izmēriem 11×13 rūtiņas sešos kvadrātos tā, lai dalījuma līnijas ietu pa rūtiņu līnijām!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 192. att.



192. att.

6. KLASE

N.6.1. Trīs brāļiem – Rihardam, Haraldam un Olafam – kopā ir 13,20 eiro. Zināms, ka Haraldam ir par 2,10 eiro vairāk nekā Rihardam un par 3,30 eiro mazāk nekā Olafam. Cik naudas ir katram brālim?

Atrisinājums. Ja Haraldam ir x eiro, tad Rihardam ir $x - 2{,}10$ eiro un Olafam ir $x + 3{,}30$ eiro. Tātad

$$x + x - 2{,}10 + x + 3{,}30 = 13{,}20$$

$$3x + 1{,}20 = 13{,}20$$

$$3x = 12{,}00$$

$$x = 4{,}00$$

Līdz ar to Haraldam ir 4 eiro, Rihardam ir 1,90 eiro un Olafam ir 7,30 eiro.

N.6.2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).

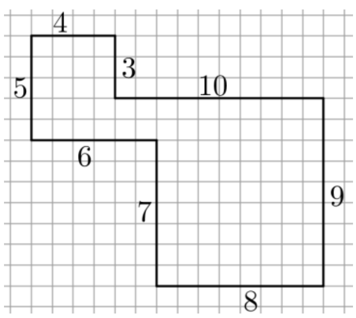
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 9; **b)** 24?

Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Pārbaudot ciparu summas, iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 9, ir 12345678, jo tā ciparu summa ir 36.

b) Lai skaitlis dalītos ar 24, tam vienlaicīgi jādalās ar 8 un 3. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 8 (pārbaudām trīs ciparu veidotos skaitļus), ir 123456. Tā kā šī skaitļa ciparu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, kas dalās ar 3, tad arī pats skaitlis dalās ar 3. Tātad skaitlis 123456 dalās ar 8 un ar 3, līdz ar to tas dalās arī ar 24, jo skaitļi 3 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 123456.

N.6.3. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!

Atrisinājums. Skat. 193. att.



193. att.

N.6.4. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

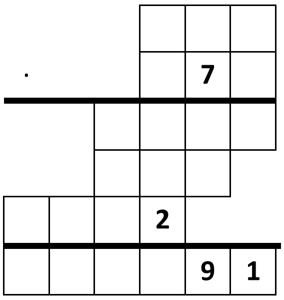
Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20 : 2 = 10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas. Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.

No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Analoģiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

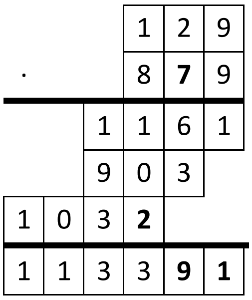
Līdz ar to ar $10 + 9 + 9 = 28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.

N.6.5. Katrā tukšajā kvadrātiņā (skat. 194. att.) ieraksti vienu ciparu tā, lai iegūtu pareizu reizināšanas piemēru! Neviens skaitlis tajā nedrīkst sākties ar 0.

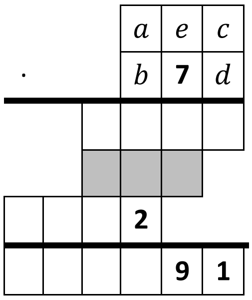


194. att.

Atrisinājums. Der skaitļu 129 un 879 reizinājums (skat. 195. att.).



195. att.



196. att.

Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi. Apzīmējam skaitļus tā, kā parādīts 196. att. Tā kā $7 \cdot \overline{aec}$ ir trīsciparu skaitlis (skat. 196. att. iekrāsoto rindu), tad $a = 1$ (ja a būtu lielāks, tad reizinājums būtu četrciparu skaitlis). Skaidrs, ka c un d ir nepāra cipari, jo to reizinājuma pēdējais cipars ir 1. Tātad b ir pāra cipars, jo reizinājuma $b \cdot c$ pēdējais cipars ir 2. Tā kā $7 \cdot \overline{aec}$ ir trīsciparu skaitlis, tad, lai $b \cdot \overline{aec}$ būtu četrciparu skaitlis, b ir jābūt lielākam nekā 7. Tātad $b = 8$. Tā kā reizinājuma $b \cdot c$ pēdējais cipars ir 2 un c ir nepāra cipars, tad vienīgā iespēja, ka $c = 9$. Līdz ar to $d = 9$, jo reizinājuma $c \cdot d$ pēdējais cipars ir 1. Ciparu e piemeklējam tā, lai rezultāta pirmspēdējais cipars būtu 9, vienīgā iespēja, ka $e = 2$. Pārbaudot redzam, ka 129 un 879 reizinājums tiešām atbilst dotajam piemēram.

7. KLASE

N.7.1. Saldumu veikalā vienas konfektes cena ir 3 centi. Aivaram ir vairāk naudas nekā Bruno, Cildai ir vairāk naudas nekā Aivaram, Dainai – vairāk nekā Cildai.

a) Vai Daina noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?

b) Vai Cilda noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka Aivaram ir a centi, Bruno – b centi, Cildai – c centi un Dainai – d centi. Pēc uzdevuma nosacījumiem $d > c > a > b$.

a) Tā kā visiem ir atšķirīgs naudas daudzums, tad Dainai ir par vismaz 3 centiem vairāk naudas nekā Bruno. Līdz ar to Daina noteikti var nopirkt vismaz par vienu konfekti vairāk nekā Bruno.

b) Nē, var gadīties, ka Cilda nevar nopirkt vairāk konfektes kā Bruno, piemēram, ja Bruno ir 3 centi, Aivaram ir 4 centi un Cildai ir 5 centi, tad šajā gadījumā Cilda var nopirkt tikpat konfektes, cik Bruno.

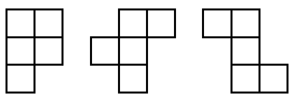
N.7.2. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 99, tad tas vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11. Skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Uzrakstot ciparus pretējā secībā, ciparu summa nemainīsies un arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 9. Skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja tā pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalās ar 11. Pārrakstot skaitļa ciparus pretējā secībā, minētā īpašība saglabājas – pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalīsies ar 11 un, tātad arī šis skaitlis dalīsies ar 11. Tā kā skaitlis vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11 un skaitļi 9 un 11 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad iegūtais skaitlis dalās arī ar 99.

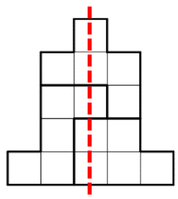
N.7.3. No trīs dotajām figūrām (skat. 197. att.) saliec simetrisku daudzstūri un uzzīmē tā simetrijas asi! Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.

Piezīme. Figūra ir simetriska, ja to var pārlocīt tā, ka tās abas puses sakrīt.

Atrisinājums. Skat. 198. att.



197. att.



198. att.

N.7.4. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām? Pašu monētu atrast nav nepieciešams.

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 6 monētas.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kas nebija uz svariem. Salīdzinot to ar kādu no svērtajām monētām, noskaidrojam, vai tā ir vieglāka vai smagāka.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad, nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka monētas kreisajā kausā ir vieglākas nekā monētas labajā kausā. Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa trīs monētām no kreisā kausa.
  - Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad visām monētām no kreisā svaru kausa ir vienāda masa, un atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā atradās labajā svaru kausā, tātad tā ir smagāka nekā pārējās.
  - Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā atradās kreisajā svaru kausā, tātad tā ir vieglāka nekā pārējās.

N.7.5. **a)** Vai var atrast tādus dažādus veselus skaitļus a, b, c un d, ka izpildās vienādības $a + b = cd$ un $ab = c + d$?

b) Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a > 2016$?

Atrisinājums. a) Der, piemēram, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ un $d = 5$, jo $2 + 3 = 1 \cdot 5$ un $2 \cdot 3 = 1 + 5$.

b) Der, piemēram, $a = 2017$, $b = -2017$, $c = 0$ un $d = -2017^2$, jo $2017 - 2017 = 0 \cdot (-2017^2)$ un $2017 \cdot (-2017) = 0 - 2017^2$.

*Piezīme***.** b) gadījumā atrastie skaitļi der arī a) gadījumam.

8. KLASE

N.8.1. Aprēķini izteiksmes $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-d} + \sqrt{d-a}$ vērtību!

Atrisinājums. Tā kā zemsaknes izteiksmei jābūt nenegatīvai, tad $a \geq b$, $b \geq c$, $c \geq d$, $d \geq a$, no kā izriet, ka $a \geq b \geq c \geq d \geq a$. Tas ir iespējams tikai tad, ja $a = b = c = d$.

Līdz ar to izteiksmes $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-d} + \sqrt{d-a}$ vērtība ir 0.

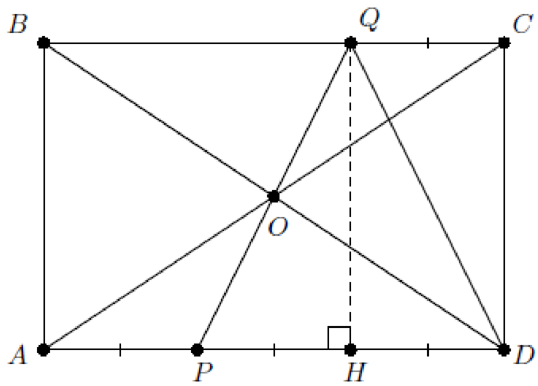
N.8.2. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrs skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis *DUBĻUNNN* dalās ar $104 = 8 \cdot 13$, tad tas dalās arī ar 8. Ar 8 dalās skaitļi, kuru pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8, tātad skaitlis $\overline{NNN}$ jeb $100N + 10N + N = 111N$ dalās ar 8. Tā kā 111 ar 8 nedalās, tad ar 8 dalās N. Vienīgais cipars, kas nav 0 un kura veidotais viencipara skaitlis dalās ar 8, ir $N = 8$.

Ja skaitlis *BURBUĻVANNA* dalītos ar $56 = 8 \cdot 7$, tad tas dalītos arī ar 8, turklāt tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis $\overline{NNA}$ jeb $\overline{88A} = 880 + A$ dalītos ar 8. Tā kā 880 dalās ar 8, tad arī skaitlim A būtu jādalās ar 8, bet tas nav iespējams, jo A nevar būt ne 0, ne 8. Tātad skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

N.8.3. Caur taisnstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu O novilkta taisne PQ tā, ka P atrodas uz AD, Q – uz BC un $PQ = QD$. Pierādīt, ka $DP = 2AP$.

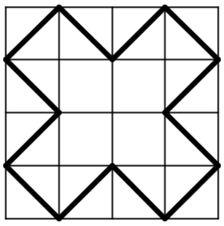
Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle AOP = \sphericalangle COQ$, $AO = OC$ un $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OCQ$, tad $\Delta AOP = \Delta COQ$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ (skat. 199. att.). Līdz ar to $AP = QC$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Vienādsānu trijstūrī PQD novelkam augstumu QH, kas ir arī mediāna, tāpēc $PH = HD$. Tā kā $QCDH$ ir taisnstūris, tad $QC = HD$. Līdz ar to $AP = PH = HD$ un $DP = PH + HD = 2AP$.



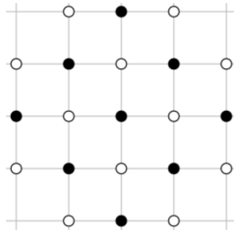
199. att.

N.8.4. Kādu lielāko skaitu rūtiņu diagonāļu var novilkt 4×4 rūtiņas lielā tabulā, lai šīs diagonāles veidotu slēgtu lauztu līniju? Lauztā līnija nedrīkst pati sevi krustot vai pieskarties.

Atrisinājums. Lielākais diagonālu skaits ir 12, skat. 200. att.



200. att.



201. att.

Pamatosim, ka vairāk diagonāļu novilkt nevar. Ievērojam, ka slēgta lauzta līnija nevar iet caur kvadrāta stūriem. Atlikušās rūtiņu virsotnes nokrāsojam tā, kā parādīts 201. att., iegūsim 9 melnas un 12 baltas virsotnes. Katra rūtiņas diagonāle savā starpā saista divas vienas krāsas virsotnes un, tā kā jāveido lauzta līnija, tad visas līnijai piederošās virsotnes būs vienā krāsā. Tātad tā nevar saturēt vairāk kā 12 virsotnes un tātad arī posmus.

N.8.5. Smaragda pilsētā naudas vienība ir centi. Tur ir 21% PVN (pievienotās vērtības nodokļa) likme. Tas nozīmē, ka ikvienas pārdodamās preces cenu iegūst, pareizinot kādu veselu skaitu centu (cenu bez PVN) ar skaitli 1,21 un reizinājumu noapaļojot līdz tuvākajam veselajam centu skaitam. Cenu sauc par neiespējamu, ja to nevar iegūt minētajā veidā. Cik pavisam ir neiespējamu cenu no 1 līdz 1000 centiem ieskaitot?

Piemēram, 3 centi ir neiespējama cena, jo $2 \cdot 1{,}21 = 2{,}42$, pēc noapaļošanas 2 centi, savukārt, $3 \cdot 1{,}21 = 3{,}63$, pēc noapaļošanas 4 centi. Tā kā nekāda cita vesela skaitļa starp 2 un 3 nav, tad cenu, kas ir tieši 3 centi, nevar iegūt pēc PVN pievienošanas.

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ja sākumā preču cenas bija dažādas, tad pēc PVN pievienošanas un noapaļošanas tās arī būs dažādas. Ievērojam, ka, noapaļojot skaitļus no intervāla $[a - 0{,}5; a + 0{,}5)$, iegūstam a. Tā kā šī intervāla garums ir 1, tad secinām, ja starpība starp diviem skaitļiem ir lielāka nekā 1, tad, tos noapaļojot, iegūst dažādus skaitļus. Ņemam divas blakus esošas cenas a un $a + 1$ pirms PVN pievienošanas un reizinām tās ar 1,21. Iegūto skaitļu starpība $1{,}21(a + 1) - 1{,}21a = 1{,}21$ ir lielāka nekā 1, tātad pēc noapaļošanas iegūtie skaitļi ir dažādi.

Ievērojam, ka $826 \cdot 1{,}21 = 999{,}46 \approx 999$, bet $827 \cdot 1{,}21 = 1000{,}67 \approx 1001$, tāpēc visi skaitļi, kuri nepārsniedz 826, pēc PVN pievienošanas attēlosies par cenām intervālā no 1 līdz 1000. Tādēļ, pievienojot PVN skaitļiem starp 1 un 826, mēs varam iegūt pavisam 826 dažādas cenas intervālā $[1;\ 1000]$. Visas pārējās cenas būs neiespējamās, tādu pavisam ir $1000 - 826 = 174$.

9. KLASE

N.9.1. Nosaki funkciju $y = 2016 - x$ un $y = \frac{2015}{x}$ grafiku krustpunktu koordinātas!

Atrisinājums. Krustpunkta abscisu iegūst no vienādojuma $2016 - x = \frac{2015}{x}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar $x \neq 0$, iegūst $x^2 - 2016x + 2015 = 0$. Pēc Vjeta teorēmas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2016 \\ x_1 \cdot x_2 = 2015 \end{cases}$$

Tātad $x_1 = 2015$ un $x_2 = 1$, tiem atbilstošās ordinātas ir $y_1 = 1$ un $y_2 = 2015$. Esam ieguvuši, ka grafiku krustpunktu koordinātas ir $(2015; 1)$ un $(1; 2015)$.

N.9.2. Pierādīt, ka

a) no pieciem naturāliem skaitļiem vienmēr var izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4;

b) var atrast četrus tādus naturālus skaitļus, ka no tiem nevar izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4.

Atrisinājums. a) Naturāls skaitlis, dalot ar 4, dod atlikumu 0, 1, 2 vai 3, pāra skaitļi dod atlikumu 0 vai 2, nepāra – atlikumu 1 vai 3.

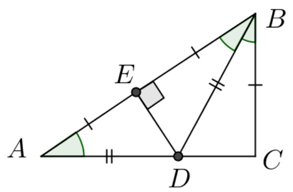
1. Ja starp dotajiem pieciem skaitļiem ir divi, kas, dalot ar 4, abi dod atlikumu 0 vai abi dod atlikumu 2, tad šo divu skaitļu summa dalās ar 4, jo $0+0 \equiv 0\ (mod\ 4)$ vai $2+2 \equiv 4 \equiv 0\ (mod\ 4)$, tad varam ņemt šos. Pretējā gadījumā ir ne vairāk kā divi pāra skaitļi, tātad ir vismaz trīs nepāra skaitļi.
2. Ja starp nepāra skaitļiem ir gan tāds, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 1, gan tāds, kas dod atlikumu 3, tad šo abu summa dalās ar 4 un mēs varam ņemt šos. Pretējā gadījumā mums visi nepāra skaitļi dod vienu un to pašu atlikumu (1 vai 3), dalot ar 4.
3. Ja kāds no skaitļiem, dalot ar 4, dod atlikumu 2, tad tas summā ar diviem nepāra skaitļiem (kuri abi dod atlikumu 1 vai 3, dalot ar 4) dalās ar 4, jo $2+1+1 \equiv 4 \equiv 0(mod 4)$ vai $2+3+3 \equiv 8 \equiv 0(mod\ 4)$, tad varam ņemt šos trīs skaitļus. Pretējā gadījumā ir ne vairāk kā viens pāra skaitlis (kurš dod atlikumu 0, dalot ar 4).
4. Ja ir ne vairāk kā viens pāra skaitlis, tad ir vismaz četri nepāra skaitļi, kas visi dod vienādus atlikumus, dalot ar 4, tad to summa dalās 4.

b) Līdzīgi kā a) gadījumā varam secināt, ka neder divi pāra skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 4, divi nepāra skaitļi, kas dod dažādus atlikumus, dalot ar 4, un neder arī viens pāra skaitlis, kas dod atlikumu 2, dalot ar 4. Tādējādi nonākam pie atlikumiem 0, 1, 1, 1 vai 0, 3, 3, 3, kas abi der.

Ņemsim jebkurus skaitļus, kas, dalot ar 4, dod attiecīgi atlikumus 0, 1, 1, 1. Tad vairāku no tiem atlikumu summa būs vismaz 1, bet ne lielāka kā 3 (ja mēs sasummējam visus), tātad tā var pieņemt tikai vērtības 1, 2 vai 3. Līdz ar to nekādu vairāku no tiem summa nedalīsies ar 4. Šādi skaitļi ir, piemēram, 4, 1, 5, 9 (to, ka tie der, var pārbaudīt arī, aprēķinot visas 11 iespējamās vairāku no tiem summas).

N.9.3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BD. Zināms, ka $AD = DB$ un $AB = 2BC$. Aprēķināt $\sphericalangle BAC$ lielumu!

Atrisinājums. Pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \alpha$. Malas AB viduspunktu apzīmējam ar E (skat. 202. att.).



202. att.

Tā kā $AD = DB$, tad trijstūris ADB ir vienādsānu, tāpēc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD = \alpha$ un nogrieznis DE ir gan mediāna, gan augstums, no kā izriet, ka $\sphericalangle BED = 90°$. Pēc dotā $AB = 2BC$, tāpēc $BE = BC$. Ievērojam, ka $\Delta BED = \Delta BCD$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $BE = BC$, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle DBC = \alpha$, BD − kopīga mala. Tāpēc $\sphericalangle BED = \sphericalangle BCD = 90°$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Tā kā ΔABC iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°;$$

$$\alpha + 2\alpha + 90° = 180°;$$

$$3\alpha = 90° \text{ jeb } \alpha = 30°.$$

Tātad $\sphericalangle BAC = 30°$.

N.9.4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu, pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir izspēlējis 10 partijas, bet Puszābaks – 21. Cik partijas izspēlēja Uzrocis?

Atrisinājums. Skaidrs, ka katrs spēlētājs spēlē vismaz vienā no divām pēc kārtas sekojošām partijām. Tā kā Ķērpjbārdis spēlēja tikai 10 partijas, tad kopējais partiju skaits nav lielāks kā 21, bet tas nav arī mazāks kā 21, jo tik partijas spēlēja Puszābaks. Tātad tika izspēlēta tieši 21 partija un, tā kā Puszābaks spēlēja tajās visās un Ķērpjbārdis ar viņu spēlēja 10 partijās, tad Uzrocis spēlēja atlikušajās $21-10=11$ partijās.

Var secināt vēl precīzāk: Ķērpjbārdis spēlēja visās partijās ar pāra numuriem (2, 4, 6, ...), bet Uzrocis visās ar nepāra numuriem (1, 3, 5, ...), visās partijās uzvarēja Puszābaks.

N.9.5. Doti 2016 skaitļi: $1^2;\ 2^2\ ; 3^2; \ldots ;\ 2015^2;\ 2016^2$. Vai starp šiem skaitļiem var salikt "$+$" un "$-$" zīmes tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0?

Atrisinājums. Jā, var. Ievērosim, ka divu pēc kārtas sekojošu skaitļu kvadrātu starpība ir $(n+1)^2-n^2=2n+1$. Tāpat arī $(n+3)^2-(n+2)^2=2n+5$ un tātad, saliekot starp jebkuriem četriem pēc kārtas sekojošiem kvadrātiem zīmes "$+\ -\ -\ +$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir 4:

$$+n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=-(2n+1)+(2n+5)=4$$

Savukārt, saliekot zīmes "$-++-$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir -4:

$$-n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-(n+3)^2=2n+1-(2n+5)=-4$$

Tātad, saliekot astoņiem pēc kārtas sekojošiem kvadrātiem zīmes "$+--+-++-$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir 0:

$$\left(n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2\right)+\left(-(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2-(n+7)^2\right)=$$
$$=\ 4-4\ =\ 0$$

Tā kā 2016 dalās ar 8, tad visus kvadrātus var sadalīt grupās pa 8 un katrā no tām salikt zīmes tā, ka šīs grupas summa ir 0, tātad arī visas izteiksmes summa ir 0.

VALSTS OLIMPIĀDE

9. KLASE

V.9.1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^2 ir naturāla skaitļa kubs. Pierādīt, ka arī x^2y ir naturāla skaitļa kubs!

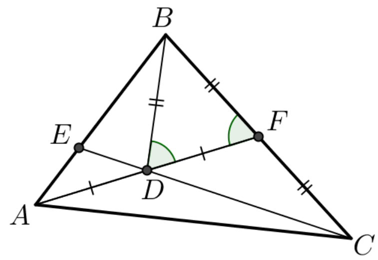
Atrisinājums. Apzīmējam $xy^2 = z^3$, kur z – naturāls skaitlis. Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam $x^2y^4 = z^6$. Izsakām

$$x^2y = \frac{z^6}{y^3} = \left(\frac{z^2}{y}\right)^3.$$

Skaitlis x^2y ir naturāls skaitlis, tāpēc arī $\left(\frac{z^2}{y}\right)^3$ ir naturāls. Ja z^2 nedalītos ar y, tad $\frac{z^2}{y}$ varētu izteikt kā nesaīsināmu daļu $\frac{m}{n}$. Bet tad arī $\frac{m^3}{n^3}$ būtu nesaīsināma daļa, taču tam jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tāpēc z^2 dalās ar y un tātad x^2y ir naturāla skaitļa kubs.

V.9.2. Trijstūrī ABC novilkta mediāna AF, punkts D ir tās viduspunkts. Taisne CD krusto malu AB punktā E. Pierādīt: ja $BD = BF$, tad $AE = DE$!

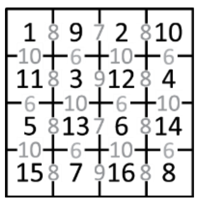
Atrisinājums. Trijstūris DBF ir vienādsānu ($BD = BF$ pēc dotā), tāpēc $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BFD$ kā leņķi pie pamata malas (skat. 203. att.). Tā kā $AD = DF$ (jo D ir AF viduspunkts), $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DFC$ (kā vienādu leņķu blakusleņķi) un $BD = FC$, tad $\Delta ADB = \Delta DFC$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDF$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Tā kā $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CDF$ kā krustleņķi, tad $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA$ un ΔAED ir vienādsānu trijstūris. Līdz ar to $AE = DE$ kā sānu malas vienādsānu trijstūrī.



203. att.

V.9.3. Vai tabulā, kuras izmēri ir 4×4 rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

Atrisinājums. a) Jā, skaitļus tabulā var ierakstīt, piemēram, skat. 204. att., kur pelēkā krāsā norādītas skaitļu starpības.



204. att.

8	15	a	
16	b		
c			

205. att.

b) Pamatosim, ka skaitļus tabulā nevar ierakstīt tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi. Skaitlim 8 blakus var atrasties tikai skaitļi 1, 15 un 16. Pieņemsim, ka 1 neatrodas blakus 8. Tad skaitlim 8 ir tikai divi kaimiņi, tātad tas atrodas stūrī (skat. 205. att.).

Skaitlim 7 var atrasties blakus tikai skaitļi 14, 15, 16, tātad tas noteikti ir blakus skaitlim 15 vai 16 (skat.205. att.), līdz ar to tas atrodas kādā no vietām a, b, c. Tas nevar būt b vietā, jo tur tam būtu četri kaimiņi. Tas nevar atrasties a vietā, jo tur tam ir trīs kaimiņi, bet viens no skaitļiem, kas tam varētu būt blakus (skaitlis 16) tam blakus neatrodas. Līdzīgi skaitlis 7 nevar atrasties arī c vietā.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitļiem 1 un 8 jābūt blakus. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka skaitļi izkārtoti tā, kā parādīts 206. att. Skaitlis x nevar būt 15, jo tad y vietā būtu jāieraksta skaitlis 8, bet tas jau ir ierakstīts tabulā. Tātad x vietā jābūt skaitlim 16, un tad vienīgā iespējamā y vērtība ir 9. Līdz ar to esam ieguvuši 207. att. parādīto skaitļu izkārtojumu.

8	x
1	y

206. att.

8	16
1	9

207. att.

Ievērojam, ka skaitlim 9 blakus rūtiņās var būt ierakstīti tikai skaitļi 1, 2, 16. Tātad skaitlis 8 nav stūrī, jo tad skaitlim 9 būtu četri kaimiņi. Tieši tāpat stūrī nav arī skaitlis 9, jo tad skaitlim 8 būtu četri kaimiņi. Tātad tiem ir vēl pa vienam kaimiņam. Skaidrs, ka skaitlim 8 vēl ir kaimiņš 15, bet skaitlim 9 vēl ir kaimiņš 2. Iespējami divi gadījumi, kur attiecībā pret skaitli 8 var būt ierakstīts skaitlis 15 (skat. 208. att. un 209. att.). Neviens no šim gadījumiem nav iespējams, jo z vietā būtu jāieraksta skaitlis 9, bet t vietā – skaitlis 8.

15			
8	16	z	
1	9	2	

208. att.

	15	8	16
	t	1	9
			2

209. att.

V.9.4. Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

Atrisinājums. Apzīmējam $N = 2016^{2016} - 3$, tad dotais skaitlis ir $\frac{N}{3}$.

Tā kā 2016^{2016} ir pāra skaitlis, tad N ir nepāra un arī dotais skaitlis ir nepāra, tātad tas nedalās ar 2 jeb dotajam skaitlim nav pirmreizinātāja 2.

Ievērojam, ka 2016 dalās ar 9, tātad $N \equiv 0^{2016} - 3 \equiv 0 - 3 \equiv -3 \equiv 6 \pmod 9$. Tā kā skaitlis N dalās ar 3, bet nedalās ar 9, tad dotajam skaitlim nav pirmreizinātāja 3.

No kongruences $2016 \equiv 1 \pmod 5$ izriet, ka $N \equiv 1^{2016} - 3 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 5$, tātad dotais skaitlis nedalās ar 5.

No kongruences $2016 \equiv 0 \pmod 7$ izriet, ka $N \equiv 0 - 3 \equiv -3 \equiv 4 \pmod 7$, tātad dotais skaitlis nedalās ar 7.

Ievērojam, ka $2016 \equiv 3 \pmod{11}$; tātad $N \equiv 3^{2016} - 3 \pmod{11}$. Virkne 3^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ir periodiska pēc moduļa 11; apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

n	0	1	2	3	4	5	...
$3^n \pmod{11}$	**1**	3	9	5	4	**1**	...

Tā kā $3^5 \equiv 3^0 \equiv 1 \pmod{11}$, tad secinām, ka

$$3^{2016} \equiv 3^{403\cdot5+1} \equiv (3^5)^{403} \cdot 3^1 \equiv 1^{403} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Līdz ar to $N \equiv 3^{2016} - 3 \equiv 0 \pmod{11}$, tātad gan N, gan $\frac{N}{3}$ dalās ar 11. Tātad dotā skaitļa mazākais pirmreizinātājs ir 11.

V.9.5. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi: virknes pirmais loceklis s_1 ir 2; virknes otrais loceklis s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0; virknes trešais loceklis s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1; virknes ceturtais loceklis s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6. Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50. Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

Atrisinājums. Pavisam ir četru veidu *gājieni*: „$2 \rightarrow 0$” (skaitlis satur 2 un meklējam nākamo skaitli, kas satur 0), „$0 \rightarrow 1$”, „$1 \rightarrow 6$” un „$6 \rightarrow 2$”. Turklāt šie *gājieni* cikliski atkārtojas tieši šādā secībā.

Lai noskaidrotu, kuri nākamie skaitļi seko virknē pēc skaitļa 2016, nepieciešams uzzināt, pēc kāda *gājiena* tika sasniegts skaitlis 2016.

Aplūkosim iespējamos gadījumus.

a) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „$6 \rightarrow 2$”, jo iepriekšējais virknes loceklis būtu 2006, bet nākamais skaitlis, kas ir lielāks nekā 2006 un satur ciparu 2, ir 2007.
b) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „$2 \rightarrow 0$”, jo iepriekšējam virknes loceklim tad būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt „$6 \rightarrow 2$”, kas noved pie tās pašas pretrunas kā a) gadījumā.
c) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „$0 \rightarrow 1$”, jo iepriekšējam virknes loceklim būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt „$2 \rightarrow 0$” un skaitlim 2014. Savukārt, pirms skaitļa 2014 izdarītajam *gājienam* jābūt „$6 \rightarrow 2$” un iegūstam līdzīgu pretrunu kā a) gadījumā.
d) Tātad skaitli 2016 iegūst pēc *gājiena* „$1 \rightarrow 6$”, un nākamie skaitļi virknē pēc *gājieniem* „$6 \rightarrow 2$”, “$2 \rightarrow 0$”,”$0 \rightarrow 1$” un “$1 \rightarrow 6$” ir skaitļi 2017, 2018, 2019 un 2026.

ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

5. KLASE

A.5.1. Uzraksti dotos skaitļus augošā secībā! Atbildi pamato!

$$DLV; MMXVI; CMXCIV; XXXVII$$

Atrisinājums. Uzrakstām dotos skaitļus ar arābu cipariem: $DLV = 555$; $MMXVI = 2016$; $CMXCIV = 994$; $XXXVII = 37$. Tātad skaitļi augošā secībā ir $XXXVII$; DLV; $CMXCIV$; $MMXVI$.

A.5.2. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $14 \cdot a + 2 \cdot b + 1 = 2016$?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $14 \cdot a$ un $2 \cdot b$ ir pāra skaitļi. Tātad dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir nepāra skaitlis, bet labajā pusē ir pāra skaitlis. Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus a un b, lai dotā vienādība būtu patiesa.

A.5.3. Starp dotajiem skaitļiem vienādības kreisajā pusē saliec darbību zīmes un iekavas tā, lai iegūtu patiesu vienādību!

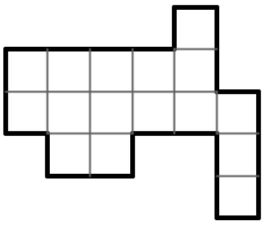
a) 3 3 7 7 = 14

b) 3 3 7 7 = 24

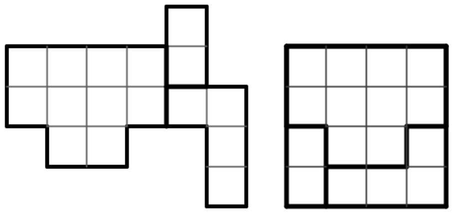
Atrisinājums. a) $3 - 3 + 7 + 7 = 14$; **b)** $(3 + 3 : 7) \cdot 7 = \frac{24}{7} \cdot 7 = 24$.

A.5.4. Sadali 210. att. redzamo figūru trīs daļās, no kurām var salikt kvadrātu! Saliekot daļas nedrīkst pārklāties, daļas drīkst pagriezt, bet nedrīkst apgāzt otrādi.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 211. att.



210. att.



211. att.

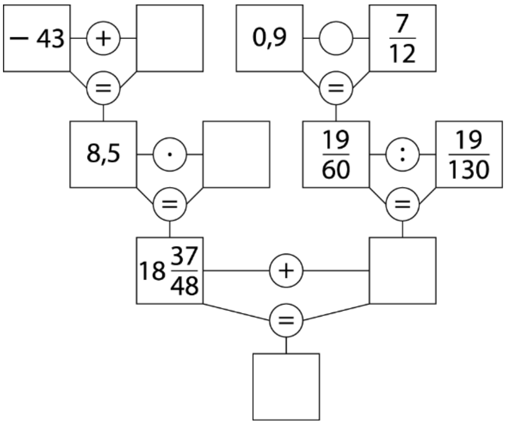
A.5.5. Klasē ir 12 skolēni, katrs no tiem nosūtīja īsziņu tieši sešiem citiem saviem klases biedriem. Pierādi, ka noteikti ir tādi divi skolēni, kas nosūtījuši īsziņu viens otram!

Atrisinājums. Pavisam tika nosūtītas $12 \cdot 6 = 72$ īsziņas. No 12 skolēniem var izveidot $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ dažādus pārus. Uzskatīsim, ka pāris saņem īsziņu, ja viens no pāra dalībniekiem nosūtījis īsziņu otram dalībniekam. Tā kā $72 > 66$, tad būs tāds pāris, kurš saņems divas īsziņas. Tātad šī pāra dalībnieki nosūtījuši īsziņas viens otram.

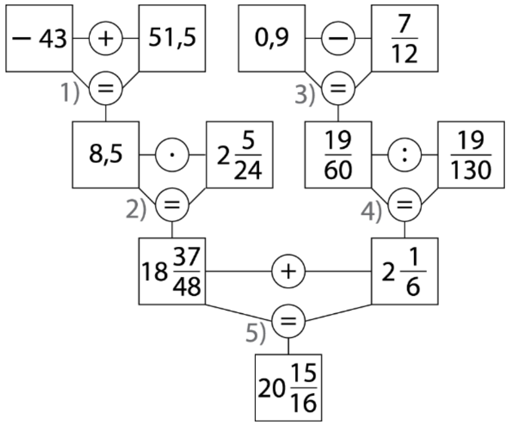
6. KLASE

A.6.1. Aplīšos (skat. 212. att.) ieraksti trūkstošās darbību zīmes un kvadrātiņos – trūkstošos skaitļus, lai iegūtu patiesas vienādības! Parādi arī risinājumu!

Atrisinājums. Skat. 213. att., kur 1) $8{,}5 + 43 = 51{,}5$; 2) $18\frac{37}{48} : 8{,}5 = \frac{901}{48} : \frac{17}{2} = \frac{901 \cdot 2}{48 \cdot 17} = \frac{53}{24} = 2\frac{5}{24}$; 3) $\frac{9}{10} - \frac{7}{12} = \frac{54}{60} - \frac{35}{60} = \frac{19}{60}$; 4) $\frac{19}{60} : \frac{19}{130} = \frac{19 \cdot 130}{60 \cdot 19} = 2\frac{10}{60} = 2\frac{1}{6}$;
5) $18\frac{37}{48} + 2\frac{1}{6} = 20\frac{37}{48} + \frac{8}{48} = 20\frac{45}{48} = 20\frac{15}{16}$



212. att.



213. att.

A.6.2. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $14 \cdot a + 15 = 2016 - 6 \cdot b$?

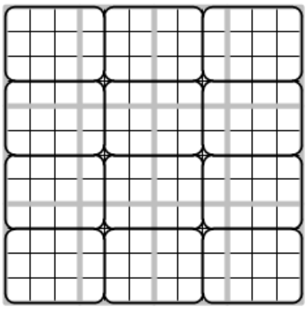
Atrisinājums. Ievērojam, ka $14 \cdot a$ ir pāra skaitlis, tātad dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir nepāra skaitlis. Tā kā $6 \cdot b$ ir pāra skaitlis, tad vienādojuma labās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis. Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus a un b, lai dotā vienādība būtu patiesa.

A.6.3. Vairākas tantītes piedalījās sēņošanas sacensībās. Kad sacensību beigās saskaitīja atrastās baravikas, tad izrādījās, ka katrai no divām tantītēm, kurām bija vislielākais baraviku skaits, bija tieši $\frac{1}{5}$ no visu baraviku kopskaita. Savukārt, katrai no piecām tantītēm, kurām bija vismazākais baraviku skaits, bija tieši $\frac{1}{13}$ no visu baraviku kopskaita. Cik pavisam tantītes piedalījās sacensībās?

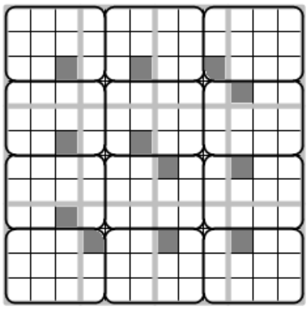
Atrisinājums. Tā kā katra no divām tantītēm, kurām bija visvairāk baraviku, salasīja $\frac{1}{5}$ jeb $\frac{13}{65}$ no visu baraviku kopskaita un katra no piecām tantītēm, kurām bija vismazāk baraviku, salasīja $\frac{1}{13}$ jeb $\frac{5}{65}$ no visu baraviku kopskaita, tad šīs septiņas tantītes kopā salasīja $2 \cdot \frac{13}{65} + 5 \cdot \frac{5}{65} = \frac{51}{65}$ no visu baraviku kopskaita. Tātad atliek vēl $\frac{14}{65}$ no visu baraviku kopskaita, kuras salasīja citas tantītes. Tā kā katra no pārējām tantītēm salasīja vairāk nekā $\frac{5}{65}$ un mazāk nekā $\frac{13}{65}$ no visu baraviku kopskaita, tad noteikti ir vismaz vēl divas citas tantītes. Tā kā katrai no citām tantītēm ir jāsalasa vairāk nekā $\frac{5}{65}$ no visu baraviku kopskaita, tad ja viņas ir 3 vai vairāk, tad viņas kopā būtu salasījušas vairāk nekā $3 \cdot \frac{5}{65} = \frac{15}{65}$, kas ir par daudz. Tātad bija vēl tieši divas citas tantītes, kuras varēja salasīt, piemēram, $\frac{6}{65}$ un $\frac{8}{65}$ no visu baraviku kopskaita. Līdz ar to esam ieguvuši, ka sacensībās piedalījās $7 + 2 = 9$ tantītes.

A.6.4. Kvadrāts ar izmēriem 12×12 rūtiņas divos veidos ir sadalīts taisnstūros ar izmēriem 3×4 rūtiņas (skat. 214. att.): trīs rindās pa četriem taisnstūriem katrā (ar gaiši pelēkajām līnijām) un četrās rindās pa trim taisnstūriem katrā (ar melnajām līnijām). Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso 12×12 rūtiņu kvadrātā, lai katrā gaišpelēkajā un katrā melnajā taisnstūrī būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?

Atrisinājums. Tā kā katrā melnajā taisnstūrī ir jābūt vismaz vienai iekrāsotai rūtiņai, tad kopā jābūt vismaz 12 iekrāsotām rūtiņām. Ar 12 iekrāsotām rūtiņām pietiek, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, skat., piemēram, 215. att.



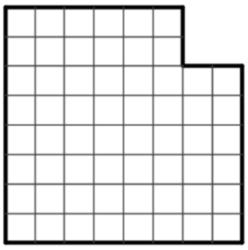
214. att.



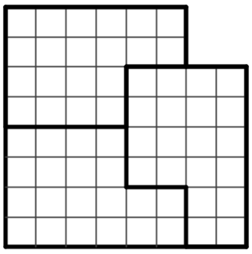
215. att.

A.6.5. Sadali 216. att. redzamo figūru trīs vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās! Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt gan pagriezti, gan „apmesti otrādi”.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 217. att.



216. att.



217. att.

7. KLASE

A.7.1. Dota lineāra funkcija $y = 2015x + 2016$.

a) Nosaki dotās funkcijas krustpunktus ar koordinātu asīm!

b) Uzraksti vienādojumu lineārai funkcijai, kuras grafiks nekrusto dotās funkcijas grafiku un iet caur punktu (1; 43)!

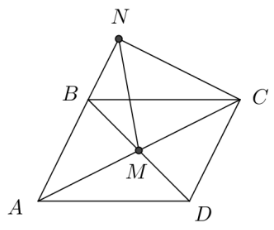
Atrisinājums. a) Funkcijas grafiks krusto y asi, ja $x = 0$, tātad krustpunkts ar y asi ir $(0; 2016)$. Funkcijas grafiks krusto x asi, ja $y = 0$, tātad krustpunkts ar x asi ir $\left(-\frac{2016}{2015}; 0\right)$.

b) Lai lineāru funkciju grafiki nekrustotos, tiem jābūt paralēliem, tātad taišņu virziena koeficientiem jābūt vienādiem. Meklētās funkcijas vienādojums ir formā $y = 2015x + b$. Lai aprēķinātu b vērtību, izmantojam, ka grafiks iet caur punktu (1; 43), tas ir, atrisinām vienādojumu $43 = 2015 \cdot 1 + b$. Tātad $b = -1972$.

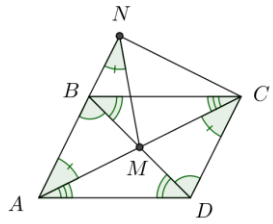
A.7.2. Karlsons sev pusdienām nopirka 8 pīrādziņus un 15 magoņmaizītes, bet Brālītis – vienu pīrādziņu un vienu magoņmaizīti. Karlsons par savām pusdienām samaksāja tieši divus eiro (katra maizīte un pīrādziņš maksā veselu skaitu centu). Cik samaksāja Brālītis?

Atrisinājums. Apzīmējot pīrādziņu cenu centos ar p un magoņmaizīšu cenu centos ar m, iegūstam vienādojumu $8p + 15m = 200$ jeb $15m = 200 - 8p$. Ievērojam, ka vienādojuma labā puse dalās ar 8 (jo katrs saskaitāmais dalās ar 8), tātad arī vienādojuma kreisajai pusei ir jādalās ar 8. Tā kā skaitļi 15 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad m ir jādalās ar 8. Tā kā m un p ir naturāli skaitļi, tad $15m < 200$. Līdz ar to vienīgā derīgā vērtība ir $m = 8$. Tādā gadījumā magoņmaizīte maksā 8 centus un pīrādziņš maksā 10 centus. Tātad Brālītis samaksāja 18 centus.

A.7.3. Dots, ka $AB||CD$ un $AD||BC$ (skat. 218. att.). Nogriežņu AC un BD krustpunkts ir M. Uz taisnes AB izvēlēts tāds punkts N, ka $AM = MN$. Pierādīt, ka $\sphericalangle ANC = 90°$.



218. att.



219. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\Delta ABD = \Delta CDB$ pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm, BD – kopīga mala un $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm (skat. 219. att.). Tātad $AD = BC$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas. Līdzīgi $\Delta AMD = \Delta CMB$ pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MCB$, $AD = BC$ un $\sphericalangle ADM = \sphericalangle CBM$, tātad $AM = MC$. Trijstūri AMN un NMC ir vienādsānu, tāpēc $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ANM$ un $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MCN$. Tā kā $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ACB$, tad $\sphericalangle ANC = \sphericalangle NCD$. Esam ieguvuši, ka iekšējie vienpusleņķi pie paralēlām taisnēm AN un CD ir vienādi, tātad $\sphericalangle ANC = 90°$.

A.7.4. Divi rūķi – Svirpulnieks un Pukstiņš – katru dienu tīra zobus. Katrs lieto savu zobu birsti un katrs sava veida zobu pastas tūbiņas. Katram rūķim viena zobu pastas tūbiņa pietiek veselam skaitam dienu. Ja vienā dienā rūķim beidzas viena zobu pastas tūbiņa, tad nākamajā dienā viņš iesāk tādu pašu jaunu tūbiņu. Svirpulniekam viena zobu pastas tūbiņa pietiek divas dienas ilgāk nekā Pukstiņam. Ja abi sāk jaunas zobu pastas tūbiņas vienā un tajā pašā dienā, tad dienā, kad Pukstiņš pēdējo dienu izmanto trešo zobu pastas tūbiņu, Svirpulnieks pirmo dienu ir iesācis jaunu tūbiņu. Cik dienas katram rūķim pietiek ar vienu zobu pastas tūbiņu?

Atrisinājums. Ja Pukstiņam viena tūbiņa pietiek n dienām, tad Svirpulniekam viena tūbiņa pietiek $n+2$ dienām. No dotā izriet, ka $(3n-1)$-ajā dienā Svirpulnieks ir pabeidzis kārtējo zobu pastas tūbiņu, tātad viņš ir izlietojis $\frac{3n-1}{n+2}$ tūbiņas. Tā kā tūbiņu skaits ir naturāls skaitlis, tad $3n-1$ ir jādalās ar $n+2$ jeb $3n-1 = k \cdot (n+2)$, kur k ir naturāls skaitlis. Izsakot mainīgo n, iegūstam $n = \frac{2k+1}{3-k}$. Lai n būtu naturāls, tad k varētu būt 1 vai 2. Pārbaudot iegūstam, ka der vienīgi $k = 2$, un tādā gadījumā $n = 5$. Esam ieguvuši, ka Pukstiņam zobu pastas tūbiņa pietiek 5 dienām, bet Svirpulniekam – 7 dienām.

A.7.5. Kvadrāts sadalīts 12×12 vienādās kvadrātiskās rūtiņās un izkrāsots kā šaha galdiņš. Četrdesmit trijās baltajās rūtiņās sēž pa vienai mušai. Varde lēkā pa kvadrātu, katrā lēcienā šķērsojot divu rūtiņu kopējo malu. Tā nelec caur rūtiņu stūri un nelec rūtiņā, kurā tā jau ir bijusi. Ielecot rūtiņā, kurā sēž muša, varde to apēd. Zināms, ka varde ir bijusi vismaz 100 rūtiņās. Pierādīt, ka varde ir apēdusi vismaz 21 mušu!

Atrisinājums. Ievērosim, ka varde ir pamīšus baltās un melnās rūtiņās, tāpēc viņa ir apmeklējusi vismaz $100 : 2 = 50$ baltas rūtiņas. Kopējais balto rūtiņu skaits ir 72, tāpēc neapmeklētas paliek ne vairāk kā $72 - 50 = 22$ baltas rūtiņas. Pat ja visās neapmeklētajās baltajās rūtiņās ir pa mušai, varde ir apēdusi vismaz $43 - 22 = 21$ mušu.

8. KLASE

A.8.1. Aprēķini dotās izteiksmes vērtību!

$$\frac{2000016 \cdot 1999984}{5^{12} \cdot 2^{13} - 128}$$

Atrisinājums

$$\frac{2000016 \cdot 1999984}{5^{12} \cdot 2^{13} - 128} = \frac{(2 \cdot 10^6 + 16)(2 \cdot 10^6 - 16)}{2 \cdot (5 \cdot 2)^{12} - 128} = \frac{4 \cdot 10^{12} - 256}{2 \cdot 10^{12} - 128} = \frac{4 \cdot (10^{12} - 64)}{2 \cdot (10^{12} - 64)} = 2$$

A.8.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, ka $ab(a + 43b) = 434343$?

Atrisinājums. Ja a vai b ir pāra skaitlis, tad vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343. Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad $a + 43b$ ir pāra skaitlis un vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343.

Tātad nevar atrast tādus veselus skaitļus a un b, lai dotā vienādība būtu patiesa.

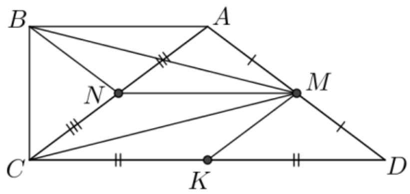
A.8.3. Zināms, ka skaitlis dalās ar 2016 un ka visi tā cipari ir dažādi. Kāds ir lielākais ciparu skaits, kas var būt šajā skaitlī?

Atrisinājums. Tā kā pavisam ir desmit dažādi cipari, tad meklētajam skaitlim nav vairāk kā 10 cipari. Der, piemēram, desmitciparu skaitlis 6401398752.

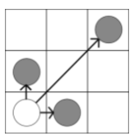
Piezīme. Desmitciparu skaitli var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi. Tā kā meklētajam skaitlim jādalās ar 2016, tad tam jādalās ar visiem tā pirmreizinātājiem $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Visu desmit ciparu summa ir 45, tātad skaitlis dalās ar $3^2 = 9$. Lai skaitlis dalītos ar $2^5 = 32$, tā pēdējo piecu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 32. Der, piemēram, 98752. Tad atlikušie cipari 0, 1, 3, 4, 6 jāizkārto tā, lai iegūtais desmitciparu skaitlis dalītos ar 7.

A.8.4. Dota taisnleņķa trapece $ABCD$, kuras īsākā sānu mala ir BC. Malu AD un CD viduspunkti attiecīgi ir M un K, bet diagonāles AC viduspunkts ir N. Pierādīt, ka $\Delta MNB = \Delta CKM$.

Atrisinājums. Nogrieznis MN ir trijstūra CAD viduslīnija (skat. 220. att.), tāpēc $NM = \frac{1}{2}CD = CK$ un $NM || CD$. Tā kā $NM || CD$ un $AM = MD$, tad NM atrodas uz malas BC vidusperpendikula. No vidusperpendikula īpašības (katrs vidusperpendikula punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem) iegūstam, ka $CN = BN$ un $CM = BM$. Nogrieznis MK ir trijstūra CAD viduslīnija, tāpēc $MK = \frac{1}{2}AC = CN$. Līdz ar esam ieguvuši, ka $\Delta MNB = \Delta CKM$ pēc pazīmes mmm.



220. att.


221. att.

A.8.5. Divi spēlētāji spēlē spēli uz $N \times N$ rūtiņas liela laukuma. Sākumā laukuma kreisajā apakšējā rūtiņā atrodas spēļu kauliņš. Katrā gājienā spēļu kauliņu drīkst pārvietot vai nu vienu laucinu pa labi, vai vienu lauciņu uz augšu, vai arī divus lauciņus pa diagonāli uz augšu pa labi (skat. 221. att., kur kauliņa sākumpozīcija apzīmēta ar baltu, bet atļautie gājieni – ar pelēkiem aplīšiem). Kauliņu nedrīkst pārvietot ārpus laukuma robežām. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Zaudē spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar, ja **a)** $N = 7$, **b)** $N = 8$?

Atrisinājums. Analizēsim spēli no beigām. Skaidrs, ka laukuma labā augšējā stūra rūtiņa ir zaudējoša, jo no tās nevar izdarīt gājienu. Tālāk laukuma rūtiņas aizpildīsim pēc šāda principa: ja kāds no iespējamajiem gājieniem pārvieto kauliņu uz zaudējošu rūtiņu (apzīmējam ar Z), tad šī rūtiņa ir uzvaroša (apzīmējam ar U). Pretējā gadījumā rūtiņa ir zaudējoša. Tādā veidā aizpildot rūtiņas, iegūstam, ka gan a), gan b) gadījumā sākuma (kreisā apakšējā stūra rūtiņa) ir zaudējoša, skat. attiecīgi 222. att. un 223. att.

Tātad, pareizi spēlējot, uzvarēs otrais spēlētājs, jo viņš vienmēr var panākt, ka pirmajam spēlētājam gājiens jāizdara no zaudējošas rūtiņas.

Z	U	Z	U	Z	U	Z
U	Z	U	Z	U	Z	U
U	U	U	U	U	U	Z
Z	U	Z	U	U	Z	U
U	Z	U	Z	U	U	Z
U	U	Z	U	U	Z	U
Z	U	U	Z	U	U	Z

222. att.

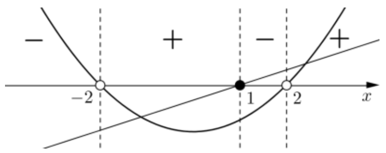
U	Z	U	Z	U	Z	U	Z
Z	U	Z	U	Z	U	Z	U
U	U	U	U	U	U	U	Z
U	Z	U	Z	U	U	Z	U
Z	U	Z	U	Z	U	U	Z
U	U	U	Z	U	U	Z	U
U	Z	U	U	Z	U	U	Z
Z	U	U	Z	U	U	Z	U

223. att.

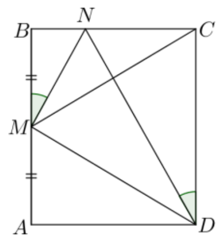
9. KLASE

A.9.1. Atrisināt nevienādību $\frac{x-1}{x^2-4} \leq 0$.

Atrisinājums. Punkti, kuros skaitītājs un saucējs ir vienāds ar 0, ir $x = 1$ un $x = \pm 2$. Izmantojot Intervālu metodi (skat. 224. att.), iegūstam, ka $x \in (-\infty;\ -2) \cup [1; 2)$.



224. att.



225. att.

A.9.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x, y un z, ka $x^3 - 2016xyz = 10$?

Atrisinājums. Apskatām dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 4.

$\boldsymbol{x}$ **(mod 4)**	$\boldsymbol{x^3 - 2016xyz}$ **(mod 4)**
0	$0^3 - 0 \equiv 0 \pmod 4$
1	$1^3 - 0 \equiv 1 \pmod 4$
2	$2^3 - 0 \equiv 0 \pmod 4$
3	$3^3 - 0 \equiv 3 \pmod 4$

Esam ieguvuši, ka $x^3 - 2016xyz$ pēc moduļa 4 var pieņemt vērtības 0; 1 vai 3, bet $10 \equiv 2 \pmod 4$. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

A.9.3. Dots taisnstūris $ABCD$. Malas AB viduspunkts ir M. Zināms, ka uz malas BC var izvēlēties tādu punktu N, ka $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN = 30°$. Pierādīt, ka trijstūris CDM ir vienādmalu!

Atrisinājums. Tā kā M ir AB viduspunkts, tad simetrijas dēļ $CM = MD$ (skat. 225. att.). Tad pietiek pierādīt, ka $MD = CD$. Trijstūri BMN un CDN ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle MBN = \sphericalangle DCN = 90°$ un $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN$ pēc dotā. Trijstūru līdzības koeficients ir $\frac{BM}{CD} = \frac{1}{2}$, tāpēc $CN = 2BN$. Bet $MN = 2BN$, jo katete pret 30° leņķi ir puse no hipotenūzas. Tāpēc $MN = CN$.

Tā kā $\sphericalangle BNM = \sphericalangle CND = 90° - 30° = 60°$, tad $\sphericalangle MND = 180° - \sphericalangle BNM - \sphericalangle CND = 60°$. Ievērojot, ka ND ir trijstūru MND un CND kopīga mala, iegūstam, ka $\Delta MND = \Delta CND$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tad $MD = CD$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $MD = CD = CM$ jeb trijstūris CDM ir vienādmalu.

Piezīme. Apzīmējot $BM = x$, $CD = 2x$ un izmantojot trigonometriskās sakarības, var izteikt, $BN = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ un $CN = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Lietojot Pitagora teorēmu ΔMBC, iegūstam, ka $CM = 2x$.

A.9.4. Naturālu skaitļu virknes 1; 2; 2; 4; 8; 32; 48; ... katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2016. loceklis?

Atrisinājums. Virknes locekļus apzīmējam ar a_i, kur i ir naturāls skaitlis. Aprēķinām nākamos virknes locekļus.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a_i	1	2	2	4	8	32	**48**	192	576	3780	35280	40320	5760	5040	4200	160	**48**	**192**
a_i nenulles ciparu reizinājums	1	2	2	4	8	6	32	18	210	168	240	24	210	20	8	6	32	18

Katrs virknes loceklis, sākot ar trešo, ir viennozīmīgi noteikts ar diviem iepriekšējiem. Tā kā virknes septītais un astotais loceklis ir attiecīgi 48 un 192, un arī 17. un 18. loceklis ir attiecīgi 48 un 192, tad virkne, sākot ar 7. locekli, ir periodiska ar perioda garumu 10. Tā kā $2016 = 6 + 10 \cdot 201$, tad $a_{2016} = a_{16} = 160$.

A.9.5. Sivēnam ir 10 podi ar medu, kas pēc kārtas sanumurēti ar skaitļiem no 1 līdz 10. Kādu dienu viņš uzzināja, ka Vinnijs Pūks slepeni ir izēdis četrus no tiem, pie tam to numuri veido aritmētisko progresiju. Katra poda saturu Sivēns var pārbaudīt. Pierādīt, ka viņš var noskaidrot, kuri tieši ir izēstie podi, pārbaudot ne vairāk kā četrus podus!

Atrisinājums. Ir skaidrs, ka attiecīgās progresijas diference d var būt tikai 1, 2 vai 3. Pierādīsim, ka Sivēns var izdomāt atbildi, pārbaudot 4, 5., 6. podu un vēl vienu podu.

- Ja 4., 5. un 6. pods ir pilns, tad izēstie podi ir 7., 8., 9. un 10.
- Ja 4., 5. un 6. pods ir izēsts, tad $d = 1$ un, pārbaudot 3. podu, var noskaidrot prasīto.
- Ja no 4., 5. un 6. poda izēsti ir divi blakus esoši podi, tad $d = 1$ un ir zināms, kur sākas vai beidzas izēstie.
- Ja izēsts ir 4. un 6. pods, tad $d = 2$ un, pārbaudot 2. podu, var noskaidrot prasīto.
- Atliek gadījums, kad no 4., 5. un 6. poda izēsts tieši viens pods.
    - Ja tas ir 5. pods, tad $d = 2$ un, pārbaudot 1. podu, var noskaidrot prasīto.
    - Ja tas ir 4. pods, tad $d = 1$ vai $d = 3$ un, pārbaudot 3. podu, var noskaidrot prasīto.
    - Ja tas ir 6. pods, tad $d = 1$ un izēsts ir 6., 7., 8. un 9. pods.

PĀRSKATS

Šajā nodaļā dots skolēnu rezultātu apkopojums konkursā "Tik vai… Cik?", Novada olimpiādē, Valsts olimpiādē un Atklātajā matemātikas olimpiādē.

Jauno matemātiķu konkursam un Profesora Cipariņa klubam aprakstītas skolēnu biežāk pieļautās kļūdas, doti ieteikumi un vērtēšanas kritēriji.

TIK VAI… CIK?

Konkursa pirmajā kārtā piedalījās 3783 dalībnieki, otrajā kārtā – 3366 dalībnieki, trešajā kārtā – 2908 dalībnieki, ceturtajā kārtā – 412 dalībnieki.

Tabulā dota skolēnu atbilžu proporcija. Testa jautājumiem pareizā atbilde norādīta iekavās pie uzdevuma numura un izcelta treknrakstā. Pārējiem uzdevumiem iekavās norādīts maksimālais punktu skaits. Procenti ir noapaļoti līdz tuvākajam veselajam.

1. KĀRTA

	1. (C)	2. (D)	3. (A)	4. (D)	5. (D)	6. (B)	7. (D)	8. (C)	9. (D)	10. (E)
A	1%	5%	**87%**	5%	6%	23%	8%	17%	12%	53%
B	1%	1%	1%	41%	28%	**30%**	7%	19%	22%	17%
C	**95%**	2%	5%	7%	10%	12%	26%	**23%**	25%	9%
D	0%	**89%**	3%	**39%**	**32%**	10%	**44%**	8%	**25%**	4%
E	3%	1%	4%	5%	18%	19%	12%	27%	10%	**14%**
Nerisina	0%	2%	1%	4%	6%	6%	3%	7%	5%	4%

2. KĀRTA

	1. (B)	2. (C)	3. (C)	4. (E)
A	2%	3%	14%	18%
B	**87%**	1%	20%	21%
C	2%	**73%**	**35%**	20%
D	3%	2%	18%	13%
E	6%	20%	10%	**23%**
Nerisina	1%	1%	3%	6%

	5. (4)	6. (4)	7. (4)	8. (6)
n	0%	1%	4%	1%
0-0,5	6%	22%	58%	23%
1-1,5	1%	12%	25%	11%
2-2,5	22%	7%	5%	34%
3-3,5	0%	6%	2%	6%
4-4,5	70%	52%	7%	5%
5-5,5				1%
6				20%
Vidēji	**3,27**	**2,58**	**0,7**	**2,41**

3. KĀRTA

	1. (4)	2. (4)	3. (4)	4. (4)	5. (4)	6. (4)	7. (6)
n	1%	0%	0%	1%	4%	4%	4%
0-0,5	43%	10%	4%	40%	63%	66%	38%
1-1,5	12%	8%	25%	2%	5%	11%	9%
2-2,5	4%	17%	18%	19%	9%	7%	7%
3-3,5	5%	21%	24%	1%	2%	2%	41%
4-4,5	35%	42%	29%	36%	16%	9%	0%
5-5,5							0%
6							2%
Vidēji	**1,82**	**2,86**	**2,48**	**1,91**	**1,00**	**0,72**	**1,64**

4. KĀRTA

	1. (3)	2. (2)	3. (4)	4. (3)	5. (3)	6. (2)	7. (4)	8. (3)	9. (2)	10. (3)	11. (3)
0-0,5	2%	18%	1%	0%	5%	84%	7%	19%	58%	7%	42%
1-1,5	6%	31%	2%	3%	7%	4%	16%	17%	35%	48%	23%
2-2,5	14%	51%	9%	11%	22%	12%	20%	25%	6%	25%	21%
3-3,5	78%		15%	86%	66%		30%	39%		20%	15%
4			72%				27%				

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

1. KĀRTA

J.1.1. Rudens rēbuss

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi. Daļa skolēnu bija norādījusi abus iespējamos atrisinājumus, taču papildus punktus par to saņemt nevar. Daži bija maldīgi pieņēmuši, ka $L = 0$, līdz ar to viņi ieguva nepareizu rezultātu.

J.1.2. Laika skaitīšana

Lielākā daļa skolēnu uzdevumu attēloja uz skaitļu ass, vairāki skolēni to bija papildinājuši ar skaistiem zīmējumiem. Tikai par pareizām atbildēm bez paskaidrojumiem varēja saņemt 3 punktus.

J.1.3. Taisnstūri

Par risinājumu, kurā ir tikai aprēķini bez paskaidrojumiem, varēja saņemt 2 punktus. Bija vairāki skolēni, kuri centās izveidot attiecību starp taisnstūra malām no dotā zīmējuma – tas nav pareizi, jo uzdevumā nav prasīts veikt mērījumus un dotais zīmējums tikai ilustrē vienu sadalījuma veidu. Citi risinātāji pieņēma, ka visiem sešiem četrstūriem ir vienāds laukums – arī tas ir tikai viens piemērs nevis pilns atrisinājums.

J.1.4. Šautriņas

Par a) daļu varēja saņemt 1 punktu, lielākā daļa skolēnu tos arī saņēma. Ja b) bija norādīti visi 12 iespējamie varianti bez pamatojuma, ka citu iespēju nav, varēja iegūt ne vairāk kā 2 punktus. Daļa skolēnu nebija sapratuši, ka b) apakšpunktā nav prasīts tikai viens piemērs un ka vajadzīgs norādīt visus iespējamos variantus un pamatot, ka citu iespēju nav.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kur varēja..?"*, tad nepietiek atrast vienu vai dažas iespējamās atbildes, bet ir 1) jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības; 2) jāpamato, ka citu iespēju nav.

J.1.5. Tetrakubi

Daļa risinātāju nebija pamanījuši, ka viena paralēlskaldņa salikšanai nevar izmantot divus vienādus tetrakubus. Priecājamies par risinātājiem, kas konkursa darbam pievienoja attēlus ar tetrakubu veidošanu un to izmantošanu risināšanā.

2. KĀRTA

J.2.1. Maģiskais sešstūris

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi. Punktu skaits tika samazināts par 1, ja nebija norādīts, ka katrā joslā ierakstīto skaitļu summa ir 38.

J.2.2. Kalnainās takas

Uzdevumā nevarēja aprēķināt precīzu kalnu skaitu katrā takā, tāpēc iespējamais kalnu skaits bija jānovērtē. Daļa skolēnu aplūkoja tikai dažus atsevišķus piemērus, kāds varētu būt kalnu skaits katrā takā, taču tas nav pilns atrisinājums. Tikai par pareizu atbildi bez pamatojuma, ka norādītajā maršrutā tiešām ir vismazāk kalnu, varēja saņemt 1 punktu.

J.2.3. Baltās un melnās bumbiņas

Arī šajā uzdevumā vairāki risinātāji bija apskatījuši tikai dažus atsevišķus piemērus, kādas krāsas bumbiņas varētu tikt izvilktas katrā reizē, taču dažu iespējamo gadījumu apskatīšana nav pilns uzdevuma atrisinājums. Citi skolēni bija apskatījuši visas iespējamās pēdējo divu bumbiņu krāsu kombinācijas un ieguvuši, ka pēdējās bumbiņas krāsa nav nosakāma, taču tas ir kļūdains secinājums, jo visas no šo skolēnu apskatītajām pēdējo divu bumbiņu krāsu kombinācijām nemaz nav iespējams iegūt.

J.2.4. Vai nu pirmskaitlis, vai kvadrāts

Par pareizi atrisinātu uzdevuma a) daļu varēja saņemt 1 punktu, par b) daļu – 2 punktus, par c) daļu – 2 punktus. Ja b) daļā nebija paskaidrots, kāpēc jebkurš skaitlis, kura pēdējais cipars ir 8, nav pirmskaitlis un nav arī skaitļa kvadrāts, punktu skaits tika samazināts par 1. Vairāki skolēni nebija pamanījuši, ka c) daļā prasīts nevis lielākais sešciparu skaitlis, bet gan lielākais iespējamais skaitlis ar minētajām īpašībām. Daļa risinātāju, c) daļā bija uzrakstījuši tikai atbildi, bet nebija pamatojuši, ka iegūtais skaitlis tiešām ir vislielākais, tāpēc par c) daļu ieguva tikai 1 punktu.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kāds ir lielākais...?"*, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) atrast šo vislielāko vērtību un parādīt piemēru; 2) pierādīt, ka lielāka vērtība nevar būt.

J.2.5. Simetriskie raksti

Par a) daļu varēja saņemt 2 punktus, vairums skolēnu tos arī saņēma. Daļa skolēnu bija maldīgi pieņēmuši, ka flīžu laukumam var būt vairākas horizontālas vai vertikālas simetrijas asis.

3. KĀRTA

J.3.1. Ceļš vērtībā 100

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi, tas ir, atraduši ceļu vērtībā 100.

J.3.2. Trīs reizinātāju summa

Lielākā daļa skolēnu bija atraduši visas iespējamās summas, taču daļa no tiem nebija pamatojuši, kāpēc nav iespējami citi varianti. Citi bija atraduši tikai dažas no iespējamajām summām.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kāda var būt...?",* tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) atrast šīs visas iespējamās vērtības un parādīt piemērus; 2) pierādīt, ka citu iespēju nav.

J.3.3. Skaitļu virkne

Par pareizi atrastiem pirmajiem pieciem virknes locekļiem, tas ir, par a) gadījumu varēja iegūt 2 punktus. Ja b) gadījumā, ja bija pamanīts, ka virkne sāk atkārtoties, bija noteikts virknes 2016. loceklis un aprakstīts, kā to noteikt, tad varēja iegūt 3 punktus. Bija skolēni, kuri pamanīja, ka virkne atkārtojas, bet tikai sākot ar 5. vai 6. virknes locekli, tādējādi turpmākie aprēķini bija kļūdaini.

J.3.4. Kad mazais Bobs noraugās abu pārējo izdarībās...

Visbiežāk pieļautā kļūda bija, ka ir parādīts gadījums, kad ir vislielākais krustpunktu skaits, bet nav pamatots, ka lielāks skaits krustpunktu nav iespējams. Daudzi skolēni nebija sapratuši uzdevuma nosacījumus, ka **katrus divus** punktus savieno ar nogriezni, un uzdevumā doto 45 nogriežņu vietā ieguvuši tikai 10 nogriežņus.

J.3.5. Sniegpārsliņu prāta mežģis

Lielākā daļa skolēnu bija pareizi atraduši, kā salikt sniegpārsliņu puzli no visiem 9 gabaliņiem. Ja bija parādīts, ka nevar salikt no 9, bet var no 8, parādot, ka vienu kauliņu izmanto divreiz, tika piešķirts 1 punkts.

4. KĀRTA

J.4.1.Putnu vērotājs

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi, taču daži skolēni nebija izpratuši uzdevuma nosacījumus un centās apskatīt visus putnus, kas nebija prasīts.

J.4.2. Ģeometriskā ferma

Lielai daļai skolēnu neieguva maksimālo punktu skaitu, jo, veicot aprēķinus bija ieguvuši, ka uzdevumā prasītais varētu būt iespējams, bet nebija parādījuši piemēru, ka prasīto tiešām var izdarīt.

J.4.3. Spēļu nauda

Šo uzdevumu varēja atrisināt vairākos veidos. Ja bija uzrakstīta tikai pareizā atbilde bez pamatojuma, kā tā iegūta, tad par to maksimālo punktu skaitu nevarēja iegūt.

J.4.4. Anša PIN kods

Šo uzdevumu varēja atrisināt vairākos veidos. Ja nebija pamatots, ka atrastais PIN kods ir vienīgais iespējamais, tad punktu skaits tika samazināts par 1. Tikai par pareizi uzrakstītu PIN kodu un pārbaudi, ka tam izpildās visas uzdevumā prasītās īpašības, maksimālais punktu skaits netika piešķirts.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kāds ir...?"*, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) atrast visas iespējamās vērtības un parādīt piemērus; 2) pierādīt, ka citu iespēju nav.

J.4.5. Krāsainās bumbiņas

Daļa skolēnu nebija izpratuši uzdevuma nosacījumus un ieguvuši, ka var būt bezgalīgi daudz kastīšu, taču šāda atbilde nav pareiza. Daļa bija atraduši vienu piemēru, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, taču nebija ievērojuši, ka tas nav lielākais iespējamais kastīšu skaits. Maksimālais punktu skaits netika piešķirts arī tad, ja ir parādīts, ka bumbiņas var savietot septiņās kastītēs, bet nebija pamatots, kāpēc nevar būt vairāk kastīšu.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kāds ir lielākais...?"*, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) atrast šo vislielāko vērtību un parādīt piemēru; 2) pierādīt, ka lielāka vērtība nevar būt.

5. KĀRTA

J.5.1. Mīnas

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi. Ja viena rūtiņa bija iekrāsota nepareizi, tad punktu skaits tika samazināts par 1.

J.5.2. Daļu summa

Uzdevumam bija iespējami vairāki risinājumi, bet jāparāda bija tikai viens. Bija skolēni, kuri neizmantoja visus skaitļus no 1 līdz 20 vai arī bija izveidojuši daļas, kuru summa nebija naturāls skaitlis – šādi risinājumi tika uzskatīti par nepareiziem.

J.5.3. Apslēptie skaitļi

Lielākā daļa skolēnu bija veiksmīgi pamanījuši, ka jāapskata vienādojums $x^2 \cdot y = 2016$, kā arī sapratuši, ka var apskatīt skaitļa 2016 dalītājus. Daļa skolēnu bija norādījuši tikai vienu iespējamo atbildi, bet daļa nepamanīja, ka x var būt arī 1.

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums *"Kādi var būt...?"*, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) atrast visas iespējamās vērtības un parādīt piemērus; 2) pierādīt, ka citu iespēju nav.

J.5.4. Ne pārāk precīzā karte

Maksimālo punktu skaitu nevarēja iegūt, ja bija uzrakstīta tikai atbilde, bez paskaidrojumiem, kā tā iegūta.

J.5.5. Jaukie skaitļi

Daļa skolēnu nebija izpratuši uzdevumu un ieguvuši, ka ir skaitļi, kuri ir lielāki nekā 5 un nav jauki, taču šī atbilde nebija pareiza. Liela daļa skolēnu bija izpildījuši uzdevuma **a)** gadījumu, taču nebija pildījuši uzdevumu tālāk. Bija skolēni, kuri centās pierādīt to, ka 2015 nav jauks skaitlis, kā arī bija skolēni, kuri **c)** gadījumā bija atraduši vairākus piemērus, taču tas nepierāda, ka katrs skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

1. NODARBĪBA

P.1.1. Vakars uz ledusskapja

Šo uzdevumu varēja risināt praktiski, ripinot spēļu kauliņu pa doto laukumu. Tiem, kas tā arī darīja, izdevās atrisināt uzdevumu pareizi. Savukārt tiem, kas apskatīja šo uzdevumu tikai teorētiski, ne vienmēr izdevās iegūt pareizo atbildi. Daudzi domāja, ja sākumā kubs nokrāso katru ceturto rūtiņu, tad tā tas turpināsies, bet patiesībā nokrāsotā skaldne reizēm atradās kuba sānā un kādā no rindām nenokrāsoja nevienu rūtiņu.

Kad esi ticis galā ar uzdevumu, vēlreiz pārlasi uzdevuma nosacījumus un pārliecinies, ka visu esi sapratis pareizi! Un, protams, vēlreiz pārskati savu risinājumu, lai pārliecinātos, ka neesi pieļāvis aritmētiskās kļūdas vai kādas citas neuzmanības kļūdas!

P.1.2. Eskalators

Kad esi atradis pareizo atbildi, noteikti uzraksti, kādā veidā tā ir iegūta! Citādi saņemsi ne vairāk kā 1 punktu. Paskaidrojumam ir jābūt pilnīgam. Nepietiek tikai ar grafikiem un apzīmējumiem, kas risinājumā nav paskaidroti.

Aplams ir pieņēmums, ka laikā, kamēr gājējs veic vienu soli, eskalators pakustēsies par vienu pakāpienu. Šādi pieņēmumi ir būtu jāpierāda. Jāsaprot, ka laiks, kurā katrs no cilvēkiem uzbrauc līdz augšai, ir atšķirīgs.

P.1.3. Gudrais ceļinieks

Šajā uzdevumā ieguvām negaidīti asprātīgas idejas tam, ko ceļinieks varēja atbildēt princesei. Visaugstāk gan tika vērtēti tieši tie risinājumi, kas piedāvāja konkrētu atbildi uz jautājumu, kura varēja būt meli vai patiesība. Piemēram, par neartikulētu skaņu atbildes vietā īsti nevar pateikt, vai tā ir taisnība vai meli, jo šāda atbilde neietver sevī apstrīdamu informāciju.

P.1.4. Starpbrīdis

Ne visiem bija skaidra termina *mainīgais* nozīme. Ja, piemēram, uzdevumā ir divi mainīgie x un y, tas **nenozīmē** to, ka šie skaitļi nekādā gadījumā nedrīkst būt vienādi – tie var būt jebkādi skaitļi (tas ir, patvaļīgi skaitļi), ja vien uzdevumā nav teikts citādi, vai arī izdodas pierādīt kādas šo nezināmo skaitļu īpašības.

Pievērsiet uzmanību tam, kas ir dotais un kas jāpierāda!

P.1.5. Troņu spēle

Šajā uzdevumā punktu varēja iegūt arī par atbildi, jo tā iekļāva pirmo soli pretī uzdevuma risinājumam – ir pāra skaits skaitļu, ko var uzrakstīt uz tāfeles, tātad *varētu* zaudēt tas, kurš ies pirmais.

Savukārt šajā uzdevumā reti kurš ieguva vairāk nekā 1 punktu. Tie, kas ieguva, bija centušies skaitļus sagrupēt tā, lai otrajam karalim vienmēr būtu, ko izvēlēties.

2. NODARBĪBA

P.2.1. Kaķu valūta

Vienmēr rūpīgi ir jālasa uzdevuma nosacījumi. Jāpievērš uzmanība ne tikai tam, kas ir uzdevumā dots, bet arī tam, kas uzdevumā ir prasīts.

Šāda veida uzdevumus reizēm vieglāk ir izskaidrot, izmantojot shēmas. Bet jāatceras, ja risinājums tiek sniegts tabulas vai shēmas veidā, vienmēr jāpieraksta paskaidrojumi, ko katrs tabulas/shēmas elements nozīmē.

P.2.2. Vienādmalu trijstūri

Šajā uzdevumā, kā arī citos līdzīga tipa uzdevumos, attēliem ir tikai ilustratīva nozīme – ja uzdevumā ir teikts, ka figūras sastāv no vienādiem vienādmalu trijstūriem, tad tā tas arī ir, pat ja zīmējumā dotajiem trijstūriem visu malu garumi nav pilnīgi vienādi.

Ja no kāda figūru komplekta Tev ir izdevies izveidot prasīto, noteikti parādi to zīmējumā! Ja uz jautājumu "Vai var …?", atbilde ir "jā", tad pietiek parādīt vienu piemēru, kurā prasītais izpildās.

Vienmēr ļoti uzmanīgi ir jālasa uzdevuma noteikumi. Pirmkārt, šajā uzdevumā nekas nebija teikts par to, kādam jāizskatās meklētā trijstūra krāsojumam. Tomēr daudzi pieņēma, ka krāsojumam jāizskatās kā „šaha galdiņam". Otrkārt, uzdevumā tika doti 5 atsevišķi gadījumi. Tāpēc netika vērtētas atbildes, kā varētu izveidot lielo vienādmalu trijstūri, izmantojot figūras no dažādiem apskatāmajiem gadījumiem.

P.2.3. Neiespējamā ķēdīte

Patīkami, ka šajā uzdevumā risinājumi bija ļoti radoši un dažādi. Tika iesūtītas gan gumijas, gan papīra lentes un dzijas pavedieni. Protams, pareizi bija arī zīmētie atrisinājumi. Dažus risinājumus nebija iespējams viennozīmīgi novērtēt, jo risinājums sastāvēja no zīmētiem vienkrāsainiem apļiem tā, ka nebija iespējams noteikt, kurš posms iet caur kuru. Vienmēr rūpīgi pārdomājiet, kā savu ideju izklāstīt visiem saprotamā un nepārprotamā veidā!

P.2.4. Starpbrīdis

Atšķirībā no otrā uzdevuma šis ir viens no tiem uzdevumiem, kuros dažu piemēru parādīšana nav pilns uzdevuma atrisinājums. Šajā uzdevumā nav jautājums "Vai var …?", šeit ir prasīts "Pierādi!", kas nozīmē, ka ir jāpamato, ka prasītais izpildās vienmēr. Tā kā naturālo skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad nav iespējams apskatīt visus iespējamos gadījumus, pierādījumā ir nepieciešami cita veida spriedumi.

Bija patīkami redzēt, ka vairākos risinājumos tika izmantota matemātiskās indukcijas metode. Šādos uzdevumos, kuros ir jāapskata visi iespējamie gadījumi (it īpaši, ja gadījumu ir bezgalīgi daudz), šī ir laba metode, kā saīsināt pierakstu.

Kad esi atrisinājis uzdevumu, vienmēr pārlasi savu risinājumu vairākas reizes, lai novērstu visas neuzmanības kļūdas!

P.2.5. Apaļā galda bruņinieki

Šajā uzdevumā bija nepieciešams pierādīt, ka prasītais izpildās neatkarīgi no tā, kā būs apsēdušies bruņinieki. Tātad nederēja risinājums, kurā tiek aprakstīts viens gadījums, kā jāsasēžas bruņiniekiem, lai uzdevuma prasības varētu izpildīt.

3. NODARBĪBA

P.3.1. Biznesmenis

Vairāki risinātāji uzrādīja atbildi un pārbaudīja, ka šī atbilde der. Diemžēl šajā gadījumā ar to nepietiek, jo ir nepieciešams risinājums, kas pierāda, ka tā patiešām ir vienīgā iespējamā atbilde.

Ja uzdevumu risina grafiski, noteikti jāpieraksta visi paskaidrojumi, kas tajā ir, lai labotājam nebūtu šaubu, ka atrisinājums ir pareizs.

P.3.2. Režģis

Vienmēr ļoti rūpīgi jāizlasa uzdevuma teksts, lai tiktu ievēroti visi uzdevuma nosacījumi. Piemēram, šajā uzdevumā vairāki risinātāji, nebija izpildījuši uzdevuma pēdējo punktu: „Skaitļi nedrīkst atkārtoties pa horizontālajām līnijām."

P.3.3. Parādes gājiens

Daudzi bija atraduši pareizo atbildi. Diemžēl tikai retais centās pierādīt, ka atrastais ceļš patiešām ir pats garākais iespējamais. Ja nebija pamatojuma, ka atrastais ceļš ir garākais, tad nevarēja saņemt maksimālo punktu skaitu. Iegūtais garākais ceļš noteikti bija jāuzzīmē vai jāapraksta, kā karalim jāiet, lai viņa ceļa garums būtu tieši $16 + 64\sqrt{2}$.

P.3.4. Starpbrīdis

Arī šajā uzdevumā pilnam risinājumam nepietiek tikai ar atrastu atbildi – tas nepierāda, ka nav iespējams cits risinājums.

Uzmanīgi jālasa uzdevuma nosacījumi. Bija prasīts, kāda ir izteiksmes $a^2 - b^2$ vērtība nevis, kādi ir skaitļi a un b.

Uzdevumā nebija teikts, ka skaitļiem a un b ir jābūt naturāliem. Tāpēc neder, piemēram, risinājums, kur tiek iegūta vienādība $a + b = 3$ un apskatīti „visi" gadījumi, kad $a = 2$ un $b = 1$, vai $a = 1$ un $b = 2$.

P.3.5. Prāta spēles

Diemžēl šo uzdevumu tikai retais bija atrisinājis pareizi. Ļoti svarīgi vienmēr ir saprast, kāda atbilde ir jāsniedz, lai uzdevums tiktu atrisināts pilnībā. Pirmkārt, šajā uzdevumā svarīgi bija saprast, ka Ansītis var uzvarēt, ja nosauc skaitļus 1, 2 vai 3. Katrs no šiem gadījumiem bija jāpamato, parādot Ansīša stratēģiju. Otrkārt, bija jāparāda veids, kā Grietiņa noteikti var uzvarēt Ansīti neatkarīgi no Ansīša izdarītajiem gājieniem. Tātad viens vai daži piemēri, kādās situācijās Grietiņa uzvar, nepierāda, ka Grietiņa **vienmēr** varēs uzvarēt!

4. NODARBĪBA

P.4.1. Matemātiskais motocikls

Šo uzdevumu ērti varēja risināt, zīmējot cilvēku pārvietošanās grafikus. Bet tādā gadījumā noteikti jāapraksta, kas konkrētajā grafikā ir attēlots un ko nozīmē visi izmatotie apzīmējumi. Arī tad, ja risinājumā neizmanto grafikus, viss ir rūpīgi jāapraksta. Risinājums nav pilnīgs, ja tas sastāv tikai no matemātisku darbību pieraksta, bez paskaidrojumiem, kas tieši tiek aprēķināts.

P.4.2. Ruka namiņš

Daudzi bija izveidojuši namiņa shēmu, kuru varētu apgaismot ar piecām svecēm, bet ne vienmēr 5 sveces bija minimālais sveču skaits, ar kādām varētu apgaismot konkrēto namiņu. To varēja izdarīt arī ar 4, 3, 2 vai 1 sveci. Šādā gadījumā par uzdevumu netika saņemts maksimālais punktu skaits. Reizēm uzdevums bija gandrīz atrisināts – tika izmantota pareiza ideja, bet zīmējums tomēr pieļāva, ka namiņu varētu izgaismot arī ar 4 svecēm. Tāpēc vienmēr rūpīgi jāpārskata savs risinājums!

Daži nebija sapratuši slēgtas lauztas līnijas jēdzienu. Lauzta līnija ir līnija, kas sastāv no vairākiem nogriežņiem. Ja šādas līnijas galapunkti sakrīt, tad to sauc par slēgtu lauztu līniju.

P.4.2. Starpbrīdis

Ja uzdevuma sākumā tiek definēta kāda funkcija, piemēram: $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tad risinājumā šo funkciju nedrīkst mainīt, atmetot tās locekļus! Ir jādefinē jauna funkcija, piemēram, $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Arī šajā uzdevumā (tāpat kā visos matemātikas olimpiāžu uzdevumos) ir jāpaskaidro matemātiskās darbības, tas ir, kas ar kuru izteiksmi ir domāts.

P.4.3. Rasēšanas stundā

Vairāki risinātāji gandrīz tika līdz pareizai atbildei – spēja iegūt gandrīz visus prasītos garumus. Protams, par šādiem risinājumiem netika piešķirts maksimālais punktu skaits, bet tas noteikti ir daudz labāk, nekā nekāds risinājums. Arī citos līdzīga veida uzdevumos labāk ir uzrādīt nepilnīgu risinājumu, nekā nerakstīt neko.

P.4.4. Maģiskās rūtis

Šajā uzdevumā svarīgi bija parādīt konkrētu algoritmu, kā vienmēr var iegūt uzdevumā prasīto. Tāpēc risinājums, kuros apskatīts viens gadījums, noteikti nav pilns risinājums. Arī tādas frāzes kā, piemēram, ''Reizinu tā, lai skaitļi kolonnā pēc iespējas mazāk atšķirtos viens no otra." nav korektas.

Interesanti un labi risinājumi bija, piemēram, algoritma izkārtošana shēmā.

5. NODARBĪBA

P.5.1. Tējas laiks

Noteikti nepieciešams detalizēts risinājums – nepietiek tikai ar atbildi. Arī visi izmantotie apzīmējumi un vienādības, kas izmantotas risināšanas gaitā, noteikti ir jāpaskaidro.

Kad esi atrisinājis uzdevumu, noteikti pārlasi to vēlreiz un pārliecinies, ka neesi pieļāvis aritmētiskas kļūdas!

P.5.2. Baraviku iela

Vienmēr pārlasi, kas tieši prasīts uzdevuma nosacījumos. Daži risinātāji atšifrēja, kurš rūķītis dzīvo kurā namā, bet aizmirsa noskaidrot, kāda ir katra rūķīša profesija.

Diezgan ērts šī uzdevuma risināšanas veids ir tabulas izmantošana, bet šādā gadījumā noteikti ir jāpieraksta paskaidrojums, kas tieši tabulā ir attēlots un no kā tiek veikti spriedumi un secinājumi.

Pilns risinājums noteikti ir jāuzrāda, jo var gadīties, ka uzdevumam ir vairāk nekā viena iespējamā atbilde vai vērtība (šis gan nebija tāds uzdevums).

P.5.3. Burta šķērēšana

Šāda tipa uzdevumos noteikti jāparāda, kā ir sagriezts dotais objekts – šajā gadījumā burts „E". Jāparāda arī, kā izskatās saliktais objekts.

Uzdevumā bija prasīts sagriezt doto figūru 7 daļās, tāpēc risinājumi, kur figūra tika sagriezta vairāk nekā septiņās daļās, neatbilda uzdevuma prasībām.

Ļoti rūpīgi ir jāattēlo atrisinājums, lai būtu pilnībā skaidrs, ka uzdevums ir risināts pareizi!

Šis ir viens no uzdevumiem, kurus noteikti var izmēģināt praksē – izgriezt burtu „E" un tad to sagriezt septiņās daļās – tad uzreiz būs skaidrs, vai atrisinājums ir vai nav pareizs.

P.5.4. Starpbrīdis

Noteikti jāsaprot, kas tieši uzdevumā ir prasīts. Ja uzdevumā ir jāpierāda, ka VIENMĒR izpildās kāda sakarība, tad šī sakarība ir jāpierāda VISIEM iespējamiem gadījumiem, nevis vienam konkrētam.

Bija risinātāji, kas tikai iesāka uzdevumu, bet īsti nezināja, kā turpināt. Tas vienmēr ir ļoti labi, jo arī šādā gadījumā var iegūt dažus punktus.

P.5.5. Profesora mīkla

Daudzi dalībnieki domāja, ka ar trīs krāsām pietiek, bet ar trīs krāsām nepietiek tieši tā paša iemesla dēļ, kādēļ nepietiek ar 2 krāsām. Ja uzdevumā bija prasīts – tam jāizpildās jebkuriem 25 kauliņiem, tas nozīmē, ka uzdevumā prasītajam jāizpildās arī jebkuriem diviem kauliņiem un jebkuriem trijiem kauliņiem! Paņemam trīs gabaliņus, kur katrā no tiem nav vismaz vienas krāsas. Tātad šiem gabaliņiem nav nevienas kopīgās krāsas.

NOVADA OLIMPIĀDE

Tabulās norādīta informācija par to, cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; “n” nozīmē, ka uzdevums nav risināts. Ailē “vidēji” norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu.

Informācija apkopota tikai par tiem 2015./2016. mācību gada Novada olimpiādes rezultātiem, kas pieejami LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolai.

5. klase

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	0%	0%	1%	1%	0%
0	32%	45%	58%	28%	29%
1	11%	14%	16%	5%	10%
2	21%	16%	8%	0%	8%
3	6%	4%	5%	0%	0%
4	7%	9%	1%	1%	1%
5	6%	3%	2%	0%	1%
6	1%	2%	1%	0%	0%
7	3%	1%	1%	0%	0%
8	4%	2%	0%	15%	1%
9	1%	1%	1%	2%	0%
10	9%	3%	6%	47%	49%
Vidēji	**2,80**	**1,84**	**1,44**	**6,29**	**5,42**

6. klase

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	1%	1%	1%	3%	2%
0	23%	29%	25%	37%	30%
1	9%	13%	19%	15%	9%
2	7%	13%	10%	14%	7%
3	20%	8%	0%	3%	4%
4	8%	9%	0%	2%	3%
5	6%	9%	0%	7%	2%
6	2%	5%	1%	1%	6%
7	2%	4%	0%	3%	1%
8	5%	2%	0%	3%	2%
9	3%	2%	1%	2%	2%
10	15%	5%	42%	9%	31%
Vidēji	**3,85**	**2,87**	**4,79**	**2,67**	**4,57**

7. klase

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	0%	1%	1%	2%	2%
0	3%	13%	38%	29%	58%
1	11%	53%	12%	12%	8%
2	12%	11%	2%	7%	3%
3	11%	5%	12%	4%	0%
4	3%	2%	1%	12%	2%
5	6%	4%	0%	11%	21%
6	6%	0%	0%	6%	1%
7	6%	0%	0%	3%	0%
8	6%	2%	0%	2%	1%
9	6%	2%	2%	1%	0%
10	28%	7%	30%	11%	2%
Vidēji	**5,77**	**2,31**	**3,88**	**3,39**	**1,65**

8. klase

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	1%	3%	1%	0%	1%
0	47%	45%	35%	21%	36%
1	31%	14%	28%	8%	33%
2	8%	7%	12%	1%	11%
3	4%	3%	7%	2%	8%
4	1%	2%	3%	4%	3%
5	1%	3%	3%	37%	2%
6	1%	1%	1%	11%	1%
7	0%	3%	3%	3%	1%
8	1%	3%	2%	4%	1%
9	1%	3%	1%	2%	0%
10	3%	8%	3%	7%	1%
Vidēji	**1,27**	**2,46**	**1,94**	**4,29**	**1,45**

9. klase

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	2%	2%	1%	2%	4%
0	12%	24%	34%	15%	58%
1	14%	22%	11%	13%	26%
2	15%	9%	23%	10%	6%
3	7%	10%	7%	9%	1%
4	4%	10%	3%	9%	0%
5	3%	8%	2%	8%	1%
6	3%	5%	1%	8%	0%
7	3%	3%	1%	7%	0%
8	3%	2%	2%	3%	0%
9	14%	4%	2%	3%	1%
10	18%	2%	12%	14%	1%
Vidēji	**4,84**	**2,79**	**2,74**	**4,29**	**0,78**

VĒRTĒŠANAS KRITĒRIJI

Vērtēšanas kritēriji izstrādāti, balstoties uz dotajiem uzdevumu atrisinājumiem. Par katru uzdevumu var iegūt 0 – 10 punktus.

Ņemiet vērā, ka piedāvātie risinājumi nav vienīgie pareizie. Ja skolēna risinājums atšķiras no piedāvātajiem atrisinājumiem, tas ir objektīvi jāizvērtē atbilstoši matemātikas un loģikas likumiem (skat. vispārīgos vērtēšanas kritērijus).

Vispārīgie vērtēšanas kritēriji

Olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi vai skolēna risinājums atšķiras no piedāvātā risinājuma

Kritēriji	Punkti
Uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.	– (svītriņa)
Tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.	0
Dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.	1 – 2
Veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.	3 – 4
Puse risinājuma.	5
Pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.	6
Principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.	7
Uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas u.tml.	8 – 9
Absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.	10

Vērtēšanas kritēriji

Kritēriji		Punkti
5. klase		
5.1.	Uzraksta atbildi, ka kvadrātiņā ir ierakstīts skaitlis 2 vai 3	2
	Paplašina visas daļas, lai to saucēji būtu 80	3
	Secina, ka vidējās daļas skaitītājs ir lielāks nekā 25 un mazāks nekā 60	2
	Secina, ka vidējās daļas skaitītājs dalās ar 16	1
	Secina, ka vidējās daļas skaitītājs ir 32 vai 48	2

5.2.	**Par katru gadījumu 5 punkti** (kopā $5+5=10$ punkti)	
	Uzrakstīta tikai atbilde	1
	Uzrakstīta atbilde un pamatots, ka dalās ar prasīto skaitli	2
	Pamatots, ka atrastais skaitlis ir mazākais	3
5.3.	Uzrakstīta tikai atbilde	3
5.4.	Uzrakstītas tikai a, b, c, d vērtības bez pārbaudes, ka vienādības ir patiesas	8
	Uzrakstītas a, b, c, d vērtības un pārbaudīts, ka vienādības ir patiesas	10
5.5.	Parādīts piemērs, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem	10
	Iezīmēts 7×7 kvadrāts kādā stūrī	2
	Iezīmēts 6×6 kvadrāts blakus kvadrātam 7×7	2
	Iezīmēts 5×5 kvadrāts blakus kvadrātam 6×6	2
	Parādīts piemērs, kurā visi nav kvadrāti	ne vairāk kā 2
6. klase		
6.1.	Uzrakstīts, cik eiro ir katram brālim	3
	Pamatots, ka tā ir vienīgā iespējamā atbilde (uzrakstīts risinājums)	7
6.2.	**Par katru gadījumu 5 punkti** (kopā $5+5=10$ punkti)	
	Uzrakstīta tikai atbilde	1
	Uzrakstīta atbilde un pamatots, ka dalās ar prasīto skaitli	2
	Pamatots, ka atrastais skaitlis ir mazākais	3
6.3.	Uzzīmēts astoņstūris, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem	10
	Par astoņstūri, kas neatbilst visām uzdevuma prasībām	ne vairāk kā 2
6.4.	Apskatīti atsevišķi piemēri	ne vairāk kā 3
	Izmanto vairāk nekā 28 svēršanas	ne vairāk kā 2
	Sadala monētas pāros, salīdzina tās un veido divas kaudzītes	5
6.5.	Uzrakstīts reizināšanas piemērs, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem	10
	Pareizi ierakstīti daži cipari	ne vairāk kā 6
7. klase		
7.1.	a) gadījums (kopā 5 punkti)	
	Uzrakstīti tikai atsevišķi piemēri	1
	Uzrakstīts, ka $d > c > a > b$	2
	Secina, ka Dainai ir par vismaz 3 centiem vairāk naudas nekā Bruno	2
	Uzraksta, ka Daina noteikti var nopirkt vismaz par vienu konfekti vairāk nekā Bruno	1
	b) gadījums (kopā 5 punkti)	
	Uzraksta, ka prasītais ne vienmēr ir iespējams	1
	Uzrakstīts pretpiemērs	4
7.2.	Uzrakstīti tikai atsevišķi piemēri	1
	Uzraksta, ka dotajam skaitlim vienlaicīgi jādalās ar 9 un 11	1
	Pamato, ka iegūtais skaitlis dalās ar 9	4
	Pamato, ka iegūtais skaitlis dalās ar 11	4
	Secina, ka iegūtais skaitlis dalās ar 99	1
7.3.	Uzzīmēts simetrisks daudzstūris un novilkta simetrijas ass	10
	Uzzīmēts simetrisks daudzstūris, bet nav novilkta simetrijas ass	9
	Uzzīmēta simetriska figūra ar "caurumiem"	3
7.4.	Apskatīti atsevišķi piemēri	ne vairāk kā 3
	Izmanto vairāk nekā 2 svēršanas	ne vairāk kā 2
	Pirmajā svēršanā katrā svaru kausā novieto 6 monētas	4
7.5.	Tikai par a) daļu bez pārbaudes	4
	Tikai par a) daļu ar pārbaudi	5
	Par b) daļu bez pārbaudes	9
	Par b) daļu ar pārbaudi	10
8. klase		
8.1.	Apskatīti atsevišķi piemēri	2
	Uzrakstīta atbilde	1
	Uzraksta, ka zemsaknes izteiksmei jābūt nenegatīvai	2
	Pamatots, ka izteiksmes vērtība vienmēr ir 0	7

8.2.	Uzraksta, ka skaitlis *DUBĻUNNN* dalās ar 8	2
	Uzraksta, ka skaitlis $\overline{NNN}$ dalās ar 8	1
	Secina, ka $N = 8$	2
	Uzraksta, ka skaitlim *BURBUĻVANNA* būtu jādalās ar 8	2
	Secina, ka skaitlim $\overline{NNA}$ jādalās ar 8	1
	Pamato, ka *BURBUĻVANNA* nedalās ar 8	2
8.3.	Par zīmējumu, kurā attēloti tikai dotie	0
	Pamato, ka $AP = QC$	3
	Vienādsānu trijstūrī PQD novelk augstumu QH	1
	Secina, ka $PH = HD$	1
	Pamato, ka $QC = HD$	1
	Secina, ka $AP = PH = HD$	2
	Secina, ka $DP = PH + HD = 2AP$	2
8.4.	Uzrakstīta atbilde	1
	Parādīts piemērs, kurā novilktas 12 rūtiņu diagonāles	4
	Pamatots, ka vairāk diagonāles novilkt nevar	5
8.5.	Uzraksta atbildi	1
	Pamato, ka diviem dažādiem skaitļiem, pievienojot PVN, iegūst divas dažādas cenas	3
	Pamato, ka visi skaitļi, kuri nepārsniedz 826, pēc PVN pievienošanas attēlosies par cenām intervālā no 1 līdz 1000	3
	Secina, ka, pievienojot PVN skaitļiem starp 1 un 826, iegūst 826 dažādas cenas	2
	Aprēķina neiespējamo cenu skaitu	1
9. klase		
9.1.	Uzrakstīts vienādojums, no kura var iegūt krustpunktu abscisas	2
	Atrastas vienādojuma saknes	4
	Atrastas krustpunktu ordinātas	2
	Uzrakstītas abu krustpunktu koordinātas	2
	Pamatots, ka doto funkciju grafiki krustojas tieši divos punktos	8
	Uzrakstītas abu krustpunktu koordinātas	2
9.2.	**a) gadījums** (kopā 6 punkti)	
	Uzrakstīti tikai atsevišķi piemēri	1
	Uzrakstīts, ka naturāls skaitlis, dalot ar 4, var dot atlikumu 0; 1; 2 vai 3 (jeb pēc moduļa 4 var būt kongruents ar 0; 1; 2 vai 3)	1
	b) gadījums (kopā 4 punkti)	
	Atrasti četri skaitļi un pamatots (pārbaudīts), ka visas to summas nedalās ar 4	4
	Atrasti četri skaitļi, bet nav pamatots (pārbaudīts), ka visas to summas nedalās ar 4	3
9.3.	Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
	Uzrakstīts vai atzīmēts, ka $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BAD$	2
	Novilkts $DE \perp AB$	1
	Pamatots, ka $\Delta BED = \Delta BCD$	4
	Secināts, ka $\sphericalangle BCA = 90°$	1
	Aprēķināts $\sphericalangle ABC$	2
9.4.	Uzrakstīta atbilde	1
	Secināts, ka katrs spēlētājs spēlē vismaz vienā no divām pēc kārtas sekojošām partijām	3
	Pamatots, ka bija tieši 21 partija	4
	Secināts, ka Uzrocis spēlēja 11 partijās	2
9.5.	Uzrakstīts, ka prasītais ir iespējams	1
	Apskatīti daži piemēri	1
	Uzrakstīts, ka prasītais ir iespējams	1
	Apskatīti pirmo astoņu naturālo skaitļu kvadrāti un saliktas zīmes tā, lai to summa būtu 0	3
	Veido grupas, kurās skaitļu skaits dalās ar 8	1
	Uzrakstīts, ka prasītais ir iespējams	1
	Aprakstīts, kā vispārīgā gadījumā jāsaliek zīmes	9

VALSTS OLIMPIĀDE

Tabulā norādīta informācija par to, cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; "n" nozīmē, ka uzdevums nav risināts. Ailē "vidēji" norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu.

9. klase (81 dalībnieks)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	15%	12%	0%	12%	5%
0	7%	2%	0%	54%	72%
1	48%	23%	6%	19%	2%
2	10%	32%	7%	0%	4%
3	4%	1%	7%	5%	4%
4	0%	1%	5%	2%	1%
5	1%	1%	1%	1%	2%
6	1%	4%	23%	2%	1%
7	6%	1%	14%	0%	0%
8	1%	0%	27%	0%	1%
9	5%	0%	7%	0%	0%
10	1%	21%	1%	4%	7%
Vidēji	2,38	3,92	6,01	1,15	1,36

ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

5. klase (725 dalībnieki)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	2%	1%	0%	1%	3%
0	10%	9%	2%	13%	37%
1	8%	20%	2%	12%	46%
2	4%	7%	1%	6%	13%
3	5%	7%	0%	1%	0%
4	5%	6%	93%	10%	0%
5	5%	5%	1%	0%	0%
6	7%	6%	0%	4%	0%
7	6%	6%	0%	0%	0%
8	7%	15%	0%	1%	0%
9	10%	4%	0%	1%	0%
10	31%	13%	1%	51%	0%
Vidēji	6,29	4,70	3,90	6,26	0,79

6. klase (685 dalībnieki)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	1%	5%	9%	3%	4%
0	0%	14%	4%	29%	6%
1	2%	22%	17%	13%	3%
2	3%	8%	18%	3%	8%
3	4%	1%	4%	5%	0%
4	9%	2%	5%	0%	0%
5	7%	4%	6%	2%	0%
6	5%	1%	14%	1%	0%
7	10%	8%	10%	18%	0%
8	14%	3%	5%	2%	0%
9	20%	10%	7%	6%	0%
10	25%	22%	0%	18%	78%
Vidēji	7,42	4,88	4,10	4,38	8,30

7. klase (569 dalībnieki)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	9%	4%	7%	3%	0%
0	24%	11%	65%	52%	7%
1	6%	4%	16%	4%	18%
2	14%	4%	4%	6%	8%
3	6%	19%	2%	2%	8%
4	13%	18%	1%	1%	7%
5	3%	7%	1%	1%	10%
6	2%	6%	1%	9%	5%
7	2%	10%	1%	11%	11%
8	3%	3%	1%	5%	9%
9	3%	5%	1%	1%	7%
10	15%	9%	1%	3%	9%
Vidēji	3,77	4,62	0,77	2,56	4,78

8. klase (413 dalībnieki)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	12%	13%	13%	5%	8%
0	43%	26%	43%	6%	33%
1	21%	39%	25%	24%	28%
2	4%	1%	10%	8%	15%
3	3%	1%	5%	11%	3%
4	0%	0%	0%	8%	1%
5	1%	1%	1%	8%	1%
6	0%	0%	0%	6%	1%
7	1%	2%	1%	4%	1%
8	0%	0%	0%	3%	1%
9	0%	0%	0%	5%	1%
10	14%	15%	1%	13%	4%
Vidēji	2,19	2,54	1,01	4,24	1,71

9. klase (395 dalībnieki)

Punkti	1. uzd.	2. uzd.	3. uzd.	4. uzd.	5. uzd.
n	2%	13%	5%	33%	10%
0	19%	52%	3%	57%	16%
1	20%	1%	5%	2%	20%
2	3%	2%	3%	0%	10%
3	4%	1%	18%	0%	13%
4	2%	2%	6%	1%	9%
5	13%	2%	5%	0%	3%
6	1%	1%	22%	1%	1%
7	1%	2%	3%	1%	3%
8	5%	2%	13%	4%	4%
9	3%	4%	1%	1%	1%
10	28%	17%	16%	0%	10%
Vidēji	**4,76**	**3,17**	**5,69**	**0,84**	**3,23**

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika. Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Algebriski pārveidojumi	N.9.5., V.9.1., A.8.1.
Darbības ar mērvienībām	T.3.1., T.4.7., J.1.2.
Vienādojumi	T.2.5., P.1.4., S.7.1., S.8.2., S.9.1., N.9.1.
Nevienādības	T.3.4., J.2.2., P.5.4., N.7.1., N.8.1., A.9.1.
Vienādojumu sistēmas	P.3.4.
Skaitļu virknes	V.9.5., A.9.4.
Rekurences sakarības	T.1.5., J.3.3.
Funkcijas un diagrammas	T.4.4., N.9.1., A.7.1.
Attiecības, daļas, daļskaitļi	T.1.6., T.4.3., J.5.2., N.5.1., A.6.1., A.6.3.
Teksta uzdevumi par kustību	T.3.7., P.1.2., P.4.1.
Dažādi teksta uzdevumi	T.1.3., T.1.10., T.2.4., T.4.6., J.1.2., P.3.1., P.5.1., N.6.1., N.7.1., N.8.5., A.6.3.

SKAITĻU TEORIJA

Aritmētika	T.1.1., T.1.2., T.1.4., T.2.1., T.2.5., T.2.6., T.4.1., T.4.2., T.4.5., J.3.1., S.5.1., A.5.3., A.6.1., A.8.1.
Naturālu skaitļu dalāmība, dalāmības pazīmes, atlikumi	T.2.2., T.3.6., J.2.4., J.4.4., P.2.4., P.4.3., S.5.3., S.5.5., S.6.1., S.9.3., N.5.2., N.6.2., N.7.2., N.8.2., N.9.2., V.9.4., A.8.3.
Pirmskaitļi, skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā	J.3.2., V.9.4., A.8.3.
Skaitļa pieraksts	S.7.3., N.6.5., N.8.2., A.5.1.
Skaitļi un kombinatorika	S.8.1., S.8.5.
Vienādojumi veselos skaitļos	T.3.3., T.4.10., J.1.4., J.4.3., J.5.3., P.2.4., N.7.5., A.5.2., A.6.2., A.7.2., A.7.4., A.8.2., A.9.2.
Skaitļu rēbusi, skaitļu mīklas	T.2.6., T.4.5., J.1.1., J.2.1., J.5.1., P.3.2., N.5.4., N.6.5., V.9.3., A.6.1.
Skaitļa ciparu summa	P.2.4., S.7.3.

ĢEOMETRIJA

Figūru sagriešana un salikšana	T.2.3., J.1.5., J.2.5., J.3.5., J.5.5., P.2.2., P.5.3., S.6.5., S.7.4., S.9.2., N.5.3., N.5.5., N.6.3., N.7.3., A.5.4., A.6.5.
Invariantu metode, krāsošana	P.3.3., N.8.4., A.7.5.
Daudzstūri	T.1.8., T.2.7., T.3.5., T.4.9., J.1.3., P.4.2., S.5.2., S.9.4., N.8.3.
Leņķi	S.7.2.
Sakarības trijstūros	N.8.3., N.9.3., V.9.2., A.7.3., A.8.4., A.9.3.
Ģeometriskie objekti telpā	J.1.5., N.5.3.
Objektu novietojums plaknē	J.5.4.
Objekti rūtiņu plaknē	T.1.6., S.8.4., N.6.3.
Kombinatoriskā ģeometrija	J.3.4., J.5.5., S.6.3., S.8.4., N.8.4.

KOMBINATORIKA

Objektu skaitīšana	T.3.2., T.4.8., S.6.3., S.6.4., S.8.3., A.5.5.
Invariantu metode, krāsošana	J.2.3., P.3.3., S.5.4., A.7.5.
Loģiska satura uzdevumi	J.4.1., J.4.5., P.4.4., P.5.2., P.5.5.
Dirihlē princips	J.4.5., P.2.5., S.8.4., A.6.4.
Gadījumu pārlase	J.1.4., J.2.2., J.4.2., S.6.2.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde	J.5.5., P.1.5., P.2.3., P.3.5., P.4.5., S.7.5., N.9.5., A.9.5
Algoritma analīze	J.2.3., P.1.1., A.8.5.
Turnīri, svēršanas	P.2.1., S.9.5., N.6.4., N.7.4., N.9.4.
Loģiska rakstura uzdevumi	T.1.7., T.2.7., T.4.11., P.1.3.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. Siliņš A. M. Dukurs: *"Mani redzēja kā ieroci pret krievu sportistiem"* – atsauce [07.11.2016.] Pieejams: http://sportacentrs.com/ziemas_sports/skeletons/16022013-m_dukurs_mani_redzeja_ka_ieroci_pret_krie?is_mobile=1
2. *Panākumu piramīda* – atsauce [07.11.2016.] Pieejams: http://www.sporto.lv/raksts/panakumu_piramida
3. A.M. Storozhev, J.B. Henry, and A. Di Pasquale. *Mathematics Contests 2001: The Australian Scene*. Australian Mathematics Trust, 2001.
4. A M Storozhev; J B Henry; D C Hunt. *Mathematics contests 2000 : the Australian scene.* Publisher: Canberra : Australian Mathematics Trust, 2001.
5. *Belarusian Mathematical Olympiad 2013. Final round.*
6. *Boot Camp Puzzles Brain Blitz.* SevenOaks, 2012.
7. *The UK Mathematics Trust Yearbook 1998-1999*. UKMT, 1999.
8. *The UK Mathematics Trust Yearbook 2000-2001.* UKMT, 2001.
9. *The UK Mathematics Trust Yearbook 2002-2003*. UKMT, 2003.
10. *The UK Mathematics Trust Yearbook 2008-2009*. UKMT, 2009.
11. *The UK Mathematics Trust Yearbook 2010-2011*. UKMT, 2011.
12. Ukrainian Mathematical Competition 2010-2011
13. http://users.math.msu.edu/users/mshapiro/newolympiad/olymp2012/05-06_2012.pdf
14. http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/WhiteAndBlackBallsReplaced.shtml#solution
15. http://www.dr-mikes-math-games-for-kids.com/number-mazes.html
16. http://teachmama.com/wp-content/uploads/2015/07/birdwatching-puzzles-teachmama.com_.pdf

SĒRIJAS "LAIMA" GRĀMATAS

Projekts LAIMA ir **La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts, kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir Benedikts Johannessons.

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.
48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.
51. Z. Kaibe, D. Kūma, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.
52. M. Avotiņa, A. Ķerubiņa. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.
53. A. Locāns, I. Ošiņa. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.
54. M. Avotiņa, M. Kokainis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.** Rīga: LU, 2015.
55. M. Avotiņa, A. Šuste. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.** Rīga: LU, 2015.
56. M. Avotiņa, M. Kokainis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2015./2016. mācību gadā.** Rīga: LU, 2016.
57. M. Avotiņa, A. Šuste. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2015./2016. mācību gadā.** Rīga: LU, 2016.