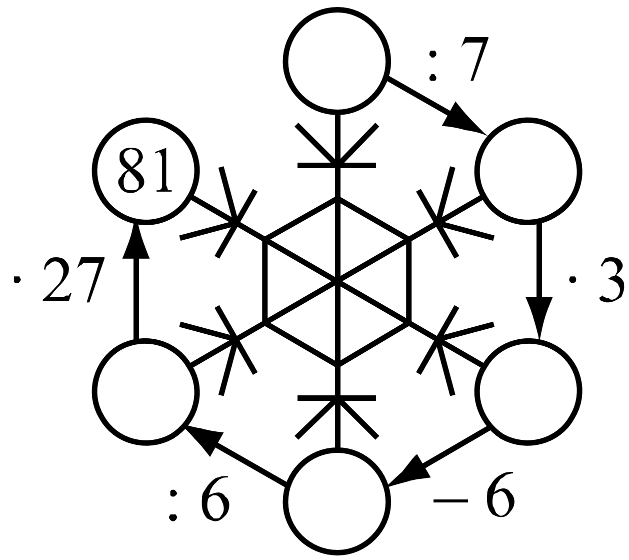
Maruta Avotiņa, Agnese Šuste

Matemātikas sacensības
4. – 9. klasēm
2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā



RĪGA 2015

M. Avotiņa, A. Šuste
Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā
Rīga: Latvijas Universitāte, 2015. – 275. lpp.

Grāmatā apkopoti Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā organizēto matemātikas sacensību uzdevumi, ieteikumi, kas var palīdzēt patstāvīgi atrisināt uzdevumu, un izvērsti uzdevumu atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija un īss teorijas izklāsts, kas var noderēt uzdevumu risināšanā. Iekļauts arī pārskats par konkursiem un olimpiādēm – skolēnu rezultātu apkopojums, biežāk pieļautās kļūdas, ieteikumi u.tml.

Izsakām pateicību 2013./2014. un 2014./2015. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Andrejam Cibulim, Dacei Kūmai, Agnesei Ķerubiņai, Andrim Locānam, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Ilzei Ošiņai, Raitim Ozolam, Mārim Valdatam, Ingrīdai Veilandei, Jevgēnijam Vihrovam.

Profesora Cipariņa kluba ilustrāciju autore: Agnese Ķerubiņa.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9934-517-96-9

Saturs

Ievads

Matemātikas sacensības – olimpiādes un konkursi – paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas sacensību uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Līdzīgi kā sportisti trenējas, lai gūtu panākumus sporta sacensībās, tā arī skolēniem (matemātiķiem) ir jāiegulda ne mazāk apjomīgs darbs, lai sagatavotos un veiksmīgi startētu matemātikas sacensībās. Tam ir nepieciešams ne tikai sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot pamata zināšanas un izkopjot prasmes uzdevumu risināšanā, bet arī darbs ārpus matemātikas stundām, piemēram, matemātikas pulciņos, nodarbībās, olimpiādēs, konkursos, kā arī patstāvīgi trenējoties matemātikas sacensību uzdevumu risināšanā.

Darīšu visu, centīšos, strādāšu un cīnīšos.

Martins Dukurs, skeletonists [1]

Vai Tu, skolēn, esi gatavs darīt visu iespējamo, censties un strādāt, lai gūtu panākumus matemātikas sacensībās? Turklāt ievēro, ka gūt panākumus ne obligāti nozīmē būt laureātam.

Panākumi ir dvēseles miers, kas ir tiešs rezultāts pārliecībai,
ka tu zini, ka esi darījis visu, ko spējis, lai kļūtu tik labs, cik labs esi spējīgs kļūt.

Džons Vudens, basketbola treneris [2]

Atkarībā no klases, kurā skolēns mācās, var izvēlēties kādu no tālāk minētajām Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas (LU A. Liepas NMS; http://nms.lu.lv/) organizētajām matemātikas sacensībām, kurās piedalīties (skat. tabulā). Piekto klašu konkurencē minētajās sacensībās drīkst piedalīties arī jaunāku klašu skolēni.

<table>
<tr><th>4. kl.</th><th>5. kl.</th><th>6. kl.</th><th>7. kl.</th><th>8. kl.</th><th>9. kl.</th><th>10. kl.</th><th>11. kl.</th><th>12. kl.</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Sagatavošanās olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Novada olimpiāde</td><td colspan="4">Novada olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">Valsts olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Atklātā matemātikas olimpiāde</td></tr>
<tr><td>TVC</td><td colspan="3">JMK</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">PCK</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

- *Sagatavošanās olimpiāde* ir lielisks veids, kā iesākt jauno olimpiāžu gadu. Katras skolas matemātikas skolotāji paši var izlemt, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada olimpiāde* tiek rīkota sadarbībā ar Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministriju (LR IZM). Novada olimpiāde notiek novada/ novadu apvienības/ pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes 9.-12. klašu laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts olimpiāde* arī tiek rīkota sadarbībā ar LR IZM. Šī olimpiāde parasti notiek Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā martā, ceturtdienā un piektdienā tieši pirms skolēnu pavasara brīvdienām. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.
- *Atklātā matemātikas olimpiādē* drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Ik gadu šajā olimpiādē piedalās ap 3000 skolēnu, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.

- *“Tik vai… Cik?”* (TVC) ir matemātikas konkurss-olimpiāde, kas notiek četrās kārtās. Pirmās trīs kārtas tiek organizētas tikai Latvijas skolēniem, bet 4. kārta tiek rīkota vienlaicīgi ar Lietuvas valsts olimpiādi, un abu valstu skolēni risina vienus un tos pašus uzdevumus. Atšķirībā no visiem pārējiem LU A. Liepas NMS organizētajiem konkursiem un olimpiādēm, šajā konkursā uzdevumi ir arī testa veidā.
- *Jauno matemātiķu konkurss* (JMK) ir neklātienes konkurss matemātikā piecās kārtās. Katrā kārtā ir pieci uzdevumi, kurus skolēni var risināt aptuveni mēnesi. Risinājumus var iesūtīt pa pastu vai elektroniski. Drīkst piedalīties arī tikai atsevišķās kārtās. Salīdzinot ar Profesora Cipariņa klubu, JMK ir paredzēts mazāk pieredzējušiem olimpiāžu uzdevumu risinātājiem.
- *Profesora Cipariņa klubs* (PCK) ir senākais un tradīcijām bagātākais neklātienes matemātikas konkurss Latvijā. Kopš 2014./2015. mācību gada tas tiek organizēts piecās kārtās. Drīkst piedalīties arī tikai atsevišķās kārtās.

Internetā atrodams plašs mācību materiālu un uzdevumu klāsts, kas noderīgi, gatavojoties matemātikas olimpiādēm un konkursiem (skat., piemēram, LU A. Liepas NMS mājaslapā http://nms.lu.lv/).

Konkursa “Tik vai… Cik?” uzdevumu komplektus 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā veidoja Agnese Šuste un Maruta Avotiņa.

Jauno matemātiķu konkursa uzdevumu komplektus 2013./2014. mācību gadā veidoja Dace Kūma, Agnese Šuste un Maruta Avotiņa, bet 2014./2015. mācību gadā – Agnese Šuste un Maruta Avotiņa.

Par Profesora Cipariņa kluba uzdevumu komplektu izveidi 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā rūpējās Agnese Ķerubiņa, Andris Locāns un Ilze Ošiņa. Agnese Kerubiņa ir arī šī konkursa ilustrāciju autore.

Par olimpiāžu uzdevumu komplektiem rūpējas ne tikai LU A. Liepas NMS kolektīvs, bet arī vairāki NMS draugi un palīgi. Izsakām pateicību 2013./2014. un 2014./2015. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Andrejam Cibulim, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Mārim Valdatam, Ingrīdai Veilandei un Jevgēnijam Vihrovam.

Šī grāmata, kurā apkopoti Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā organizēto matemātikas sacensību uzdevumi, paredzēta gan skolēniem patstāvīgai uzdevumu risināšanai, gan skolotājiem ārpusstundu darbā ar spējīgākajiem skolēniem vai matemātikas stundās uzdevumu dažādībai.

Pirms uzdevumu risināšanas ieteicams izlasīt nodaļu ***Teorija***, kas var būt noderīga uzdevumu risināšanā. Skolēni šo sadaļu var izmantot gan meklējot palīdzību uzdevumu risināšanā, gan gatavojoties matemātikas olimpiādēm, gan patstāvīgi apgūstot jaunas zināšanas. Skolotāji šo sadaļu var izmantot darbam matemātikas pulciņos. Šajā nodaļā iekļauti arī teorijas materiāli, kas 2015. gadā tika publicēti LU A. Liepas NMS mājas lapā pirms Novada olimpiādes un Atklātās matemātikas olimpiādes.

Nodaļā ***Ieteikumi*** doti padomi, kas skolēnam var palīdzēt atrisināt uzdevumu, ja to neizdodas atrisināt patstāvīgi, taču, lai sasniegtu labākus rezultātus, iesakām uzreiz neskatīties ieteikumus vai atrisinājumus, bet mēģināt tikt galā pašu spēkiem. Skolotāji šos ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto uzdevuma atrisinājumu.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Nodaļā ***Atrisinājumi*** doti izvērsti un pilnīgi uzdevumu atrisinājumi, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu un pilnīgu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Daudziem matemātikas uzdevumiem ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi atrisinājumi, tāpēc šajā grāmatā piedāvātos nevajag uztvert kā vienīgos iespējamos, tieši otrādi – aicinām meklēt risinājumus, kas būtu labāki nekā piedāvātie! Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem! Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Iesakām apgūt vēl nezināmos paņēmienus, lai varētu tos izmantot turpmāk!

Grāmatas beigās dots ***uzdevumu sadalījums pa tēmām***, kas var būt labs palīgs skolotājiem, plānojot pulciņu nodarbības vai meklējot uzdevumus, ko iekļaut matemātikas stundās.

Iekļauta arī nodaļa ***Pārskats***, kurā, atkarībā no attiecīgā konkursa vai olimpiādes, dots skolēnu rezultātu apkopojums vai iekļauti komentāri, ieteikumi, aprakstītas skolēnu biežāk pieļautās kļūdas.

Lai šī grāmata ir labs palīgs, darot visu iespējamo, lai gūtu panākumus!

Agnese Šuste, Maruta Avotiņa

Teorija

Īsa pamācība uzdevumu risināšanā

Bieži vien jaunāko klašu skolēni (bet ne tikai!) risinājumā uzraksta tikai uzdevuma atbildi, bet ar to nepietiek, lai labotājs spētu noteikt, vai skolēns ir sapratis uzdevumu un atrisinājis to pareizi. Labākajā gadījumā tikai par atbildes uzrakstīšanu skolēns saņem vienu vai pāris punktus, piemēram, no 10 iespējamajiem.

Iegaumē! Visiem uzdevumiem jāraksta ne tikai atbilde, bet arī risinājums – spriedumi, kā nonākt līdz atbildei.

Uzdevumu veidi

Atkarībā no uzdevumā uzdotā jautājuma, uzdevumus var iedalīt šādās grupās:

a) uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības;
b) uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā iespējamā vērtība;
c) uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato savs viedoklis;
d) uzdevumi, kuros jāparāda algoritms (plāns), kā nonākt pie vajadzīgā rezultāta.

Tālāk aprakstīts vairāk par katru no šiem uzdevumu veidiem.

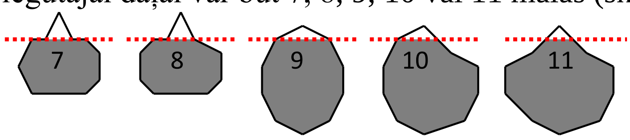
a) Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

Šāda veida uzdevumos jautājums parasti sākas, piemēram, ar vārdiem

Kāds var būt...?; Cik...?; Atrisini...!
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
a. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
b. jāpamato, ka citu vērtību nav.

Šajos uzdevumos <u>nepietiek</u> atrast vienu iespējamo atbildi, kaut arī reizēm tā tik tiešām ir viena pati un bieži vien viegli uzminama.

P No papīra bija izgriezts desmitstūris. Alise ar vienu taisnu griezienu sagrieza to tieši divās daļās, no kurām viena daļa bija trijstūris. Cik malas var būt otrai iegūtajai daļai?
Atrisinājums. Otrai iegūtajai daļai var būt 7, 8, 9, 10 vai 11 malas (skat. 1. att.).



1. att.

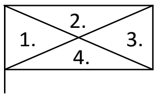
Pamatosim, ka nevar iegūt vairāk kā 11 malas. Trijstūris noteikti satur vismaz vienu desmitstūra virsotni, bet taisne, krustojot desmitstūra malas, var radīt ne vairāk kā divas jaunas virsotnes, tāpēc otrai daļai nevar būt vairāk kā $10-1+2=11$ virsotnes un malas.

Pamatosim, ka nevar iegūt mazāk kā 7 malas. Katra desmitstūra virsotne ir virsotne vismaz vienai no iegūtajām daļām, tāpēc $n+m\geq 10$, kur n un m atbilstoši ir virsotņu skaits vienai un otrai iegūtajai daļai. Tā kā viena no iegūtajām daļām ir trijstūris, tad $3+m\geq 10$ jeb $m\geq 7$.
■

Ne vienmēr risinājumā ir jāparāda visi piemēri vai arī atsevišķi jāpierāda, ka citu vērtību nav (skat. nākamo piemēru.). Ir uzdevumi, kuros tas nav nepieciešams vai pat nemaz nav iespējams, taču tādā gadījumā uzdevuma risinājumam jābūt tādam, lai ir nepārprotami skaidrs, ka aprakstītajā veidā tiek atrastas pilnīgi visas iespējas.

P

Cik dažādus karogus (skat. 2. att.) var iegūt, ja katru no četriem trijstūriem jānokrāso vienā no četrām krāsām – baltā, sarkanā, zilā vai zaļā –, pie tam trijstūri, kam ir kopīga mala, jānokrāso dažādās krāsās?



2. att.

Atrisinājums. Skaidrs, ka 1. trijstūri var nokrāsot jebkurā no 4 krāsām. Kad 1. trijstūris nokrāsots, 2. trijstūri var krāsot jebkurā no atlikušajām trīs krāsām, tātad 1. un 2. trijstūri kopā var nokrāsot $4 \cdot 3 = 12$ dažādos veidos. Krāsojot 3. un 4. trijstūri, jāšķiro divi gadījumi.

1) Ja 3. trijstūris ir tādā pašā krāsā kā 1. trijstūris, tad atlikušo 4. trijstūri var krāsot jebkurā no krāsām, kas atšķiras no 1. trijstūra krāsas, tātad ir 3 iespējas. Līdz ar to var iegūt $12 \cdot 3 = 36$ dažādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir vienā krāsā.
2) Ja 3. trijstūris ir citā krāsā nekā 1. Trijstūris, tad 3. trijstūri var nokrāsot vienā no divām krāsām (kuras vēl nav izmantotas 1. un 2. trijstūra krāsošanai). Pēc tam 4. trijstūri arī varēs izkrāsot vienā no 2 krāsām (tādā, kas vēl nav izmantota 1. un 3. trijstūra krāsošanai). Līdz ar to var iegūt $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ tādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir dažādās krāsās.

Tātad pavisam kopā, izmantojot dotās četras krāsas, var iegūt $36 + 48 = 84$ dažādus karogus.

Piezīme. Šo uzdevumu var risināt arī uzzīmējot visus iespējamos variantus un pēc tam saskaitot, cik tādu variantu ir, tomēr tam jāpatērē daudz laika un ļoti jāuzmanās, lai kāda no iespējām nepaliktu nepamanīta, turklāt vēl būtu jāizdomā, kā pamatot, ka tiešām ir uzzīmēti visi varianti. ■

b) Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā iespējamā vērtība

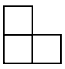
Uzdevumā dotais jautājums varētu saturēt, piemēram, vārdus

Kāds lielākais (mazākais)...?; Atrast vislielāko (vismazāko)...!
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

a. jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
b. jāpierāda, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

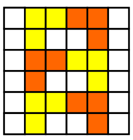
P

Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Kādu mazāko daudzumu *stūrīšu* (skat. 3. att.) tajā jāiekrāso, lai nevienu citu *stūrīti* šajā kvadrātā iekrāsot nevarētu? (Stūrīšus drīkst pagriezt; ja kāda rūtiņa ir iekrāsota, tad tā ir nokrāsota pilnībā, tas ir, *stūrīšu* malas iet pa rūtiņu malām.)

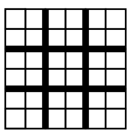


3. att.

Atrisinājums. Jāiekrāso vismaz seši *stūrīši*. Piemēru, kā to var izdarīt, skat. 4. att.



4. att.



5. att.

Pierādīsim, ka nav iespējams iekrāsot mazāku skaitu *stūrīšu*, lai izpildītos visas uzdevuma prasības. Sadalām doto kvadrātu deviņos kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas (skat. 5. att.). Katrā šādā kvadrātiņā ir jābūt iekrāsotām vismaz divām rūtiņām, pretējā gadījumā tajā varēs ievietot vēl vienu *stūrīti*. Tātad jāiekrāso vismaz $9 \cdot 2 = 18$ rūtiņas. Tā kā katrs *stūrītis* sastāv no 3 rūtiņām, tad nepieciešami vismaz $18 : 3 = 6$ *stūrīši*.

■

c) Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde

Jautājums varētu sākties, piemēram, ar vārdiem „Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”; „Vai visiem… ir spēkā… ?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”.

Uz šāda veida jautājumiem iespējamas tikai divas atbildes – vai nu „jā”, vai „nē”. Taču var ievērot, ka uzskaitītie jautājumi ir divu tipu: „katram” un „eksistē”.

Atkarībā no tā, kāda ir atbilde uz jautājumu un kura tipa jautājums tas ir, uzdevuma risinājumam ir jāsastāv no atšķirīgām daļām.

Vai eksistē…? Vai iespējams…?

Ja atbilde ir

- „jā”, tad pietiek parādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- „nē”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem (Ar dažiem piemēriem nepietiek!).

Vai katram…? Vai noteikti…? Vai vienmēr…?

Ja atbilde ir

- „jā”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem (Ar dažiem piemēriem nepietiek!);
- „nē”, tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

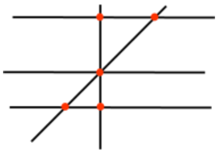
„Eksistē” tipa jautājumos, ja atbilde ir „nē”, tad ar atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros tiek parādīts, ka uzdevumā prasītais neizpildās, nepietiek, jo varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies atrast uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr pastāv. Atsevišķu piemēru apskatīšana, ja atbilde uz jautājumu ir „nē”, ir skolēnu raksturīgākā kļūda.

Savukārt „katram” tipa jautājumos, ja atbilde ir „jā”, tad nepietiek ar atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros prasītais izpildās. Pierādījums jāveido tā, lai tas aptvertu pilnīgi visus iespējamos gadījumus.

P

Vai ir iespējams uzzīmēt piecas taisnes, kurām ir tieši **a)** 5 krustpunkti; **b)** 11 krustpunkti?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, skat. 6. att.



6. att.

b) Nē, nav iespējams. Katra no piecām taisnēm var krustoties augstākais ar četrām pārējām taisnēm, tas ir, var veidoties augstākais $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ krustpunkti. Tātad kopējais krustpunktu skaits nevar pārsniegt 10.

■

P Vai visiem veseliem skaitļiem a un b reizinājums $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b$ dalās ar 2?

Atrisinājums. Jā, pamatosim, ka reizinājums $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b$ vienmēr dalās ar 2 jeb ir pāra skaitlis.

Ja kāds no reizinātājiem a vai b ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis.

Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad summa $(3a + 5b)$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitlis.

■

P Vai vienmēr ir patiess apgalvojums, ka negatīvam skaitlim, pieskaitot tā kvadrātu, iegūst pozitīvu skaitli?

Atrisinājums. Nē, piemēram, $-1 + (-1)^2 = 0$, kas nav pozitīvs skaitlis.

■

d) Uzdevumi, kuros jāparāda algoritms (plāns), kā nonākt pie vajadzīgā rezultāta

Jautājums varētu sākties ar vārdu „**Kā...?**”, arī, piemēram, ar vārdiem „**Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt…?**”.

Raksturīgākā skolēnu kļūda šādos uzdevumos ir viena gadījuma apskatīšana, proti, labvēlīgākā gadījuma izvēlēšanās, taču korektā risinājumā ir jāapraksta, kā rīkoties pilnīgi visās iespējamajās situācijās. Piemēram, uzdevumos, kuros jāapraksta kāda spēlētāja uzvarošā stratēģija, skolēni kļūdaini raksta, ka nav iespējams noteikt, kurš spēlētājs uzvarēs, jo tas atkarīgs no veiksmes.

P Dotas sešas pēc ārējā izskata vienādas monētas. Četrām no tām masas savā starpā vienādas un pārējām divām – arī savā starpā vienādas, bet mazākas nekā četrām pirmajām. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar trīs svēršanām atrast abas vieglākās monētas?

Atrisinājums. Sadalām monētas 2 grupās pa 3 monētām katrā. Pirmajā svēršanā salīdzinām abas šīs grupas. Iespējami divi gadījumi.

- Ja svari ir līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka katrā grupā atrodas pa vienai vieglajai monētai. Otrajā svēršanā salīdzinām divas monētas no pirmās grupas. Ja svari ir līdzsvarā, tad meklētā monēta ir trešā šīs grupas monēta, ja nē – tad tā, kura otrajā svēršanā ir vieglāka. Trešajā svēršanā tieši tāpat atrod vieglo monētu otrajā grupā.
- Ja svari nav līdzsvarā, tad abas meklētās monētas ir vienā – vieglākajā grupā. Otrajā svēršanā katrā svaru kausā novietojam pa vienai šīs grupas monētai. Ja svari ir līdzsvarā, tad abas uz svariem esošās monētas ir meklētās; ja svari nav līdzsvarā, tad vieglā monēta ir tā, kas otrajā svēršanā palika malā, un tā, kura otrajā svēršanā izrādījās vieglāka.

■

Piezīme

Sviras svari tiek uzskatīti par senākajiem svariem pasaulē. Svirai abos galos ir piestiprināti vienādi svaru kausi (skat. 7. att.). Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, svaru kausi ir līdzsvarā. Lai noteiktu precīzu priekšmetu masu, var izmantot atsvarus ar noteiktu masu.

Parasti olimpiāžu un konkursu uzdevumos doti sviras svari bez atsvariem, turklāt ar dotajiem svariem, ja kausi nav līdzsvarā, ir iespējams tikai noteikt, kurš priekšmets ir smagāks, bet nav iespējams noteikt, par cik smagāks.

7. att.

Saikļu nozīme

Vēl bez uzdevumā uzdotā jautājuma svarīgi ir pievērst uzmanību tekstā lietotajiem saikļiem „un”, „vai”, „vai nu…, vai”.

UN	Jāizpildās **abiem** minētajiem nosacījumiem
VAI	Jāizpildās **vismaz vienam** minētajam nosacījumam
VAI NU..., VAI	Jāizpildās **tieši vienam** minētajam nosacījumam

P Kurš ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās **a)** ar 2 un 7; **b)** ar 2 vai 7; **c)** ar 2 vai 3; **d)** vai nu ar 2, vai 7?

Atrisinājums. Neaizmirsīsim, ka tad, ja ir jautājums „Kāds ir lielākais… ?”, tad ir jāpierāda, ka atrastais skaitlis tiešām ir lielākais iespējamais.

a) Vislielākais divciparu skaitlis ir $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, taču tas nedalās ne ar 2, ne 7. Nākamais lielākais skaitlis ir $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$, kas dalās gan ar 2, gan ar 7, tātad der.

b) Meklētais skaitlis ir 98, jo izpildās vismaz viens no nosacījumiem, proti, 98 dalās ar vismaz vienu no skaitļiem 2 vai 7.

c) Šajā gadījumā meklētais skaitlis ir 99, jo tas dalās ar vismaz vienu no skaitļiem 2 vai 3.

d) Skaitlis 98 šajā gadījumā neder, jo tas dalās ar abiem dotajiem skaitļiem, taču drīkst dalīties tieši ar vienu no tiem. Tā kā 97 ir pirmskaitlis, tad arī tas nederēs par atrisinājumu. Nākamais lielākais skaitlis ir $96 = 2^5 \cdot 3$ un tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7, tātad der.

■

Uzdevumu risināšanas metodes

Matemātikas uzdevumu risināšanai ir izstrādātas dažādas metodes. Dažas no tām ir lietojamas tikai atsevišķu uzdevumu risināšanā, citas – dažādās matemātikas apakšnozarēs un pat citās zinātnēs.

Tālāk nosauktas dažas biežāk lietotās metodes.

- Vidējās vērtības metode
  - Dirihlē princips (skat. 12. lpp.)

    „Trušu” un „būru” princips
- Invariantu metode (skat. 19. lpp. un 25. lpp.)

  Meklē nemainīgo!
- Ekstremālā elementa metode (skat. 13. lpp.)

  Meklē īpašo!
- Matemātiskās indukcijas metode

  „Domino” princips
- Interpretāciju metode (skat. 14. lpp.)

  „Tulko” citā valodā
- Kārtošanas un meklēšanas metodes

Dirihlē princips

Šī uzdevumu risināšanas metode jeb domāšanas paņēmiens tiek izmantots dažādās matemātikas apakšnozarēs, piemēram, skaitļu teorijā, ģeometrijā un kombinatorikā dažādu grūtības pakāpju uzdevumu atrisināšanai.

Tālāk doti vairāki Dirihlē principa varianti.

- Ja vairāk nekā n objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 objekti.
- Ja vairāk nekā $m \cdot n$ objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $m+1$ objekts.
- Ja n objekti jāsadala n grupās tā, ka nevienā grupā nav vairāk kā viens objekts, tad katrā grupā būs tieši viens objekts.

Diezgan bieži Dirihlē principu formulē tā:

Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens trusis – tātad vismaz 2 truši.

Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs *būri* un kas – *truši*. Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt tikai vienā *būrī* un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būra*).

P Pierādīt, ka no jebkuriem 14 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība dalās ar 13.

Atrisinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 13, var dot 13 dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 vai 12. Dotos 14 skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13, tātad ir 13 „būri”. No Dirihlē principa izriet, ka, 14 „trušus” izvietojot pa 13 „būriem”, vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši”; tas ir, vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 13. Šo divu skaitļu starpība dalās ar 13 (skat. Teorēmu par starpības dalīšanos 17. lpp.).
■

Ekstremālā elementa metode

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu, ka cilvēka patiesās īpašības un raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos. Matemātiski tas nozīmē, ka, pētot īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku u. tml.), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos, proti, tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā visizdevīgāk ir lietot tad, kad jāpierāda, vai dotā īpašība ir vai nav spēkā visiem kopas elementiem, citiem vārdiem sakot, kad jāpierāda tādas kopas, kurai piemīt vai nepiemīt konkrētā īpašība, eksistence.

Ekstremālais („īpašais”) elements atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, viens vai vairāki lielākie skaitļi, vismazākais attālums, garākā diagonāle, cilvēks, kuram ir vislielākais paziņu skaits, malējā rūtiņa u. tml.

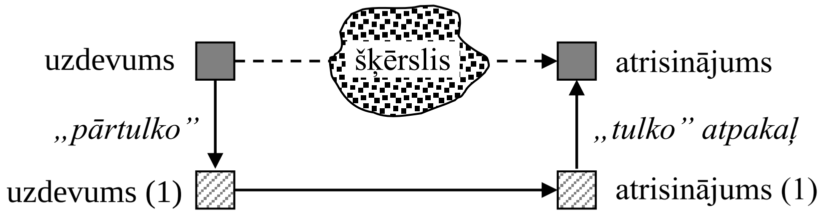
P Vai var gadīties, ka 15 dažādi skaitļi ir uzrakstīti pa apli tā, ka katrs skaitlis vienāds ar savu kaimiņu vidējo aritmētisko?

Atrisinājums. Nē, tā nevar gadīties. Ar M apzīmējam vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi M kaimiņi A un B ir lielāki nekā M, tas ir, $A > M$ un $B > M$. Tātad arī skaitļu A un B vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā M, proti, $\frac{A+B}{2} > \frac{M+M}{2} = M$. Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar atrast kaimiņus, tad nevar gadīties, ka 15 skaitļi uzrakstīti atbilstoši uzdevuma prasībām.
■

Interpretāciju metode

Šīs metodes būtība slēpjas šādā cilvēces dzīves pieredzē gūtā secinājumā: „Ja ceļā ir šķērslis, var mēģināt apiet tam apkārt nevis lauzties cauri”.

Interpretāciju metodes būtība matemātikā – ja doto uzdevumu ir grūti vai neiespējami atrisināt vienā matemātikas apakšnozarē, tad to aizstāj ar atbilstošu uzdevumu citā nozarē, kur tas atrisināms vienkāršāk, un tad atrisinājumu pārveido atpakaļ uz sākotnēji doto matemātikas apakšnozari.

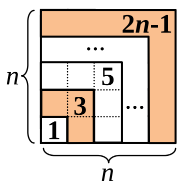


Risinot uzdevumus ar interpretāciju metodes palīdzību, rīkojas pēc šāda plāna:

1. izvēlas atbilstošu interpretāciju;
2. „pārtulko” (interpretē) visus dotos lielumus un sakarības;
3. pārliecinās, ka interpretācija ir korekta (abos virzienos viennozīmīga);
4. atrisina jauno uzdevumu;
5. rezultātu „tulko” atpakaļ.

P Pierādīt, ka $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Atrisinājums. Skaties zīmējumu!



■

Par interpretācijas modeli ir svarīgi izvēlēties tādu, kas ļauj uzdevumu atrisināt efektīvāk. Par šādiem modeļiem var kalpot, piemēram, grafi un ģeometrijas elementi. Pamatskolas skolēniem uztverami interpretāciju metodes lietojumi ir teksta uzdevumu risināšana, izmantojot grafus (skat. 16. lpp.), jo bieži vien, izmantojot uzskatāmu zīmējumu, vieglāk nekā citos veidos var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai arī atbilstošā grafa neiespējamību.

Mazliet no kombinatorikas

Saskaitīšanas un reizināšanas likums

Kombinatorikas saskaitīšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{k}$ veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{n}$ veidos, tad izvēlēties vienu elementu no pirmās **vai** otrās grupas var $\boldsymbol{k + n}$ veidos.

Saskaitīšanas likumu lieto arī tad, ja kāds elements ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.

P Ja Kristaps drīkst izvēlēties tikai vienu no 8. att. redzamajām rotaļlietām, tad viņš var izvēlēties vai nu kādu no divām mašīnām, vai kādu no 3 bumbām. Tātad Kristaps sev vienu rotaļlietu var izvēlēties $2+3=5$ dažādos veidos.

■

8. att.

Kombinatorikas reizināšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{k}$ veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties $\boldsymbol{n}$ veidos, tad vienu elementu no pirmās **un** vienu elementu no otrās grupas var izvēlēties $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$ veidos.

Reizināšanas likumu lieto arī tad un , ja kāds elements ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.

P Ja Kristīne gribētu uzrakstīt visas dažādās frāzes, kurās pirmais vārds ir kāds no dotajiem īpašības vārdiem un otrais vārds ir kāds no 9. att. dotajiem lietvārdiem, tad viņai būtu jāuzraksta $3 \cdot 2 = 6$ dažādas frāzes.
■

ROZĀ | PŪKAINS | NIKNS

ĒZELĪTIS | ZILONIS

9. att.

Ievēro! Ja ir vārds „**vai**” – parasti lieto saskaitīšanas likumu, vārds „**un**” – reizināšanas likumu.

Izlases

Ja ir dots noteikts skaits dažādu elementu, tad, izvēloties no tiem noteiktu skaitu elementu, varam izveidot dažādas šo atšķirīgo elementu izlases.

P Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties trīs dažādos veidos: ☺😐, ☺☹, 😐☹.
■

Izlases, kurās nav svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par *nesakārtotām*.

P Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties sešos dažādos veidos: ☺😐, 😐☺, ☺☹, ☹☺, 😐☹, ☹😐.
■

Izlases, kurās ir svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par *sakārtotām*.

Lai aprēķinātu *sakārtotu izlašu skaitu*, jānosaka, cik veidos var izvēlēties pirmo elementu un otro elementu, un trešo elementu utt., pēc tam iegūtie skaitļi jāsareizina (jālieto reizināšanas likums).

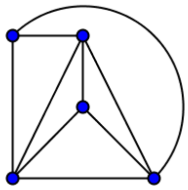
P Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties $3 \cdot 2 = 6$ dažādos veidos (jo pirmo simbolu var izvēlēties 3 dažādos veidos, bet otro no atlikušajiem diviem var izvēlēties 2 dažādos veidos).
■

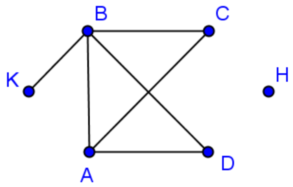
Lai aprēķinātu *nesakārtotu izlašu skaitu*, jāaprēķina, cik ir sakārtotu izlašu, un iegūtais skaitlis jādala ar to, cik veidos var sakārtot izlases elementus.

P Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹ divus var izvēlēties $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ dažādos veidos (dalām ar 2, jo tik dažādos veidos var sakārtot izlases elementus, tas ir, pirmo no tiem var izvēlēties 2 dažādos veidos, otro elementu no viena atlikušā var izvēlēties 1 veidā).
■

Grafu teorijas elementi

Par *grafu* sauc zīmējumu, kas sastāv no punktiem, no kuriem daži pa pāriem ir savienoti ar līnijām (skat., piemēram, 10. att. un 11. att.).
Grafus ir ērti izmantot, ja ir jāattēlo attiecības starp vairākiem objektiem, piemēram, cilvēkiem, kas ir savā starpā draudzējas, ir pazīstami, par ceļu vai avioreisu sistēmu starp vairākām pilsētām, tas ir, gadījumos, kad var pastāvēt vai nepastāvēt sakarības starp diviem objektiem. Zīmējot atbilstošo grafu, parasti objektus attēlo ar punktiem – tos sauc par *grafa virsotnēm*, un ja starp diviem objektiem pastāv uzdevumā minētās attiecības, tad atbilstošos punktus (virsotnes) savieno ar līniju – to sauc par *grafa šķautni*. Bieži vien, domājot par uzskatāmo zīmējumu, vieglāk nekā citā veidā var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai atbilstošā grafa neiespējamību. Grafa šķautņu krustpunkts nav grafa virsotne (skat. 11. att., kur attēlots grafs ar sešām virsotnēm).


10. att.



11. att.

Mazliet no skaitļu teorijas

Skaitļu iedalījums

- ℕ – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- ℤ – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- ℚ – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$.
- ℝ – reālie skaitļi: racionālie skaitļi un iracionālie skaitļi (bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi, piemēram, $\sqrt{2}$, e, π).

Skaitļa pieraksts

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur a, b un c ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis un $2n + 1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3, un $3n + 1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

Dalāmība

Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a *dalās* ar b (apzīmē $a \vdots b$). Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības pazīmes	**Piemēri**
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 3
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4

Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 9
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	$\underline{1}0\underline{8}6\underline{4}7$ dalās ar 11, jo $(1 + 8 + 4) - (0 + 6 + 7) = 0$, kas dalās ar 11 $\underline{9}4\underline{8}3\underline{1}$ dalās ar 11, jo $(9 + 8 + 1) - (4 + 3) = 11$, kas dalās ar 11

Citas dalāmības pazīmes

- Skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n.
- Skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n.
- Skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Par *savstarpējiem pirmskaitļiem* sauc skaitļus, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.

P Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, kas nav savstarpēji pirmskaitļi, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12. Tāpēc ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi.
■

Visi tālāk minētie skaitļi ir veseli.

- Ja divi skaitļi *a* un *b* dalās ar *c*, tad arī to summa un starpība dalās ar *c*.
$$a \vdots c \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad (a \pm b) \vdots c$$
- Ja *a* dalās ar *b*, tad arī skaitļa *a* reizinājums ar jebkuru veselu skaitli *k* dalās ar *b*.
$$a \vdots b \quad \Rightarrow \quad (a \cdot k) \vdots b$$
- Ja *a* dalās ar *b* un *b* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *c*.
$$a \vdots b \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad a \vdots c$$
- Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *d*, tad $a \cdot b$ dalās ar $c \cdot d$.
$$a \vdots c \text{ un } b \vdots d \quad \Rightarrow \quad (a \cdot b) \vdots (c \cdot d)$$
- Ja *b* un *c* ir savstarpēji pirmskaitļi un *a* dalās ar *b* un *a* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *bc*.
- *Teorēma par starpības dalīšanos*. Ja divi skaitļi *a* un *b* dod vienādus atlikumus, dalot ar *c*, tad šo skaitļu starpība $a - b$ dalās ar *c*.
- Ja vienādības labā puse dalās ar *n*, tad arī vienādības kreisā puse dalās ar *n* (un otrādi).

Naturālo skaitļu īpašības

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No *k* pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar *k*.

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par *pirmskaitli* sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.

Tā kā skaitlis 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad skaitlis 1 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma. Katru naturālu skaitli var vienā vienīgā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).

Piemēram, $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Iegūto pirmskaitļu reizinājumu sauc par skaitļa *sadalījumu pirmreizinātājos*.

Pirmskaitļi līdz 1000

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

Par *saliktu skaitli* sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.
Salikta skaitļa *n* mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Secinājums. Lai pierādītu, ka dotais skaitlis *n* ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Invariantu metode

Teorija un piemēri gatavojoties Novada olimpiādei 2014./2015. mācību gadā

Materiāla izstrādē izmantota grāmata A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997. (Vairāk skat. http://nms.lu.lv/biblioteka/tematiskie-materiali/)

Invariants – tas, kas paliek nemainīgs (kādā norisē, kādos apstākļos).

Piemēram,

- mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs jeb invariants;
- pulksteņa rādītāja spicā gala attālums līdz centram, kur tas ir piestiprināts, ir nemainīgs jeb invariants, bet spicā gala attālums līdz skaitlim 12, pulksteņa rādītājiem kustoties, nav nemainīgs.

Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem – un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Invariantu metode
Atrast piemērotu īpašību, kura
1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

1. piemērs
Sākumā bija 10 papīra gabali. Dažus no tiem sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Visus iegūtos gabalus sajauca un dažus no tiem atkal sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Vai, tādā veidā turpinot, var iegūt tieši 999 papīra gabalus?

Atrisinājums
Aplūkosim, kā izmainās kopējais gabalu skaits, atkarībā no tā, cik daļās tiek sagriezts viens gabals.

Bija 1 gabals	Ieguva 5 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 4
Bija 1 gabals	Ieguva 7 gabalus	Kopējais gabalu skaits palielinās par 6

Ievērojam, ka sākumā bija doti 10 papīra gabali – *pāra skaitlis*.
Ja papīra gabalu sagriež

- 5 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 7 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 6 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais papīra gabalu skaits *vienmēr būs pāra skaitlis*. Tā kā 999 ir *nepāra skaitlis*, tad tieši 999 papīra gabalus iegūt nevarēs. Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – kopējais papīra gabalu skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

2. piemērs
Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 10. Vienā gājienā var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

Atrisinājums
Sākumā doto skaitļu summa ir *nepāra skaitlis*: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$.

Katrā gājienā, pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, visu skaitļu summa palielinās par 2 (par *pāra skaitli*). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst *nepāra skaitli*. Tātad visu skaitļu summa pēc katra gājiena paliek *nepāra skaitlis*.

Beigās prasīts iegūt desmit vienādus skaitļus, bet desmit vienādu skaitļu summa $10 \cdot x$ ir *pāra skaitlis*.

Tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visu skaitļu summa vienmēr ir nepāra skaitlis.

3. piemērs
Pamestā mājā dzīvo 2016 spoki. Spoku ķērājs vienā reizē var noķert vai nu tieši 33, vai tieši 17 spokus, bet tad uzreiz uzrodas attiecīgi vai nu 48, vai 14 jauni spoki. Vai iespējams, ka kādā brīdī šajā mājā būs tieši viens spoks?

Atrisinājums
Aplūkosim, kā izmainās kopējais spoku skaits, atkarībā no tā, cik spoki tiek noķerti.

Noķer	Uzrodas	Kopējais spoku skaits
33	48	palielinās par 15
17	14	pamazinās par 3

Ievērojam, ka kopējais spoku skaits izmainās par skaitli, kas dalās ar 3.

Atceries!
Viens skaitlis dalās ar otru skaitli, ja šos skaitļus var izdalīt bez atlikuma.

Sākumā bija 2016 spoki – skaitlis, kas dalās ar 3, jo skaitļa 2016 ciparu summa ir $2+0+1+6=9$, kas dalās ar 3, tātad arī pats skaitlis dalās ar 3.

Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k \pm 3m = 3 \cdot (k \pm m)$.

Tātad kopējais spoku skaits pēc katra ķēriena dalās ar 3. Tā kā skaitlis 1 nedalās ar 3, tad nav iespējams, ka kādā brīdī mājā būs tieši viens spoks. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – kopējais spoku skaits vienmēr dalās ar 3.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir
- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

PARITĀTE

Apskatīsim uzdevumus, kuru atrisināšanas pamatā ir viens apsvērums – "būt pāra vai nepāra skaitlim".

1. uzdevums

Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo – melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās – melnas.
Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?

Atrisinājums

Uzdevuma risinājumā gan rindiņas, gan kolonnas sauksim par līnijām.
Pieņemsim, ka kādā gājienā tiek izmainīts rūtiņu krāsojums līnijā t. Tabulā apskatīsim, kā gājiena rezultātā mainās melno rūtiņu skaits līnijā t un arī visā kvadrātā.
Apskatīsim visus gadījumus, kā var izvietot melnās rūtiņas uz līnijas t.

Melno rūtiņu skaits līnijā t pirms gājiena	Melno rūtiņu skaits līnijā t pēc gājiena	Melno rūtiņu skaita izmaiņa (starpība)
4	0	– 4
3	1	– 2
2	2	0
1	3	+ 2
0	4	+ 4

Secinām, ka jebkura gājiena rezultātā melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par pāra skaitli. Tā kā uzdevuma sākumā ir 4 melnās rūtiņas (pāra skaitlis), tad melno rūtiņu skaits nevar kļūt vienāds ar 3 (nepāra skaitlis). Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis.

2. uzdevums

Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, ..., 2014. Vienā gājienā atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību.
Vai iespējams, ka, veicot atļautos gājienus, uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

Atrisinājums

Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu:

$$1+2+3+...+2014=\frac{(1+2014)\cdot 2014}{2}=\frac{2015\cdot 2014}{2}=2015\cdot 1007.$$

Šī summa ir nepāra skaitlis.
Ja tiek nodzēsti divi blakus esoši skaitļi a un b, $a>b$, un to vietā uzrakstīta šo skaitļu starpība $a-b$, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par

$$(a+b)-(a-b)=a+b-a+b=2b\text{, t. i., par pāra skaitli.}$$

Ja visu sākumā doto skaitļu summa ir NEPĀRA skaitlis, bet, nodzēšot divus blakus esošus skaitļus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par pāra skaitli, tad, katrreiz atņemot no nepāra skaitļa pāra skaitli, iegūsim NEPĀRA skaitli. Līdz ar to skaitli 0 nevar iegūt, jo nulle ir pāra skaitlis. Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

3. uzdevums
Uz displeja ekrāna uzrakstīta burtu virkne XXOXOO. Burtu grupu XO var aizstāt ar OOXXOO, bet burtu grupu OOX var aizstāt ar burtu X. Vai, izpildot šādas operācijas, var iegūt burtu virkni OXOXOXOXOXOXOXO?

Atrisinājums
Aplūkosim burtu X un burtu O skaita starpību. Sākumā virknē šī burtu skaita starpība ir nulle, bet beigu virknē tā ir (– 1). Izdarot pirmā veida aizvietošanu, šī starpība samazinās par 2, bet, izdarot otrā veida aizvietošanu, tā palielinās par 2 (skat. tabulu).

	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	X skaits	O skaits	X un O skaita starpība	Starpības izmaiņas
XO→OOXXOO	1	1	0	2	4	–2	**–2**
OOX→X	1	2	–1	1	0	1	**+2**

Redzam, ka ar katru pieļaujamo operāciju starpība starp burtu O skaitu un burtu X skaitu mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnējā burtu virknē šī starpība ir nulle (pāra skaitlis), tad tā nevar beigu virknē kļūt vienāda ar nepāra skaitli (–1). Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – X un O skaita starpība virknēs, ko var iegūt uz ekrāna, ir pāra skaitlis.

DALĀMĪBA UN SPECIFISKAS ATLIKUMU VĒRTĪBAS

Dažreiz par invarianto īpašību var izvēlēties, piemēram, īpašību “dalīties ar 3”, “dalot ar 3, dot atlikumu 1”, “dalot ar 3, dot atlikumu 2”, “dalīties ar 4” utt.

Dalāmības pazīmes
- skaitlis dalās ar 2 (vai 5), ja tas beidzas ar pāra ciparu (ar 0 vai 5);
- skaitlis dalās ar 3 (vai 9), ja tā ciparu summa dalās ar 3 (vai 9);
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 3 (vai 9), ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 3 (vai 9) šī skaitļa ciparu summu.

4. uzdevums
Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:
a) reizināt ar 2;
b) dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;
c) pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2015 var iegūt skaitli 20152015).
Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2015?

Atrisinājums
Izpētīsim vispirms abus skaitļus: doto un to, kuru jāiegūst. Skaitlim 24 izpildās īpašība “dalās ar 3”, bet skaitlim 2015 šī īpašība nepiemīt.
Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, arī dalīsies ar 3. Tiešām:
a) ja n dalās ar 3, tad arī $2n$ dalās ar 3,
b) ja pāra skaitlis 2n dalās ar 3, tad n dalās ar 3,
c) apgalvojums par trešo operāciju izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa dalās ar 3, tad arī jauniegūtā skaitļa $\overline{nn}$ ciparu summa dalās ar 3, jo tā ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa. Tātad arī pats jauniegūtais skaitlis $\overline{nn}$ dalās ar 3.
Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļi, kurus var iegūt no 24, dalās ar 3. Bet skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar uzdevumā dotajām operācijām skaitli 2015 nevarēs iegūt. Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS – visi iegūtie skaitļi dalās ar 3.

5. uzdevums

Uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 2, 3, 4, 5. Atļauts izvēlēties dažus no tiem un sastādīt no tiem skaitli *A*. Pēc tam skaitli *A* reizina ar 13, un ciparus, kurus iegūst reizināšanas rezultātā, uzraksta uz tāfeles izvēlēto ciparu vietā. (Piemēram, izvēloties ciparus 2, 3, 4, varam no tiem sastādīt skaitli $A = 324$ un iegūt skaitli $13 \cdot A = 13 \cdot 324 = 4212$, pie tam cipars 2 tiek iegūts divas reizes. Tagad uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 1, 2, 2, 4, 5).

Vai ar aprakstīto operāciju palīdzību var panākt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti cipari:

2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ?

Atrisinājums

Izmantosim, ka naturāls skaitlis, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 3.

Ja vienas operācijas izpildes sākumā izvēlēto ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu *r*, tad tādu pašu atlikumu *r* dod arī no šiem cipariem izveidotais skaitlis *A*. Tā kā $13A = A + 12A$, un $12A$ dalās ar 3, tad tādu pašu atlikumu *r*, dalot ar 3, dod arī jauniegūtais skaitlis $13A$; tātad tādu pašu atlikumu *r*, dalot ar 3, dod arī to ciparu summa, kurus operācijas izpildes beigās uzraksta uz tāfeles sākumā izvēlēto ciparu vietā. Tātad operācijas izpildes gaitā nemainās uz tāfeles uzrakstīto ciparu summas atlikums, dalot to ar 3.

Ievērosim, ka sākumā uzrakstīto ciparu summa ir 14, un tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad visām ciparu virknēm, kas parādās uz tāfeles, ir atlikums 2, dalot to summu ar 3.

Bet galarezultātā prasītās virknes ciparu summa ir $2 \cdot (2+3+4+5+6+7) = 2 \cdot 27 = 54$; tā dod atlikumu 0, dalot ar 3.

Tātad prasīto ciparu virkni nevar iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – uz tāfeles esošo ciparu summa, dalot to ar 3, dod atlikumu 2.

PERIODISKUMS

6. uzdevums

Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākamais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

Atrisinājums

Pāra skaitļus apzīmēsim ar *p*, bet nepāra skaitļus – ar *n*.

Ievērojam, ka $n + n = p$, $n + p = n$, $p + n = n$, $p + p = p$.

Tā kā virknes locekļus nosaka divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars, tad tā veidojas šādi: *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; *n*; *p*; *n*; ... .

Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa (*n*; *p*; *n*). Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – virknē periodiski atkārtojas grupa (*n*; *p*; *n*).

PAR KĀDU BIEŽI SASTOPAMU KĻŪDU

Gadījumos, kad zināms, ka kāda īpašība piemīt sākotnējam lielumam, saglabājas izpildāmo gājienu rezultātā un piemīt arī beigās vajadzīgajam rezultātam, tad šī informācija vien vēl **neļauj secināt**, vai vajadzīgais beigu rezultāts iegūstams no sākotnējā lieluma, izpildot pieļautos gājienus. Tādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi – varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu, utt.

Ja izdodas atrast īpašību, kas

1) <u>piemīt</u> sākumā dotajiem lielumiem,
2) ir invarianta, t.i., <u>saglabājas</u>, veicot pieļaujamās operācijas,
3) <u>piemīt</u> tiem lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā,

tad no tā vien **nevar secināt**, ka galarezultātā vajadzīgos lielumus tiešām var iegūt.

8. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2016. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 1000?

Kurš no risinājumiem ir pareizs?

Jānīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 1000 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša risinājums. Sākumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 1000 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša spriedums ir pareizs, bet Jānīša spriedums ir kļūdains.

Jānītis savā risinājumā koncentrējās uz īpašību “būt pāra skaitlim”. Viņš atzīmējis, ka šī īpašība piemīt gan visiem skaitļiem, kurus var iegūt, gan arī skaitlim 1000, par kura iegūšanas iespējām jautāts uzdevumā. Tātad Jānītis konstatējis, ka ar skaitļa paritāti saistīti apsvērumi **netraucē** skaitļa 1000 iegūšanai. Bet no tā vēl neizriet, ka 1000 iegūšanai netraucē nekādi citi apsvērumi! Gluži otrādi, kā to savā risinājumā atradis Pēterītis, dalāmība ar 3 ir apsvērums, kas parāda, ka 1000 ar atļautajiem gājieniem nevar iegūt.

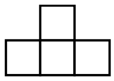
Situācija ir apmēram tāda pati, kāda rastos, ja Jānītim un Pēterītim būtu uzdots noskaidrot, vai celiņu cauri džungļiem no Mumbo ciema uz Tumbo ciemu neapdraud nekādas briesmas. Jānītis, ķīmiski analizējot gaisa sastāvu, nekļūdīgi noskaidro, ka celiņa tuvumā nav neviena lauvas, un no tā secina, ka var droši doties ceļā. Turpretī Pēterītis koncentrējas uz jaguāru meklēšanu un konstatē, ka 10 metrus no celiņa guļ vesela jaguāru saime. Kura zēna secinājums ir pareizs, varat saprast paši.

Invariantu metode – krāsošana

Teorija un piemēri gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2015. gadā

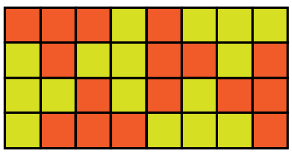
Invariantu metodi var izmantot arī uzdevumos par figūru sagriešanu vai salikšanu. Šādos gadījumos bieži tiek izmantota iekrāsošana.
Pats galvenais šāda tipa uzdevumos ir atrast tādu iekrāsošanas veidu, lai rastos pretruna – iekrāsoto rūtiņu skaits lielajā figūrā atšķirtos no kopējā iekrāsoto rūtiņu skaita mazajās figūrās.
Rūtiņas var iekrāsot dažādi. Visbiežāk tiek lietota iekrāsošana kā šaha galdiņam, taču rūtiņas pēc nepieciešamības var iekrāsot arī, piemēram, joslās, diagonālēs vai vispār atrast kādu citu iekrāsošanas veidu.

1. piemērs
Vai taisnstūri ar izmēriem a) 5×6, b) 4×8, c) 4×11 rūtiņas var noklāt ar T1. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

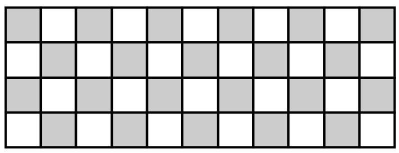


T1. att.

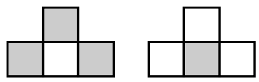
Atrisinājums
a) Nē, nevar. Ievērojam, ka katra mazā figūra satur 4 rūtiņas. Dotajā 5×6 rūtiņu taisnstūrī kopā ir 30 rūtiņas. Tā kā 30 nedalās ar 4, tad taisnstūri nevar noklāt.
b) Jā, var, skat. T2. att.
c) Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. T3. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. T4. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



T2. att.



T3. att.



T4. att.

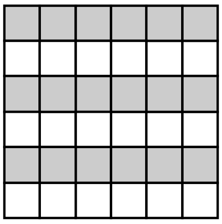
> ***Iegaumē!***
> Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir
> - „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
> - „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

2. piemērs

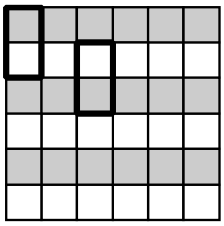
Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 – vertikāli? Katrs kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas, kauliņi nedrīkst pārklāties.

Atrisinājums

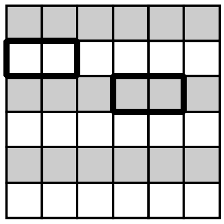
Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim doto kvadrātu joslās (skat. T5. att.). Tad kvadrātā ir 18 melnas un 18 baltas rūtiņas.



T5. att.



T6. att.

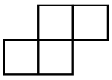


T7. att.

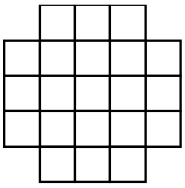
Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur katru no tiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, viena balta (skat. T6. att.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melnas un 5 baltas rūtiņas. Nenoklātas paliek 13 melnas un 13 baltas rūtiņas. Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas, tas ir, pāra skaita melnas vai pāra skaita baltas (skat. T7. att.). Tātad ar 13 horizontālajiem kauliņiem var noklāt tikai pāra skaita melnas un pāra skaita baltas rūtiņas. Iegūta pretruna, jo pēc vertikālo kauliņu novietošanas vēl ir jānoklāj nepāra skaits melnās un nepāra skaits baltās rūtiņas.

3. piemērs

Kādu lielāko skaitu T8. att. doto figūru var izgriezt no T9. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, T8. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



T8. att.

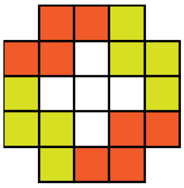


T9. att.

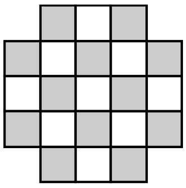
Atrisinājums

Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 4, skat. T10. att.

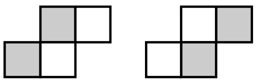
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim T9. att. figūru kā šaha galdiņu (skat. T11. att.). Lai kā novietotu T8. att. figūru, tā vienmēr noklāj tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas (skat. T12. att.). Tā kā T11. att. figūra satur tieši deviņas baltas rūtiņas, tad no tās var izgriezt ne vairāk kā četras figūras, jo $9 : 2 = 4, \mathit{atl.}\, 1$.



T10. att.



T11. att.



T12. att.

Iegaumē!

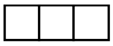
Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds ir lielākais…?”, „Kāds ir mazākais …?”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

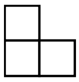
1) atrast šo vislielāko (vismazāko) vērtību un parādīt piemēru;
2) pierādīt, ka lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

4. piemērs

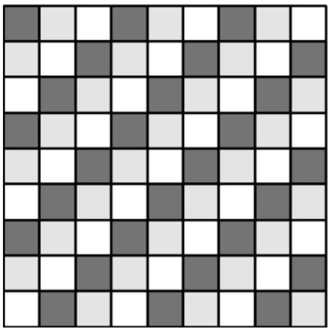
Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var noklāt ar 26 figūrām, kādas dotas T13. att., un vienu T14. att. doto figūru? Kvadrātam jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.


T13. att.


T14. att.

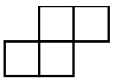
Atrisinājums

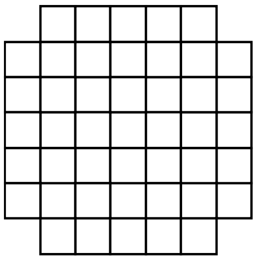
Nē, prasīto nevar izdarīt. Izkrāsosim kvadrātu trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. T15. att.) tā, lai novietotā T14. att. figūra saturētu tieši divas vienas krāsas rūtiņas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tā satur divas zilas un vienu sarkanu rūtiņu. Tādā gadījumā nenoklātas paliek 25 zilas, 26 sarkanas un 27 baltas rūtiņas, jo kvadrātā katras krāsas rūtiņu skaits ir 27. Katra T13. att. figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu. Tā kā nenoklātajā daļā dažādo krāsu rūtiņu skaits nav vienāds, tad ar T13. att. figūrām to noklāt nav iespējams.


T15. att.

5. piemērs

Kādu lielāko skaitu T16. att. doto figūru var izgriezt no T17. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, T16. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.

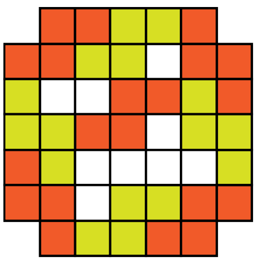

T16. att.

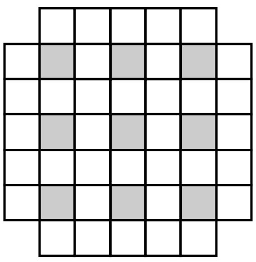

T17. att.

Atrisinājums

Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9, skat. T18. att.

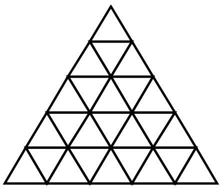
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim T17. att. figūru kā parādīts T19. att. Lai kā novietotu T16. att. figūru, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tā kā ir tieši deviņas iekrāsotas rūtiņas, tad nevar izgriezt vairāk kā 9 figūras.


T18. att.


T19. att.

6. piemērs

Regulārs trijstūris ar malas garumu 5 sadalīts 25 mazākos regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. T20. att.). Kādu lielāko skaitu rombu, kas izveidots no diviem mazajiem trijstūriem, var izgriezt no dotā trijstūra?

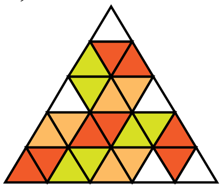


T20. att.

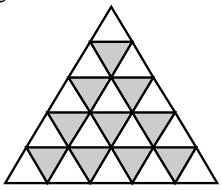
Atrisinājums

Lielākais rombu skaits, ko var izgriezt, ir 10, skat. T21. att.

Pierādīsim, ka vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar. Iekrāsosim mazos trijstūrus, kā parādīts T22. att. Ievērosim, ka katrs izgrieztais rombs satur vienu baltu un vienu melnu trijstūri. Tā kā melno trijstūru skaits ir 10, tad vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar.



T21. att.



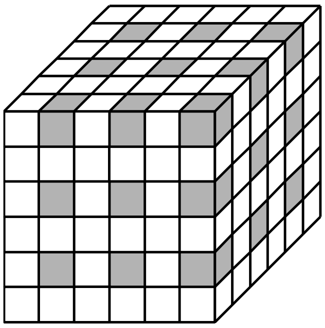
T22. att.

7. piemērs

Vai kubu ar izmēriem $6 \times 6 \times 6$ vienības kubiņi var salikt no 27 paralēlskaldņiem, kuru izmēri ir $1 \times 2 \times 4$ vienības kubiņi?

Atrisinājums

Nē, nevar. Izkrāsosim kubiņus tā, kā parādīts T23. att. Izkrāsoto kubiņu skaits ir $9 \cdot 3 = 27$. Katrs paralēlskaldnis satur vai nu 0, vai 2 iekrāsotos kubiņus. Tas nozīmē, ka dotie paralēlskaldņi kopā satur pāra skaita iekrāsotos kubiņus. Tā kā ir 27 (nepāra skaitlis) iekrāsotie kubiņi, tad uzdevumā prasītais nav iespējams.



T23. att.

Vairāk informācijas:

- http://nms.lu.lv/biblioteka/tematiskie-materiali/
  - A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš “Uzdevumi algoritmikā un algoritmiskajā kombinatorikā ar atrisinājumiem” – Rīga, 2004;
  - Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons “Invariantu metode” – Rīga, 1997.
- http://nms.lu.lv/biblioteka/uzdevumu-krajumi/

  Uzdevumu krājumu beigās dots uzdevumu sadalījums pa tēmām, kur var sameklēt papildus uzdevumus par iekrāsošanu.

Uzdevumi

2013./2014. mācību gads

Tik vai… Cik?

Pirmā kārta

T1.1.1. Aprēķini $20+(13\cdot 20+13):(20-13)=$

A 39 **B** 41 **C** 58 **D** 59 **E** cits skaitlis

T1.1.2. Dots skaitlis 407. Kur jāieraksta cipars 5, lai iegūtais četrciparu skaitlis būtu vismazākais?

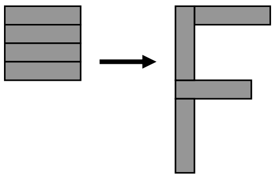
A pirms cipara 4 **B** starp cipariem 4 un 0
C starp cipariem 0 un 7 **D** aiz cipara 7

T1.1.3. Kuru no dotajiem skaitļiem, dalot to ar 9, iegūst atlikumu, kas atšķiras no pārējiem?

A 74 **B** 83 **C** 110 **D** 255 **E** nevar noteikt

T1.1.4. Kvadrātu, kura malas garums ir 8 cm, sagrieza 4 vienādās daļās un pēc tam no šīm 4 daļām izveidoja tādu figūru, kā parādīts 12. att. Par cik centimetriem atšķiras iegūtās figūras perimetrs no kvadrāta perimetra?

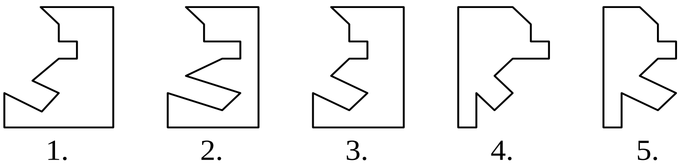
A 18 **B** 34 **C** 36 **D** 68 **E** cits variants



12. att.

T1.1.5. Kuras divas figūras (skat. 13. att.) jāsavieno, lai iegūtu četrstūri?

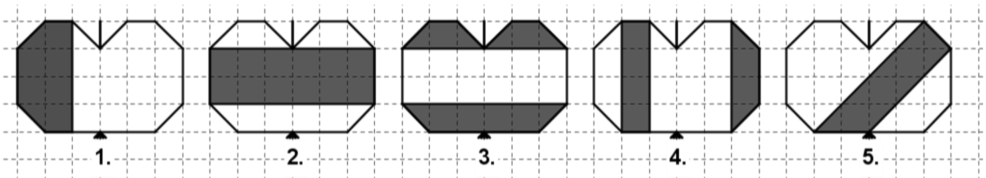
A 1. un. 4. **B** 1. un 5. **C** 2. un 5. **D** 3. un 4. **E** 3. un 5.



13. att.

T1.1.6. Kuros zīmējumos (skat. 14. att.) ir iekrāsota tieši $\frac{1}{3}$ no ābola?

A 1., 2., 5. **B** 1., 4. **C** 1., 4., 5. **D** 3., 4. **E** cits variants



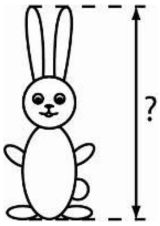
14. att.

T1.1.7. Matemātikas skolotājai ir x gadu, sporta skolotājai ir 2 reizes vairāk gadu nekā matemātikas skolotājai, bet mūzikas skolotājai ir par 15 gadiem mazāk nekā sporta skolotājai. Ko izsaka izteiksme $(2\cdot x-15)-x$?

A tik gadu ir mūzikas skolotājai
B par tik gadiem mūzikas skolotāja ir jaunāka nekā matemātikas skolotāja
C par tik gadiem mūzikas skolotāja ir vecāka nekā matemātikas skolotāja
D par tik gadiem mūzikas skolotāja ir vecāka nekā sporta skolotāja
E cits variants

T1.1.8. Cik pavisam garš ir zaķītis (skat. 15. att.), ja zināms, ka tā galva ir 15 cm gara, ausis tik garas, cik galva ar trešdaļu no pārējā ķermeņa un ķermenis tik garš, cik galva un ausis kopā.

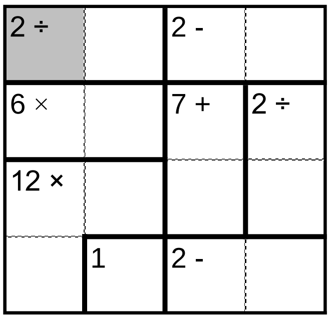
A 30 cm **B** 45 cm **C** 60 cm **D** 90 cm **E** cits variants



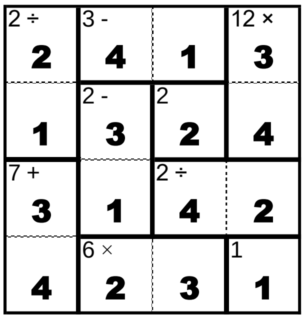
15. att.

T1.1.9. Dotajā mīklā (skat. 16. att.) katrā rūtiņā jāieraksta tieši viens no skaitļiem 1, 2, 3, 4 tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā visi četri skaitļi būtu dažādi. Turklāt ar treknāku līniju apvilktajos laukumos jāieraksta skaitļi tā, lai izpildot šī laukuma kreisajā stūrī norādīto darbību, iegūtu tur norādīto skaitli (skat. piemēru 17. att.). Kāds skaitlis var būt ierakstīts iekrāsotajā rūtiņā?

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 2 vai 4 **E** 1 vai 2, vai 4



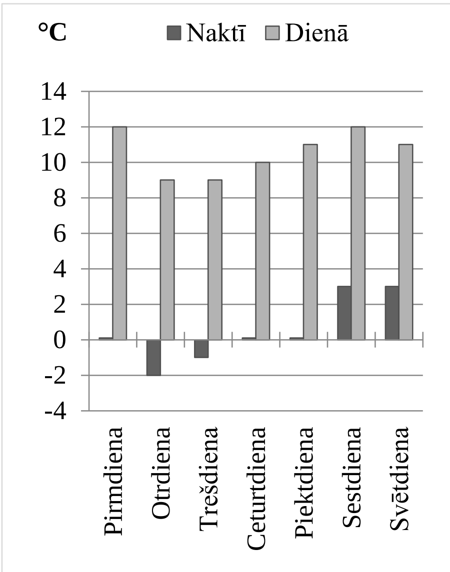
16. att.



17. att.

T1.1.10. Diagrammā (skat. 18. att.) attēlota gaisa temperatūra oktobra pirmajā nedēļā. No diagrammas nosaki, par cik grādiem atšķiras attēlotās nedēļas visaugstākā diennakts temperatūra no viszemākās!

A par 3 **B** par 8 **C** par 12 **D** par 14 **E** nevar noteikt



18. att.

Otrā kārta

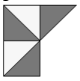
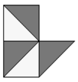
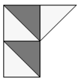
T1.2.1. Aprēķini! $20+13-3\cdot 2+18:2=$

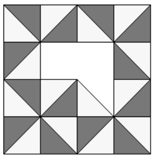
A 36 **B** 49 **C** 69 **D** 120 **E** cits skaitlis

T1.2.2. Dāvanu maisiņā ir ***p*** piparkūkas, ***k*** konfektes un ***m*** mandarīni. Zināms, ka piparkūku ir 3 reizes vairāk nekā mandarīnu, bet konfekšu ir par 10 mazāk nekā piparkūku. Kura no dotajām vienādībām **nav** patiesa?

A $p=3m$ **B** $k+10=p$ **C** $k=p+10$ **D** $k=3m-10$ **E** $3m=k+10$

T1.2.3. Salvetē, kurai otra puse ir balta, izgriezts caurums (skat. 19. att.). Kurš no dotajiem gabaliņiem jāievieto tukšajā vietā, lai saglabātos salvetes raksts?

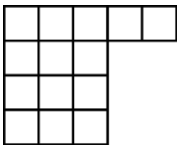
A  **B**  **C**  **D**  **E** neviens no dotajiem



19. att.

T1.2.4. Cik kvadrāti redzami 20. att.?

A 14 **B** 19 **C** 20 **D** 22 **E** cits variants



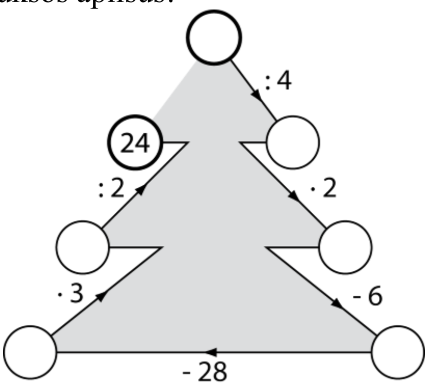
20. att.

T1.2.5. Kurš ir nākamais skaitlis aiz 2013, kam ir tāda pati ciparu summa kā skaitlim 2013? Piemēram, skaitļiem 34 un 142 ir vienāda ciparu summa.

T1.2.6. Aplītī ieraksti lielāko iespējamo skaitli, lai dotā nevienādība būtu patiesa.

a) $41 > 6 + \bigcirc$ **b)** $\bigcirc \cdot 3 < 23$

T1.2.7. Aizpildi 21. att. visus tukšos aplīšus!



21. att.

T1.2.8. Spēļu kauliņa divu pretējo skaldņu punktu kopskaits ir 7. Kauliņu (skat. 22. att.) pagriež tā, ka augšējā skaldnē punktu skaits nemainās un skaldne ar 6 punktiem vairs nav redzama. Kāds var būt punktu kopskaits redzamajās skaldnēs pēc pagriešanas?

22. att.

T1.2.9. Trīs jaunie darbinieki Andris, Agnese un Ilze ir saposušies Ziemassvētkiem – katrs uzvilcis svētku džemperi, uz kura ir tieši viens no attēliem: ziemeļbriedis, sniegpārsliņa, eglīte. Katram džemperim ir atšķirīga krāsa: sarkana, zila, balta. Ir zināms, ka

1) gan tam cilvēkam, kam ir džemperis ar sniegpārsliņas attēlu, gan tam, kam ir ar ziemeļbrieža attēlu, gan Andrim patīk matemātika,

2) ziemeļbrieža attēls ir uz zila džempera,

3) sniegpārsliņas attēls ir uz sarkana džempera un cilvēks, kas to valkā mācās kopā ar Agnesi.

Noskaidro un ieraksti tabulā, kādas krāsas džemperis ir katram darbiniekam un kas uz tā ir attēlots!

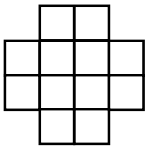
	Attēls	Krāsa
Andris		
Agnese		
Ilze		

Trešā kārta

T1.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki centimetros!

$$(34\ cm - 2\ dm) \cdot 5 + 30\ m =$$

T1.3.2. Sadali 23. att. doto figūru četrās vienādās figūrās! Parādi divus dažādus veidus, kā to var izdarīt! Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām. Figūras var būt pagrieztas arī citādāk.



23. att.

T1.3.3. Dotas sejiņas ☺, 😐, ☹, cipari 1, 2, 3 un burti A, B, C. Izmantojot dotos nosacījumus, aizpildi tabulu, ja zināms, ka nekādas divas tabulas rūtiņas nav aizpildītas vienādi un katrā rūtiņā var ievietot tikai vienu simbolu!

1) A atrodas vienā kolonnā ar ☺;

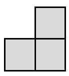
2) ☹ atrodas vienā kolonnā ar 3;

3) 1 atrodas kādā kolonnā pa kreisi no kolonnas, kurā atrodas ☺;

4) 2 atrodas kolonnā, kas ir starp tām kolonnām, kurās atrodas 3 un B.

Sejiņa			
Cipars			
Burts			

T1.3.4. No četrām 24. att. dotajām figūrām salika taisnstūri tā, ka neveidojas caurumi. Kāds var būt šī taisnstūra perimetrs? *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



24. att.

T1.3.5. Vai var uzzīmēt riņķa līniju un trijstūra kontūru tā, lai tiem būtu tieši 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 krustpunkti? *Ja var, tad parādi, kā to var izdarīt!*

T1.3.6. Maruta un Agnese uz slidotavu atnāca plkst. 10:00, bet aizgāja plkst. 12:50. Mazajā kafejnīcā, kas atrodas tieši pie slidotavas, viņas iztērēja 10 €. Zināms, ka kafejnīcā ir tikai viens piedāvājums: „Pērc bulciņu un tēju par 1 €”. Visās pauzēs katra meitene izdzēra tēju un apēda bulciņu, un pauzēs viņas gāja kopā. Katra pauze ilga 10 minūtes. Cik km kopā noslidoja abas meitenes, ja zināms, ka Maruta slidoja ar ātrumu 5 km/h, bet Agnese – ar ātrumu 4 km/h.

Ceturtā kārta

T1.4.1. Saliec iekavas, lai iegūtu patiesas vienādības!

$42+21:7+36:9=13$ $\qquad$ $25\cdot17-15+189=239$

T1.4.2. Uzraksti, kāda naudas summa (eiro un centos) attēlota katrā ekrānā!

5.4 $\quad$ 29.9 $\quad$ 0.8 $\quad$ 18. $\quad$ 29.09 $\quad$ 47.05 $\quad$ 10.5 $\quad$ 12.2

T1.4.3. Skaitļa x un 9 reizinājums ir 324. Uzraksti izteiksmi un aprēķini x!

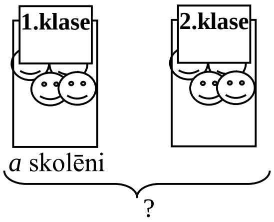
T1.4.4. Aprēķini nezināmos!

a) $6\cdot x+20=200$ $\qquad$ **b)** $240:x=3+21:3-6$

T1.4.5. Juris ar savu velosipēdu brauc ar ātrumu 20 km/h. Uzraksti, kādu attālumu viņš nobrauc dotajā laikā!

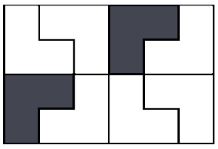
a) 3 h - .... $\qquad$ **b)** $1\frac{1}{2}$ h - .... $\qquad$ **c)** $\frac{3}{4}$ h - ....

T1.4.6. Otrajā klasē ir par 3 skolēniem vairāk nekā pirmajā (skat. 25. att.). Cik skolēnu ir abās klasēs kopā?

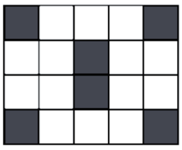


25. att.

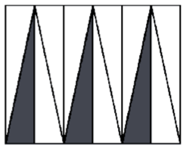
T1.4.7. Tukšajos lodziņos zem katra taisnstūra ieraksti, kāda daļa no tā ir iekrāsota un kāda nav iekrāsota!



26. att.



27. att.

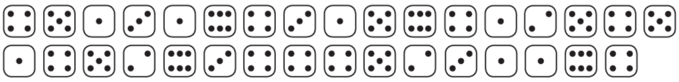


28. att.

Ir iekrāsota $\qquad$ Ir iekrāsota $\qquad$ Ir iekrāsota

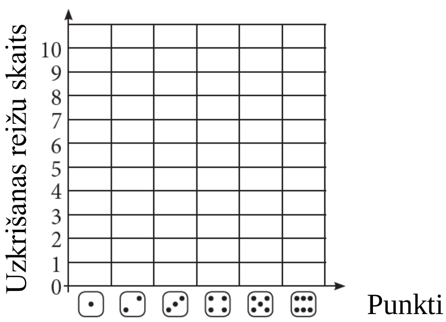
Nav iekrāsota $\qquad$ Nav iekrāsota $\qquad$ Nav iekrāsota

T1.4.8. Agne meta metamo kauliņu un uzzīmēja, cik punkti katrā reizē uzkrita (skat. 29. att.). Aizpildi tabulu ar iegūtajiem datiem un attēlo tos diagrammā!

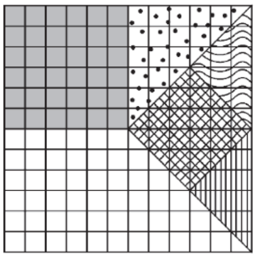


29. att.

Punkti	Uzkrišanas reižu skaits
⚀	
⚁	
⚂	
⚃	
⚄	
⚅	

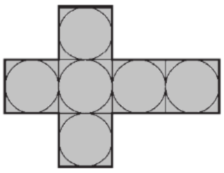


T1.4.9. Uzraksti, kāda daļa no 30. att. dotā kvadrāta ir iekrāsota katrā veidā!



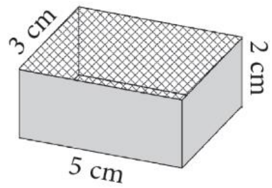
30. att.

T1.4.10. Visi 31. att. redzamie riņķi ir vienādi. Katra riņķa rādiuss ir 6 cm. Aprēķini iekrāsotās figūras laukumu un perimetru!



31. att.

T1.4.11. Kastes iekšpuse ir izlīmēta ar rūtainu papīru (skat. 32. att.). Aprēķini ar rūtaino papīru pārklāto laukumu!



32. att.

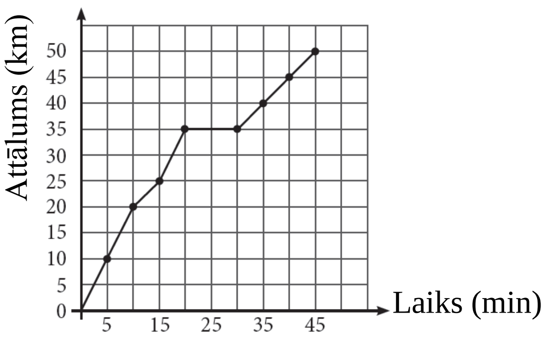
T1.4.12. Izmantojot diagrammā attēlotos datus (skat. 33. att.), atbildi uz jautājumiem par autobusa kustību!

a) Cik kilometrus autobuss nobrauca 45 min?

b) Cik ilgi tas brauca līdz pieturai?

c) Cik ilgi autobuss stāvēja pieturā?

d) Kādu attālumu autobuss nobrauca pēdējās 15 minūtēs?



33. att.

Jauno matemātiķu konkurss

Pirmā kārta

J1.1.1. Rēbuss

Atrisini skaitļu rēbusu!

$$
\begin{array}{r}
T \\
+\,T\,E \\
+\,T\,I\,E \\
+\,T\,I\,T\,E \\
+\,A\,I\,T\,I\,E \\
\hline
O\,L\,I\,L\,A
\end{array}
$$

Vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Pietiek atrast vienu atrisinājumu.

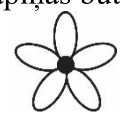
J1.1.2. Par pelēniem

Pelēni Pīks un Pīka palīdzēja mammai vākt krājumus ziemai. Vienu dienu viņi vāca pupiņas – baltas, sarkanas un raibas. Dienas beigās izrādījās, ka abi savākuši vienādu skaitu sarkano pupiņu. Pīka baltās pupiņas bija savākusi par 20% vairāk nekā sarkanās pupiņas un raibās pupiņas par 25% mazāk nekā baltās pupiņas. Savukārt Pīks baltās pupiņas bija savācis par 30% mazāk nekā sarkanās pupiņas un raibās pupiņas par 50% vairāk nekā baltās pupiņas.

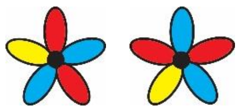
Kurš no pelēniem ir strādājis čaklāk un dienas laikā savācis vairāk pupiņu?

J1.1.3. Krāsainās puķītes

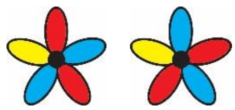
Aija uzzīmēja pieclapu puķīti (skat. 34. att.) un grib to izkrāsot. Aijai ir trīs krāsu zīmuļi: sarkans, zils un dzeltens. Cik dažādos veidos Aija var izkrāsot savu puķīti, lai blakus esošās ziedlapiņas būtu dažādās krāsās?



34. att.



35. att.



36. att.

Puķītes uzskata par dažādi izkrāsotām, ja tās nevar iegūt vienu no otras, pagriežot puķīti ap centru, piemēram, 35. att. redzamās puķītes ir vienādas, bet 36. att. – dažādas.

J1.1.4. Daudzstūri un to diagonāles

a) Uzzīmē izliektu daudzstūri, kuram diagonāļu skaits sakrīt ar malu skaitu!

b) Vai eksistē tāds ieliekts daudzstūris, kuram pilnībā iekšpusē esošo diagonāļu skaits sakrīt ar malu skaitu un ir tieši puse no visām diagonālēm? (Diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra virsotnes un kas nav daudzstūra mala.) *Ja eksistē, tad parādi piemēru, ja neeksistē, tad pamato, kāpēc!*

J1.1.5. Lauztā līnija

Rūtiņu lapā uzzīmēta slēgta lauzta līnija, kura pati sevi nekrusto, tās posmi iet pa rūtiņu malām un posmu garumi pēc kārtas ir 1, 2, 3, 4, 5, ... vienības (1 vienība ir 1 rūtiņas malas garums). Kāds ir mazākais iespējamais šādas lauztas līnijas garums? *Uzzīmē piemēru un pamato savu atbildi!*

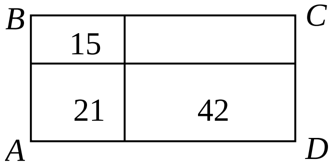
Otrā kārta

J1.2.1. Naudas maiņa

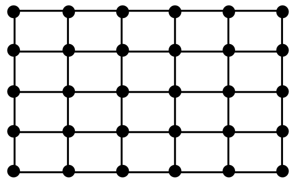
Atrodi vienu summu veselos latos, kuru, konvertējot uz eiro pēc Latvijas Bankas noteiktā kursa (1 EUR = 0,702804 LVL) un noapaļojot līdz veseliem centiem, iegūst summu veselos eiro!

J1.2.2. Par taisnstūri

Taisnstūris *ABCD* sadalīts četros mazākos taisnstūros (skat. 37. att.). Noskaidro taisnstūra *ABCD* malu garumus, ja zināmi trīs mazāko taisnstūru laukumi!



37. att.



38. att.

J1.2.3. Rūķīši un lampiņas

Sniegbaltītes pils zāle tiek apgaismota ar 50 lampām, katrai no tām ir savs slēdzis. Slēdži izvietoti rindā pie sienas. Sākumā visas lampas bija izslēgtas. Tad zālē ienāca pirmais rūķītis un visas lampas ieslēdza. Pēc tam ienāca otrais rūķītis un pārslēdza katru otro slēdzi (ja lampa bija ieslēgta, tā tika izslēgta un otrādi – ja lampa bija izslēgta, tā tika ieslēgta). Pēc tam trešais rūķītis pārslēdza katru trešo slēdzi, vēlāk ceturtais rūķītis pārslēdza katru ceturto slēdzi, piektais rūķītis – katru piekto slēdzi, sestais rūķītis – katru sesto slēdzi, un septītais rūķītis pārslēdza katru septīto slēdzi. Cik lampas būs ieslēgtas pēc septītā rūķīša darbībām?

J1.2.4. Par zvejas tīklu

Zvejas tīkla fragments veidots no aukliņām, kas sasietas kopā (skat. 38. att., kurā ar aplīšiem attēloti mezgli). Kādu lielāko skaitu aukliņu posmu var pārgriezt tā, lai tīkls netiktu sadalīts divās atsevišķās daļās? (Aukliņas posms ir aukliņas daļa starp diviem blakus mezgliem. Mezglus sagriezt nedrīkst.) *Parādi, kā to izdarīt un pamato, kāpēc nevar pārgriezt vairāk posmus!*

J1.2.5. Jūras akmentiņi

Olafs un Mairis jūras krastā bija savākuši 100 akmentiņus. Viņi nolēma spēlēt spēli. Viena gājiena laikā spēlētājam visi akmentiņi jāsadala pēc izvēles vairākās vienādās kaudzītēs (vismaz divās), un visi akmeņi no vienas kaudzītes jāiemet jūrā. Atlikušie akmentiņi jāsastumj vienā kaudzē, un gājiens pāriet pie otra spēlētāja. Tas, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no zēniem noteikti var panākt savu uzvaru šajā spēlē, ja Olafs sāk pirmais?

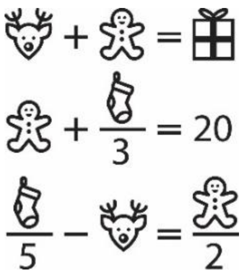
Trešā kārta

J1.3.1. Par krustpunktiem

Plaknē novilktas sešas taisnes tā, ka katras divas ir vai nu paralēlas, vai perpendikulāras. Cik krustpunktu var veidoties? *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*

J1.3.2. Ziemassvētku mīkla

Atrisini skaitļu rēbusu (skat. 39. att.)! Katra figūra apzīmē naturālu skaitli. Vienādām figūrām atbilst vienādi skaitļi, dažādām – dažādi. *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



39. att.

J1.3.3. Ziemassvētku vecīša paklājs

Ziemassvētku vecīša darba istabā ir paklājs, kas sadalīts 5×5 kvadrātiņos. Rūķīši bija iesaiņojuši dāvaniņas un atstājuši tās uz paklāja. Izrādījās, ka katrā kvadrātiņā ir ne vairāk kā viena dāvana, pie tam visās rindās ir vienāds dāvanu skaits, bet visās kolonnās – atšķirīgs dāvanu skaits.

Parādi vienu veidu, kā dāvanas varēja būt izvietotas uz paklāja!

J1.3.4. Divnieku un trijnieku summas

Cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitli **a)** 14; **b)** 22?

Veidi, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 8 var izteikt četros dažādos veidos: $8 = 2+2+2+2 = 2+3+3 = 3+2+3 = 3+3+2$.

J1.3.5. Izklaidīgais Ziemassvētku vecītis

Četri vienas mājas bērni – Aivars, Laima, Paula un Vilnis – nosūtīja vēstules ar saviem lūgumiem Ziemassvētku vecītim. Kad pienāca laiks piegādāt dāvanas, Ziemassvētku vecītis bija aizmirsis, kuram bērnam kāda dāvana uz kuru dzīvokli jānogādā. Viņš tikai atcerējās, ka bērni dzīvo dzīvokļos ar numuriem 15, 25, 33 un 55 un dāvanas ir slēpes, lelle, mākslinieka komplekts un rotaļu vilciens. Vēl Ziemassvētku vecītim atmiņā uzplaiksnīja šādi fakti:

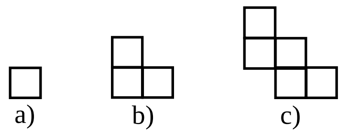
1) Viļņa dzīvokļa numurs nesākas ar ciparu 1;
2) uz 33. dzīvokli jānogādā vai nu slēpes, vai rotaļu vilciens;
3) vilciens jānogādā bērnam, kura vārda burtu skaits sakrīt ar dzīvokļa numura ciparu summu;
4) Laima dzīvo dzīvoklī, kura numurs sastāv no diviem vienādiem cipariem;
5) lelle paredzēta bērnam, kura vārds nesākas ar burtu V;
6) Paula draudzējas ar bērnu, kurš dzīvo 25. dzīvoklī;
7) vēstule no Laimas pienāca dienu vēlāk, nekā vēstule no bērna, kas dzīvo 55. dzīvoklī.

Palīdzi Ziemassvētku vecītim atšķetināt šo lietu!

Ceturtā kārta

J1.4.1. Kvadrāts

Dotas četras 40. att. a) figūras, četras 40. att. b) figūras un četras 40. att. c) figūras. Saliec no tām vienu kvadrātu!

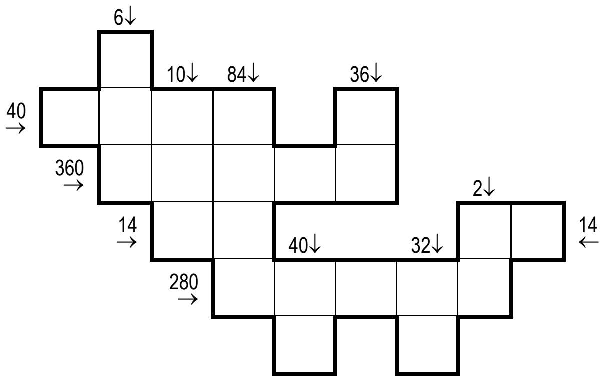


40. att.

J1.4.2. Reizinātāju juceklis

Rūtiņās ieraksti ciparus (skat. 41. att.) tā, lai izpildītos šādi nosacījumi:

1) katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens cipars;
2) dotie skaitļi norāda bultiņu virzienā esošajās rūtiņās ierakstīto ciparu reizinājumu;
3) katrā reizinājumā visi reizinātāji ir dažādi.



41. att.

J1.4.3. Namdari un baļķis

Namdaris Juris uz 10 m gara baļķa ar zilu zīmuli uzvilka atzīmi 20 cm no baļķa gala un tālāk pa zilai atzīmei ik pēc 50 cm. Pēc tam namdaris Pēteris ar sarkanu zīmuli atzīmēja 10 cm no baļķa tā paša gala un pēc tam atzīmes ik pēc 30 cm. Cik reizes sakrita zilās un sarkanās atzīmes?

J1.4.4. Baktērijas un vīrusi

Baktēriju kolonijā iekļuva viens vīruss. Pirmajā minūtē vīruss iznīcina vienu baktēriju un sadalās divos jaunos vīrusos. Dzīvas palikušās baktērijas arī katra sadalās divās jaunās baktērijās. Nākamajā minūtē katrs vīruss iznīcina pa vienai baktērijai un sadalās divos jaunos. Arī katra atlikusī baktērija sadalās divās jaunās baktērijās utt. katru minūti. Cik baktēriju bija sākumā, ja pēc 15 minūtēm vīrusi iznīcināja pēdējo baktēriju?

J1.4.5. Trijstūra augstumi

Vai var uzzīmēt tādu trijstūri, kura augstumu garumi ir 1 cm, 2 cm un 3 cm? Ja var – uzzīmē un uzraksti, cik garas ir trijstūra malas, ja nevar – pamato, kāpēc!

Piektā kārta

J1.5.1. Pēc kārtas sekojoši skaitļi

Ar *a, b, c, d* apzīmēti pēc kārtas sekojoši viencipara skaitļi. Zināms, ka ir patiesa vienādība $\overline{ab} : c = d$. Atrodi visus iespējamos viencipara skaitļus, kas apmierina dotos nosacījumus! (Ar $\overline{ab}$ tiek apzīmēts divciparu skaitlis, kur *a* ir desmitu cipars, bet *b* – vienu cipars.)

J1.5.2. Mušas un zirnekļi

Pa sienu rāpo mušas un zirnekļi. Cik mušas un cik zirnekļi rāpo pa šo sienu, ja pavisam kopā ir 80 kājas? *Apskati visas iespējas!*

J1.5.3. Sešstūris un piecstūris

No papīra izgrieza vienu sešstūri un vienu piecstūri. Cik malas var būt daudzstūrim, ko ieguva, saliekot kopā šīs figūras tā, ka tās nepārklājas, bet tām sakrīt vismaz daļa malas? *Apskati visas iespējas!*

J1.5.4. Loterija

Muļķu ciemā tika rīkota loterija. Pavisam tika izdotas 2014 loterijas biļetes, kuras ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem (ciparu virknēm) no 0001 līdz 2014. Buratino iegādājās vairākas biļetes. Viņš ievēroja, ka katrai viņa biļetei tās numura ciparu summa ir 25. Cik biļetes Buratino varēja būt nopircis?

J1.5.5. Triks ar glāzēm

Uz galda stāv deviņas glāzes, visas “ar kājām gaisā” (skat. 42. att.).

42. att.

Oficiants demonstrē triku: vienā reizē viņš paņem jebkuras četras glāzes un apgāž tās otrādi (ja glāze stāv “ar kājām gaisā”, tā tiek apgriezta pareizi, ja tā stāv pareizi – tad apgriezta “ar kājām gaisā”). Vai, vairākas reizes izpildot šo triku, oficiants var panākt, ka visas glāzes stāv pareizi un tajās visās var ieliet limonādi?

Profesora Cipariņa klubs

Pirmā nodarbība

P1.1.1. Kautrīgo rūķu nams

Kādā namā dzīvo 19 rūķi. Katrs no rūķiem vai nu vienmēr melo, vai vienmēr saka patiesību. Rūķi ļoti kautrējas par savu augumu – ja kādam rūķim jautā, cik viņš ir garš, tad katrs rūķis vienmēr steidz paziņot: „Es esmu garāks nekā visi citi rūķi.” Cik no rūķiem ir meļi?

P1.1.2. Matemātiķis Miķelis

Siera gabals tika sagriezts tieši 200 mazos gabaliņos un aizmirsts virtuvē. Pa nakti virtuvē viesojās 22 peles un visus gabaliņus nočiepa. To novēroja slinkais kaķis Miķelis. Viņš pamanīja, ka neatkarīgi no tā, kā peles savā starpā sadala siera gabalus, vienmēr būs vismaz divas peles, kas nočiepušas vienādu skaitu siera gabaliņu. Pierādi, ka tas vienmēr izpildās!

P1.1.3. Starpbrīdis

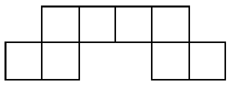
Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi, starp kuriem atstāta vieta aritmētisko darbību zīmēm:

$$1 \square (-1) \square 2 \square (-2) \square 3 \square (-3) \square 4 \square (-4) \square 5 \square (-5) \square 6 \square (-6)$$

Andris katra kvadrātiņa vietā ierakstīja vai nu reizināšanas zīmi, vai dalīšanas zīmi un aprēķināja rezultātu, iegūstot $\frac{1}{4}$. Juris dažas Andra uzrakstītās reizināšanas zīmes aizstāja ar dalīšanas zīmēm, bet dažas Andra uzrakstītās dalīšanas zīmes aizstāja ar reizināšanas zīmēm un aprēķināja rezultātu, iegūstot (-4). Pierādi, ka vismaz viens no viņiem noteikti ir kļūdījies savos aprēķinos!

P1.1.4. Figūru savietošana

Kādus taisnstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām, ir iespējams noklāt ar 43. att. redzamajām figūrām tā, ka figūras nepārklājas, figūru malas iet pa rūtiņu līnijām un taisnstūris ir pilnībā pārklāts ar šīm figūrām?



43. att.

P1.1.5. Raganas namiņā

Ansītis un Grietiņa sēdēja pie apaļa galda (ar diametru a) un ēda vienādus riņķa formas cepumiņus. Tā kā cepumiņu bija vairāk nekā viņi varēja apēst, abi sāka spēlēt spēli. Viņi pēc kārtas lika uz galda pa vienam cepumiņam. Uzliktos cepumiņus pārvietot vairs nedrīkst, kā arī nedrīkst vienu cepumiņu likt otram virsū. Zaudē tas spēlētājs, kam vairs nav uz galda vietas, kur nolikt cepumu. Ja spēli sāk Grietiņa, kā viņai jārīkojas, lai uzvarētu, ja **a)** cepuma diametrs ir $\frac{a}{3}$; **b)** cepuma diametrs nav noteikts?

P1.1.6. Dažādie reizinātāji

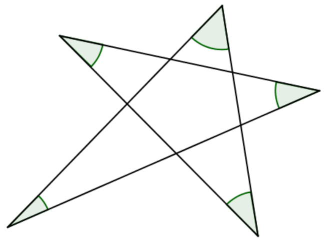
Doti pieci naturāli skaitļi a, b, c, d un e. Ar M apzīmēts reizinājums

$$M = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e)$$

a) Pierādi, ka M dalās ar 144. **b)** Vai M noteikti dalās ar 288? **c)** Vai M noteikti dalās ar 432? **d)** Vai M noteikti dalās ar 576?

P1.1.7. Zvaigznīte

Aprēķini leņķu summu, ko veido 44. att. dotās *zvaigznes* virsotnes! Atzīmētie leņķi zīmējumā var nebūt vienādi.



44. att.

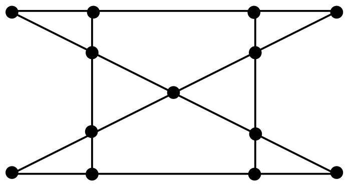
P1.1.8. Tukšais kvadrāts

Sadali vienības kvadrātu 2000 vienādās daļās, kuras nav taisnstūri, trijstūri vai citi izliekti daudzstūri!

Otrā nodarbība

P1.2.1. Versaļas pils

Francijas karaļa Luija XIV pils dārzā bija izvietotas 13 strūklakas (skat. 45. att.). Karaļa viesi tam vienmēr glaimoja – cik asprātīgi tam izvietotas strūklakas – uz katras no sešām taisnēm ir vismaz četras strūklakas.



45. att.

Tad kādu dienu Luijs bija ieradies pie Anglijas karaļa Čārlza pārspriest politisko situāciju un, ejot pa dārzu, viņš ieraudzīja, ka tur 13 strūklakas izvietotas uz deviņām taisnēm tā, ka uz katras bija tieši četras strūklakas. Luijs, protams, negribēja palikt sliktāks par Čārlzu un uzdeva savam dārzniekam izveidot shēmu strūklaku sistēmai ar tādu pašu īpašību, citādi viņš tiks atlaists no darba. Palīdzi dārzniekam saglabāt darbu un uzzīmē karaļa prasīto shēmu!

P1.2.2. Spēle

Anna ir iedomājusies divus skaitļus: divciparu skaitli x un trīsciparu skaitli y. Zināms, ka x ir vienāds ar skaitļa y ciparu kvadrātu summu, bet x pirmais cipars vienāds ar y pirmo divu ciparu kvadrātu summu. Kādus skaitļus ir iedomājusies Anna, ja neviens no x un y cipariem nav nulle, turklāt visi pieci izmantotie cipari ir dažādi?

P1.2.3. Trajektorijas

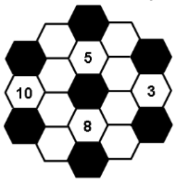
Uz taisnes t novietots vienu vienību garš stienītis. Sākumā tā gali atrodas punktos A un B. Stienīti bīda pa plakni tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei t un beigās atkal nonāk uz t; šai brīdī tā gali atrodas punktos C un D. Turklāt ceļiem, pa kuriem kustas stienīša gali, nav kopīgu punktu. Vai var gadīties, ka $AC > 2013$? (Piezīme: uzskatām, ka stienītis ir paralēls t arī tad, ja tas atrodas uz t.)

P1.2.4. Starpbrīdis

Juris un Andris uz tāfeles spēlēja spēli. Andris uzrakstīja kādu skaitli, bet Juris mēģināja šo skaitli izteikt formā $xy(x+y)$. Taču, kad Andris uzrakstīja skaitli 201200002013, ne viens, ne otrs nevarēja izdomāt, kā lai to izsaka. Palīdzi viņiem uzzināt, vai eksistē tādi veseli skaitļi x un y, ka $xy(x+y) = 2012000020\ 13$. *Pamato savu atbildi!*

P1.2.5. Šūnas

Figūras tukšajās šūnās (skat. 46. att.) ieraksti skaitļus 1, 2, 4, 6, 7, 9, 11 un 12 tā, lai katrā no sešām četru šūnu rindām ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati, kā arī tā būtu vienāda ar to sešu skaitļu summu, kuri ierakstīti sešās iekšējās šūnās!



46. att.

P1.2.6. Kosmosa misija

Uz Mēness atrodas divas kosmosa stacijas – marsiešu un zemes iedzīvotāju. Zemes iedzīvotāju stacija uzsprāgs pēc 25 minūtēm. Tajā ir četri kosmonauti, bet stacijā ir tikai viens skābekļa balons, kuru vienlaicīgi var izmantot ne vairāk kā divi kosmonauti.

Zināms, ka pirmais kosmonauts var pāriet no vienas stacijas uz otru 1 minūtē, otrs – 3 minūtēs, trešais – 7 minūtēs, ceturtais – 15 minūtēs. Ejot divatā, kosmonauti piemērojas lēnāk ejošajam. Ejot obligāti ir jāizmanto skābekļa balons. Marsieši cilvēkiem nekādi nespēj palīdzēt.

Vai visi kosmonauti var paspēt izglābties, ja pieņem, ka sprādziena laikā marsiešu stacija ir vienīgā drošā vieta cilvēkiem?

P1.2.7. Melīgo rūķu nams

Rūķu namiņā notika liela nelaime. Ikvakara tējas dzeršanā atklājās, ka kāds ir apēdis visus cepumus, kuri bija pieliekamajā. Zināms, ka pieliekamajā kopš pēdējās tējas dzeršanas ir pabijuši tikai pieci rūķi: Līna, Meija, Tobijs, Ruks un Sels. Kad visi rūķi tika iztaujāti par notikušo, katrs no viņiem pateica tieši trīs apgalvojumus.

Līna: “Es to neizdarīju. Es nekad neesmu zagusi no pieliekamā saldumus. To izdarīja Ruks.”

Meija: “Es to neizdarīju. Man ir pietiekami daudz naudas, lai piepirktu pilnu namiņu ar cepumiem, tāpēc man cepumus zagt nevajag. Sels zina, kurš to izdarīja.”

Tobijs: “Es to neizdarīju. Ar Selu es iepazinos tikai pirms gada – tad, kad sāku dzīvot šajā namiņā. To izdarīja Ruks.”

Ruks: “Es neesmu vainīgs. To izdarīja Sels. Līna melo, sakot, ka es to izdarīju.”

Sels: “Es neapēdu visus cepumus no pieliekamā. Meija ir vainīga. Mēs ar Tobiju esam bērnības draugi, tā ka viņš mani ļoti labi pazīst un varēs galvot par to, ka es nekad neesmu neko zadzis.”

Vēlāk katrs rūķis atzinās, ka no trīs teikumiem, ko viņš bija pateicis, divi bija taisnība, bet viens – nē. Izrādās, ka ar šo informāciju pietika, lai uzzinātu vainīgo. Zināms, ka visus cepumus apēda viens rūķis. Noskaidro, kurš tas ir, un pamato savu atbildi!

P1.2.8. Rūtiņu kvadrāts

Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt **a)** 12; **b)** 13 dažādos taisnstūros?

Trešā nodarbība

P1.3.1. Matemātiķis Miķelis

Kaķis Miķelis vēroja, kā Andris darbojas virtuvē. Virtuvē ir atrodami tikai trīs smilšu pulksteņi – ar vienu var nomērīt 1 minūti, ar otru 5 minūtes, ar trešo 9 minūtes. Andrim ļoti garšo olas, kuras ir vārītas tieši 13 minūtes, kā arī viņš grib izvārīt olas Ilzei, kurai garšo olas, kas vārītas tieši 12 minūtes. Ar dotajiem pulksteņiem nebūtu bijušas nekādas problēmas to izdarīt, taču Miķelis izdomāja pārbaudīt Andri un saplēsa 1 minūtes pulksteni. Vai Andrim vēl joprojām, izmantojot tikai nesaplēstos pulksteņus, ir iespējams izvārīt garšīgas olas sev un Ilzei? (Garšīga ola jāvāra bez pārtraukuma vārīšanas laikā.)

P1.3.2. Mulsinošie gadskaitļi

Aprēķini izteiksmes vērtību!

$$\left(2010+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2009+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2014+\frac{2013}{20132014}\right)-$$
$$-\left(2012+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2008+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2013+\frac{2013}{20132014}\right)=$$

P1.3.3. Gliemežu ekspedīcija

Pāri strautiņam pārkritis šaurs zariņš. Pa zariņu no kreisā krasta uz labo vienādos attālumos viens aiz otra pārvietojas trīs gliemeži; trīs citi gliemeži tāpat dodas no labā krasta uz kreiso krastu. Visu gliemežu ātrumi ir vienādi. Diviem gliemežiem satiekoties, tie apgriežas un ar tādu pašu ātrumu dodas pretējos virzienos. Kāds būs kopējais gliemežu satikšanās reižu skaits uz zariņa? (Gliemeži nevar paiet viens otram garām. Visas satikšanās notiek uz zariņa.)

P1.3.4. Dīvainais Jānis

Aizvakar Jānis bija 7 gadus vecs. Nākamgad viņam paliks 10 gadi. Kā tas ir iespējams?

P1.3.5. Starpbrīdis

Matemātikas skolotāja pirms pusdienu starpbrīža uzdeva mājasdarbu, pie kura Juris un Andris, protams, ka tūlīt pat ķērās klāt. Mājasdarbs bija šāds: vai naturālos skaitļus no 1 līdz 16 var uzrakstīt **a)** pa apli, **b)** rindā tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts? Pamēģini arī tu atrisināt šo uzdevumu!

P1.3.6. Šifrētā matemātika

Atšifrē, kādiem cipariem jābūt burtu vietās, lai dotā izteiksme būtu patiesa! Dažādi burti apzīmē dažādus ciparus.

$$\begin{array}{cccccc} & & B & D & C & E \\ + & & B & D & A & E \\ \hline & A & E & C & B & E \end{array}$$

P1.3.7. Diagonāles

Uzzīmē tādu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas savā starpā!

Piezīme. Divi nogriežņi krustojas, ja tiem ir tieši viens kopīgs punkts, kas nav galapunkts nevienam no šiem abiem nogriežņiem. Diagonāles nedrīkst pārklāties savā starpā. Par diagonāli sauc nogriezni, kas savieno divas daudzstūra virsotnes un kas nav šī daudzstūra mala.

P1.3.8. Šaha zirdziņi

Kāds ir lielākais šaha zirdziņu skaits, ko var uzlikt uz 8×8 šaha galdiņa tā, lai zirdziņi viens otru neapdraud?

Ceturtā nodarbība

P1.4.1. Miķeļa brīvdienas

Kaķa Miķeļa saimnieki aizbrauca atvaļinājumā uz 32 dienām, atstājot viņam katrai dienai trauciņu ar piena pulveri. Miķelis zināja, ka saimnieki ir nevīžīgi un sadalījuši pulveri nevienādās daļās. Par laimi viņš bēniņos atrada brīnumtrauku, kurā, ieberot pulveri no divām dažādām dienām paredzētiem trauciņiem, tas katrā no šiem trauciņiem ieber atpakaļ pusi no iebērtā piena pulvera. Kā ar šī brīnumtrauka palīdzību Miķelim garantēt sev vienādu piena daudzumu katru dienu? (Brīnumtraukā vienā reizē var iebērt pulveri tieši no diviem trauciņiem.)

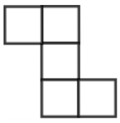
P1.4.2. Starpbrīdis

Juris uzrakstīja uz tāfeles kvadrātvienādojumu $x^2+ax+b=0$. Andris aprēķināja šī vienādojuma saknes *c* un *d*, nodzēsa Jura vienādojumu un tā vietā uzrakstīja vienādojumu $x^2+cx+d=0$. Izrādījās, ka Andra vienādojuma saknes ir skaitļi *a* un *b*. Pēc tam Juris nodzēsa Andra vienādojumu. Vai skolotāja, zinot tikai šos faktus un to, ka neviens no skaitļiem *a, b, c* un *d* nav nulle, var precīzi noteikt, kādi divi vienādojumi bija uzrakstīti?

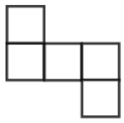
P1.4.3. Iesprostotās figūras

Uzzīmē 12 dažādas figūriņas, kas katra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiņiem ar izmēriem 1×1. Pie tam kvadrātiņiem jāsaskaras pa veselu malas garumu. Piemēram, der 47. att. figūra. Figūras, kas iegūstamas viena no otras ar pagriešanu vai atspoguļošanu, ir vienādas. Piemēram, 47. att. redzamā figūra ir vienāda ar 48. att. figūru.

Vai ir iespējams no šīm 12 figūrām, katru izmantojot tieši vienu reizi, vienlaicīgi izveidot divus taisnstūrus ar izmēriem 4×5 un 4×10?



47. att.



48. att.

P1.4.4. Pilnīgie skaitļi

Par naturāla skaitļa *n* faktoriālu (apzīmē *n*!) sauc visu naturālo skaitļu no 1 līdz *n* reizinājumu: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot n$. Par *pilnīgu* skaitli sauc tādu naturālu skaitli, kurš ir vienāds ar visu savu pozitīvo dalītāju summu (izņemot pašu skaitli *n*). Piemēram, 28 ir pilnīgs skaitlis, jo $28=1+2+4+7+14$. Atrodi visus tādus naturālus skaitļus *n,* ka *n*! ir pilnīgs skaitlis!

P1.4.5. Sacensības

Četras meitenes – Anna, Beāte, Cilda un Dace – četras reizes sacentās skriešanā. Katrā skrējienā viena meitene uzvarēja, bet trīs zaudēja. Pēc katra skrējiena uzvarētāja no katras zaudētājas saņēma tik cepumu, cik viņai jau bija pirms skrējiena. Beigās Annai bija 8 cepumi, Beātei bija 10 cepumi, Cildai bija 8 cepumi, Dacei bija 7 cepumi. Cik cepumu katrai meitenei bija sākumā?

P1.4.6. „Ansītis & Co”

Firmas *„Ansītis & Co”* galvenais īpašnieks Ansis savas firmas *n* priekšniekiem ir uzdevis savā starpā sadalīt gada ienākumus – 10 000 latu. Tā kā viņi ir ļoti gudri, Ansis nolēma, ka tas darāms pēc šāda principa:

- pirmais priekšlikumu piedāvā priekšnieks ar viszemāko amatu;
- pēc tam notiek balsošana – visi priekšnieki, ieskaitot to, kurš izvirzījis priekšlikumu, balso „piekrītu” vai „nepiekrītu”;
  - ja balsojumā ir neizšķirts, tad šī priekšlikuma izvirzītāja balsi neņem vērā;
  - ja priekšlikumam piekrīt vairākums, tad ienākumu sadalījums ir nolemts un sēdi var slēgt;
  - ja priekšlikumu noraida vairākums, tad priekšlikuma izvirzītāju atlaiž no darba;
- nākamais priekšlikumu izvirza priekšnieks ar otru zemāko amatu, un balsošana norit pēc tāda paša principa, līdz darbā palikušie priekšnieki ir vienojušies.

Jāņem vērā, ka Anša firmas priekšniekiem ir šādas prioritātes:

1) pirmā prioritāte viņiem ir saglabāt savu darbu;
2) otrā prioritāte ir nauda – tie centīsies darīt visu iespējamo, lai iegūtu vairāk;
3) trešā prioritāte – atlaist no darba pēc iespējas vairāk konkurentu.

Kāds priekšlikums ir jāizdomā un jāpiedāvā priekšniekam ar viszemāko amatu, lai viņš saglabātu darbavietu un iegūtu pēc iespējas lielākus ienākumus, ja **a)** $n=3$; **b)** $n=5$?

P1.4.7. Mājiņas

Arhitekte Grieta uzprojektēja māju kompleksu, kurš sastāv no 5×5 māju režģa (skat. 49. att.). Katrs cipars režģī apzīmē mājas stāvu skaitu. Cipari režģa malās apzīmē to, cik mājas var redzēt no šī skatupunkta, piemēram, ar izcelto bultiņu apzīmētajā skatupunktā var redzēt tikai divas mājas – ar augstumu 4 stāvi un 5 stāvi, jo pārējās ir „noslēpušās” aiz šīm mājām.

	3 ↓	2 ↓	3 ↓	2 ↓	1 ↓	
5 →	1	2	3	4	5	← 1
2 →	2	5	1	3	4	← 2
1 →	5	1	4	2	3	← 3
2 ⟶	4	3	5	1	2	← 2
3 →	3	4	2	5	1	← 2
	↑ 3	↑ 2	↑ 2	↑ 1	↑ 5	

49. att.

	2 ↓	2 ↓	1 ↓	3 ↓	3 ↓	
2 →						← 2
2 →						← 2
3 →						← 2
1 →						← 5
3 →						← 1
	↑ 2	↑ 3	↑ 4	↑ 2	↑ 1	

50. att.

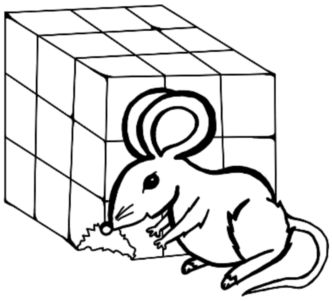
Šobrīd Grieta strādā pie jauna projekta – cepumu rūpnīcas. Mums par šo projektu ir zināms vienīgi tas, ko var ieraudzīt 50. att. Parādi vienu piemēru, kā varēja izskatīties projekts, ja zināms, ka katrā rindā un katrā kolonnā nav divu māju ar vienādu stāvu skaitu!

P1.4.8. Dīvainie nogriežņi

Ja plaknē uzzīmēti pieci punkti *A, B, C, D* un *E,* tad var novilkt 10 nogriežņus, kam abi gali ir šajos punktos: *AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE*. Uzzīmē šos piecus punktus tā, lai četri no nogriežņiem būtu ar garumu *a*, trīs – ar garumu *b*, divi – ar garumu *c* un pēdējais – ar garumu *d* tā, ka $a\neq b\neq c\neq d$! Nekādi trīs punkti nedrīkst atrasties uz vienas taisnes. *Zīmējumu pamato ar spriedumiem!*

Piektā nodarbība

P1.5.1. Siera klucīši



Siera klucis sagriezts $3\times3\times3$ mazākos siera klucīšos. Pelīte sāk ēst sieru no viena stūra. Apēdot vienu siera klucīti, tā turpina ēst kādu no blakusesošajiem klucīšiem, līdz visi klucīši ir apēsti. Vai vidējo klucīti pelīte var apēst kā pēdējo?

Piezīmes. Blakusesoši klucīši ir tādi, kuriem ir viena kopīga skaldne. Pelīte var ķerties pie nākamā klucīša tikai tad, kad iepriekšējais ir pilnībā apēsts.

P1.5.2. Starpbrīdis

Juris rindā uzrakstīja vairākus vieniniekus. Andris starp jebkuriem diviem vieniniekiem drīkst ievietot “$+$” vai “$-$” zīmi, vai arī zīmi nerakstīt un atstāt vietu starp abiem vieniniekiem tukšu. Šādi rīkojoties, Andris iegūst kādu skaitli.

Piemēram, ja Juris uzraksta sešus vieniniekus, tad, ievietojot divas darbību zīmes, Andris var iegūt skaitli 101: $111+1-11=101$.

Vai Andrim ir iespējams iegūt skaitli 2014, ja Juris uzraksta deviņpadsmit vieniniekus un liek ievietot **a)** sešas; **b)** septiņas uzdevumā atļautās darbību zīmes?

P1.5.3. Matemātiķu valsts

Kādā valstī ir divi īpaši rajoni: Pirmais un Otrais. Zināms, ka Pirmajā rajonā ir četri ciemi A, B, C un D. Attālums starp jebkuriem diviem Pirmā rajona ciemiem (izņemot A un C) ir 3 km. Otrajā rajonā ir divi ciemi E un F, kuri ir 2 km attālumā viens no otra. Zināms, ka attālums starp D un E ir 4 km, bet attālums starp C un F ir 9 km. Otrajā rajonā uzbūvēja vēl vienu ciemu G, kas no abiem pārējiem Otrā rajona ciemiem atrodas 1 un 3 km attālumā. Kāds ir attālums no A līdz G, ja G ir tuvāk Pirmā rajona ciemiem, nekā jebkurš cits Otrā rajona ciems?

P1.5.4. Trīs dīvainas kastes

Ir trīs kastes, katrā no tām ir tieši 20 augļi. Vienā ir tikai bumbieri, otrā tikai āboli, savukārt trešajā ir gan bumbieri, gan āboli. Uz katras kastes ir viens no uzrakstiem: „bumbieri", „āboli", „bumbieri un āboli". Visi uzraksti ir dažādi un neviens neatbilst tam, kas patiesībā atrodas kastē. Kāds ir mazākais skaits augļu, kas jāizvelk, lai noskaidrotu, kādi augļi atrodas katrā kastē? *Savu atbildi pamato!*

P1.5.5. Sistēma

Atrisināt vienādojumu sistēmu!

$$\begin{cases} x = yzt \\ x + y = zt \\ x + y + z = t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

P1.5.6. Trijstūru konstruktors

Taisnstūra $ABCD$ iekšienē izvēlēts patvaļīgs punkts M. Pierādi, ka no nogriežņiem MA, MB, MC, MD var izvēlēties trīs nogriežņus un no tiem salikt trijstūri!

P1.5.7. Pazaudētie pirmskaitļi

Zināms, ka skaitļi a, b, $a-b$ un $a+b$ ir pirmskaitļi. Atrodi visus iespējamos skaitļus a un b un pamato, ka citu vērtību nav!

P1.5.8. Nagliņas un striķīši

Uz dēlīša ir sadzītas n naglas, katras divas naglas ir savienotas ar auklīņu. Katra auklīņa ir izkrāsota vienā no n krāsām. Katrām 3 dažādām krāsām var atrast 3 naglas, kuras savienotas ar šādu krāsu auklīņām. Vai var gadīties, ka **a)** $n=5$; **b)** $n=7$?

Sestā nodarbība

P1.6.1. Viesību sarunas

Kaķis Miķelis aizbrauca uz ģimenes saietu. Tur viņš satika savus brāļus Striķeli un Niķeli. Ir zināms, ka visi brāļi šodien ir apēduši vienādu daudzumu peļu no 10 līdz 20 (10 un 20 ieskaitot), kā arī tas, ka Miķelis un Niķelis vienmēr saka patiesību, bet Striķelis vienmēr melo.

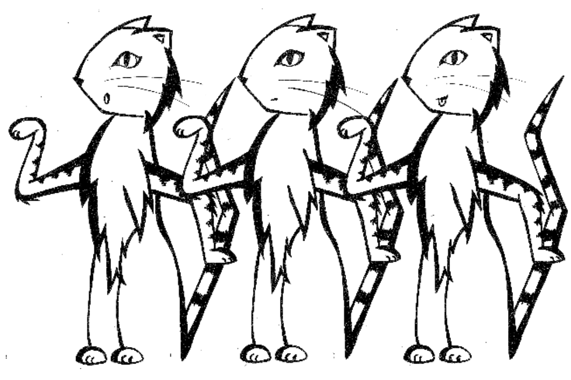
Sagadījies, ka Tu satiec divus no viņiem un jautā: „Cik peļu šodien esi apēdis?"

Viens atbild: „Esmu apēdis 10 līdz 19 peles (10 un 19 ieskaitot)."

Otrs saka: „Esmu apēdis 11 līdz 20 peles (11 un 20 ieskaitot) un viens no mums šobrīd melo."

Cik peļu šodien ir apēdis katrs kaķis?

Piezīme. Pēc izskata Tu neproti atšķirt šos trīs kaķus.



P1.6.2. Cepumu izklaides

Uz galda sākotnēji ir 100 cepumi. Anna un Kārlis spēlē spēli, katrā gājienā secīgi paņemot dažus cepumus. Spēles noteikumi ir šādi:

- ja tieši pirms gājiena izdarīšanas uz galda ir n cepumi, tad spēlētājs drīkst paņemt k cepumus, kur k ir skaitļa n dalītājs;
- nevienā gājienā nedrīkst paņemt visus uz galda esošos cepumus.

Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais var paņemt cepumu. Pirmo gājienu izdara Anna. Kurš no abiem spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar?

P1.6.3. Palīdzi Gliemezim!

Gliemezis atrodas pļavā, kurā ir gara zāle. Pļavai ir mala, kura ir taisna līnija. Gliemezis zina, ka atrodas 50 cm no malas, bet nezina, kurā virzienā viņam jāiet, lai šo malu sasniegtu. Pieņemsim, ka Gliemezis var pārvietoties pa jebkuras formas trajektoriju, kādu viņš izvēlas. Izdomā, kā Gliemezim rīkoties, lai garantēti izkļūtu no pļavas, noejot ne vairāk kā **a)** 4 m; **b)** 3,5 m !

Piezīme. Garajā zālē Gliemezis spēj redzēt malu tikai tad, kad jau nonācis pie tās.

P1.6.4. Ojāra meistarstiķis

Ojārs gribēja pārsteigt radus un nodemonstrēt viņiem burvju triku. Viņš palūdza māsai iedomāties piecus skaitļus (ne obligāti dažādus) un pateikt viņam visas desmit summas, ko iegūst, saskaitot katrus divus no iedomātajiem skaitļiem. Ojāra mērķis ir pateikt, kādus skaitļus iedomājās māsa. Vai viņš var šo triku īstenot? *Ja var, tad parādi, kā, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!*

P1.6.5. Dārgās ledenes

Eds, Edis un Edijs ir saldumu veikalā. Tur ir sešas apaļas ledenes: 2 baltas, 2 zaļas un 2 sarkanas. Viņiem ir nauda tikai trīs ledenēm, turklāt Edijs zina, ka no katra vienas krāsas pāra viena ledene ir smagāka, otra – vieglāka, kā arī to, ka visas vieglākās sver vienādi un arī visas smagākās sver vienādi. Pēc izskata vienādo krāsu ledenes atšķirt nevar. Pārdevējs viņiem atļauj izdarīt divas svēršanas uz sviras svariem bez atsvariem. Kādas svēršanas jāizdara, lai zēni uzzinātu, kuras ir smagākās ledenes?

P1.6.6. Starpbrīdis

Andris un Juris brīvajā brīdī centās noskaidrot divas lietas.

a) Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem?

b) Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem divciparu nepāra skaitļiem?

Palīdzi puišiem atrast atbildi un pamato to!

P1.6.7. Pirmskaitļu ģeometrija

Dots 17° liels leņķis. Kā tikai ar cirkuļa un lineāla palīdzību sadalīt to 17 vienādās daļās?

P1.6.8. Komandējumā

Profesors Cipariņš atrodas uz 400 metrus augstas klints; 200 m virs zemes klintī atrodas platforma, uz kuras viņš var stāvēt. Viņam ir 300 m gara virve. Kā viņam tikt lejā?

Piezīme. Profesors prot siet mezglus un viņam ir nazis, ar kuru var pārgriezt virvi. Vienīgais veids, kā var tik lejā, ir laižoties pa atbilstoša garuma nostiprinātu virvi. Nostiprināt virvi viņš var tikai vietās, kur viņš var nostāvēt.

Sagatavošanās olimpiāde

5. klase

S1.5.1. Ziemassvētku vecītim ir 2013 šokolādes tāfelītes. Tās jāsaliek kastītēs vai nu pa 3, vai pa 4 katrā kastītē. Kurā gadījumā būs nepieciešams vairāk kastīšu – ja visās kastītēs liek tieši 3 šokolādes tāfelītes vai arī visās liek tieši 4 šokolādes tāfelītes? Par cik vairāk?

S1.5.2. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?

S1.5.3. Sivēntiņš var iet ciemos tikai tad, ja Vinnijs Pūks viņu pavada. Vinnijs Pūks var iet ciemos tikai tad, ja viņu pavada Pūce vai Tīģerītis, bet Pūce – ja viņu pavada Tīģerītis. Vai visi minētie dzīvnieki varēs aiziet ciemos pie Rū, ja zināms, ka Tīģerītim pavadonis nav nepieciešams? Sākumā katrs dzīvnieks atrodas savā mājiņā, kurā dzīvo viņš viens pats.

S1.5.4. Sauksim naturālu skaitli par *interesantu*, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars ir vienāds ar visu citu ciparu summu.

a) Kāds ir mazākais *interesantais* četrciparu skaitlis?

b) Kāds ir lielākais *interesantais* skaitlis?

S1.5.5. Tālajā pasaku zemē saskaitīšanu un reizināšanu apzīmē ar $*$ un $\circ$ (nav zināms, kuru darbību ar kuru simbolu). Ar *a, b, c, d* ir apzīmēti dažādi cipari, kas nav nulle. Karalis apgalvo, ka vienādības

$$a * a = a;$$

$$b \circ a = c;$$

$$b * c = d$$

ir patiesas. Kāda var būt izteiksmes $(a * b)\circ(c * d)$ vērtība?

6. klase

S1.6.1. Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.

S1.6.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām. Cik ir taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu malām?

S1.6.3. Parādi, ka 4 stari var sadalīt plakni 2; 3; 4; 5; 6; 7 daļās!

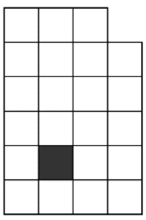
S1.6.4. Rindā stāv 2013 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā taisnību, vai vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: “No manis pa labi stāv vismaz viens melis”. Cik starp rūķīšiem ir meļu?

S1.6.5. Aija, Maija, Paija un Kaija kopā apēda 40 konfektes (katra – vismaz vienu). Aija un Maija kopā apēda 25 konfektes, Paija apēda vairāk konfekšu nekā jebkura cita meitene. Cik konfekšu apēda Kaija?

7. klase

S1.7.1. Cik dažādos veidos var izvēlēties veselus skaitļus *a* un *b* tā, ka $|a|+|b|<6$?

S1.7.2. Sagriez 51. att. figūru divās vienādās daļās (iekrāsotā rūtiņa ir caurums)! Par vienādām uzskatāmas arī tādas figūras, kuras var iegūt vienu no otras „apgāžot otrādi”.



51. att.

S1.7.3. Vai var atrast tādus trīs naturālus skaitļus a, b un c, ka $(a+b)(b+c)(c+a)=20142013$?

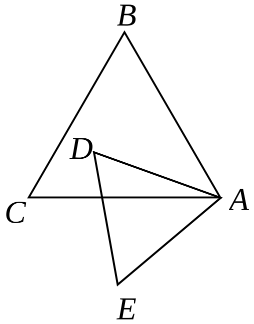
S1.7.4. Dotas astoņas pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām septiņas ir ar vienādu masu, bet vienas monētas masa ir citāda. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar trīs svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

S1.7.5. Konferencē piedalījās 17 zinātnieki. Katrs no viņiem konstatēja, ka konferencē vismaz 8 zinātnieki ir viņa radinieki. Pierādi, ka visi 17 zinātnieki ir radinieki!

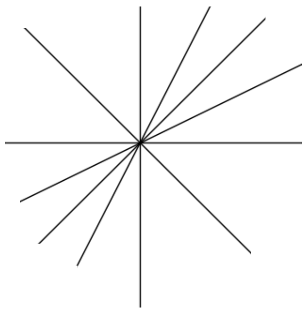
8. klase

S1.8.1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 2, vai par 3?

S1.8.2. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir $60°$ lieli (skat. 52. att.). Pierādi, ka $BD=CE$!



52. att.



53. att.

S1.8.3. Haotiskais profesors no somas izvelk caurspīdīgu kodoskopa plēvi, uz kuras ir 53. att. dotais zīmējums. Viņš zina, ka no attēlotajām taisnēm divas ir koordinātu asis, bet pārējās ir funkciju $y=2x,\ y=x,\ y=-x,\ y=\frac{1}{2}x$ grafiki. Profesors ir aizmirsis, kuras ir asis, kā arī kura ir plēves augšpuse. Par kurām funkcijām noteikti var pateikt, kurš no dotajiem ir tās grafiks?

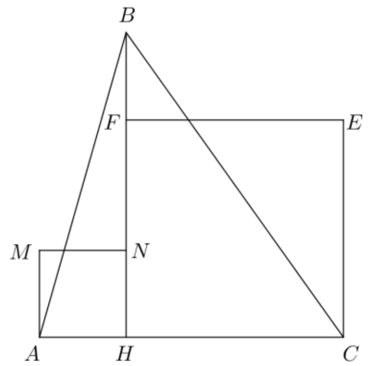
S1.8.4. Ar $\overline{xyz}$ apzīmēsim trīsciparu skaitli ar cipariem x (simti), y (desmiti) un z (vieni). Pierādi, ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca}+\overline{cab}$ dalās ar 37.

S1.8.5. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi. Pierādi: vai nu ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi!

9. klase

S1.9.1. Pierādīt, ka $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}=\frac{9}{10}$.

S1.9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BH. Zināms, ka $AC=BH$ un četrstūri $AMNH$ un $HCEF$ ir kvadrāti (skat. 54. att.) Pierādīt, ka taisnes AE, CM un BH krustojas vienā punktā!



54. att.

S1.9.3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a+b=210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

S1.9.4. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a+b$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordinātu dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu a, vai b.

S1.9.5. Vairākās kaudzēs kopā ir n konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras divas kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).

Vai taisnība, ka visas konfektes var apvienot vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja a) $n=64$, b) $n=100$?

Novada olimpiāde

5. klase

N1.5.1. Uz rūtiņu lapas uzzīmēti divi taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas un saskaras pa vesela skaita rūtiņu malām, un veidojas daudzstūris no 6 rūtiņām, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katrs no taisnstūriem var būt novietots vertikāli vai horizontāli. Kāds var būt iegūtās figūras perimetrs? *Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, kāpēc citu nav!*

N1.5.2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu *PĀRSTEIGUMS*. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Nosaki, kurš cipars aizstāts ar burtu *S*! *Atbildi pamato!*

N1.5.3. No četrciparu skaitļa *A* atņemot trīsciparu skaitli *B*, iegūst 8002. Šos pašus skaitļus *A* un *B* saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrodi *A* un *B*!

N1.5.4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams cipars 7?

N1.5.5. Doti 99 punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet nepāra skaits nogriežņu?

6. klase

N1.6.1. Atrodi vienu tādu skaitli *a*, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:
a) noapaļojot a, $3\cdot a$, $5\cdot a$, $7\cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;
b) noapaļojot $2\cdot a$, $4\cdot a$, $6\cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

N1.6.2. Rūtiņu lapā uzzīmē figūru, kuras malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sadalīt četrās daļās tā, ka katra daļa sastāv no veselām rūtiņām un katra daļa saskaras ar katru citu daļu vismaz pa vienas rūtiņas malu. Vai prasītās figūras laukums var būt mazāks nekā 10 rūtiņas?

N1.6.3. Pareizā vienādībā $4\cdot 4=16$ var katru ciparu izmainīt tieši par 1 un atkal iegūt pareizu vienādību $5\cdot 5=25$. Atrodi
a) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli,
b) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, pie tam sākotnējā vienādībā ir vismaz četri dažādi cipari!

N1.6.4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams vismaz viens no cipariem 3 vai 7?

N1.6.5. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 20. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis. Vai uz tāfeles var palikt skaitlis **a)** 0; **b)** 1?

7. klase

N1.7.1. Dots vienādojums

$$\square\cdot x+\square=\square$$

Ariadne vienā (jebkurā) rūtiņā ieraksta vienu skaitli, pēc tam Eleonora citā rūtiņā ieraksta vienu skaitli un beidzot Ariadne ieraksta skaitli atlikušajā tukšajā rūtiņā. Pierādi, ka Ariadne var panākt jebkuru no trim situācijām:

a) vienādojumam ir tieši viens atrisinājums;
b) vienādojumam nav atrisinājumu;
c) vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

(Spēles sākumā jau zināms, kura situācija jāiegūst.)

N1.7.2. Uz taisnā leņķa *KLM* malām atlikti punkti *X* un *Y* (katrs uz savas malas); uz tā bisektrises ņemts tāds punkts *O*, ka $\angle XOY=90°$. Pierādi, ka $OX=OY$!

N1.7.3. Cik starp pirmajiem 2014 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu *x*, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87?

N1.7.4. Uz ballīti ieradās N ($N>1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Izrādījās, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti atšķirīgi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no ballītes apmeklētājiem ir kļūdījies.

N1.7.5. Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 81 rūtiņu stūriem ir autobusu pietura; citu pieturu nav. Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos? Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.

8. klase

N1.8.1. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a\neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izteikt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

N1.8.2. Taisnstūra *ABCD* diagonāle *BD* ir taisnstūra *BDEF* mala, punkts *C* atrodas uz *EF*. Malas *BC* viduspunkts ir *G*. Pierādīt, ka $AG=EG$.

N1.8.3. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars?

N1.8.4. Uz ballīti ieradās N ($N>1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Vai var būt, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti nepāra skaitļi, ja **a)** $N=2014$, **b)** $N=2401$?

N1.8.5. Trijstūra virsotnes atrodas kvadrātiska rūtiņu režģa punktos. Pierādīt, ka kāda no trijstūra malām iet vai nu caur kādu citu rūtiņu režģa punktu, vai kādas rūtiņas centru.

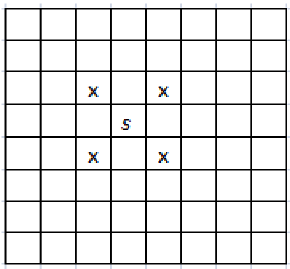
9. klase

N1.9.1. Vai vienādojumam $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ ir atrisinājums, ja *a* un *b* ir dažādi skaitļi?

N1.9.2. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, taisnstūra perimetrs ir par 8 mazāks nekā tā laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus!

N1.9.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc+3a+3b=7bc+7$.

N1.9.4. Figūra „*sienāzis*" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat. 55. att., kur s – *sienāzis*, x – rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz 8×8 rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu *sienāzi* (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?



55. att.

N1.9.5. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1, punkts *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu!

Valsts olimpiāde

9. klase

V1.9.1. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\frac{2014}{x}$, ja $x>0$?

V1.9.2. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo locekļu summu. Cik starp virknes pirmajiem **a)** 100, **b)** 2014 locekļiem ir tādi, kas dalās ar 5?

V1.9.3. Taisnleņķa trijstūra *ABC* taisnais leņķis ir *A*. Punkts *X* ir no *A* pret *BC* vilktā augstuma pamats. Nogriežņa *XC* viduspunkts ir *Y*. Uz malas *AB* pagarinājuma izvēlēts punkts *D* tā, ka $AB=BD$. Pierādīt, ka $DX \perp AY$!

V1.9.4. Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

a) Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm!

b) Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk nekā viens diplomāts!

V1.9.5. Atrast vienādojuma $(x^2+5x-7)^2-2(x^2+5x-6)-4=0$ sakņu kubu summu!

Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

A1.5.1. Pūkainīšu ciemata bērniem Lieldienu zaķis atnesa olas. Katra no tām bija nokrāsota tieši vienā no krāsām – sarkanā, dzeltenā, zilā. Zināms, ka 20% jeb 40 olas bija sarkanas, $\frac{3}{4}$ no atlikušajām bija dzeltenas, bet pārējās – zilas.

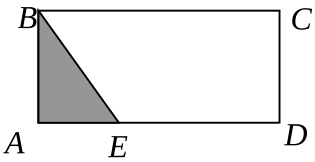
a) Cik olas bija zilā krāsā?

b) Kāda daļa no visām olām bija zilas?

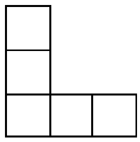
c) Cik procenti no visām olām bija dzeltenas?

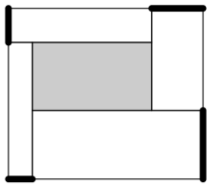
A1.5.2. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 2, 3, 7 un 8. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

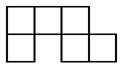
A1.5.3. Taisnstūra *ABCD* malu garumi izsakāmi veselos centimetros. Iekrāsotās daļas laukums ir 6 cm^2 (skat. 56. att.). Nogrieznis *AE* ir $\frac{1}{3}$ no taisnstūra malas *AD*. Aprēķini taisnstūra laukumu un perimetru, ja zināms, ka viena taisnstūra mala ir par 5 cm garāka nekā otra mala!



56. att.


57. att.


58. att.


59. att.

A1.5.4. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 57. att. dotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?

A1.5.5. Kāds ir **a)** mazākais, **b)** lielākais skaitlis, kuru var izteikt gan kā trīs, gan kā divu dažādu divciparu naturālu skaitļu reizinājumu?

6. klase

A1.6.1. Klementīne ar trīs savām draudzenēm brīvdienās gāja makšķerēt. Tētis viņai atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas. 60% no savas daļas viņa atdeva vienai draudzenei, 50% no atlikušās daļas – otrai draudzenei un $\frac{2}{3}$ no atlikušās auklas – trešajai draudzenei. Beigās Klementīnei pašai palika 1 metrs makšķerauklas. Cik gara bija makšķeraukla pašā sākumā?

A1.6.2. Vai skaitļus no 1 līdz 100 var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?

A1.6.3. Ķērpjbārdis aizsūtīja Puszābaku uz veikalu pēc 3 ksilofoniem, 20 mikrofoniem un viena patafona. Puszābaks atgriezās, nopircis 20 ksilofonus, vienu mikrofonu un 3 patafonus, pie tam viņš bija iztērējis tieši tik daudz naudas, cik būtu izdevis, ja būtu nopircis to, ko Ķērpjbārdis viņam lūdza. Zināms, ka patafons ir lētāks nekā ksilofons. Kas ir dārgāks – ksilofons vai mikrofons? *Atbildi pamato!*

A1.6.4. Kvadrāts, kura malas garums ir 4 m, sagriezts taisnstūros, kā parādīts 58. att. Četru izcelto nogriežņu garumu summa ir 2 m. Aprēķini iekrāsotā taisnstūra perimetru!

A1.6.5. Rūtiņu kvadrātā 5×5 iekrāso iespējami maz rūtiņu tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu 59. att. redzamo figūru (tā var būt gan pagriezta, gan apgāzta)! *Pamato, ka iekrāsoto rūtiņu skaits ir mazākais iespējamais!*

7. klase

A1.7.1. Trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD* un mediāna *BE*. Kāds var būt *AC* garums, ja $ED = 4$ cm un $DC = 5$ cm?

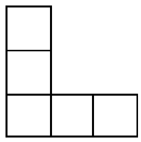
A1.7.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus *a* un *b*, kuriem izpildās vienādība $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b = 7654321$?

A1.7.3. Lelde apgalvo, ka sešas skrūves ir smagākas nekā septiņas naglas, bet Elīna apgalvo, ka septiņas skrūves ir smagākas nekā astoņas naglas. Zināms, ka vienai no meitenēm ir taisnība, bet otra kļūdās. Vai tiesa, ka 18 skrūves ir smagākas nekā **a)** 20 naglas, **b)** 21 nagla, **c)** 22 naglas? Visām skrūvēm masa ir vienāda, visām naglām arī.

A1.7.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 60. att.). Kādam skaitlim jābūt rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi? *Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, ka citu nav!*

	24	
		?
13		

60. att.



61. att.

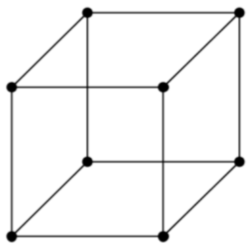
A1.7.5. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāizgriež no kvadrāta ar izmēriem 6×6 rūtiņas, lai no atlikušās daļas nevarētu izgriezt nevienu 61. att. parādīto figūru? (Figūru malām jāiet pa rūtiņu līnijām.)

8. klase

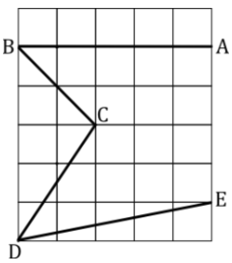
A1.8.1. Skaitli $\dfrac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

A1.8.2. Atrodi visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1 000 000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 15 reizes!

A1.8.3. Astoņi punkti savienoti ar šķautnēm kā kuba karkass (skat. 62. att.). Pierādi, ka, izvēloties jebkurus 5 punktus, tie noteikti būs savienoti ar vismaz 3 šķautnēm!



62. att.



63. att.

	24	
?		

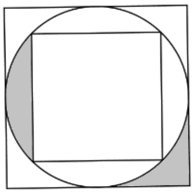
64. att.

A1.8.4. Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* un novilkti nogriežņi *AB*, *BC*, *CD* un *DE* (skat. 63. att.). Kurš no leņķiem $\angle ABC$ vai $\angle CDE$ ir lielāks?

A1.8.5. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis 24 (skat. 64. att.). Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis **a)** 7, **b)** 17 ?

9. klase

A1.9.1. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts (skat. 65. att.). Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!



65. att.

	6	
	?	
7		

66. att.

A1.9.2. Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 1276. Atrast dotos četrus ciparus!

A1.9.3. Trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi ABC. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un AM viduspunkti. Caur B, M un N vilktā riņķa līnija krusto malas AB un BC attiecīgi to iekšējos punktos P un Q. Zināms, ka $AC \| PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ vērtību!

A1.9.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 66. att.). Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?

A1.9.5. Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

2014./2015. mācību gads

Tik vai… Cik?

Pirmā kārta

T2.1.1. Aprēķini $242 - 42 \cdot 0 + 24 : (2 + 0 : 1 \cdot 4) =$

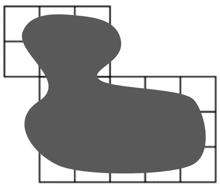
A 12 **B** 133 **C** 245 **D** 254 **E** cita atbilde

T2.1.2. Kāds skaitlis jāliek burta vietā, lai vienādība $24 : a = a : 6$ būtu patiesa?

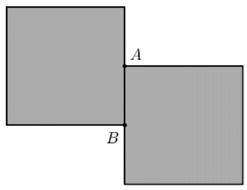
A 2 **B** 6 **C** 12 **D** 24 **E** nevar noteikt

T2.1.3. Helga uz lapas uzzīmēja figūru, kas sastāv no diviem taisnstūriem (skat. 67. att.), bet tad tai netīšam uzpilēja ievārījums. Nosaki, cik rūtiņu ir uzzīmētajai figūrai!

A 0 **B** 17 **C** 21 **D** cits skaits **E** nevar noteikt



67. att.



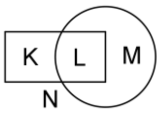
68. att.

T2.1.4. Aprēķini iekrāsotās figūras perimetru (skat. 68. att.), ja katra kvadrāta perimetrs ir 8 cm un kvadrātu kopīgās daļas *AB* garums ir puse no kvadrāta malas garuma.

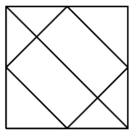
A 14 cm **B** 16 cm **C** 56 cm **D** 64 cm **E** cits variants

T2.1.5. Visi skaitļa 12 dalāmie atrodas taisnstūrī, bet visi skaitļa 12 dalītāji atrodas aplī (skat. 69. att.). Kurā lauciņā atrodas skaitlis 1?

A lauciņā K **B** lauciņā L **C** lauciņā M **D** lauciņā N **E** nevar noteikt



69. att.



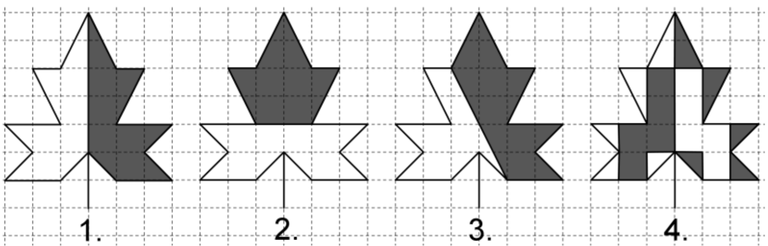
70. att.

T2.1.6. Cik trijstūri redzami 70. att.?

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** cits variants

T2.1.7. Kuros zīmējumos (skat. 71. att.) ir iekrāsota tieši $\frac{1}{2}$ no kļavas lapas?

A 1., 2., 3. **B** 1. **C** 1., 4. **D** 1., 2. **E** cits variants



71. att.

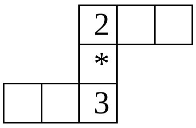
T2.1.8. Naturālie skaitļi x un y ir tādi, ka ir patiesa vienādība $3 \cdot x + 5 \cdot y = 21$. Kurš no dotajiem apgalvojumiem ir patiess?

A $x = 3$ un $y = 2$ **B** $y < 5$ **C** $x > 7$

D $x + y < 4$ **E** $x > y$

T2.1.9. Katrā rūtiņā (skat. 72. att.) jāieraksta tieši viens skaitlis no 1 līdz 7 tā, lai abās rindās un kolonnā ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Visiem rūtiņās ierakstītiem skaitļiem jābūt dažādiem. Kāds skaitlis atradīsies * vietā?

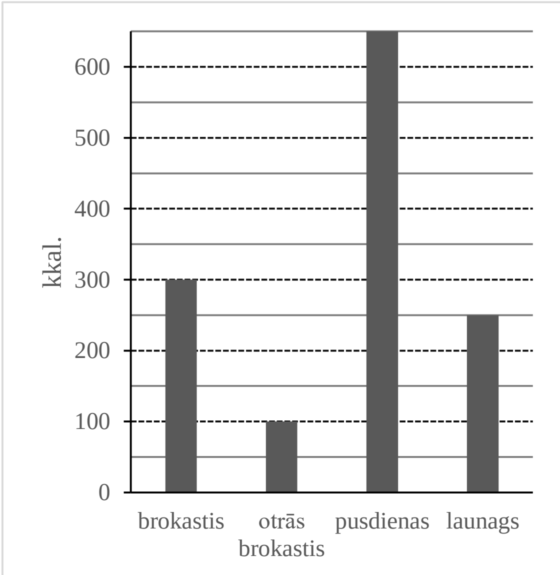
A 1 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7



72. att.

T2.1.10. Diagrammā attēlots trešdienā uzņemto kilokaloriju (kkal.) daudzums katrā bērnudārza ēdienreizē (skat. 73. att.). No diagrammas nosaki, cik kkal. tika uzņemts pavisam kopā!

A 1200 **B** 1300 **C** 1400 **D** cits skaits **E** nevar noteikt



73. att.

Otrā kārta

T2.2.1. Aprēķini!

$$20+15:(2\cdot 0+1+4)-(2+0:1+3)=$$

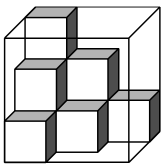
A 2 **B** 18 **C** 20
D cits skaitlis **E** nav iespējams aprēķināt

T2.2.2. Sniedzei ir 5 eiro. Viņa savām 5 draudzenēm katrai grib nopirkt šokolādi. Katra šokolāde maksā 80 centus. Par atlikušo naudu viņa sev plāno nopirkt dažas lielkonfektes, kas katra maksā 30 centus. Kāds ir lielākais skaits lielkonfekšu, ko viņa var nopirkt?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** cita atbilde

T2.2.3. Sarmim ir caurspīdīga mantu kaste, tās katras malas garums ir 3 dm (skat. 74. att.). Viņš kastē liek spēļu klucīšus, kuriem katras malas garums ir 1 dm. Attēlā redzams, cik klucīšus viņš jau ir salicis kastē. Cik klucīši Sarmim vēl jāieliek kastē, lai tā būtu pilna?

A 10 **B** 13 **C** 17 **D** 21 **E** 27

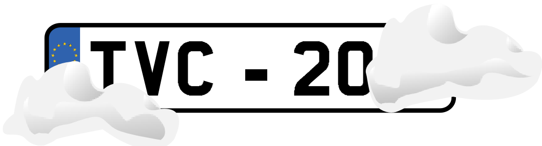


74. att.

T2.2.4. Skolas 4.a, 4.b un 4.c klases kabinetā katrā ir viena eglīte. Visās trīs eglītēs kopā skolēni ir sakāruši 60 konfektes. Kādā dienā kāds no 4.a klases eglītes bija apēdis 6 konfektes, no 4.b klases eglītes – 8 konfektes un no 4.c klases eglītes – 4 konfektes. Tagad visās eglītēs ir palicis vienāds skaits konfekšu. Cik konfektes bija iekārtas 4.b klases eglītē pašā sākumā?

A 14 **B** 20 **C** 22 **D** 52 **E** cita atbilde

T2.2.5. Sētā stāv automašīna, kuras numura zīmes pirmie divi cipari ir redzami, bet pēdējie divi ir aizputināti (skat. 75. att.). Kādi var būt šīs numura zīmes pēdējie divi cipari, ja zināms, ka visu ciparu summa ir 7.

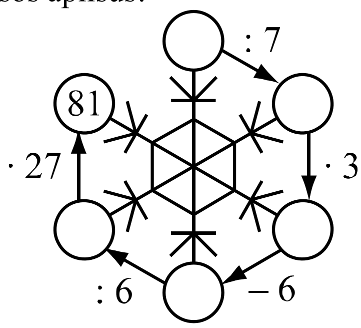


75. att.

T2.2.6. Aplītī ieraksti mazāko iespējamo skaitli, lai dotā nevienādība būtu patiesa.

$14 > 20 - \bigcirc$ $12 : \bigcirc < 5$

T2.2.7. Aizpildi visus 76. att. tukšos aplīšus!



76. att.

T2.2.8. Sarmai ir papīra lapa, kuras garums ir 20 cm un platums 14 cm. No katra lapas stūra viņa izgrieza kvadrātu, kura perimetrs ir 8 cm. Kāds ir iegūtās figūras perimetrs?

T2.2.9. Reiz satikās trīs mafijas bosi – Abudabs, Bugivugs un Cepelīns, lai apspriestu savus noziedzīgos nodomus. Uz tikšanos katrs bija uzvilcis savu mīļāko uzvalku – strīpainu, rūtainu vai aveņkrāsas. Neuzticoties nevienam, katrs no viņiem bija azotē paslēpis arī kādu no ieročiem: pistoli, dunci vai granātu. Ir zināms, ka

1) Pirmajam no mafijas bosiem, kam ir rūtains uzvalks, patīk liriskās dziesmas. Otrais no mafijas bosiem, kam azotē paslēpta granāta, ir īsāks par Abudabu.

2) Zem aveņkrāsas žaketes nav paslēpta pistole un pistole nav arī pie Cepelīna.

3) Abudaba mīļākais mūzikas žanrs ir Poļu polka un viņam nemaz nepatīk liriskā mūzika.

4) Cepelīns un Abudabs ciest nevar dzīvespriecīgas, košas vai gaišas krāsas. Viņu uzvalki ir tikai tumšos (melns, brūns, zils) toņos.

Noskaidro un ieraksti tabulā, kāds uzvalks ir katram mafijas bosam un kādu ieroci katrs no viņiem ir paslēpis azotē!

	Ierocis	Uzvalks
Abudabs		
Bugivuds		
Cepelīns		

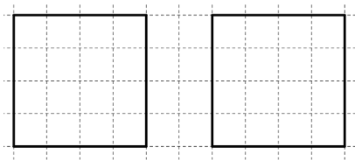
Trešā kārta

T2.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki centneros!

$$260\ kg - 4\ c : 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} t =$$

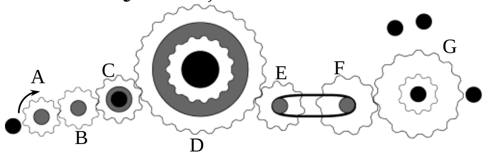
T2.3.2. Tirgū lielā mucā ir skābēti kāposti. Pilnas kāpostu mucas masa ir 144 kg. Kad pārdevēja iztirgoja trešdaļu no kāpostiem, tad mucas masa bija 104 kg. Kāda ir tukšas mucas masa?

T2.3.3. Vienu no 77. att. dotajiem kvadrātiem sadali 3 četrstūros un no tiem saliec vienu taisnstūri, kas nav kvadrāts! Otru kvadrātu sadali 3 trijstūros un no tiem saliec vienu taisnstūri, kas nav kvadrāts!



77. att.

T2.3.4. Uz kuru pusi griežas katrs zobrats (skat. 78. att.), ja zobrats A griežas pulksteņa rādītāju kustības virzienā? Tabulas atbilstošajā rūtiņā ievelc ✓!



78. att.

	A	B	C	D	E	F	G
Pulksteņa rādītāju kustības virzienā							
Pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam							

T2.3.5. Atrodi mazāko skaitli, kuru dalot gan ar 4, gan ar 7 atlikumā iegūst 3. *Pamato, ka atrastais skaitlis ir mazākais iespējamais!* (*Apskatām tikai naturālus skaitļus un 0.*)

T2.3.6. Uzraksti visus skaitļus, kuros nav citu ciparu kā tikai 2, 3, 4, 5, 6 un kuru ciparu summa ir 9! Cipari skaitlī nedrīkst atkārtoties. *Pamato, ka tiešām esi uzrakstījis visus iespējamos skaitļus!*

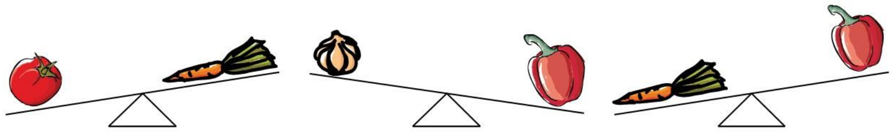
T2.3.7. Skolā pie sienas ir elektroniskais pulkstenis. Valentīnam stundas sākas plkst. 08:30 un beidzas plkst. 13:30. Cik minūtes šajā laikā skolas elektroniskajā pulkstenī bija redzams vismaz viens cipars 2?

Ceturtā kārta

T2.4.1. Nosaki burtu vērtības, ar kuru vienādības ir patiesas!

a) $x - (71 - 9) = 520$ **b)** $(9 + 7) \cdot y = 80$

T2.4.2. Kurš no 79. att. redzamajiem dārzeņiem (tomāts, burkāns, ķiploks, paprika) ir **a)** visvieglākais; **b)** vissmagākais?



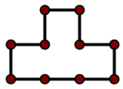
79. att.

T2.4.3. Salīdzini! (Tukšajos laucinos ieraksti >, < vai = !)

$p - 2 \ \square \ 1 + p$ $v \cdot 1 \ \square \ v : 1$

T2.4.4. Kristaps, remontējot mašīnu, atslēdza tās akumulatoru. Kad viņš to pieslēdza atpakaļ, mašīnas elektroniskais pulkstenis sāka skaitīt laiku no 00:00. Nākamajā dienā plkst. 20:07 elektroniskais pulkstenis rādīja 23:54. Cikos Kristaps pieslēdza atpakaļ akumulatoru?

T2.4.5. Zīmējumā redzamā figūra ir salikta no sērkociņiem (skat. 80. att.). Kāds ir lielākais skaits šādu figūru, ko var izveidot no 2015 sērkociņiem?

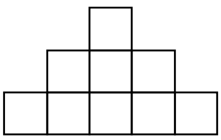


80. att.

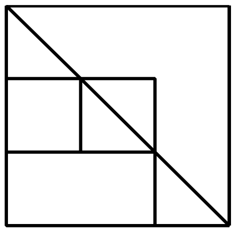
T2.4.6. Lieldienu rītā sešiem bērniem kopējais olu skaits bija 4*. Visiem bērniem bija vienāds skaits olu. Kāds cipars var būt * vietā? *Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!*

T2.4.7. Kravas mašīna nedrīkst pārvadāt vairāk kā 15 tonnas. Tai no rūpnīcas uz būvlaukumu ir jāaizved 4 betona bloki, kuru masas ir 6 t, 8 t, 8 t un 8 t. Kāds ir mazākais braucienu skaits no rūpnīcas uz būvlaukumu, kas mašīnai jāveic? *Pamato, kāpēc to nevar izdarīt ar mazāk braucieniem!*

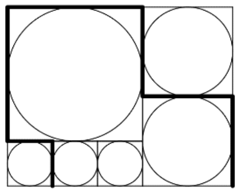
T2.4.8. Vitālijam ir zils un dzeltens aplītis. Viņš tos grib nolikt katru savā rūtiņā (skat. 81. att.) tā, lai zilais aplītis būtu par vienu rindu augstāk nekā dzeltenais aplītis (tiem ne obligāti jābūt vienam virs otra). Cik dažādos veidos Vitālijs to var izdarīt?



81. att.



82. att.



83. att.

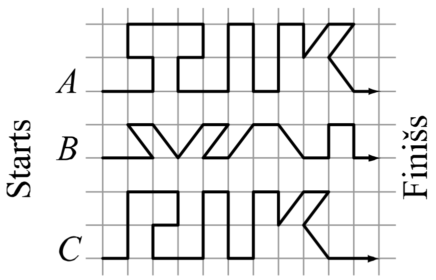
T2.4.9. Iekrāso $\frac{7}{18}$ no 82. att. dotā kvadrāta! Kāda daļa palika neiekrāsota? Cik m^2 palika neiekrāsoti, ja kvadrāta malas garums ir 6 m?

T2.4.10. Zīmējumā redzamas trīs dažāda izmēra riņķa līnijas (skat. 83. att.). Mazākās riņķa līnijas rādiuss ir 1 m. Cik metru gara ir biezā melnā līnija?

T2.4.11. Trīs gliemežu *A*, *B* un *C* maršruts no starta līdz finišam redzams 84. att. Gliemezis *A* maršrutu veica 101 minūtē, bet gliemezis *C* to izdarīja 95 minūtēs. Gliemeži pārvietojas vienādā ātrumā un pa vienas rūtiņas diagonāli tie pārvietojas 5 minūtes.

1) Aizpildi tabulu!

2) Cik minūtēs maršrutu veica gliemezis *B*?

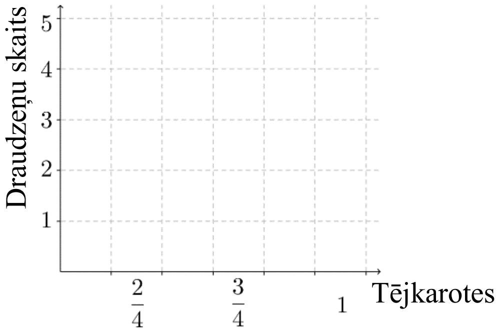


84. att.

Vienības	Vienību skaits gliemežu maršrutā		
	A	*B*	*C*
Horizontāli			
Vertikāli			
Pa diagonāli			

T2.4.12. Anita ar savām draudzenēm no vienādām krūzēm dzēra tēju. Anita tējai pievienoja $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura, Daiga – $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura, Inese – 1 tējkaroti cukura, Dace – $\frac{2}{4}$ tējkarotes cukura un Jana – $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura.

a) Attēlo dotos datus stabiņu diagrammā!



b) Cik daudz cukura tika piebērts visbiežāk?

c) Cik draudzenes piebēra tējai ne vairāk kā $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura?

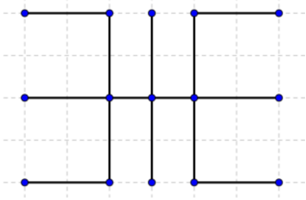
d) Cik daudz cukura tējai piebēra tā draudzene, kuras tēja bija vissaldākā?

Jauno matemātiķu konkurss

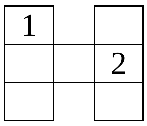
Pirmā kārta

J2.1.1. Saskaiti!

Saskaiti, cik 85. att. ir nogriežņu, kuru galapunkti ir dotie punkti! *Raksti ne tikai atbildi, bet arī risinājuma gaitu!*



85. att.



86. att.

87. att.

J2.1.2. No 1 līdz 7

Katrā rūtiņā (skat. 86. att.) jābūt ierakstītam vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 7 (katram vienu reizi) tā, lai skaitļu summas abās vertikālajās kolonnās un horizontālajā rindā būtu vienādas. Cik dažādos veidos to var izdarīt? *Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!*

J2.1.3. Trīsciparu skaitlis

Kāds ir mazākais trīsciparu skaitlis, kas nav ne pirmskaitlis, ne arī dalās ar 2, 3 vai 5? *Atrodi mazāko skaitli un pamato, ka tas tik tiešām ir mazākais iespējamais!*

J2.1.4. Taisnstūris

Vai taisnstūri, kura malu garumi ir 30 cm un 24 cm, var sagriezt divās vienādās figūrās tā, lai no tām var salikt citu taisnstūri, kura malu garumi ir 18 cm un 40 cm?

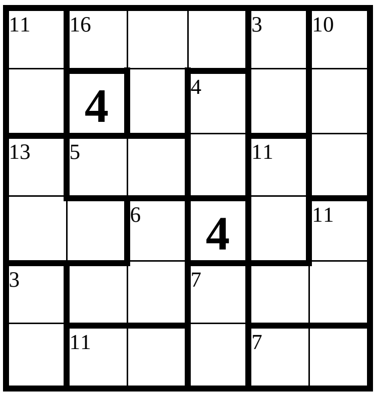
J2.1.5. Rudens lapa

Ilmai un Skaidrim ir četri krāsu zīmuļi: dzeltens, oranžs, sarkans un zaļš. Cik dažādos veidos viņi var izkrāsot 87. att. redzamo kļavas lapu, kas sadalīta 6 daļās, ja katrai daļai jābūt izkrāsotai tieši vienā no četrām dotajām krāsām un daļas, kam ir kopīga mala, jāizkrāso dažādās krāsās?

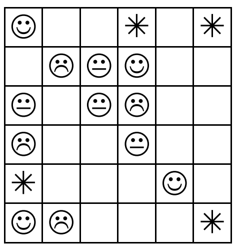
Otrā kārta

J2.2.1. Tabula

Aizpildi tabulas (skat. 88. att.) rūtiņas tā, lai katrā rindā un kolonnā būtu ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 6. Ar treknāku kontūru apvilktajās rūtiņās jāieraksta skaitļi tā, lai to summa būtu kreisajā augšējā stūrī norādītais skaitlis.



88. att.



89. att.

J2.2.2. Vai var sadalīt?

Vai 89. att. doto figūru var sadalīt četrās vienāda lieluma un vienādas formas daļās tā, lai katrā daļā būtu pa vienam no četriem simboliem ☺, 😐, ☹, ✳?

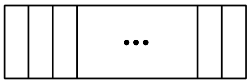
J2.2.3. Cik pirmskaitļu?

a) No cipariem 1, 2, 3, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi, izveidoja visus iespējamos trīsciparu skaitļus. Cik no šiem skaitļiem ir pirmskaitļi?

b) No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi, izveidoja visus iespējamos 362 880 deviņciparu skaitļus. Cik no šiem skaitļiem ir pirmskaitļi?

J2.2.4. Taisnstūris

Lielā taisnstūra perimetrs ir 300 cm. To sagrieza vairākos vienādos taisnstūros (skat. 90. att.). Katra mazā taisnstūra perimetrs ir 58 cm. Visu taisnstūru malu garumi ir naturāli skaitļi. Cik taisnstūros sagrieza lielo taisnstūri? Kādi ir lielā taisnstūra izmēri? *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



90. att.

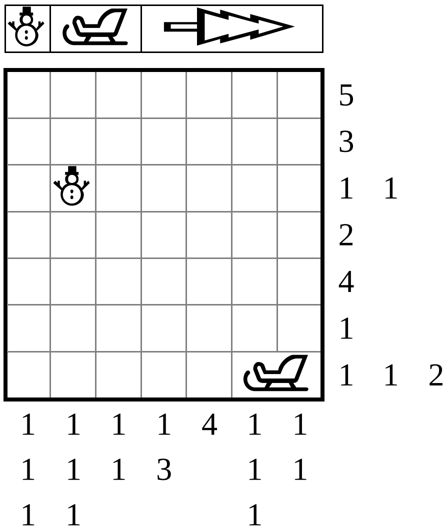
J2.2.5. Par vecmāmiņām

Kāda ciema visām vecmāmiņām patīk vismaz viena no trim nosauktajām nodarbēm – nūjošana, fanošana par hokeja klubu „Dinamo Rīga”, rausīšu cepšana. Ir zināms, ka nūjošana nepatīk 40 vecmāmiņām, fanošana par „Dinamo Rīga” nepatīk 42 vecmāmiņām, bet rausīšu cepšana nepatīk 45 vecmāmiņām. Visas trīs nodarbes patīk 8 vecmāmiņām, bet tikai viena nodarbe patīk 36 vecmāmiņām. Cik vecmāmiņu dzīvo šajā ciematā?

Trešā kārta

J2.3.1. Ziemassvētku vecīša pagalms

Skaitļi rūtiņu labajā pusē un apakšā norāda, cik pēc kārtas sekojošas rūtiņas ir aizpildītas katrā rindā un kolonnā (skat. 91. att.). Aizpildi rūtiņas, ja zināms, ka tajās pavisam kopā ir izvietotas 3 egles, 3 kamanas un 3 sniegavīri!



91. att.

J2.3.2. Sacīkšu ziemeļbrieži

Līdzīgi kā rallijā katrai mašīnai piešķir sacensību numuru, tā Ziemassvētku vecītis arī saviem ātrajiem rikšotājiem ziemeļbriežiem ir piešķīris numurus.

Ziemeļbriedis Rūdolfs zina, ka

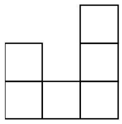
1) viņa numurs ir sešciparu skaitlis, kas vienādi lasāms gan no kreisās, gan no labās puses;
2) tas dalās ar 3;
3) nosvītrojot pirmo un pēdējo ciparu, iegūst četrciparu skaitli, kura visi pirmreizinātāji ir vienādi ar 11.

Kāds numurs var būt piešķirts Rūdolfam?

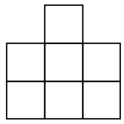
J2.3.3. Rūķīšu dāvanu krāvums

Rūķīši visas Ziemassvētku dāvanas salika vienādās kuba veida kastēs un sakrāva istabas vidū. Rūķītis Voldemārs skatās uz dāvanu krāvumu no kreisās puses un redz to, kas attēlots 92. att., bet rūķītis Valdemārs skatās uz dāvanu krāvumu no priekšas un redz to, kas attēlots 93. att.

Kāds ir **a)** lielākais; **b)** mazākais dāvanu skaits, kāds var būt novietots krāvumā?



92. att.



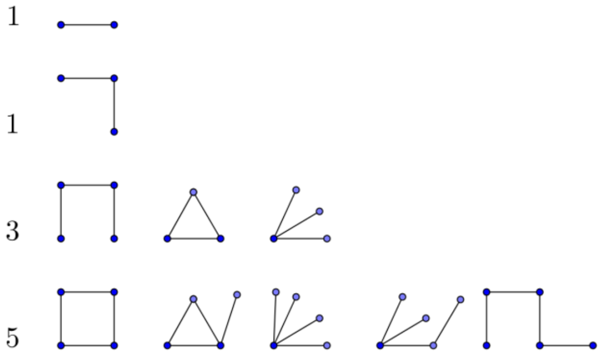
93. att.

J2.3.4. Vecmāmiņas cimdi

Vecmāmiņai atvilktnē ir 1 kreisās rokas cimds zilā krāsā, 2 kreisās rokas cimdi zaļā krāsā, 3 labās rokas cimdi zilā krāsā un 4 labās rokas cimdi zaļā krāsā. Vecmāmiņa palūdza mazmeitiņai atnest cimdu pāri no atvilktnes. Diemžēl mazmeitiņai labās un kreisās rokas cimdi izskatās vienādi, bet zaļos cimdus no zilajiem viņa atšķir. Kāds ir mazākais cimdu skaits, kas mazmeitiņai jāaiznes vecmāmiņai, lai noteikti varētu izveidot saderīgu cimdu pāri?

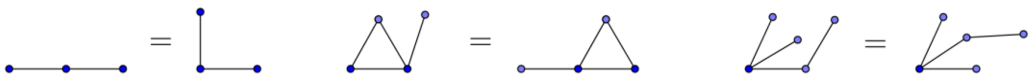
J2.3.5. Sērkociņu grafs

No viena sērkociņa var izveidot 1 *salikumu*, no diviem sērkociņiem – 1 *salikumu*, no trīs sērkociņiem – 3 dažādus *salikumus*, no četriem sērkociņiem – 5 dažādus *salikumus* (skat. 94. att.). Parādi, kā no pieciem sērkociņiem var izveidot 12 dažādus *salikumus*!



94. att.

Salikumus neuzskata par dažādiem, ja tos var iegūt vienu no otra *salikumu* grozot, izstiepjot, sastumjot vai dažus sērkociņus, kas saskarās vienā punktā, samainot vietām (skat., piemēram, 95. att.).

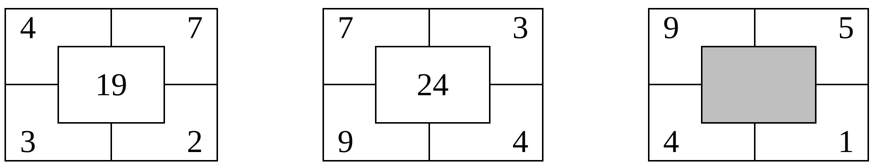


95. att.

Ceturtā kārta

J2.4.1. Izdomā sakarību!

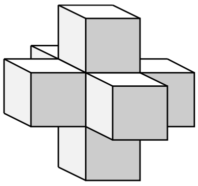
Iekrāsotajā lodziņā (skat. 96. att.) ieraksti skaitli un pamato, kāpēc ierakstīji tieši tādu!



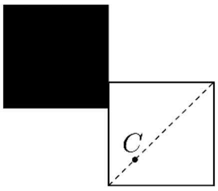
96. att.

J2.4.2. Metamie kauliņi

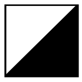
Megija salīmēja kopā septiņus metamos kauliņus (skat. 97. att.) tā, ka kopā tika salīmētas tikai tādas skaldnes, uz kurām ir vienāds skaits punktiņu. Cik punktiņu pavisam kopā ir palikuši redzami?



97. att.



98. att.



99. att.

J2.4.3. Caurumiņa ceļš

Olafs no koka izzāģēja divus vienādus kvadrāta formas dēlīšus, kuru malas garums ir 8 cm. Vienu no tiem viņš nokrāsoja melnu un pieskrūvēja pie galda. Otru viņš nokrāsoja baltu, atzīmēja vienu ceturtdaļu no diagonāles garuma un tajā vietā izurba caurumiņu *C* (skat. 98. att.). Balto dēlīti viņš pielika pie melnā dēlīša malas un to, negrozot un neatraujot no melnā dēlīša, pa galda virsmu bīdīja apkārt melnajam dēlītim, kamēr tas nokļuva tajā pašā vietā, kur sākumā bija pielikts. Cik garš ir caurumiņa *C* veiktais ceļš?

J2.4.4. Cik bērnu?

Ja sareizina visu Annas bērnu gadu skaitu, iegūst skaitli 1664. Zināms, ka jaunākajam bērnam ir divas reizes mazāk gadu nekā vecākajam bērnam. Cik bērnu ir Annai?

J2.4.5. *Flīzes*

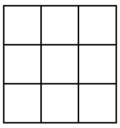
Hanna nopirka vairākas vienādas flīzes (skat. 99. att.).

Cik dažādos veidos var noklāt **a)** 2×2; **b)** 3×3; **c)** $n\times n$ flīžu laukumu uz vannas istabas sienas tā, lai vienas krāsas laukumiem nebūtu kopīga mala?

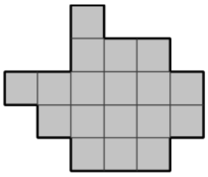
Piektā kārta

J2.5.1. Pirmskaitļu maģiskais kvadrāts

Katrā rūtiņā (skat. 100. att.) ieraksti tieši vienu (katrā rūtiņā citu) no pirmskaitļiem 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113 tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs esošo skaitļu summa būtu viena un tā pati!



100. att.



101. att.

J2.5.2. Izlocīt kubiņus

Mētrai ir kartona gabaliņš (skat. 101. att.), kuru viņa grib sagriezt tā, lai no katras iegūtās daļas varētu izlocīt kubu. Parādi, kā Mētrai jāsagriež kartons, lai viņai ieplānotais izdotos! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

J2.5.3. Cik dažādu četrstūru?

Cik dažādus četrstūrus var uzzīmēt tā, lai četrstūra katra virsotne atrastos kādā no 102. att. dotajiem punktiem? Četrstūrus neuzskata par dažādiem, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie abi pilnīgi sakrīt.

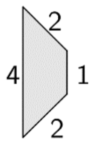
102. att.

J2.5.4. Debesmanna nedalās ar 264

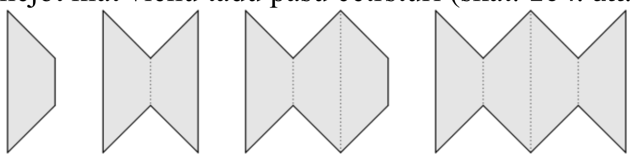
Evelīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *ANBCDENNN* dalās ar 312. Pierādi, ka otrais skaitlis *DEBESMANNA* nedalās ar 264.

J2.5.5. Trapeču virknīte

Aurēlija uzzīmēja četrstūri, kura malu garumi ir 2, 1, 2 un 4 (skat. 103. att.). Malas, kuru garumi ir 1 un 4, ir paralēlas. Pēc tam viņa sāka zīmēt figūras, kas sastāv no 1; 2; 3; 4; … vienādiem dotajiem četrstūriem, katrā reizē piezīmējot klāt vienu tādu pašu četrstūri (skat. 104. att.).



103. att.



104. att.

a) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 6 četrstūri?

b) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 2015 četrstūri?

c) Cik četrstūri ir salikti kopā, ja figūras perimetrs ir 80?

d) Uzraksti sakarību, kas apraksta figūras perimetra garumu, ja kopā salikti *n* četrstūri!

Profesora Cipariņa klubs

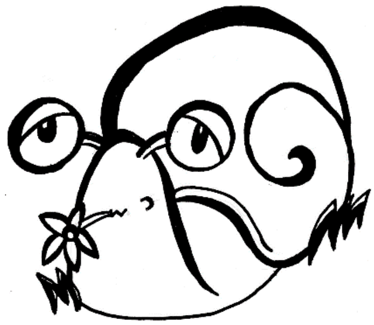
Pirmā nodarbība

P2.1.1. Nevienādības

Kāds ir lielākais skaits doto nevienādību, kas vienlaicīgi var būt patiesas?

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \qquad a^2 > b^2; \qquad a < b; \qquad a < 0; \qquad b < 0$$

P2.1.2. Gliemeži



Ja dobē, kurā ar vienmērīgu ātrumu aug asteres, ielaiž 9 gliemežus, tie nograuž visas asteres 4 stundās; ja dobē ielaiž 8 gliemežus, tie visas asteres nograuž 6 stundās. Cik gliemežu jāielaiž dobē, lai asteru daudzums tajā visu laiku paliktu nemainīgs? (Pieņem, ka gliemeži ēd vienmērīgi un nepārtraukti.)

P2.1.3. Starpbrīdis

Andris uzzīmēja 3×3 rūtiņu kvadrātu un lika Jurim pierādīt: ja rūtiņās ierakstīti skaitļi 1, 2, ..., 9, katrs tieši vienu reizi un katrā rūtiņā tieši viens skaitlis, tad iespējams atrast tādas divas rūtiņas ar kopīgu malu, kurās ierakstīto skaitļu summa nav pirmskaitlis.

P2.1.4. Ojāra dzīve

Pirmklasniekam Ojāram katru dienu mācību stundas beidzas plkst. 15:00. Pie skolas viņu sagaida tētis, kurš katru dienu brauc no mājām uz skolu pakaļ dēlam. Kādu dienu Ojāram stundas beidzās 60 minūtes agrāk nekā parasti. Nesaticis tēti, viņš devās uz mājām ar kājām. Pa ceļam viņu ieraudzīja tētis, kurš, kā parasti, viņam brauca pakaļ uz skolu. Ojārs iekāpa mašīnā un viņi brauca uz mājām. Tur viņi nonāca 20 minūtes agrāk nekā parasti. Cik ilgi Ojārs bija gājis kājām?

P2.1.5. Priecīgie kubiņi

Vai var novietot sešus vienādus kubus tā, lai katri divi no tiem saskartos ar skaldnes daļām? (Saskaršanās tikai ar šķautni vai virsotni netiek uzskatīta par saskaršanos.)

P2.1.6. Darba cilvēki

Četri dotie apgalvojumi attiecas uz strādnieku un viņa četriem palīgiem. Viens apgalvojums ir patiess, bet trīs – aplami. Kurš no vīriešiem ir strādnieks?

1. Juris ir strādnieks.
2. Zintis un Ģirts abi ir palīgi.
3. Harijs ir strādnieks.
4. Strādnieks ir vai nu Juris, vai Alvis, vai Ģirts.

P2.1.7. Taisnleņķu ģeometrija

Atliec plaknē piecus punktus tā, lai šie punkti būtu vismaz astoņu taisnleņķa trijstūru virsotnes! Apzīmē punktus ar burtiem un uzraksti iegūtos taisnleņķa trijstūrus!

P2.1.8. Mednieks Miķelis

Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vienā rūtiņā atrodas kaķis Miķelis, otrā – pele. Kaķis Miķelis pārskata tikai tās rūtiņas, kam ar to rūtiņu, kurā viņš atrodas, ir kopīga mala vai stūris; pele pārskata visu kvadrātu. Gan Miķelis, gan pele ar vienu gājienu pārvietojas uz kādu no blakus rūtiņām (pa horizontāli vai pa vertikāli); gājienus izdara pēc kārtas.

Vai Miķelis var izvēlēties tādu kvadrāta apstaigāšanas plānu, lai noteikti ieraudzītu peli, lai kā arī tā censtos izvairīties?

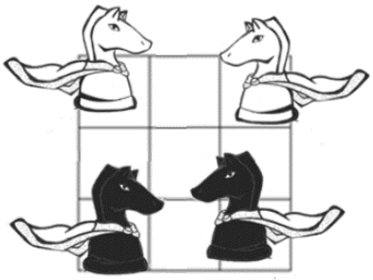
Otrā nodarbība

P2.2.1. Mānīgie uzraksti

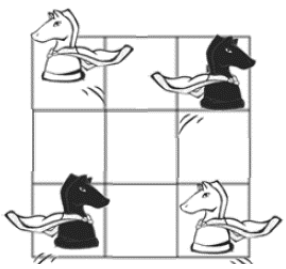
Doti sviras svari un seši atsvari ar uzrakstiem: 1 g, 3 g, 4 g, 5 g, 7 g, 14 g. Tieši viens uzraksts neatbilst patiesībai. Kā ar trīs svēršanām atrast atsvaru ar nepatieso uzrakstu?

P2.2.2. Lecošie zirdziņi

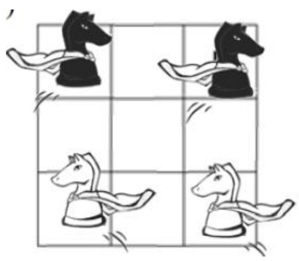
Kvadrātā ar izmēriem 3×3 lauciņi novietoti divi melni un divi balti šaha zirdziņi (skat. 105. att.). Vai pēc vairākiem gājieniem var izveidoties **a)** 106. att.; **b)** 107. att. redzamā situācija?



105. att.



106. att.



107. att.

P2.2.3. Pētnieks Miķelis

Kādu dienu kaķis Miķelis, pētot ar mikroskopu savu tukšo piena trauciņu, ievēroja, ka plkst. 15:00 trauciņā iekrita 1 baktērija. Tā sāka veidot koloniju, kurā katru minūti katra baktērija sadalās divās baktērijās. Pēc 43 minūtēm viņa trauciņš bija līdz pusei pilns ar baktērijām. Cikos Miķeļa piena trauciņš būs pilns ar baktērijām?

P2.2.4. Burkānu raža

Pirmajā vagā aug 15 burkāni, otrajā – 20 burkāni. Ar vienu gājienu no vienas vagas var izraut vai nu 1, vai 2 vai 3 burkānus. Uzvar tas no diviem spēlētājiem, kurš izrauj pēdējo burkānu. Kurš, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt? Gājienus spēlētāji izdara pamīšus – viens, pēc tam otrs utt.

P2.2.5. Gliemežu sistēma

Kādā gliemežu karaļvalstī lieto dīvainu skaitļu pieraksta sistēmu: ciparu 9 viņi apzīmē ar 0, ciparu 8 – ar 1, ciparu 7 – ar 2 utt. Ar ko gliemežu pierakstā vienāda viņu rakstītā izteiksme 837+742?

P2.2.6. Starpbrīdis

Starpbrīdī Andris risināja piemēru un nonāca līdz daļai $\frac{16}{64}$, kurā viņš nepareizi saīsināja ciparu 6 skaitītājā un saucējā, tomēr ieguva pareizu rezultātu: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$. Juris kļūdu pamanīja un jau gribēja par savu skolas biedru pasmieties, taču Andris ļoti veikli atrisināja situāciju, piedāvājot viņam uzdevumu: atrast visas daļas, kam skaitītājs un saucējs ir divciparu skaitlis un kam piemīt uzdevumā aprakstītā īpašība, tas ir, daļas skaitītājam nosvītrojot pēdējo ciparu un saucējam – pirmo, iegūst patiesu vienādību. Pamēģini šo uzdevumu atrisināt arī tu!

P2.2.7. Laimīgais negadījums

Fermerim piederēja 40 kg smags akmens. Viņš šo akmeni izmantoja kā atsvaru sviras svaros, lai svērtu siena ķīpas. Taču kādu dienu fermeris savu akmeni aizdeva draugam, kurš to nometa un saplēsa 4 daļās. Tā vietā, lai dusmotos, fermeris, kā par brīnumu, pat bija ļoti priecīgs. Viņš saka draugam: “Tev izdevās manu akmeni saplēst tieši tādās četrās daļās, lai es tagad uz saviem sviras svariem varētu nosvērt jebkuru masu veselos kilogramos no 1 līdz 40.” Parādi vienu piemēru, kāda var būt masa daļām, kādās akmens tika saplēsts?

P2.2.8. Atrodi skaitli!

Apzīmēsim $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ un $a! = a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (izņēmums ir $0! = 1$; $a!$ sauc par skaitļa a faktoriālu). Atrodi visus tādus trīsciparu skaitļus, kam izpildās $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Trešā nodarbība

P2.3.1. Kvadrāta griešana

Vai kvadrātu var sagriezt šaurleņķu trijstūros? *Atbildi pamato!*

P2.3.2. Pūķu dārgumi

Slepenajā pūķu kambarī, pie kura durvīm guļ četri pūķi, glabājas dārgumi. Kambaris ir aizslēgts ar vairākām piekaramajām atslēgām. Katrs pūķis sargā dažas atslēgas. Zināms, ka ar nekādu divu pūķu atslēgu saišķiem nepietiktu, lai kambari atslēgtu, taču ar jebkuru trīs pūķu atslēgu saišķiem to var izdarīt. Kāds ir mazākais atslēgu skaits, kas nepieciešams, lai realizētos uzdevumā aprakstītais?

P2.3.3. Vecā Zane

Zanei pašreiz ir divas reizes vairāk gadu nekā Aigaram. Pēc kāda laika viņai būs trīs reizes vairāk gadu nekā Aigaram. Cik gadu tagad ir Zanei?

P2.3.4. Sapnis

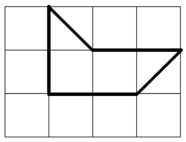
Andris nosapņoja divus īpašus veselus skaitļus *A* un *B*, kuriem izpildās šādas īpašības:

- *A* reizinot ar *A*, iegūst skaitli *B*;
- *A* un *B* pierakstā kopā ir izmantoti visi deviņi nenulles cipari, katrs tieši vienu reizi.

Vai Andra nosapņotie skaitļi eksistē?

P2.3.5. Kuģītis

Vai no astoņām 108. att. redzamajām figūrām var salikt taisnstūri?



108. att.

P2.3.6. Miķeļa grīda

Kaķa Miķeļa virtuvē ir grīda, kas sastāv no 4×4 kvadrātveida flīzēm, kas saliktas kā rūtiņu tīkls. Viņš izdomāja lēkāt tikai par 2 vai 3 rūtiņām (Miķelis var aizlekt gan 2, gan 3 rūtiņas uz priekšu) horizontālā vai vertikālā virzienā. Vai Miķelis var apstaigāt grīdu, uz katras flīzes nonākot tieši vienu reizi un beigās atgriežoties uz sākuma flīzes?

P2.3.7. Starpbrīdis

Paula uz plakāta uzzīmēja skaitļu tabulu ar *n* rindām un *m* kolonnām. Tabulas rūtiņās viņa ierakstīja naturālus skaitļus no 1 līdz $n\cdot m$ (katrā rūtiņā vienu skaitli) augošā secībā pa rindiņām, sākot ar pirmo (skat. piemēru 109. att., ja $n=2$ un $m=4$). Diemžēl Ģirts netīšām uzgāza uz plakāta tintes pudelīti tā, ka vairs nevar redzēt nevienu skaitli. Paula atcerējās, ka skaitlis 20 bija ierakstīts trešajā rindā, skaitlis 41 – piektajā rindā, bet skaitlis 103 – pēdējā rindā. Paula bija bēdīga, bet Ģirts apsolīja starpbrīža laikā izdomāt, kādi bija tabulas izmēri. Palīdzi Ģirtam atrast *n* un *m* vērtības!

1	2	3	4
5	6	7	8

109. att.

P2.3.8. Apdzīvotā sala

Iedomājies, ka tu esi nonācis uz kādas salas Karību jūrā. To, kā par brīnumu, apdzīvo cilvēki, kas vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Tu zini, ka viņu valodā „nao" un „sim" nozīmē „jā" un „nē", bet nezini, kurš no šiem vārdiem nozīmē „jā" un kurš – „nē". Kā, satiekot nepazīstamu salas iedzīvotāju un uzdodot tam vienu jautājumu, panākt lai viņš atbild tikai „sim"?

Ceturtā nodarbība

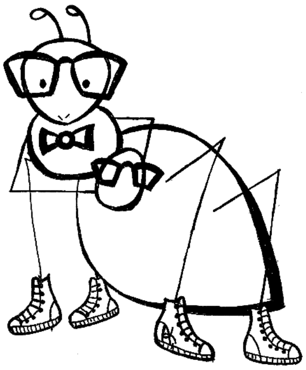
P2.4.1. Saskaiti rūtiņas!

Dots kvadrāts 9×9 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis 1. Vienā gājienā var izvēlēties 4×4 rūtiņu lielu kvadrātu un katram tajā esošajam skaitlim pieskaitīt 1. Pierādīt, ka pēc 96. gājiena varēs atrast 5×5 rūtiņas lielu kvadrātu, kura četrās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būs tieši 100.

P2.4.2. Pie ugunskura

Ap ugunskuru sēž Ritvars, Sindija un Ivars. Ritvars nolemj spēlēt tradicionālo ugunskura spēli un saka: „Es iedomājos divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus." Vienu no šiem skaitļiem viņš iečukst ausī Sindijai, bet otru – Ivaram. Tad starp abiem bērniem norisinās tālāk aprakstītā saruna.

Sindija: „Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
Ivars: „Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
Sindija: „ Tagad es zinu, kādi ir iedomātie skaitļi!"



Kādus skaitļus varēja iedomāties Ritvars?

Piezīme. Visi izteiktie apgalvojumi ir patiesi.

P2.4.3. Alternatīvās skudras

Astoņas skudras uzbūvēja pūzni kuba formā. Pašas skudras dzīvo kuba virsotnēs (katrā virsotnē viena skudra), bet ceļi starp skudru mājām ir izbūvēti kuba šķautņu vietā (tātad no katras skudras mājas iziet 3 ceļi). Vai uz katra no 12 ceļiem var uzlikt atšķirīgu skaitu oliņu no 1 līdz 12 tā, lai uz trīs ceļiem, kas iziet no katras skudras mājas, kopā esošo oliņu skaits dalītos ar 3?

P2.4.4. Dīvainais daudzstūris

Vai eksistē tāds 17-stūris, kuram uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas vēl vismaz viena cita šī 17-stūra mala?

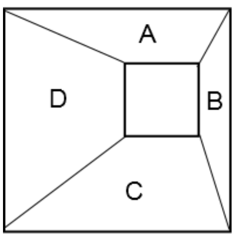
Piezīme. Mala atrodas uz taisnes, ja visi šīs malas punkti atrodas uz taisnes.

P2.4.5. Starpbrīdis

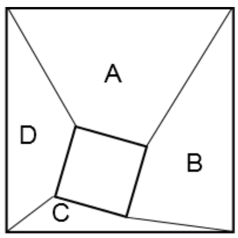
Skolotāja apgalvo, ka mājās viņa izdomājusi četrciparu skaitli ar šādu īpašību: ja skaitļa pēdējo ciparu pārceļ uz skaitļa sākumu, tad iegūst četrciparu skaitli, kas ir 6 reizes mazāks nekā sākotnējais skaitlis. Gandrīz visi skolēni noticēja un aizgāja pusdienās, bet Juris un Andris palika rēķinot. Palīdzi puišiem noskaidrot, vai skolotāja saka taisnību!

P2.4.6. Divi kvadrāti plaknē

Doti divi kvadrāti, kuru attiecīgās malas **a)** ir paralēlas (skat. 110. att.); **b)** nav paralēlas (skat. 111. att.). Pierādīt, ka katrā no dotajiem gadījumiem starp laukumiem *A*, *B*, *C*, *D* pastāv šāda sakarība: $A+C=B+D$.



110. att.



111. att.

P2.4.7. Meklējot skaitli

Vai var atrast tādus skaitļus *a, b, c, d, e*, lai jebkurai reālai *x* vērtībai tieši trīs no vienādībām $a \cdot x = b$, $b \cdot x = c$, $c \cdot x = d$, $d \cdot x = e$, $e \cdot x = a$ būtu patiesas, bet divas būtu aplamas?

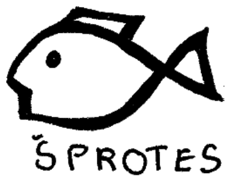
P2.4.8. Gudrais Miķelis

Kaķis Miķelis uz konservu iepakojuma atrada šādu uzdevumu:

Dots, ka *a, b, c* nav 0 un

$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}.$$

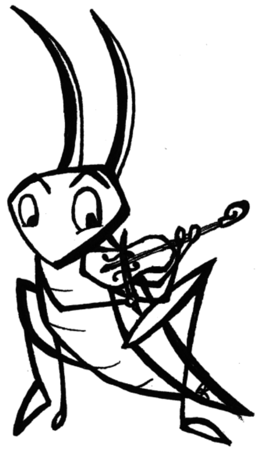
Pierādīt, ka vai nu $a+b+c=0$, vai $a=b=c$.



Palīdzi Miķelim atrisināt uzdevumu!

Piektā nodarbība

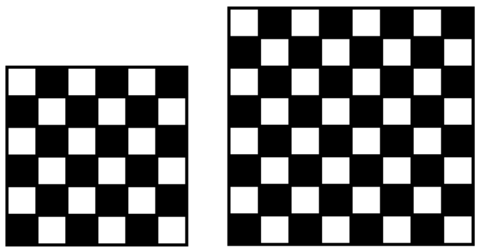
P2.5.1. Muzikants Džonijs



Uz riņķa līnijas ir izvietotas 300 vijoļu darbnīcas. Pirmajā darbnīcā atrodas sienāzis Džonijs, kurš cer salabot savu vijoli. Sienāzis meklē darbnīcu, kurā salabotu viņa vijoli, pēc tālāk aprakstītā plāna. Viņš sāk apmeklēt darbnīcas pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam un savu virzienu nemaina. Ar pirmo lēcienu viņš nonāk blakusesošajā 2. darbnīcā, ar otro lēcienu viņš izlaiž vienu darbnīcu un nonāk 4. darbnīcā, ar trešo lēcienu viņš izlaiž divas darbnīcas un nonāk 7. darbnīcā utt. Katrā darbnīcā, kurā viņš nonāk, Džonijam paziņo, ka viņa vijoli salabot nevar. Pierādi, ka ir tāda darbnīca, kurā Džonijs nekad nenonāks!

P2.5.2. Karalienes untumi

Karaliene Elizabete XIII galma šuvējam bija pasūtījusi pagatavot divus kvadrātveida rūtainus paklājus ar izmēriem 6×6 m^2 un 8×8 m^2 (katra paklāja rūts ir 1×1 m^2 liela). Kad šuvējs pēc septiņām dienām un septiņām naktīm darba nesa veikumu novērtēt (skat. 112. att.), karaliene pēkšņi paziņoja, ka vairs nevēlas divus paklājus, bet gan vienu 10×10 m^2 lielu kvadrātveida paklāju. Galma šuvējs bija attapīgs vīrs un izdomāja, kā bez pūlēm karalienei izdabāt. Viņš izgudroja, ka katru paklāju var sagriezt divās daļās, nepārgriežot nevienu rūti, un no tām sašūt 10×10 m^2 paklāju. Kā viņš to panāca?



112. att.

P2.5.3. Kubiņa apsegšana

Vai kvadrātisku papīra loksni ar izmēriem 3×3 var salocīt tādā veidā, lai tā apsegtu visu virsmu kubam, kura šķautnes garums ir 1 (pieļaujot, ka dažās vietās papīrs gulstas vairākās kārtās)? Papīru nedrīkst ieplēst vai saplēst vairākās daļās.

P2.5.4. Bada spēles

Uz galda ir 500 desmaizes. Juris un Andris nolēma spēlēt spēli – pēc kārtas ņemt no galda desmaižu skaitu, kuram jābūt divnieka pakāpei ar veselu nenegatīvu kāpinātāju. Zaudē tas, kuram vairs nav ko paņemt, uzvarētājs saņem visas maizītes. Andris spēli sāk pirmais. Kurš no puišiem, pareizi spēlējot, var uzvarēt spēli un balvā saņemt visas desmaizes?

P2.5.5. Starpbrīdis

Andris teica, ka padalīsies ar Juri ar desmaizēm, ja viņš atrisinās tālāk doto uzdevumu.

> Doti naturāli skaitļi *a, b, c*, kam izpildās $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$. Jāpierāda, ka
> $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{41}{42}.$$

Palīdzi Jurim tikt pie pusdienām!

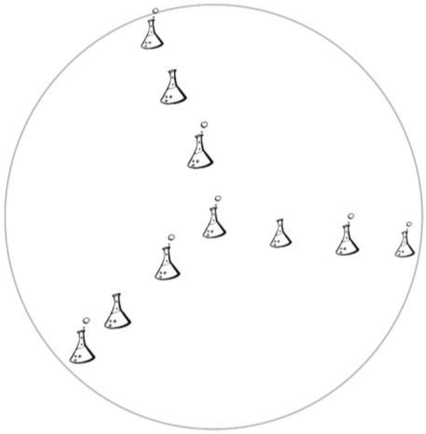
P2.5.6. Sagrieztais kvadrāts

Dots 8×8 rūtiņu laukums, kas nokrāsots kā šaha dēlītis. No tā ir izgrieztas divas rūtiņas. Vai atlikušo figūru var noklāt (bez pārklāšanās) ar taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×2, ja **a)** izgrieztās rūtiņas ir vienā krāsā; **b)** izgrieztās rūtiņas ir dažādās krāsās. *Atbildi pamato*!

P2.5.7. Paulas laboratorija

Paulai ir riņķveida laboratorija, kurā izvietoti 10 trauciņi ar ķīmiskām vielām (skat. 113. att.), kuras ilgi nedrīkst stāvēt vienā telpā, citādi laboratorija uzsprāgs. Kā Paulai uzbūvēt trīs riņķa līnijas formas sienas, lai katrs trauciņš būtu izolēts no pārējiem ar jaunuzbūvēto sienu un laboratorijas sienu palīdzību?

Piezīme. Paulas būvētās sienas drīkst pieskarties laboratorijas malām, bet nevar iziet ārpus laboratorijas. Sienas drīkst krustoties savā starpā.



113. att.

P2.5.8. Zanes olīvas

Zane un Aigars pasūtīja picu ar olīvām, kas tik ļoti garšo Zanei. Aigars gribēja Zani izjokot, tāpēc viņš nolasīja visas olīvas no picas un teica, ka atdos tās Zanei tikai tad, ja viņa spēs noteikt olīvu skaitu, kas atradās uz picas. Aigars pateica tikai to, ka olīvu skaits ir mazākais iespējamais skaitlis, kas

- dalot ar 2, dod atlikumu 1;
- dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- dalot ar 4, dod atlikumu 1;
- dalot ar 5, dod atlikumu 1;
- dalot ar 6, dod atlikumu 1;
- dalās ar 7.

Palīdzi Zanei tikt pie olīvām!

P2.5.9. Atlikušās sviestmaizes

Andris tomēr nevarēja apēst visas 500 laimētās desmaizes. Visas pāri palikušās desmaizes, izņemot divas, ir ar salami desu, kā arī visas palikušās, izņemot divas, ir ar doktora desu un visas palikušās, izņemot divas, ir ar siera desu. Cik un kādas desmaizes Andrim palika pāri? *Atrodi visus iespējamos variantus un pierādi, ka citu nav*!

P2.5.10. Viltīgā aita

Dots taisnstūrveida aploks, kura malu garumi ir 13 m un 19 m. Aploka centrā ganās aita, bet vienā stūrī gaida vilks. Vilks var skriet tikai pa aploka malām, bet aita – pa malām un diagonālēm. Vilka ātrums ir 10 reizes lielāks nekā aitas ātrums. Gan vilks, gan aita var mainīt kustības virzienu tikai aploka stūros vai centrā. Viņi abi sāk skriet reizē un skrien bez apstāšanās. Vilks vienmēr zina, kur atrodas aita, bet aita nekad nezina, ko dara un kur atrodas vilks. Vai aita var izdomāt stratēģiju, kā izdzīvot, neatkarīgi no tā, ko dara vilks?

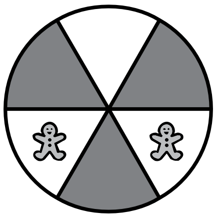
Sagatavošanās olimpiāde

5. klase

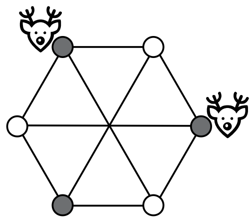
S2.5.1. Rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 2014 ieskaitot, katrs vienu reizi. Cik ciparu uzrakstīts?

S2.5.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām rūtiņām. Vai tās visas var pārsvītrot ar divām taisnēm? (Taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur kādu rūtiņas iekšēju punktu.)

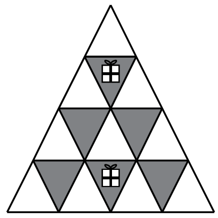
S2.5.3. Uz vecmāmiņas galda uzklāta divu krāsu sedziņa, kas sadalīta sešos laukumos (skat. 114. att.). Uz tās atrodas divas piparkūkas. Ieva izdomāja spēlēt tādu spēli: katrā gājienā viņa drīkst divos blakus laukumos palielināt piparkūku skaitu par 1. Vai Ieva var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos laukumos būs vienāds skaits piparkūku?



114. att.



115. att.



116. att.

6. klase

S2.6.1. **a)** Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 11, dod atlikumu 5, bet, dalot ar 13, dod atlikumu 9? **b)** Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 4, dod atlikumu 1, bet, dalot ar 8, dod atlikumu 2?

S2.6.2. Vai plaknē var uzzīmēt 7 starus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus?

S2.6.3. Elfi spēlējas ar ziemeļbriežiem. Pie staļļa ir seši mieti, pie diviem no tiem piesieti ziemeļbrieži (skat. 115. att.). Ar vienu gājienu drīkst piesiet pa ziemeļbriedim pie jebkuriem diviem mietiem, kas savienoti ar nogriezni. Vai elfi var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem pie visiem mietiem būtu piesiets vienāds skaits ziemeļbriežu?

7. klase

S2.7.1. Apskatām 10 dažādus skaitļus un visas to starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Kāds ir mazākais iespējamais dažādo starpību skaits?

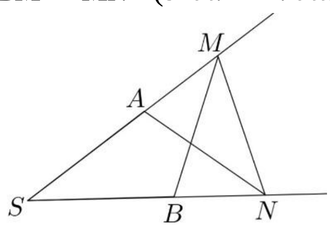
S2.7.2. Vai var uzzīmēt trīs nogriežņus tā, lai tiem visiem būtu dažāds krustpunktu skaits ar abiem pārējiem? Vai tā var uzzīmēt trīs patvaļīgas līnijas?

S2.7.3. Rūķīši uz grīdas ir uzzīmējuši spēļu laukumu un spēlējas ar dāvanām. Sākumā uz laukuma atrodas divas dāvanas (skat. 116. att.). Vienā gājienā ir atļauts divos trijstūrīšos, kam ir kopīga mala, pievienot pa vienai dāvanai. Vai rūķīši var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos trijstūrīšos būs novietots vienāds skaits dāvanu?

8. klase

S2.8.1. Cik ir tādu funkciju, kurām definīcijas kopa sastāv no četriem elementiem: 0; 1; 2; 4, bet vērtību kopa sastāv no diviem elementiem: 0; 1 ?

S2.8.2. Dots, ka $SA = SB = AN = BM = MN$ (skat. 117. att.). Aprēķināt $\angle ASB$!

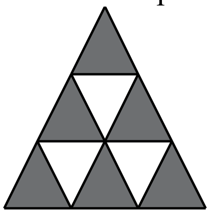


117. att.

S2.8.3. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem (skat. 118. att.) ierakstīts viencipara naturāls skaitlis; dažādos trijstūrīšos ierakstīti dažādi skaitļi. Aplūkojam visas tādas divu skaitļu summas, kuri ierakstīti trijstūrīšos ar kopīgu malu.

a) Vai var būt, ka neviena no šīm summām nepārsniedz 10?

b) Kāds mazākais skaits no šīm summām var būt pāra skaitļi?



118. att.

9. klase

S2.9.1. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai var gadīties tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

S2.9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā O. Aprēķināt $\angle ABC$!

S2.9.3. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 118. att.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

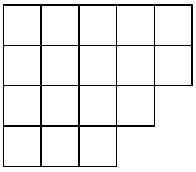
Novada olimpiāde

5. klase

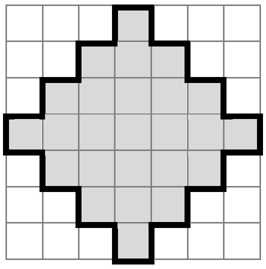
N2.5.1. Mudīte ar automašīnu plkst. 7:10 devās ceļā no Skrundas uz Daugavpili, braucot cauri Rīgai. Rīgā viņa iebrauca plkst. 9:10 un no Rīgas uz Daugavpili izbrauca plkst. 9:40. Daugavpilī viņa nokļuva plkst. 12:40. Aprēķini attālumu no Skrundas līdz Rīgai, ja attālums no Rīgas līdz Daugavpilij ir 225 kilometri! Braukšanas ātrums visā ceļa posmā bija viens un tas pats.

N2.5.2. Niknajam jūras laupītājam Smuidrim ir četras kaudzes ar zelta monētām. Viņš māk vienu kaudzi sadalīt 3 vai 5 mazākās kaudzēs. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Smuidris varēs iegūt tieši 2015 kaudzes, ko piešķirt saviem palīgiem?

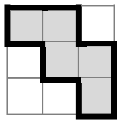
N2.5.3. Rihards ir izcepis interesantas formas torti, kuras pamatā ir 17 kvadrātveida cepumi (skat. 119. att.). Parādi vienu veidu, kā torti sadalīt četros pēc formas vienādos gabalos, lai katrs saturētu tieši četrus cepumus, un gabaliņš ar vienu cepumu paliktu pāri. Tā kā tortes augšpuse ir izdekorēta, tad gabalus drīkst grozīt, bet nedrīkst apmest otrādi.



119. att.



120. att.



121. att.

N2.5.4. Reizināšanas piemērā ciparus aizstāja ar burtiem – vienādi cipari tika aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Tika iegūta šāda izteiksme:

$$EJA \cdot M = 2015\,.$$

Nosaki, kāds cipars atbilst katram burtam! Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!

N2.5.5. Raimonds stāv upes krastā un viņam ir divi spaiņi. Viena spaiņa tilpums ir 10 litri, bet otra spaiņa tilpumu Raimonds ir aizmirsis – tas ir vai nu 7, vai 8 litri. Kā Raimondam ar ūdens pārliešanu palīdzību noteikt otrā spaiņa tilpumu? Nekādu citu palīglīdzekļu Raimondam nav un ieskatoties nepilnā spainī nav iespējams precīzi noteikt tajā esošā ūdens daudzumu.

6. klase

N2.6.1. Veikalā ir divu veidu saldumu pakas. Vienā pakā ir 8 vienādas lielas šokolādes un 6 vienādas mazas šokolādes, bet otrā pakā ir 12 tādas pašas lielas šokolādes un 6 tādas pašas mazas šokolādes. Aprēķini, cik maksā viena lielā šokolāde un cik maksā viena mazā šokolāde, ja pirmās pakas cena ir 15 eiro un otrās – 21 eiro! (Pakas cena veidojas, saskaitot tajā ielikto šokolāžu cenu.)

N2.6.2. Bagātajai Austrumu princesei Smuidrai zem gultas ir 6 lādes. Sākumā lādēs ir attiecīgi 1, 5, 0, 0, 2, 3 zelta monētas. Katru stundu viņa izvēlas 2 lādes un katrā no tām pieliek klāt 1 monētu. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, var panākt, ka kādā brīdī visās lādēs būs vienāds skaits monētu?

N2.6.3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka neviena no šīm summām nav pirmskaitlis?

N2.6.4. Rūtiņu lapā uzzīmēta figūra (skat. 120. att.). Kāds ir lielākais skaits 121. att. doto figūru, ko var izgriezt no 120. att. figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

N2.6.5. Sivēntiņš 229 ābolus salika 60 grozos. Dažos grozos viņš ielika x ābolus, bet pārējos – katrā pa 3 āboliem. Nosaki visas iespējamās naturālās x vērtības!

7. klase

N2.7.1. Atrisini vienādojumu $\frac{8a-5}{5}-\frac{2a-7}{2}=-3$.

N2.7.2. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus?

N2.7.3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10, visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka visas iegūtās summas ir pirmskaitļi?

N2.7.4. Taisnstūris *ABCD* sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai taisnstūra *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

N2.7.5. Uz galda rindā novietotas sešas monētas, zināms, ka starp tām ir vismaz viena īsta un vismaz viena viltota monēta, kas ir vieglāka nekā īstā. Visu īsto monētu masas ir vienādas un arī visu vilto monētu masas ir vienādas. No katras īstās monētas pa labi (ne noteikti blakus) atrodas kāda viltota monēta, bet no katras viltotās pa kreisi (ne noteikti blakus) atrodas kāda īsta monēta. Kā ar divām svēršanām ar sviru svariem bez atsvariem var noteikt katra veida monētu skaitu?

8. klase

N2.8.1. Pierādi, ka **a)** 49^5+7^9 dalās ar 2; **b)** 49^5-7^9 dalās ar 6.

N2.8.2. Autoservisā „Šrotiņš” ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 20. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā” kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas?

N2.8.3. Kurš no skaitļiem $(a+b)(c+d)$, $(b+c)(d+a)$, $(a+c)(b+d)$ ir vislielākais un kurš – vismazākais, ja zināms, ka $a>b>c>d>0$? *Pamato atbildi!*

N2.8.4. Uz vienādmalu trijstūra *ABC* malām *AB* un *BC* attiecīgi atlikti punkti *M* un *N* tā, ka $MB+BN=AC$. Pierādi, ka $\angle MAN+\angle MCN=60°$.

N2.8.5. Kvadrāts *ABCD* sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai kvadrāta *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

9. klase

N2.9.1. Atrisināt vienādojumu $\frac{5}{x^2-9}-\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}$.

N2.9.2. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

N2.9.3. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt **a)** 2014, **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

N2.9.4. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 13. Dārta grib nodzēst vienu no tiem, bet pārējos ierakstīt 3×4 rūtiņu tabulā (katru skaitli vienā rūtiņā) tā, lai visās rindās un kolonnās skaitļu vidējais aritmētiskais būtu vienāds.

a) Pierādīt, ka ir tieši viens skaitlis, kuru nodzēšot, viņa to varēs izdarīt!

b) Atrast vienu skaitļu izvietojuma piemēru!

N2.9.5. Apskata visas funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a + 2b = 2015$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Valsts olimpiāde

9. klase

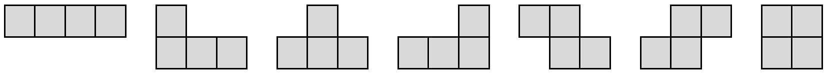
V2.9.1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus *n* un *m*, kuriem $\frac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis!

V2.9.2. Pierādīt, ka, izmantojot

a) visas septiņas dotās figūras (skat 122. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

b) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri!

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



122. att.

V2.9.3. Aija izvēlas naturālu skaitli $n \le 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \le 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis *n*, tad skaitli *n* sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo <u>40</u>; 80; 60; 20; <u>40</u>; …, bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; … (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

V2.9.4. Trijstūrī *ABC* novilkta bisektrise *BL* (*L* atrodas uz malas *AC*), tā krusto taisni, kas no *A* vilkta paralēli *BC*, punktā *K*. Zināms, ka $LK = AB$. Pierādīt, ka $AB > BC$!

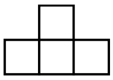
V2.9.5. Kāda ir izteiksmes $a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4 + 1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja *a* ir reāls skaitlis?

Atklātā matemātikas olimpiāde

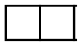
5. klase

A2.5.1. Izsaki skaitli 1 kā piecu atšķirīgu daļu summu, kuru saucēji ir vienādi!

A2.5.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 6×10 rūtiņas var pārklāt ar vienu 123. att. redzamo figūru un 28 figūrām, kādas redzamas 124. att.? Figūras drīkst pagriezt.



123. att.



124. att.

A2.5.3. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?

A2.5.4. Kādu naturālu skaitli, saskaitot ar savu ciparu summu, iegūst skaitli 328? *Atrodi visus tādus skaitļus un pamato, ka citu nav!*

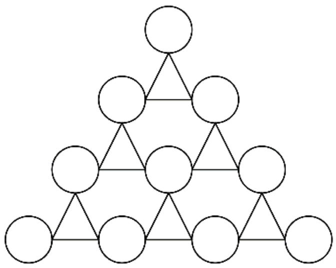
A2.5.5. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām divas ir viltotas. Visu īsto monētu masas ir vienādas. Arī abām viltotajām monētām ir vienāda masa, bet tā ir lielāka nekā īstās monētas masa. Kā ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast abas viltotās monētas?

6. klase

A2.6.1. Profesors Cipariņš iedomājās četrus skaitļus, kuru summa ir vesels skaitlis. Pēc tam viņš saskaitīja šos skaitļus visos iespējamos veidos pa pāriem un ieguva sešas summas. Izrādījās, ka viena no šīm summām ir daļskaitlis. **a)** Pierādi, ka vēl vismaz viena no iegūtajām summām ir daļskaitlis. **b)** Vai var būt tā, ka tieši divas summas ir daļskaitļi, bet pārējās – veseli skaitļi?

A2.6.2. Vai kvadrātu ar izmēriem 12×12 rūtiņas, kuram no diviem pretējiem stūriem izgriezti taisnstūri 3×5 rūtiņas, var pārklāt ar 57 taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×2 rūtiņas?

A2.6.3. Aldis aplīšos (skat. 125. att.) ierakstīja ciparus no 0 līdz 9 (katrā aplītī citu) un katrā trijstūrī ierakstīja tā virsotnēs esošo skaitļu summu. Vai var gadīties, ka visi seši trijstūros ierakstītie skaitļi ir vienādi?



125. att.

A2.6.4. Pierādi, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no sešiniekiem un nullēm! (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi).

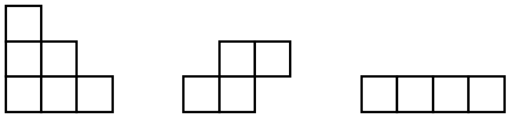
A2.6.5. Vairāki bērni devās pārgājienā un mājupceļā katrs kā suvenīru paņēma vienu vai vairākus akmentiņus. Zināms, ka visu akmentiņu masas ir dažādas. Atpūtas brīdī katrs no bērniem izvēlējās vienu no saviem akmentiņiem un pēc vienas vai vairākām maiņām beigās dabūja kāda cita bērna akmentiņu.

Vai var būt, ka pēc šīs maiņas **a)** katra bērna akmentiņu kopējā masa samazinājās, **b)** tieši viena bērna akmentiņu kopējā masa palielinājās, bet katram no pārējiem bērniem – samazinājās?

7. klase

A2.7.1. Deviņas vienādas cepures kopā maksā mazāk nekā 10 eiro, bet desmit tādas pašas vienādas cepures maksā vairāk nekā 11 eiro. Cik maksā viena cepure?

A2.7.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 7×6 rūtiņas var pārklāt ar 126. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



126. att.

A2.7.3. **a)** Atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 13, pēdējie divi cipari ir 13 un kurš dalās ar 13.

b) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 11, pēdējie divi cipari ir 11 un kurš dalās ar 11?

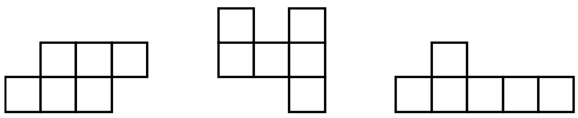
A2.7.4. Vienādsānu trijstūrī *ABC* uz pamata malas *BC* atzīmēts iekšējs punkts *D* tā, ka arī trijstūri *ABD* un *ACD* ir vienādsānu. Aprēķini trijstūra *ABC* leņķus! *Atrodi visus gadījumus un pamato, ka citu nav!*

A2.7.5. Uz galda stāv četras pēc izskata vienādas bumbiņas, to masas attiecīgi ir 10, 11, 12 un 13 grami. Vai ar dažām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem, kur katrā kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, iespējams **a)** atrast visvieglāko un vissmagāko bumbiņu; **b)** noteikt katras bumbiņas masu?

8. klase

A2.8.1. Nosaki, vai izteiksmes $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vērtība ir racionāls skaitlis!

A2.8.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 10×9 rūtiņas var pārklāt ar 127. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



127. att.

A2.8.3. Atrast vienu naturālu skaitli, kas lielāks nekā 2015 un ko nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu.

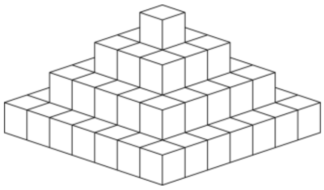
A2.8.4. Divu taisnstūra paralēlskaldņu visu šķautņu garumi ir naturāli skaitļi. Pirmā paralēlskaldņa trīs dažādo skaldņu perimetri ir p_1, q_1, r_1, bet otrā p_2, q_2, r_2, turklāt $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$. Vai var apgalvot, ka pirmā paralēlskaldņa tilpums ir mazāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums?

A2.8.5. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *CH* un mediāna *BK*. Zināms, ka $CH = BK$ un $\angle HCB = \angle KBC$. Pierādīt, ka trijstūris *ABC* ir vienādmalu!

9. klase

A2.9.1. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

A2.9.2. Tornis ir salikts no vienības kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$. Apakšējā slānī ir 7×7 kubiņi. Otrs slānis ir novietots virs pirmā slāņa centrālās daļās, tajā ir 5×5 kubiņi. Trešajā slānī, kurš novietots apakšējās daļas centrā, ir 3×3 kubiņi un augšā centrā ir 1 vienības kubiņš (skat. 128. att.). Vai šo torni var salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$?



128. att.

A2.9.3. Pierādīt, ka x^5-5x^3+4x dalās ar 120, ja x ir vesels skaitlis!

A2.9.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, bet diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *CDE* apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu *AD* iekšējā punktā *F*. Nogriežņu *CF* un *BD* krustpunkts ir *G*. Nosaki $\angle CGD$ lielumu, ja $\angle CAD=\alpha$!

A2.9.5. Parādīt, kā naturālos skaitļus no 1 līdz $2n-1$ uzrakstīt rindā tā, ka visas blakus esošo skaitļu starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko) ir dažādas un skaitlis 1 ir vidējais (n-tais), ja **a)** $n=5$; **b)** $n=1008$.

Ieteikumi

2013./2014. mācību gads

Tik vai… Cik?

T1.1.1. Ievēro darbību secību!

T1.1.2. Uzraksti visus skaitļus un nosaki, kurš no tiem ir vismazākais!

T1.1.3. Izdali katru skaitli ar 9.

T1.1.4. Aprēķini katras iegūtās daļas garumu un platumu!

T1.1.5. Ievēro, ka 2. figūru nav iespējams savienot ne ar 4., ne 5. figūru.

T1.1.6. Ābols kopā aizņem 21 rūtiņu.

T1.1.7. Ko izsaka izteiksme $2 \cdot x - 15$?

T1.1.8. Izsaki ausu garumu, izmantojot galvas un ķermeņa garumu! Izsaki ķermeņa garumu, izmantojot galvas un ausu garumu!

T1.1.9. Pārbaudi katru gadījumu!

T1.1.10. Kāda ir visaugstākā un viszemākā diennakts temperatūra?

T1.2.1. Ievēro darbību secību!

T1.2.2. Pārbaudi katru atbilžu variantu!

T1.2.3. Diviem vienas krāsas trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Pārbaudi katru atbilžu variantu!

T1.2.4. Cik ir kvadrātu ar izmēriem 1×1, 2×2, 3×3 ?

T1.2.5. Kāda ir skaitļa 2013 ciparu summa?

T1.2.6. Ievēro, ka $41 > 40$ un $21 < 23$.

T1.2.7. Sāc aplīšus aizpildīt no beigām!

T1.2.8. Iespējami divi gadījumi.

T1.2.9. Ko var secināt no 1) ?

T1.3.1. Pārveido vienādās mērvienībās!

T1.3.2. Cik rūtiņu ir katrai no četrām figūrām?

T1.3.3. Ko var secināt no 4) ?

T1.3.4. Cik liels ir taisnstūra laukums? Kādi var būt taisnstūra malu garumi?

T1.3.5. Visi gadījumi ir iespējami.

T1.3.6. Cik pavisam pauzes bija? Cik ilgi meitenes pavadīja slidojot?

T1.4.1. Atceries darbību secību!

T1.4.2. Ievēro, ka 5,4 ir 5 eiro un 40 centi!

T1.4.3. Izteiksme ir $x \cdot 9 = 324$.

T1.4.4. $6 \cdot x = 200 - 20$

T1.4.5. Juris 3 stundās veica $3 \cdot 20 = 60$ (km)

T1.4.6. 2. klasē ir $a + 3$ skolēni.

T1.4.7. Cik vienādās daļās ir sadalīta katra figūra? Cik daļas ir no tām ir iekrāsotas?

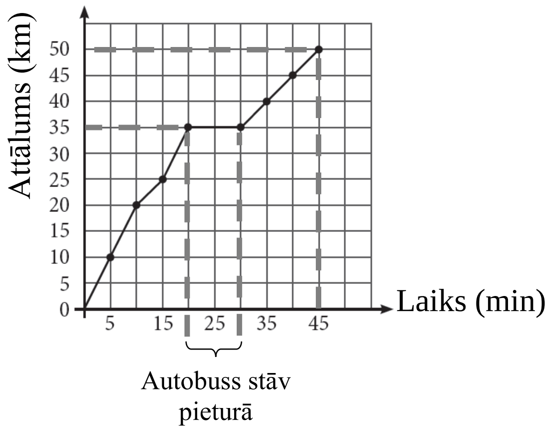
T1.4.8. Saskaiti, cik reizes uzkrita 1 punkts, 2 punkti utt.

T1.4.9. Cik rūtiņu ir kvadrātam? Cik rūtiņas ir iekrāsotas katrā veidā?

T1.4.10. Kvadrāta malas garums ir vienāds ar riņķa diametru.

T1.4.11. Aprēķini kastes pamata un sānu laukumu!

T1.4.12. Skat. 129. att.



129. att.

Jauno matemātiķu konkurss

J1.1.1. Ievēro, ka $A+1=O$.

J1.1.2. Sarkano pupiņu skaitu apzīmē ar x un sastādi izteiksmes atbilstoši uzdevumam! Frāze "raibās pupiņas par 25% mazāk nekā baltās pupiņas" nozīmē to pašu, ko "raibās pupiņas ir 75% jeb 0,75 no balto pupiņu skaita".

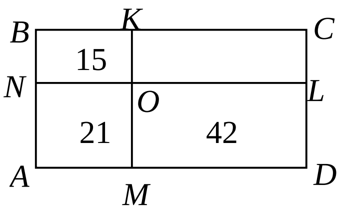
J1.1.3. Aija savu puķīti var izkrāsot sešos dažādos veidos. Parādi piemērus un pamato, ka citu veidu nav!

J1.1.4. Uzzīmē **a)** izliektu piecstūri, **b)** ieliektu septiņstūri, kuriem izpildās nosauktās īpašības!

J1.1.5. Pamato, ka lauztās līnijas posmu skaits dalās ar 4.

J1.2.1. Kādu veselu skaitli var ierakstīt x vietā, lai reizinājums $0{,}702804 \cdot x$ būtu vesels skaitlis?

J1.2.2. Nosaki taisnstūru malu attiecības $BN : NA$ un $AM : MD$ (skat. 130. att.), lai aprēķinātu taisnstūra $KOLC$ laukumu!



130. att.

J1.2.3. Izveido tabulu, kurā ar "x" atzīmē, kuras lampas katrs rūķītis pārslēdz!

J1.2.4. Cik ir mezglu? Cik posmiem noteikti jāpaliek nepārgrieztiem, lai visi mezgli būtu saistīti savā starpā?

J1.2.5. Uzvarēs tas spēlētājs, kurš pēc sava gājiena atstās tikai vienu akmeni. Kādu skaitu – nepāra vai pāra – akmeņu pēc sava gājiena var atstāt spēlētājs, ja pirms viņa gājiena kaudzē ir palicis a) pāra skaits akmeņu, b) nepāra skaits akmeņu?

J1.3.1. Iespējami četri dažādi varianti, kā var būt novietotas taisnes.

J1.3.2. Apzīmē  ar *b*,  ar *p*,  ar *d*,  ar *z* un, izmantojot apzīmējumus, pārraksti uzdevumā doto. Pamato, ka *z* dalās ar 3, ar 5 un ar 2.

J1.3.3. Izvieto uz paklāja 15 dāvanas! Cik dāvanas būs katrā rindā? Cik dāvanas būs katrā kolonnā?

J1.3.4. Lai summā iegūtu 14 vai 22, starp saskaitāmajiem jābūt pāra skaitam trijnieku. Noskaidro, cik dažādos veidos var uzrakstīt summu, ja starp saskaitāmajiem nav neviens trijnieks, ir tieši divi trijnieki utt.

J1.3.5. Lai būtu vieglāk risināt uzdevumu, pakāpeniski aizpildi tabulu!

	Slēpes	Lelle	Mākslinieka komplekts	Rotaļu vilciens	15	25	33	55
Aivars								
Laima								
Paula								
Vilnis								
15								
25								
33								
55								

J1.4.1. Vispirms saliec kopā pa vienai figūrai no katra veida tā, lai iegūtu kvadrātu 3×3 rūtiņas!

J1.4.2. Uzdevumu ir vieglāk atrisināt, ja vispirms noskaidro, cik veidos atbilstoši uzdevuma prasībām var izteikt katru doto skaitli (neņemot vērā reizinātāju secību), piemēram, $14 = 2 \cdot 7$, $84 = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$.

J1.4.3. Uzraksti, cik tālu no baļķa gala ir zilās un sarkanās atzīmes, un atzīmē tos skaitļus, kas sakrīt!

J1.4.4. Turpini aizpildīt tabulu!

Laiks (min.)	Vīrusu skaits	Baktēriju skaits
Sākumā	1	n
1	2	$2(n-1)$
2	...	...
...	...	...

J1.4.5. Ja šādu trijstūri varētu uzzīmēt, tad tā laukums $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3$, kur ar *a, b, c* ir apzīmēti trijstūra malu garumi. Nosaki malu garumu attiecību $a : b : c$.

J1.5.1. Apskati visas sešas pieļaujamās skaitļu *a, b, c, d* kombinācijas!

J1.5.2. Tā kā mušai ir sešas kājas, bet zirneklim ir astoņas kājas, tad, atbilstoši uzdevumam, var sastādīt izteiksmi $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$, kur *m* ir mušu skaits un *z* ir zirnekļu skaits. Atrodi visas iespējamās *m* un *z* vērtības!

J1.5.3. Saliekot kopā piecstūri un sešstūri, var iegūt daudzstūri, kura malu skaits ir jebkurš skaitlis no 3 līdz 11. Parādi piemērus un pamato, ka citu variantu nav!

J1.5.4. Apskati visus gadījumus, kāds var būt biļetes numura pirmais cipars un katrā no šiem gadījumiem nosaki, kādi ir pārējie cipari!

J1.5.5. Aplūko, kā viena gājiena laikā var mainīties glāžu skaits, kas ir “ar kājām gaisā”!

Profesora Cipariņa klubs

P1.1.1. Apskati gadījumus, ja ir tieši viens rūķis, kurš ir garāks nekā visi citi rūķi, un ja ir vismaz divi rūķi ar vienādu garumu, kuri ir garāki nekā visi citi rūķi!

P1.1.2. Pieņem pretējo, tas ir, ka katra pele nočiepa atšķirīgu skaitu siera gabaliņu un apskati gadījumu, kad kopējais nočiepto gabaliņu skaits ir mazākais iespējamais!

P1.1.3. Apskati, kā izmainās izteiksmes vērtība, ja starp skaitļiem *a* un *b* reizināšanas zīme tiek aizstāta ar dalīšanas zīmi; dalīšanas zīme tiek aizstāta ar reizināšanas zīmi.

P1.1.4. Pamato, ka ar dotajām figūrām nav iespējams pārklāt nevienu taisnstūri!

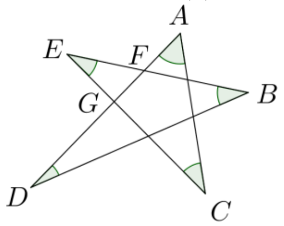
P1.1.5. Grietiņai pirmais cepumiņš ir jānovieto galda centrā tā, lai cepumiņa centrs sakristu ar galda centru. Kā Grietiņai jārīkojas nākamajos gājienos?

P1.1.6. **a)** Pierādot, ka M dalās ar $2^4=16$ un $3^2=9$, būsi pierādījis, ka M dalās ar $16\cdot 9=144$

b) Izmanto a) gadījumā pierādīto un pierādi, ja a, b un c ir vienāda paritāte, tad vismaz viena no starpībām $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ dalās ar 4.

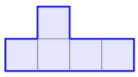
c), **d)** Nē, ne noteikti. Atrodi pretpiemēru, kas to pamato!

P1.1.7. Izmanto to, ka trijstūra *EFG* (skat. 131. att.) iekšējo leņķu summa ir $180°$ un trijstūra *EFG* ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi!



131. att.

P1.1.8. Sākumā sadali vienības kvadrātu 100 rūtiņās (ar 10 rindām un 10 kolonnām), kur katras rūtiņas garums ir $\frac{1}{10}$ vienības, tad katru no šīm rūtiņām sadali 20 vienādās daļās – tādās, kā parādīts 132. att.



132. att.

P1.2.1. Uzzīmē regulāru piecstūri un novelc visas tā diagonāles! Nodzēs piecstūra malas! Kas vēl ir jānodzēš un kādi nogriežņi vēl jāuzzīmē, lai izpildītos uzdevumā prasītais?

P1.2.2. Tā kā x ir divciparu skaitlis, tad to var uzrakstīt kā $x=\overline{ab}=10a+b$ un tā kā y ir trīsciparu skaitlis, tad to var uzrakstīt kā $y=\overline{cde}=100c+10d+e$. Uzraksti uzdevumā doto, izmantojot šos apzīmējumus!

P1.2.3. Jā, var gadīties. Izdomā, kā stienītis jābīda!

P1.2.4. Ievēro, ka 201200002013 ir nepāra skaitlis!

P1.2.5. Katrā četru šūnu rindā ierakstīto skaitļu summa ir 26.

P1.2.6. Kosmonauti var paspēt izglābties. Izveido plānu, kā kosmonautiem jāpārvietojas no vienas stacijas uz otru, ja pirmajā reizē ceļā dodas 1. kosmonauts kopā ar 3. kosmonautu!

P1.2.7. Tā kā Ruks divos teikumos (Es neesmu vainīgs. Līna melo, sakot, ka es to izdarīju.) apgalvo, ka viņš nav vainīgs, tad nevar būt tā, ka viens no šiem teikumiem ir meli, bet otrs – patiesība.

P1.2.8. a) Jā, to var izdarīt. Parādi piemēru! b) Nē, to nevar izdarīt. Pamato to, apskatot taisnstūrus, kuru laukums ir 1 rūtiņa, 2 rūtiņas, …, 10 rūtiņas.

P1.3.1. Jā, to izdarīt ir iespējams. Izveido plānu, kā to panākt!

P1.3.2. Apzīmē $2013+\dfrac{2013}{20132014}$ ar a.

P1.3.3. Parādi zīmējumos gliemežu pārvietošanās virzienu pēc katras satikšanās reizes!

P1.3.4. Pārbaudi, vai uzdevuma nosacījumi izpildās, ja Jānis dzimis 31. decembrī!

P1.3.5. **a)** Pamato, ka to izdarīt nav iespējams, apskatot cik skaitļi var atrasties blakus skaitlim 16. **b)** Jā, to var izdarīt. Parādi piemēru!

P1.3.6. Vispirms atrodi *E* un *A* vērtības!

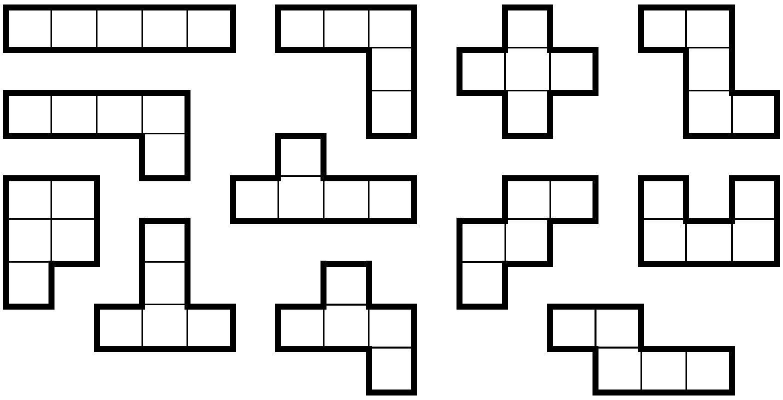
P1.3.7. Jāzīmē ieliekts piecstūris.

P1.3.8. Cik zirdziņus varētu uzlikt, ja tos liktu tikai uz baltajiem laucīņiem? Pamato, ka vairāk zirdziņus uzlikt nevarēs!

P1.4.1. Vispirms Miķelim visi traucīņi jāsadala pa pāriem.

P1.4.2. Izmanto Vjeta teorēmu, lai sastādītu četru vienādojumu sistēmu!

P1.4.3. Meklētās figūras skat. 133. att. Jā, ir iespējams vienlaicīgi izveidot divus taisnstūrus ar izmēriem 4×5 un 4×10. Parādi piemērus!



133. att.

P1.4.4. Pārbaudi, vai der skaitļi $n=1$, $n=2$, $n=3$. Pamato, ka neder skaitļi $n>3$.

P1.4.5. Ja meitenei pirms skrējiena bija *x* cepumi, tad pēc uzvaras viņai ir $x+x+x+x=4x$ cepumi. Tas nozīmē, ka skrējiena uzvarētājas cepumu skaits noteikti dalās ar 4. Apskati visus iespējamos gadījumus, kura meitene katrā skrējienā varēja uzvarēt!

P1.4.6. Pēc kārtas apskati gadījumus, kas notiek, ja $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ un $n=5$.

P1.4.7. Jā, tas ir iespējams. Vispirms izdomā, kādi skaitļi jāieraksta režģa ceturtajā rindā!

P1.4.8. Punktu izvietojumu var iegūt, izmantojot hordu īpašības riņķa līnijā.

P1.5.1. Izkrāso doto siera kluci kā šaha galdiņu: katru mazo klucīti izkrāso vienā no divām krāsām tā, ka nekādi divi blakusesoši kubiņi, kas saskaras ar skaldnēm, nav vienādā krāsā.

P1.5.2. **a)** Pamato, ka tas nav iespējams! **b)** Parādi piemēru, ka tas ir iespējams!

P1.5.3. Vai var būt tā, ka ciemi *C, D, E* un *F* neatrodas uz vienas taisnes?

P1.5.4. Pietiek izvilkt vienu augli. Noskaidro, no kuras kastes tas jāizvelk!

P1.5.5. Vienādojumu sistēmas trešo vienādojumu ievieto ceturtajā, lai aprēķinātu *t* vērtību!

P1.5.6. Novelc malas *AB* vidusperpendikulu un malas *AD* vidusperpendikulu! Punkts *M* atrodas vienā no četriem iegūtajiem mazajiem taisnstūriem vai uz tā malas (pieņem, ka tajā, kas atrodas pie virsotnes *C*). Salīdzini *MA, MB* un *MD* garumus!

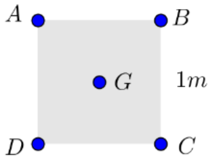
P1.5.7. Pamato, ka abi skaitļi *a* un *b* nevar būt pāra skaitļi! Pamato, ka abi skaitļi *a* un *b* nevar būt nepāra skaitļi! Tādā gadījumā kāda ir *b* vērtība? Kad būs atrasta *b* vērtība, pamato, ka viens no pirmskaitļiem *a,* $a-b$ un $a+b$ noteikti dalās ar 3.

P1.5.8. Parādi piemērus, kur izpildās uzdevumā prasītais!

P1.6.1. Vai frāze „viens no mums šobrīd melo” var būt meli?

P1.6.2. Anna var uzvarēt. Izveido plānu, kā viņai jārīkojas, lai uzvarētu, neatkarīgi no tā, kā rīkojas Kārlis!

P1.6.3. Gliemezis sākumā atrodas punktā G (skat. 134. att.). Kvadrātā $ABCD$, kura diagonāļu krustpunkts ir G un malas garums ir 1 m, iezīmē maršrutu, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem!



134. att.

P1.6.4. Jā, Ojārs šo triku var īstenot. Apzīmē nezināmos skaitļus ar a, b, c, d un e, pieņemot, ka $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Lielāko māsas nosaukto summu apzīmē ar L, otru lielāko – ar ℓ, pašu mazāko – ar m, otru mazāko – ar M. Kādus divus skaitļus saskaitot iegūst L, kādus divus – ℓ, kādus divus – m un kādus divus – M? Sākumā Ojāram jāsaskaita visas desmit māsas nosauktās summas (iegūto summu apzīmē ar S). Kā var iegūt skaitli c?

P1.6.5. Pirmajā svēršanā zēniem vienā svaru kausā jāliek viena sarkana un viena balta ledene, bet otrā – viena sarkana un viena zaļa ledene.

P1.6.6. **a)** Lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem, ir septiņi. Parādi piemēru! Pierādi, ka vairāk pirmskaitļu nevar būt! **b)** Lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem divciparu nepāra skaitļiem, ir seši. Parādi piemēru! Pierādi, ka vairāk pirmskaitļu nevar būt!

P1.6.7. Uzzīmē riņķa līniju, kuras centrs atrodas dotā leņķa virsotnē. Izmanto īpašību, ka centra leņķa lielums vienāds ar tā loka leņķisko lielumu, uz kuru šis centra leņķis balstās. Kā iegūt loku, kura lielums ir $1°$?

P1.6.8. Vispirms profesoram Cipariņam jāpārloka virve trīs vienādās daļās un no tās jānogriež 100 m garš gabals. Kā profesoram iegūtie divi gabali jāsavieno, lai tiktu uz platformas?

Sagatavošanās olimpiāde

S1.5.1. Izdali skaitli 2013 ar 3 un ar 4 ar atlikumu!

S1.5.2. Ievēro, ka, saskaitot kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūst visu tabulā ierakstīto skaitļu summu!

S1.5.3. Parādi, kā visi dzīvnieki var aiziet ciemos pie Rū!

S1.5.4. **a)** Izdomā, kādiem jābūt skaitļa pēdējiem trīs cipariem! **b)** Izdomā, kādam jābūt skaitļa pirmajam ciparam!

S1.5.5. Izdomā, kura zīme apzīmē reizināšanu!

S1.6.1. Izmanto dalāmības pazīmi ar 9!

S1.6.2. Izdomā algoritmu, kā saskaitīt taisnstūrus!

S1.6.3. Katram gadījumam uzzīmē piemēru!

S1.6.4. Ko var pateikt par pašu labējo rūķīti?

S1.6.5. Vismaz cik konfektes apēda vai nu Aija, vai Maija?

S1.7.1. Izdomā, kādas vērtības var pieņemt skaitlis a un secini, cik veidos katrai a vērtībai var piekārtot b vērtību!

S1.7.2. Cik rūtiņu satur katra figūra?

S1.7.3. Atceries, ka naturāls skaitlis var būt vai nu pāra skaitlis, vai nepāra skaitlis!

S1.7.4. Uzdevumā nepietiek parādīt vienu piemēru, kā atrast viltoto monētu. Jāizdomā svēršanas algoritms, kas der jebkuram gadījumam.

S1.7.5. Pieņem pretējo, ka ir divi zinātnieki, kas nav radinieki! Iegūsti pretrunu un secini, ka šis pieņēmums nav patiess!

S1.8.1. Parādi piemēru, kurā izpildās uzdevumā prasītais!

S1.8.2. Novelc nogriezni *EC* un *BD*. Atrodi vienādus trijstūrus!

S1.8.3. Vispirms izdomā, kuras varētu būt koordinātu asis!

S1.8.4. Apskati summu $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$. Atceries dalāmības īpašību: ja mazināmais un starpība dalās ar kādu skaitli, tad arī mazinātājs dalās ar šo pašu skaitli!

S1.8.5. Pieņem pretējo, ka nav divu kaudzīšu, kurās ir vienāds skaits sērkociņu, un nav divu kaudzīšu, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi. Vai vienlaicīgi var būt kaudzīte, kurā ir 1 sērkociņš un kaudzīte, kurā ir 12 sērkociņi?

S1.9.1. Ievēro, ka visiem naturāliem skaitļiem *n* izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

S1.9.2. Atceries, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā!

S1.9.3. Pierādi no pretējā!

S1.9.4. Pierādi no pretējā!

S1.9.5. **a)** Parādi, kā konfektes var apvienot vienā kaudzē! **b)** Izdomā pretpiemēru!

Novada olimpiāde

N1.5.1. Atceries, ka ir arī jāparāda, ka var uzzīmēt figūru ar atrasto perimetru!

N1.5.2. Ievēro, ka $18=2\cdot 9$, un izmanto dalāmības pazīmi ar 9 un 2!

N1.5.3. Apskati vislielāko trīsciparu skaitli un pamato, ka mazāki trīsciparu skaitļi neapmierina uzdevuma nosacījumus!

N1.5.4. Vispirms noskaidro, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 7!

N1.5.5. Divos dažādos veidos saskaiti nogriežņu galapunktu kopējo skaitu!

N1.6.1. Atceries, kādā gadījumā skaitli noapaļo uz leju un kādā – uz leju!

N1.6.2. Uzzīmē piemēru!

N1.6.3. Atrodi piemērus!

N1.6.4. Vispirms noskaidro, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 3 vai 7!

N1.6.5. **a)** Parādi piemēru, ka uz tāfeles var palikt skaitlis 0! **b)** Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka uz tāfeles nevar palikt skaitlis 0!

N1.7.1. Ievēro, ka lineāram vienādojumam $ax=b$:

- ir tieši viens atrisinājums, ja $a\neq 0$;
- nav atrisinājums, ja $a=0$ un $b\neq 0$;
- ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ja $a=b=0$.

N1.7.2. No punkta *O* pret leņķa *KLM* malām novelc perpendikulus *OA* un *OB*!

N1.7.3. Sadali skaitli 87 pirmreizinātājos! Izmanto, ka starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3!

N1.7.4. Ievēro, ja visi skaitļi ir atšķirīgi, tad katrs no skaitļiem no 0 līdz $N-1$ ir bijis uzrakstīts tieši vienu reizi. Iegūsti pretrunu!

N1.7.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais autobusa maršrutu skaits un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāk maršrutu neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

N1.8.1. Apskati vērtību $x=1$. Izmanto Vjeta teorēmu!

N1.8.2. Novelc nogriežņu *BC* un *BF* vidusperpendikulus *GK* un *MN*! Izmanto vidusperpendikula īpašību!

N1.8.3. Izdomā, kādi un cik pieciparu skaitļi neatbilst uzdevuma nosacījumiem!

N1.8.4. **a)** Izdomā piemēru, kas atbilst nosacījumiem! **b)** Pierādi, ka šāda situācija nevar būt!

N1.8.5. Ievies koordinātu sistēmu! Apskati dažādos gadījumus atkarībā no trijstūra virsotņu koordinātu paritātes!

N1.9.1. Atdali pilnos kvadrātus!

N1.9.2. Apzīmē taisnstūra malu garumus un uzraksti vienādojumu! Pārveido vienādojumu tā, lai tā vienā pusē būtu reizinājums, bet otrā pusē vesels skaitlis!

N1.9.3. Izsaki mainīgo a un uzraksti iegūto izteiksmi kā skaitļa un algebriskas daļas summu!

N1.9.4. Apskati trīs principiāli atšķirīgos sienāža novietojumus!

N1.9.5. Izmanto līdzīgu trijstūru īpašības!

Valsts olimpiāde

V1.9.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod izteiksmes mazākā vērtība un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāku vērtību nevar iegūt.

V1.9.2. Aplūko atlikumu virkni, kas rodas virknes elementus, dalot ar 5! Nosaki šīs virknes periodu!

V1.9.3. Pagarini nogriezni AY aiz punkta Y un atliec punktu P tā, ka $AY = YP$! Atceries, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā!

V1.9.4. **a)** Katrai galda pozīcijai i ($1 \le i \le 13$) ar p_i apzīmē diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, un apskati summu $p_1 + p_2 + ... + p_{13}$! **b)** Atrodi atbilstošu piemēru!

V1.9.5. Apzīmē $p = x^2 + 5x - 8$!

Atklātā matemātikas olimpiāde

A1.5.1. Vispirms aprēķini, cik olas kopā atnesa Lieldienu zaķis!

A1.5.2. Izdomā, kāds var būt trīs reizes lielākā skaitļa pēdējais cipars!

A1.5.3. Izmanto, ka trijstūra BAE laukums ir puse no taisnstūra $BAEF$ laukuma!

A1.5.4. Uzdevuma risinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, un jāparāda piemērs; 2) jāpamato, ka lielāku skaitu figūru nevar izgriezt.

A1.5.5. Neaizmirsti pamatot, ka **a)** nevar atrast vēl mazāku skaitli; **b)** nevar atrast vēl lielāku skaitli!

A1.6.1. Sāc risināt uzdevumu no beigām!

A1.6.2. Lai abu grupu skaitļu reizinājumi būtu vienādi, abās grupās kā skaitļu pirmreizinātājiem jābūt pārstāvētiem vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem vienādā skaitā.

A1.6.3. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka pirkuma kopējo vērtību!

A1.6.4. Atceries, ka daži piemēri nav pilns risinājums!

A1.6.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais iekrāsoto rūtiņu skaits un jāparāda piemērs; 2) jāpamato, ka nepietiek, ja iekrāso mazāk rūtiņas.

A1.7.1. Atrodi visas iespējamās AC garuma vērtības un pamato, ka citu nav!

A1.7.2. Atceries, ka vesels skaitlis ir vai nu pāra skaitlis, vai nepāra skaitlis!

A1.7.3. Izdomā, ko no meiteņu apgalvojumiem varētu secināt 42 skrūvju gadījumā!

A1.7.4. Apzīmē skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24 + x + y$.

A1.7.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais izgriezto rūtiņu skaits un jāparāda piemērs; 2) jāpamato, ka nepietiek, ja izgriež mazāk rūtiņas.

A1.8.1. Pārveido skaitli $\frac{1}{13}$ decimāldaļā!

A1.8.2. Apzīmē meklējamo skaitli ar $a \cdot 10^k + B$, kur a ir pirmais cipars (kas tiek nosvītrots), bet B ir k ciparu skaitlis, kas paliek pēc a nosvītrošanas ($1 \le k \le 5$)!

A1.8.3. Daži piemēri, kā izvēlēties punktus, nav pilns risinājums!

A1.8.4. Pierādi, ka $\angle ABC = \angle CDE = 45°$.

A1.8.5. Apzīmē skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24 + x + y$. **a)** Pierādi, ka rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, nevar būt ierakstīts skaitlis 7! **b)** Parādi piemēru, ka rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis 17!

A1.9.1. Izsaki iekrāsoto figūru laukumu, izmantojot kvadrāta un riņķa laukumu!

A1.9.2. Dotos ciparus apzīmē ar a, b, c, d un atrodi izteiksmes $a + b + c + d$ vērtību!

A1.9.3. Ievēro, ka mediānas, kas vilkta no taisnā leņķa virsotnes, garums ir puse no hipotenūzas garuma!

A1.9.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais skaitlis, kas ierakstīts centrālajā rūtiņā un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāks skaitlis centrālajā rūtiņā nevar būt ierakstīts.

A1.9.5. Divos veidos saskaiti kopējo antenu skaitu un iegūsti pretrunu!

2014./2015. mācību gads

Tik vai… Cik?

T2.1.1. Ievēro darbību secību!

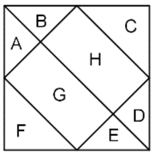
T2.1.2. Ievieto katru doto skaitli a vietā un pārbaudi, vai iegūta patiesa vienādība!

T2.1.3. Saskaiti, no cik rūtiņām sastāv katrs taisnstūris!

T2.1.4. Aprēķini kvadrāta malas garumu!

T2.1.5. Skaitlis 1 ir skaitļa 12 dalītājs, bet nav skaitļa 12 dalāmais.

T2.1.6. Apzīmē katru apgabalu ar burtu (skat. 135. att.).



135. att.

T2.1.7. Kļavas lapa kopā aizņem 17 rūtiņas.

T2.1.8. Izdomā, kuri apgalvojumi noteikti nav patiesi!

T2.1.9. Ieliec katru no dotajiem skaitļiem * vietā un mēģini salikt atlikušajās tukšajās rūtiņās skaitļus, lai izpildītos dotie nosacījumi!

T2.1.10. Nolasi datus no diagrammas!

T2.2.1. Ievēro darbību secību!

T2.2.2. Cik maksā piecas šokolādes?

T2.2.3. Cik klucīši jau ir ielikti kastē? Cik klucīšus pavisam kopā var ielikt kastē?

T2.2.4. Cik konfektes pavisam tika apēstas?

T2.2.5. Kāda ir divu aizputināto ciparu summa? Kādus divus ciparus saskaitot šo summu var iegūt? Apskati visus variantus!

T2.2.6. Ievēro, ka $14 > 13$ un $4 < 5$.

T2.2.7. Aplīšus sāc aizpildīt no beigām un izmanto *apgriezto* darbību!

T2.2.8. Kvadrāta visas malas ir vienāda garuma.

T2.2.9. Lai būtu vieglāk atrisināt uzdevumu, pakāpeniski aizpildi tabulu!

	Strīpains	Rūtains	Aveņkrāsas	Pistole	Duncis	Granāta
Abudabs						
Bugivugs						
Cepelīns						
Pistole						
Duncis						
Granāta						

T2.3.1. Pārveido vienādās mērvienībās!

T2.3.2. Kāda ir pārdoto kāpostu masa?

T2.3.3. Sadalot vienu kvadrātu, iegūst taisnstūri un divus kvadrātus. Otram kvadrātam viena dalījuma līnija sakrīt ar tā diagonāli.

T2.3.4. Ja zobrats *A* griežas pulksteņa rādītāju kustības virzienā, tad zobrats *B* griežas pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam.

T2.3.5. Pārbaudi visus skaitļus, sākot ar mazāko!

T2.3.6. Jāuzraksta 10 skaitļi.

T2.3.7. Cik minūtes cipars 2 bija redzams laikā no 08:30 līdz 08:59; no 09:00 līdz 11:59; no 12:00 līdz 12:59; no 13:00 līdz 13:30?

T2.4.1. $x - 62 = 520$

T2.4.2. Uz pirmajiem svariem redzams, ka tomāts ir smagāks nekā burkāns.

T2.4.3. Salīdzini!

T2.4.4. Pēc cik minūtēm būs pagājusi viena diennakts?

T2.4.5. Dotā figūra ir salikta no 10 sērkociņiem.

T2.4.6. Ievēro, ka $6 \cdot 6 = 36$ un $6 \cdot 9 = 54$.

T2.4.7. Vai vienlaikus var vest divus 8 t blokus?

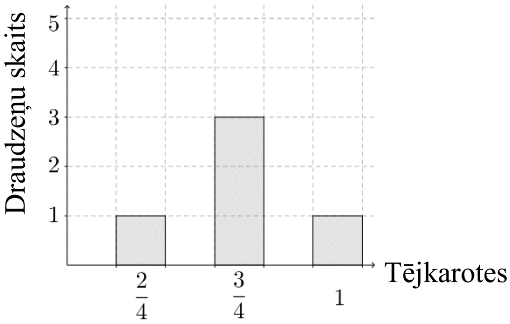
T2.4.8. Apskati divus gadījumus: 1) dzeltenais aplītis atrodas apakšējā rindā; 2) dzeltenais aplītis atrodas vidējā rindā!

T2.4.9. Novelc papildus līnijas!

T2.4.10. Riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar kvadrāta malas garumu.

T2.4.11. **2)** Ievērojam, ka gliemeža *A* un gliemeža *C* maršrutā ir vienāds skaits vertikālo un diagonālo posmu, bet horizontālie posmi gliemeža *A* maršrutā ir par 2 vairāk nekā gliemeža *C* maršrutā.

T2.4.12. a) Skat. 136. att.



136. att.

Jauno matemātiķu konkurss

J2.1.1. Saskaiti, cik ir vienu vienību gari nogriežņi, divu vienību gari nogriežņi utt.!

J2.1.2. Aprēķini visu rūtiņās ierakstīto skaitļu summu! Apzīmē trīs rūtiņās ierakstītos skaitļus ar x, y, z (skat. 137. att.)! Kā var aprēķināt abu vertikālo kolonnu un horizontālās rindas skaitļu summu?

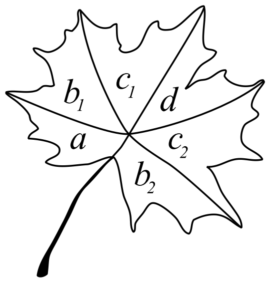
1		
x	y	2
z		

137. att.

J2.1.3. Izmanto pilno pārlasi: sāc ar mazāko trīsciparu skaitli un pārbaudi, vai visi uzdevuma nosacījumi izpildās!

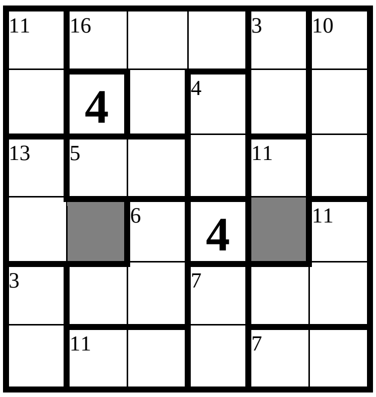
J2.1.4. Jā, var. Parādi piemēru!

J2.1.5. Katru no sešām lapas daļām apzīmē ar burtiem (skat. 138. att.)! Šķiro divus gadījumus: ja daļas b_1 un b_2 būs izkrāsotas vienā un tajā pašā krāsā; ja daļas b_1 un b_2 būs izkrāsotas dažādās krāsās!



138. att.

J2.2.1. Apskati tabulas pirmo kolonnu, lai noteiktu, kāds skaitlis jāieraksta otrās kolonnas iekrāsotajā rūtiņā (skat. 139. att.)! Pēc tam nosaki, kāds skaitlis jāieraksta piektās kolonnas iekrāsotajā rūtiņā!



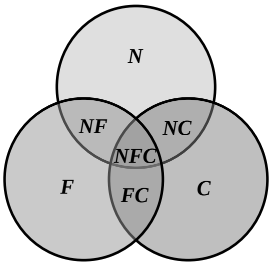
139. att.

J2.2.2. Jā, var. Parādi, kā to var izdarīt!

J2.2.3. Kāda ir katra izveidotā skaitļa ciparu summa?

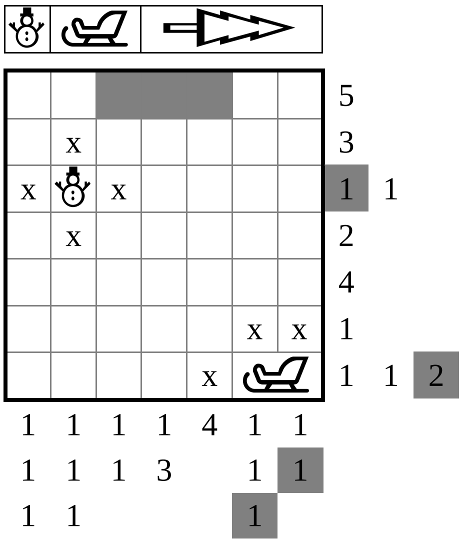
J2.2.4. Lielā taisnstūra platumu apzīmē ar a, garumu – ar b. Mazā taisnstūra platumu apzīmē ar c. Izmantojot šos apzīmējumus izsaki lielā un mazā taisnstūra perimetru! Kāda ir mazākā iespējamā c vērtība? Kāda ir lielākā iespējamā c vērtība?

J2.2.5. Attēlo uzdevuma nosacījumus ar *Eilera riņķiem* – viena riņķa iekšpusē atrodas visas vecmāmiņas, kam patīk nūjošana, otra riņķa iekšpusē – vecmāmiņas, kam patīk fanošana par hokeja klubu „Dinamo Rīga”, trešajā riņķī – vecmāmiņas, kam patīk rausīšu cepšana. Apgabalā, kas kopīgs diviem riņķiem, atrodas tās vecmāmiņas, kam patīk divas nodarbošanās; apgabalā, kas kopīgs visiem riņķiem, atrodas tās vecmāmiņas, kam patīk visas trīs nodarbošanās (skat. 140. att.).



140. att.

J2.3.1. Tabulā ar “x” atzīmē, kuras rūtiņas noteikti nav aizpildītas (skat. 141. att.)! Tabulas malā iekrāso tos skaitļus, kuriem atbilstošās rūtiņas jau ir aizpildītas! Tabulā iekrāso rūtiņas, kuras noteikti būs aizpildītas, piemēram, lai kā arī būtu izvietotas piecas aizpildītās rūtiņas pirmajā rindā, iekrāsotās rūtiņas noteikti būs aizpildītas.



141. att.

J2.3.2. Sāc risinājumu ar 3) nosacījumu!

J2.3.3. Sāc risināt uzdevumu apskatot, kāds ir lielākais vai mazākais iespējamais dāvanu skaits, ja tiktu ņemts vērā tikai tas, ko redz Valdemārs, skatoties no priekšas! Pēc tam pārbaudi, cik dāvanas ir jāpievieno vai jānoņem, lai, skatoties no kreisās puses, izpildītos uzdevumā minētās īpašības!

J2.3.4. Jāaiznes četri zili cimdi. Pamato, ka mazāk cimdus aiznest nevar, lai noteikti varētu izveidot saderīgu pāri!

J2.3.5. Pirmo salikumu var iegūt, novietojot visus sērkociņus rindā (skat. 142. att.). Lai iegūtu otro salikumu, vispirms saliec rindā četrus sērkociņus! Kur var pielikt piekto sērkociņu? Vai ir tikai viena iespēja? Pēc tam saliec rindā trīs sērkociņus un noskaidro, kur var pielikt atlikušos divus!

142. att.

J2.4.1. Pamato, kāpēc iekrāsotajā lodziņā var ierakstīt skaitli 12.

J2.4.2. Aprēķini, kāds ir kopējais punktiņu skaits uz viena metamā kauliņa! Kāds ir kopējais punktiņu skaits uz septiņiem kauliņiem?

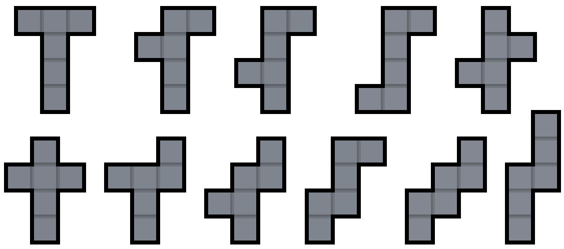
J2.4.3. Uzzīmē balto kvadrātiņu uz rūtiņu lapas un sadali kvadrāta diagonāli četrās vienādās daļās! Cik un kādās daļās ar rūtiņu līnijām ir sadalīta katra kvadrāta mala?

J2.4.4. Sadali skaitli 1664 pirmreizinātājos!

J2.4.5. Cik dažādos veidos var noklāt katru diagonāles rūtiņu? Ja ir noklātas diagonāles rūtiņas, tad cik veidos var noklāt katru no atlikušajām rūtiņām?

J2.5.1. Kāda ir visu tabulā ierakstīto skaitļu summa? Kāda ir katrā rindā ierakstīto skaitļu summa?

J2.5.2. Kubu var izlocīt tikai no 143. att. dotajiem izklājumiem. Kurus no tiem var izgriezt no uzdevumā dotās figūras?



143. att.

J2.5.3. Apskati divus iespējamos gadījumus: ja četrstūra virsotnes izvietotas pa divām rindām; ja četrstūra virsotnes izvietotas pa visām trim rindām.

J2.5.4. Tā kā skaitlis *ANBCDENNN* dalās ar $312 = 8 \cdot 39$, tad tas dalās arī ar 8. Izmanto dalāmības pazīmi ar 8.

J2.5.5. **d)** Iegūtās figūras perimetru veido tās kreisā sāna mala (4 vienības), katra četrstūra augšējā un apakšējā mala ($2 + 2 = 4$ vienības) un vēl figūras labā sāna mala. Cik vienību gara ir figūras labā sāna mala, ja ir uzzīmēts nepāra skaits četrstūru, un cik, ja – pāra skaits četrstūru?

Profesora Cipariņa klubs

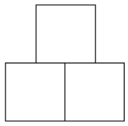
P2.1.1. Lielākais skaits nevienādību, kas vienlaicīgi var būt patiesas, ir četras. Kuras nevienādības tās ir? Pamato, ka visas nevienādības vienlaicīgi nevar būt patiesas!

P2.1.2. Ar x apzīmē asteru daudzumu dobē brīdī, kad tajā tiek ielaisti gliemeži; ar v_a – asteru augšanas ātrumu; ar v_g – viena gliemeža ēšanas ātrumu. Uzraksti uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu sistēmu!

P2.1.3. Pieņem pretējo, ka skaitļus ir iespējams ierakstīt tā, lai katrās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būtu pirmskaitlis. Kādas paritātes skaitļiem tādā gadījumā jābūt ierakstītiem rūtiņās, kurām ir kopīga mala?

P2.1.4. Kādu ceļu tētis citās dienās veic ietaupītajās 20 minūtēs?

P2.1.5. Jā, prasīto var izdarīt. Kā novietot pirmos trīs kubus, skat. 144. att., kurā redzams skats no augšas (kubu pamatu skaldnes atrodas vienā plaknē). Kā jānovieto atlikušie trīs kubi?

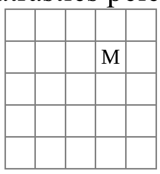


144. att.

P2.1.6. Pēc kārtas par katru vīrieti pieņem, ka viņš ir strādnieks, un pārbaudi, vai izpildās uzdevuma nosacījumi!

P2.1.7. Četri no pieciem punktiem atrodas kvadrāta virsotnēs. Kur jāatliek piektais punkts?

P2.1.8. Jā, to var izdarīt. Sākumā Miķelim jānokļūst 145. att. atzīmētajā rūtiņā. Kur var atrasties pele, ja Miķelis to neredz? Kādi 12 gājieni Miķelim jāveic, lai pēc tiem viņš noteikti ieraudzītu peli? Kur pēc katra Miķeļa gājiena var atrasties pele, ja Miķelis viņu neredz?



145. att.

P2.2.1. Katrā svēršanā svaru kausos liec atsvarus tā, lai, ņemot vērā uzrakstus, kausiem būtu jābūt līdzsvarā! Izanalizē katru gadījumu, ja nepatiesais uzraksts ir 1, 3, 4, ...

P2.2.2. **a)** Pamato, ka prasīto nevar izdarīt! **b)** Parādi, kā var iegūt prasīto situāciju!

P2.2.3. Cik baktēriju būs trauciņā pēc 44 minūtēm?

P2.2.4. Pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt spēlētājs, kurš izdara pirmo gājienu. Uzraksti plānu, kā viņam jārīkojas!

P2.2.5. Kā ir uzrakstāma dotā izteiksme ārpus gliemežu karaļvalsts?

P2.2.6. Ja uzdevumā doto daļu apzīmējam ar $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$, tad uzdevuma nosacījumiem atbilst vienādojums $\dfrac{10a+b}{10b+c}=\dfrac{a}{c}$.

P2.2.7. Masa daļām, kādās tika saplēsts akmens, var būt 1, 3, 9 un 27 kg. Parādi, kā ar šādiem četriem atsvariem var nosvērt jebkuru masu veselos kilogramos no 1 līdz 40.

P2.2.8. Pamato, ka a, b un c noteikti ir mazāki nekā 7.

P2.3.1. Jā, prasīto var izdarīt. Sadali kvadrātu astoņos šaurleņķu trijstūros! Pamato, ka visi iegūtie trijstūri ir šaurleņķu!

P2.3.2. Mazākais piekaramo atslēgu skaits ir 6. Parādi piemēru, ka ar sešām atslēgām pietiek! Pamato, ka ar mazāk atslēgām nepietiek!

P2.3.3. Aigara gadu skaitu apzīmē ar n un uzraksti uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu!

P2.3.4. Meklējot skaitli, vari izmantot šādus apsvērumus:

- ja A un B kopā satur deviņus ciparus, tad tas iespējams tikai tad, ja A ir trīsciparu skaitlis un B ir sešciparu skaitlis;
- lai B būtu sešciparu skaitlis, tad skaitļa A pirmajam ciparam jābūt vismaz 3;
- skaitļa A pēdējais cipars nevar būt 1; 5; 6, jo tad arī B pēdējais cipar būs tāds pats un cipari atkārtosies;
- tā kā neviena naturāla skaitļa kvadrāta pēdējais cipars nav 2; 3; 7; 8, tad tāds nevar būt arī skaitļa B pēdējais cipars.

P2.3.5. Jā, prasīto var izdarīt. Parādi piemēru!

P2.3.6. Jā, Miķelis prasīto var izdarīt. Parādi piemēru!

P2.3.7. Uzdevuma nosacījumu, ka skaitlis 20 atrodas tabulas trešajā rindā, var aprakstīt ar nevienādību $2m < 20$.

P2.3.8. Paskaidro, kāpēc der, piemēram, jautājums: "Ja pareizā atbilde uz kādu jautājumu ir „nao", tad ko uz šādu jautājumu atbildētu salas iedzīvotājs, kas nav tavs *ciltsbrālis*?" (Ar *ciltsbrāli* melim saprotam citu meli, bet patiesības teicējam – citu patiesības teicēju.)

P2.4.1. Atrodi tādu 5×5 rūtiņas lielu kvadrātu, ka katrs gājiens (vieninieka pieskaitīšana skaitļiem kādā 4×4 rūtiņu kvadrātā) iekļauj tieši vienu no šī kvadrāta stūra rūtiņām!

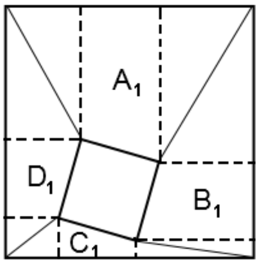
P2.4.2. Pēc Sindijas pirmā apgalvojuma ir skaidrs, ka Sindijai pateiktais skaitlis nav 1.

P2.4.3. Jā, to var izdarīt. Parādi piemēru!

P2.4.4. Jā, tāds 17-stūris eksistē. Parādi piemēru!

P2.4.5. Apzīmē sākotnējo četrciparu skaitli ar *a*, bet iegūto četrciparu skaitli ar *b*! Uzraksti uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu! Ar ko noteikti dalās skaitlis *a*?

P2.4.6. **a)** Figūras, kuru laukumi ir *A*, *B*, *C* un *D*, ir trapeces, kuru attiecīgie pamati ir vienādi, jo tie ir lielā un mazā kvadrāta malas. **b)** Sadali doto figūru tā, kā parādīts 146. att., kur pie katras lielā kvadrāta virsotnes atrodas divi taisnleņķa trijstūri.



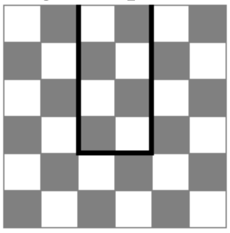
146. att.

P2.4.7. Tā kā uzdevuma nosacījumiem jāizpildās jebkurai reālai *x* vērtībai, tad tiem jāizpildās arī tad, ja $x = 0$.

P2.4.8. Katrai daļai pieskaiti 2!

P2.5.1. Kā, izmantojot aritmētiskās progresijas summas formulu, var aprakstīt darbnīcas numuru, kurā Džonijs nonāks? Pierādi, ka Džonijs nekad nenonāks darbnīcās, kuru numurs dalās ar 3.

P2.5.2. Mazāko paklāju šuvējs varēja sagriezt, piemēram, tā, kā parādīts 147. att.



147. att.

P2.5.3. Jā, var salocīt. Parādi, kā to izdarīt!

P2.5.4. Andrim katrā gājienā jāpaņem vai nu $2^0 = 1$ desmaize, vai $2^1 = 2$ desmaizes tā, lai pēc viņa gājiena atlikušais desmaižu skaits dalītos ar 3. Pamato, ka šī stratēģija garantē Andra uzvaru!

P2.5.5. No dotās nevienādības $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ izriet, ka neviens no naturālajiem skaitļiem *a, b, c* nevar būt mazāks kā 2.

P2.5.6. **a)** Pamato, ka prasīto nevar izdarīt! **b)** Parādi piemēru, kā prasīto var izdarīt!

P2.5.7. Katras divas jaunizbūvētās riņķa līnijas formas sienas krustojas savā starpā.

P2.5.8. Meklēto skaitli apzīmē ar *x*. No uzdevumā dotā izriet, ka $x - 1$ dalās ar 2, 3, 4, 5 un 6, bet *x* dalās ar 7.

P2.5.9. Var būt arī desas, kas nav minētas uzdevumā.

P2.5.10. Jā, aita var izdzīvot, tās izdzīvošanas stratēģija ir skriet tikai pa aploka diagonālēm. Pamato, ka, šādi skrienot, aita ar vilku nekad nesatiksies!

Sagatavošanās olimpiāde

S2.5.1. Saskaiti ciparu skaitu viencipara, divciparu, trīsciparu un četrciparu skaitļiem!

S2.5.2. Izdomā piemēru!

S2.5.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasītais nav iespējams!

S2.6.1. **a)** Atrodi skaitli, kas atbilst nosacījumiem! **b)** Pamato, ka nevar atrast skaitli, kas atbilst nosacījumiem!

S2.6.2. Izdomā piemēru!

S2.6.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasītais nav iespējams!

S2.7.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais dažādo starpību skaits un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāk atšķirīgu starpību nevar iegūt.

S2.7.2. **a)** Pierādi, ka trīs nogriežņus nevar uzzīmēt tā, lai izpildās nosacījums! **b)** Izdomā piemēru!

S2.7.3. Izmantojot invariantu metodi, pierādi, ka prasītais nav iespējams!

S2.8.1. Ievēro, ka katrā no četriem definīcijas apgabala punktiem funkcija var pieņemt jebkuru no divām vērtībām.

S2.8.2. Apzīmē $\angle ASB = \alpha$ un izsaki citus leņķus ar α. Izmanto vienādsānu trijstūra un blakusleņķu īpašības!

S2.8.3. **a)** Parādi piemēru! **b)** Uzdevuma risinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod mazākais summu skaits, kas ir pāra skaitļi, un jāparāda piemērs; 2) jāpierāda, ka mazāks skaits summu, kas ir pāra skaitļi, nevar būt.

S2.9.1. Izdomā, kāds var būt izspēlēto spēļu skaits! Pierādi no pretējā!

S2.9.2. Izmanto trijstūru vienādību!

S2.9.3. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemērs lielākajam iespējamam summu skaitam, kas ir pirmskaitļi; 2) jāpierāda, ka lielāks skaits summu, kas ir pirmskaitļi, nevar būt.

Novada olimpiāde

N2.5.1. Aprēķini, cik kilometrus nobrauc vienā stundā!

N2.5.2. Izmantojot invariantu metodi, pamato, ka prasītais nav iespējams!

N2.5.3. Izdomā piemēru!

N2.5.4. Apskati visas iespējamās M vērtības!

N2.5.5. Izdomā algoritmu!

N2.6.1. Ievēro, ka abās pakās ir vienāds skaits mazo šokolāžu!

N2.6.2. Izmantojot invariantu metodi, pamato, ka prasītais nav iespējams!

N2.6.3. Parādi piemēru, kurā neviena no summām nav pirmskaitlis!

N2.6.4. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod lielākais skaits figūru, ko var izgriezt, un jāparāda piemērs; 2) jāpamato, ka lielāku skaitu figūru nevar izgriezt.

N2.6.5. Atrodi visas iespējamās x vērtības un pamato, ka citas neder!

N2.7.1. Reizini abas vienādojuma puses ar 10!

N2.7.2. Izmantojot invariantu metodi, pamato, ka prasītais nav iespējams!

N2.7.3. Parādi piemēru, kurā visas summas ir pirmskaitļi!

N2.7.4. Parādi pretpiemēru, t. i., piemēru, kurā kvadrātu perimetri ir naturāli skaitļi, bet taisnstūra perimetrs nav naturāls skaitlis!

N2.7.5. Uzdevumā nepietiek parādīt vienu piemēru, kā atrast viltoto monētu. Jāizdomā svēršanas algoritms, kas der jebkuram gadījumam.

N2.8.1. Izmanto pakāpju īpašības!

N2.8.2. Izmantojot invariantu metodi, pamato, ka prasītais nav iespējams!

N2.8.3. Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus, pierādi, ka vislielākais ir skaitlis $(b+c)(d+a)$ un vismazākais ir skaitlis $(a+b)(c+d)$!

N2.8.4. Pierādi, ka $\Delta ABN = \Delta CAM$! Izmanto nogriežņa garuma īpašību!

N2.8.5. Atceries, ka daži piemēri, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, nav pierādījums!

N2.9.1. Atceries veikt sakņu pārbaudi vai noteikt definīcijas kopu!

N2.9.2. Pierādi, ka prasīto nevar izdarīt, atrodot invarianto īpašību!

N2.9.3. Parādi piemērus, kā prasīto var izdarīt! Pamato un izmanto, ka katru taisnleņķa trijstūri var sadalīt divos tam līdzīgos trijstūros!

N2.9.4. Pierādi, ka gan rindā, gan kolonnā ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais ir naturāls skaitlis!

N2.9.5. Ievēro, ka, lai pierādītu vajadzīgo, pietiek atrast divus punktus, kas pieder visu funkciju grafikiem!

Valsts olimpiāde

V2.9.1. Izmantojot formulu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, sadali izteiksmi $n^4 - m^4$ reizinātājos! Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāatrod visus naturālus skaitļus *n* un *m*, kuriem $\dfrac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis; 2) jāpierāda, ka citi skaitļi neder.

V2.9.2. **a)** Iekrāso figūras kā šaha galdiņu! **b)** Izdomā, kuru figūru nedrīkst izmantot, un parādi, kā no atlikušajām figūrām salikt taisnstūri!

V2.9.3. Noskaidro, kuri skaitļi ir *patīkami*, un pamato, ka citi skaitļi nav *patīkami*! Atceries, ka jāpierāda arī, ka pārējie skaitļi nav patīkami!

V2.9.4. Izmanto vienādsānu trijstūra īpašības un trijstūra nevienādību!

V2.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: 1) jāparāda piemēs izteiksmes mazākajai vērtībai; 2) jāpamato, ka mazāku vērtību iegūt nevar.

Atklātā matemātikas olimpiāde

A2.5.1. Atrodi vienu piemēru, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem!

A2.5.2. Izmantojot krāsošanu, pamato, ka taisnstūri nevar pārklāt prasītajā veidā!

A2.5.3. **a)** Atrodi taisnstūri, kuram izpildās nosacījumi! **b)** Pamato, ka nav tāda taisnstūra, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi!

A2.5.4. Vispirms pamato, ka meklētajam skaitlis ir trīsciparu!

A2.5.5. Uzdevumā nepietiek parādīt vienu piemēru, kā atrast viltoto monētu. Jāizdomā svēršanas algoritms, kas der jebkuram gadījumam.

A2.6.1. **a)** Apskati visu skaitļu summu! **b)** Izdomā četrus skaitļus, kuriem izpildās uzdevuma nosacījumi!

A2.6.2. Izmantojot krāsošanu, pamato, ka taisnstūri nevar pārklāt prasītajā veidā!

A2.6.3. Parādi piemēru, kurā izpildās uzdevuma nosacījumi!

A2.6.4. Lai dotais skaitlis būtu kvadrāts, tad tam visi dažādie pirmreizinātāji jāsatur pāra skaitā.

A2.6.5. **a)** Pamato, ka aprakstītā situācija nav iespējama! **b)** Parādi piemēru, kurā izpildās uzdevuma nosacījumi!

A2.7.1. Sastādi nevienādības!

A2.7.2. Izmantojot krāsošanu, pamato, ka doto taisnstūri nevar pārklāt prasītajā veidā!

A2.7.3. **a)** Izdomā, kādam jābūt skaitlim, ko veido meklējamā skaitļa pirmie cipari (bez pēdējiem diviem cipariem 1 un 3)! **b)** Izmanto dalāmības pazīmi ar 11!

A2.7.4. Apskati dažādos gadījumus atkarībā no tā, kuras ir vienādsānu trijstūru sānu malas!

A2.7.5. **a)** Izdomā algoritmu, kā atrast visvieglāko un vissmagāko bumbiņu! **b)** Pamato, ka nevar noteikt katras bumbiņas masu!

A2.8.1. Izmantojot formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, pārveido izteiksmes $6 + 2\sqrt{5}$ un $6 + 2\sqrt{5}$! Ievēro, ka $\sqrt{a^2} = |a|$.

A2.8.2. Izmantojot krāsošanu, pamato, ka taisnstūri nevar pārklāt prasītajā veidā!

A2.8.3. Atrodi skaitli un pamato, ka tas atbilst uzdevuma nosacījumiem!

A2.8.4. Atrodi pretpiemēru, t. i., piemēru, kam izpildās nosacījumi $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$, bet pirmā paralēlskaldņa tilpums ir lielāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums!

A2.8.5. Vispirms pierādi, ka *BK* ir arī trijstūra augstums!

A2.9.1. Izmanto, ka kvadrātfunkcijai, kuras zari ir vērsti uz augšu, eksistē vismazākā vērtība!

A2.9.2. Izmantojot krāsošanu, pierādi, ka torni nevar salikt!

A2.9.3. Sadali izteiksmi $x^5 - 5x^3 + 4x$ reizinātājos!

A2.9.4. Izmanto vienādsānu trapeces un ievilkto leņķu īpašības!

A2.9.5. Pietiek parādīt, kā naturālos skaitļus uzrakstīt rindā.

Atrisinājumi

2013./2014. mācību gads

Tik vai… Cik?

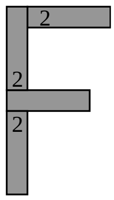
Pirmā kārta

T1.1.1. **D** $20+(13\cdot 20+13):(20-13)=20+(260+13):7=20+273:7=20+39=59$

T1.1.2. **C** Vismazākais no skaitļiem **5**407, 4**5**07, 40**5**7 un 407**5** ir 4057.

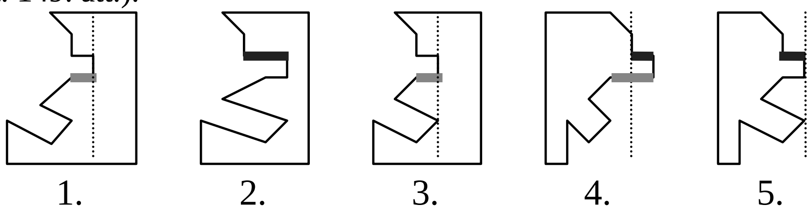
T1.1.3. **D** $74:9=8, atl.2$; $83:9=9, atl.2$; $110:9=12, atl.2$; $255:9=28, atl.3$. Tātad vienīgo atšķirīgo atlikumu iegūst, skaitli 255 dalot ar 9.

T1.1.4. **C** Kvadrāta perimetrs ir $P_{kv.}=4\cdot 8=32$ (cm), perimetrs vienai no četrām vienādajām daļām ir $P_{d.}=2\cdot(8+2)=20$ (cm). Iegūtās figūras (skat. 148. att.) perimetrs ir $P_F=4\cdot P_{d.}-6\cdot 2=80-12=68$ (cm). Tātad iegūtās figūras perimetrs atšķiras no kvadrāta perimetra par $68-32=36$ (cm).



148. att.

T1.1.5. **E** Skaidrs, ka kāda no pirmajām trīs figūrām ir jāsavieno ar kādu no pēdējām divām figūrām (skat. 149. att.).



149. att.

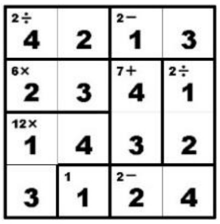
Otro figūru nav iespējams savienot ne ar 4., ne 5. figūru, jo atšķiras melno posmu garumi. Tātad otro figūru varam izslēgt. Ne 1., ne 3. figūru nav iespējams savienot ar 4. figūru, jo atšķiras pelēko posmu garumi. Tātad 4. figūru varam izslēgt. Atliek 5. figūra, kuru nevar savienot ar 1. figūru (skat. 149. att. punktēto līniju), bet var savienot ar 3. figūru.

T1.1.6. **C** Ābola laukums ir $S=6\cdot 4-3=21$ (rūtiņa). Tātad $\frac{1}{3}$ no ābola ir 7 rūtiņas. Tieši septiņas rūtiņas ir iekrāsotas 1., 4. un 5. zīmējumā.

T1.1.7. **C** Izteiksme $2\cdot x-15$ izsaka mūzikas skolotājas vecumu. Tātad izteiksme $(2\cdot x-15)-x$ izsaka mūzikas un matemātikas skolotājas gadu starpību. Mūzikas skolotāja nevar būt jaunāka kā matemātikas skolotāja, jo tad viņai būtu mazāk nekā 15 gadu. Līdz ar to dotā izteiksme izsaka, par cik gadiem mūzikas skolotāja ir vecāka nekā matemātikas skolotāja.

T1.1.8. **D** Apzīmējam zaķīša ausu garumu ar *A*, galvas garumu ar *G* un ķermeņa garumu ar *Ķ*. Tad $A=G+\frac{1}{3}Ķ$; $Ķ=G+A$ jeb $Ķ=G+G+\frac{1}{3}Ķ$, jeb $Ķ=30+\frac{1}{3}Ķ$. Tātad $\frac{2}{3}Ķ$ ir 30 cm un viss ķermenis ir 45 cm garš. Ausis ir 30 cm garas. Tātad zaķītis pavisam ir $45+15+30=90$ cm garš.

T1.1.9. **C** Šai mīklai ir tieši viens atrisinājums, skat. 150. att.



150. att.

T1.1.10. **D** Visaugstākā diennakts temperatūra ir $12°C$, viszemākā ir $-2°C$. Tātad visaugstākā diennakts temperatūra no viszemākās atšķiras par $14°C$.

Otrā kārta

T1.2.1. **A** $20+13-3\cdot 2+18:2=20+13-6+9=36$

T1.2.2. **C** Tā kā konfekšu ir par 10 mazāk nekā piparkūku, tad nav patiesa vienādība $k=p+10$.

T1.2.3. **B** Tā kā salvetei otra puse ir balta, tad atbilžu variants C neder. Neder arī A un D, jo divi vienas krāsas trijstūrīši nevar būt blakus.

T1.2.4. **D** Kvadrātu ar izmēriem 1×1 skaits ir 14, kvadrāti ar izmēriem 2×2 ir 6 un kvadrāti 3×3 ir 2. Tātad pavisam kopā $14+6+2=22$ kvadrāti.

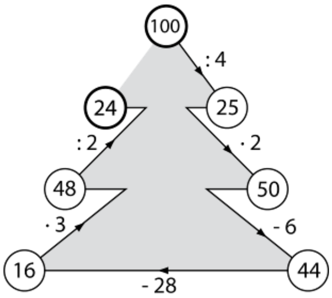
T1.2.5. Skaitlim 2013 ciparu summa ir 6. Pārbaudot skaitļus pēc 2013, iegūst, ka nākamais skaitlis, kam ir tāda pati ciparu summa kā 2013, ir skaitlis 2022. (Pārbaudi veic patstāvīgi!)

T1.2.6. **a)** Nevienādības labā puse nedrīkst būt lielāka kā 40, tātad aplītī jāieraksta skaitlis 34, tas ir, 41 > 6 + <u>34.</u>

b) Lielākais reizinājums, ko var iegūt kādu skaitli reizinot ar 3 un kas ir mazāks nekā 23, ir 21, tātad aplītī jāieraksta skaitlis 7, tas ir, <u>7</u> · 3 < 23.

T1.2.7. Skat. 151. att.

Piezīme. Aplīšus jāsāk aizpildīt no beigām un jāizmanto *apgrieztā* darbība.



151. att.

T1.2.8. Iespējami divi varianti, kā var pagriezt kauliņu, lai skaldne ar sešiem punktiem vairs nav redzama – skat. 152. att. un 153. att. Pirmajā gadījumā punktu kopskaits ir $1+2+3=6$, otrajā gadījumā punktu kopskaits ir $1+3+5=9$.

152. att.

153. att.

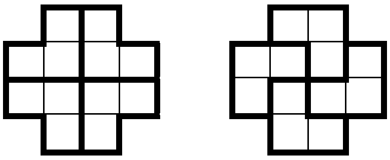
T1.2.9. No 1) secina, ka Andrim nav ne džemperis ar sniegpārsliņas attēlu, ne ar ziemeļbrieža attēlu, tātad ir ar eglītes attēlu. No 2) un 3) var secināt, ka Agnesei ir zils džemperis ar ziemeļbrieža attēlu. Līdz ar to Ilzei ir sarkans džemperis ar sniegpārsliņas attēlu un Andrim ir balts džemperis.

	Attēls	**Krāsa**
Andris	eglīte	balta
Agnese	ziemeļbriedis	zila
Ilze	sniegpārsliņa	sarkana

Trešā kārta

T1.3.1. $(34\ cm - 2\ dm)\cdot 5 + 30\ m = (34\ cm - 20\ cm)\cdot 5 + 3000\ cm = 14\ cm \cdot 5 + 3000\ cm =$
$= 70\ cm + 3000\ cm = 3070\ cm$

T1.3.2. Divi dažādi veidi, kā doto figūru sadalīt četrās vienādās figūrās, parādīti 154. att.



154. att.

T1.3.3. Aizpildītu tabulu skat. 155. att.

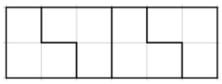
Sejiņa	😐	☺	☹
Cipars	1	2	3
Burts	B	A	C

155. att.

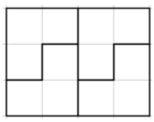
T1.3.4. Tā kā taisnstūri salika no četrām dotajām figūrām un katras figūras laukums ir 3 rūtiņas, tad iegūtā taisnstūra laukums ir $4\cdot 3 = 12$ rūtiņas. Aplūkosim visus iespējamos gadījumus, kādi var būt taisnstūra izmēri, ja tā laukums ir 12 rūtiņas.

Ja taisnstūra izmēri ir

- 1×12, tad to nevar salikt no dotajām figūrām, jo figūras augstums ir 2 rūtiņu augstumā;
- 2×6, tad taisnstūri var salikt (skat. 156. att.) un tā perimetrs ir $(2+6)\cdot 2 = 16$;
- 3×4, tad taisnstūri var salikt (skat. 157. att.) un tā perimetrs ir $(3+4)\cdot 2 = 14$.

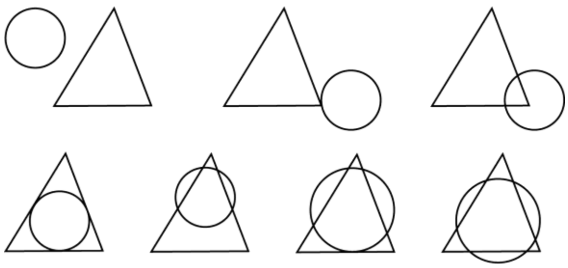


156. att.



157. att.

T1.3.5. Jā, visi gadījumi ir iespējami, skat., piemēram, 158. att.



158. att.

T1.3.6. Zināms, ka meitenes kopā iztērēja 10 €, pauzēs gāja kopā un katrā pauzē katra meitene iztērēja 1 €, tātad pavisam bija $10:2=5$ pauzes. Tā kā katra pauze ilga 10 min, tad kopā pauzēs tika pavadītas $10\cdot 5=50$ (min). Tāpēc, tikai slidojot, tika pavadītas 2 stundas, jo meitenes uz slidotavu atnāca 10:00 un aizgāja 12:50. Līdz ar to Maruta noslidoja $2\cdot 5=10$ (km), bet Agnese noslidoja $2\cdot 4=8$ (km). Tātad abas meitenes kopā noslidoja $10+8=18$ (km).

Ceturtā kārta

T1.4.1. $(42+21):7+36:9=13$; $25\cdot(17-15)+189=239$

T1.4.2.

5.4	5 eiro un 40 centi	29.09	29 eiro un 9 centi
29.9	29 eiro un 90 centi	47.05	47 eiro un 5 centi
0.8	80 centi	10.5	10 eiro un 50 centi
18.	18 eiro	12.2	12 eiro un 20 centi

T1.4.3.
$$x\cdot 9=324$$
$$x=324:9$$
$$x=36$$

T1.4.4. **a)**
$$6\cdot x+20=200$$
$$6\cdot x=200-20$$
$$6\cdot x=180$$
$$x=180:6$$
$$x=30$$

b)
$$240:x=3+21:3-6$$
$$240:x=3+7-6$$
$$240:x=4$$
$$x=240:4$$
$$x=60$$

T1.4.5. **a)** $3\cdot 20=60$ (km); **b)** $1\frac{1}{2}\cdot 20=30$ (km); **c)** $\frac{3}{4}\cdot 20=15$ (km)

T1.4.6. Tā kā 1. klasē ir a skolēni un 2. klasē ir par 3 skolēniem vairāk nekā 1. klasē, tad 2. klasē ir $a+3$ skolēni. Tātad abās klasēs kopā ir $a+a+3=2a+3$ skolēni.

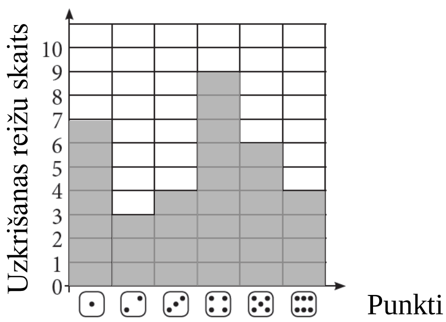
T1.4.7. Taisnstūrim, kas dots 26. att., ir iekrāsotas $\frac{2}{8}$ jeb $\frac{1}{4}$ un nav iekrāsotas $\frac{6}{8}$ jeb $\frac{3}{4}$;

taisnstūrim, kas dots 27. att., ir iekrāsotas $\frac{6}{20}$ jeb $\frac{3}{10}$ un nav iekrāsotas $\frac{14}{20}$ jeb $\frac{7}{10}$;

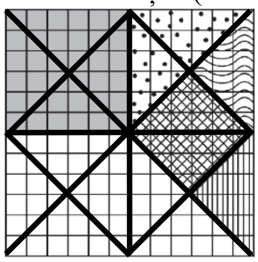
taisnstūrim, kas dots 28. att., ir iekrāsotas $\frac{3}{12}$ jeb $\frac{1}{4}$ un nav iekrāsotas $\frac{9}{12}$ jeb $\frac{3}{4}$.

T1.4.8.

Punkti	Uzkrišanas reižu skaits
⚀	7
⚁	3
⚂	4
⚃	9
⚄	6
⚅	4



T1.4.9. Lai būtu vieglāk noteikt, kāda daļa no dotā kvadrāta ir iekrāsota katrā veidā, to var sadalīt 16 vienādās daļās (skat. 159. att.).



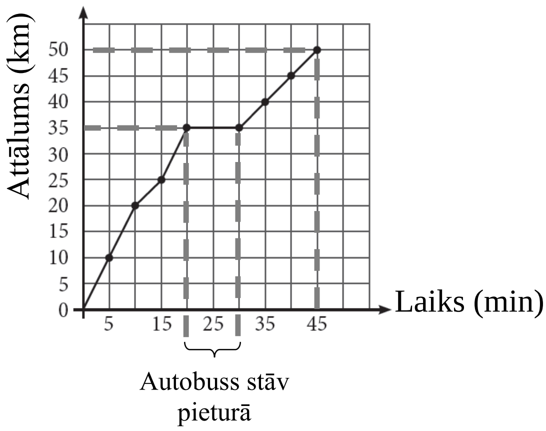
159. att.

	$\frac{4}{16}$ jeb $\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$
	$\frac{2}{16}$ jeb $\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$
	$\frac{2}{16}$ jeb $\frac{1}{8}$		$\frac{6}{16}$ jeb $\frac{3}{8}$

T1.4.10. Katrs mazais četrstūrītis, kas apvilkts riņķim, ir kvadrāts, kura malas garums ir vienāds ar riņķa diametra garumu, tātad tas ir $6 \cdot 2 = 12$ (cm). Līdz ar to iekrāsotās figūras perimetrs ir $12 \cdot 14 = 168$ (cm). Katra kvadrāta laukums ir $12 \cdot 12 = 144$ (cm^2). Tātad iekrāsotās figūras laukums ir $144 \cdot 6 = 864$ (cm^2).

T1.4.11. Kastes pamata laukums ir $3 \cdot 5 = 15$ (cm^2), priekšpuses un aizmugures laukums ir $2 \cdot 5 = 10$ (cm^2), bet katra sāna laukums ir $2 \cdot 3 = 6$ (cm^2). Tātad ar rūtaino papīru pārklātais laukums ir $15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 47$ (cm^2).

T1.4.12. (Skat. 160. att.) **a)** 50 km; **b)** 20 min; **c)** 10 min; **d)** 15 km.



160. att.

Jauno matemātiķu konkurss

Pirmā kārta

J1.1.1. Rēbuss

Atrisini skaitļu rēbusu!

$$\begin{array}{r} \mathrm{T} \\ +\,\mathrm{T\,E} \\ +\,\mathrm{T\,I\,E} \\ +\,\mathrm{T\,I\,T\,E} \\ +\,\mathrm{A\,I\,T\,I\,E} \\ \hline \mathrm{O\,L\,I\,L\,A} \end{array}$$

Vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Pietiek atrast vienu atrisinājumu.

Atrisinājums. Piemēram, A = 3, E = 6, I = 0, L = 1, O = 4, T = 9.

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\,9\,6 \\ +\,9\,0\,6 \\ +\,9\,0\,9\,6 \\ +\,3\,0\,9\,0\,6 \\ \hline 4\,1\,0\,1\,3 \end{array}$$

Piezīme. Dotajam skaitļu rēbusam bez augstāk minētā atrisinājuma ir vēl trīs atrisinājumi: 1) A = 5, E = 4, I = 1, L = 2, O = 6, T = 9; 2) A = 8, E = 6, I = 5, L = 0, O = 9, T = 4; 3) A = 8, E = 1, I = 7, L = 2, O = 9, T = 4.

J1.1.2. Par pelēniem

Pelēni Pīks un Pīka palīdzēja mammai vākt krājumus ziemai. Vienu dienu viņi vāca pupiņas – baltas, sarkanas un raibas. Dienas beigās izrādījās, ka abi savākuši vienādu skaitu sarkano pupiņu. Pīka baltās pupiņas bija savākusi par 20% vairāk nekā sarkanās pupiņas un raibās pupiņas par 25% mazāk nekā baltās pupiņas. Savukārt Pīks baltās pupiņas bija savācis par 30% mazāk nekā sarkanās pupiņas un raibās pupiņas par 50% vairāk nekā baltās pupiņas.

Kurš no pelēniem ir strādājis čaklāk un dienas laikā savācis vairāk pupiņu?

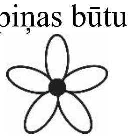
Atrisinājums. Ar x apzīmējam sarkano pupiņu skaitu un dotos lielumus sarakstām tabulā.

	Pīka	Pīks
Sarkanās	x	x
Baltās	$x+0{,}2x=1{,}2x$	$x-0{,}3x=0{,}7x$
Raibās	$0{,}75\cdot1{,}2x=0{,}9x$	$1{,}5\cdot0{,}7x=1{,}05x$
Kopā	$3{,}1x$	$2{,}75x$

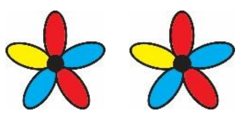
Tā kā $3{,}1x > 2{,}75x$, tad secinām, ka Pīka ir strādājusi čaklāk un savākusi vairāk pupiņu.

J1.1.3. Krāsainās puķītes

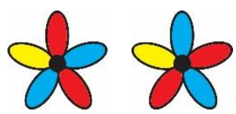
Aija uzzīmēja pieclapu puķīti (skat. 161. att.) un grib to izkrāsot. Aijai ir trīs krāsu zīmuļi: sarkans, zils un dzeltens. Cik dažādos veidos Aija var izkrāsot savu puķīti, lai blakus esošās ziedlapiņas būtu dažādās krāsās?



161. att.



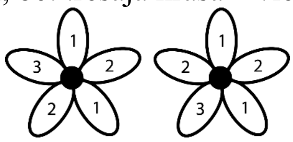
162. att.



163. att.

Puķītes uzskata par dažādi izkrāsotām, ja tās nevar iegūt vienu no otras, pagriežot puķīti ap centru, piemēram, 162. att. redzamās puķītes ir vienādas, bet 163. att. – dažādas.

Atrisinājums. Tā kā puķītei ir piecas – nepāra skaits – ziedlapiņu, tad, lai divas vienas krāsas ziedlapiņas nebūtu blakus, katrai puķītei jāizmanto visas trīs krāsas, pie tam divās krāsās jābūt nokrāsotām pa divām ziedlapiņām, bet trešajā krāsā – vienai ziedlapiņai.

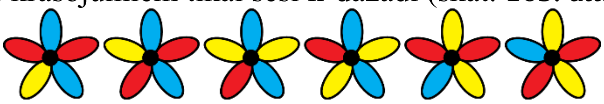


164. att.

Iespējami divi principiāli atšķirīgi krāsu izvietojumi (skat. 164. att.), kur krāsas 1, 2, 3 katrā gadījumā var būt sakārtotas 6 veidos:

zila, sarkana, dzeltena;
zila, dzeltena, sarkana;
dzeltena, sarkana, zila;
dzeltena, zila, sarkana;
sarkana, zila, dzeltena;
sarkana, dzeltena, zila.

Taču no iegūtajiem 12 krāsojumiem tikai seši ir dažādi (skat. 165. att.).


165. att.

J1.1.4. Daudzstūri un to diagonāles

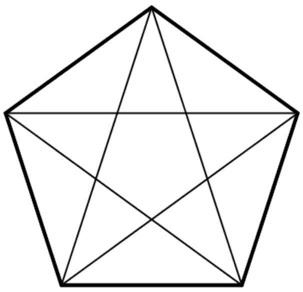
a) Uzzīmē izliektu daudzstūri, kuram diagonāļu skaits sakrīt ar malu skaitu!

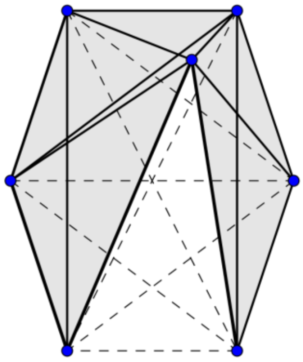
b) Vai eksistē tāds ieliekts daudzstūris, kuram pilnībā iekšpusē esošo diagonāļu skaits sakrīt ar malu skaitu un ir tieši puse no visām diagonālēm? (Diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra virsotnes un kas nav daudzstūra mala.) *Ja eksistē, tad parādi piemēru, ja neeksistē, tad pamato, kāpēc!*

Atrisinājums. a) Izliekts daudzstūris, kuram diagonāļu skaits sakrīt ar malu skaitu, ir piecstūris, skat. 166. att.

Piezīme. Tā kā jebkura daudzstūra diagonāļu skaitu apraksta sakarība $\frac{m \cdot (m-3)}{2}$, kur m ir daudzstūra malu skaits, tad meklētā daudzstūra malu skaitu varēja iegūt, atrisinot vienādojumu $\frac{m \cdot (m-3)}{2} = m$.

b) Jā, eksistē, piemēram, ieliekts septiņstūris, skat. 167. att.


166. att.


167. att.

J1.1.5. Lauztā līnija

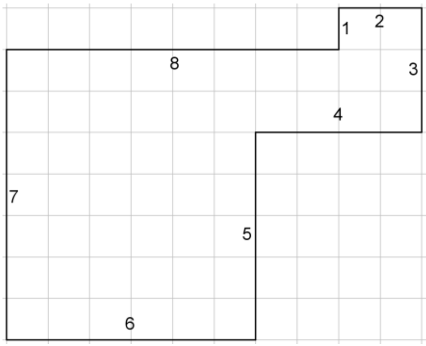
Rūtiņu lapā uzzīmēta slēgta lauzta līnija, kura pati sevi nekrusto, tās posmi iet pa rūtiņu malām un posmu garumi pēc kārtas ir 1, 2, 3, 4, 5, ... vienības (1 vienība ir 1 rūtiņas malas garums). Kāds ir mazākais iespējamais šādas lauztas līnijas garums? *Uzzīmē piemēru un pamato savu atbildi!*

Atrisinājums. Mazākais iespējamais šādas lauztas līnijas garums ir 36 vienības (skat. 168. att.). Pamatosim, ka mazāks garums lauztai līnijai ar aprakstītajām īpašībām nevar būt.

Izdarīsim dažus secinājumus par dotās lauztās līnijas īpašībām.

1) Lauztās līnijas posmi pamīšus ir horizontāli un vertikāli. Tātad
   a) vai nu visu vertikālo posmu garumi ir nepāra skaitļi (1, 3, 5, ...) un horizontālo posmu garumi ir pāra skaitļi (2, 4, 6, ...),
   b) vai visu horizontālo posmu garumi ir nepāra skaitļi (1, 3, 5, ...) un vertikālo posmu garumi ir pāra skaitļi (2, 4, 6, ...).
2) Lai iegūtu slēgtu lauztu līniju, vertikālo posmu skaitam jābūt vienādam ar horizontālo posmu skaitu. Tātad kopējais posmu skaits ir pāra skaitlis.
3) Apstaigājot lauzto līniju, pa labi "ejošo" posmu kopgarumam jābūt vienādam ar pa kreisi "ejošo" posmu kopgarumu, uz augšu "ejošo" posmu kopgarumam jābūt vienādam ar uz leju "ejošo" posmu kopgarumu. Tātad visu vertikālo posmu kopgarums ir pāra skaitlis un visu horizontālo posmu kopgarums ir pāra skaitlis.
4) No 1) un 3) izriet, ka nepāra garuma posmu skaits ir pāra skaitlis.
5) No 2) un 4) izriet, ka kopējais posmu skaits dalās ar 4.

Pirmais naturālais skaitlis, kas dalās ar 4, ir 4. Bet, ja posmu garumi ir 1, 2, 3, 4, no tiem nevar izveidot prasītā veida lauzto līniju. Nākamais naturālais skaitlis, kas dalās ar 4, ir 8 un tas, ka no posmiem ar garumiem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, tad var izveidot lauzto līniju atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ir parādīts 168. att.



168. att.

Otrā kārta

J1.2.1. Naudas maiņa

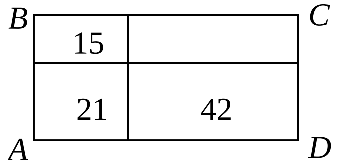
Atrodi vienu summu veselos latos, kuru, konvertējot uz eiro pēc Latvijas Bankas noteiktā kursa (1 EUR = 0,702804 LVL) un noapaļojot līdz veseliem centiem, iegūst summu veselos eiro!

Atrisinājums. Piemēram, 175 LVL = 249 EUR ($175 : 0{,}702804 \approx 249{,}002566\,9 \approx 249{,}00$).

Piezīme. Der arī atbilde 702 804 LVL = 1 000 000 EUR.

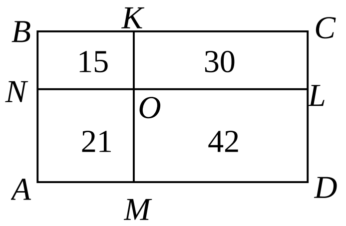
J1.2.2. Par taisnstūri

Taisnstūris *ABCD* sadalīts četros mazākos taisnstūros (skat. 169. att.). Noskaidro taisnstūra *ABCD* malu garumus, ja zināmi trīs mazāko taisnstūru laukumi!

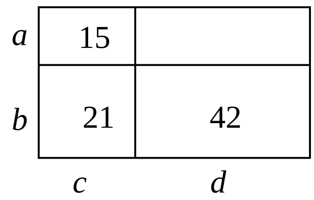


169. att.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $\frac{S_{BNOK}}{S_{NAMO}} = \frac{BN \cdot NO}{NA \cdot NO} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ (skat. 170. att.) jeb $BN : NA = 5 : 7$, jeb $BN = 5x$, $NA = 7x$ un $AB = 12x$. Līdzīgi $\frac{S_{NAMO}}{S_{OMDL}} = \frac{AM \cdot MO}{MD \cdot MO} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2}$ jeb $AM : MD = 1 : 2$, jeb $AM = y$, $MD = 2y$ un $AD = 3y$. Tad taisnstūra *KOLC* laukums ir $10xy$ un taisnstūra *BNOK* laukums ir $5xy$. Tātad taisnstūra *KOLC* laukums ir divreiz lielāks nekā *BNOK* laukums, tas ir, 30. Līdz ar to taisnstūra *ABCD* laukums ir $15 + 30 + 21 + 42 = 108$. Tā kā uzdevumā nav doti nekādi citi nosacījumi par taisnstūra malu garumiem, tad taisnstūra malu garumi var būt jebkuri pozitīvi skaitļi, kuriem izpildās $AB = \frac{108}{AD}$.



170. att.



171. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam mazo taisnstūru malu garumus tā, kā parādīts 171. att. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $a \cdot c = 15$; $b \cdot c = 21$; $b \cdot d = 42$. Sareizinot šīs vienādības iegūstam

$$a \cdot c \cdot b \cdot c \cdot b \cdot d = 15 \cdot 21 \cdot 42;$$
$$a \cdot d \cdot 21 \cdot 21 = 15 \cdot 21 \cdot 42;$$
$$a \cdot d = 30.$$

Tā kā uzdevumā nav doti nekādi citi nosacījumi par taisnstūra malu garumiem, tad taisnstūra malu garumi var būt jebkuri pozitīvi skaitļi, kuriem izpildās $AB = \frac{108}{AD}$ (skat. 170. att.).

Piezīme. Ja meklējam tādu atrisinājumu, lai visu uzdevumā doto nogriežņu garumi būtu veseli skaitļi, tad taisnstūru *BNOK* un *ANOM* laukumiem jādalās ar *y*. Tas nozīmē, ka iespējamās *y* vērtības ir 1 vai 3.

Ja $y = 1$, tad no $BN \cdot NO = 5x \cdot y = 15$ iegūst, ka $x = 3$. Tad taisnstūra *ABCD* malu garumi ir $AB = 12x = 36$ un $AD = 3y = 3$.

Ja $y = 3$, tad no $BN \cdot NO = 5x \cdot y = 15$ iegūst, ka $x = 1$. Tad taisnstūra *ABCD* malu garumi ir $AB = 12x = 12$ un $AD = 3y = 9$.

J1.2.3. Rūķīši un lampiņas

Sniegbaltītes pils zāle tiek apgaismota ar 50 lampām, katrai no tām ir savs slēdzis. Slēdži izvietoti rindā pie sienas. Sākumā visas lampas bija izslēgtas. Tad zālē ienāca pirmais rūķītis un visas lampas ieslēdza. Pēc tam ienāca otrais rūķītis un pārslēdza katru otro slēdzi (ja lampa bija ieslēgta, tā tika izslēgta un otrādi – ja lampa bija izslēgta, tā tika ieslēgta). Pēc tam trešais rūķītis pārslēdza katru trešo slēdzi, vēlāk ceturtais rūķītis pārslēdza katru ceturto slēdzi, piektais rūķītis – katru piekto slēdzi, sestais rūķītis – katru sesto slēdzi, un septītais rūķītis pārslēdza katru septīto slēdzi. Cik lampas būs ieslēgtas pēc septītā rūķīša darbībām?

1. atrisinājums. Tabulā ar „x” atzīmētas lampas, kuras katrs rūķītis pārslēdz. Ja slēdzis tika pārslēgts pāra skaita reižu, lampa paliks izslēgta, bet, ja nepāra skaitu reižu, tad ieslēgta. Tātad beigās ieslēgtas būs 30 lampas.

Lampa / Rūķītis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x
3			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x			x		
4				x				x				x				x				x				x				x				x				x				x				x				x		
5					x					x					x					x					x					x					x					x					x					x
6						x						x						x						x						x						x						x						x		
7							x							x							x							x							x							x							x	

2. atrisinājums. Ja slēdzis tika pārslēgts pāra skaitu reižu, lampa paliks izslēgta, bet ja nepāra skaitu reižu, tad – ieslēgta. Apskatīsim, cik lampas savu stāvokli vairs nemainīs pēc katra rūķīša darbību izpildes.

Lampas, kuru numuri ir 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 un 47 (tas ir, 1 un pirmskaitļi, kas lielāki nekā 7), tiks ieslēgtas tikai vienu reizi un paliks ieslēgtas. Tādas ir 12 lampas.

Otrais rūķītis pārslēgs visas lampas, kuru numuri ir pāra skaitļi, tās izslēdzot. Pie tam sešas lampas ar numuriem 2, 22, 26, 34, 38 un 46 vairs ne reizi netiks pārslēgtas, jo, dalot ar 2, iegūst vieninieku vai pirmskaitļus, kas lielāki nekā 7.

Trešais rūķītis pārslēgs lampas, kuru numuri dalās ar 3. Lampas, kuru numuri dalās ar 3 un ir pāra skaitļi, vēl pārslēgs arī 6. rūķītis, taču piecas lampas ar numuriem 3, 9, 27, 33 un 39 neviens rūķītis vairs nepārslēgs. Tā kā šīs lampas tika pārslēgtas divas reizes (tās pārslēdza 1. un 3. rūķītis), tās paliks izslēgtas.

Pēc ceturtā rūķīša darbībām vairs netiks pārslēgtas piecas lampas ar numuriem 4, 8, 16, 32 un 44. Šīs lampas līdz šim bija pārslēdzis 1. un 2. rūķītis, tātad tagad tās ir ieslēgtas.

Pēc piektā rūķīša darbībām vairs nevienu reizi netiks pārslēgtas lampas, kuru numuri dalās ar 5, bet nedalās ar 6 vai 7. Pie tam četras lampas (Nr. 10, 15, 45, 50) tika pārslēgtas trīs reizes un paliks ieslēgtas, bet četras lampas tika pārslēgtas 2 vai 4 reizes (Nr. 5, 20, 25, 40), tās paliks izslēgtas.

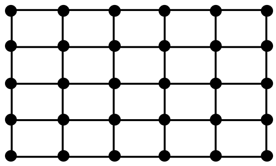
Lampas, kuru numuri dalās ar 6, tika pārslēgtas vismaz četras reizes (1., 2., 3. un 6. rūķītis), pie tam lampas, kurus numuri dalās ar 6, bet nedalās ar 7, vairs nevienu reizi netiks pārslēgtas. Lampas Nr. 6. un 18. tika pārslēgtas tikai četras reizes un paliks izslēgtas, taču piecas lampas (Nr. 12, 24, 30, 36, 48) tika pārslēgtas piecas reizes un beigās palika ieslēgtas.

Septītais rūķītis pārslēdza septiņas lampas, no kurām trīs pavisam kopā tika pārslēgtas 2 vai 4 reizes (Nr. 7, 28, 49), bet četras tika pārslēgtas 3 vai 5 reizes (Nr. 14, 21, 35 un 42) un palika ieslēgtas.

Tātad beigās ieslēgtas būs 12 + 5 + 4 + 5 + 4 = 30 lampas.

J1.2.4. Par zvejas tīklu

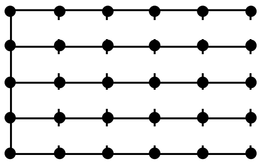
Zvejas tīkla fragments veidots no aukliņām, kas sasietas kopā (skat. 172. att., kurā ar aplīšiem attēloti mezgli). Kādu lielāko skaitu aukliņu posmu var pārgriezt tā, lai tīkls netiktu sadalīts divās atsevišķās daļās? (Aukliņas posms ir aukliņas daļa starp diviem blakus mezgliem. Mezglus sagriezt nedrīkst.) *Parādi, kā to izdarīt un pamato, kāpēc nevar pārgriezt vairāk posmus!*



172. att.

Atrisinājums. Var pārgriezt 20 posmus, skat., piemēram, 173. att. Pamatosim, ka vairāk posmus pārgriezt nevar.

Sākotnējais tīkla fragments sastāv no 30 mezgliem un 49 posmiem. Arī pēc aukliņu pārgriešanas mezglu skaits paliks tas pats. Lai visi mezgli joprojām būtu saistīti vienā veselā gabalā, jāpaliek vismaz $30 - 1 = 29$ aukliņu posmiem, tātad var pārgriezt ne vairāk kā $49 - 29 = 20$ posmus.



173. att.

J1.2.5. Jūras akmentiņi

Olafs un Mairis jūras krastā bija savākuši 100 akmentiņus. Viņi nolēma spēlēt spēli. Viena gājiena laikā spēlētājam visi akmentiņi jāsadala pēc izvēles vairākās vienādās kaudzītēs (vismaz divās), un visi akmeņi no vienas kaudzītes jāiemet jūrā. Atlikušie akmentiņi jāsastumj vienā kaudzē, un gājiens pāriet pie otra spēlētāja. Tas, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no zēniem noteikti var panākt savu uzvaru šajā spēlē, ja Olafs sāk pirmais?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Olafs (1. spēlētājs) vienmēr var uzvarēt.

Ievērojam,

1) ja pirms gājiena izdarīšanas kaudzē ir palicis pāra skaits akmeņu, spēlētājs noteikti var aizmest prom
   - gan nepāra skaitu akmeņu (kaut vai sadalot kaudzītēs pa 1 akmenim) un atstāt nepāra skaita akmeņu,
   - gan aizmest prom pāra skaitu akmeņu (kaut vai sadalot kaudzītēs pa 2 akmeņiem) un atstāt pāra skaita akmeņu;
2) ja pirms gājiena izdarīšanas kaudzē ir palicis nepāra skaits akmeņu, tos varēs sadalīt tikai nepāra skaita kaudzītēs pa nepāra skaita akmeņiem katrā (nepāra skaitlis nedalās ne ar vienu pāra skaitli), tātad noteikti būs jāaizmet nepāra skaits akmeņu un paliks pāra skaits akmeņu.

Uzvarēs tas spēlētājs, kurš pēc sava gājiena atstās tikai 1 (nepāra skaits) akmeni. Tā kā spēles sākumā ir pāra skaits akmeņu, tad pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu aizmet prom nepāra skaita akmeņu, atstājot nepāra skaita akmeņu. Otrajam spēlētājam noteikti būs jāaizmet nepāra skaits akmeņu, atstājot pāra skaita akmeņu, tātad pirmais spēlētājs noteikti varēs izdarīt nākamo gājienu, atstājot nepāra skaita akmeņu utt.

Tā kā katrā gājienā akmeņu skaits samazinās, tad kādā brīdī pienāks situācija, kad būs palicis tikai 1 akmens, un tas var būt palicis tikai pēc 1. spēlētāja gājiena, tāpēc 2. spēlētājs zaudēs.

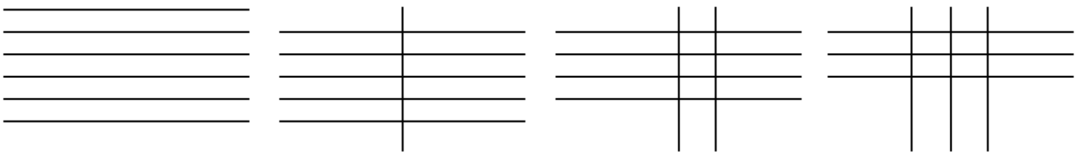
Trešā kārta

J1.3.1. Par krustpunktiem

Plaknē novilktas sešas taisnes tā, ka katras divas ir vai nu paralēlas, vai perpendikulāras. Cik krustpunktu var veidoties? *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*

Atrisinājums. Iespējami četri dažādi varianti, kā var būt novietotas taisnes:

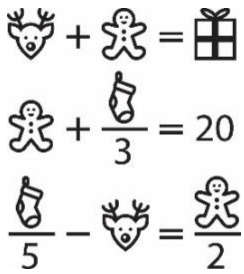
- neviena taisne nav perpendikulāra pārējām, tad ir 0 krustpunkti (skat. 174. att. a));
- 1 taisne perpendikulāra pārējām (jeb 5 perpendikulāras vienai), tad ir 5 krustpunkti (skat. 174. att. b));
- 2 taisnes perpendikulāras pārējām (jeb 4 perpendikulāras pārējām), tad ir 8 krustpunkti (skat. 174. att. c));
- 3 taisnes perpendikulāras pārējām, tad ir 9 krustpunkti (skat. 174. att. d)).



174. att.

J1.3.2. Ziemassvētku mīkla

Atrisini skaitļu rēbusu (skat. 175. att.)! Katra figūra apzīmē naturālu skaitli. Vienādām figūrām atbilst vienādi skaitļi, dažādām – dažādi. *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



175. att.

Atrisinājums. Apzīmējam  ar *b*,  ar *p*,  ar *d* un  ar *z*. Tad uzdevumā doto var pārrakstīt kā vienādojumu sistēmu (jo visām vienādībām jāizpildās vienlaicīgi)

$$\begin{cases} b + p = d & (1) \\ p + \dfrac{z}{3} = 20 & (2) \\ \dfrac{z}{5} - b = \dfrac{p}{2} & (3) \end{cases}$$

1) No (2) secinām, ka z dalās ar 3 un $\dfrac{z}{3} < 20$.

2) Vienādojot saucējus, no (3) iegūst $\dfrac{2z - 5p}{10} = b$. Reizinājuma $2z$ pēdējais cipars var būt 0; 2; 4; 6; 8, bet reizinājuma $5p$ pēdējais cipars var būt 0; 5. Tā kā starpībai $2z - 5p$ jādalās ar 10, t. i., starpības pēdējam ciparam ir jābūt 0, tad vienīgā iespēja ir, ka gan $2z$, gan $5p$ pēdējais cipars ir 0. Līdz ar to z jāsatur reizinātājs 5 jeb z jādalās ar 5 un p jādalās ar 2 jeb jābūt pāra skaitlim.

3) Reizinot abas vienādojuma (3) puses ar 10, iegūst $2z-10b=5p$ jeb $2z=5p+10b$, jeb $2z=5\cdot(p+2b)$. Tā kā šī vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad ar 5 jādalās arī kreisajai pusei. Tas nozīmē, ka z dalās ar 5. Līdzīgi, tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 2, tad arī labajai pusei jādalās ar 2. Tas nozīmē, ka $p+2b$ dalās ar 2 un tas ir tikai tādā gadījumā, ja p dalās ar 2 jeb ir pāra skaitlis.

4) Aplūko (2). Tā kā p – pāra skaitlis, tad $\frac{z}{3}$ arī ir pāra skaitlis, tas ir, z dalās ar 2. Tātad esam ieguvuši, ka z dalās ar 2, 3 un 5. Ņemot vērā to, ka $\frac{z}{3}<20$, vienīgā iespēja, ka $z=30$. Līdz ar to $p=10$.

5) Tad uzdevumā doto var pārrakstīt

$$\begin{cases} b+10=d & (4) \\ 10+\dfrac{30}{3}=20 & \\ \dfrac{30}{5}-b=\dfrac{10}{2} & (5) \end{cases}$$

6) No (5) iegūst, ka $b=1$ un pēc tam no (4) iegūst, ka $d=11$.

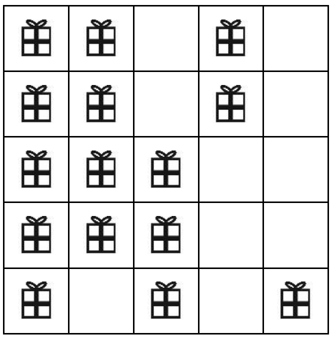
Atbilde.  = 1,  = 10,  = 11,  = 30.

J1.3.3. Ziemassvētku vecīša paklājs

Ziemassvētku vecīša darba istabā ir paklājs, kas sadalīts 5×5 kvadrātiņos. Rūķīši bija iesaiņojuši dāvaniņas un atstājuši tās uz paklāja. Izrādījās, ka katrā kvadrātiņā ir ne vairāk kā viena dāvana, pie tam visās rindās ir vienāds dāvanu skaits, bet visās kolonnās – atšķirīgs dāvanu skaits.

Parādi vienu veidu, kā dāvanas varēja būt izvietotas uz paklāja!

Atrisinājums. Dāvanas uz paklāja varēja būt izvietotas, piemēram, tā, kā parādīts 176. att.



176. att.

Piezīme. Tā kā ir piecas rindas un visās rindās ir jābūt vienādam dāvanu skaitam, tad kopējam dāvanu skaitam jādalās ar 5. Kopējais dāvanu skaits nevar būt 5, jo to nevar izteikt kā piecu dažādu veselu nenegatīvu skaitļu summu (visās kolonnās ir atšķirīgs dāvanu skaits), bet tas var būt 10 (tad kolonnās attiecīgi ir 0, 1, 2, 3, 4 dāvanas) vai 15 (skat. 176. att.).

J1.3.4. Divnieku un trijnieku summas

Cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitli **a)** 14; **b)** 22?

Veidi, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 8 var izteikt četros dažādos veidos: $8 = 2+2+2+2 = 2+3+3 = 3+2+3 = 3+3+2$.

1. atrisinājums. a) Lai summā iegūtu skaitli 14, starp saskaitāmajiem jābūt pāra skaitam trijnieku. Tad iespējami trīs gadījumi.

- Starp saskaitāmajiem nav neviens trijnieks jeb $14 = 0\cdot 3 + 7\cdot 2$. Tā kā visi saskaitāmie ir tikai divnieki, tad summu var izteikt vienā veidā.
- Starp saskaitāmajiem ir divi trijnieki jeb $14 = 2\cdot 3 + 4\cdot 2$. Šajā gadījumā summa sastāv no sešiem saskaitāmajiem (diviem trijniekiem un četriem divniekiem). Pirmo trijnieku var ievietot jebkurā no sešām saskaitāmo pozīcijām, otro trijnieku – jebkurā no piecām atlikušajām pozīcijām, pārējās pozīcijās (tajās, kurās nav trijnieki) jāievieto divnieki. Tātad summu viennozīmīgi nosaka trijnieku izkārtojums. Līdz ar to iespējami $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ dažādi saskaitāmo izkārtojumi. (Reizinājums $6\cdot 5$ ir jādala ar 2, jo, samainot pirmo trijnieku ar otro trijnieku vietām, iegūsim tādu pašu saskaitāmo izkārtojumu.)
- Starp saskaitāmajiem ir četri trijnieki jeb $14 = 4\cdot 3 + 1\cdot 2$. Šajā gadījumā summa sastāv no pieciem saskaitāmajiem. Līdzīgi, kā iepriekšējā gadījumā trijnieku novietojumus, šoreiz apskatīsim divnieka novietojumu (izvēlamies divnieku, jo šajā gadījumā tas ir tikai viens). Summu viennozīmīgi nosaka divnieka novietojums. Tā kā to var ievietot piecās dažādās pozīcijās, tad ir iespējami pieci dažādi saskaitāmo izkārtojumi.

Tātad skaitli 14 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt $1+15+5 = 21$ veidā.

b) Lai summā iegūtu skaitli 22, starp saskaitāmajiem jābūt pāra skaitam trijnieku. Tad iespējami četri gadījumi.

- Starp saskaitāmajiem nav neviens trijnieks jeb $22 = 0\cdot 3 + 11\cdot 2$. Tā kā visi saskaitāmie ir tikai divnieki, tad summu var izteikt vienā veidā.
- Starp saskaitāmajiem ir divi trijnieki jeb $22 = 2\cdot 3 + 8\cdot 2$. Šajā gadījumā summa sastāv no desmit saskaitāmajiem. Pirmo trijnieku var ievietot jebkurā no desmit saskaitāmo pozīcijām, otro trijnieku – jebkurā no deviņām atlikušajām pozīcijām, pārējās pozīcijās jāievieto divnieki. Līdz ar to iespējami $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ dažādi saskaitāmo izkārtojumi.
- Starp saskaitāmajiem ir četri trijnieki jeb $22 = 4\cdot 3 + 5\cdot 2$. Šajā gadījumā summa sastāv no deviņiem saskaitāmajiem. Pirmo trijnieku var ievietot jebkurā no deviņām saskaitāmo pozīcijām, otro trijnieku – jebkurā no astoņām atlikušajām pozīcijām, trešo trijnieku – jebkurā no septiņām atlikušajām pozīcijām un ceturto trijnieku – jebkurā no sešām atlikušajām pozīcijām. Ja visi trijnieki būtu dažādi, tad mēs iegūtu $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$ dažādus saskaitāmo izkārtojumus, bet tā kā visi trijnieki ir vienādi, tad iegūtais skaits ir jādala ar to, cik dažādos veidos varētu rindā izkārtot četrus skaitļus, ja tie visi būtu dažādi, tas ir, ar $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. Līdz ar to iespējami $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ dažādi saskaitāmo izkārtojumi.
- Starp saskaitāmajiem ir seši trijnieki jeb $22 = 6\cdot 3 + 2\cdot 2$. Šajā gadījumā summa sastāv no astoņiem saskaitāmajiem. Pirmo divnieku var ievietot jebkurā no astoņām saskaitāmo pozīcijām, otro divnieku – jebkurā no septiņām atlikušajām pozīcijām. Līdz ar to iespējami $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ dažādi saskaitāmo izkārtojumi.

Tātad skaitli 22 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt $1+45+126+28 = 200$ veidos.

2. atrisinājums. Protams, mēs varētu mēģināt uzrakstīt visas iespējamā skaitļa 12 izteiksmes ar vieninieku un divnieku summu, un pēc tam saskaitīt, cik tādu izteiksmju ir. Tomēr tam vajadzētu daudz laika, un būtu ļoti jāuzmanās, lai kāda no iespējām nepaliktu nepamanīta. Tāpēc rīkosimies citādi: mēģināsim pakāpeniski noskaidrot, cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summa izsakāmi skaitļi 2, 3, 4,…, un centīsimies ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu.

Skaitlis	Kā var izteikt kā summu?	Cik dažādi veidi?
2	$2=2$	1
3	$3=3$	1
4	$4=2+2$	1
5	$5=2+3$ $5=3+2$	2
6	$6=3+3$ $6=\underline{4}+2=\underline{2+2}+2$	$1+1=2$
7	$7=\underline{4}+3=\underline{2+2}+3$ $7=\underline{5}+2=\underline{2+3}+2=$ $=\underline{3+2}+2$	$1+2=3$
8	$8=\underline{5}+3=\underline{2+3}+3=$ $=\underline{3+2}+3$ $8=\underline{6}+2=\underline{3+3}+2=$ $=\underline{\underline{4}+2}+2=\underline{\underline{2+2}}+2+2$	$2+2=4$
…	…	…

To dažādo summu skaitu, kas saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izsaka skaitli n, apzīmēsim ar $A(n)$. Iegūstam tabulu:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$A(n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	...

Redzam, ka šīs tabulas apakšējā rindiņā katrs skaitlis, sākot ar ceturto, ir to divu skaitļu summa, kas atrodas divas un trīs pozīcijas pirms tā. To var uzrakstīt ar formulu $A(n)=A(n-3)+A(n-2)$, kur $n\geq 5$.

Pamatosim, ka šī formula tiešām ir patiesa. Skaitli n var uzrakstīt kā divnieku un trijnieku summu $A(n)$ dažādos veidos. Katra šāda summa beidzas vai nu ar saskaitāmo 3, vai ar saskaitāmo 2. Katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā trijnieka) ir $n-3$, un šie pārējie saskaitāmie ir divnieki vai trijnieki, tātad šādu summu skaits ir $A(n-3)$. Katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā divnieka) ir $n-2$, un šie pārējie saskaitāmie ir divnieki vai trijnieki, tātad šādu summu skaits ir $A(n-2)$. Tā kā katra summa atšķiras no katras summas ar pēdējo saskaitāmo, tad formula $A(n)=A(n-3)+A(n-2)$ tiešām ir patiesa.

Tagad, izmantojot iegūto formulu, aizpildām tabulu:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
$A(n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200	...

Tātad a) skaitli 14 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 21 veidā; b) skaitli 22 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 200 veidos.

J1.3.5. Izklaidīgais Ziemassvētku vecītis

Četri vienas mājas bērni – Aivars, Laima, Paula un Vilnis – nosūtīja vēstules ar saviem lūgumiem Ziemassvētku vecītim. Kad pienāca laiks piegādāt dāvanas, Ziemassvētku vecītis bija aizmirsis, kuram bērnam kāda dāvana uz kuru dzīvokli jānogādā. Viņš tikai atcerējās, ka bērni dzīvo dzīvokļos ar numuriem 15, 25, 33 un 55 un dāvanas ir slēpes, lelle, mākslinieka komplekts un rotaļu vilciens. Vēl Ziemassvētku vecītim atmiņā uzplaiksnīja šādi fakti:

1) Viļņa dzīvokļa numurs nesākas ar ciparu 1;
2) uz 33. dzīvokli jānogādā vai nu slēpes, vai rotaļu vilciens;
3) vilciens jānogādā bērnam, kura vārda burtu skaits sakrīt ar dzīvokļa numura ciparu summu;
4) Laima dzīvo dzīvoklī, kura numurs sastāv no diviem vienādiem cipariem;
5) lelle paredzēta bērnam, kura vārds nesākas ar burtu V;
6) Paula draudzējas ar bērnu, kurš dzīvo 25. dzīvoklī;
7) vēstule no Laimas pienāca dienu vēlāk, nekā vēstule no bērna, kas dzīvo 55. dzīvoklī.

Palīdzi Ziemassvētku vecītim atšķetināt šo lietu!

Atrisinājums. Lai būtu vieglāk atrisināt šo uzdevumu, pakāpeniski var aizpildīt tabulu (skat. 177. att.).

a) No 7) secinām, ka Laima nedzīvo 55. dzīvoklī un no 4) – Laima dzīvo 33. dzīvoklī. No 3) Secinām, ka Laimai nav vilciens, jo viņa nedzīvo dzīvoklī, kura numura ciparu summa sakrīt ar viņas vārda burtu skaitu. Tad no 2) secinām, ka Laimai ir slēpes.

b) No 6) secinām, ka Paula nedzīvo 25. dzīvoklī, no 3) – Paulai nav vilciens.

c) No 1) secinām, ka Vilnis nedzīvo 15. dzīvoklī un no 5) – Vilnim nav lelle.

d) No 3) secinām, ka vilciens nav jānogādā uz 25. un 55. dzīvokli, jo nevienam bērnam vārdā nav ne 7, ne 10 burti. Tā kā uz 33. dzīvokli ir jānogādā slēpes, tad Vilciens ir jānogādā uz 15. dzīvokli, kurā nedzīvo Vilnis, tāpēc Vilciens jānogādā Aivaram.

e) No a), c) un d) secinām, ka lelle ir Paulai. Līdz ar to mākslinieka komplekts ir Vilnim.

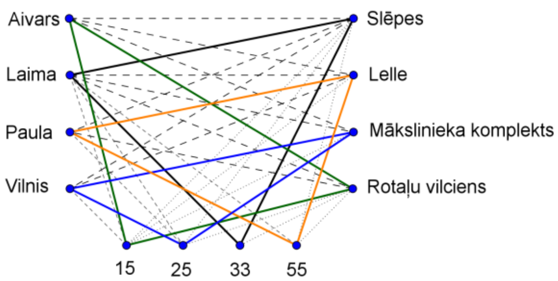
f) No 3) un no a) secinām, ka Aivars dzīvo 15. dzīvoklī.

g) Tālāk secinām, ka Paula dzīvo 55. dzīvoklī, bet Vilnis – 25. dzīvoklī.

	Slēpes	Lelle	Mākslinieka komplekts	Rotaļu vilciens	15	25	33	55
Aivars	--	--	--	x	x	--	--	--
Laima	x	--	--	--	--	--	x	--
Paula	--	x	--	--	--	--	--	x
Vilnis	--	--	x	--	--	x	--	--
15	--	--	--	x				
25	--	--	x	--				
33	x	--	--	--				
55	--	x	--	--				

177. att.

Piezīme. Uzdevumu var attēlot arī ar grafa palīdzību (skat. 178. att.), kur pakāpeniski ar nepārtrauktām līnijām savieno iespējamas saistības, bet ar pārtrauktām – neiespējamas saistības.

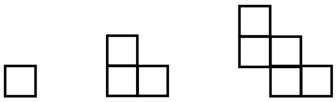


178. att.

Ceturtā kārta

J1.4.1. Kvadrāts

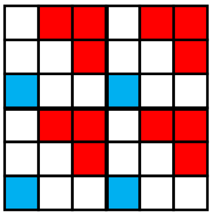
Dotas četras 179. att. a) figūras, četras 179. att. b) figūras un četras 179. att. c) figūras. Saliec no tām vienu kvadrātu!



a) b) c)

179. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ka, saliekot kopā pa vienai figūrai no katra veida, var iegūt kvadrātu 3×3 rūtiņas. Saliekot kopā četrus šādus kvadrātus, iegūstam kvadrātu 6×6 rūtiņas, skat. 180. att.

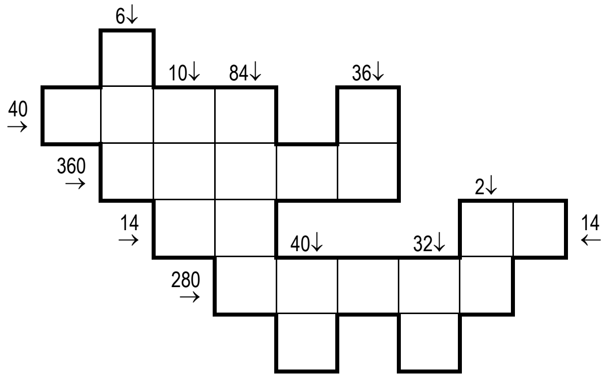


180. att.

J1.4.2. Reizinātāju juceklis

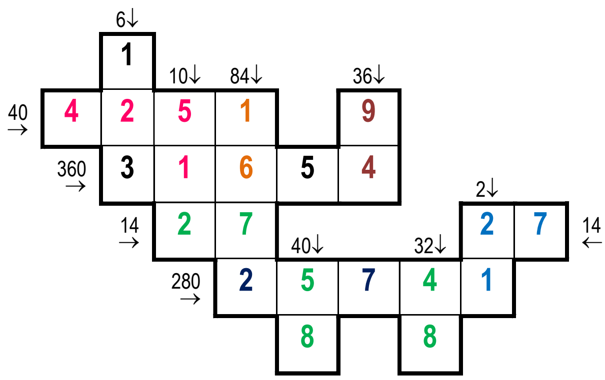
Rūtiņās ieraksti ciparus (skat. 181. att.) tā, lai izpildītos šādi nosacījumi:

1) katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens cipars;
2) dotie skaitļi norāda bultiņu virzienā esošajās rūtiņās ierakstīto ciparu reizinājumu;
3) katrā reizinājumā visi reizinātāji ir dažādi.



181. att.

Atrisinājums. Skat. 182. att.



182. att.

Piezīme. Uzdevumu vieglāk atrisināt, ja vispirms noskaidro, cik veidos atbilstoši uzdevuma prasībām var izteikt katru doto skaitli (neņemot vērā reizinātāju secību):

Divi reizinātāji	Trīs reizinātāji	Četri reizinātāji	Pieci reizinātāji
$2=1\cdot 2$	$6=1\cdot 2\cdot 3$	$40=1\cdot 2\cdot 4\cdot 5$	$280=1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 7$
$14=2\cdot 7$	$10=1\cdot 2\cdot 5$	$84=1\cdot 2\cdot 6\cdot 7=$	$360=1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 9=$
$32=4\cdot 8$		$=1\cdot 3\cdot 4\cdot 7$	$=1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$
$36=4\cdot 9$			
$40=5\cdot 8$			

Tad, izmantojot šo informāciju, pakāpeniski aizpilda tabulu, vispirms ierakstot **2** un **7** (14), tad **1** (2), tad **4** un **8** (32); **5** un **8** (40); **2** un **7** (14). Tad viennozīmīgi skaidra ir **2** un **7** atrašanās vieta (280). Tālāk var ierakstīt **1** un **6** (84), kas ļauj secināt, kur jāraksta **9** un **4** (36). Tad viennozīmīgi var ierakstīt **2**, **5**, **4** (40) un **1** (10), kas ļauj viennozīmīgi atlikušajās rūtiņās ierakstīt **3**, **1** un **5**.

J1.4.3. Namdari un baļķis

Namdaris Juris uz 10 m gara baļķa ar zilu zīmuli uzvilka atzīmi 20 cm no baļķa gala un tālāk pa zilai atzīmei ik pēc 50 cm. Pēc tam namdaris Pēteris ar sarkanu zīmuli atzīmēja 10 cm no baļķa tā paša gala un pēc tam atzīmes ik pēc 30 cm. Cik reizes sakrita zilās un sarkanās atzīmes?

1. atrisinājums. Zilās atzīmes uzvilktas $20+50a$ cm attālumā no baļķa gala (a – nenegatīvs vesels skaitlis). Sarkanās atzīmes uzvilktas $10+30b$ cm attālumā no baļķa gala (b – nenegatīvs vesels skaitlis). Pirmo reizi zilā un sarkanā atzīme sakritīs 70 cm attālumā no baļķa gala. Nākamo reizi abas atzīmes atkal sakritīs pēc $MKD(50, 30)=150$ cm. Tātad abas atzīmes sakrīt $70+150n$ cm attālumā (n – nenegatīvs vesels skaitlis). Tā kā baļķa garums ir 10 m = 1000 cm, tad iegūstam nevienādību $70+150n\le 1000$ jeb $15n\le 93$, tātad $n\le 6$, tas ir, n var pieņemt septiņas dažādas vērtības (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), tāpēc sarkanās un zilās atzīmes uz baļķa sakritīs septiņas reizes.

2. atrisinājums. Uzrakstām, cik tālu no baļķa gala ir zilās un sarkanās atzīmes (skat. tabulā). Saskaitām, ka sakrīt septiņas atzīmes.

Zilās atzīmes	20	**70**	120	170	**220**	270	320
	370	420	470	**520**	570	620	**670**
	720	770	**820**	870	920	**970**	
Sarkanās atzīmes	10	40	**70**	100	130	160	190
	220	250	280	310	340	**370**	400
	430	460	490	**520**	550	580	610
	640	**670**	700	730	760	790	**820**
	850	880	910	940	**970**	1000	

J1.4.4. Baktērijas un vīrusi

Baktēriju kolonijā iekļuva viens vīruss. Pirmajā minūtē vīruss iznīcina vienu baktēriju un sadalās divos jaunos vīrusos. Dzīvas palikušās baktērijas arī katra sadalās divās jaunās baktērijās. Nākamajā minūtē katrs vīruss iznīcina pa vienai baktērijai un sadalās divos jaunos. Arī katra atlikusī baktērija sadalās divās jaunās baktērijās utt. katru minūti. Cik baktēriju bija sākumā, ja pēc 15 minūtēm vīrusi iznīcināja pēdējo baktēriju?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka sākumā bija n baktērijas. Izpētīsim, kā mainās baktēriju un vīrusu skaits pēc 1, 2, 3, ..., t minūtēm.

Laiks (min.)	Vīrusu skaits	Baktēriju skaits
Sākumā	1	n
1	2	$2(n-1)$
2	$4=2^2$	$2\cdot(2(n-1)-2)=2\cdot 2\cdot(n-1-1)=2^2(n-2)$
3	$8=2^3$	$2\cdot(2^2(n-2)-2^2)=2^3(n-3)$
...	...	...
t	2^t	$2\cdot(2^{t-1}(n-(t-1))-2^{t-1})=2^t(n-t)$

Tātad, ja sākumā ir *n* baktērijas, pēdējā baktērija tiks iznīcināta pēc *n* minūtēm. Tā kā pēdējā baktērija tika iznīcināta 15. minūtē, tad sākumā bija 15 baktērijas.

J1.4.5. Trijstūra augstumi

Vai var uzzīmēt tādu trijstūri, kura augstumu garumi ir 1 cm, 2 cm un 3 cm? Ja var – uzzīmē un uzraksti, cik garas ir trijstūra malas, ja nevar – pamato, kāpēc!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka uzdevumā prasīto trijstūri var uzzīmēt un tā malu garumi ir *a* (pret to novilkts augstums, kura garums ir 1 cm), *b* (pret to novilkts augstums 2 cm) un *c* (pret to novilkts augstums 3 cm). Tad trijstūra laukums ir $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3$ jeb $2S = a \cdot 1 = b \cdot 2 = c \cdot 3$. Tas nozīmē, ka malu garumu attiecība ir $a : b : c = 3 : 1{,}5 : 1$. Apzīmējam $a = 3x$, $b = 1{,}5x$ un $c = x$. Ja trijstūris eksistē, tad tā malu garumi apmierina trijstūra nevienādību. Tātad jābūt $b + c > a$, bet $1{,}5x + x < 3x$, tāpēc **nav** tāda trijstūra, kura augstumu garumi ir 1 cm, 2 cm un 3 cm.

Piektā kārta

J1.5.1. Pēc kārtas sekojoši skaitļi

Ar *a*, *b*, *c*, *d* apzīmēti pēc kārtas sekojoši viencipara skaitļi. Zināms, ka ir patiesa vienādība $\overline{ab} : c = d$. Atrodi visus iespējamos viencipara skaitļus, kas apmierina dotos nosacījumus! (Ar $\overline{ab}$ tiek apzīmēts divciparu skaitlis, kur *a* ir desmitu cipars, bet *b* – vienu cipars.)

Atrisinājums. Apskatot visas sešas pieļaujamās skaitļu *a*, *b*, *c*, *d* kombinācijas, redzam, ka patiesa vienādība tiek iegūta divos gadījumos:

$$\mathbf{12 : 3 = 4}$$
$$23 : 4 \neq 5$$
$$34 : 5 \neq 6$$
$$45 : 6 \neq 7$$
$$\mathbf{56 : 7 = 8}$$
$$67 : 8 \neq 9$$

Tātad uzdevumam ir divas atbildes: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ vai $a = 5, b = 6, c = 7, d = 8$.

J1.5.2. Mušas un zirnekļi

Pa sienu rāpo mušas un zirnekļi. Cik mušas un cik zirnekļi rāpo pa šo sienu, ja pavisam kopā ir 80 kājas? *Apskati visas iespējas!*

Atrisinājums. Mušai ir sešas kājas, bet zirneklim ir astoņas kājas. Mušu skaitu uz sienas apzīmēsim ar *m*, bet zirnekļu skaitu – ar *z*. Tad no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ jeb $3m = 4 \cdot (10 - z)$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 4, tad arī vienādojuma kreisai pusei jādalās ar 4, bet tas nozīmē, ka *m* dalās ar 4. Tā kā uzdevumā teikts, ka pa sienu rāpo gan mušas, gan zirnekļi, tad $m > 0$, un tā kā kopā ir ne vairāk kā 80 kājas, tad $m < 14$. Tātad *m* var pieņemt trīs dažādas vērtības:

- ja $m = 4$, tad $3 \cdot 4 = 4 \cdot (10 - z)$, no kurienes iegūst, ka $z = 7$;
- ja $m = 8$, tad $3 \cdot 8 = 4 \cdot (10 - z)$, no kurienes iegūst, ka $z = 4$;
- ja $m = 12$, tad $3 \cdot 12 = 4 \cdot (10 - z)$, no kurienes iegūst, ka $z = 1$.

Līdz ar to pa sienu rāpo vai nu 7 zirnekļi un 4 mušas, vai 4 zirnekļi un 8 mušas, vai 1 zirneklis un 12 mušas.

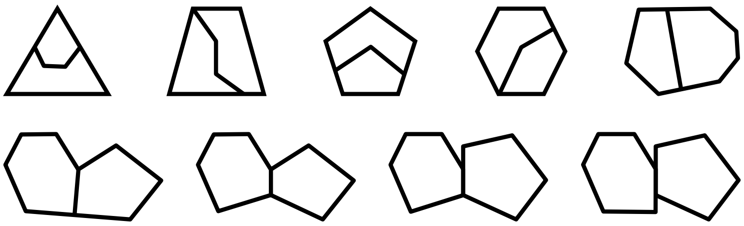
Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izteiksmē $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ ievietojot visas *z* vērtības no 1 līdz 10 (ja *z* ir lielāks nekā 10, tad sanāktu, ka kopā ir vairāk nekā 80 kājas) un pārbaudot, kurā gadījumā *m* ir vesels skaitlis.

J1.5.3. Sešstūris un piecstūris

No papīra izgrieza vienu sešstūri un vienu piecstūri. Cik malas var būt daudzstūrim, ko ieguva, saliekot kopā šīs figūras tā, ka tās nepārklājas, bet tām sakrīt vismaz daļa malas? *Apskati visas iespējas!*

Atrisinājums. Saliekot kopā piecstūri un sešstūri, var iegūt daudzstūri, kura malu skaits ir jebkurš skaitlis no 3 līdz 11, skat. 183. att. Vēl jāpamato, ka citu iespēju nav.

Daudzstūrim nav mazāk kā trīs virsotnes un iegūtā daudzstūra virsotnes var būt tikai sākotnējo daudzstūru virsotnes (jaunas virsotnes nevar rasties, jo daudzstūru malas nekrustojas), tāpēc iegūtajam daudzstūrim nevar būt vairāk kā 5 + 6 = 11 virsotnes.



183. att.

J1.5.4. Loterija

Muļķu ciemā tika rīkota loterija. Pavisam tika izdotas 2014 loterijas biļetes, kuras ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem (ciparu virknēm) no 0001 līdz 2014. Buratino iegādājās vairākas biļetes. Viņš ievēroja, ka katrai viņa biļetei tās numura ciparu summa ir 25. Cik biļetes Buratino varēja būt nopircis?

Atrisinājums. Noskaidrosim, kādu ciparu summa ir 25. Divu ciparu lielākā iespējamā summa ir 9 + 9 = 18, tātad biļetes numurā vismaz trīs cipari ir atšķirīgi no 0.

Apskatām visus gadījumus, kāds var būt biļetes numura pirmais cipars.

- Ja biļetes numura pirmais cipars ir 0, tad vismaz vienam no atlikušajiem cipariem jābūt 9, jo pretējā gadījumā ciparu summa būtu ne lielāka kā $3 \cdot 8 = 24 < 25$. Līdz ar to pārējie cipari var būt 9, 9, 7; vai 9, 8, 8. No šiem cipariem var izveidot sešus biļešu numurus: 0799, 0979, 0997, 0889, 0898, 0988.
- Ja biļetes numura pirmais cipars ir 1, pārējie trīs cipari var būt 9, 9, 6; vai 9, 8, 7; vai 8, 8, 8. No šiem cipariem var izveidot 10 biļešu numurus: 1699, 1969, 1996, 1789, 1798, 1879, 1897, 1978, 1987, 1888.
- Ja biļetes numura pirmais cipars ir 2, nav nevienas biļetes, kuras numura ciparu summa ir 25 (nevienai biļetei ar numuriem no 2000 līdz 2014 ciparu summa nav 25).

Tātad Buratino varēja būt nopircis no 1 līdz 16 loterijas biļetēm.

J1.5.5. Triks ar glāzēm

Uz galda stāv deviņas glāzes, visas "ar kājām gaisā" (skat. 184. att.).

184. att.

Oficiants demonstrē triku: vienā reizē viņš paņem jebkuras četras glāzes un apgāž tās otrādi (ja glāze stāv "ar kājām gaisā", tā tiek apgriezta pareizi, ja tā stāv pareizi – tad apgriezta "ar kājām gaisā"). Vai, vairākas reizes izpildot šo triku, oficiants var panākt, ka visas glāzes stāv pareizi un tajās visās var ieliet limonādi?

Atrisinājums. Aplūkosim, kā viena gājiena laikā var mainīties glāžu skaits, kas ir “ar kājām gaisā”.

Bija sākumā		Pēc gājiena izpildes		
				 izmaiņas
4	**0**	0	**4**	Palielinās par 4
3	**1**	1	**3**	Palielinās par 2
2	**2**	2	**2**	Nemainās
1	**3**	3	**1**	Samazinās par 2
0	**4**	4	**0**	Samazinās par 4

Redzam, ka pēc gājiena izpildes glāžu skaits, kas ir “ar kājām gaisā”, mainās par pāra skaitli. Tā kā sākumā bija 9 glāzes (nepāra skaits), kas ir “ar kājām gaisā”, tad pēc jebkura gājiena izdarīšanas joprojām paliks nepāra skaits glāzes, kas ir “ar kājām gaisā” (nepāra skaitli samazinot vai palielinot par pāra skaitli vienmēr iegūst nepāra skaitli) un nekad nevarēs panākt, lai būtu 0 (pāra skaits) glāzes “ar kājām gaisā” jeb lai visas deviņas glāzes ir apgrieztas pareizi.

Profesora Cipariņa klubs

Pirmā nodarbība

P1.1.1. Kautrīgo rūķu nams

Kādā namā dzīvo 19 rūķi. Katrs no rūķiem vai nu vienmēr melo, vai vienmēr saka patiesību. Rūķi ļoti kautrējas par savu augumu – ja kādam rūķim jautā, cik viņš ir garš, tad katrs rūķis vienmēr steidz paziņot: „Es esmu garāks nekā visi citi rūķi.” Cik no rūķiem ir meļi?

Atrisinājums. Ja no rūķiem ir

- tieši viens rūķis, kurš ir garāks nekā visi citi rūķi, tad šis rūķis saka patiesību, bet visi pārējie ir meļi;
- vismaz divi rūķi ar vienādu garumu, kuri ir garāki nekā visi citi rūķi (pieļaujams arī speciālgadījums, kad visi 19 rūķi ir vienāda garuma), tad neviens no rūķiem nav atbildējis godīgi, sakot „Es esmu garāks nekā visi citi rūķi.”, tātad visi rūķi ir meļi.

Līdz ar to vai nu tieši 18 rūķi ir meļi, vai arī visi rūķi ir meļi.

P1.1.2. Matemātiķis Miķelis

Siera gabals tika sagriezts tieši 200 mazos gabaliņos un aizmirsts virtuvē. Pa nakti virtuvē viesojās 22 peles un visus gabaliņus nočiepa. To novēroja slinkais kaķis Miķelis. Viņš pamanīja, ka neatkarīgi no tā, kā peles savā starpā sadala siera gabalus, vienmēr būs vismaz divas peles, kas nočiepušas vienādu skaitu siera gabaliņu. Pierādi, ka tas vienmēr izpildās!

Atrisinājums. Pieņemam pretējo, ka katra pele nočiepa atšķirīgu skaitu siera gabaliņu. Apskatām gadījumu, kad kopējais nočiepto gabaliņu skaits ir mazākais iespējamais:

1. pele nočiepa 0 siera gabalus,

2. pele – 1 siera gabalu,

3. pele – 2 siera gabalus,

....

20. pele – 19 siera gabalus,

21. pele – 20 siera gabalus,

22. pele – 21 siera gabalu.

Saskaitot visus gabalus, ko nočiepusi katra pele, iegūstam $0+1+2+...+19+20+21=231$ siera gabalu, kas ir vairāk nekā 200 siera gabali, kas atradās virtuvē. Tātad esam ieguvuši pretrunu un līdz ar to ir vismaz divas peles, kuras ir nočiepušas vienādu siera gabaliņu skaitu.

P1.1.3. Starpbrīdis

Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi, starp kuriem atstāta vieta aritmētisko darbību zīmēm:

$$1 \square (-1) \square 2 \square (-2) \square 3 \square (-3) \square 4 \square (-4) \square 5 \square (-5) \square 6 \square (-6)$$

Andris katra kvadrātiņa vietā ierakstīja vai nu reizināšanas zīmi, vai dalīšanas zīmi un aprēķināja rezultātu, iegūstot $\frac{1}{4}$. Juris dažas Andra uzrakstītās reizināšanas zīmes aizstāja ar dalīšanas zīmēm, bet dažas Andra uzrakstītās dalīšanas zīmes aizstāja ar reizināšanas zīmēm un aprēķināja rezultātu, iegūstot (-4). Pierādi, ka vismaz viens no viņiem noteikti ir kļūdījies savos aprēķinos!

Atrisinājums. Ievērojam, ka izteiksmes vērtības izmaiņu ietekmē tikai tās vietas, kur Juris samaina darbības zīmi. Apskatīsim, kā vienas zīmes maiņa ietekmē izteiksmes vērtību.

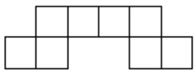
Ja starp skaitļiem a un b

- reizināšanas zīme tiek aizstāta ar dalīšanas zīmi, tas ir, $a \cdot b \to a : b$, tad izteiksmes vērtība samazinās b^2 reizes;
- dalīšanas zīme tiek aizstāta ar reizināšanas zīmi, tas ir, $a : b \to a \cdot b$, tad izteiksmes vērtība palielinās b^2 reizes.

Tā kā b^2 ir nenegatīvs skaitlis, tad vienas zīmes maiņa neietekmē to, vai izteiksme ir pozitīva vai negatīva. Tātad to neietekmē nevienas zīmes maiņa. Tātad Andra un Jura iegūtajiem rezultātiem jābūt vai nu abiem pozitīviem, vai abiem negatīviem, no kā varam secināt, ka kāds no zēniem ir kļūdījies aprēķinos.

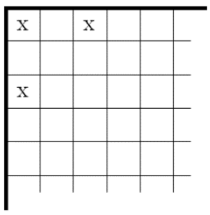
P1.1.4. Figūru savietošana

Kādus taisnstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām, ir iespējams noklāt ar 185. att. redzamajām figūrām tā, ka figūras nepārklājas, figūru malas iet pa rūtiņu līnijām un taisnstūris ir pilnībā pārklāts ar šīm figūrām?

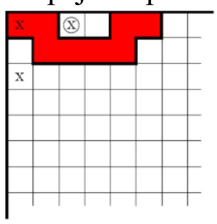


185. att.

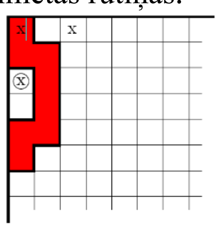
Atrisinājums. Ar dotajām figūrām nav iespējams pārklāt nevienu taisnstūri. Tas izriet no tā, ka ar dotajām figūrām vienlaicīgi nav iespējams pārklāt trīs 186. att. atzīmētās rūtiņas.



186. att.



187. att.



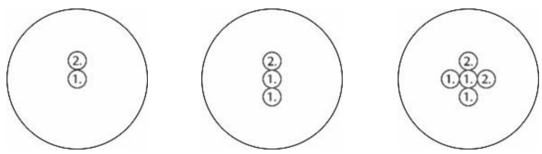
188. att.

Lai varētu noklāt stūra rūtiņu, dotajai figūrai jābūt novietotai tā, kā redzams 187. att. vai 188. att. Katrā no abiem gadījumiem ar ⊗ atzīmēto rūtiņu vairs nav iespējams pārklāt.

P1.1.5. Raganas namiņā

Ansītis un Grietiņa sēdēja pie apaļa galda (ar diametru a) un ēda vienādus riņķa formas cepumiņus. Tā kā cepumiņu bija vairāk nekā viņi varēja apēst, abi sāka spēlēt spēli. Viņi pēc kārtas lika uz galda pa vienam cepumiņam. Uzliktos cepumiņus pārvietot vairs nedrīkst, kā arī nedrīkst vienu cepumiņu likt otram virsū. Zaudē tas spēlētājs, kam vairs nav uz galda vietas, kur nolikt cepumu. Ja spēli sāk Grietiņa, kā viņai jārīkojas, lai uzvarētu, ja **a)** cepuma diametrs ir $\frac{a}{3}$; **b)** cepuma diametrs nav noteikts?

Atrisinājums. Neatkarīgi no tā, kāds ir cepuma diametrs, Grietiņa var uzvarēt. Lai Grietiņa uzvarētu, viņai pirmais cepumiņš ir jānovieto galda centrā tā, lai cepumiņa centrs sakristu ar galda centru. Pēc katra Ansīša gājiena Grietiņai savs cepumiņš jānovieto centrāli simetriski Ansīša nupat novietotajam cepumam attiecībā pret galda centru (skat., piemēram, 189. att., kur ar “1.” ir apzīmēti pirmā spēlētāja (Grietiņas) novietotie cepumi, bet ar “2.” ir apzīmēti otrā spēlētāja (Ansīša) novietotie cepumi).



189. att.

Līdz ar to, kamēr vien Ansītis varēs izdarīt savu gājienu, arī Grietiņai ir iespējams simetrisks gājiens. Tātad Grietiņai gājienu nekad nepietrūks. Tā kā vienam no dalībniekiem gājienu tomēr pietrūks, jo galds nav bezgalīgs, tad tas var būt tikai Ansītis.

P1.1.6. Dažādie reizinātāji

Doti pieci naturāli skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* un *e*. Ar *M* apzīmēts reizinājums

$$M=(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e).$$

a) Pierādi, ka *M* dalās ar 144. **b)** Vai *M* noteikti dalās ar 288? **c)** Vai *M* noteikti dalās ar 432? **d)** Vai *M* noteikti dalās ar 576?

Atrisinājums. a) Ievērojam, ka $144=16\cdot 9$, tātad, lai *M* dalītos ar 144, tam jādalās gan ar 16, gan ar 9 (jo 16 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi).

Pierādīsim ka *M* dalās ar 16. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka *a*, *b*, *c* ir vienāda paritāte (visi ir vai nu pāra skaitļi, vai nepāra skaitļi) un *d*, *e* ir vienāda paritāte (abi ir vai nu pāra skaitļi, vai nepāra skaitļi). Tad $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ un $(d-e)$ dalās ar 2 un šo skaitļu reizinājums $(a-b)(a-c)(b-c)(d-e)$ dalās ar $2^4=16$. Tā kā *M* dalās ar reizinājumu $(a-b)(a-c)(b-c)(d-e)$, tad *M* dalās ar 16.

Pierādīsim, ka *M* dalās ar $9=3^2$. Dalot skaitli ar 3, atlikums var pieņemt tikai trīs dažādas vērtības (0, 1 vai 2). Tā kā ir doti pieci skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* un *e*, ir divas iespējas:

- ja trīs no šiem skaitļiem, dod vienādus atlikumus, dalot ar 3 (nezaudējot vispārīgumu varam pieņemt, ka tie ir skaitļi *a*, *b* un *c*), tad $(a-b)$ un $(a-c)$ dalās ar 3, un līdz ar to *M* dalās ar $3^2=9$;
- ja divi no šiem skaitļiem, dalot ar 3, dod vienādus atlikumus, un vēl divi citi skaitļi, dalot ar 3, arī dod vienādus atlikumus (nezaudējot vispārīgumu varam pieņemt, ka *a*, *b* dod vienādus atlikumus un *c*, *d* arī dod vienādus atlikumus, dalot ar 3), tad $(a-b)$ un $(c-d)$ dalās ar 3, un līdz ar to *M* dalās ar $3^2=9$.

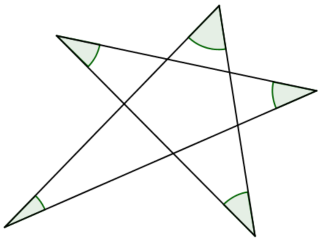
Esam pierādījuši, ka *M* dalās gan ar 16, gan ar 9, tātad *M* dalās arī ar $16\cdot 9=144$.

b) Jā, *M* noteikti dalās ar 288. Ievērojam, ka $288=32\cdot 9$. Jau a) gadījumā pierādījām, ka *M* dalās ar 16, jo $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ un $(d-e)$ dalās ar 2. Pamatosim, ja *a*, *b* un *c* ir vienāda paritāte, tad vismaz viena no starpībām $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ dalās ar 4. Pretējā gadījumā, tas ir, ja neviena no starpībām $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ nedalītos ar 4, tad $\frac{a-b}{2}$, $\frac{a-c}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ būtu nepāra skaitļi, bet tā nevar būt, jo $\frac{a-b}{2}+\frac{b-c}{2}=\frac{a-c}{2}$, taču divu nepāra skaitļu summa nevar būt nepāra skaitlis. Iegūta pretruna. Tātad vismaz viena no starpībām $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$ dalās ar 4. Tas nozīmē, ka *M* dalās ar 32. Tā kā no a) gadījuma zināms, ka *M* dalās arī ar 9, tad *M* dalās ar $32\cdot 9=288$.

c), d) Nē. Ja, piemēram, $a=5$, $b=4$, $c=3$, $d=2$ un $e=1$, tad $M=288$, kas nedalās ne ar 432, ne 576.

P1.1.7. Zvaigznīte

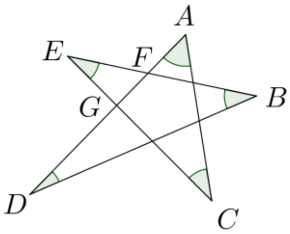
Aprēķini leņķu summu, ko veido 190. att. dotās *zvaigznes* virsotnes! Atzīmētie leņķi zīmējumā var nebūt vienādi.



190. att.

Atrisinājums. Dotās *zvaigznes* virsotnes apzīmēsim tā, kā parādīts 191. att.

Tā kā $\angle EFG$ ir trijstūra *DFB* ārējais leņķis, tad tā lielums ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu, kas nav tā blakusleņķi, summu, tas ir, $\angle EFG = \angle B + \angle D$, līdzīgi $\angle EGF = \angle A + \angle C$, jo $\angle EGF$ ir trijstūra *AGC* ārējais leņķis. Tā kā trijstūra *EFG* iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad $\angle E + \angle EFG + \angle EGF = 180°$. Aizstājot šajā izteiksmē $\angle EFG$ un $\angle EGF$, iegūstam, ka $\angle E + \angle B + \angle D + \angle A + \angle C = 180°$. Tātad leņķu, ko veido dotās zvaigznes virsotnes, summa ir $180°$.

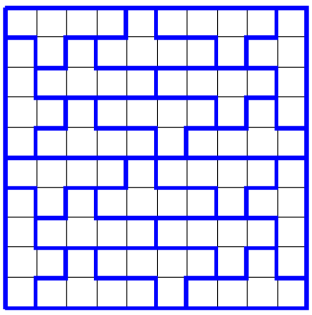


191. att.

P1.1.8. Tukšais kvadrāts

Sadali vienības kvadrātu 2000 vienādās daļās, kuras nav taisnstūri, trijstūri vai citi izliekti daudzstūri!

Atrisinājums. Viens no risinājuma variantiem ir šāds: sākotnēji sadala vienības kvadrātu 100 rūtiņās (ar 10 rindām un 10 kolonnām), kur katras rūtiņas garums ir $\frac{1}{10}$ vienības, tad katru no šīm rūtiņām sadalām 20 vienādās daļās tā, kā parādīts 192. att. Kopējais daļu skaits ir $20 \cdot 100 = 2000$, tātad uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

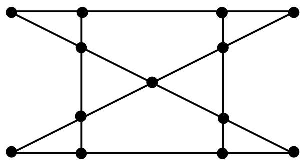


192. att.

Otrā nodarbība

P1.2.1. Versaļas pils

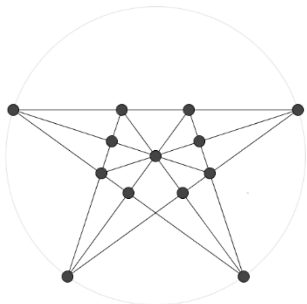
Francijas karaļa Luija XIV pils dārzā bija izvietotas 13 strūklakas (skat. 193. att.). Karaļa viesi tam vienmēr glaimoja – cik asprātīgi tam izvietotas strūklakas – uz katras no sešām taisnēm ir vismaz četras strūklakas.



193. att.

Tad kādu dienu Luijs bija ieradies pie Anglijas karaļa Čārlza pārspriest politisko situāciju un, ejot pa dārzu, viņš ieraudzīja, ka tur 13 strūklakas izvietotas uz deviņām taisnēm tā, ka uz katras bija tieši četras strūklakas. Luijs, protams, negribēja palikt sliktāks par Čārlzu un uzdeva savam dārzniekam izveidot shēmu strūklaku sistēmai ar tādu pašu īpašību, citādi viņš tiks atlaists no darba. Palīdzi dārzniekam saglabāt darbu un uzzīmē karaļa prasīto shēmu!

Atrisinājums. Dārznieks savu darbu var saglabāt, iesniedzot karalim, piemēram, 194. att. redzamo shēmu.



194. att.

P1.2.2. Spēle

Anna ir iedomājusies divus skaitļus: divciparu skaitli x un trīsciparu skaitli y. Zināms, ka x ir vienāds ar skaitļa y ciparu kvadrātu summu, bet x pirmais cipars vienāds ar y pirmo divu ciparu kvadrātu summu. Kādus skaitļus ir iedomājusies Anna, ja neviens no x un y cipariem nav nulle, turklāt visi pieci izmantotie cipari ir dažādi?

Atrisinājums. Tā kā x ir divciparu skaitlis, tad to var uzrakstīt kā $x = \overline{ab} = 10a + b$ un tā kā y ir trīsciparu skaitlis, tad to var uzrakstīt kā $y = \overline{cde} = 100c + 10d + e$. Tad no dotā iegūstam:

$$\overline{ab} = c^2 + d^2 + e^2 \quad (1)$$

$$a = c^2 + d^2 \quad (2)$$

Tad, (2) ievietojot (1), iegūstam $\overline{ab} = a + e^2$ jeb $10a + b = a + e^2$, no kā iegūstam

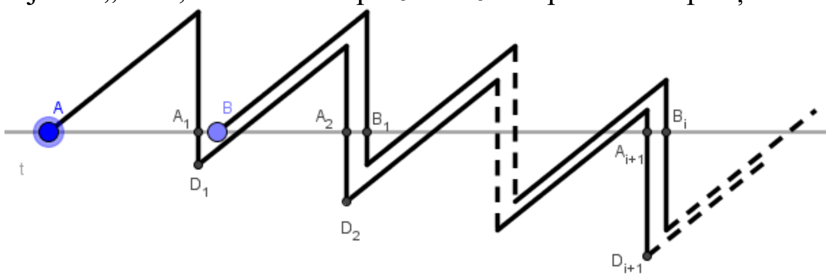
$$9a + b = e^2 \quad (3)$$

Tā kā a ir cipars, tad $a = c^2 + d^2 \le 9$. Tā kā uzdevumā dots, ka ne c, ne d nav 0, tad $c < 3$ un $d < 3$ (pretējā gadījumā būtu $c^2 + d^2 > 9$). Tātad c un d var pieņemt tikai vērtības 1 un 2, turklāt no dotā, ka c un d ir dažādi cipari, izriet, ka viens no tiem pieņem vērtību 1, bet otrs – vērtību 2. Tas nozīmē, ka $a = 1^2 + 2^2 = 5$. Tad, ievietojot a vērtību vienādojumā (3), iegūst $45 + b = e^2$ jeb $b = e^2 - 45$. Ja $e < 7$, tad $b < 0$, kas nevar būt, jo b ir cipars. Ja $e > 7$, tad $b \ge 64 - 45 = 19$, kas nevar būt, jo b ir cipars. Tātad $e = 7$ un $b = 49 - 45 = 4$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $x = \overline{ab} = 54$ un $y = \overline{cde} = 127$, ja $c = 1$, $d = 2$, vai $y = \overline{cde} = 217$, ja $c = 2$, $d = 1$. Tātad Anna ir iedomājusies vai nu skaitļus 54 un 127, vai arī 54 un 217.

P1.2.3. Trajektorijas

Uz taisnes t novietots vienu vienību garš stienītis. Sākumā tā gali atrodas punktos A un B. Stienīti bīda pa plakni tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei t un beigās atkal nonāk uz t; šai brīdī tā gali atrodas punktos C un D. Turklāt ceļiem, pa kuriem kustas stienīša gali, nav kopīgu punktu. Vai var gadīties, ka $AC > 2013$? (Piezīme: uzskatām, ka stienītis ir paralēls t arī tad, ja tas atrodas uz t.)

Atrisinājums. Jā, var gadīties, ka $AC > 2013$, ja stienīti bīda līdzīgi kā 195. att. Attālumam starp A_{i+1} un B_i jābūt ievērojami mazam un vienmēr konstantam lielumam. Taču ar katru nākamo pārbīdījumu „soli”, attālums starp A_i un D_i tiek palielināts par ļoti mazu lielumu.



195. att.

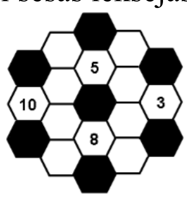
P1.2.4. Starpbrīdis

Juris un Andris uz tāfeles spēlēja spēli. Andris uzrakstīja kādu skaitli, bet Juris mēģināja šo skaitli izteikt formā $xy(x+y)$. Taču, kad Andris uzrakstīja skaitli 201200002013, ne viens, ne otrs nevarēja izdomāt, kā lai to izsaka. Palīdzi viņiem uzzināt, vai eksistē tādi veseli skaitļi x un y, ka $xy(x+y) = 2012000020\ 13$. *Pamato savu atbildi!*

Atrisinājums. Nē, šādi veseli skaitļi x un y neeksistē. Pieņemsim pretējo – tādi skaitļi x un y eksistē. Ievērojam, ka 201200002013 ir nepāra skaitlis. Tā kā nepāra skaitli reizinot ar pāra skaitli, rezultātā iegūst pāra skaitli, tad secinām, ka x un y jābūt nepāra skaitļiem. Taču tādā gadījumā $(x+y)$ ir pāra skaitlis un arī reizinājums $x \cdot y \cdot (x+y)$ ir pāra skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu – tātad uzdevumā meklētie skaitļi neeksistē.

P1.2.5. Šūnas

Figūras tukšajās šūnās (skat. 196. att.) ieraksti skaitļus 1, 2, 4, 6, 7, 9, 11 un 12 tā, lai katrā no sešām četru šūnu rindām ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati, kā arī tā būtu vienāda ar to sešu skaitļu summu, kuri ierakstīti sešās iekšējās šūnās!



196. att.

Atrisinājums. Skaitļus šūnās var ierakstīt tā, kā parādīts 197. att. Katrā četru šūnu rindā ierakstīto skaitļu summa ir 26: $12+5+6+3=10+1+8+7=10+2+5+9=11+8+4+3=$ $=12+2+1+11=9+6+4+7=26$. Arī to sešu skaitļu, kuri ierakstīti sešās iekšējās šūnās, summa ir 26: $5+6+4+8+1+2=26$.

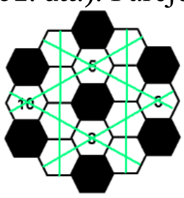
197. att.

Piezīme. Tālāk aprakstīti spriedumi, kā var noteikt, kādi skaitļi jāieraksta tukšajās šūnās.

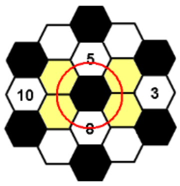
Kad visas baltās šūnas būs aizpildītas, tajās būs ierakstīti skaitļi no 1 līdz 12. Visu šo skaitļu summa ir $S = 1 + 2 + ... + 12 = \frac{1+12}{2} \cdot 12 = 13 \cdot 6 = 78$.

Tā kā mums ir sešas šūnu rindas ar četrām šūnām katrā no tām un katrā šūnā ierakstītais skaitlis tiek izmantots divās rindās (skat. 198. att.), tad katrā šādā rindā ierakstīto skaitļu summa ir $\frac{78 \cdot 2}{6} = \frac{78}{2} = 26$. Pēc uzdevuma noteikumiem arī skaitļu, kas ierakstīti sešās iekšējās šūnās (skat. 199. att.), summa ir 26, tad skaitļu, kas jāieraksta tukšajās iekšējās šūnās, summa ir $26 - (5 + 8) = 26 - 13 = 13$. Šādu summu var iegūt tikai saskaitot skaitļus 1, 2, 4 un 6.

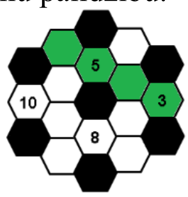
Tā kā 200. att. iekrāsotajā rindā skaitļu summai jābūt 26, tad divās tukšajās šūnās jāieraksta skaitļi, kuru summa ir $26 - (3 + 5) = 26 - 8 = 18$. Šādu summu no dotajiem skaitļiem varam iegūt, saskaitot 12 un 6 vai 11 un 7. Kā noskaidrojām iepriekš, vienīgais no šiem četriem skaitļiem, ko varam rakstīt vidējā aplī, ir 6. Tātad šajā rindā jāieraksta skaitļi 6 un 12 (skat. 201. att.). Pārējos skaitļus atrod ar līdzīgu spriedumu palīdzību.



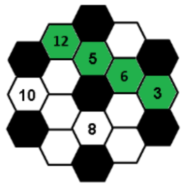
198. att.



199. att.



200. att.



201. att.

P1.2.6. Kosmosa misija

Uz Mēness atrodas divas kosmosa stacijas – marsiešu un zemes iedzīvotāju. Zemes iedzīvotāju stacija uzsprāgs pēc 25 minūtēm. Tajā ir četri kosmonauti, bet stacijā ir tikai viens skābekļa balons, kuru vienlaicīgi var izmantot ne vairāk kā divi kosmonauti.

Zināms, ka pirmais kosmonauts var pāriet no vienas stacijas uz otru 1 minūtē, otrs – 3 minūtēs, trešais – 7 minūtēs, ceturtais – 15 minūtēs. Ejot divatā, kosmonauti piemērojas lēnāk ejošajam. Ejot obligāti ir jāizmanto skābekļa balons. Marsieši cilvēkiem nekādi nespēj palīdzēt.

Vai visi kosmonauti var paspēt izglābties, ja pieņem, ka sprādziena laikā marsiešu stacija ir vienīgā drošā vieta cilvēkiem?

Atrisinājums. Jā, kosmonauti paspēs izglābties, ja rīkosies pēc tabulā aprakstītā plāna, kur ar 1 apzīmēts tas kosmonauts, kuram nepieciešama 1 minūte, lai pārietu no vienas stacijas uz otru, ar 3 – tas kosmonauts, kuram nepieciešamas 3 minūtes utt.

Atrodas Zemes iedzīvotāju stacijā	Dodas ceļā	Atrodas marsiešu stacijā	Patērētais laiks
7 un 15	1 un 3 →		3 min
7 un 15	1 ←	3	1 min
1	7 un 15 →	3	15 min
1	3 ←	7 un 15	3 min
	1 un 3 →	7 un 15	3 min
		1, 3, 7 un 15	
			Kopā: 25 min

P1.2.7. Melīgo rūķu nams

Rūķu namiņā notika liela nelaime. Ikvakara tējas dzeršanā atklājās, ka kāds ir apēdis visus cepumus, kuri bija pieliekamajā. Zināms, ka pieliekamajā kopš pēdējās tējas dzeršanas ir pabijuši tikai pieci rūķi: Līna, Meija, Tobijs, Ruks un Sels. Kad visi rūķi tika iztaujāti par notikušo, katrs no viņiem pateica tieši trīs apgalvojumus.

Līna: “Es to neizdarīju. Es nekad neesmu zagusi no pieliekamā saldumus. To izdarīja Ruks.”

Meija: “Es to neizdarīju. Man ir pietiekami daudz naudas, lai piepirktu pilnu namiņu ar cepumiem, tāpēc man cepumus zagt nevajag. Sels zina, kurš to izdarīja.”

Tobijs: “Es to neizdarīju. Ar Selu es iepazinos tikai pirms gada – tad, kad sāku dzīvot šajā namiņā. To izdarīja Ruks.”

Ruks: “Es neesmu vainīgs. To izdarīja Sels. Līna melo, sakot, ka es to izdarīju.”

Sels: “Es neapēdu visus cepumus no pieliekamā. Meija ir vainīga. Mēs ar Tobiju esam bērnības draugi, tā ka viņš mani ļoti labi pazīst un varēs galvot par to, ka es nekad neesmu neko zadzis.”

Vēlāk katrs rūķis atzinās, ka no trīs teikumiem, ko viņš bija pateicis, divi bija taisnība, bet viens – nē. Izrādās, ka ar šo informāciju pietika, lai uzzinātu vainīgo. Zināms, ka visus cepumus apēda viens rūķis. Noskaidro, kurš tas ir, un pamato savu atbildi!

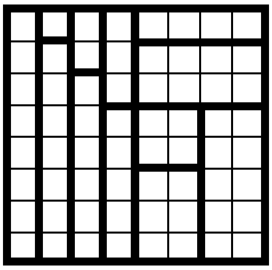
Atrisinājums. Tā kā Ruks divos teikumos (Es neesmu vainīgs. Līna melo, sakot, ka es to izdarīju.) apgalvo, ka viņš nav vainīgs, tad nevar būt tā, ka viens no šiem teikumiem ir meli, bet otrs – patiesība. Tātad tie abi ir patiesība un Ruks nav vainīgs. Tas nozīmē, ka Ruka teikums “To izdarīja Sels.” ir meli – tātad arī Sels nav vainīgs. (Skat. tabulu, kurā iekrāsots teikums, kas ir meli.) Tobijs melo par to, ka Ruks ir vainīgs. Līdz ar to abi pārējie Tobija teikumi (Es to neizdarīju. Ar Selu es iepazinos tikai pirms gada – tad, kad sāku dzīvot šajā namiņā.) ir patiesi. No tā izriet, ka Sels melo par to, ka viņš ar Tobiju ir bērnības draugi. Tāpēc abi pārējie Sela teikumi ir patiesi, un cepumus apēda Meija.

Rūķis	1. teikums	2. teikums	3. teikums
Līna	Neesmu vainīga	Nekad neesmu zagusi	Ruks vainīgs
Meija	Neesmu vainīga	Man ir daudz naudas	Sels zina vainīgo
Tobijs	Neesmu vainīgs	Selu ilgi nepazīstu	Ruks vainīgs
Ruks	Neesmu vainīgs	Sels vainīgs	Līna melo, neesmu vainīgs
Sels	Neesmu vainīgs	Meija vainīga	Tobiju pazīstu sen

P1.2.8. Rūtiņu kvadrāts

Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt **a)** 12; **b)** 13 dažādos taisnstūros?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, kā parādīts 202. att.



202. att.

b) Nē, nevar. Apskatīsim 13 mazākos taisnstūru laukumus augošā secībā, par garuma vienību ņemot rūtiņas malas garumu. Ievērojam, ka nevienam taisnstūrim ne garums, ne platums nepārsniedz 8 vienības.

Laukums (rūtiņās)	Taisnstūra izmēri
1	1×1
2	1×2
3	1×3
4	1×4, 2×2
5	1×5
6	1×6, 2×3
7	1×7
8	1×8, 2×4
9	3×3
10	2×5

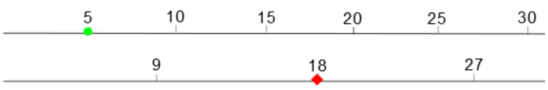
Redzam, ka jau 13 dažādiem taisnstūriem ar vismazākajiem iespējamiem laukumiem to laukumu summa ir $1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 4+1\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7+1\cdot 8+1\cdot 9+1\cdot 10=73>64$. Tātad uzdevumā prasīto nevar izdarīt.

Trešā nodarbība

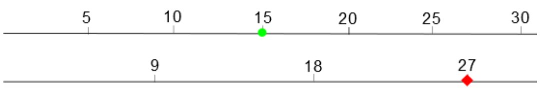
P1.3.1. Matemātiķis Miķelis

Kaķis Miķelis vēroja, kā Andris darbojas virtuvē. Virtuvē ir atrodami tikai trīs smilšu pulksteņi – ar vienu var nomērīt 1 minūti, ar otru 5 minūtes, ar trešo 9 minūtes. Andrim ļoti garšo olas, kuras ir vārītas tieši 13 minūtes, kā arī viņš grib izvārīt olas Ilzei, kurai garšo olas, kas vārītas tieši 12 minūtes. Ar dotajiem pulksteņiem nebūtu bijušas nekādas problēmas to izdarīt, taču Miķelis izdomāja pārbaudīt Andri un saplēsa 1 minūtes pulksteni. Vai Andrim vēl joprojām, izmantojot tikai nesaplēstos pulksteņus, ir iespējams izvārīt garšīgas olas sev un Ilzei? (Garšīga ola jāvāra bez pārtraukuma vārīšanas laikā.)

Atrisinājums. Jā, tas ir iespējams. Skaidrs, ka ar 5 un 9 minūšu pulksteņiem, varam noteikt laika momentus, kad no sākuma brīža būs pagājušas $5\cdot n$ un $9\cdot k$ minūtes, kur n un k ir naturāli skaitļi. Uz augšējās taisnes atlikti 5 minūšu intervāli, bet uz apakšējās taisnes atlikti 9 minūšu intervāli (skat. 203. att. un 204. att.). Ar aplīti attēlots brīdis, kad ola jāliek vārīties, bet ar rombiņu – kad ola jābeidz vārīt. Kā izvārīt garšīgu olu Andrim un Ilzei skat. atbilstoši 203. att. un 204. att.



203. att.



204. att.

P1.3.2. Mulsinošie gadskaitļi

Aprēķini izteiksmes vērtību!

$$\left(2010+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2009+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2014+\frac{2013}{20132014}\right)-$$
$$-\left(2012+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2008+\frac{2013}{20132014}\right)\cdot\left(2013+\frac{2013}{20132014}\right)=$$

Atrisinājums. Apzīmējam $2013+\dfrac{2013}{20132014}$ ar a. Pārrakstot doto izteiksmi un atverot iekavas, iegūstam

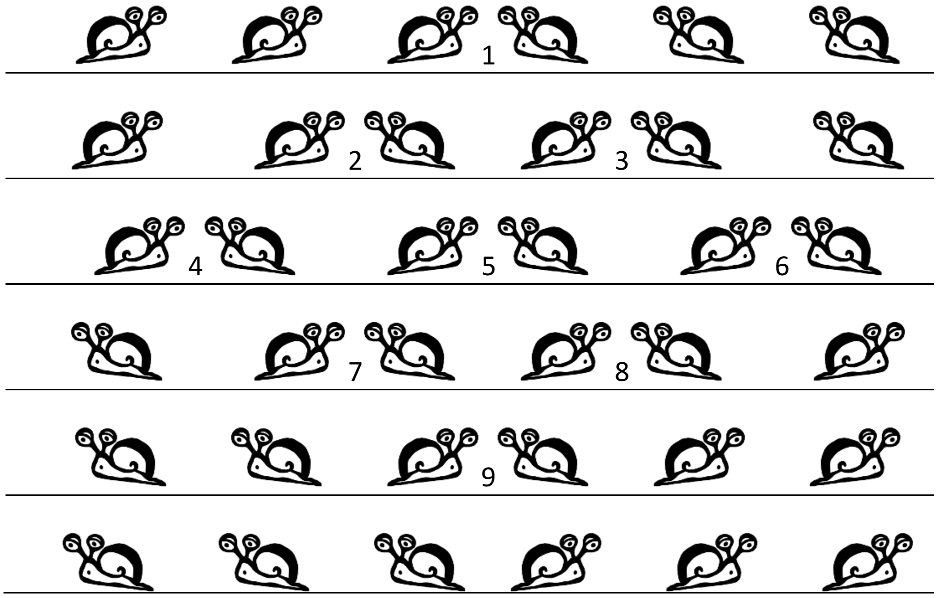
$$(a-3)(a-4)(a+1)-(a-1)(a-5)a=(a^2-7a+12)(a+1)-(a^2-6a+5)a=$$
$$=a^3-6a^2+5a+12-a^3+6a^2-5a=12$$

Tātad dotās izteiksmes vērtība ir 12.

P1.3.3. Gliemežu ekspedīcija

Pāri strautiņam pārkritis šaurs zariņš. Pa zariņu no kreisā krasta uz labo vienādos attālumos viens aiz otra pārvietojas trīs gliemeži; trīs citi gliemeži tāpat dodas no labā krasta uz kreiso krastu. Visu gliemežu ātrumi ir vienādi. Diviem gliemežiem satiekoties, tie apgriežas un ar tādu pašu ātrumu dodas pretējos virzienos. Kāds būs kopējais gliemežu satikšanās reižu skaits uz zariņa? (Gliemeži nevar paiet viens otram garām. Visas satikšanās notiek uz zariņa.)

Atrisinājums. Gliemeži pārvietosies tā, kā redzams 205. att. Līdz ar to kopējais gliemežu satikšanās reižu skaits ir deviņas reizes.



205. att.

P1.3.4. Dīvainais Jānis

Aizvakar Jānis bija 7 gadus vecs. Nākamgad viņam paliks 10 gadi. Kā tas ir iespējams?

Atrisinājums. Tas iespējams gadījumā, ja Jānis dzimis 31. decembrī un apgalvojums izteikts 1. janvārī. Tad

- aizvakar, 30. decembrī, viņam bija 7 gadi,
- vakar, 31. decembrī, viņam palika 8 gadi,
- šogad, 31. decembrī, viņam paliks 9 gadi,
- nākamgad, 31. decembrī, Jānis būs 10 gadus vecs.

P1.3.5. Starpbrīdis

Matemātikas skolotāja pirms pusdienu starpbrīža uzdeva mājasdarbu, pie kura Juris un Andris, protams, ka tūlīt pat ķērās klāt. Mājasdarbs bija šāds: vai naturālos skaitļus no 1 līdz 16 var uzrakstīt **a)** pa apli, **b)** rindā tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts? Pamēģini arī tu atrisināt šo uzdevumu!

Atrisinājums. a) Nē, to izdarīt nav iespējams. Pieņemsim, ka blakus skaitlim 16 ir skaitlis x, tad $16+x$ ir kāda naturāla skaitļa a kvadrāts, tas ir, $16+x=a^2$. Tā kā x var pieņemt vērtības no 1 līdz 15, tad $16+1 \le 16+x \le 16+15$ jeb $17 \le 16+x \le 31$. Starp skaitļiem 17 un 31 ir tikai viens naturāla skaitļa kvadrāts: skaitlis $25=5^2$. Tātad $x=9$ un $a=5$. Tas nozīmē, ka skaitlim 16 blakus var ierakstīt tikai vienu skaitli. Līdz ar to šos skaitļus nevar uzrakstīt pa apli, jo nav tādu divu skaitļu, kuri var atrasties katrā pusē blakus skaitlim 16.

b) Jā, šos skaitļus var uzrakstīt rindā, tā, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi:

16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 3; 6; 10; 15; 1; 8.

P1.3.6. Šifrētā matemātika

Atšifrē, kādiem cipariem jābūt burtu vietās, lai dotā izteiksme būtu patiesa! Dažādi burti apzīmē dažādus ciparus.

$$\begin{array}{ccccc} & B & D & C & E \\ + & B & D & A & E \\ \hline A & E & C & B & E \end{array}$$

Atrisinājums. Vispirms noskaidrojam, kādu vērtību var pieņemt E. Ja, saskaitot divus skaitļus, kuru pēdējie cipari ir vienādi, iegūst skaitli ar tādu pašu pēdējo ciparu, tad pēdējais cipars var būt tikai 0. Par to var pārliecināties, apskatot visus iespējamos gadījumus: $0+0=0$, $1+1=2$, $3+3=6$, $4+4=8$, $5+5=10$, $6+6=12$, $7+7=14$, $8+8=16$, $9+9=18$.

Tā kā pat divu lielāko četrciparu skaitļu summa $9999+9999=19998$ ir piecciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 1, tad A nevar būt lielāks kā 1. Tātad $A=1$ (skat. 206. att. a)).

Tā kā B nevar būt 0 (E jau ir 0), tad B var apzīmēt tikai ciparu 5, jo vai nu $B+B=10$, tad $B=5$, vai arī, ja simtu šķirā rodas pārnesums, tad $B+B+1=10$ jeb $B+B=9$, kas nevar būt, jo B ir cipars. Līdz ar to esam ieguvuši 206. att. b) doto situāciju.

Tā kā C ir cipars, tad nevar būt, ka $C+1=15$. Līdz ar to $C+1=5$ jeb $C=4$ (skat. 206. att. c)). Līdz ar to $D+D=4$ jeb $D=2$.

Esam ieguvuši, ka uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums: $A=1$, $B=5$, $C=4$, $D=2$, $E=0$ (skat. 206. att. d)).

$$\begin{array}{ccccc} & B & D & C & 0 \\ + & B & D & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & C & B & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & D & C & 0 \\ + & 5 & D & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & C & 5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & D & 4 & 0 \\ + & 5 & D & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 2 & 4 & 0 \\ + & 5 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

a) b) c) d)

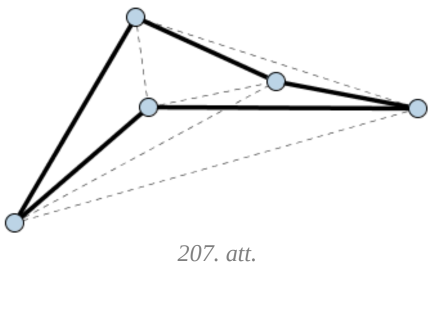
206. att.

P1.3.7. Diagonāles

Uzzīmē tādu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas savā starpā!

Piezīme. Divi nogriežņi krustojas, ja tiem ir tieši viens kopīgs punkts, kas nav galapunkts nevienam no šiem abiem nogriežņiem. Diagonāles nedrīkst pārklāties savā starpā. Par diagonāli sauc nogriezni, kas savieno divas daudzstūra virsotnes un kas nav šī daudzstūra mala.

Atrisinājums. Viens no iespējamajiem variantiem, kā uzzīmēt piecstūri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, parādīts 207. att.



207. att.

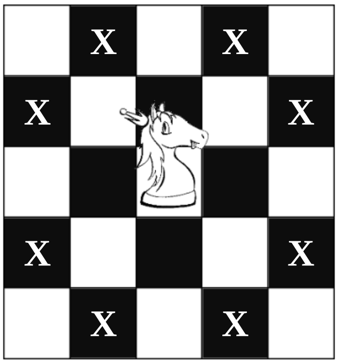
P1.3.8. Šaha zirdziņi

Kāds ir lielākais šaha zirdziņu skaits, ko var uzlikt uz 8×8 šaha galdiņa tā, lai zirdziņi viens otru neapdraud?

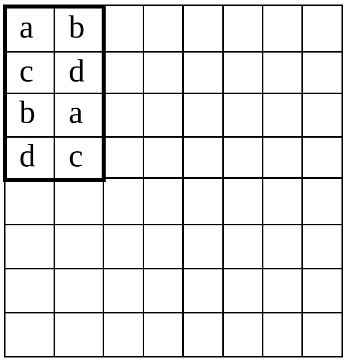
Atrisinājums. Ievērojam, ka, uzliekot zirdziņu uz laukuma, tas apdraud tikai pretējās krāsas lauciņus (skat. 208. att.). Tātad uz 8×8 rūtiņu laukuma noteikti var uzlikt 32 zirdziņus, ja tos visus liek uz vienas krāsas lauciņiem, piemēram, baltajiem.

Pierādīsim, ka vairāk kā 32 zirdziņus uzlikt nevar. Pieņemam pretējo – uz galdiņa var uzlikt 33 zirdziņus. Sadalām visas 64 rūtiņas 32 tādos pāros, ka, uzliekot zirdziņu uz vienas no šīm rūtiņām, otra rūtiņa būtu apdraudēta (skat. 209. att., kur viena pāra rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem; pārējās rūtiņas var sadalīt pāros analoģiski).

Ja uz šaha galdiņa ir novietoti 33 zirdziņi, tad starp izveidotajiem 32 rūtiņu pāriem noteikti būs tāds rūtiņu pāris, uz kura būs novietoti divi zirdziņi (Dirihlē princips), bet šie zirdziņi viens otru apdraud, un tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad vairāk kā 32 zirdziņus uz laukuma uzlikt nevar.



208. att.



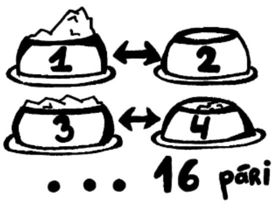
209. att.

Ceturtā nodarbība

P1.4.1. Miķeļa brīvdienas

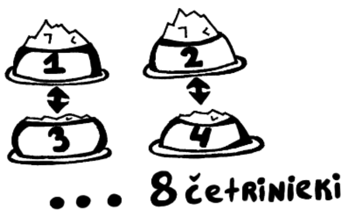
Kaķa Miķeļa saimnieki aizbrauca atvaļinājumā uz 32 dienām, atstājot viņam katrai dienai trauciņu ar piena pulveri. Miķelis zināja, ka saimnieki ir nevīžīgi un sadalījuši pulveri nevienādās daļās. Par laimi viņš bēniņos atrada brīnumtrauku, kurā, ieberot pulveri no divām dažādām dienām paredzētiem trauciņiem, tas katrā no šiem trauciņiem ieber atpakaļ pusi no iebērtā piena pulvera. Kā ar šī brīnumtrauka palīdzību Miķelim garantēt sev vienādu piena daudzumu katru dienu? (Brīnumtraukā vienā reizē var iebērt pulveri tieši no diviem trauciņiem.)

Atrisinājums. Vispirms Miķelim visi trauciņi jāsadala pa pāriem (210. att.). Tad jāņem trauciņi no viena pāra un jāieber brīnumtraukā, tādā veidā Miķelis iegūs 16 trauciņu pārus, kur katrā pārī abos trauciņos būs vienāds pulvera daudzums.



210. att.

Tālāk trauciņi jāsadala „četriniekos” tā, lai katrā četriniekā būtu trauciņi no iepriekš iegūtajiem diviem pāriem (211. att.). Tad Miķelim jāņem viens trauciņš no pirmā pāra un otrs trauciņš no otrā pāra un jāsaber brīnumtraukā. Tā Miķelis būs ieguvis astoņus „četriniekus”, kuros katrā būs četri trauciņi ar vienādu daudzumu piena pulvera.

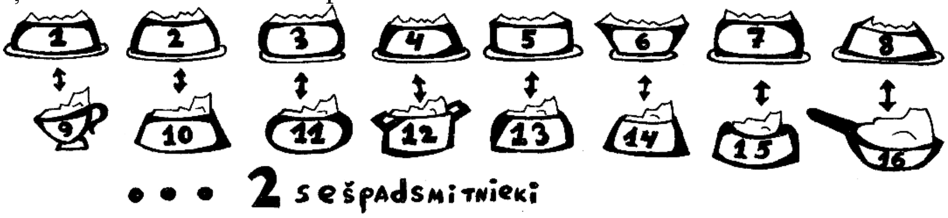


211. att.

Nākamajā solī Miķelim trauciņi jāsadala „astoņniekos”, kur katrā „astoņniekā” jābūt divām „četrinieku” grupām (212. att.). Brīnumtraukā jāber viens trauciņš no viena „četrinieka” un viens – no otra „četrinieka”. Rezultātā Miķelis būs ieguvis četrus „astoņniekus”, kuros katrā ir astoņi trauki ar vienādu daudzumu piena pulvera.

212. att.

Tad trauki jāsadala „sešpadsmitniekos”, kur katrā „sešpadsmitniekā” jābūt divām iepriekš iegūtajām „astoņnieku” grupām (213. att.). Miķelim brīnumtraukā jāber viens trauciņš no pirmā „astoņnieka” un viens – no otrā. Tā Miķelis būs ieguvis divus „sešpadsmitniekus”, kuros katrā ir 16 trauciņi ar vienādu daudzumu pulvera.



213. att.

Pēc tam Miķelim brīnumtraukā ir jāieber viens trauciņš no pirmā „sešpadsmitnieka” un viens – no otrā „sešpadsmitnieka”. Līdz ar to Miķelis būs ieguvis 32 trauciņus ar vienādu piena pulvera daudzumu katrā no tiem un katru dienu varēs mieloties ar vienādu daudzumu piena.

P1.4.2. Starpbrīdis

Juris uzrakstīja uz tāfeles kvadrātvienādojumu $x^2+ax+b=0$. Andris aprēķināja šī vienādojuma saknes *c* un *d*, nodzēsa Jura vienādojumu un tā vietā uzrakstīja vienādojumu $x^2+cx+d=0$. Izrādījās, ka Andra vienādojuma saknes ir skaitļi *a* un *b*. Pēc tam Juris nodzēsa Andra vienādojumu. Vai skolotāja, zinot tikai šos faktus un to, ka neviens no skaitļiem *a, b, c* un *d* nav nulle, var precīzi noteikt, kādi divi vienādojumi bija uzrakstīti?

Atrisinājums. Jā, uzrakstītos vienādojumus var atjaunot. Izmantojot Vjeta teorēmu, no Jura uzrakstītā kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ iegūstam, ka $x_1\cdot x_2=b$ jeb $cd=b$ un $x_1+x_2=-a$ jeb $c+d=-a$, bet no Andra uzrakstītā kvadrātvienādojuma $x^2+cx+d=0$ iegūstam, ka $x_1\cdot x_2=d$ jeb $ab=d$ un $x_1+x_2=-c$ jeb $a+b=-c$.

Iegūstam vienādojumu sistēmu

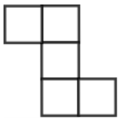
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+c+d=0 \\ ab=d \\ cd=b \end{cases}$$

No pirmajiem diviem vienādojumiem iegūstam, ka $b=d$. Ievietojot $b=d$ pēdējos divos vienādojumos, iegūst $ab=b$ un $cb=b$. Izdalot abas vienādojumu puses ar $b\neq 0$ (pēc dotā), iegūstam, ka $a=1$ un $c=1$. Tad no pirmā vienādojuma iegūstam $b+2=0$ jeb $b=-2$. Tātad esam ieguvuši, ka $a=c=1$ un $b=d=-2$. Secinām, ka abi zēni bija uzrakstījuši vienu un to pašu vienādojumu $x^2+x-2=0$.

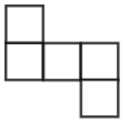
P1.4.3. Iesprostotās figūras

Uzzīmē 12 dažādas figūriņas, kas katra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiņiem ar izmēriem 1×1. Pie tam kvadrātiņiem jāsaskaras pa veselu malas garumu. Piemēram, der 214. att. figūra. Figūras, kas iegūstamas viena no otras ar pagriešanu vai atspoguļošanu, ir vienādas. Piemēram, 214. att. redzamā figūra ir vienāda ar 215. att. figūru.

Vai ir iespējams no šīm 12 figūrām, katru izmantojot tieši vienu reizi, vienlaicīgi izveidot divus taisnstūrus ar izmēriem 4×5 un 4×10?

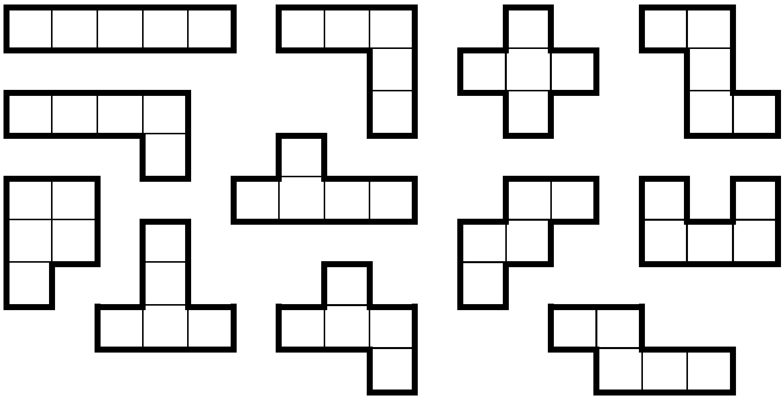


214. att.



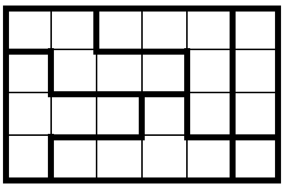
215. att.

Atrisinājums. Meklētās figūras skat. 216. att.

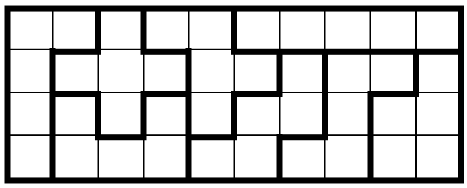


216. att.

Jā, ir iespējams izveidot divus taisnstūrus ar izmēriem 4×5 un 4×10, skat., piemēram, 217. att. un 218. att.



217. att.



218. att.

P1.4.4. Pilnīgie skaitļi

Par naturāla skaitļa n faktoriālu (apzīmē $n!$) sauc visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$. Par *pilnīgu* skaitli sauc tādu naturālu skaitli, kurš ir vienāds ar visu savu pozitīvo dalītāju summu (izņemot pašu skaitli n). Piemēram, 28 ir *pilnīgs* skaitlis, jo $28 = 1+2+4+7+14$. Atrodi visus tādus naturālus skaitļus n, ka $n!$ ir *pilnīgs* skaitlis!

Atrisinājums. Vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $n=3$, jo $3! = 6$ un $6 = 1+2+3$. Pamatosim, ka citu *pilnīgu* skaitļu nav. Vērtības $n=1$ un $n=2$ neder. Ja $n>3$, tad $n!$ dalās ar 6, proti, $n! = (1\cdot 2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5\cdot \ldots \cdot n) = 6\cdot(4\cdot 5\cdot \ldots \cdot n) = 6k$, kur $k>1$ ir naturāls skaitlis. Taču tad skaitlim $n!$ ir vismaz četri dažādi dalītāji: 1, k, $2k$ un $3k$, kuru summa ir $1+k+2k+3k = 1+6k = 1+n!$. Tātad visu skaitļa $n!$ dalītāju, izņemot pašu skaitli $n!$, summa ir lielāka nekā $n!$ un šie skaitļi neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

P1.4.5. Sacensības

Četras meitenes – Anna, Beāte, Cilda un Dace – četras reizes sacentās skriešanā. Katrā skrējienā viena meitene uzvarēja, bet trīs zaudēja. Pēc katra skrējiena uzvarētāja no katras zaudētājas saņēma tik cepumu, cik viņai jau bija pirms skrējiena. Beigās Annai bija 8 cepumi, Beātei bija 10 cepumi, Cildai bija 8 cepumi, Dacei bija 7 cepumi. Cik cepumu katrai meitenei bija sākumā?

Atrisinājums. Ja meitenei pirms skrējiena bija x cepumi, tad pēc uzvaras viņai ir $x+x+x+x=4x$ cepumi. Tas nozīmē, ka skrējiena uzvarētājas cepumu skaits noteikti dalās ar 4. Tā kā pēc ceturtā skrējiena meitenēm bija attiecīgi 8, 10, 8 un 7 cepumi, tad pēdējā skrējienā varēja uzvarēt vai nu Anna, vai Cilda, jo tikai viņu cepumu skaits dalās ar 4. Tātad ceturtā skrējiena uzvarētāja no katras zaudētājas saņēma $8:4=2$ cepumus. Tātad trešā skrējiena uzvarētājai pirms ceturtā skrējiena bija 2 cepumi, bet zaudētājām pirms ceturtā skrējiena bija par 2 cepumiem vairāk nekā pēc ceturtā skrējiena.

Tabulā dots, cik cepumu bija katrai meitenei pēc katra skrējiena, ja 4. skrējienā uzvarēja Anna.

	Anna	Beāte	Cilda	Dace	Uzvarētāja
Cepumi pēc 4. skrējiena	8	10	8	7	Anna (no katras zaudētājas saņēma $8:4=2$ cepumus)
Cepumi pēc 3. skrējiena	2	12	10	9	Beāte (no katras zaudētājas saņēma $12:4=3$ cepumus)
Cepumi pēc 2. skrējiena	5	3	13	12	Dace (no katras zaudētājas saņēma $12:4=3$ cepumus)
Cepumi pēc 1. skrējiena	8	6	16	3	Iespējami divi gadījumi: uzvarēja vai nu Anna, vai Cilda
Cepumu skaits sākumā, ja 1. skrējienā uzvarēja Anna	**2**	**8**	**18**	**5**	Anna (no katras zaudētājas saņēma $8:4=2$ cepumus)
Cepumu skaits sākumā, ja 1. skrējienā uzvarēja Cilda	**12**	**10**	**4**	**7**	Cilda (no katras zaudētājas saņēma $16:4=4$ cepumus)

Tabulā dots, cik cepumu bija katrai meitenei pēc katra skrējiena, ja 4. skrējienā uzvarēja Cilda.

	Anna	Beāte	Cilda	Dace	Uzvarētāja
Cepumi pēc 4. skrējiena	8	10	8	7	Cilda (no katras zaudētājas saņēma $8:4=2$ cepumus)
Cepumi pēc 3. skrējiena	10	12	2	9	Beāte (no katras zaudētājas saņēma $12:4=3$ cepumus)
Cepumi pēc 2. skrējiena	13	3	5	12	Dace (no katras zaudētājas saņēma $12:4=3$ cepumus)
Cepumi pēc 1. skrējiena	16	6	8	3	Iespējami divi gadījumi: uzvarēja vai nu Anna, vai Cilda
Cepumu skaits sākumā, ja 1. skrējienā uzvarēja Anna	**4**	**10**	**12**	**7**	Anna (no katras zaudētājas saņēma $16:4=4$ cepumus)
Cepumu skaits sākumā, ja 1. skrējienā uzvarēja Cilda	**18**	**8**	**2**	**5**	Cilda (no katras zaudētājas saņēma $8:4=2$ cepumus)

Tātad ir iespējami četri dažādi gadījumi, cik cepumi sākumā varēja būt katrai meitenei:

- Annai 2, Beātei 8, Cildai 18, Dacei 5;
- Annai 12, Beātei 10, Cildai 4, Dacei 7;
- Annai 4, Beātei 10, Cildai 12, Dacei 7;
- Annai 18, Beātei 8, Cildai 2, Dacei 5.

P1.4.6. „Ansītis & Co”

Firmas *„Ansītis & Co”* galvenais īpašnieks Ansis savas firmas *n* priekšniekiem ir uzdevis savā starpā sadalīt gada ienākumus – 10 000 latu. Tā kā viņi ir ļoti gudri, Ansis nolēma, ka tas darāms pēc šāda principa:

- pirmais priekšlikumu piedāvā priekšnieks ar viszemāko amatu;
- pēc tam notiek balsošana – visi priekšnieki, ieskaitot to, kurš izvirzījis priekšlikumu, balso „piekrītu” vai „nepiekrītu”;
    - ja balsojumā ir neizšķirts, tad šī priekšlikuma izvirzītāja balsi neņem vērā;
    - ja priekšlikumam piekrīt vairākums, tad ienākumu sadalījums ir nolemts un sēdi var slēgt;
    - ja priekšlikumu noraida vairākums, tad priekšlikuma izvirzītāju atlaiž no darba;
- nākamais priekšlikumu izvirza priekšnieks ar otru zemāko amatu, un balsošana norit pēc tāda paša principa, līdz darbā palikušie priekšnieki ir vienojušies.

Jāņem vērā, ka Anša firmas priekšniekiem ir šādas prioritātes:

1) pirmā prioritāte viņiem ir saglabāt savu darbu;
2) otrā prioritāte ir nauda – tie centīsies darīt visu iespējamo, lai iegūtu vairāk;
3) trešā prioritāte – atlaist no darba pēc iespējas vairāk konkurentu.

Kāds priekšlikums ir jāizdomā un jāpiedāvā priekšniekam ar viszemāko amatu, lai viņš saglabātu darbavietu un iegūtu pēc iespējas lielākus ienākumus, ja **a)** $n = 3$; **b)** $n = 5$?

Atrisinājums. Apzīmēsim priekšniekus (sākot ar augstāko) ar A, B, C, D, E.

Vispirms apskatīsim gadījumu, kad $n = 2$ un naudu dala priekšnieks B. Tā kā A ir iespēja atlaist B un savākt visu naudu sev, tad, lai arī kādu priekšlikumu izvirzītu B, viņš tik un tā tiks atlaists. Skat, piemēram, tabulā.

Priekšnieks	A	B (izvirza priekšlikumu)
Iedalītā nauda	10 000	0
Balsojums	Nē	Jā

Apskatīsim gadījumu, ja $n = 3$ un naudu dala priekšnieks C. Tā kā priekšnieks B zina, ka viņš noteikti tiks atlaists, ja pirms viņa atlaidīs priekšnieku C (tad būs palikuši tieši divi priekšnieki un priekšlikums būs jāizvirza priekšniekam B), tad B balsos „jā” neatkarīgi no tā, cik naudas C viņam iedos (skat. tabulā).

Priekšnieks	A	B	C (izvirza priekšlikumu)
Iedalītā nauda	0	0	10 000
Balsojums	Nē	Jā	Jā

Gadījumā, kad $n = 4$ un naudu dala priekšnieks D, lai priekšlikumu pieņemtu, nepieciešamas trīs apstiprinošas balsis. Viena apstiprinoša balss jau būs no paša priekšnieka D, vēl nepieciešamas divas apstiprinošas balsis. Priekšnieks D zina, ka priekšniekam C dot naudu nav jēgas, jo C tik un tā izdevīgāka ir situācija, kad $n = 3$ (ja D atlaiž) un naudu dala priekšnieks C, tāpēc C nepiekritīs D priekšlikumam. Ja A un B abiem iedos pa vienam latam, tie piekritīs, jo citādi gadījumā, kad $n = 3$, viņi paliks bez naudas. Priekšnieka D izvirzīto priekšlikumu skat. tabulā.

Priekšnieks	A	B	C	D (izvirza priekšlikumu)
Iedalītā nauda	1	1	0	9 998
Balsojums	Jā	Jā	Nē	Jā

Ja $n = 5$ un naudu dala priekšnieks E, lai priekšlikumu pieņemtu nepieciešamas vismaz trīs apstiprinošas balsis. Priekšnieks E zina, ka priekšniekam D dot naudu nav jēgas, jo D tik un tā izdevīgāka ir situācija, kad $n = 4$ (ja E atlaiž) un naudu dala priekšnieks D. Ja priekšniekam C iedos vienu latu, tad viņš piekritīs, jo citādi gadījumā, kad $n = 4$, viņš paliks bez naudas. Lai iegūtu trešo apstiprinošo balsi, jāiedod 2 lati vai nu priekšniekam A, vai priekšniekam B, jo gadījumā, ja E atlaiž, tad no priekšnieka D gan priekšnieks A, gan priekšnieks B iegūs 1 latu, tas nozīmē, ka piesolot A vai B tikai 1 latu, nav garantijas, ka balsojums par E priekšlikumu būs apstiprinošs. Priekšnieka E izvirzīto priekšlikumu skat. tabulā.

Priekšnieks	A	B	C	D	E (izvirza priekšlikumu)
Iedalītā nauda	0	2	1	0	9 997
Balsojums	Nē	Jā	Jā	Nē	Jā

P1.4.7. Mājiņas

Arhitekte Grieta uzprojektēja māju kompleksu, kurš sastāv no 5×5 māju režģa (skat. 219. att.). Katrs cipars režģī apzīmē mājas stāvu skaitu. Cipari režģa malās apzīmē to, cik mājas var redzēt no šī skatupunkta, piemēram, ar izcelto bultiņu apzīmētajā skatupunktā var redzēt tikai divas mājas – ar augstumu 4 stāvi un 5 stāvi, jo pārējās ir „noslēpušās” aiz šīm mājām.

	3 ↓	2 ↓	3 ↓	2 ↓	1 ↓	
5 →	1	2	3	4	5	← 1
2 →	2	5	1	3	4	← 2
1 →	5	1	4	2	3	← 3
2 ⟶	4	3	5	1	2	← 2
3 →	3	4	2	5	1	← 2
	↑ 3	↑ 2	↑ 2	↑ 1	↑ 5	

219. att.

	2 ↓	2 ↓	1 ↓	3 ↓	3 ↓	
2 →						← 2
2 →						← 2
3 →						← 2
1 →						← 5
3 →						← 1
	↑ 2	↑ 3	↑ 4	↑ 2	↑ 1	

220. att.

Šobrīd Grieta strādā pie jauna projekta – cepumu rūpnīcas. Mums par šo projektu ir zināms vienīgi tas, ko var ieraudzīt 220. att. Parādi vienu piemēru, kā varēja izskatīties projekts, ja zināms, ka katrā rindā un katrā kolonnā nav divu māju ar vienādu stāvu skaitu!

Atrisinājums. Skat. 221. att.

	2 ↓	2 ↓	1 ↓	3 ↓	3 ↓	
2 →	4	3	5	1	2	← 2
2 →	1	5	2	3	4	← 2
3 →	2	1	4	5	3	← 2
1 →	5	4	3	2	1	← 5
3 →	3	2	1	4	5	← 1
	↑ 2	↑ 3	↑ 4	↑ 2	↑ 1	

221. att.

P1.4.8. Dīvainie nogriežņi

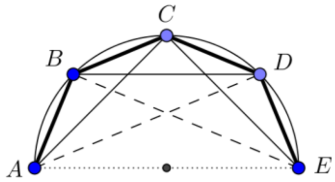
Ja plaknē uzzīmēti pieci punkti *A, B, C, D* un *E,* tad var novilkt 10 nogriežņus, kam abi gali ir šajos punktos: *AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE*. Uzzīmē šos piecus punktus tā, lai četri no nogriežņiem būtu ar garumu *a*, trīs – ar garumu *b*, divi – ar garumu *c* un pēdējais – ar garumu *d* tā, ka $a \neq b \neq c \neq d$! Nekādi trīs punkti nedrīkst atrasties uz vienas taisnes. *Zīmējumu pamato ar spriedumiem!*

Atrisinājums. Punktu izvietojumu var iegūt, izmantojot hordu īpašības riņķa līnijā (skat. 222. att.):

- punktus A un E atliek tā, lai AE – diametrs;
- punktus B, C un D atliek uz loka AE tā, lai tie sadalītu šo loku četrās vienādās daļās.

Tā kā hordas, kas savelk vienādus lokus, ir vienāda garuma, tad var secināt, ka punktu izkārtojums atbilst uzdevuma nosacījumiem, jo

- hordas $AB = BC = CD = DE = a$ savelk $45°$ lielu loku;
- hordas $AC = BD = CE = b$ savelk $90°$ lielu loku;
- hordas $AD = BE = c$ savelk $135°$ lielu loku;
- $AE = d$ ir diametrs, kas savelk $180°$ lielu loku.



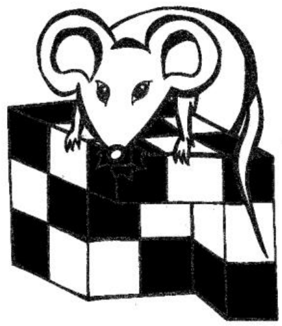
222. att.

Piektā nodarbība

P1.5.1. Siera klucīši

Siera klucis sagriezts $3 \times 3 \times 3$ mazākos siera klucīšos. Pelīte sāk ēst sieru no viena stūra. Apēdot vienu siera klucīti, tā turpina ēst kādu no blakusesošajiem klucīšiem, līdz visi klucīši ir apēsti. Vai vidējo klucīti pelīte var apēst kā pēdējo?

Piezīmes. Blakusesoši klucīši ir tādi, kuriem ir viena kopīga skaldne. Pelīte var ķerties pie nākamā klucīša tikai tad, kad iepriekšējais ir pilnībā apēsts.



Atrisinājums. Nē, vidējo klucīti pelīte nevar apēst kā pēdējo. Izkrāsosim doto siera kluci kā šaha galdiņu: katru mazo klucīti izkrāsosim vienā no divām krāsām tā, ka nekādi divi blakusesoši kubiņi, kas saskaras ar skaldnēm, nav vienādā krāsā. Acīmredzami, ka pelīte ēd pamīšus te vienas krāsas kubiņu, te otras krāsas kubiņu. Klucīšu skaits pavisam ir $3 \times 3 \times 3 = 27$. Tā kā tas ir nepāra skaits, tad pelītei ir jābeidz ēšana ar tās pašas krāsas kubiņu, ar kādu viņa sāka. Centra kubiņš ir pretējās krāsas kubiņš, kā stūra kubiņš, tāpēc pelīte nekad nevarēs apēst centra kubiņu kā pēdējo. (Vairāk skat. "Invariantu metode – krāsošana" 25. lpp.)

P1.5.2. Starpbrīdis

Juris rindā uzrakstīja vairākus vieniniekus. Andris starp jebkuriem diviem vieniniekiem drīkst ievietot "$+$" vai "$-$" zīmi, vai arī zīmi nerakstīt un atstāt vietu starp abiem vieniniekiem tukšu. Šādi rīkojoties, Andris iegūst kādu skaitli.

Piemēram, ja Juris uzraksta sešus vieniniekus, tad, ievietojot divas darbību zīmes, Andris var iegūt skaitli 101: $111 + 1 - 11 = 101$.

Vai Andrim ir iespējams iegūt skaitli 2014, ja Juris uzraksta deviņpadsmit vieniniekus un liek ievietot **a)** sešas; **b)** septiņas uzdevumā atļautās darbību zīmes?

Atrisinājums. a) Skaitli 2014 iegūt nav iespējams. Ja ir izmantotas sešas aritmētisko darbību zīmes, tad ir saskaitīti vai atņemti septiņi skaitļi. Visi šie septiņi skaitļi ir nepāra (jo to pēdējais cipars ir 1), bet septiņu nepāra skaitļu (pozitīvu vai negatīvu) summa ir nepāra skaitlis, tātad tā nevar būt vienāda ar pāra skaitli 2014.

b) Izmantojot septiņas darbību zīmes, ir iespējams iegūt skaitli 2014, piemēram,

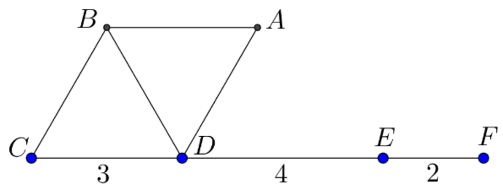
$$1\,1\,1\,1 + 1\,1\,1\,1 - 1\,1\,1 - 1\,1\,1 + 1\,1 + 1 + 1 + 1 = 2014.$$

P1.5.3. Matemātiķu valsts

Kādā valstī ir divi īpaši rajoni: Pirmais un Otrais. Zināms, ka Pirmajā rajonā ir četri ciemi *A*, *B*, *C* un *D*. Attālums starp jebkuriem diviem Pirmā rajona ciemiem (izņemot *A* un *C*) ir 3 km. Otrajā rajonā ir divi ciemi *E* un *F*, kuri ir 2 km attālumā viens no otra. Zināms, ka attālums starp *D* un *E* ir 4 km, bet attālums starp *C* un *F* ir 9 km. Otrajā rajonā uzbūvēja vēl vienu ciemu *G*, kas no abiem pārējiem Otrā rajona ciemiem atrodas 1 un 3 km attālumā. Kāds ir attālums no *A* līdz *G*, ja *G* ir tuvāk Pirmā rajona ciemiem, nekā jebkurš cits Otrā rajona ciems?

Atrisinājums. No dotā izriet, ka *ABCD* ir rombs, turklāt *ABD* un *CBD* ir vienādmalu trijstūri.

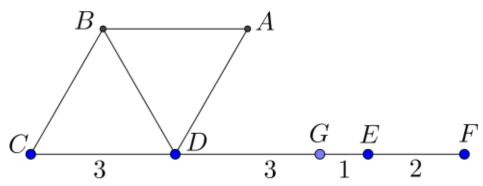
Ievērojam, ka nevienādībā $CF \leq CD + DE + EF$ vienādība ir iespējama tad un tikai tad, ja punkti *C*, *D*, *E* un *F* tieši šādā secībā atrodas uz vienas taisnes. Tā kā izpildās vienādība $CF = 9 = 3 + 4 + 2 = CD + DE + EF$, tad secinām, ka ciemi *C*, *D*, *E* un *F* tieši šādā secībā atrodas uz vienas taisnes (skat. 223. att.).



223. att.

Tā kā uzdevumā nav dots, vai $GE = 1$ un $GF = 3$, vai arī $GE = 3$ un $GF = 1$, ir jāaplūko divi gadījumi.

1) Ja $GE = 3$ un $GF = 1$, tad, tā kā $GE = 3 = 2 + 1 = EF + FG$, secinām, ka *E*, *F* un *G* tieši šādā secībā atrodas uz vienas taisnes (uz tās pašas, uz kuras atrodas arī *C* un *D*). Turklāt *D* un *G* ir pretējās pusēs ciemam *E*; tātad attālums *DE* ir lielāks nekā attālums *EG* – tā ir pretruna ar doto un šāds gadījums nav iespējams.
2) Ja $GE = 1$ un $GF = 3$, tad, tā kā $GF = 3 = 2 + 1 = GE + EF$, secinām, ka *G*, *E* un *F* tieši šādā secībā atrodas uz vienas taisnes (uz tās pašas, uz kuras atrodas arī *C* un *D*). Turklāt attālums no *D* līdz *G* ir $DE - GE = 4 - 1 = 3$ km (skat. 224. att.).



224. att.

Tā kā $\angle BCD = \angle ADB = 60°$ kā vienādmalu trīsstūra leņķi, tad $\angle ADG = 180° - (\angle BDC + \angle ADB) = 60°$. No tā, ka $AD = DG = 3$ km un $\angle ADG = 60°$, izriet, ka *ADG* ir vienādmalu trijstūris un $AG = 3$ km.

Esam ieguvuši, ka attālums no *A* līdz *G* ir 3 km.

P1.5.4. Trīs dīvainas kastes

Ir trīs kastes, katrā no tām ir tieši 20 augļi. Vienā ir tikai bumbieri, otrā tikai āboli, savukārt trešajā ir gan bumbieri, gan āboli. Uz katras kastes ir viens no uzrakstiem: „bumbieri", „āboli", „bumbieri un āboli". Visi uzraksti ir dažādi un neviens neatbilst tam, kas patiesībā atrodas kastē. Kāds ir mazākais skaits augļu, kas jāizvelk, lai noskaidrotu, kādi augļi atrodas katrā kastē? *Savu atbildi pamato!*

Atrisinājums. Pietiek izvilkt vienu augli no tās kastes, uz kuras ir uzraksts „bumbieri un āboli". Tā kā visi trīs uzraksti uz kastēm ir aplami, tad šajā kastē noteikti būs viena veida augļi. Ir iespējami 2 varianti, kāds auglis tiek izvilkts.

- Ja tiek izvilkts ābols, tad kastē ar uzrakstu „bumbieri un āboli" atrodas tikai āboli. Tā kā kastē ar uzrakstu „bumbieri" nevar būt tikai bumbieri, tad tajā atrodas bumbieri un āboli. Tad atliek, ka kastē ar uzrakstu „āboli" ir tikai bumbieri. (Skat. tabulu.)

- Gadījumu, kad tiek izvilkts bumbieris, apskata analoģiski. (Skat. tabulu.)

Uzraksts / Tiek izvilkts	„bumbieri un āboli”	„bumbieri”	„āboli”
Ābols	āboli	bumbieri un āboli	bumbieri
Bumbieris	bumbieri	āboli	bumbieri un āboli

P1.5.5. Sistēma

Atrisināt vienādojumu sistēmu!

$$\begin{cases} x = yzt \\ x + y = zt \\ x + y + z = t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Atrisinājums. Vienādojumu sistēmas trešo vienādojumu ievietojot ceturtajā, iegūstam

$$(x+y+z)+t=1 \;\Rightarrow\; t+t=1 \;\Rightarrow\; 2t=1 \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{2}.$$

Iegūto t vērtību ievietojam pirmajos trijos uzdevumā dotās sistēmas vienādojumos:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}yz \\ x + y = \frac{1}{2}z \\ x + y + z = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Ievietojot sistēmas (1) otro vienādojumu trešajā, iegūstam

$$(x+y)+z=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}z+z=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; z=\frac{1}{3}.$$

Iegūto z vērtību ievieto pirmajos divos sistēmas (1) vienādojumos, iegūstam

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y \\ x + y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} x = \frac{1}{6}y \\ x + y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Pēdējās sistēmas pirmo vienādojumu ievietojot otrajā, iegūstam

$$\frac{1}{6}y+y=\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \frac{7}{6}y=\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{7}.$$

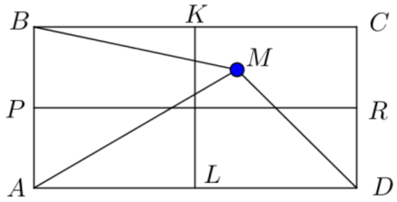
Visbeidzot no vienādības $x=\frac{1}{6}y$ iegūstam, ka $x=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$.

Esam ieguvuši, ka vienādojumu sistēmas atrisinājums ir $x=\frac{1}{42}$, $y=\frac{1}{7}$, $z=\frac{1}{3}$ un $t=\frac{1}{2}$.

P1.5.6. Trijstūru konstruktors

Taisnstūra *ABCD* iekšienē izvēlēts patvaļīgs punkts *M*. Pierādi, ka no nogriežņiem *MA, MB, MC, MD* var izvēlēties trīs nogriežņus un no tiem salikt trijstūri!

Atrisinājums. Novelkam vidusperpendikulus *LK* un *PR* (skat. 225. att.). Punkts *M* atrodas vienā no četriem mazajiem taisnstūriem vai uz tā malas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tajā, kas atrodas pie virsotnes *C*. Tad $MA \geq MB$ un $MA \geq MD$, tātad *MA* ir garākais no nogriežņiem *MA, MB* un *MD*. Tā kā $MA < AC = BD \leq MB + MD$ jeb $MA < MB + MD$ (izpildās trijstūra nevienādība), tad no nogriežņiem *MA, MB, MD* var salikt trijstūri.



225. att.

P1.5.7. Pazaudētie pirmskaitļi

Zināms, ka skaitļi *a, b,* $a - b$ un $a + b$ ir pirmskaitļi. Atrodi visus iespējamos skaitļus *a* un *b* un pamato, ka citu vērtību nav!

Atrisinājums. Abi skaitļi *a* un *b* nevar būt pāra, jo tad visi četri skaitļi ir pāra skaitļi, bet vienīgais pirmskaitlis, kas ir pāra skaitlis, ir 2. Abi skaitļi *a* un *b* nevar būt nepāra skaitļi (vērtība 1 neder, jo 1 nav pirmskaitlis), jo tad $a + b$ nav pirmskaitlis. Tāpēc $b = 2$ (skaitlis *a* nevar būt 2, jo tad skaitlis $a - b$ ir negatīvs). Tātad visiem skaitļiem $a - 2$, *a,* $a + 2$ jābūt pirmskaitļiem. Pierādīsim, ka katram naturālam *a* viens no šiem pirmskaitļiem dalās ar 3. Tā kā vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3, ir 3, tad skaitlis, kas dalās ar 3, būs 3.

- Ja *a* dalās ar 3, tad $a = 3$ un $a - 2 = 1$, bet tas nav pirmskaitlis, tātad šis gadījums neder.
- Ja *a,* dalot ar 3, dod atlikumā 1, tad to var uzrakstīt formā $a = 3k + 1$, kur *k* ir vesels skaitlis. Tādā gadījumā skaitlis $a + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3$ dalās ar 3 jeb $a + 2 = 3$, bet tad $a = 1$, kas nav pirmskaitlis. Tātad arī šis gadījums neder.
- Ja *a*, dalot ar 3, dod atlikumā 2, tad to var uzrakstīt formā $a = 3k + 2$, kur *k* ir vesels skaitlis. Tādā gadījumā skaitlis $a - 2 = 3k + 2 - 2 = 3k$ dalās ar 3 jeb $a - 2 = 3$. Tas nozīmē, ka $a = 5$ un $a + 2 = 7$.

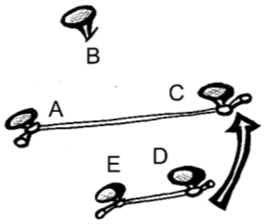
Tātad vienīgās iespējamās skaitļu *a* un *b* vērtības ir $a = 5$ un $b = 2$.

P1.5.8. Nagliņas un striķīši

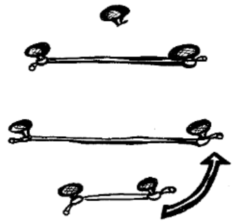
Uz dēlīša ir sadzītas *n* naglas, katras divas naglas ir savienotas ar aukliņu. Katra aukliņa ir izkrāsota vienā no *n* krāsām. Katrām 3 dažādām krāsām var atrast 3 naglas, kuras savienotas ar šādu krāsu aukliņām. Vai var gadīties, ka **a)** $n = 5$; **b)** $n = 7$?

Atrisinājums. a) Jā, var gadīties. Naglas A un C, kā arī E un D savieno ar vienas krāsas aukliņām (skat. 226. att.). Naglu pozīciju rotē uz riņķi par vienu nagliņu bultiņas virzienā. Naglas, kas tagad atrodas pozīcijās *A* un *C*, kā arī *E* un *D,* savieno ar citas krāsas aukliņām. Šādu savienošanu atkārtojot piecas reizes un katrreiz izmantojot citas krāsas aukliņu pāri, iegūst prasīto.

b) Jā, var gadīties. Arī šajā gadījumā aukliņu siešanu veic līdzīgi, kā a) gadījumā (skat. 227. att.).



226. att.


227. att.

Sestā nodarbība

P1.6.1. Viesību sarunas

Kaķis Miķelis aizbrauca uz ģimenes saietu. Tur viņš satika savus brāļus Striķeli un Niķeli. Ir zināms, ka visi brāļi šodien ir apēduši vienādu daudzumu peļu no 10 līdz 20 (10 un 20 ieskaitot), kā arī tas, ka Miķelis un Niķelis vienmēr saka patiesību, bet Striķelis vienmēr melo.

Sagadījies, ka Tu satiec divus no viņiem un jautā: „Cik peļu šodien esi apēdis?”

Viens atbild: „Esmu apēdis 10 līdz 19 peles (10 un 19 ieskaitot).”

Otrs saka: „Esmu apēdis 11 līdz 20 peles (11 un 20 ieskaitot) un viens no mums šobrīd melo.”

Cik peļu šodien ir apēdis katrs kaķis?

Piezīme. Pēc izskata Tu neproti atšķirt šos trīs kaķus.

Atrisinājums. Ja frāze „viens no mums šobrīd melo” būtu meli, tad sanāktu, ka abi kaķi saka patiesību, bet tā ir pretruna ar to, ka frāze „viens no mums šobrīd melo” ir meli. Tas nozīmē, ka otrā kaķa teiktais – „Esmu apēdis 11 līdz 20 peles (11 un 20 ieskaitot) un viens no mums šobrīd melo.” – ir patiesība. Tātad pirmā kaķa (Striķeļa) teiktais, ka viņš ir apēdis 10 līdz 19 peles (ieskaitot) ir meli. Līdz ar to katrs kaķis ir apēdis tieši 20 peles, jo tas ir vienīgais peļu skaits, kas nesakrīt abos apgalvojumos un ko ir teicis kaķis, kurš nemelo.

P1.6.2. Cepumu izklaides

Uz galda sākotnēji ir 100 cepumi. Anna un Kārlis spēlē spēli, katrā gājienā secīgi paņemot dažus cepumus. Spēles noteikumi ir šādi:

- ja tieši pirms gājiena izdarīšanas uz galda ir n cepumi, tad spēlētājs drīkst paņemt k cepumus, kur k ir skaitļa n dalītājs;
- nevienā gājienā nedrīkst paņemt visus uz galda esošos cepumus.

Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais var paņemt cepumu. Pirmo gājienu izdara Anna. Kurš no abiem spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar?

Atrisinājums. Pareizi spēlējot, uzvar Anna (pirmais spēlētājs). Viņas stratēģija ir katrā gājienā paņemt tieši vienu cepumu (to vienmēr var izdarīt, jo 1 ir jebkura naturāla skaitļa dalītājs).

Pieņemsim, ka kādā momentā, kad Annai ir jāizdara gājiens, uz galda ir pāra skaits cepumu (ievērojiet, ka tieši šāda situācija ir arī spēles sākumā ar 100 cepumiem). Pēc tam, kad Anna paņem vienu cepumu, uz galda paliek nepāra skaits cepumu. Ja ir palicis tikai viens cepums, tad Kārlis vairs nevar izdarīt gājienu un zaudē; ja uz galda ir palikuši vairāki cepumi, Kārlis var izdarīt gājienu un dažus paņemt. Taču Kārlis noteikti var paņemt tikai nepāra skaitu cepumu, jo nepāra skaitlim ir tikai nepāra dalītāji. Tātad pēc Kārļa gājiena uz galda paliek atkal pāra skaits cepumu. Tā turpinot, Anna vienmēr varēs paņemt vienu cepumu, bet Kārlim pēc kāda laika paliks uz galda tieši viens cepums un viņš gājienu vairs nevarēs izdarīt.

P1.6.3. Palīdzi Gliemezim!

Gliemezis atrodas pļavā, kurā ir gara zāle. Pļavai ir mala, kura ir taisna līnija. Gliemezis zina, ka atrodas 50 cm no malas, bet nezina, kurā virzienā viņam jāiet, lai šo malu sasniegtu. Pieņemsim, ka Gliemezis var pārvietoties pa jebkuras formas trajektoriju, kādu viņš izvēlas. Izdomā, kā Gliemezim rīkoties, lai garantēti izkļūtu no pļavas, noejot ne vairāk kā **a)** 4 m; **b)** 3,5 m !

Piezīme. Garajā zālē Gliemezis spēj redzēt malu tikai tad, kad jau nonācis pie tās.

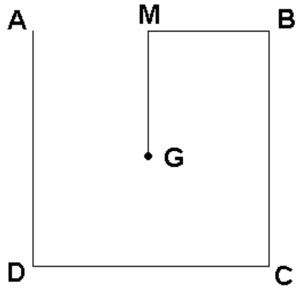
Atrisinājums. a) Ja Gliemezis sākumā atrodas punktā G, tad, noejot maršrutu GMBCDA (skat. 228. att., kur ABCD – kvadrāts ar malas garumu 1 m, G – tā centrs, M – malas AB viduspunkts), Gliemezis būs nogājis ne vairāk kā 4 m. Ejot pa šo maršrutu, viņš noteikti nonāks pļavas malā, jo katrai taisnei, kas atrodas 0,5 m attālumā no G, ir kopīgs punkts ar kvadrāta kontūra daļu (skat. 229. att.)

b) Apskatām 230. att., kur riņķa līnija ar centru G un rādiusu 0,5 m ievilkta kvadrātā XYZT. Punkti M, N, K un L ir pieskaršanās punkti. Ja gliemezis iet pa līniju GMNKLX, kas sastāv no taisnes nogriežņiem GM un LX un riņķa līnijas loka MNKL, viņš noiet ceļu, kura garums ir

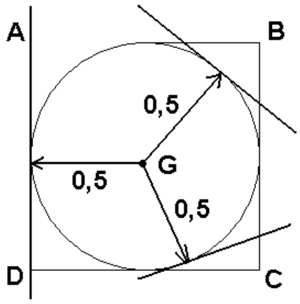
$$0{,}5+\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 0{,}5+0{,}5=0{,}5+\frac{3}{4}\pi+0{,}5=1+\frac{3}{4}\pi<1+\frac{3}{4}\cdot 3{,}2=1+2{,}4=3{,}4<3{,}5 \text{ metri.}$$

Gliemezis, virzoties pa norādīto maršrutu noteikti izkļūs no pļavas, jo līdzīgi, kā a) gadījumā, katrai taisnei, kas atrodas 0,5 m attālumā no G, ir kopīgs punkts ar norādīto maršrutu.

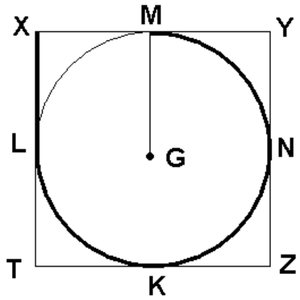
Piezīme. b) gadījumā uzzīmētais maršruts der par atrisinājumu arī a) gadījumam.



228. att.



229. att.



230. att.

P1.6.4. Ojāra meistarstiķis

Ojārs gribēja pārsteigt radus un nodemonstrēt viņiem burvju triku. Viņš palūdza māsai iedomāties piecus skaitļus (ne obligāti dažādus) un pateikt viņam visas desmit summas, ko iegūst, saskaitot katrus divus no iedomātajiem skaitļiem. Ojāra mērķis ir pateikt, kādus skaitļus iedomājās māsa. Vai viņš var šo triku īstenot? *Ja var, tad parādi, kā, ja nevar, tad pamato, kāpēc nevar!*

Atrisinājums. Jā, Ojārs šo triku var īstenot. Apzīmējam nezināmos skaitļus ar *a, b, c, d, e* un pieņemam, ka

$$a\ge b\ge c\ge d\ge e \tag{1}$$

Apzīmējam

$L=a+b$ (pati lielākā māsas nosauktā summa);

$\ell=a+c$ (otra lielākā māsas nosauktā summa);

$m=d+e$ (pati mazākā māsas nosauktā summa);

$M=e+c$ (otra mazākā māsas nosauktā summa).

Tad Ojāram triks ir jāveic pēc šāda plāna:

1. saskaita visas desmit māsas nosauktās summas (iegūto summu apzīmējam ar *S*);
2. $c=S:4-L-m$;
3. $a=\ell-c$;
4. $e=M-c$;
5. $b=L-a$;
6. $d=m-e$.

Pierādīsim, ka, rīkojoties pēc minētā plāna, Ojārs tiešām iegūs skaitļus, kurus iedomājās viņa māsa. Saskaitot visas māsas nosauktās summas iegūsim

$$(a+b)+(a+c)+(a+d)+(a+e)+(b+c)+(b+d)+(b+e)+(c+d)+(c+e)+(d+e)=$$
$$=4(a+b+c+d)=S$$

Izdalot *S* ar 4, iegūsim $(a+b+c+d)$ vērtību. Tā kā vismazāko nosaukto summu iegūst, saskaitot divus mazākos skaitļus $m=d+e$, un vislielāko nosaukto summu iegūst, saskaitot divus lielākos skaitļus $L=a+b$, tad varam aprēķināt vidējo skaitli $c=S:4-L-m$.

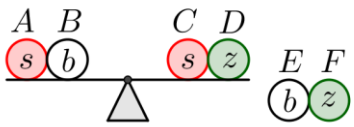
Tātad, tā kā jau ir iegūts skaitlis c, tad var aprēķināt skaitli $a = \ell - c$ un $e = M - c$. Pēc tam var aprēķināt $b = L - a$ un $d = m - e$.

P1.6.5. Dārgās ledenes

Eds, Edis un Edijs ir saldumu veikalā. Tur ir sešas apaļas ledenes: 2 baltas, 2 zaļas un 2 sarkanas. Viņiem ir nauda tikai trīs ledenēm, turklāt Edijs zina, ka no katra vienas krāsas pāra viena ledene ir smagāka, otra – vieglāka, kā arī to, ka visas vieglākās sver vienādi un arī visas smagākās sver vienādi. Pēc izskata vienādo krāsu ledenes atšķirt nevar. Pārdevējs viņiem atļauj izdarīt divas svēršanas uz sviras svariem bez atsvariem. Kādas svēršanas jāizdara, lai zēni uzzinātu, kuras ir smagākās ledenes?

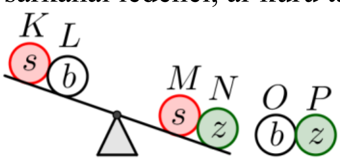
Atrisinājums. Pirmajā svēršanā zēniem vienā svaru kausā jāliek, piemēram, viena sarkana un viena balta ledene, bet otrā – viena sarkana un viena zaļa ledene. Iespējami divi gadījumi.

1) Ja svari ir līdzsvarā (skat. 231. att.), tad katrā kausā ir viena smagā un viena vieglā ledene (jo sarkano ledeņu masas nav vienādas). Otrajā svēršanā jāsalīdzina abas sarkanās ledenes (A un C). Iespējami divi gadījumi.
   - Ja A nosveras uz leju, tad trīs smagās ledenes ir A, D un E.
   - Ja C nosveras uz leju, tad trīs smagās ledenes ir C, B un F.

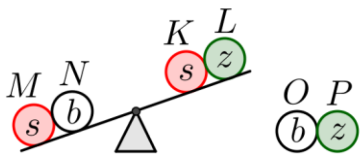


231. att.

2) Ja svari nav līdzsvarā (skat. 232. att. vai 233. att.), tad ir skaidrs, kura no sarkanajām ledenēm ir vieglāka, kura – smagāka, jo nav iespējama tāda situācija, ka smagākā ledene atrastos augstāk par vieglāko. Tās baltās un zaļās ledenes, kas atrodas uz svariem, masa var būt vienāda (abas smagas vai abas vieglas) vai arī to masa var būt tāda, kā tai sarkanai ledenei, ar kuru tā ir vienā svaru kausā.

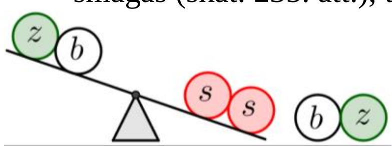


232. att.

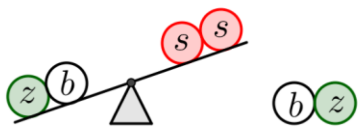


233. att.

Otrajā svēršanā jāsalīdzina tās pašas ledenes, kas tika svērtas pirmajā svēršanā, bet vienā svaru kausā jāliek abas sarkanās ledenes un otrā kausā – baltā uz zaļā ledene. Iespējami divi gadījumi.
   - Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad baltās un zaļās ledenes masa ir vienāda – tās vai nu abas ir vieglas (skat. 234. att.), tad trīs smagās ledenes ir M, O un P, vai abas ir smagas (skat. 235. att.), tad trīs smagās ledenes ir M, L un N.

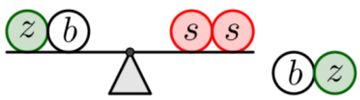


234. att.



235. att.

   - Ja svaru kausi ir līdzsvarā (skat. 236. att.), tad baltās un zaļās ledenes masa nav vienāda un trīs smagās ledenes ir M, N un vai nu O, ja L ir balta, vai P, ja L ir zaļa.



236. att.

Piezīme. Šis nav vienīgais variants, kā Eds, Edis un Edijs var noteikt, kuras ledenes ir smagākās.

P1.6.6. Starpbrīdis

Andris un Juris brīvajā brīdī centās noskaidrot divas lietas.

a) Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem?

b) Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem divciparu nepāra skaitļiem?

Palīdzi puišiem atrast atbildi un pamato to!

Atrisinājums. a) Lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem, ir septiņi, piemēram, 1; <u>3</u>; <u>5</u>; <u>7</u>; 9; <u>11</u>; <u>13</u>; 15; <u>17</u>; <u>19</u>. Pierādīsim, ka vairāk pirmskaitļu starp desmit pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem nevar būt.

Atsevišķi apskatām gadījumu, kad starp izvēlētajiem skaitļiem ir skaitlis 5, un gadījumu, kad visi izvēlētie skaitļi ir lielāki nekā 5.

1) Ir trīs iespējas izvēlēties desmit pēc kārtas ņemtus nepāra skaitļus, lai skaitlis 5 būtu starp tiem:
   - ja ir izvēlēti skaitļi 1; <u>3</u>; <u>5</u>; <u>7</u>; 9; <u>11</u>; <u>13</u>; 15; <u>17</u>; <u>19</u>, tad starp tiem ir septiņi pirmskaitļi;
   - ja ir izvēlēti skaitļi <u>3</u>; <u>5</u>; <u>7</u>; 9; <u>11</u>; <u>13</u>; 15; <u>17</u>; <u>19</u>; 21, tad starp tiem ir septiņi pirmskaitļi;
   - ja ir izvēlēti skaitļi <u>5</u>; <u>7</u>; 9; <u>11</u>; <u>13</u>; 15; <u>17</u>; <u>19</u>; 21; <u>23</u>, tad starp tiem ir septiņi pirmskaitļi.
2) Apskatām gadījumu, kad visi izvēlētie skaitļi ir lielāki nekā 5. Pamatosim, ka starp trim pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem $a-2$, a, $a+2$, viens dalās ar 3.
   - Ja a dalās ar 3, tad tas arī ir meklētais.
   - Ja a, dalot ar 3, dod atlikumā 1, tad to var uzrakstīt formā $a=3k+1$, kur k ir vesels pāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 3 dalās skaitlis $a+2=(3k+1)+2=3k+3=3\cdot(k+1)$.
   - Ja a, dalot ar 3, dod atlikumā 2, tad to var uzrakstīt formā $a=3k+2$, kur k ir vesels nepāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 3 dalās skaitlis $a-2=(3k+2)-2=3k$.

Līdzīgi, starp pieciem pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem $a-4$, $a-2$, a, $a+2$, $a+4$ viens dalās ar 5.

- Ja a dalās ar 5, tad tas arī ir meklētais.
- Ja a, dalot ar 5, dod atlikumā 1, tad to var uzrakstīt formā $a=5k+1$, kur k ir vesels pāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 5 dalās skaitlis $a+4=(5k+1)+4=5k+5=5\cdot(k+1)$.
- Ja a, dalot ar 5, dod atlikumā 2, tad to var uzrakstīt formā $a=5k+2$, kur k ir vesels nepāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 5 dalās skaitlis $a-2=(5k+2)-2=5k$.
- Ja a, dalot ar 5, dod atlikumā 3, tad to var uzrakstīt formā $a=5k+3$, kur k ir vesels pāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 5 dalās skaitlis $a+2=(5k+3)+2=5k+5=5\cdot(k+1)$.
- Ja a, dalot ar 5, dod atlikumā 4, tad to var uzrakstīt formā $a=5k+4$, kur k ir vesels nepāra skaitlis. Tādā gadījumā ar 5 dalās skaitlis $a-4=(5k+4)-4=5k$.

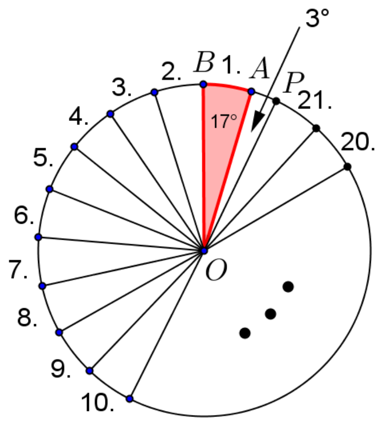
Tas nozīmē, ka starp desmit pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem vismaz trīs dalās ar 3 un divi skaitļi dalās ar 5. Ir iespējams, ka starp desmit izvēlētajiem skaitļiem viens dalās gan ar 3, gan ar 5, tātad tas dalās arī ar 15. Pamatosim, ka nav iespējams, ka starp desmit izvēlētajiem skaitļiem ir divi skaitļi, kas dalās ar 15. Ja tādi būtu, tad šo skaitļu starpība arī dalītos ar 15, un tā kā starpība starp diviem no desmit izvēlētajiem nepāra skaitļiem nevar būt lielāka kā 20, tad šī starpība būtu tieši 15, līdz ar to viens skaitlis būtu pāra, bet otrs – nepāra, kas ir pretrunā ar to, ka visi izvēlētie ir nepāra skaitļi. Tātad ir vismaz trīs skaitļi, kas dalās ar 3 un nedalās ar 5, un vēl vismaz viens cits skaitlis, kas dalās ar 5 un nedalās ar 3. Gadījumā, ja visi izvēlētie skaitļi ir lielāki nekā 5, tad visi skaitļi, kas dalās ar 3 vai 5, ir salikti skaitļi. Tātad starp izvēlētajiem skaitļiem ir vismaz četri salikti skaitļi un tāpēc ir ne vairāk kā seši pirmskaitļi. Izvēloties skaitļus <u>29</u>; <u>31</u>; 33; 35; <u>37</u>; 39; <u>41</u>; <u>43</u>; 45; <u>47</u> redzam, ka seši pirmskaitļi tiešām ir iespējami.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka **a)** lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem nepāra skaitļiem, ir septiņi; **b)** lielākais skaits pirmskaitļu, kas var būt starp 10 pēc kārtas ņemtiem divciparu nepāra skaitļiem, ir seši.

P1.6.7. Pirmskaitļu ģeometrija

Dots $17°$ liels leņķis. Kā tikai ar cirkuļa un lineāla palīdzību sadalīt to 17 vienādās daļās?

1. atrisinājums. Uzzīmējam riņķa līniju, kuras centrs atrodas dotā leņķa virsotnē *O*. Punktus, kuros leņķa malas krusto riņķa līniju, apzīmējam ar *A* un *B* (skat. 237. att.). Tā kā centra leņķa lielums vienāds ar tā loka leņķisko lielumu, uz kuru šis centra leņķis balstās, tad $\cup AB$, uz kura balstās dotais $\angle AOB$, jāsadala 17 vienādos lokos, kur katra loka lielums ir $1°$. Parādīsim, kā uz iegūtās riņķa līnijas atlikt $1°$ lielu loku. Sākumā ar cirkuli nomērām $\cup AB$, lai varētu atlikt $17°$ lielus lokus. Ievērojam, ka $360°:17° = 21, atl. 3°$. Tātad, 20 reizes uz riņķa līnijas (jo sākumā jau ir dots viens leņķis) vienu pēc otra atzīmējot $17°$ lielus lokus, nonāksim punktā *P*, kas ir $3°$ attālumā no punkta *A*.



237. att.

Pēc tam no punkta *P* vienu pēc otra atliekam $17°$ lielus lokus vēl $5 \cdot 21$ reizi. Būsim nonākuši $6 \cdot 3 = 18°$ attālumā no punkta *A*. Atliekot vēl vienu $17°$ lielu loku, nonāksim $1°$ attālumā no punkta *A*. Tātad būsim ieguvuši $1°$ lielu loku. Ar cirkuli nomērām $1°$ lielo loku un uz loka $\cup AB$ no punkta *A* vienu pēc otra atzīmējam $1°$ lielus lokus, uz kuriem balstās tikpat lieli centra leņķi. Līdz ar to dotais leņķis ir sadalīt 17 vienādās daļās.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka $106 \cdot 17° - 5 \cdot 360° = 2°$. Tātad, 106 reizes atliekot vienu aiz otra $17°$ leņķus, iegūsim $2°$ lielu leņķi (starp pirmā leņķa pirmo malu un pēdējā leņķa pēdējo malu). To sadalot uz pusēm, iegūsim $1°$ lielu leņķi. Šo leņķi atliekot dotā $17°$ leņķa iekšpusē, iegūstam prasīto sadalījumu.

P1.6.8. Komandējumā

Profesors Cipariņš atrodas uz 400 metrus augstas klints; 200 m virs zemes klintī atrodas platforma, uz kuras viņš var stāvēt. Viņam ir 300 m gara virve. Kā viņam tikt lejā?

Piezīme. Profesors prot siet mezglus un viņam ir nazis, ar kuru var pārgriezt virvi. Vienīgais veids, kā var tik lejā, ir laižoties pa atbilstoša garuma nostiprinātu virvi. Nostiprināt virvi viņš var tikai vietās, kur viņš var nostāvēt.

Atrisinājums. Vispirms profesoram Cipariņam jāpārloka virve trīs vienādās daļās un no tās jānogriež 100 m garš gabals. Iegūtās 100 m garās virves galā profesoram jāsasien cilpiņa un jāizver cauri 200 m garā virve, tādejādi iegūstot aptuveni 200 m garu virvi (skat. 238. att.). Kad profesors ir nolaidies uz platformas, viņam 200 m garā virve jāatsvabina un tā jāizmanto, lai nokāptu atlikušos 200 metrus.

238. att.

Sagatavošanās olimpiāde

5. klase

S1.5.1. Ziemassvētku vecītim ir 2013 šokolādes tāfelītes. Tās jāsaliek kastītēs vai nu pa 3, vai pa 4 katrā kastītē. Kurā gadījumā būs nepieciešams vairāk kastīšu – ja visās kastītēs liek tieši 3 šokolādes tāfelītes vai arī visās liek tieši 4 šokolādes tāfelītes? Par cik vairāk?

Atrisinājums. Izdalām skaitli 2013 ar 3 un ar 4 ar atlikumu:

$2013 : 3 = 671$,

$2013 : 4 = 503$, atl. 1.

Tātad vairāk kastīšu būs nepieciešams, ja visās kastītēs liek tieši 3 šokolādes tāfelītes un būs nepieciešams par $671 - 503 = 168$ kastītēm vairāk.

S1.5.2. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?

Atrisinājums. Saskaitot kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. To pašu var teikt arī par rindās ierakstīto skaitļu summām. Tāpēc trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir $(32+34+35)-(42+27)=32$.

S1.5.3. Sivēntiņš var iet ciemos tikai tad, ja Vinnijs Pūks viņu pavada. Vinnijs Pūks var iet ciemos tikai tad, ja viņu pavada Pūce vai Tīģerītis, bet Pūce – ja viņu pavada Tīģerītis. Vai visi minētie dzīvnieki varēs aiziet ciemos pie Rū, ja zināms, ka Tīģerītim pavadonis nav nepieciešams? Sākumā katrs dzīvnieks atrodas savā mājiņā, kurā dzīvo viņš viens pats.

Atrisinājums. Jā, visi dzīvnieki var aiziet pie Rū. Vispirms Tīģerītis aiziet pie Pūces, tad abi kopā viņi iegriežas pie Vinnija Pūka, tad visi trīs iet pie Sivēntiņa un visbeidzot dodas ciemos pie Rū.

S1.5.4. Sauksim naturālu skaitli par *interesantu*, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars ir vienāds ar visu citu ciparu summu.

a) Kāds ir mazākais *interesantais* četrciparu skaitlis?

b) Kāds ir lielākais *interesantais* skaitlis?

Atrisinājums. a) Tā kā *interesants* skaitlis nesatur ciparu 0 un pēdējie trīs cipari četrciparu skaitlī var būt jebkādi nenulles cipari, tad, lai skaitlis būtu mazākais, jāizvēlas mazākie pēdējie cipari, tas ir, 111. Pirmais cipars ir pārējo ciparu summa, tāpēc tas ir vismaz 3. Tātad mazākais *interesantais* četrciparu skaitlis ir 3111.

b) Skaitlis ir lielāks, ja tajā ir vairāk ciparu. Vislielākais cipars ir 9, to var iegūt, saskaitot ne vairāk kā 9 ciparus, no kuriem neviens nav 0. Tāpēc *interesantā* skaitlī ir ne vairāk kā 10 ciparu. (Pirmais cipars un vēl ne vairāk kā 9 citi). Desmit ciparu ir tikai skaitlim 9111111111, kas arī ir lielākais *interesantais* skaitlis.

S1.5.5. Tālajā pasaku zemē saskaitīšanu un reizināšanu apzīmē ar $*$ un $\circ$ (nav zināms, kuru darbību ar kuru simbolu). Ar *a, b, c, d* ir apzīmēti dažādi cipari, kas nav nulle. Karalis apgalvo, ka vienādības

$$a * a = a;$$

$$b \circ a = c;$$

$$b * c = d$$

ir patiesas. Kāda var būt izteiksmes $(a*b)\circ(c*d)$ vērtība?

Atrisinājums. Tā kā vienādība $a+a=a$ nav iespējama, jo $a \neq 0$, tad $*$ apzīmē reizināšanu un $a=1$. No otrās vienādības secinām, ka $c=b+1$. Trešā vienādība norāda, ka $b\cdot(b+1)=d$. Tā kā d cipars, tad $b=2$, $c=3$, $d=6$. Atliek aprēķināt dotās izteiksmes vērtību: $(1\cdot 2)+(3\cdot 6)=20$ 20.

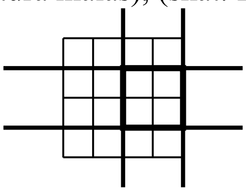
6. klase

S1.6.1. Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.

Atrisinājums. Lai skaitlis dalītos ar 9, arī tā ciparu summai jādalās ar 9. Mazākā iespējamā ciparu summa ir 9. Tā kā skaitlim jābūt vismazākajam, tad tam jāsākas ar 1. Atlikušo ciparu summai jābūt 8. Skaidrs, ka pēc iespējas vairāk pozīcijās (pēc cipara 1) ir jābūt ciparam 0 un tiem cipariem, kas ir atšķirīgi no 0, jābūt beigās. Tā kā $3+3<8$, tad trīs no atlikušajiem cipariem atšķirsies no 0. Vienīgā iespēja, kā summā iegūt 8 ir $2+3+3$. Skaidrs, ka mazāks skaitlis būs tad, ja tūkstošu pozīcijā būs mazākais pieļaujamais cipars. Tāpēc meklētais skaitlis ir 100233.

S1.6.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām. Cik ir taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu malām?

Atrisinājums. Katru taisnstūri viennozīmīgi nosaka divas vertikālās taisnes (taisnstūra malas) un divas horizontālās taisnes (taisnstūra malas), (skat. 239. att.).



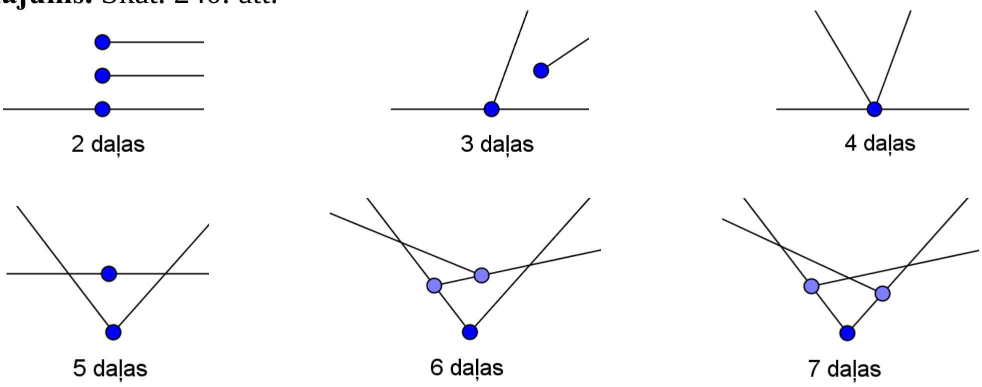
239. att.

Divas vertikālās taisnes var izvēlēties 10 veidos: {(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5); (4,5)}. Arī divas horizontālās taisnes var izvēlēties 10 veidos. Tātad pavisam iespējams izveidot $10\times10=100$ taisnstūrus, kuru visas malas iet pa rūtiņu līnijām.

Piezīme. Uzdevumā prasīto var aprēķināt, apskatot visus iespējamo izmēru taisnstūrus: 1×1, 1×2, 1×3, …, 4×4, un saskaitot, cik ir katra veida taisnstūru.

S1.6.3. Parādi, ka 4 stari var sadalīt plakni 2; 3; 4; 5; 6; 7 daļās!

Atrisinājums. Skat. 240. att.



240. att.

S1.6.4. Rindā stāv 2013 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā taisnību, vai vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: "No manis pa labi stāv vismaz viens melis". Cik starp rūķīšiem ir meļu?

Atrisinājums. Pats labējais rūķītis noteikti ir melis (jo pa labi no viņa nestāv neviens rūķītis); tātad visi pārējie rūķīši runā patiesību. Starp rūķīšiem ir tieši viens melis.

S1.6.5. Aija, Maija, Paija un Kaija kopā apēda 40 konfektes (katra – vismaz vienu). Aija un Maija kopā apēda 25 konfektes, Paija apēda vairāk konfekšu nekā jebkura cita meitene. Cik konfekšu apēda Kaija?

Atrisinājums. Tā kā Aija un Maija kopā apēda 25 konfektes, tad vai nu Aija, vai Maija apēda vismaz 13 konfektes, tāpēc Paija – vismaz 14. Tātad Aija, Maija un Paija kopā apēda vismaz $25+14=39$ konfektes, tāpēc Kaija – ne vairāk kā 1. Tāda situācija ir iespējama, piemēram, Paija apēda 14 konfektes, Aija – 13, Maija – 12, Kaija – 1.

7. klase

S1.7.1. Cik dažādos veidos var izvēlēties veselus skaitļus *a* un *b* tā, ka $|a|+|b|<6$?

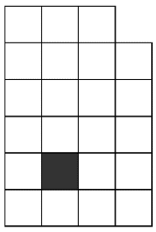
Atrisinājums. Apskatīsim skaitļa *a* iespējamās vērtības.

- Ja $a=0$, tad *b* var pieņemt 11 vērtības: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$.
- Ja $a=\pm 1$, tad *b* var pieņemt 9 vērtības: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$.
- Ja $a=\pm 2$, tad *b* var pieņemt 7 vērtības: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$.
- Ja $a=\pm 3$, tad *b* var pieņemt 5 vērtības: $0; \pm 1; \pm 2$.
- Ja $a=\pm 4$, tad *b* var pieņemt 3 vērtības: $0; \pm 1$.
- Ja $a=\pm 5$, tad *b* var pieņemt vienu vērtību: 0.

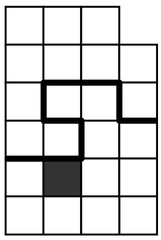
Tātad dažādo iespēju skaits ir $1\cdot 11+2\cdot 9+2\cdot 7+2\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=61$.

S1.7.2. Sagriez 241. att. figūru divās vienādās daļās (iekrāsotā rūtiņa ir caurums)! Par vienādām uzskatāmas arī tādas figūras, kuras var iegūt vienu no otras „apgāžot otrādi".

Atrisinājums. Skat. 242. att.



241. att.



242. att.

S1.7.3. Vai var atrast tādus trīs naturālus skaitļus *a*, *b* un *c*, ka $(a+b)(b+c)(c+a)=20142013$?

Atrisinājums. Nē, šādus skaitļus atrast nevar. Tā kā vismaz divi no skaitļiem *a*, *b*, *c* ir ar vienādu paritāti, tad vismaz viens no reizinātājiem $a+b$, $b+c$ vai $c+a$ ir pāra skaitlis. Tātad arī reizinājums ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, jo 20142013 ir nepāra skaitlis.

S1.7.4. Dotas astoņas pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām septiņas ir ar vienādu masu, bet vienas monētas masa ir citāda. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar trīs svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

Atrisinājums. Novietojam uz katra svaru kausa pa divām monētām. Iespējami divi gadījumi:

- ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm četrām;
- ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp atlikušajām četrām.

Līdz ar to ir atrastas četras monētas, starp kurām ir atšķirīgā. Novietojam uz kausiem pa vienai no tām. Iespējami divi gadījumi:

- ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm divām;
- ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp atlikušajām divām.

Tātad ir atrastas divas monētas, starp kurām ir atšķirīgā. Vienu no tām salīdzinām ar kādu no atrastajām īstajām un noskaidrojam, kura no atlikušajām divām ir atšķirīgā.

S1.7.5. Konferencē piedalījās 17 zinātnieki. Katrs no viņiem konstatēja, ka konferencē vismaz 8 zinātnieki ir viņa radinieki. Pierādi, ka visi 17 zinātnieki ir radinieki!

Atrisinājums. Aplūkojam divus zinātniekus *A* un *B*. Pierādīsim, ka viņi ir radinieki. Pieņemam pretējo, ka *A* un *B* nav radinieki. Tad atlikuši ir 15 zinātnieki, starp kuriem ir astoņi *A* radinieki un astoņi *B* radinieki. Tā kā kopā sanāk 16 cilvēki, tad starp tiem ir kopīgs zinātnieks *C* – viņš ir gan *A* radinieks, gan *B* radinieks. Bet tādā gadījumā arī *A* un *B* ir radinieki. Iegūta pretruna; tātad visi zinātnieki konferencē ir radinieki.

8. klase

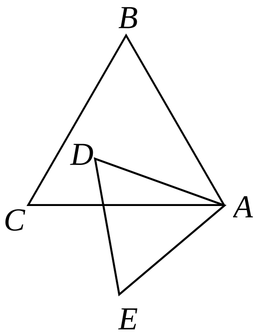
S1.8.1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 2, vai par 3?

Atrisinājums. Jā, var. Piemēram, šādi:

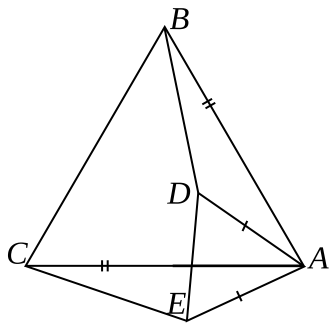
1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, 11, 13, 15, 12, 14, 16, 18, 20, 17, 19, 21, 23, 25, 22, 24.

S1.8.2. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir $60°$ lieli (skat. 243. att.). Pierādi, ka $BD = CE$!

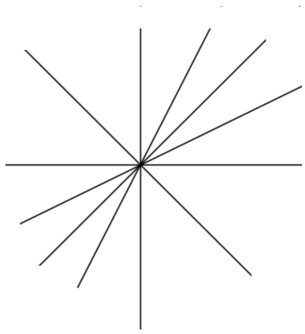
Atrisinājums. Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $AE = AD$ un $AC = AB$ (skat. 244. att.). Bez tam $\angle EAC = 60° - \angle CAD = \angle DAB$. Tāpēc $\Delta EAC = \Delta DAB$ pēc pazīmes $m\ell m$, un $EC = DB$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.



243. att.

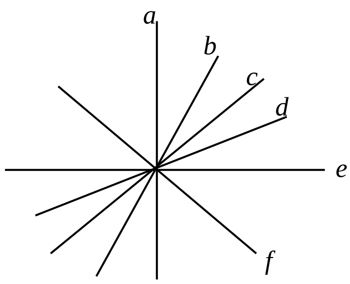


244. att.


245. att.

S1.8.3. Haotiskais profesors no somas izvelk caurspīdīgu kodoskopa plēvi, uz kuras ir 245. att. dotais zīmējums. Viņš zina, ka no attēlotajām taisnēm divas ir koordinātu asis, bet pārējās ir funkciju $y = 2x,\ y = x,\ y = -x,\ y = \frac{1}{2}x$ grafiki. Profesors ir aizmirsis, kuras ir asis, kā arī kura ir plēves augšpuse. Par kurām funkcijām noteikti var pateikt, kurš no dotajiem ir tās grafiks?

Atrisinājums. Apzīmējam visas taisnes kā parādīts 246. att.



246. att.

Koordinātu asu pāris var būt tikai $(a; e)$ vai $(c; f)$, jo tie ir vienīgie savstarpēji perpendikulārie taišņu pāri. Otrais gadījums nav iespējams, jo trīs doto funkciju grafikiem jāatrodas pirmajā un trešajā kvadrantā.

Tātad koordinātu asis ir a un e. Skaidrs, ka c ir funkcijas $y = x$ grafiks un f ir funkcijas $y = -x$ grafiks.

Kura no taisnēm b un d ir kuras atlikušās funkcijas grafiks, noskaidrot nevar, jo nav zināms, kura no taisnēm a vai e ir abscisu ass (jo kodoskopa plēve ir caurspīdīga un to var apskatīt no abām pusēm).

S1.8.4. Ar $\overline{xyz}$ apzīmēsim trīsciparu skaitli ar cipariem x (simti), y (desmiti) un z (vieni). Pierādi, ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca} + \overline{cab}$ dalās ar 37.

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=$$
$$=(100a+10b+c)+(100b+10b+a)+(100c+a+b)=$$
$$=111\cdot(a+b+c)=3\cdot 37\cdot(a+b+c).$$

Tātad $\overline{bca}+\overline{cab}=3\cdot 37\cdot(a+b+c)-\overline{abc}$ dalās ar 37, jo gan mazināmais, gan mazinātājs dalās ar 37.

S1.8.5. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi. Pierādi: vai nu ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi!

Atrisinājums. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu kaudzīšu, kurās ir vienāds sērkociņu skaits un nav divu kaudzīšu, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi. Tad no katra skaitļu pāra (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7) augstākais viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tāpēc sērkociņu nav vairāk kā 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57 (no katra skaitļu pāra izvēlējās lielāko skaitli) – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka vai nu ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi.

9. klase

S1.9.1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{9}{10}\;.$$

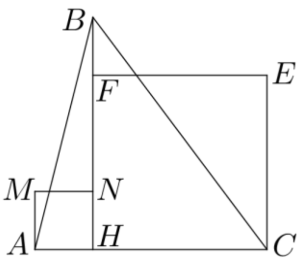
Atrisinājums. Visiem naturāliem skaitļiem *n* izpildās vienādība

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,.$$

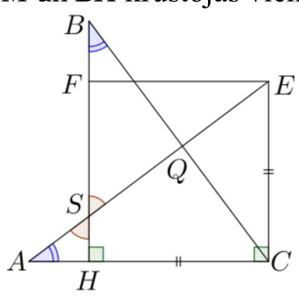
Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}=$$
$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

S1.9.2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BH*. Zināms, ka $AC=BH$ un četrstūri *AMNH* un *HCEF* ir kvadrāti (skat. 247. att.) Pierādīt, ka taisnes *AE*, *CM* un *BH* krustojas vienā punktā!



247. att.



248. att.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $AE\perp BC$. Ar *Q* apzīmējam *AE* un *BC* krustpunktu (skat. 248. att.). Tā kā $CE=HC$ un $AC=BH$, tad $\Delta ACE=\Delta BHC$ (pēc taisnleņķu trijstūru vienādības pazīmes *kk*). Tāpēc $\angle QBS=\angle HAS$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūrus un $\angle BSQ=\angle ASH$ kā krustleņķi. Līdz ar to $\Delta AHS\sim\Delta BQS$ (pēc pazīmes $\ell\ell$) un $\angle BQS=\angle AHS=90°$. Tātad $AE\perp BC$ jeb *AQ* ir trijstūra *ABC* augstums.

Līdzīgi pierāda, ka $CM\perp AB$ un *CM* ir trijstūra *ABC* augstums. Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā, tāpēc taisnes *AE*, *CM* un *BH* krustojas vienā punktā.

S1.9.3. Dots, ka *a* un *b* ir naturāli skaitļi un $a + b = 210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $a \cdot b$ dalās ar 210.

Ievērosim, ka $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ar *p* apzīmēsim jebkuru no pirmskaitļiem 2, 3, 5, 7. Tad $a \cdot b$ dalās ar *p* un vismaz viens no skaitļiem *a, b* dalās ar *p*. Tā kā $a + b = 210$ dalās ar *p*, tad arī otrs skaitlis dalās ar *p*.

Līdz ar to gan *a*, gan *b* dalās ar $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, bet tādā gadījumā $a \geq 210$, $b \geq 210$ un $a + b > 210$. Iegūta pretruna. Tātad ab nedalās ar 210.

S1.9.4. Dots, ka *a* un *b* ir naturāli skaitļi un *a* + *b* ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordinātu dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu *a*, vai *b*.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo – nav tādu divu vienas cilts rūķīšu, starp kuriem attālums ir vai nu *a*, vai *b*. Viens no skaitļiem *a* un *b* ir pāra, otrs – nepāra; pieņemsim, ka *a* – pāra, *b* – nepāra.

Ja punktā 0 dzīvo votivapa, punktā $1 \cdot a$ dzīvo šillišalla, punktā $2 \cdot a$ – votivapa, punktā $3 \cdot a$ – šillišalla, ..., punktā $b \cdot a$ – šillišalla. No otras puses, punktā $1 \cdot b$ dzīvo šillišalla, punktā $2 \cdot b$ – votivapa, ..., punktā $a \cdot b$ – votivapa. Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla. Pieņēmums ir aplams, tātad eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu *a*, vai *b*.

S1.9.5. Vairākās kaudzēs kopā ir *n* konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras divas kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).

Vai taisnība, ka visas konfektes var apvienot vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja **a)** $n = 64$; **b)** $n = 100$?

Atrisinājums. a) Tas ir iespējams. Sākumā kaudzīšu ar nepāra skaitu konfekšu ir pāra skaits. Apvienojam tās pa pāriem un no lielākās kaudzītes pārliekam mazākajā kaudzītē atbilstošo konfekšu skaitu. Tagad visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu. Uzskatīsim, ka mums tagad ir 32 dubultkonfektes, kuras turpmāk neatdalīsim. Tagad mums atkal ir pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits dubultkonfekšu. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 16 kvadrokonfektes (4 apvienotas konfektes). Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 8 oktāvkonfektes (8 apvienotas konfektes). Līdzīgi iegūstam četras 16-konfektes, divas 32-konfektes un vienu kaudzi ar 64 konfektēm.

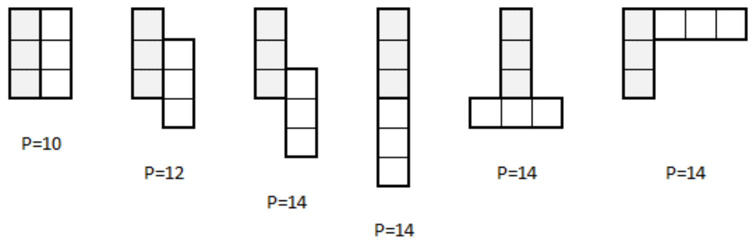
b) Nē, ne vienmēr. Pieņemsim, ka sākumā mums ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai visas konfektes pēdējā gājienā apvienotu vienā kaudzē, iepriekšējā gājienā jāiegūst divas kaudzes ar 50 konfektēm katrā. Taču visās kaudzēs konfekšu skaits vienmēr dalīsies ar 20, bet 50 ar 20 nedalās.

Novada olimpiāde

5. klase

N1.5.1. Uz rūtiņu lapas uzzīmēti divi taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas un saskaras pa vesela skaita rūtiņu malām, un veidojas daudzstūris no 6 rūtiņām, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katrs no taisnstūriem var būt novietots vertikāli vai horizontāli. Kāds var būt iegūtās figūras perimetrs? *Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, kāpēc citu nav!*

Atrisinājums. Katra taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(1+3)=8$, tātad „*kopējais*" perimetrs ir 16. Saliekot kopā, taisnstūri var saskarties ar 1, 2 vai 3 rūtiņu malām (skat. 249. att.); ar katru rūtiņu malu, kas tiem saskaras, kopējais perimetrs samazinās par 2. Tātad iegūtajai figūrai perimetrs var būt $16-2=14$, $16-4=12$ vai $16-6=10$ (piemēram, skat. 249. att.).



249. att.

N1.5.2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu *PĀRSTEIGUMS*. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Nosaki, kurš cipars aizstāts ar burtu *S*! *Atbildi pamato!*

Atrisinājums. Vārdā *PĀRSTEIGUMS* pavisam ir 11 burti, no tiem pirmie 10 dažādi, tātad pirmie 10 burti apzīmē visus desmit ciparus. Tad

$$P+\bar{A}+R+S+T+E+I+G+U+M+S=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+S=45+S$$

Tā kā dotais vienpadsmitciparu skaitlis dalās ar 18, tad tas dalās ar 2 un 9. Tas nozīmē, ka tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar 9. Tātad *S* ir pāra cipars un $45+S$ dalās ar 9. Tā kā $45+S$ jādalās ar 9 un skaitlis 45 dalās ar 9, tad arī *S* jādalās ar 9. Tātad ar burtu *S* ir aizstāts cipars 0.

Piezīme. Lai noteiktu, kurš cipars aizstāts ar burtu *S*, izteiksmē $45+S$ var arī ievietot visas iespējamās *S* vērtības – 0, 2, 4, 6, 8 – un pārbaudīt katru no šiem gadījumiem.

N1.5.3. No četrciparu skaitļa *A* atņemot trīsciparu skaitli *B*, iegūst 8002. Šos pašus skaitļus *A* un *B* saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrodi *A* un *B*!

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka, pieskaitot skaitlim 8002 skaitli *B* divas reizes, iegūst vismaz 10 000. Tas ir iespējams tikai, ja $B=999$ (ja $B<999$, tad $8002+B+B<10\,000$). Tāpēc $B=999$ un $A=8002+B=8002+999=9001$.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī apskatot vislielāko trīsciparu skaitli 999 un pamatojot, ka mazāki trīsciparu skaitļi neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

N1.5.4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams cipars 7?

1. atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 7. Aizstājam 1000 lappusi ar 0-to lappusi, tad visi lappušu numuri ir trīsciparu skaitļi (viencipara un divciparu lappusēm priekšā var pierakstīt divas vai vienu nulli). Katru ciparu var izvēlēties 9 veidos (der visi cipari izņemot 7), tāpēc šādu lappušu skaits ir $9\cdot 9\cdot 9=729$. Tātad cipars 7 ir izmantots $1000-729=271$ lappuses numurā. Tikpat daudz lappusēs cipars 7 ir izmantots otrajā tūkstotī. Vēl viens cipars 7 ir izmantots skaitlī 2007. Tātad kopā cipars 7 ir sastopams $271+271+1=543$ lappušu numuros.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka grāmatai ir vēl arī 0-tā lappuse. Tā kā tās numerācijā nav izmantots cipars 7, tad šāds pieņēmums neizmanīs rezultātu – aprēķināto lappušu numuru skaitu.

Starp pirmajām desmit lappusēm (no 0. līdz 9.) vienas numurā būs sastopams cipars 7.

Lai aprēķinātu lappušu ar 7 skaitu starp pirmajām 100 lappusēm (no 0. līdz 99.), nepieciešams ņemt vērā, ka septītnieks ir visās lappusēs no 70. līdz 79. (kopā 10 lappuses) un pārējos deviņos lappušu desmitos katrā vēl pa vienam – kopā 19 lappuses.

Tagad aprēķinām lappušu skaitu starp pirmajām 1000 lappusēm (no 0. līdz 999.). No 700. līdz 799. lappusei cipars 7 ir visās 100 lappusēs. Katrā no pārējiem deviņiem lappušu simtiem ir pa 19 lappusēm. Tātad pavisam $100+9\cdot 19=271$ lappuse.

Tieši tikpat lappušu ar ciparu 7 ir otrajā lappušu tūkstotī (no 1000. līdz 1999.). Tātad no 0. līdz 1999. lappusei cipars 7 ir sastopams 542 lappušu numuros. Vēl cipars 7 ir 2007. lappuses numurā.

Tātad no 1. līdz 2014. lappusei cipars 7 ir sastopams 543 lappušu numuros.

N1.5.5. Doti 99 punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet nepāra skaits nogriežņu?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka no katra no 99 punktiem iziet nepāra skaits nogriežņu. Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits ir nepāra skaitlis, bet tas ir pretrunā ar to, ka katram nogrieznim ir tieši divi galapunkti. Tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

6. klase

N1.6.1. Atrodi vienu tādu skaitli *a*, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

a) noapaļojot a, $3\cdot a$, $5\cdot a$, $7\cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;

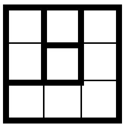
b) noapaļojot $2\cdot a$, $4\cdot a$, $6\cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

Atrisinājums. Der, piemēram, skaitlis $a=0{,}49$, jo $a=0{,}49\approx 0$; $3\cdot a=1{,}47\approx 1$; $7\cdot a=3{,}43\approx 3$; $2\cdot a=0{,}98\approx 1$; $4\cdot a=1{,}96\approx 2$; $6\cdot a=2{,}94\approx 3$.

Piezīme. Der arī citas *a* vērtības.

N1.6.2. Rūtiņu lapā uzzīmē figūru, kuras malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sadalīt četrās daļās tā, ka katra daļa sastāv no veselām rūtiņām un katra daļa saskaras ar katru citu daļu vismaz pa vienas rūtiņas malu. Vai prasītās figūras laukums var būt mazāks nekā 10 rūtiņas?

Atrisinājums. Piemēram, skat. 250. att.



250. att.

N1.6.3. Pareizā vienādībā $4\cdot 4=16$ var katru ciparu izmainīt tieši par 1 un atkal iegūt pareizu vienādību $5\cdot 5=25$. Atrodi

a) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli,

b) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, pie tam sākotnējā vienādībā ir vismaz četri dažādi cipari!

Atrisinājums. Der, piemēram, **a)** $1\cdot 333=333$ un $2\cdot 222=444$; **b)** $3\cdot 25=75$ un $4\cdot 16=64$.

N1.6.4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams vismaz viens no cipariem 3 vai 7?

1. atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 3 vai 7. Aizstājam 1000 lappusi ar 0-to lappusi, tad visi lappušu numuri ir trīsciparu skaitļi (viencipara un divciparu lappusēm priekšā var pierakstīt divas vai vienu nulli). Katru ciparu var izvēlēties 8 veidos (der visi cipari izņemot 3 un 7), tāpēc šādu lappušu skaits ir $8\cdot 8\cdot 8=512$. Tātad cipars 3 vai 7 ir izmantots $1000-512=488$ lappušu numuros. Tikpat daudz lappusēs cipars 3 vai 7 ir izmantots otrajā tūkstotī. Vēl cipars 3 ir izmantots skaitlī 2003 un 2013, cipars 7 – skaitlī 2007. Tātad kopā cipars 3 vai 7 ir sastopams $488+488+3=979$ lappušu numuros.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka grāmatai ir vēl arī 0-tā lappuse. Tā kā tās numerācijā nav izmantoti cipari 3 un 7, tad šāds pieņēmums neizmanīs rezultātu – aprēķināto lappušu numuru skaitu.

Starp pirmajām desmit lappusēm (no 0. līdz 9. lappusei) divu lappušu numuros būs sastopams cipars 3 vai 7.

Lai aprēķinātu prasīto lappušu (ar ciparu 3 vai 7) numuru skaitu starp pirmajām 100 lappusēm (no 0. līdz 99.), nepieciešams ņemt vērā, ka cipars 3 ir visās lappusēs no 30. līdz 39. un cipars 7 – visās lappusēs no 70. līdz 79., bet pārējos astoņos lappušu desmitos katrā vēl pa divām – kopā 36 lappuses.

Tagad aprēķinām lappušu numuru skaitu starp pirmajām 1000 lappusēm (no 0. līdz 999.). No 300. līdz 399. lappusei visās ir cipars 3, bet no 700. līdz 799. lappusei visās ir cipars 7. Katrā no pārējiem astoņiem lappušu simtiem ir pa 36 lappušu numuriem ar ciparu 3 vai 7. Tātad starp pirmajām 1000 lappusēm ir $200+8\cdot 36=488$ lappušu numuri, kas satur ciparu 3 vai 7.

Tieši tikpat lappušu numuru, kas satur ciparu 3 vai 7, ir otrajā lappušu tūkstotī (no 1000. līdz 1999.). Tātad no 0. līdz 1999. lappusei 976 lappušu numuros ir sastopams cipars 3 vai 7. Vēl cipars 3 vai 7 ir atrodams 2003., 2007. un 2013. lappuses numurā.

Tātad no 1. līdz 2014. lappusei cipars 3 vai 7 ir sastopams 979 lappušu numuros.

N1.6.5. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 20. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis. Vai uz tāfeles var palikt skaitlis **a)** 0; **b)** 1?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, vispirms desmit gājienos iegūst

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9,10), (11,12), (13,14), (15,16), (17,18), (19,20) \to$$
$$\to 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

Pēc tam piecos gājienos iegūstam:

$$(1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1) \to 0, 0, 0, 0, 0.$$

Tad četros gājienos iegūst skaitli 0:

$$0, 0, 0, 0, 0 \to 0, 0, 0, 0 \to 0, 0, 0 \to 0, 0 \to 0.$$

b) Ievērojam, ka, veicot doto darbību, uz tāfeles palikušo skaitļu summas paritāte nemainās (jo $(a+b)$ un $(a-b)$ ir vienas paritātes skaitļi). Sākotnējo skaitļu summa 210 ir pāra skaitlis; tātad rezultātā nevar iegūt nepāra skaitli 1.

7. klase

N1.7.1. Dots vienādojums

$$\square\cdot x+\square=\square$$

Ariadne vienā (jebkurā) rūtiņā ieraksta vienu skaitli, pēc tam Eleonora citā rūtiņā ieraksta vienu skaitli un beidzot Ariadne ieraksta skaitli atlikušajā tukšajā rūtiņā. Pierādi, ka Ariadne var panākt jebkuru no trim situācijām:

a) vienādojumam ir tieši viens atrisinājums;
b) vienādojumam nav atrisinājumu;
c) vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

(Spēles sākumā jau zināms, kura situācija jāiegūst.)

Atrisinājums. Ievērojam, ka lineāram vienādojumam $ax = b$

- ir tieši viens atrisinājums, ja $a \neq 0$;
- nav atrisinājuma, ja $a = 0$ un $b \neq 0$;
- ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ja $a = b = 0$.

Tātad Ariadnei jārīkojas šādi:

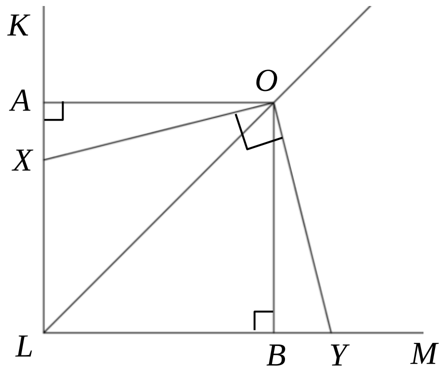
a) Pirmajā gājienā pirmajā lodziņā jāieraksta no nulles atšķirīgs skaitlis. Neatkarīgi no Eleonoras gājiena un Ariadnes otrā gājiena vienādojumam būs tieši viens atrisinājums.

b) Pirmajā gājienā pirmajā lodziņā jāieraksta 0, bet otrs skaitlis Ariadnei jāieraksta citāds nekā Eleonoras ierakstītais.

c) Pirmajā lodziņā Ariadnei jāieraksta 0, bet otram skaitlim jābūt tādam pašam kā Eleonoras ierakstītajam.

N1.7.2. Uz taisnā leņķa *KLM* malām atlikti punkti *X* un *Y* (katrs uz savas malas); uz tā bisektrises ņemts tāds punkts *O*, ka $\angle XOY = 90°$. Pierādi, ka $OX = OY$!

Atrisinājums. Novelkam no punkta *O* perpendikulus *OA* un *OB* pret leņķa *KLM* malām *KL* un *LM* (skat. 251. att.). Tā kā punkts *O* atrodas uz leņķa bisektrises, tad attālumi no punkta *O* līdz leņķa malām ir vienādi, tas ir, $OA = OB$. Četrstūra *LAOB* trīs leņķi ir $90°$ lieli, tātad arī $\angle AOB = 90°$.



251. att.

Ievērojam, ka

$\angle XOA = \angle AOY - \angle XOY = \angle AOY - 90°$;

$\angle YOB = \angle AOY - \angle AOB = \angle AOY - 90° = \angle XOA$.

Tad $\Delta XAO = \Delta YBO$ (pēc pazīmes $\ell m \ell$), jo $\angle XAO = \angle YBO = 90°$, $OA = OB$, $\angle XOA = \angle YOB$.

Līdz ar to $OX = OY$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas.

N1.7.3. Cik starp pirmajiem 2014 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu *x*, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $87 = 29 \cdot 3$. Tā kā 29 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem *x*, $x+1$ vai $x+2$ jādalās ar 29. Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.

No 1 līdz 2016 (2016 ir lielākā iespējamā $x+2$ vērtība) ir 69 skaitļi, kas dalās ar 29 (lielākais no tiem ir $2001 = 69 \cdot 29$).

Tātad 69 veidos var izvēlēties tādu *x*, kas dalās ar 29; 69 veidos – tādu *x*, ka $x+1$ dalās ar 29 un 69 veidos – tādu *x*, ka $x+2$ dalās ar 29, t. i., pavisam ir $69 + 69 + 69 = 207$ tādi skaitļi *x*, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87.

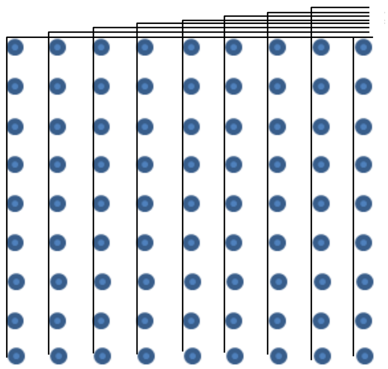
N1.7.4. Uz ballīti ieradās N ($N>1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Izrādījās, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti atšķirīgi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no ballītes apmeklētājiem ir kļūdījies.

Atrisinājums. Ja visi skaitļi ir atšķirīgi, tad katrs no skaitļiem no 0 līdz $N-1$ ir bijis uzrakstīts tieši vienu reizi. Tas, kurš uzrakstīja skaitli 0, nepazina nevienu citu ballītes dalībnieku un, tātad, arī viņu neviens nepazina. Tas nozīmē, ka nevarēja būt dalībnieks, kas pazīst $N-1$ dalībnieku (visus, izņemot sevi). Tātad vismaz viens no ballītes apmeklētājiem kļūdījās.

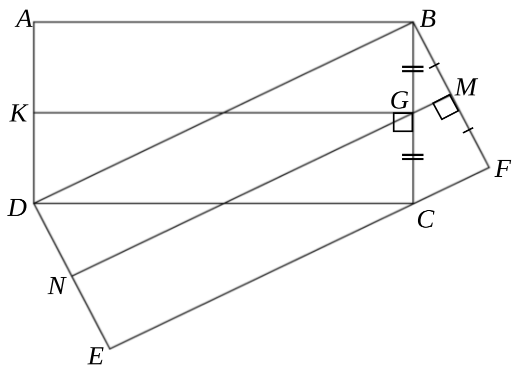
N1.7.5. Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 81 rūtiņu stūriem ir autobusu pietura; citu pieturu nav. Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos? Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.

Atrisinājums. Katrs maršruts iet pa augstākais vienu horizontāli un vienu vertikāli. Ja maršrutu skaits nepārsniedz 8, tad atrastos vertikāle un horizontāle, pa kurām neiet neviens maršruts; uz šo ielu krustpunktu nevarētu aizbraukt.

Ar 9 maršrutiem pietiek. Piemēram, var ņemt visus maršrutus, katrs no kuriem satur pilnībā vienu vertikāli un visu augšējās horizontāles daļu pa labi no šīs vertikāles (skat. 252. att.).



252. att.



253. att.

8. klase

N1.8.1. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a\neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izteikt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

Atrisinājums. No vienādības $a+b+c=0$ izriet, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $ax^2+bx+c=0$ sakne. Otru vienādojuma sakni atrodam izmantojot Vjeta teorēmu:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \text{ un } x_2=-\frac{b}{a}-1 \text{ vai arī}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \text{ un } x_2=\frac{c}{a}.$$

N1.8.2. Taisnstūra *ABCD* diagonāle *BD* ir taisnstūra *BDEF* mala, punkts *C* atrodas uz *EF*. Malas *BC* viduspunkts ir *G*. Pierādīt, ka $AG=EG$.

Atrisinājums. Novelkam nogriežņu *BC* un *BF* vidusperpendikulus *GK* un *MN* (skat. 253. att.).

Tā kā katrs punkts, kas atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, tad $AG=DG$. Ievērojam, ka $BM=MF$ un $MN\perp BF$. No tā izriet, ka $MG \parallel CF$ un *MG* ir trijstūra *BFC* viduslīnija, kas iet caur malas *BC* viduspunktu *G*. Tātad punkts *G* atrodas uz nogriežņa *BF* vidusperpendikula *MN* (nogriežņu *BF* un *DE* vidusperpendikuli sakrīt, jo *BDEF* ir taisnstūris). Līdz ar to $DG=GE$.

Esam ieguvuši, ka $AG=DG=GE$, kas arī bija jāpierāda.

N1.8.3. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars?

Atrisinājums. Pavisam ir $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ piecciparu skaitļi. Uzdevumā prasīts atrast visus tos piecciparu skaitļus, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars; šo nosacījumu neapmierina tie skaitļi, kuros visi cipari ir pāra. Šādu (kas satur tikai pāra ciparus) skaitļu skaits ir $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ (skaitļa pirmais cipars var būt 2, 4, 6, 8 – četras dažādas iespējas). Tātad $90000 - 2500 = 87500$ piecciparu skaitļu pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars.

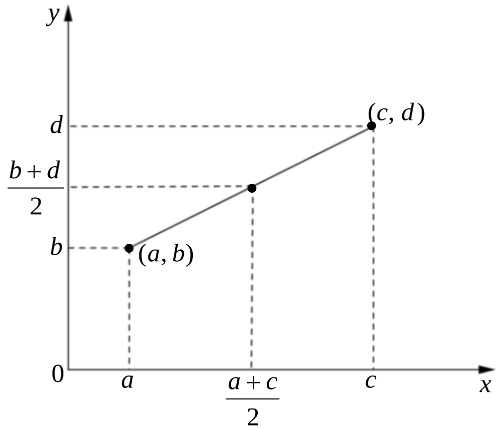
N1.8.4. Uz ballīti ieradās N ($N > 1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Vai var būt, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti nepāra skaitļi, ja **a)** $N = 2014$, **b)** $N = 2401$?

Atrisinājums. a) Jā, var būt. Piemēram, ja visi viesi viens otru pazīst pa pāriem, tad visi viesi uz lapiņas būs uzrakstījuši pa vieniniekam.

b) Nē, nevar būt. Visu uzrakstīto skaitļu kopsummai jābūt pāra skaitlim, kas vienāds ar divkāršotu pazīšanos skaitu (jo katru pazīšanos atzīmē abi tajā iesaistītie – *A pazīst B un B pazīst A*). Nepāra skaita nepāru skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tāpēc šāda situācija nav iespējama.

N1.8.5. Trijstūra virsotnes atrodas kvadrātiska rūtiņu režģa punktos. Pierādīt, ka kāda no trijstūra malām iet vai nu caur kādu citu rūtiņu režģa punktu, vai kādas rūtiņas centru.

Atrisinājums. Ieviešam koordinātu sistēmu tā, ka koordinātu asis iet pa rūtiņu malām un 1 vienība ir vienas rūtiņas malas garums (skat. 254. att.). Varam ievērot, ka rūtiņu krustpunktu koordinātas ir $\left(\frac{n_1}{2}; \frac{n_2}{2}\right)$, kur n_1 un n_2 ir nepāra skaitļi. Punktu $(a; b)$ un $(c; d)$ viduspunkta koordinātas ir $\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b+d}{2}\right)$.



254. att.

Aplūkojam trijstūra virsotņu koordinātas $(x; y)$ pēc to paritātes. Katra virsotne ietilpst kādā no grupām $(p; p)$, $(p; n)$, $(n; p)$, $(n; n)$,kur ar p apzīmēts pāra skaitlis, ar n – nepāra.

Iespējami divi gadījumi.

- Ja divas trijstūra virsotnes ietilpst vienā grupā, tad izvēlamies šos divus punktus un šo punktu viduspunkta koordinātas abi būs veseli skaitļi, kas nozīmē, ka šis viduspunkts atrodas kādā citā rūtiņu režģa krustpunktā.
- Ja nekādas divas virsotnes neietilpst vienā grupā, tad var izvēlēties divas virsotnes tā, ka abām koordinātām ir pretēja paritāte. Šo punktu viduspunkta koordinātas būs formā $\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$, kur n_1 un n_2 – nepāra skaitļi, kas nozīmē, ka šis viduspunkts atrodas kādas rūtiņas centrā jeb trijstūra mala iet caur rūtiņas centru. Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

9. klase

N1.9.1. Vai vienādojumam $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ ir atrisinājums, ja a un b ir dažādi skaitļi?

1. atrisinājums. Ievērojam, ka

$$2x^2-2x\cdot(a+b)+a^2+b^2=(x^2-2ax+a^2)+(x^2-2bx+b^2)=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

Tāpēc doto vienādojumu var pārveidot formā

$$(x-a)^2+(x-b)^2=0.$$

Divu skaitļu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai, ja abi šie skaitļi ir nulles. Ja x ir dotā vienādojuma sakne, tad jābūt $x=a$ un $x=b$; bet tas nozīmē, ka $a=b$; pretruna ar uzdevuma nosacījumu. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

2. atrisinājums. Uzrakstām dotā kvadrātvienādojuma diskriminatu:

$$D=4(a+b)^2-8(a^2+b^2)=4a^2+8ab+4b^2-8a^2-8b^2=$$
$$=-4a^2+8ab-4b^2=-4(a^2-2ab+b^2)=-4(a-b)^2.$$

Lai kvadrātvienādojumam būtu atrisinājums, diskriminanta vērtībai jābūt nenegatīvai. Tā kā $-4(a-b)^2\le 0$, tad vienīgā iespēja, lai dotajam vienādojumam eksistētu atrisinājums, ir gadījums, kad $a=b$.

Tātad, ja a un b ir dažādi skaitļi, dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

N1.9.2. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, taisnstūra perimetrs ir par 8 mazāks nekā tā laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus!

Atrisinājums. Ja a un b, $a\ge b$ ir taisnstūra malu garumi, tad $ab=2a+2b+8$. Ekvivalenti pārveidojot, iegūstam $ab-2a-2b+4=12$ jeb $(a-2)(b-2)=12$. Pēdējā vienādojuma kreisās puses reizinātāji var pieņemt tikai vērtības 1 un 12, 2 un 6 vai 3 un 4 (tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgajiem a un b, tad reizinātāju secība nav svarīga). Līdz ar to iespējami trīs gadījumi:

- $a-2=1$ un $b-2=12$ jeb $a=3$ un $b=14$;
- $a-2=2$ un $b-2=6$ jeb $a=4$ un $b=8$;
- $a-2=3$ un $b-2=4$ jeb $a=5$ un $b=6$.

Uzdevuma nosacījumus apmierina taisnstūri ar izmēriem 3×14, 4×8 un 5×6.

N1.9.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc+3a+3b=7bc+7$.

Atrisinājums. Izsakot mainīgo a, iegūst $a(3bc+3)=7bc+7-3b$ jeb

$$a=\frac{7bc+7-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)}{3(bc+1)}-\frac{3b}{3(bc+1)}=\frac{7}{3}-\frac{b}{bc+1}=2\frac{1}{3}-\frac{b}{bc+1}.$$

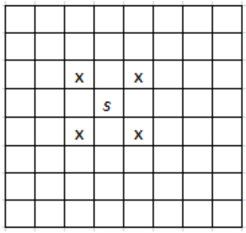
Lai a būtu naturāls skaitlis, tad jābūt $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$ vai $\frac{b}{bc+1}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Apskatām abus gadījumus:

- Ja $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$, tad $a=2$ un $bc+1=3b$ jeb $c=\frac{3b-1}{b}=\frac{3b}{b}-\frac{1}{b}=3-\frac{1}{b}$. Skaitlis c ir naturāls tikai tad, ja $\frac{1}{b}$ ir naturāls. Vienīgā iespēja, ja $b=1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a=2$, $b=1$ un $c=2$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.
- Ja b un c ir naturāli skaitļi, tad $b<bc+1$ jeb $\frac{b}{bc+1}<1$. Tātad $\frac{b}{bc+1}\ne\frac{4}{3}$ un šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens vienīgs atrisinājums $a=2$, $b=1$ un $c=2$.

N1.9.4. Figūra „sienāzis" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat. 255. att., kur s – *sienāzis*, x – rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz 8×8 rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu *sienāzi* (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?

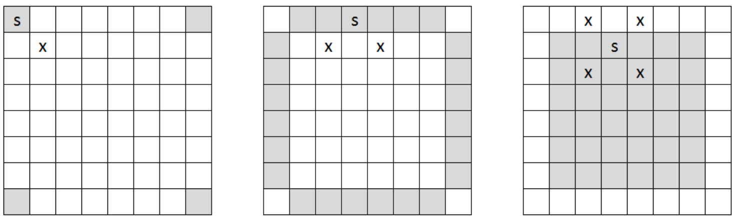


255. att.

Atrisinājums. Apskatām trīs principiāli atšķirīgus baltā sienāža izvietojumus:

- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa stūra rūtiņā, tad tas apdraud tikai vienu rūtiņu x (skat. 256. att. a)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-1=62$ rūtiņām. Tā kā ir četras stūra rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $4 \cdot 62 = 248$.
- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa malējā rūtiņā (ne stūrī), tad tas apdraud divas rūtiņas x (skat. 256. att. b)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-2=61$ rūtiņām. Tā kā ir 24 malējās rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $24 \cdot 61 = 1464$.
- Ja baltais sienāzis atrodas kādā no šaha galdiņa vidus rūtiņā (ne stūrī un ne pie šaha galda malas), tad tas apdraud četras rūtiņas x (skat. 256. att. c)). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-4=59$ rūtiņām. Tā kā ir 36 vidus rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $36 \cdot 59 = 2124$.

Tātad kopējais dažādo figūru izvietojumu skaits ir $248+1464+2124=3836$.



a) b) c)

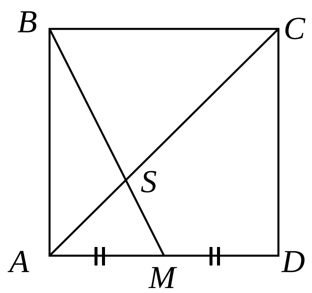
256. att.

N1.9.5. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1, punkts *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu!

Atrisinājums. Trijstūri *ASM* un *CSB* ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle ASM = \angle CSB$ kā krustleņķi un $\angle SAM = \angle SCB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC* (skat. 257. att.). Tā kā $AM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$, tad $\frac{BS}{SM} = \frac{BC}{AM} = 2$. Šo trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar trijstūru līdzības koeficienta kvadrātu, t. i., $\frac{S_{CSB}}{S_{ASM}} = 2^2 = 4$ jeb $S_{CSB} = 4S_{ASM}$.

Ievērojam, ka trijstūriem *ASM* un *ASB* ir kopīgs augstums un malu, pret kurām novilkts kopīgais augstums, attiecība ir $\frac{BS}{SM} = 2$. Līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība ir 2, t. i., $\frac{S_{ABS}}{S_{ASM}} = 2$ jeb $S_{ABS} = 2S_{ASM}$.

Esam ieguvuši, ka $S_{ABC} = S_{ABS} + S_{SBC} = 2S_{ASM} + 4S_{ASM}$. Tā kā $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, tad $6S_{ASM} = \frac{1}{2}$ jeb $S_{ASM} = \frac{1}{12}$.



257. att.

Valsts olimpiāde

9. klase

V1.9.1. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\frac{2014}{x}$, ja $x>0$?

1. atrisinājums. Pārveidojam doto izteiksmi, atdalot pilno kvadrātu:

$$x+\frac{2014}{x}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{2014}+\left(\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}.$$

Tā kā kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir tad, kad

$$\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}=0,\ \sqrt{x}=\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\ \text{jeb}\ x=\sqrt{2014}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka izteiksmes $x+\frac{2014}{x}$ mazākā vērtība ir $2\sqrt{2014}$ un tā tiek sasniegta pie $x=\sqrt{2014}$.

2. atrisinājums. No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$x+\frac{2014}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2014}{x}}=2\sqrt{2014}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja abi saskaitāmie ir vienādi, t. i., $x=\frac{2014}{x}$ jeb $x^2=2014$ un $x=\sqrt{2014}$.

V1.9.2. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo locekļu summu. Cik starp virknes pirmajiem **a)** 100, **b)** 2014 locekļiem ir tādi, kas dalās ar 5?

Atrisinājums. Katra virknes elementa, dalot to ar 5, atlikums, ir atkarīgs tikai no triju iepriekšējo elementu atlikumiem, dalot ar 5.

Aplūkojam atlikumu virkni, kas rodas virknes elementus, dalot ar 5:

1, 1, 1, 3, 0, 4, 2, 1, 2, 0, 3, 0, 3, 1, 4, 3, 3, 0, 1, 4, 0, 0, 4, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, ...

Tātad atlikumi ir periodiski ar periodu 31. Tas nozīmē, ka katrā 31 locekļu grupā ir 6 locekļi, kas dalās ar 5.

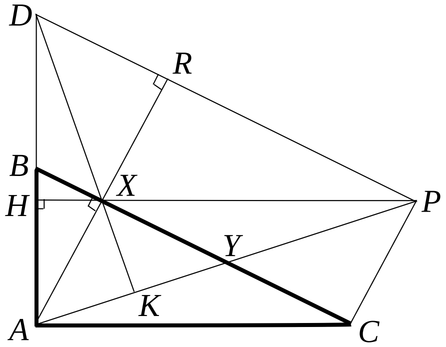
a) 100 locekļi veido trīs pilnas grupas un vēl septiņus locekļus, jo $100=3\cdot 31+7$. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5, ir $6\cdot 3+1=19$.

b) 2014 locekļi veido 64 pilnas grupas un vēl 30 locekļus, jo $2014=31\cdot 64+30$. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5, ir $6\cdot 64+6=390$.

V1.9.3. Taisnleņķa trijstūra *ABC* taisnais leņķis ir *A*. Punkts *X* ir no *A* pret *BC* vilktā augstuma pamats. Nogriežņa *XC* viduspunkts ir *Y*. Uz malas *AB* pagarinājuma izvēlēts punkts *D* tā, ka $AB=BD$. Pierādīt, ka $DX\perp AY$!

Atrisinājums. Nogriezni *AY* pagarina aiz punkta *Y* un atliek punktu *P* tā, ka $AY=YP$ (skat. 258. att.). Tas nozīmē, ka četrstūris *AXPC* ir paralelograms, jo tā diagonāles *AP* un *XC* to krustpunktā *Y* dalās uz pusēm. Nogriezni *XP* pagarinot līdz krustpunktam ar *AD*, iegūst, ka $PH\perp AD$, jo $AC\perp AD$ un $PH\parallel AC$.

Aplūkojam trijstūri *ADP*. No tā, ka $AB=BD$ un $AY=YP$ izriet, ka BY ir ΔADP viduslīnija. Tātad $BY\parallel DP$. Tā kā $AX\perp BY$, tad $AR\perp DP$, kur $R\in DP$. Tas nozīmē, ka trijstūrī *ADP* ir novilkti divi augstumi *PH* un *AR*, kas krustojas punktā *X*. Līdz ar to nogrieznis *DK*, kas vilkts no virsotnes D caur punktu X, ir trešais šī trijstūra augstums, tātad $DK \perp AP$ jeb $DK \perp AY$, kas arī bija jāpierāda.



258. att.

V1.9.4. Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

a) Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm!

b) Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk nekā viens diplomāts!

Atrisinājums. a) Apaļajam galdam pavisam ir 13 derīgas pozīcijas, kuras var iegūt galda pagriešanas par noteiktu vietu skaitu rezultātā. Katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tikai vienā no šīm pozīcijām. Katrai galda pozīcijai i $(1 \le i \le 13)$ ar p_i apzīmējot diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, iegūstam $p_1 + p_2 + ... + p_{13} = 13$.

Zināms, ka viena no p_i vērtībām ir 0, jo sākumā neviens no diplomātiem neatrodas pretī savai plāksnītei. Pēc Dirihlē principa kādai no atlikušajām p_j vērtībām jābūt vismaz 2, t. i., ir vismaz divi diplomāti, kas kādā pozīcijā atrodas pretī savām plāksnītēm.

b) Pieņemot, ka diplomāti numurēti ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 13 pēc kārtas un sēdināt tos ap galdu bija paredzēts pulksteņrādītāja virzienā (plāksnītes saliktas 1-2-3-...-12-13), tad diplomātiem pie galda apsēžoties, piemēram, šādi 1-13-12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2, izpildās uzdevumā prasītais. Diplomātiem *i* un *j*, ja *i* sēž savā vietā, tad *j*-tā plāksnīte atrodas $j - i$ vietas pa labi, bet *j*-tais diplomāts atrodas $j - i$ vietas pa kreisi. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad *j* nevar sēdēt pie savas plāksnītes.

Piezīme. Pavisam iespējami 13723 atšķirīgi diplomātu izvietojuma varianti ar iepriekšminēto īpašību.

V1.9.5. Atrast vienādojuma $(x^2 + 5x - 7)^2 - 2(x^2 + 5x - 6) - 4 = 0$ sakņu kubu summu!

Atrisinājums. Apzīmējot $p = x^2 + 5x - 8$ un ievietojot apzīmējumu dotajā vienādojumā, iegūstam $(p+1)^2 - 2(p+2) - 4 = 0$ jeb $p^2 = 7$ un $p = \pm\sqrt{7}$. Esam ieguvuši, ka šo vienādojumu var sadalīt reizinātājos $(p - \sqrt{7})(p + \sqrt{7}) = 0$. Tas nozīmē, ka sākotnējā vienādojuma saknes sakrīt ar vienādojumu $x^2 + 5x - (8 + \sqrt{7}) = 0$ un $x^2 + 5x - (8 - \sqrt{7}) = 0$ saknēm (šo vienādojumu diskriminanti attiecīgi ir $D_{v1} = 57 + 4\sqrt{7} > 0$ un $D_{v2} = 57 - 4\sqrt{7} > 0$, tāpēc katram no tiem ir divas saknes). Apzīmēsim šīs saknes pa pāriem ar x_1, x_2 un x_3, x_4.

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam sakarības:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -5,$$

$$x_1 x_2 = -(8+\sqrt{7}),$$

$$x_3 x_4 = -(8-\sqrt{7}).$$

Ievērojam, ka $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$.

Tāpēc $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -5 \cdot (25 + 3(8+\sqrt{7})) - 5 \cdot (25 + 3(8-\sqrt{7})) = -490$.

Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

A1.5.1. Pūkainīšu ciemata bērniem Lieldienu zaķis atnesa olas. Katra no tām bija nokrāsota tieši vienā no krāsām – sarkanā, dzeltenā, zilā. Zināms, ka 20% jeb 40 olas bija sarkanas, $\frac{3}{4}$ no atlikušajām bija dzeltenas, bet pārējās – zilas.

a) Cik olas bija zilā krāsā?

b) Kāda daļa no visām olām bija zilas?

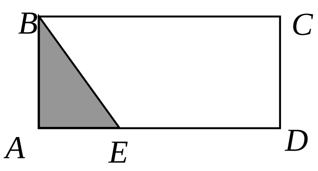
c) Cik procenti no visām olām bija dzeltenas?

Atrisinājums. Tā kā 20% jeb 40 olas bija sarkanas, tad Lieldienu zaķis bērniem atnesa 200 olas. Dzeltenas olas bija $\frac{3}{4}$ no 160 olām, tas ir, 120 dzeltenas olas. Tātad zilo olu skaits bija $200-120-40=40$. No visām olām $\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$ bija zilā krāsā. No visām olām $\frac{120}{200}=\frac{60}{100}$ jeb 60% bija dzeltenā krāsā.

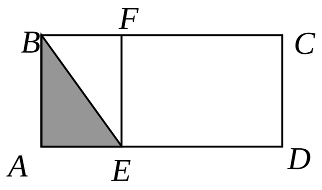
A1.5.2. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 2, 3, 7 un 8. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

Atrisinājums. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, 3, 7 vai 8, tad trīs reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 6, 9, 1 vai 4, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

A1.5.3. Taisnstūra *ABCD* malu garumi izsakāmi veselos centimetros. Iekrāsotās daļas laukums ir 6 cm^2 (skat. 259. att.). Nogrieznis *AE* ir $\frac{1}{3}$ no taisnstūra malas *AD*. Aprēķini taisnstūra laukumu un perimetru, ja zināms, ka viena taisnstūra mala ir par 5 cm garāka nekā otra mala!



259. att.



260. att.

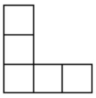
Atrisinājums. Ievērojam, ka trijstūra *BAE* laukums ir puse no taisnstūra *BAEF* laukuma (skat. 260. att.). Tāpēc *BAEF* laukums ir $6\cdot 2=12$ (cm^2). Tā kā *AE* ir $\frac{1}{3}$ no taisnstūra malas *AD*, tad taisnstūra *ABCD* laukums ir trīs reizes lielāks nekā *BAEF* laukums, tas ir, $3\cdot 12=36$ (cm^2).

Pēc dotā taisnstūra *ABCD* malu garumi ir veseli skaitļi, tāpēc taisnstūra *ABCD* laukums izsakāms kā divu veselu skaitļu reizinājums. Ievērojam, ka

$$36=36\cdot 1=18\cdot 2=12\cdot 3=9\cdot 4=6\cdot 6.$$

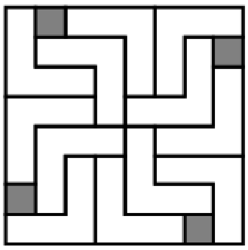
Uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai reizinātāji 9 un 4. Līdz ar to taisnstūra *ABCD* perimetrs ir $2\cdot(9+4)=26$ (cm).

A1.5.4. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 261. att. dotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?



261. att.

Atrisinājums. Tā kā viena dotā figūra satur 5 rūtiņas un $13 \cdot 5 = 65$, kas ir vairāk nekā rūtiņu skaits kvadrātā $8 \cdot 8 = 64$, tad vairāk kā 12 figūras izgriezt nevar. Izgriezt 12 figūras var, skat., piemēram, 262. att.



262. att.

A1.5.5. Kāds ir **a)** mazākais, **b)** lielākais skaitlis, kuru var izteikt gan kā trīs, gan kā divu dažādu divciparu naturālu skaitļu reizinājumu?

Atrisinājums. a) Trīs dažādu divciparu skaitļu mazākais iespējamais reizinājums ir $10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$, tas iegūts sareizinot trīs mazākos divciparu skaitļus. Skaitli 1320 var izteikt arī kā divu dažādu divciparu skaitļu reizinājumu. Piemēram, $1320 = 30 \cdot 44$. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 1320.

b) Divu dažādu divciparu skaitļu lielākais iespējamais reizinājums ir $99 \cdot 98 = 9702$, tas iegūts sareizinot divus lielākos divciparu skaitļus. Skaitli 9702 var sadalīt arī trīs divciparu skaitļu reizinājumā. Piemēram, $9702 = 11 \cdot 18 \cdot 49$. Tātad skaitlis 9702 ir lielākais meklētais skaitlis.

6. klase

A1.6.1. Klementīne ar trīs savām draudzenēm brīvdienās gāja makšķerēt. Tētis viņai atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas. 60% no savas daļas viņa atdeva vienai draudzenei, 50% no atlikušās daļas – otrai draudzenei un $\frac{2}{3}$ no atlikušās auklas – trešajai draudzenei. Beigās Klementīnei pašai palika 1 metrs makšķerauklas. Cik gara bija makšķeraukla pašā sākumā?

Atrisinājums. Pirms makšķerauklas atdošanas trešajai draudzenei Klementīnei bija palicis $3 \cdot 1 = 3$ (m). Pirms atdošanas otrai draudzenei bija palicis $2 \cdot 3 = 6$ (m). Pirms auklas atdošanas pirmajai draudzenei Klementīnei bija $6 \cdot 5 : 2 = 15$ (m) makšķerauklas. Tā kā tētis Klementīnei atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas, tad makšķerauklas garums pašā sākumā bija $2 \cdot 15 = 30$ (m).

A1.6.2. Vai skaitļus no 1 līdz 100 var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?

1. atrisinājums. Nē, nevar. Lai abu grupu skaitļu reizinājumi būtu vienādi, abās grupās kā skaitļu pirmreizinātājiem jābūt vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem vienādā skaitā. Taču visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 50 un mazāki nekā 100 pavisam tiek pārstāvēti tikai vienu reizi katrs, tātad skaitļus no 1 līdz 100 nevar sadalīt divās grupās tā, lai skaitļu reizinājumi abās grupās būtu vienādi.

2. atrisinājums. Nē, nevar. Apskatām vienu no pirmskaitļiem, kas ir lielāks nekā 50, piemēram, pirmskaitli 61. Ja to iekļauj vienā grupā, tad šīs grupas skaitļu reizinājums dalās ar 61. Tā kā $61 \cdot 2 = 122 > 100$, tad no dotajiem skaitļiem nevar izvēlēties tādu, ko iekļaut otrajā grupā, lai arī šīs grupas reizinājums dalītos ar 61. Tātad abu grupu skaitļu reizinājumi nevar būt vienādi.

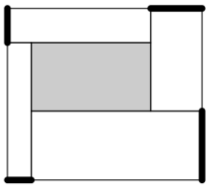
A1.6.3. Ķērpjbārdis aizsūtīja Puszābaku uz veikalu pēc 3 ksilofoniem, 20 mikrofoniem un viena patafona. Puszābaks atgriezās, nopircis 20 ksilofonus, vienu mikrofonu un 3 patafonus, pie tam viņš bija iztērējis tieši tik daudz naudas, cik būtu izdevis, ja būtu nopircis to, ko Ķērpjbārdis viņam lūdza. Zināms, ka patafons ir lētāks nekā ksilofons. Kas ir dārgāks – ksilofons vai mikrofons? *Atbildi pamato!*

Atrisinājums. Uzrakstām izteiksmi, kas izsaka kopējo pirkuma vērtību:

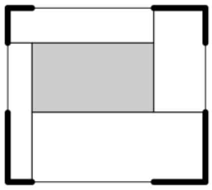
$$3k+20m+1p=20k+1m+3p \quad \text{jeb} \quad 19m=17k+2p\,.$$

Tā kā patafons ir lētāks nekā ksilofons, tad iegūstam, ka 2 ksilofoni ir dārgāki nekā 2 patafoni. Tāpēc 19 ksilofoni maksā dārgāk nekā 19 mikrofoni. No kā izriet, ka ksilofons ir dārgāks nekā mikrofons.

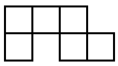
A1.6.4. Kvadrāts, kura malas garums ir 4 m, sagriezts taisnstūros, kā parādīts 263. att. Četru izcelto nogriežņu garumu summa ir 2 m. Aprēķini iekrāsotā taisnstūra perimetru!



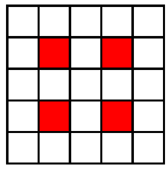
263. att.



264. att.



265. att.



266. att.

Atrisinājums. Katru izcelto nogriezni vēlreiz uzzīmējam uz katram nogrieznim pretējās kvadrāta malas (skat. 264. att.). Tad visu astoņu izcelto nogriežņu kopējais garums būs $2\cdot2=4$ (m). Neizcelto nogriežņu kopējais garums ir $4\cdot4-4=12$ (m). Šo neizcelto nogriežņu garumi sakrīt ar iekrāsotā taisnstūra malu garumiem. Tātad iekrāsotā taisnstūra perimetrs ir 12 m.

A1.6.5. Rūtiņu kvadrātā 5×5 iekrāso iespējami maz rūtiņu tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu 265. att. redzamo figūru (tā var būt gan pagriezta, gan apgāzta)! *Pamato, ka iekrāsoto rūtiņu skaits ir mazākais iespējamais!*

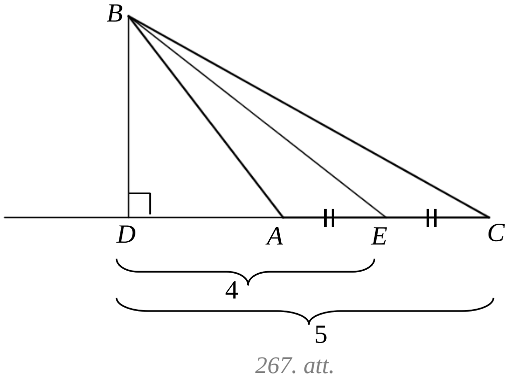
Atrisinājums. Ievērojam, ka katrā taisnstūrī ar izmēriem 2×5 jāiekrāso vismaz divas rūtiņas. Tas nozīmē, ka kvadrātā 5×5 jāiekrāso vismaz četras rūtiņas. Tas, ka ar četrām iekrāsotām rūtiņām pietiek, redzams 266. att.

7. klase

A1.7.1. Trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD* un mediāna *BE*. Kāds var būt *AC* garums, ja $ED=4$ cm un $DC=5$ cm?

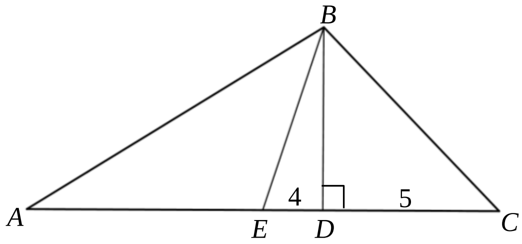
Atrisinājums. Ievērojam, ka trijstūra mediāna vienmēr atrodas trijstūra iekšpusē, bet augstums var atrasties arī ārpus trijstūra. Iespējami vairāki gadījumi, kā var būt novietots augstums *BD* un mediāna *BE*.

- Ja punkti *D, A, E, C* ir tieši šādā secībā (skat. 267. att.), tad no nogriežņu garuma īpašībām izriet, ka $EC=CD-ED=5-4=1$ (cm). Tā kā *BE* ir mediāna, tad $AC=2\cdot EC=2\cdot1=2$ (cm).



267. att.

- Punktu secība *A, D, E, C* nav iespējama, jo tad $EC = CD - DE = 5 - 4 = 1$ (cm) un $AC = 2$ cm. No otras puses $AC = AD + DC = AD + 5 > 5$. Iegūta pretruna.
- Punkti *A, E, D, C* ir tieši šādā secībā (skat. 268. att.). No nogriežņu garuma īpašībām izriet, ka $EC = ED + DC = 5 + 4 = 9$ (cm). Tā kā *BE* ir mediāna, tad $AC = 2 \cdot EC = 2 \cdot 9 = 18$ (cm).



268. att.

- Punktu secība *A, E, C, D* nav iespējama, jo tad $ED = EC + CD = EC + 5 > 4$.

Līdz ar to *AC* garums var būt 2 cm vai 18 cm.

A1.7.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus *a* un *b*, kuriem izpildās vienādība $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b = 7654321$?

Atrisinājums. Reizinājums $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b$ vienmēr ir pāra skaitlis:

- ja kāds no reizinātājiem *a* vai *b* ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis;
- ja *a* un *b* abi ir nepāra skaitļi, tad reizinātājs $3a + 5b$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitlis.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka kreisās puses skaitlis ir pāra, bet labajā pusē ir nepāra skaitlis. Iegūta pretruna, tāpēc nevar atrast skaitļus *a* un *b*, lai izpildītos dotā vienādība.

A1.7.3. Lelde apgalvo, ka sešas skrūves ir smagākas nekā septiņas naglas, bet Elīna apgalvo, ka septiņas skrūves ir smagākas nekā astoņas naglas. Zināms, ka vienai no meitenēm ir taisnība, bet otra kļūdās. Vai tiesa, ka 18 skrūves ir smagākas nekā **a)** 20 naglas, **b)** 21 nagla, **c)** 22 naglas? Visām skrūvēm masa ir vienāda, visām naglām arī.

Atrisinājums. Aplūkojam, ko no meiteņu apgalvojumiem varētu secināt 42 skrūvju gadījumā:

- ja patiess ir Leldes apgalvojums, tad 42 skrūves ir smagākas nekā 49 naglas;
- ja patiess ir Elīnas apgalvojums, tad 42 skrūves ir smagākas nekā 48 naglas.

Ja Leldes apgalvojums būtu patiess, tad arī Elīnas apgalvojums būtu patiess. Tā kā ir zināms, ka tikai vienai no meitenēm ir taisnība, bet otrai – nē, tad taisnība ir Elīnai, bet Leldes apgalvojums nav patiess. Pārbaudām, kuri no dotajiem apgalvojumiem var būt patiesi.

a) No Elīnas apgalvojuma $7s > 8n$ izriet, ka patiess ir arī apgalvojums $18 \cdot 7s > 18 \cdot 8n$ jeb $126s > 144n > 140n$. No $126s > 140n$ izriet, ka $18s > 20n$ ir patiess. Tātad apgalvojums „18 skrūves ir smagākas nekā 20 naglas” ir patiess.

b) Tā kā Leldes apgalvojums $6s > 7n$ nav patiess, tad apgalvojums $18s > 21n$ (18 skrūves ir smagākas nekā 21 nagla) arī nav patiess.

c) Ja $18s > 22n$ būtu patiess, tad arī $18s > 21n$ būtu patiess. Jau b) gadījumā pierādījām, ka otrais apgalvojums nav patiess. Tātad arī apgalvojums $18s > 22n$ (18 skrūves ir smagākas nekā 22 naglas) nav patiess.

A1.7.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 269. att.). Kādam skaitlim jābūt rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi? *Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, ka citu nav!*

	24	
		?
13		

269. att.

Atrisinājums. Apzīmējam skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā, ar *x*, bet apakšējā – ar *y*. Tad katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $24+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt tā, kā parādīts 270. att.

	24	
	x	
13	y	

→

	24	$11+y$
	x	
13	y	

→

	24	$11+y$
	x	
13	y	$11+x$

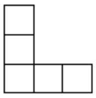
→

	24	$11+y$
	x	2
13	y	$11+x$

270. att.

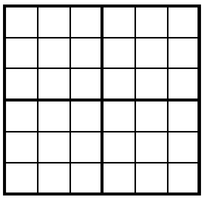
Tātad rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, ir ierakstīts skaitlis 2.

A1.7.5. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāizgriež no kvadrāta ar izmēriem 6×6 rūtiņas, lai no atlikušās daļas nevarētu izgriezt nevienu 271. att. parādīto figūru? (Figūru malām jāiet pa rūtiņu līnijām.)

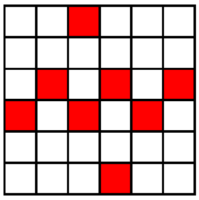


271. att.

Atrisinājums. Sadalām kvadrātu 6×6 četros kvadrātos 3×3 (skat. 272. att.) un ievērojam, ka katrā šādā kvadrātā jāizgriež vismaz divas rūtiņas. Tātad kopā jāizgriež vismaz 8 rūtiņas. Ar 8 rūtiņām pietiek, skat., piemēram, 273. att.



272. att.



273. att.

8. klase

A1.8.1. Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

Atrisinājums. Pārveidojot skaitli $\frac{1}{13}$ decimāldaļā (tas ir, dalot 1 ar 13), iegūstam

```
1 : 1 3 = 0, 0 7 6 9 2 3 0 ...
1 0 0
  9 1
    9 0
    7 8
    1 2 0
    1 1 7
        3 0
        2 6
          4 0
          3 9
            1 0
             ...
```

Tā kā katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī, tad, līdzko parādās kāds jau iepriekš bijis skaitlis (atlikums), izveidojas periods. Kā redzams, daļa $\frac{1}{13}=0,(076923)$ ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu 6. Tā kā $2014=335\cdot 6+4$, tad 2014. vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā 4. vietā aiz komata. Tas ir cipars 9. Ja šo ciparu izsvītro, tad jauniegūtajā skaitlī 2014. cipars aiz komata ir cipars 2 (nākamais, kas ir aiz cipara 9). Skaitlim $\frac{1}{13}$ un iegūtajam skaitlim ir 0 veseli un pirmie 2013 cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlis, kuram ir lielāks 2014. cipars aiz komata. Tā kā $9 > 2$, tad skaitlis $\frac{1}{13}$ ir lielāks nekā iegūtais skaitlis.

A1.8.2. Atrodi visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1 000 000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 15 reizes!

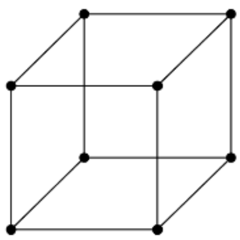
Atrisinājums. Apzīmējam meklējamo skaitli ar $a \cdot 10^k + B$, kur a ir pirmais cipars (kas tiek nosvītrots), bet B ir k ciparu skaitlis, kas paliek pēc a nosvītrošanas ($1 \le k \le 5$).

Tad $a \cdot 10^k + B = 15 \cdot B \Rightarrow a \cdot 10^k = 14 \cdot B \Rightarrow a \cdot 2^k \cdot 5^k = 2 \cdot 7 \cdot B$.

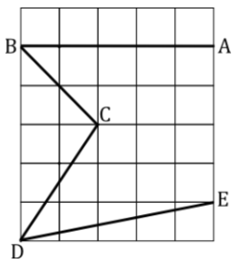
Tātad a dalās 7. Tā kā a ir cipars, tad $a = 7$ un $B = 2^{k-1} \cdot 5^k = 5 \cdot 10^{k-1}$, $1 \le k \le 5$.

Pavisam ir pieci skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus: 75, 750, 7500, 75000, 750000.

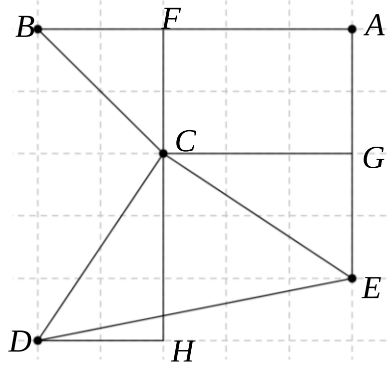
A1.8.3. Astoņi punkti savienoti ar šķautnēm kā kuba karkass (skat. 274. att.). Pierādi, ka, izvēloties jebkurus 5 punktus, tie noteikti būs savienoti ar vismaz 3 šķautnēm!



274. att.



275. att.



276. att.

Atrisinājums. Apskatām kuba augšējo un apakšējo skaldni. Izvēlēto punktu skaitu no augšējās skaldnes apzīmējam ar a, bet no apakšējās – ar b. Tad $a + b = 5$ un $a \ne b$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $a > b$, tāpēc $a \ge 3$ un a var būt 3 vai 4. Apskatām abus gadījumus.

- Ja $a = 4$, tad augšējie 4 punkti savā starpā jau ir savienoti ar 4 šķautnēm.
- Ja $a = 3$, tad šie augšējie trīs punkti ir savienoti ar $4 - 2 = 2$ šķautnēm. Savukārt vismaz viens no apakšējiem diviem punktiem atradīsies zem tādas augšējās kuba virsotnes, kas tika izvēlēta, tāpēc būs vertikāla kuba šķautne, kurai abi gali ir izvēlētie punkti. Tātad kopā būs vismaz $2 + 1 = 3$ šķautnes, kas tos savieno.

Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

A1.8.4. Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti *A, B, C, D, E* un novilkti nogriežņi *AB, BC, CD* un *DE* (skat. 275. att.). Kurš no leņķiem $\angle ABC$ vai $\angle CDE$ ir lielāks?

Atrisinājums. Ievērojam, ka trijstūris *BFC* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris (skat. 276. att.), tāpēc $\angle ABC = 45°$.

Trijstūri *DHC* un *EGC* ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, tāpēc $CD = CG$ un $\angle CDH = \angle ECG$ kā atbilstošās malas un leņķi. Iegūstam, ka $\angle DCE = \angle DCH + \angle HCE = \angle ECG + \angle HCE = 90°$. Tātad arī trijstūris *DCE* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $\angle CDE = 45°$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\angle ABC = \angle CDE = 45°$.

A1.8.5. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis 24 (skat. 277. att.). Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis **a)** 7, **b)** 17 ?

	24	
?		

277. att.

Atrisinājums. Apzīmējam skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y. Tad katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $24+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi:

a) Ja "?" vietā ierakstīts skaitlis 7, tad tabulas rūtiņas var aizpildīt tā, kā parādīts 278. att.

	24	
	x	
7	y	

→

	24	17+y
	x	
7	y	

→

	24	17+y
	x	
7	y	17+x

→

	24	17+y
	x	–10
7	y	17+x

278. att.

Esam ieguvuši pretrunu, jo šajā gadījumā vidējās rindas labajā rūtiņā jābūt negatīvam skaitlim. Tātad rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, nevar būt ierakstīts skaitlis 7.

b) Ja "?" vietā ierakstīts skaitlis 17, tad tabulas rūtiņas var aizpildīt tā, kā parādīts 279. att.

	24	
	x	
17	y	

→

	24	7+y
	x	
17	y	

→

	24	7+y
	x	
17	y	7+x

→

	24	7+y
	x	10
17	y	7+x

→

	24	7+y
14+y	x	10
17	y	7+x

→

x–7	24	7+y
14+y	x	10
17	y	7+x

279. att.

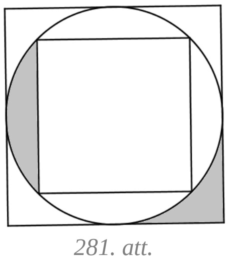
Vienas diagonāles skaitļu summa ir $3x$. Tātad $3x=x+y+24$ jeb $y=2x-24$. Ievietojot, piemēram, $x=13$, iegūstam vienu derīgu tabulas aizpildījumu (skat. 280. att.).

6	24	9
16	13	10
17	2	20

280. att.

9. klase

A1.9.1. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts (skat. 281. att.). Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!



281. att.

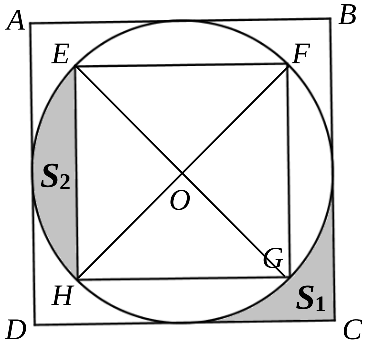
Atrisinājums. Ievilktā riņķa rādiusa garums ir puse no kvadrāta *ABCD* malas garuma, t. i., $EO = FO = \frac{1}{2}AB = 1$ (skat. 282. att.). Izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī *EOF*, iegūstam $EF = \sqrt{EO^2 + FO^2} = \sqrt{2}$.

Aprēķinām katras iekrāsotās daļas laukumu:

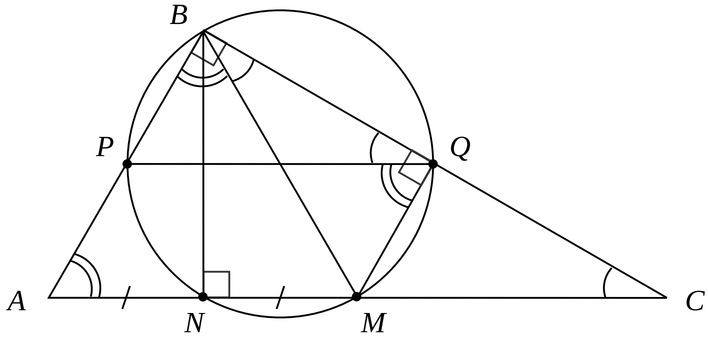
$$S_1 = \frac{1}{4}(S_{ABCD} - S_O) = \frac{1}{4}(AB^2 - \pi \cdot EO^2) = \frac{1}{4}(4-\pi);$$

$$S_2 = \frac{1}{4}(S_O - S_{EFGH}) = \frac{1}{4}(\pi \cdot EO^2 - EF^2) = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

Līdz ar to $S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(4-\pi) + \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{4-\pi+\pi-2}{4} = \frac{1}{2}$.



282. att.



283. att.

A1.9.2. Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 1276. Atrast dotos četrus ciparus!

Atrisinājums. Dotos ciparus apzīmējam ar *a*, *b*, *c*, *d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

$$4 \cdot 10 \cdot (a+b+c+d) + 4 \cdot (a+b+c+d) = 44(a+b+c+d) = 1276,$$

tātad $a+b+c+d = 1276 : 44 = 29$. Ievērojam, ka, saskaitot četrus lielākos ciparus, iegūstam $9+8+7+6 = 30 > 29$. Tātad kāds no saskaitāmajiem jāņem par 1 mazāks. Lai visi cipari būtu dažādi, tad vienīgā iespēja ir 6 vietā ņemt 5. Tātad meklētie cipari ir 5, 7, 8 un 9.

A1.9.3. Trijstūris *ABC* ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi *ABC*. Punkti *M* un *N* ir attiecīgi nogriežņu *AC* un *AM* viduspunkti. Caur *B*, *M* un *N* vilktā riņķa līnija krusto malas *AB* un *BC* attiecīgi to iekšējos punktos *P* un *Q*. Zināms, ka $AC || PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ vērtību!

Atrisinājums. Apzīmējam $\angle BAC = \alpha$ un $\angle BCA = \beta$, tad $\alpha + \beta = 90°$ (skat. 283. att.). No $AC||PQ$ izriet, ka $\angle BQP = \angle BCA = \beta$. Tā kā $\angle ABC = 90°$ un *M* ir hipotenūzas *AC* viduspunkts, tad $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$, jo $BM = \frac{1}{2}AC = AM$ un trijstūris *AMB* ir vienādsānu.

Tad $\angle PQM = \angle PBM = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka *PM*. Līdz ar to $\angle BQM = \angle PQM + \angle BQP = \alpha + \beta = 90°$.

Tādā gadījumā $\angle BNM = 180° - \angle BQM = 90°$ kā ievilkta četrstūra *NBQM* pretējie leņķi. Bet no dotā $AN = NM$, tāpēc *BN* ir ΔABM mediāna un arī augstums, tāpēc $AB = BM$. Savukārt no $\angle ABM = \angle BAM$ izriet, ka $BM = AM$. Līdz ar to ΔABM ir regulārs un $\angle BAC = \angle BAM = 60°$.

A1.9.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 284. att.). Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?

	6	
	?	
7		

284. att.

Atrisinājums. Apzīmējam skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y (skat. 285. att.). Tad katras rindas, katras kolonnas un katras diagonāles skaitļu summa ir $6+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt tā, kā parādīts 285. att.

	6	
	x	
7	y	

$\rightarrow$

	6	$y-1$
	x	
7	y	

$\rightarrow$

	6	$y-1$
	x	
7	y	$x-1$

$\rightarrow$

	6	$y-1$
	x	8
7	y	$x-1$

$\rightarrow$

x+1	6	$y-1$
	x	8
7	y	$x-1$

$\rightarrow$

x+1	6	$y-1$
$y-2$	x	8
7	y	$x-1$

285. att.

Vienas diagonāles skaitļu summa ir $(x+1)+x+(x-1)=3x$. Tātad $6+x+y=3x$ jeb $y=2x-6$. Ievietojam iegūto sakarību un iegūstam 286. att. doto tabulu.

$x+1$	6	$2x-7$
$2x-8$	x	8
7	$2x-6$	$x-1$

286. att.

11	6	13
12	10	8
7	14	9

287. att.

Atliek izvēlēties tādu mazāko x, lai visi tabulā ierakstītie skaitļi būtu naturāli un savā starpā atšķirīgi. Jāizpildās nevienādībai $2x-8>0$ jeb $x>4$.

Apskatām iespējamās x vērtības:

- $x=5$ neder, jo $x+1=6$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 6;
- $x=6$, $x=7$ un $x=8$ neder, jo tabulā jau ir ierakstīti skaitļi 6, 7, 8;
- $x=9$ neder, jo $x-1=8$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 8;
- $x=10$ der un aizpildīta tabula parādīta 287. att.

Līdz ar to mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā, ir 10.

A1.9.5. Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

Atrisinājums. Iedomāsimies, ka katram marsietim katrā rokā ir tik margrietiņu, cik viņam ir antenu. Tādā gadījumā margrietiņu kopējais skaits būs trīs reizes lielāks nekā kopējais antenu skaits, t. i., margrietiņu skaits būs $3\cdot 2014$.

No otras puses pēc uzdevumā dotā („antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes") katras divas savienotas rokas kopā tur margrietiņu skaitu, kas ir skaitļa 7 daudzkārtnis (ja vienam marsietim vienā rokā ir x margrietiņas, bet otram – $6x$ margrietiņas, tad abiem kopā ir $7x$ margrietiņas). Tātad margrietiņu kopējam skaitam jādalās ar 7, bet $3\cdot 2014=3\cdot 2\cdot 19\cdot 53$ nedalās ar 7. Līdz ar to esam parādījuši, ka kopējais antenu skaits nevar būt 2014.

2014./2015. mācību gads

Tik vai… Cik?

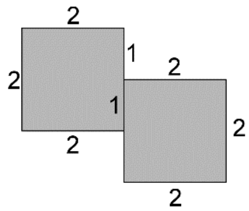
Pirmā kārta

T2.1.1. **D** $242-42\cdot 0+24:(2+0:1\cdot 4)=242-0+24:(2+0)=242+24:2=242+12=254$

T2.1.2. **C** $24:12=12:6$. Tā kā $2=2$, tad $a=12$.

T2.1.3. **C** Mazais taisnstūris sastāv no $2\cdot 3=6$ rūtiņām, bet lielais – no $3\cdot 5=15$ rūtiņām, tātad uzzīmētā figūra sastāv no $6+15=21$ rūtiņas.

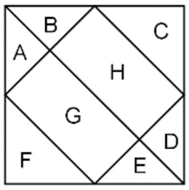
T2.1.4. **A** Katra kvadrāta malas garums ir $8:4=2$ (cm). Iekrāsotās figūras perimetrs (skat. 288. att.) ir $P=(3\cdot 2+1)\cdot 2=14$ (cm).



288. att.

T2.1.5. **C** Tā kā skaitlis 1 ir skaitļa 12 dalītājs, bet nav dalāmais, tad tas atrodas lauciņā M.

T2.1.6. **D** Attēlā redzami 10 trijstūri: A, B, D, E, A+B, C, D+E, F, A+G+E+F, B+H+D+C (skat. 289. att.).



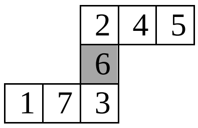
289. att.

T2.1.7. **C** Kļavas lapa pavisam kopā aizņem 17 rūtiņas. Tātad puse no kļavas lapas ir 8 rūtiņas un vēl puse rūtiņas. Otrajā kļavas lapā iekrāsotas ir 8 rūtiņas, trešajā – vairāk nekā 9 rūtiņas, bet pirmajā un ceturtajā ir iekrāsotas 8 rūtiņas un vēl puse rūtiņas.

T2.1.8. **B** Nevar būt, ka y ir lielāks vai vienāds ar 5, jo tad $5\cdot y=5\cdot 5=25$, kas ir vairāk nekā 21, tātad jābūt $y<5$.

Piezīme. Vienīgās derīgās naturālās x un y vērtības ir $x=2$, $y=3$.

T2.1.9. **D** Visu skaitļu summa no 1 līdz 7 ir $1+2+3+4+5+6+7=28$. Aprēķināsim kopējo summu abām rindām un kolonnai: skaitļi 2 un 3 tiek pieskaitīti divas reizes, jo atrodas gan rindā, gan kolonnā, tātad $28+2+3=33$. Tā kā pavisam ir trīs vienādas summas, tad katra no šīm summām ir $33:3=11$. Līdz ar to * vietā jāieraksta skaitlis $11-2-3=6$ (skat. 290. att.).



290. att.

T2.1.10. **B** Pavisam kopā uzņēma $300+100+650+250=1300$ (kkal.).

Otrā kārta

T2.2.1. **B** $20+15:(0+1+4)-(2+0+3)=20+15:5-5=20+3-5=18$

T2.2.2. **C** Piecas šokolādes kopā maksā $5\cdot 80=400$ centu, tāpēc Sniedzei atliek $500-400=100$ centi. Tā kā $100:30=3, atl. 10$, tad lielākais skaits lielkonfekšu, kuras var nopirkt par 100 centiem, ir 3.

T2.2.3. **C** Lai kaste būtu pilna, tajā jābūt $3\cdot 3\cdot 3=27$ klucīšiem. Kastē jau ir ielikti $1+3+6=10$ klucīši, tāpēc vēl ir jāieliek $27-10=17$ klucīši.

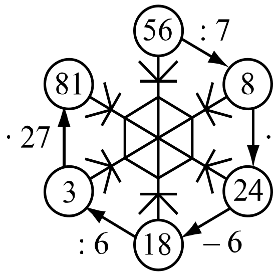
T2.2.4. **C** Pavisam tika apēstas $6+8+4=18$ konfektes, tāpēc visās trīs eglītēs kopā ir palikušas $60-18=42$ konfektes. Tā kā visās eglītēs ir palicis vienāds skaits konfekšu, tad katrā eglītē ir $42:3=14$ konfektes. Tā kā no 4.b klases eglītes tika apēstas 8 konfektes, tad sākumā šajā eglītē bija iekārtas $14+8=22$ konfektes.

T2.2.5. Tā kā visu ciparu summa ir 7, tad aizputināto ciparu summai jābūt $7-2-0=5$. Skaitli 5 summā var iegūt trīs veidos: $5=0+5$, $5=1+4$ un $5=2+3$. Tā kā numura zīmē ir svarīga ciparu secība, tad ir seši varianti, kādi var būt dotās numura zīmes pēdējie divi cipari: 05, 50, 14, 41, 23, 32.

T2.2.6. Ievērojam, ka $14>13$ un $4<5$. Tas nozīmē, ka aplīšos attiecīgi jāieraksta skaitļi 7 un 3, tas ir,14 > 20 – $\underline{7}$ un 12 : $\underline{3}$ < 5

T2.2.7. Skat. 291. att.

Piezīme. Aplīšus jāsāk aizpildīt no beigām un jāizmanto *apgrieztā* darbība.



291. att.

T2.2.8. Taisnstūra perimetrs ir $P=2\cdot(20+14)=68$ (cm). Tā kā kvadrāta pretējās malas ir vienāda garuma, tad var ievērot, ka iegūtās figūras perimetrs ir vienāds ar taisnstūra perimetru (skat. 292. att.) – tas ir 68 cm.

292. att.

T2.2.9. No 4) secina, ka Bugivudam ir aveņkrāsas uzvalks. Tā kā no 1) un 3) var secināt, ka Abudabam nav rūtains uzvalks, tad Abudabam ir strīpains uzvalks un rūtains uzvalks ir Cepelīnam. No 2) secina, ka Abudabam ir pistole. No 1) secina, ka granāta nav rūtainā uzvalka īpašniekam (Cepelīnam), tātad tā ir Bugivudam. Tad duncis ir Cepelīnam.

	Ierocis	Uzvalks
Abudabs	*pistole*	*strīpains*
Bugivuds	*granāta*	*aveņkrāsas*
Cepelīns	*duncis*	*rūtains*

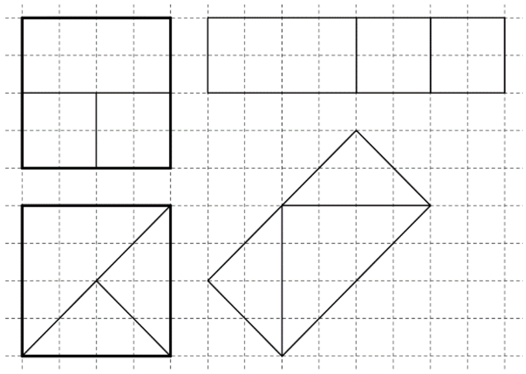
Trešā kārta

T2.3.1. $260\ kg - 4\ c : 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} t = 260\ kg - 400\ kg : 5 \cdot 2 + 500\ kg = 260\ kg - 80\ kg \cdot 2 + 500\ kg =$

$= 260\ kg - 160\ kg + 500\ kg = 100\ kg + 500\ kg = 600\ kg = 6\ c$

T2.3.2. Pārdoto kāpostu masa ir $144 - 104 = 40\ (kg)$. Sākumā mucā bija $40 \cdot 3 = 120\ (kg)$ kāpostu. Tukšas mucas masa ir $144 - 120 = 24\ (kg)$.

T2.3.3. Skat., piemēram, 293. att. (Iespējami arī citi veidi.)



293. att.

T2.3.4. Atbildi skat. tabulā.

	A	B	C	D	E	F	G
Pulksteņa rādītāju kustības virzienā	✓		✓		✓	✓	
Pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam		✓		✓			✓

T2.3.5. Mazākais meklētais skaitlis ir 3, jo $3 : 4 = 0,\ atl.\ 3$ un $3 : 7 = 0,\ atl.\ 3$. Vēl jāpamato, ka tas tiešām ir mazākais:

- o skaitlis 0 neder, jo $0 : 4 = 0$;
- o skaitlis 1 neder, jo $1 : 4 = 0,\ atl.\ 1$;
- o skaitlis 2 neder, jo $2 : 4 = 0,\ atl.\ 2$.

T2.3.6. Skaitli 9 kā divu doto ciparu summu var uzrakstīt divos veidos (neņemot vērā saskaitāmo secību):

1) $9 = 3 + 6$, tad var izveidot divciparu skaitļus 36 un 63;

2) $9 = 4 + 5$, tad var izveidot divciparu skaitļus 45 un 54;

Skaitli 9 kā trīs doto ciparu summu var uzrakstīt tikai vienā veidā $9 = 2 + 3 + 4$ (neņemot vērā saskaitāmo secību), tad var izveidot trīsciparu skaitļus 234; 243; 324; 342; 423; 432.

Pamatosim, ka uzrakstīti visi iespējamie skaitļi. Tā kā ir doti cipari 2, 3, 4, 5, 6, tad viencipara skaitļus, kuru ciparu summa ir 9, izveidot nevar. Tā kā trīs mazāko ciparu 2, 3, 4 summa jau ir 9, tad, izvēloties jebkurus citus trīs vai vairāk ciparus, iegūsim summu, kas ir lielāka nekā 9. Tātad uzrakstītie skaitļi ir vienīgie iespējamie.

T2.3.7. Cipars 2 elektroniskajā pulkstenī

- o laikā no 08:30 līdz 08:59 būs redzams 3 minūtes (08:32, 08:42, 08:52);
- o laikā no 09:00 līdz 11:59 katrā stundā būs redzams 15 minūtes (kad uz minūšu rādītāja ir 02, 12, 20 līdz 29, 32, 42, 52 minūtes), kopā šajā laika posmā 45 minūtes;
- o laikā no 12:00 līdz 12:59 būs redzams 60 minūtes;
- o laikā no 13:00 līdz 13:30 būs redzams 12 minūtes (13:02, 13:12, no 13:20 līdz 13:29).

Tātad laikā no 08:30 līdz 13:30 cipars 2 skolas elektroniskajā pulkstenī bija redzams $3 + 45 + 60 + 12 = 120$ minūtes.

Ceturtā kārta

T2.4.1. **a)** $x-(71-9)=520$

$x-62=520$

$x=520+62$

$x=582$

b) $(9+7)\cdot y=80$

$16\cdot y=80$

$y=80:16$

$y=5$

T2.4.2. Uz pirmajiem svariem redzams, ka tomāts ir smagāks nekā burkāns, uz trešajiem – burkāns ir smagāks nekā paprika, uz otrajiem – paprika ir smagāka nekā ķiploks. Tātad **a)** visvieglākais dārzenis ir ķiploks, **b)** vissmagākais – tomāts.

T2.4.3. $p-2\ \boxed{<}\ 1+p$; $v\cdot 1\ \boxed{=}\ v:1$

T2.4.4. Tā kā pulkstenis rādīja 23:54, tad pēc sešām minūtēm būs pagājusi diennakts. Tas nozīmē, ka Kristaps akumulatoru atpakaļ pieslēdza plkst. 20:13.

T2.4.5. Katras tādas figūras salikšanai nepieciešami 10 sērkociņi. Tā kā $2015:10=201, atl.5$, tad lielākais skaits figūru, ko var izveidot no 2015 sērkociņiem, ir 201.

T2.4.6. Zvaigznītes vietā var būt vai nu cipars 2, jo $6\cdot 7=4\underline{2}$, vai cipars 8, jo $6\cdot 8=4\underline{8}$. Citu iespēju nav: ja katram bērnam būtu ne vairāk kā 6 lieldienu olas, tad kopā būtu ne vairāk kā $6\cdot 6=36<40$ olas; ja katram bērnam būtu vismaz 9 lieldienu olas, tad kopā būtu vismaz $6\cdot 9=54>49$ olas.

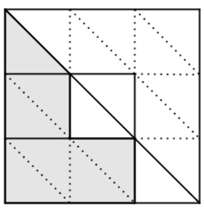
T2.4.7. Tā kā $8+8=16>15$, tad vienā braucienā nedrīkst vest vairāk kā vienu bloku, kura masa ir 8 t, un tā kā ir trīs tādi bloki, tad būs nepieciešami vismaz trīs braucieni. Ar trīs braucieniem pietiek, ja, piemēram, pirmajā braucienā aizved 6 t un 8 t bloku, bet otrajā un trešajā braucienā pa vienam 8 t blokam.

T2.4.8. Dzeltenais aplītis var atrasties tikai apakšējā vai vidējā rindā. Apskatīsim abus šos gadījumus.

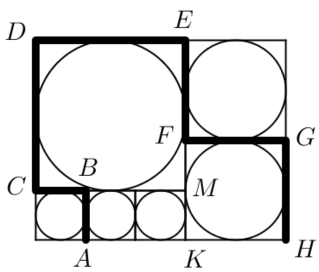
- Ja dzeltenais aplītis atrodas kādā no 5 apakšējās rindas rūtiņām, tad dzeltenais aplītis var atrasties kādā no 3 vidējās rindas rūtiņām, tātad kopā ir $5\cdot 3=15$ dažādi veidi.
- Ja dzeltenais aplītis atrodas kādā no 3 vidējās rindas rūtiņām, tad zilais aplītis atrodas augšējā rindā, tātad kopā ir 3 dažādi veidi.

Tātad Vitālijs pavisam kopā aplīšus var nolikt $15+3=18$ dažādos veidos.

T2.4.9. Piemēram, skat. 294. att., kurā iekrāsotas $\frac{7}{18}$ no kvadrāta. Neiekrāsotas palikušas $\frac{11}{18}$ no kvadrāta. Ja kvadrāta malas garums ir 6 m, tad tā laukums ir $6\cdot 6=36$ (m^2). Tātad neiekrāsoti palikuši $\frac{11}{18}$ no $36=\frac{11}{18}\cdot 36=22$ (m^2).



294. att.



295. att.

T2.4.10. Mazākās riņķa līnijas diametrs ir $1\cdot 2=2$ (m). Tātad $AB=BC=2$ m (skat. 295. att.). Ievērojam, ka $CM=CD=DE=EM=2\cdot 3=6$ (m), un tā kā $EF=FK$, tad $EF=(EM+MK):2=(6+2):2=4$ m, turklāt $EF=FG=GH=4$ m.

Līdz ar to biezās melnās līnijas garums ir
$AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH=2+2+6+6+4+4=24$ (m).

T2.4.11. **1)**

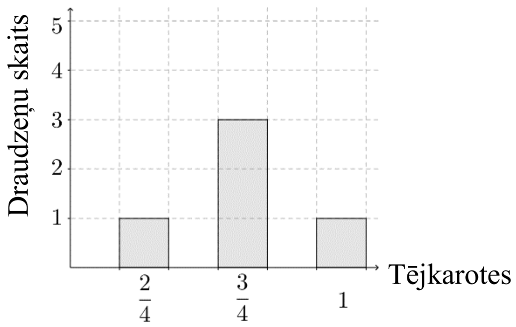
Vienības	Vienību skaits gliemežu maršrutā		
	A	*B*	*C*
Horizontāli	14	9	12
Vertikāli	11	2	11
Pa diagonāli	3	6	3

2) Ievērojam, ka gliemeža *A* un gliemeža *C* maršrutā ir vienāds skaits vertikālo un diagonālo posmu, bet horizontālie posmi gliemeža *A* maršrutā ir par 2 vairāk nekā gliemeža *C* maršrutā. Tā kā gliemezis *A* maršrutu veica 101 minūtē, bet gliemezis *C* to izdarīja 95 minūtēs, tad divus horizontālos posmus gliemezis veic $101-95=6$ minūtēs. Tas nozīmē, ka vienu horizontālo posmu gliemezis veic $6:2=3$ minūtēs.

Tā kā no dotā ir zināms, ka pa vienas rūtiņas diagonāli gliemezis pārvietojas 5 minūtes, tad, piemēram, no gliemeža *C* maršruta, varam aprēķināt, cik minūtes katrs gliemezis pārvietojas pa vertikālo posmu (apzīmēsim ar v), proti, $12\cdot 3+11\cdot v+3\cdot 5=95$ jeb $36+11\cdot v+15=95$, no kā iegūstam $11\cdot v=44$ jeb $v=4$.

Tātad gliemezis *B* maršrutu veica $9\cdot 3+2\cdot 4+6\cdot 5=65$ minūtēs.

T2.4.12. **a)** Skat. 296. att.



296. att.

b) Visbiežāk tika piebērtas $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura.

c) Ne vairāk kā $\frac{3}{4}$ tējkarotes cukura (tātad jāieskaita arī $\frac{2}{4}$ tējkarotes cukura) tējai piebēra četras draudzenes.

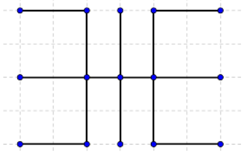
d) Draudzene, kuras tēja bija vissaldākā, piebēra 1 tējkaroti cukura.

Jauno matemātiķu konkurss

Pirmā kārta

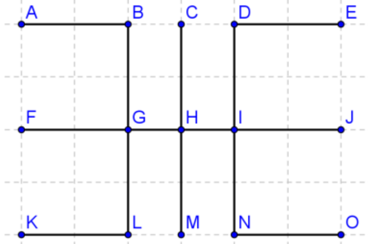
J2.1.1. Saskaiti!

Saskaiti, cik 297. att. ir nogriežņu, kuru galapunkti ir dotie punkti! *Raksti ne tikai atbildi, bet arī risinājuma gaitu!*



297. att.

Atrisinājums. Apzīmējam nogriežņu galapunktus ar burtiem (skat. 298. att.).



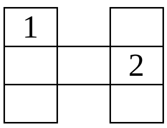
298. att.

1) Vienu vienību gari nogriežņi ir 2:
   - horizontāli: GH un HI.
2) Divas vienības gari nogriežņi ir 13:
   - horizontāli: AB, DE, FG, GI, IJ, KL, NO,
   - vertikāli: BG, GL, CH, HM, DI, IN.
3) Trīs vienības gari nogriežņi ir 2:
   - horizontāli: FH, HJ.
4) Četras vienības gari nogriežņi ir 5:
   - horizontāli: FI, GJ,
   - vertikāli: BL, CM, DN.
5) Sešu vienību garš nogrieznis ir 1: FJ.

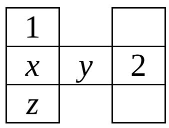
Tātad pavisam kopā ir $2+13+2+5+1=23$ nogriežņi.

J2.1.2. No 1 līdz 7

Katrā rūtiņā (skat. 299. att.) jābūt ierakstītam vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 7 (katram vienu reizi) tā, lai skaitļu summas abās vertikālajās kolonnās un horizontālajā rindā būtu vienādas. Cik dažādos veidos to var izdarīt? *Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



299. att.



300. att.

Atrisinājums. Visu rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir $1+2+3+4+5+6+7=28$.

Apzīmējam trīs rūtiņās ierakstītos skaitļus ar *x*, *y*, *z* (skat. 300. att.).

Saskaitot abu vertikālo kolonnu un horizontālās rindas skaitļus, iegūstam $28+x+2=30+x$, jo x un 2 atrodas gan vertikālajā kolonnā, gan horizontālajā rindā, tāpēc tiek ieskaitīti divas reizes. Tā kā skaitļu summām abās vertikālajās kolonnās un horizontālajā rindā jābūt vienādām, tad summai $30+x$ jādalās ar 3. Tātad arī x jādalās ar 3. Līdz ar to vienīgās iespējamās x vērtības ir $x=3$ un $x=6$, jo rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 7. Apskatīsim abus gadījumus.

1) Ja $x = 3$, tad skaitļu summa rindā un kolonnās ir $(30 + x) : 3 = (30 + 3) : 3 = 11$. Līdz ar to $y = 6$ un $z = 7$. Divās atlikušajās rūtiņās jāieraksta skaitļi 4 un 5, ko var izdarīt divos dažādos veidos (skat. 301. att.).

2) Ja $x = 6$, tad skaitļu summa rindā un kolonnās ir $(30 + x) : 3 = (30 + 6) : 3 = 12$. Līdz ar to $y = 4$ un $z = 5$. Divās atlikušajās rūtiņās jāieraksta skaitļi 3 un 7, ko var izdarīt divos dažādos veidos (skat. 301. att.).

Tātad skaitļus tukšajās rūtiņās var ierakstīt četros dažādos veidos.

1		4
3	6	2
7		5

1		5
3	6	2
7		4

1		3
6	4	2
5		7

1		7
6	4	2
5		3

301. att.

J2.1.3. Trīsciparu skaitlis

Kāds ir mazākais trīsciparu skaitlis, kas nav ne pirmskaitlis, ne arī dalās ar 2, 3 vai 5? *Atrodi mazāko skaitli un pamato, ka tas tik tiešām ir mazākais iespējamais!*

1. atrisinājums. Ja meklētais skaitlis nav ne pirmskaitlis, ne arī dalās ar 2, 3 vai 5, tad to var sadalīt vismaz divu pirmskaitļu, kas lielāki nekā 5, reizinājumā. Der skaitlis $119 = 7 \cdot 17$.

Neviens mazāks skaitlis no 100 līdz 118 neder, jo

- skaitļi 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118 neder, jo tie dalās ar 2;
- skaitļi 101, 103, 107, 109, 113 neder, jo tie ir pirmskaitļi;
- skaitļi 105, 115 neder, jo dalās ar 5;
- skaitļi 111, 117 neder, jo dalās ar 3.

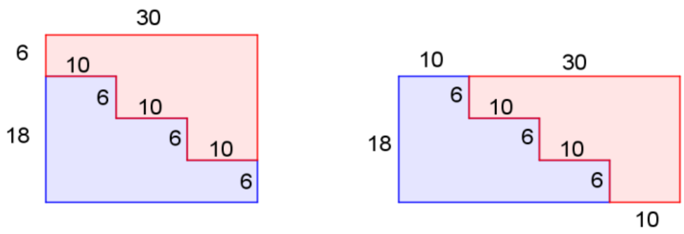
Tātad mazākais trīsciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 119.

2. atrisinājums. Meklētais skaitlis ir $119 = 7 \cdot 17$. Pamatosim, ka tas ir mazākais. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka mazākais meklētā skaitļa dalītājs nav mazāks kā 7. Ja meklētais skaitlis dalās ar 7, tad skaitļi $49 = 7 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$; $91 = 7 \cdot 13$ neder, jo tie nav trīsciparu. Ja mazākais skaitlis, ar ko dalās meklētais skaitlis ir 11, tad $11 \cdot 11 = 121$ ir lielāks nekā 119.

J2.1.4. Taisnstūris

Vai taisnstūri, kura malu garumi ir 30 cm un 24 cm, var sagriezt divās vienādās figūrās tā, lai no tām var salikt citu taisnstūri, kura malu garumi ir 18 cm un 40 cm?

Atrisinājums. Jā, var, skat. 302. att.

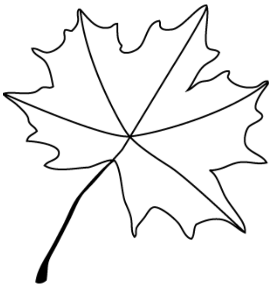


302. att.

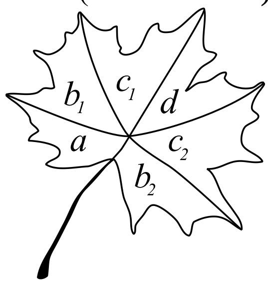
J2.1.5. Rudens lapa

Ilmai un Skaidrim ir četri krāsu zīmuļi: dzeltens, oranžs, sarkans un zaļš. Cik dažādos veidos viņi var izkrāsot 303. att. redzamo kļavas lapu, kas sadalīta 6 daļās, ja katrai daļai jābūt izkrāsotai tieši vienā no četrām dotajām krāsām un daļas, kam ir kopīga mala, jāizkrāso dažādās krāsās?

Atrisinājums. Katru no sešām lapas daļām apzīmēsim ar burtiem (skat. 304. att.)



303. att.

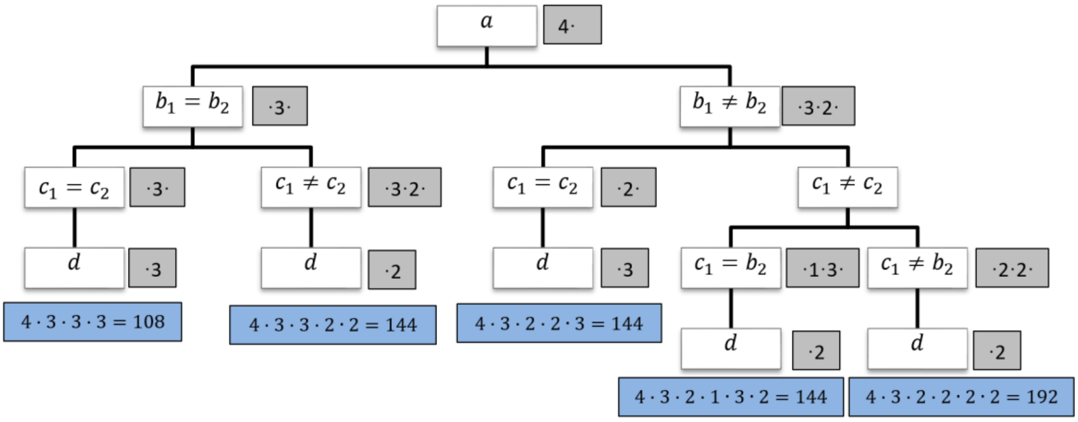


304. att.

Skaidrs, ka a daļu var nokrāsot jebkurā no četrām krāsām.

1. Ja b_1 un b_2 gribam krāsot vienādi (apzīmēsim $b_1 = b_2$), tad to var izdarīt 3 dažādos veidos, tas ir, kādā no atlikušajām trīs krāsām. Tātad šajā gadījumā kopā a, b_1 un b_2 daļas var izkrāsot jau $4 \cdot 3 = 12$ veidos (skat. 305. att.).
   1.1. Ja $c_1 = c_2$, tad tās var izkrāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $b_1 = b_2$ daļu krāsošanai, un d daļu var nokrāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $c_1 = c_2$ daļu krāsošanai. Tātad šajā gadījumā visas sešas daļas var izkrāsot $12 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ veidos.
   1.2. Ja $c_1 \neq c_2$, tad vienu no tām var izkrāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $b_1 = b_2$ daļu krāsošanai, bet otru – kādā no 2 atlikušajām krāsām, tas ir, $3 \cdot 2 = 6$ veidos, un d daļu var nokrāsot kādā no 2 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $c_1 \neq c_2$ daļu krāsošanai. Tātad šajā gadījumā visas sešas daļas var izkrāsot $12 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ veidos.
2. Ja $b_1 \neq b_2$, tad vienu no tām var izkrāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas a daļas krāsošanai, bet otru – kādā no 2 atlikušajām krāsām, tas ir, $3 \cdot 2 = 6$ veidos. Tātad šajā gadījumā a, b_1 un b_2 daļas var izkrāsot jau $4 \cdot 6 = 24$ veidos.
   2.1. Ja $c_1 = c_2$, tad tās var izkrāsot kādā no 2 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $b_1 \neq b_2$ krāsošanai, un d daļu var nokrāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas $c_1 = c_2$ daļu krāsošanai. Tātad šajā gadījumā visas sešas daļas var izkrāsot $24 \cdot 2 \cdot 3 = 144$ veidos.
   2.2. Ja $c_1 \neq c_2$, tad jāšķiro divi gadījumi.
      2.2.1. Ja $c_1 = b_2$, tad c_1 var nokrāsot vienā krāsā (tādā pašā kā b_2), bet c_2 var krāsot kādā no 3 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas b_2 krāsošanai. Tādā gadījumā c_1 krāsa nesakrīt ar c_2 krāsu un d daļu var krāsot kādā no divām atlikušajām krāsām. Tātad šajā gadījumā visas sešas daļas var izkrāsot $24 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ veidos.
      2.2.2. Ja $c_1 \neq b_2$, tad c_1 var nokrāsot 2 krāsās (tādās, kas nesakrīt ar b_1 un b_2), bet c_2 var krāsot kādā no 2 atlikušajām krāsām, kas nav izmantotas c_1 un b_2 krāsošanai. Tādā gadījumā c_1 krāsa nesakrīt ar c_2 krāsu un d daļu var krāsot kādā no divām atlikušajām krāsām. Tātad šajā gadījumā visas sešas daļas var izkrāsot $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$ veidos.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka visas sešas daļas var izkrāsot $108+144+144+144+192=732$ dažādos veidos.

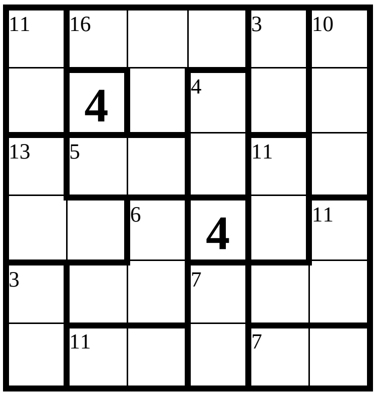


305. att.

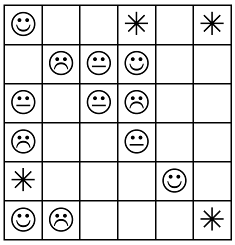
Otrā kārta

J2.2.1. Tabula

Aizpildi tabulas (skat. 306. att.) rūtiņas tā, lai katrā rindā un kolonnā būtu ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 6. Ar treknāku kontūru apvilktajās rūtiņās jāieraksta skaitļi tā, lai to summa būtu kreisajā augšējā stūrī norādītais skaitlis.



306. att.

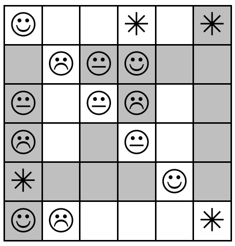

307. att.

Atrisinājums. Aizpildītu tabulu skat., piemēram, 308. att.

Piezīme. Ir arī citi veidi, kādi skaitļi var būt ierakstīti rūtiņās.

5	1	4	6	2	3
6	4	5	3	1	2
4	2	3	1	6	5
3	6	2	4	5	1
2	3	1	5	4	6
1	5	6	2	3	4

308. att.


309. att.

J2.2.2. Vai var sadalīt?

Vai 307. att. doto figūru var sadalīt četrās vienāda lieluma un vienādas formas daļās tā, lai katrā daļā būtu pa vienam no četriem simboliem ☺, 😐, ☹, ✳?

Atrisinājums. Jā, var, skat. 309. att.

J2.2.3. Cik pirmskaitļu?

a) No cipariem 1, 2, 3, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi, izveidoja visus iespējamos trīsciparu skaitļus. Cik no šiem skaitļiem ir pirmskaitļi?

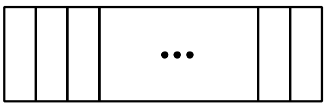
b) No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi, izveidoja visus iespējamos 362 880 deviņciparu skaitļus. Cik no šiem skaitļiem ir pirmskaitļi?

Atrisinājums. a) Katra izveidotā trīsciparu skaitļa ciparu summa ir $1+2+3=6$, tātad tā dalās ar 3 un arī pats skaitlis dalās ar 3 (dalāmības pazīme ar 3). Tātad neviens no izveidotajiem skaitļiem nav pirmskaitlis.

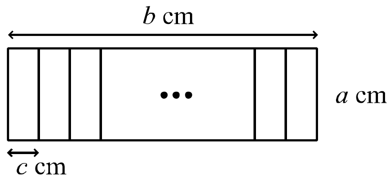
b) Katra izveidotā deviņciparu skaitļa ciparu summa ir $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, tātad tā dalās ar 3 un arī pats skaitlis dalās ar 3 (dalāmības pazīme ar 3). Tātad neviens no izveidotajiem skaitļiem nav pirmskaitlis.

J2.2.4. Taisnstūris

Lielā taisnstūra perimetrs ir 300 cm. To sagrieza vairākos vienādos taisnstūros (skat. 310. att.). Katra mazā taisnstūra perimetrs ir 58 cm. Visu taisnstūru malu garumi ir naturāli skaitļi. Cik taisnstūros sagrieza lielo taisnstūri? Kādi ir lielā taisnstūra izmēri? *Apskati visas iespējas un pamato, ka citu nav!*



310. att.



311. att.

1. atrisinājums. Lielā taisnstūra platumu apzīmējam ar *a*, garumu – ar *b*. Mazā taisnstūra platumu apzīmējam ar *c* (skat. 311. att.). Mazā taisnstūra garums sakrīt ar lielā taisnstūra platumu.

Lielā taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(a+b)=300$, no kā iegūstam, ka $a+b=150$ jeb

$$b=150-a.$$

Mazā taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(a+c)=58$, no kā iegūstam, ka $a+c=29$ jeb

$$a=29-c.$$

Taisnstūru malu garumi *a* un *c* ir naturāli skaitļi, tāpēc mazākā iespējamā *c* vērtība ir 1, bet lielākā iespējamā *c* vērtība ir 28. Apskatīsim visus šos variantus, ievērojot to, ka mazo taisnstūru skaitam jābūt naturālam skaitlim jeb *b* jādalās ar *c*. (Ja *b* nedalās ar *c*, to apzīmēsim ar *n*.)

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a=29-c$	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
$b=150-a$	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
$b:c$ (mazo taisnstūru skaits)	**122**	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	**12**	*n*	*n*	*n*

c	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$a=29-c$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$b=150-a$	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
$b:c$ (mazo taisnstūru skaits)	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*

Tātad iespējami ir tikai divi varianti:

1) lielo taisnstūri sagrieza 122 taisnstūros, tad lielā taisnstūra garums ir 122 cm un platums ir 28 cm;
2) lielo taisnstūri sagrieza 12 taisnstūros, tad lielā taisnstūra garums ir 132 cm un platums ir 18 cm.

2. atrisinājums. Lielā taisnstūra platumu apzīmējam ar a, garumu – ar b. Mazā taisnstūra platumu apzīmēsim ar c (skat. 311. att.). Mazā taisnstūra garums sakrīt ar lielā taisnstūra platumu. Tad lielā taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(a+b)=300$, no kā iegūstam, ka $a+b=150$ jeb

$$a=150-b. \tag{1}$$

Mazā taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(a+c)=58$, no kā iegūstam, ka $a+c=29$ jeb

$$a=29-c. \tag{2}$$

Tā kā vienādojumu (1) un (2) kreisās puses ir vienādas, tad vienādas ir arī to labās puses $150-b=29-c$, no kā iegūstam $b-c=121$. Tā kā mazo taisnstūru skaitam jābūt naturālam skaitlim, tad b dalās ar c jeb $b=x\cdot c$ un starpību $b-c=121$ var pārrakstīt $b-c=x\cdot c-c=c\cdot(x-1)=121$. Esam ieguvuši, ka $c\cdot(x-1)=121$. Skaitli 121 kā divu naturālu skaitļu reizinājumu var izteikt trīs dažādos veidos:

- $121\cdot 1=121$, taču no (2) izriet, ka c nevar būt 121;
- $1\cdot 121=121$, tad $c=1$ un no (2) iegūstam, ka lielā taisnstūra platums $a=29-c=29-1=28$, un no (1) iegūstam, ka lielā taisnstūra garums $b=150-a=150-28=122$; tātad lielo taisnstūri sagrieza 122 taisnstūros;
- $11\cdot 11=121$, tad $c=11$ un no (2) iegūstam, ka lielā taisnstūra platums $a=29-c=29-11=18$, un no (1) iegūstam, ka lielā taisnstūra garums $b=150-a=150-18=132$; tātad lielo taisnstūri sagrieza $132:11=12$ taisnstūros.

Tātad iespējami ir tikai divi varianti:

1) lielo taisnstūri sagrieza 122 taisnstūros, tad lielā taisnstūra garums ir 122 cm un platums 28 cm;
2) lielo taisnstūri sagrieza 12 taisnstūros, tad lielā taisnstūra garums ir 132 cm un platums 18 cm.

J2.2.5. Par vecmāmiņām

Kāda ciema visām vecmāmiņām patīk vismaz viena no trim nosauktajām nodarbēm – nūjošana, fanošana par hokeja klubu „Dinamo Rīga”, rausīšu cepšana. Ir zināms, ka nūjošana nepatīk 40 vecmāmiņām, fanošana par „Dinamo Rīga” nepatīk 42 vecmāmiņām, bet rausīšu cepšana nepatīk 45 vecmāmiņām. Visas trīs nodarbes patīk 8 vecmāmiņām, bet tikai viena nodarbe patīk 36 vecmāmiņām. Cik vecmāmiņu dzīvo šajā ciematā?

Atrisinājums. Attēlosim uzdevuma nosacījumus ar *Eilera riņķiem* – viena riņķa iekšpusē atrodas visas vecmāmiņas, kam patīk nūjošana, otra riņķa iekšpusē – vecmāmiņas, kam patīk fanošana par hokeja klubu „Dinamo Rīga”, trešajā riņķī – vecmāmiņas, kam patīk rausīšu cepšana. Apgabalā, kas kopīgs diviem riņķiem, atrodas tās vecmāmiņas, kam patīk divas nodarbošanās, apgabalā, kas kopīgs visiem riņķiem atrodas tās vecmāmiņas, kam patīk visas trīs nodarbošanās (skat. 312. att.).

Apzīmēsim:

N – tik vecmāmiņām patīk tikai nūjošana,

F – tik vecmāmiņām patīk tikai fanošana par hokeja klubu „Dinamo Rīga”,

C – tik vecmāmiņām patīk tikai rausīšu cepšana;

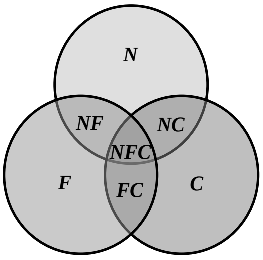
NF – patīk nūjošana un fanošana;

NC – patīk nūjošana un cepšana;

FC – patīk fanošana un cepšana;

NFC – patīk visas trīs nodarbes.

Vecmāmiņas, kam nepatīk kāda nodarbošanās, atrodas ārpus attiecīgā riņķa.



312. att.

Tā kā nūjošana nepatīk 40 vecmāmiņām, tad $F+FC+C=40$. No tā, ka fanošana nepatīk 42 vecmāmiņām iegūstam $N+NC+C=42$, bet no tā, ka rausīšu cepšana nepatīk 45 vecmāmiņām, iegūstam $N+NF+F=45$. Tātad esam ieguvuši, ka $F+FC+C+N+NC+C+N+NF+F=40+42+45$.

Tā kā uzdevumā dots, ka tikai viena nodarbe patīk 36 vecmāmiņām jeb $F+C+N=36$, tad iegūstam, ka $\underbrace{F+C+N}_{36}+\underbrace{F+C+N}_{36}+FC+NC+NF=127$ jeb $FC+NC+NF=55$.

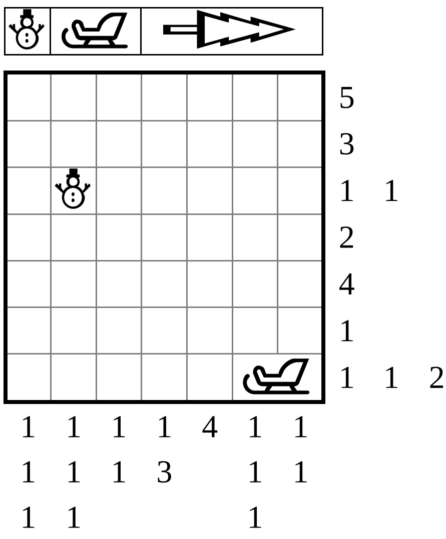
Tā kā ciemā ir tikai tādas vecmāmiņas, kam patīk vai nu tieši viena minētā nodarbe, vai tieši divas nodarbes, vai tieši trīs nodarbes un nekādas citas vecmāmiņas nav, tad kopējais vecmāmiņu skaits ir $(F+C+N)+(FC+NC+NF)+NFC=36+55+8=99$.

Trešā kārta

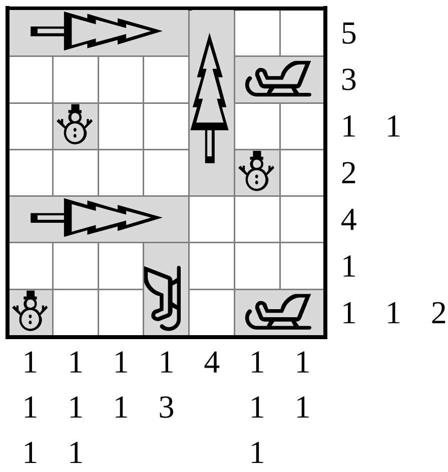
J2.3.1. Ziemassvētku vecīša pagalms

Skaitļi rūtiņu labajā pusē un apakšā norāda, cik pēc kārtas sekojošas rūtiņas ir aizpildītas katrā rindā un kolonnā (skat. 313. att.). Aizpildi rūtiņas, ja zināms, ka tajās pavisam kopā ir izvietotas 3 egles, 3 kamanas un 3 sniegavīri!

Atrisinājums. Skat. 314. att.



313. att.



314. att.

J2.3.2. Sacīkšu ziemeļbrieži

Līdzīgi kā rallijā katrai mašīnai piešķir sacensību numuru, tā Ziemassvētku vecītis arī saviem ātrajiem rikšotājiem ziemeļbriežiem ir piešķīris numurus.

Ziemeļbriedis Rūdolfs zina, ka

1) viņa numurs ir sešciparu skaitlis, kas vienādi lasāms gan no kreisās, gan no labās puses;
2) tas dalās ar 3;
3) nosvītrojot pirmo un pēdējo ciparu, iegūst četrciparu skaitli, kura visi pirmreizinātāji ir vienādi ar 11.

Kāds numurs var būt piešķirts Rūdolfam?

Atrisinājums. Sāksim risinājumu ar 3) nosacījumu. Tā kā $11 \cdot 11 = 121$ ir trīsciparu skaitlis un $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 14641$ ir piecciparu skaitlis, tad vienīgā iespēja, ka iegūts četrciparu skaitlis $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$. Tad, izmantojot 1) nosacījumu, meklēto sešciparu skaitli varam pierakstīt formā $\overline{a1331a}$. Pēc 2) nosacījuma šim skaitlim jādalās ar 3. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tātad $a+1+3+3+1+a = 8+2a$ jādalās ar 3. Ievērojot to, ka a ir cipars, jāpārbauda visas iespējamās a vērtības:

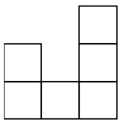
- ja a ir 0, 1, 3, 4, 6, 7 vai 9, tad $8+2a$ nedalās ar 3;
- ja $a = 2$, tad $8+2a = 8+2 \cdot 2 = 12$, kas dalās ar 3;
- ja $a = 5$, tad $8+2a = 8+2 \cdot 5 = 18$, kas dalās ar 3;
- ja $a = 8$, tad $8+2a = 8+2 \cdot 8 = 24$, kas dalās ar 3.

Tātad Rūdolfam var būt piešķirts vai nu numurs 213312, vai 513315, vai 813318.

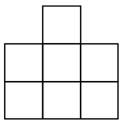
J2.3.3. Rūķīšu dāvanu krāvums

Rūķīši visas Ziemassvētku dāvanas salika vienādās kuba veida kastēs un sakrāva istabas vidū. Rūķītis Voldemārs skatās uz dāvanu krāvumu no kreisās puses un redz to, kas attēlots 315. att., bet rūķītis Valdemārs skatās uz dāvanu krāvumu no priekšas un redz to, kas attēlots 316. att.

Kāds ir **a)** lielākais; **b)** mazākais dāvanu skaits, kāds var būt novietots krāvumā?

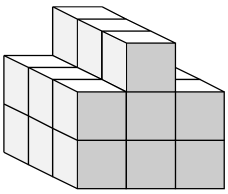


315. att.

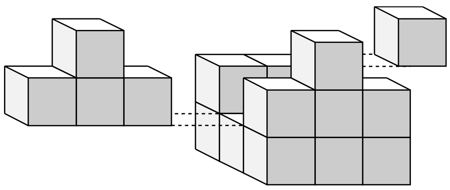


316. att.

Atrisinājums. a) Noskaidrosim, kāds var būt lielākais dāvanu skaits. Ja tiktu ņemts vērā tikai tas, ko redz Valdemārs, skatoties no priekšas, tad kreisajā un labajā pusē visās rindās būtu pa divām dāvanām, vidū – visās rindās pa trīs dāvanām (skat. 317. att.). Taču tādā gadījumā mēs neiegūtu to, ko no kreisās puses redz Voldemārs, tāpēc četras dāvanas no vidējās rindas un viena dāvana no aizmugurējās rindas ir jānoņem (skat. 318. att.). Skats no augšas redzams 319. att., kur skaitļi norāda atbilstošo dāvanu skaitu katrā *stabiņā*. Tātad lielākais iespējamais dāvanu skaits ir $3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 + 3 + 2 = 16$.



317. att.

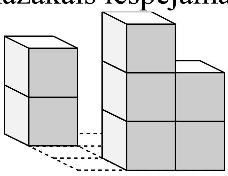


318. att.

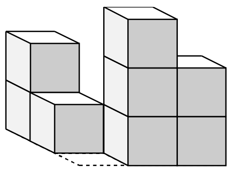
kreisā puse			
	2	2	2
	1	1	1
	2	3	2
	priekšpuse		

319. att.

b) Ja tiktu ņemts vērā tikai tas, ko redz Valdemārs no priekšas, tad kreisajā pusē būtu *stabiņš* ar divām dāvanām, vidū – *stabiņš* ar 3 dāvanām un labajā pusē – *stabiņš* ar divām dāvanām. Tos varētu izkārtot, piemēram, kā parādīts 320. att. Taču tādā gadījumā, skatoties no kreisās puses, vidējā rindā pietrūktu viena dāvana, tāpēc tā vēl ir jāpievieno (skat. 321. att.). Skats no augšas redzams 322. att., kur skaitļi norāda atbilstošo dāvanu skaitu katrā *stabiņā*. Tātad mazākais iespējamais dāvanu skaits ir $2+3+2+1 = 8$.



320. att.



321. att.

kreisā puse			
	2		
	1		
		3	2
	priekšpuse		

322. att.

J2.3.4. Vecmāmiņas cimdi

Vecmāmiņai atvilktnē ir 1 kreisās rokas cimds zilā krāsā, 2 kreisās rokas cimdi zaļā krāsā, 3 labās rokas cimdi zilā krāsā un 4 labās rokas cimdi zaļā krāsā. Vecmāmiņa palūdza mazmeitiņai atnest cimdu pāri no atvilktnes. Diemžēl mazmeitiņai labās un kreisās rokas cimdi izskatās vienādi, bet zaļos cimdus no zilajiem viņa atšķir. Kāds ir mazākais cimdu skaits, kas mazmeitiņai jāaiznes vecmāmiņai, lai noteikti varētu izveidot saderīgu cimdu pāri?

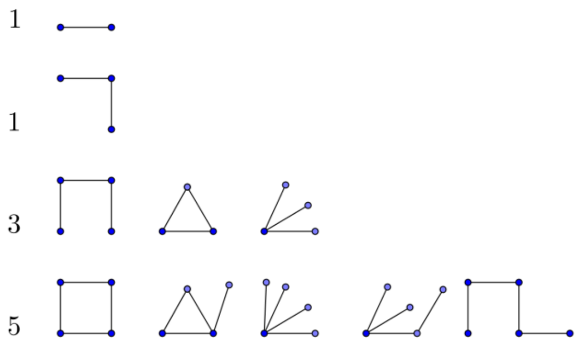
Atrisinājums. Lai uzdevumā dotie dati būtu labāk pārskatāmi, sakārtosim tos tabulā.

Zilā krāsā		Zaļā krāsā	
Kreisās rokas	Labās rokas	Kreisās rokas	Labās rokas
1	3	2	4

Mazākais cimdu skaits, kas mazmeitiņai jāaiznes vecmāmiņai, lai noteikti varētu izveidot saderīgu cimdu pāri, ir četri. Pamatosim, ka ar mazāk cimdiem nepietiek. Ja mazmeitiņa aiznestu tikai divus zaļos cimdus, tad varētu gadīties, ka tie abi ir, piemēram, kreisās rokas cimdi. Līdzīgi, ja mazmeitiņa aiznestu tikai divus zilos cimdus, tad varētu gadīties, ka tie abi ir labās rokas cimdi. Arī tad, ja viņa aiznestu trīs vai nu vienas, vai otras krāsas cimdus, tad varētu gadīties, ka tie visi ir labās rokas cimdi.

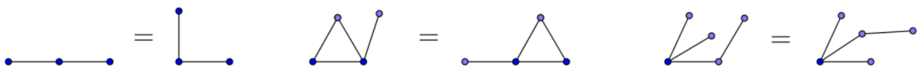
J2.3.5. Sērkociņu grafs

No viena sērkociņa var izveidot 1 *salikumu*, no diviem sērkociņiem – 1 *salikumu*, no trīs sērkociņiem – 3 dažādus *salikumus*, no četriem sērkociņiem – 5 dažādus *salikumus* (skat. 323. att.). Parādi, kā no pieciem sērkociņiem var izveidot 12 dažādus *salikumus*!



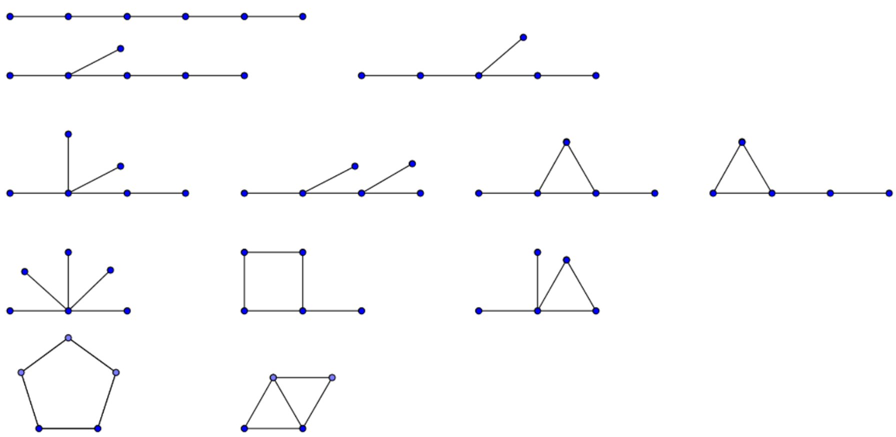
323. att.

Salikumus neuzskata par dažādiem, ja tos var iegūt vienu no otra *salikumu* grozot, izstiepjot, sastumjot vai dažus sērkociņus, kas saskarās vienā punktā, samainot vietām (skat., piemēram, 324. att.).



324. att.

Atrisinājums. Skat. 325. att.

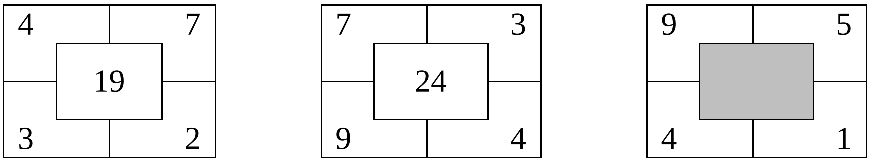


325. att.

Ceturtā kārta

J2.4.1. Izdomā sakarību!

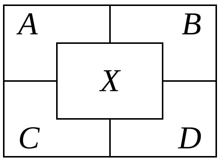
Iekrāsotajā lodziņā (skat. 326. att.) ieraksti skaitli un pamato, kāpēc ierakstīji tieši tādu!



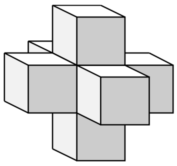
326. att.

Atrisinājums. Apzīmējam lodziņos ierakstītos skaitļus ar burtiem (skat. 327. att.).

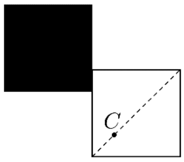
Vidū ierakstīto skaitli apraksta, piemēram, sakarība $X = C \cdot B - (A - D)$. Tad iekrāsotajā lodziņā ir jāieraksta skaitlis 12, jo $12 = 4 \cdot 5 - (9 - 1)$.



327. att.



328. att.



329. att.

J2.4.2. Metamie kauliņi

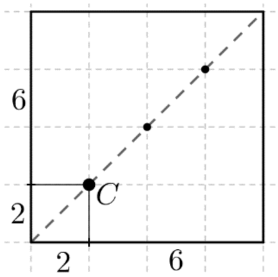
Megija salīmēja kopā septiņus metamos kauliņus (skat. 328. att.) tā, ka kopā tika salīmētas tikai tādas skaldnes, uz kurām ir vienāds skaits punktiņu. Cik punktiņu pavisam kopā ir palikuši redzami?

Atrisinājums. Kopējais punktiņu skaits uz viena metamā kauliņa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Tātad uz septiņiem kauliņiem kopā ir $7 \cdot 21 = 147$ punktiņi. Tā kā vidējā kauliņa katra skaldne ir salīmēta ar skaldni, uz kuras ir tāds pats punktiņu skaits, tad kopā nav redzami $21 \cdot 2 = 42$ punktiņi. Līdz ar to pavisam kopā ir redzami $147 - 42 = 105$ punktiņi.

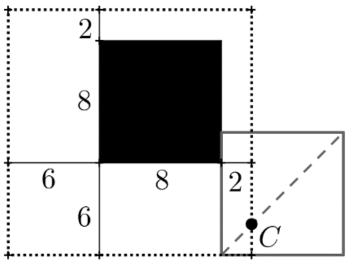
J2.4.3. Caurumiņa ceļš

Olafs no koka izzāģēja divus vienādus kvadrāta formas dēlīšus, kuru malas garums ir 8 cm. Vienu no tiem viņš nokrāsoja melnu un pieskrūvēja pie galda. Otru viņš nokrāsoja baltu, atzīmēja vienu ceturtdaļu no diagonāles garuma un tajā vietā izurba caurumiņu *C* (skat. 329. att.). Balto dēlīti viņš pielika pie melnā dēlīša malas un to, negrozot un neatraujot no melnā dēlīša, pa galda virsmu bīdīja apkārt melnajam dēlītim, kamēr tas nokļuva tajā pašā vietā, kur sākumā bija pielikts. Cik garš ir caurumiņa *C* veiktais ceļš?

1. atrisinājums. Uzzīmējot balto kvadrātiņu uz rūtiņu lapas un sadalot kvadrāta diagonāli četrās vienādās daļās, redzams, ka arī katra kvadrāta mala ar rūtiņu līnijām ir sadalīta četrās vienādās daļās (skat. 330. att.). Tātad *C* atrodas 2 cm attālumā no tam tuvākajām kvadrāta malām. Caurumiņa *C* ceļš 331. att. atzīmēts ar punktētu līniju. Tas ir kvadrāts, kura malas garums ir $2 + 8 + 6 = 16$ (cm). Tātad caurumiņa *C* veiktais ceļš ir $4 \cdot 16 = 64$ (cm).

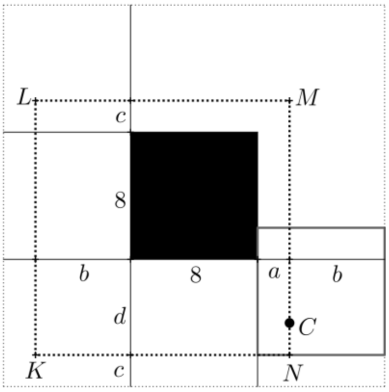


330. att.



331. att.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka $a+b=8$ (cm) un $c+d=8$ (cm) (skat. 332. att.). Tad $KN=b+8+a=16$ (cm) un $KL=d+8+c=16$ (cm). Tā kā caurumiņš pārvietojas pa kvadrāta *KLMN* perimetru, tad caurumiņa veiktais ceļš ir $4\cdot16=64$ (cm).



332. att.

J2.4.4. Cik bērnu?

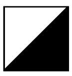
Ja sareizina visu Annas bērnu gadu skaitu, iegūst skaitli 1664. Zināms, ka jaunākajam bērnam ir divas reizes mazāk gadu nekā vecākajam bērnam. Cik bērnu ir Annai?

Atrisinājums. Sadalām skaitli 1664 pirmreizinātājos: $1664=2^7\cdot13$. Tā kā skaitlis 13 kā reizinātājs parādās tikai vienu reizi, tad tas nozīmē, ka tieši viena bērna gadu skaits dalās ar skaitli 13. No dotā, ka jaunākajam bērnam ir divas reizes mazāk gadu nekā vecākajam bērnam, izriet, ka ne vecākā, ne jaunākā bērna gadu skaits nedalās ar 13, jo pretējā gadījumā tie abi dalītos ar 13. Tātad vecākā un jaunākā bērna gadu skaits kā reizinātājus satur tikai skaitļus 2, un ģimenē ir vēl kāds bērns, kura gadu skaits dalās ar skaitli 13. Līdz ar to vecākajam bērnam ir vairāk nekā 13 gadu.

Tā kā $2^3=8<13$, tad vecākajam bērnam ir vismaz $2^4=16$ gadi, un šajā gadījumā jaunākajam bērnam ir $16:2=8=2^3$ gadi. Šis gadījums der, jo vecākā un jaunākā bērna gadu skaits kopā satur septiņus reizinātājus 2. Ja vecākajam bērnam būtu vismaz $2^5=32$ gadi, tad jaunākajam būtu ne mazāk kā $32:2=16=2^4$ gadi, bet tad abu bērnu gadu skaits kopā saturētu vairāk nekā septiņus reizinātājus 2. Tātad tā nevar būt un vienīgā iespēja, ka ģimenē ir trīs bērni, kuri ir 8, 13 un 16 gadus veci.

J2.4.5. *Flīzes*

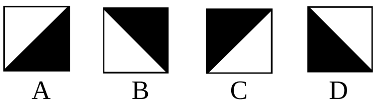
Hanna nopirka vairākas vienādas flīzes (skat. 333. att.).



333. att.

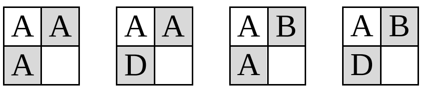
Cik dažādos veidos var noklāt **a)** 2×2; **b)** 3×3; **c)** $n\times n$ flīžu laukumu uz vannas istabas sienas tā, lai vienas krāsas laukumiem nebūtu kopīga mala?

Atrisinājums. Doto flīzi var pagriezt četrās dažādās pozīcijās: A, B, C, D (skat. 334. att.).



334. att.

Ja flīžu laukuma augšējā kreisā flīze ir, piemēram, pozīcijā A, tad tai blakus esošā flīze var būt pozīcijā A vai B un zem tās esošā flīze var būt pozīcijā A vai D (skat. 335. att.). Līdzīgi arī pārējās pozīcijās esošajām flīzēm ir divi varianti, kas tām var atrasties blakus, un divi varianti, kas var atrasties zem tām.



335. att.

Ja iekrāsotās rūtiņas (skat. 335. att.) ir aizpildītas, tad katrā gadījumā ir tieši viens variants, kā aizpildīt tukšo rūtiņu (skat. 336. att.).

A	A
A	A

A	A
D	D

A	B
A	B

A	B
D	C

336. att.

Visos gadījumos, neatkarīgi no tā, kā iekrāsotās rūtiņas ir noklātas, neiekrāsotās rūtiņas var noklāt viennozīmīgi.

Ņemot vērā iepriekš aprakstīto, aplūkosim, cik dažādos veidos var noklāt flīžu laukumus.

1. atrisinājums. Flīžu laukuma katru diagonāles rūtiņu var noklāt 4 dažādos veidos (skat. 337. att.). Ja ir noklātas diagonāles rūtiņas, tad katru no atlikušajām rūtiņām var noklāt tieši vienā veidā. Līdz ar to 2×2 flīžu laukumu var noklāt $4\cdot4=16$ dažādos veidos, 3×3 flīžu laukumu var noklāt $4\cdot4\cdot4=4^3=64$ dažādos veidos un $n\times n$ flīžu laukumu var noklāt $4^n=2^{2n}$ dažādos veidos.

4	1	1	…	1
1	4	1	…	1
1	1	4	…	1
…	…	…	…	…
1	1	1	…	4

337. att.

2. atrisinājums. Flīžu laukuma augšējo kreiso rūtiņu var aizpildīt 4 dažādos veidos (skat. 338. att.). Ja ir aizpildīta stūra rūtiņa, tad katru no pārējām pirmās rindas un pirmās kolonnas rūtiņām var aizpildīt 2 veidos. Ja ir aizpildīta visa pirmā rinda un pirmā kolonna, tad katru no atlikušajām rūtiņām var aizpildīt tieši vienā veidā. Līdz ar to 2×2 flīžu laukumu var noklāt $4\cdot2\cdot2=16$ dažādos veidos, 3×3 flīžu laukumu var noklāt $4\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=4\cdot2^2\cdot2^2=64$ dažādos veidos un $n\times n$ flīžu laukumu var noklāt $4\cdot2^{n-1}\cdot2^{n-1}=2^{2n}$ dažādos veidos.

4	2	2	…	2
2	1	1	…	1
2	1	1	…	1
…	…	…	…	…
2	1	1	…	1

338. att.

Piektā kārta

J2.5.1. Pirmskaitļu maģiskais kvadrāts

Katrā rūtiņā (skat. 339. att.) ieraksti tieši vienu (katrā rūtiņā citu) no pirmskaitļiem 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113 tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs esošo skaitļu summa būtu viena un tā pati!

339. att.

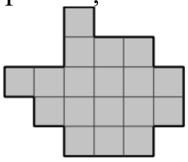
Atrisinājums. Skat., piemēram, 340. att., kur visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs esošo skaitļu summa ir 177.

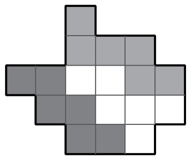
101	29	47
5	59	113
71	89	17

340. att.

J2.5.2. Izlocīt kubiņus

Mētrai ir kartona gabaliņš (skat. 341. att.), kuru viņa grib sagriezt tā, lai no katras iegūtās daļas varētu izlocīt kubu. Parādi, kā Mētrai jāsagriež kartons, lai viņai ieplānotais izdotos! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.


341. att.


342. att.

Atrisinājums. Tā kā kubu var izlocīt tikai no 143. att. dotajiem izklājumiem, tad Mētrai kartons jāsagriež tā, kā parādīts 342. att.

J2.5.3. Cik dažādu četrstūru?

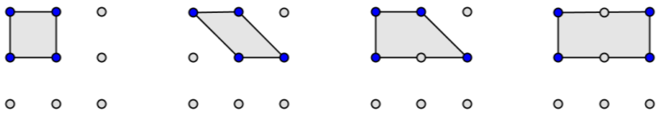
Cik dažādus četrstūrus var uzzīmēt tā, lai četrstūra katra virsotne atrastos kādā no 343. att. dotajiem punktiem? Četrstūrus neuzskata par dažādiem, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie abi pilnīgi sakrīt.


343. att.

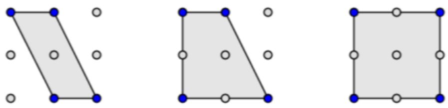
Atrisinājums. Skaidrs, ka visas četrstūra virsotnes nevar atrasties vienā rindā. Apskatīsim iespējamos gadījumus.

1) Ja četrstūra virsotnes izvietotas pa divām rindām, tad katrā rindā jābūt tieši divām tā virsotnēm. Iespējami divi gadījumi:

a) ja četrstūra virsotnes atrodas divās blakus rindās, tad var uzzīmēt 4 dažādus četrstūrus (skat. 344. att.);

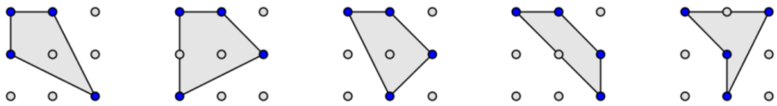

344. att.

b) ja četrstūra virsotnes atrodas pirmajā un pēdējā rindā, tad var uzzīmēt 3 dažādus četrstūrus, kas atšķiras no a) gadījumā iegūtajiem (skat. 345. att.).

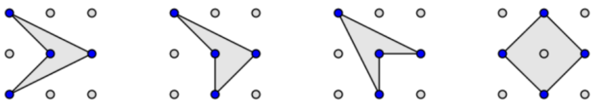

345. att.

2) Ja četrstūra virsotnes izvietotas pa visām trim rindām, tad iespējami divi gadījumi:

a) ja pirmajā rindā ir divas virsotnes, bet abās pārējās – pa vienai, tad iegūst 5 dažādus četrstūrus, kas atšķiras no 1) gadījumā iegūtajiem (skat. 346. att.);


346. att.

b) ja vidējā rindā ir divas virsotnes, bet abās pārējās – pa vienai, tad iegūst 4 dažādus četrstūrus, kas atšķiras no 1) gadījumā iegūtajiem (skat. 347. att.).


347. att.

Tātad pavisam kopā var uzzīmēt $3+4+5+4=16$ dažādus četrstūrus.

J2.5.4. Debesmanna nedalās ar 264

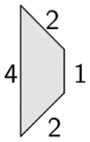
Evelīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *ANBCDENNN* dalās ar 312. Pierādi, ka otrais skaitlis *DEBESMANNA* nedalās ar 264.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis *ANBCDENNN* dalās ar $312 = 8 \cdot 39$, tad tas dalās arī ar 8. Ar 8 dalās skaitļi, kuru pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8, tātad skaitlis $\overline{NNN}$ jeb $100N + 10N + N = 111N$ dalās ar 8. Tā kā 111 ar 8 nedalās, tad ar 8 jādalās *N*. Vienīgais cipars, kas nav 0 un kura veidotais viencipara skaitlis dalās ar 8, ir $N = 8$.

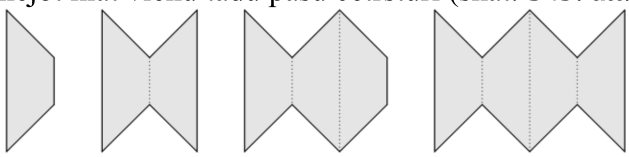
Ja skaitlis *DEBESMANNA* dalītos ar $264 = 8 \cdot 33$, tad tas dalītos arī ar 8, turklāt tā pēdējo trīs ciparu veidotajam skaitlim $\overline{NNA}$ jeb $\overline{88A} = 880 + A$ būtu jādalās ar 8. Tā kā 880 dalās ar 8, tad arī skaitlim *A* būtu jādalās ar 8, bet tas nav iespējams, jo *A* nevar būt ne 0, ne 8. Tātad skaitlis *DEBESMANNA* nedalās ar 264.

J2.5.5. Trapeču virknīte

Aurēlija uzzīmēja četrstūri, kura malu garumi ir 2, 1, 2 un 4 (skat. 348. att.). Malas, kuru garumi ir 1 un 4, ir paralēlas. Pēc tam viņa sāka zīmēt figūras, kas sastāv no 1; 2; 3; 4; … vienādiem dotajiem četrstūriem, katrā reizē piezīmējot klāt vienu tādu pašu četrstūri (skat. 349. att.).



348. att.



349. att.

a) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 6 četrstūri?

b) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 2015 četrstūri?

c) Cik četrstūri ir salikti kopā, ja figūras perimetrs ir 80?

d) Uzraksti sakarību, kas apraksta figūras perimetra garumu, ja kopā salikti *n* četrstūri!

Atrisinājums. d) Iegūtās figūras perimetru veido tās kreisā sāna mala (4 vienības), katra četrstūra augšējā un apakšējā mala ($2 + 2 = 4$ vienības) un vēl figūras labā sāna mala. Ja ir uzzīmēts nepāra skaits četrstūru, tad figūras labā sāna mala ir 1 vienību gara, ja pāra skaits četrstūru, tad labā sāna mala ir 4 vienības gara. Tad,

- ja *n* ir nepāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 1$;
- ja *n* ir pāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 4$.

Ievērojam, ja *n* ir nepāra, tad figūras perimetrs vienmēr ir nepāra skaitlis, ja *n* ir pāra, tad – pāra skaitlis.

a) Ja kopā ir salikti 6 četrstūri jeb $n = 6$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 6 + 4 = 32$.

b) Ja kopā ir salikti 2015 četrstūri jeb $n = 2015$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 2015 + 1 = 8065$.

c) Ja figūras perimetrs ir 80 (pāra skaitlis), tad $80 = 4 + 4 \cdot n + 4$ jeb $n = (80 - 4 - 4) : 4 = 18$.

Piezīme. Sakarību, kā aprēķināt figūras perimetru, var izteikt arī citos veidos.

Profesora Cipariņa klubs

Pirmā nodarbība

P2.1.1. Nevienādības

Kāds ir lielākais skaits doto nevienādību, kas vienlaicīgi var būt patiesas?

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \qquad a^2 > b^2; \qquad a < b; \qquad a < 0; \qquad b < 0$$

Atrisinājums. Pierādīsim, ka piecas nevienādības nevar vienlaicīgi būt patiesas. Ja visas nevienādības būtu patiesas, tad patiesas būtu arī nevienādības

$$a < 0,\ b < 0 \text{ un } a < b. \qquad (*)$$

Ekvivalenti pārveidojot nevienādību $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ iegūstam $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$ jeb $\frac{b-a}{ab} < 0$. Tā kā saucējs $ab > 0$, tad jābūt $b - a < 0$ jeb $b < a$, bet tas ir pretrunā ar (*) pēdējo nevienādību. Tātad piecas nevienādības nevar vienlaicīgi būt patiesas.

Savukārt, nevienādības $a < 0$, $b < 0$, $a < b$ un $a^2 > b^2$ var vienlaicīgi būt patiesas. Ja $a < b$, $a < 0$, $b < 0$ ir patiesas, tad $a = -k$ un $b = -m$, kur k un m ir pozitīvi skaitļi. No nevienādības $a < b$ iegūstam $-k < -m$ jeb $k > m$. Tā kā k un m ir pozitīvi skaitļi, tad varam abas nevienādības puses kāpināt kvadrātā. Iegūstam $k^2 > m^2$ jeb $(-a)^2 > (-b)^2$ un tātad patiesa ir arī nevienādība $a^2 > b^2$.

Līdz ar to lielākais skaits nevienādību, kas vienlaicīgi var būt patiesas, ir četras.

P2.1.2. Gliemeži

Ja dobē, kurā ar vienmērīgu ātrumu aug asteres, ielaiž 9 gliemežus, tie nograuž visas asteres 4 stundās; ja dobē ielaiž 8 gliemežus, tie visas asteres nograuž 6 stundās. Cik gliemežu jāielaiž dobē, lai asteru daudzums tajā visu laiku paliktu nemainīgs? (Pieņem, ka gliemeži ēd vienmērīgi un nepārtraukti.)

Atrisinājums. Ar x apzīmēsim asteru daudzumu dobē brīdī, kad tajā tiek ielaisti gliemeži; ar v_a – asteru augšanas ātrumu; ar v_g – viena gliemeža ēšanas ātrumu. No uzdevuma nosacījumiem iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + 4 \cdot v_a = 4 \cdot 9 \cdot v_g & (1) \\ x + 6 \cdot v_a = 6 \cdot 8 \cdot v_g & (2) \end{cases}$$

Lai asteru daudzums dobē paliktu nemainīgs, asteru augšanas ātrumam ir jābūt vienādam ar n gliemežu ēšanas ātrumu, proti,

$$v_a = n \cdot v_g \qquad (3)$$

No (2) atņemot (1), iegūstam $x + 6 \cdot v_a - x - 4 \cdot v_a = 6 \cdot 8 \cdot v_g - 4 \cdot 9 \cdot v_g$ jeb $2 \cdot v_a = 12 \cdot v_g$. Izdalot abas vienādojuma puses ar 2, iegūstam

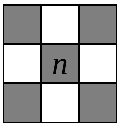
$$v_a = 6 \cdot v_g \qquad (4)$$

No (3) un no (4) iegūstam, ka $n = 6$. Tātad, lai asteru daudzums dobē paliktu nemainīgs, tajā jāielaiž seši gliemeži.

P2.1.3. Starpbrīdis

Andris uzzīmēja 3×3 rūtiņu kvadrātu un lika Jurim pierādīt: ja rūtiņās ierakstīti skaitļi 1, 2, ..., 9, katrs tieši vienu reizi un katrā rūtiņā tieši viens skaitlis, tad iespējams atrast tādas divas rūtiņas ar kopīgu malu, kurās ierakstīto skaitļu summa nav pirmskaitlis.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka skaitļus ir iespējams ierakstīt tā, lai katrās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būtu pirmskaitlis. Pirmskaitli 2 nevar iegūt kā divu dažādu pozitīvu viencipara skaitļu summu. Tā kā 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis, tad visas apskatāmās summas ir nepāra skaitļi. Līdz ar to katrās divās blakus rūtiņās jābūt ierakstītiem dažādas paritātes skaitļiem: vienam – pāra, otram – nepāra. Tātad visās melnajās rūtiņās (skat. 350. att.) ierakstīto skaitļu paritāte ir vienāda, un visās baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu paritāte arī ir vienāda, bet cita nekā melnajās rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem. Tā kā nepāra viencipara skaitļu ir vairāk, tad melnajās rūtiņās jāizvieto skaitļi 1, 3, 5, 7 un 9, bet baltajās – skaitļi 2, 4, 6 un 8.



350. att.

Lai kāds nepāra skaitlis *n* atrastos vidējā rūtiņā, visām summām ar $n+2$, $n+4$, $n+6$, $n+8$ jābūt pirmskaitļiem. Apskatām visas iespējamās *n* vērtības:

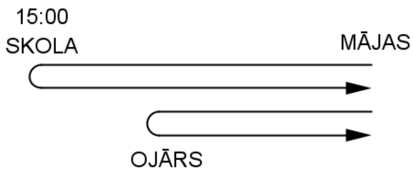
- ja $n=1$, tad $1+8=9$ – nav pirmskaitlis.
- ja $n=3$, tad $3+6=9$ – nav pirmskaitlis.
- ja $n=5$, tad $5+4=9$ – nav pirmskaitlis.
- ja $n=7$, tad $7+2=9$ – nav pirmskaitlis.
- ja $n=9$, tad $9+6=15$ – nav pirmskaitlis.

Iegūta pretruna ar sākotnējo pieņēmumu. Tātad tas ir aplams, un ir iespējams atrast tādas divas rūtiņas ar kopīgu malu, kurās ierakstīto skaitļu summa nav pirmskaitlis.

P2.1.4. Ojāra dzīve

Pirmklasniekam Ojāram katru dienu mācību stundas beidzas plkst. 15:00. Pie skolas viņu sagaida tētis, kurš katru dienu brauc no mājām uz skolu pakaļ dēlam. Kādu dienu Ojāram stundas beidzās 60 minūtes agrāk nekā parasti. Nesaticis tēti, viņš devās uz mājām ar kājām. Pa ceļam viņu ieraudzīja tētis, kurš, kā parasti, viņam brauca pakaļ uz skolu. Ojārs iekāpa mašīnā un viņi brauca uz mājām. Tur viņi nonāca 20 minūtes agrāk nekā parasti. Cik ilgi Ojārs bija gājis kājām?

Atrisinājums. Ojārs no skolas izgāja tieši 14:00. Tētis ar Ojāru mājās ieradās 20 minūtes agrāk nekā parasti. Šis laika ietaupījums radās tāpēc, ka tētis nenobrauca ceļu no vietas, kur satika Ojāru, līdz skolai un atpakaļ (skat. 351. att.). Tātad no vietas, kur tētis satika Ojāru, līdz skolai būtu jābrauc 10 minūtes. Tētis bija plānojis satikt Ojāru pie skolas tieši 15:00, tātad patiesībā viņš Ojāru satika 14:50. Tātad Ojārs gāja kājām tieši 50 minūtes.

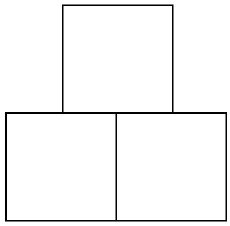


351. att.

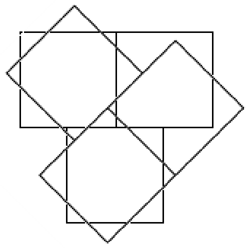
P2.1.5. Priecīgie kubiņi

Vai var novietot sešus vienādus kubus tā, lai katri divi no tiem saskartos ar skaldnes daļām? (Saskaršanās tikai ar šķautni vai virsotni netiek uzskatīta par saskaršanos.)

Atrisinājums. Jā, var. Novietojam trīs kubus tā, kā parādīts 352. att., kurā redzams skats no augšas (kubu pamatu skaldnes atrodas vienā plaknē). Izveidojam otru tādu pašu sistēmu un uzliekam virsū pirmajai, skat. 353. att., kurā redzams skats no augšas.



352. att.



353. att.

P2.1.6. Darba cilvēki

Četri dotie apgalvojumi attiecas uz strādnieku un viņa četriem palīgiem. Viens apgalvojums ir patiess, bet trīs – aplami. Kurš no vīriešiem ir strādnieks?

1. Juris ir strādnieks.
2. Zintis un Ģirts abi ir palīgi.
3. Harijs ir strādnieks.
4. Strādnieks ir vai nu Juris, vai Alvis, vai Ģirts.

Atrisinājums. Pēc kārtas par katru vīrieti pieņemsim, ka viņš ir strādnieks, un pārbaudīsim, vai izpildās uzdevuma nosacījumi.

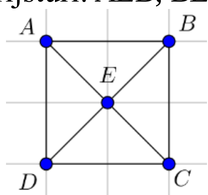
- Ja Juris ir strādnieks, tad 1., 2. un 4. apgalvojums ir patiess, bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad Juris nav strādnieks.
- Ja Harijs ir strādnieks, tad 2. un 3. apgalvojums ir patiess, bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad Harijs nav strādnieks.
- Ja Zintis ir strādnieks, tad visi četri apgalvojumi ir aplami, bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad Zintis nav strādnieks.
- Ja Alvis ir strādnieks, tad 2. un 4. apgalvojums ir patiess, bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad Alvis nav strādnieks.
- Ja Ģirts ir strādnieks, tad 1., 2. un 3. apgalvojums ir aplams, bet 4. apgalvojums ir patiess. Tas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

Tātad strādnieks ir Ģirts.

P2.1.7. Taisnleņķu ģeometrija

Atliec plaknē piecus punktus tā, lai šie punkti būtu vismaz astoņu taisnleņķa trijstūru virsotnes! Apzīmē punktus ar burtiem un uzraksti iegūtos taisnleņķa trijstūrus!

Atrisinājums. Kā plaknē atlikt piecus punktus, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, skat. 354. att. Iegūti astoņi taisnleņķa trijstūri: *AEB, BEC, CED, DEA, DAB, ABC, BCD, CDA.*



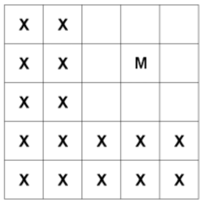
354. att.

P2.1.8. Mednieks Miķelis

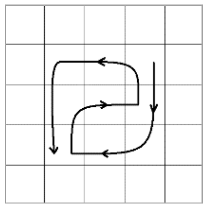
Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vienā rūtiņā atrodas kaķis Miķelis, otrā – pele. Kaķis Miķelis pārskata tikai tās rūtiņas, kam ar to rūtiņu, kurā viņš atrodas, ir kopīga mala vai stūris; pele pārskata visu kvadrātu. Gan Miķelis, gan pele ar vienu gājienu pārvietojas uz kādu no blakus rūtiņām (pa horizontāli vai pa vertikāli); gājienus izdara pēc kārtas.

Vai Miķelis var izvēlēties tādu kvadrāta apstaigāšanas plānu, lai noteikti ieraudzītu peli, lai kā arī tā censtos izvairīties?

Atrisinājums. Jā, Miķelis var izvēlēties tādu kvadrāta apstaigāšanas plānu, lai noteikti ieraudzītu peli. Apzīmējam Miķeli ar M un peli – ar P. Sākumā M jānokļūst 355. att. ar "M" atzīmētajā rūtiņā; ar „x" atzīmētas rūtiņas, kurās pēc sava atbildes gājiena var atrasties pele, ja Miķelis to neredz. Tālāk M veic tādus 12 gājienus, kā parādīts 356. att.

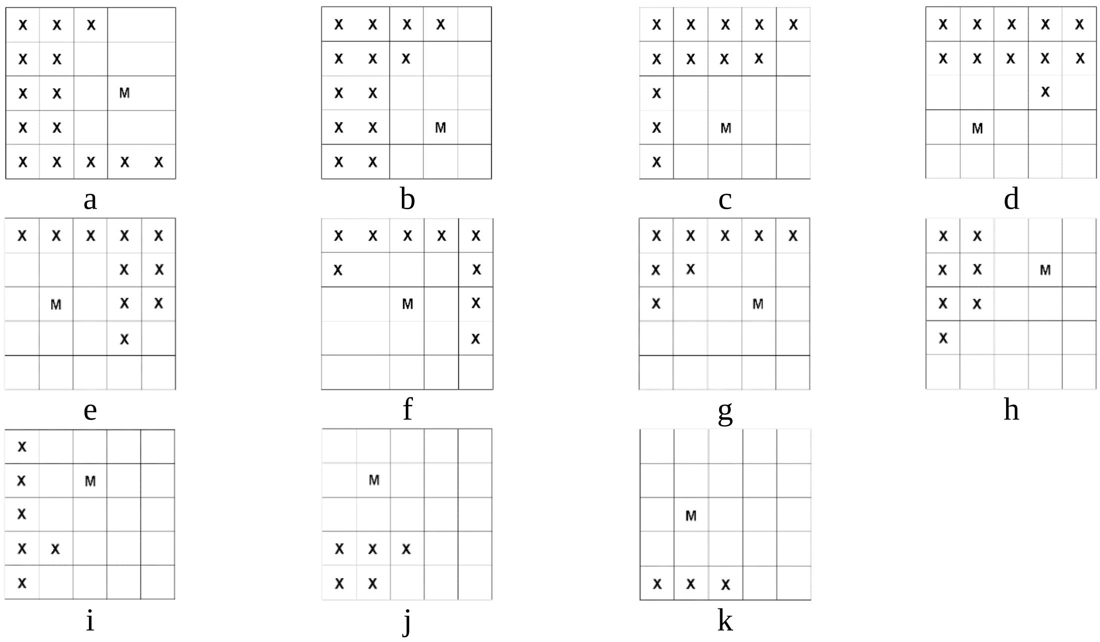


355. att.



356. att.

Rūtiņas, kurās var atrasties P pēc 1.-11. M gājiena, ja M viņu neredz, ir atzīmētas ar "x" atbilstoši 357. att. a) - k) zīmējumā (katra nākamā situācija tiek iegūta no iepriekšējās). Kā redzams, pēc sava 12. gājiena M ieraudzīs P.



357. att.

Piezīmes

- Šo risinājumu visērtāk pārbaudīt, izmantojot 1 baltu figūru (Miķeli) un 16 melnas figūras (iespējamās peles pozīcijas) uz šaha galdiņa ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Pēc katra M gājiena vispirms jānoņem tās melnās rūtiņas, kas attēlo P atrašanās vietas, kurās M to ieraudzītu. Pēc tam jāpievieno melnās figūras tajās Miķelim neredzamajās vietās, uz kurām P varētu ar savu atbildes gājienu aiziet no vēl nenoņemto melno figūru atrašanās vietām.
- Aplūkotais risinājums der arī gadījumos, kad P drīkst izlaist gājienu, paliekot uz vietas.
- Līdz šim vispārīgā gadījumā nav izanalizēta līdzīga spēle, proti, nav izpētīts, kādos gadījumos Miķelim pastāv uzvarošā stratēģija kvadrātā ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kurā Miķelis pārskata kvadrātu ar izmēriem $(2k+1)\times(2k+1)$, kura centrā viņš atrodas. (Mūsu apskatītajā gadījumā $n = 5$ un $k = 1$).

Otrā nodarbība

P2.2.1. Mānīgie uzraksti

Doti sviras svari un seši atsvari ar uzrakstiem: 1 g, 3 g, 4 g, 5 g, 7 g, 14 g. Tieši viens uzraksts neatbilst patiesībai. Kā ar trīs svēršanām atrast atsvaru ar nepatieso uzrakstu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka atsvaru ar nepatieso uzrakstu var atrast, piemēram, ar tabulā attēlotajām svēršanām.

	Pirmais svaru kauss	Otrais svaru kauss
1. svēršana	1 3	4
2. svēršana	1 7	3 5
3. svēršana	3 4	7

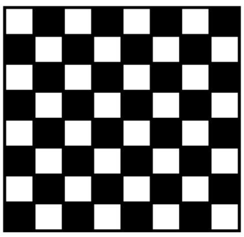
Ja nepatiesais uzraksts ir

- „1”, tad svaru kausi nav līdzsvarā 1. un 2. svēršanā;
- „3”, tad svaru kausi nav līdzsvarā 1., 2. un 3. svēršanā;
- „4”, tad svaru kausi nav līdzsvarā 1. un 3. svēršanā;
- „5”, tad svaru kausi nav līdzsvarā 2. svēršanā;
- „7”, tad svaru kausi nav līdzsvarā 2. un 3. svēršanā;
- „14”, tad svaru kausi ir līdzsvarā visās svēršanās.

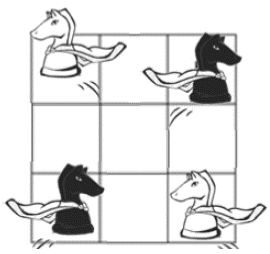
Tā kā svaru stāvoklis katrā no gadījumiem ir atšķirīgs, tad viennozīmīgi var noteikt, kurš atsvars ir ar nepatiesu uzrakstu.

P2.2.2. Lecošie zirdziņi

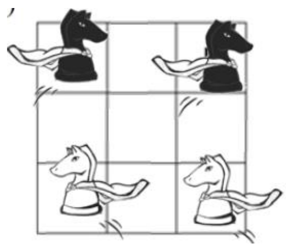
Kvadrātā ar izmēriem 3×3 lauciņi novietoti divi melni un divi balti šaha zirdziņi (skat. 358. att.). Vai pēc vairākiem gājieniem var izveidoties **a)** 359. att.; **b)** 360. att. redzamā situācija?



358. att.



359. att.

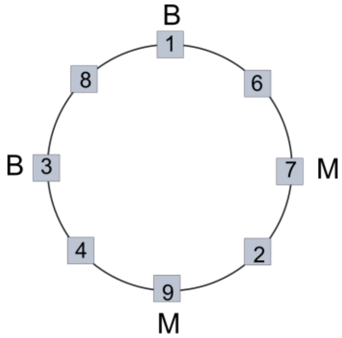


360. att.

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Sanumurējam lauciņus, kā parādīts 361. att. Neviens zirdziņš nevar pāriet uz 5. lauciņu, un no katra cita lauciņa var pāriet uz tieši diviem citiem lauciņiem. Uzzīmējot lauciņus „pa apli” (skat. 362. att.) tā, ka blakus atrodas tie lauciņi, uz kuriem var pāriet ar vienu gājienu, ievērojam, ka zirdziņi ar vienu gājienu var pārvietoties pa šo apli tikai par vienu pozīciju pa labi vai pa kreisi. Tātad zirdziņu secība pa apli nemainās, tas ir, starp diviem baltiem zirdziņiem neatrodas neviens melnais (vai atrodas divi melni). Ja izdotos iegūt uzdevumā prasīto situāciju, tad baltie zirdziņi atrastos 1. un 9. lauciņā, bet melnie – 3. un 7. lauciņā, tas ir, starp baltajiem zirdziņiem atrastos tieši viens melnais zirdziņš, bet tā nevar būt.

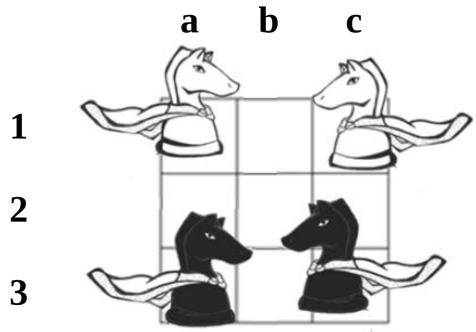
1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

361. att.



362. att.

b) Jā, var. Gar vienu šaha galdiņa malu uzrakstām burtus, gar otru – ciparus (skat. 363. att.).



363. att.

Zirdziņa pārvietošanu, piemēram, no lauciņa c1 uz lauciņu b3, apzīmējam ar c1 → b3.

Lai samainītu vietām baltos un melnos šaha zirdziņus, secīgi jāizdara šādi gājieni:

- c1 → b3, **a3 → b1**, a1 → c2, **c3 → a2** (skat. 364. att.),
- b3 → a1, **b1 → c3**, c2 → a3, **a2 → c1** (skat. 365. att.),
- a1 → c2, **c3 → a2**, a3 → b1, **c1 → b3** (skat. 366. att.),
- c2 → a3, **a2 → c1**, b1 → c3, **b3 → a1** (skat. 367. att.).

	M	
M		B
	B	

364. att.

B		M
B		M

365. att.

	B	
M		B
	M	

366. att.

M		M
B		B

367. att.

P2.2.3. Pētnieks Miķelis

Kādu dienu kaķis Miķelis, pētot ar mikroskopu savu tukšo piena trauciņu, ievēroja, ka plkst. 15:00 trauciņā iekrita 1 baktērija. Tā sāka veidot koloniju, kurā katru minūti katra baktērija sadalās divās baktērijās. Pēc 43 minūtēm viņa trauciņš bija līdz pusei pilns ar baktērijām. Cikos Miķeļa piena trauciņš būs pilns ar baktērijām?

Atrisinājums. Tā kā katrā minūtē katra baktērija sadalās tieši divās baktērijās, tad pēc 44 minūtēm trauciņā būs divreiz vairāk baktēriju nekā pēc 43 minūtēm. Tā kā pēc 43 minūtēm trauciņš bija līdz pusei pilns, tātad pēc 44 minūtēm tas būs pilns ar baktērijām, un tas notiks tieši plkst. 15:44.

P2.2.4. Burkānu raža

Pirmajā vagā aug 15 burkāni, otrajā – 20 burkāni. Ar vienu gājienu no vienas vagas var izraut vai nu 1, vai 2 vai 3 burkānus. Uzvar tas no diviem spēlētājiem, kurš izrauj pēdējo burkānu. Kurš, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt? Gājienus spēlētāji izdara pamīšus – viens, pēc tam otrs utt.

Atrisinājums. Spēlētāju, kas izdara pirmo gājienu, nosauksim par A, bet otro spēlētāju – par B.

Pareizi spēlējot, uzvar A. Viņa stratēģija var būt šāda:

- pirmajā gājienā A izrauj 3 burkānus no vagas, kurā ir 15 burkāni;
- katrā nākamajā gājienā A izrauj $4 - x$ burkānus no tās pašas vagas, no kuras x burkānus ir izrāvis B savā iepriekšējā gājienā (A to vienmēr varēs izdarīt, jo iespējamās x vērtības ir 1, 2 vai 3, tad A var attiecīgi izraut 3, 2 vai 1 burkānu).

Pamatosim, ka šī stratēģija garantē spēlētāja A uzvaru. Pēc A pirmā gājiena vagās būs palikuši attiecīgi 12 un 20 burkāni. Ievērojam, ka abi šie skaitļi dalās ar 4, tātad pēc katra A gājiena burkānu skaits katrā no vagām dalīsies ar 4, bet pēc katra B gājiena burkānu skaits tieši vienā vagā nedalīsies ar 4. Līdz ar to situācija, kad abās vagās ir 0 burkānu, būs sasniedzama tikai pēc A gājiena.

P2.2.5. Gliemežu sistēma

Kādā gliemežu karaļvalstī lieto dīvainu skaitļu pieraksta sistēmu: ciparu 9 viņi apzīmē ar 0, ciparu 8 – ar 1, ciparu 7 – ar 2 utt. Ar ko gliemežu pierakstā vienāda viņu rakstītā izteiksme 837+742?

Atrisinājums. Tabulā dots, ar ko ir vienāds katrs cipars gliemežu karaļvalstī.

Parasti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gliemežu karaļvalstī	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tātad dotā izteiksme 837 + 742 ārpus gliemežu karaļvalsts ir uzrakstāma kā 162 + 257. Saskaitot iegūstam 162 + 257 = 419, bet gliemežu pierakstā izteiksmes vērtība ir 580.

P2.2.6. Starpbrīdis

Starpbrīdī Andris risināja piemēru un nonāca līdz daļai $\frac{16}{64}$, kurā viņš nepareizi saīsināja ciparu 6 skaitītājā un saucējā, tomēr ieguva pareizu rezultātu: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$. Juris kļūdu pamanīja un jau gribēja par savu skolas biedru pasmieties, taču Andris ļoti veikli atrisināja situāciju, piedāvājot viņam uzdevumu: atrast visas daļas, kam skaitītājs un saucējs ir divciparu skaitlis un kam piemīt uzdevumā aprakstītā īpašība, tas ir, daļas skaitītājam nosvītrojot pēdējo ciparu un saucējam – pirmo, iegūst patiesu vienādību. Pamēģini šo uzdevumu atrisināt arī tu!

Atrisinājums. Uzdevumā doto daļu apzīmējam ar $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$. Uzrakstām uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu:

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c};$$
$$(10a+b)c=a(10b+c);$$
$$10ac+bc=10ab+ac;$$
$$10a(c-b)=c(a-b). \qquad (*)$$

Ievērojam, ka $a \neq 0$ un $b \neq 0$, jo tad skaitītājā un saucējā nebūtu divciparu skaitļi. Arī $c \neq 0$, jo tad daļai $\frac{a}{c}$ nav jēgas.

Vienādojuma (*) kreisās puses izteiksme dalās ar 10, tāpēc arī labās puses izteiksmei $c(a-b)$ jādalās ar 10. Ievērojot, ka $c \neq 0$, $c<10$ un $|a-b|<10$, apskatīsim visus iespējamos gadījumus.

- Ja $(a-b)$ dalās ar 10, tad $a-b=0$ jeb $a=b$. Tas nozīmē, ka vienādojuma (*) labās puses izteiksme ir vienāda ar 0, tātad arī kreisās puses izteiksmei jābūt vienādai ar 0, līdz ar to $c-b=0$ jeb $c=b$. Esam ieguvuši, ka der atrisinājums $c=b=a$, tas ir, daļas $\frac{11}{11}; \frac{22}{22}; \frac{33}{33}; \frac{44}{44}; \frac{55}{55}; \frac{66}{66}; \frac{77}{77}; \frac{88}{88}; \frac{99}{99}$.
- Ja c dalās ar 2 jeb $c=2k$, kur $k=1; 2; 3; 4$, un $a-b$ dalās ar 5, tad iespējami divi gadījumi.
  - Ja $a-b=5$, tad no (*) iegūstam, ka $10a(2k-b)=2k \cdot 5$ jeb
  $$a(2k-b)=k.$$
  Tā kā $b=a-5$, tad $a>5$ un pēdējā vienādojuma kreisās puses vērtība pēc moduļa ir lielāka nekā labās puses vērtība. Tas nozīmē, ka atrisinājuma nav.
  - Ja $a-b=-5$, tad no (*) iegūstam, ka $a(2k-b)=-k$. Tā kā $b=a+5$, tad
  $$a(2k-a-5)=-k.$$

Ievērojot, ka $b \le 9$, iegūstam $1 \le a \le 4$. Ievietojot šīs a vērtības pēdējā vienādojumā, iegūstam, ka der tikai $a = 1$, tad $k = 2$, vai $a = 4$, tad $k = 4$ ($a = 2$ un $a = 3$ neder, jo tad k nav vesels skaitlis). Esam ieguvuši, ka der daļas $\frac{16}{64}$ un $\frac{49}{98}$.

- Ja c dalās ar 5 jeb $c = 5$, un $(a - b)$ dalās ar 2 jeb $a - b = 2m$, kur $m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$, tad no (*) iegūstam $10a(5 - b) = 5 \cdot 2m$ jeb $a(5 - b) = m$, kurā ievietojot $a = 2m + b$, iegūstam
$$(2m + b)(5 - b) = m .$$
Apskatīsim visus iespējamos gadījumus.
  - Ja $m > 0$, tad $2m + b > m$ un atrisinājuma nav.
  - Ja $m = -1$, tad $(b - 2)(5 - b) = -1$ un atrisinājuma nav.
  - Ja $m = -2$, tad $(b - 4)(5 - b) = -2$ ir atrisinājums $b = 6$, un tādā gadījumā $a = 2$ un $c = 5$ (vērtība $b = 3$ neder, jo tad a ir negatīvs). Esam ieguvuši, ka der daļa $\frac{26}{65}$.
  - Ja $m = -3$, tad $(b - 6)(b - 5) = 3$ un atrisinājuma nav.
  - Ja $m = -4$, tad $(b - 8)(b - 5) = 4$ ir atrisinājums $b = 9$, un tādā gadījumā $a = 1$ un $c = 5$ (vērtība $b = 4$ neder, jo tad a ir negatīvs). Esam ieguvuši, ka der daļa $\frac{19}{95}$.

Tātad visas iespējamās daļas, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir $\frac{11}{11}; \frac{22}{22}; \frac{33}{33}; \frac{44}{44}; \frac{55}{55}; \frac{66}{66}; \frac{77}{77}; \frac{88}{88}; \frac{99}{99}; \frac{16}{64}; \frac{49}{98}; \frac{26}{65}; \frac{19}{95}$.

P2.2.7. Laimīgais negadījums

Fermerim piederēja 40 kg smags akmens. Viņš šo akmeni izmantoja kā atsvaru sviras svaros, lai svērtu siena ķīpas. Taču kādu dienu fermeris savu akmeni aizdeva draugam, kurš to nometa un saplēsa 4 daļās. Tā vietā, lai dusmotos, fermeris, kā par brīnumu, pat bija ļoti priecīgs. Viņš saka draugam: “Tev izdevās manu akmeni saplēst tieši tādās četrās daļās, lai es tagad uz saviem sviras svariem varētu nosvērt jebkuru masu veselos kilogramos no 1 līdz 40.” Parādi vienu piemēru, kāda var būt masa daļām, kādās akmens tika saplēsts?

Atrisinājums. Masa daļām, kādās tika saplēsts akmens, var būt 1, 3, 9 un 27 kg. Tabulā parādīts, kā ar šādiem četriem atsvariem var nosvērt jebkuru masu veselos kilogramos no 1 līdz 40.

m	Viens kauss	Otrs kauss	m	Viens kauss	Otrs kauss	m	Viens kauss	Otrs kauss
1	m	1	15	3; 9; m	27	29	1; m	3; 27
2	1; m	3	16	3; 9; m	1; 27	30	m	3; 27
3	m	3	17	1; 9; m	27	31	m	1; 3; 27
4	m	1; 3	18	9; m	27	32	1; 3; m	9; 27
5	1; 3; m	9	19	9; m	1; 27	33	3; m	9; 27
6	3; m	9	20	1; 9; m	3; 27	34	3; m	1; 9; 27
7	3; m	1; 9	21	9; m	3; 27	35	1; m	9; 27
8	1; m	9	22	9; m	1; 3; 27	36	m	9; 27
9	m	9	23	1; 3; m	27	37	m	1; 9; 27
10	m	1; 9	24	3; m	27	38	1; m	3; 9; 27
11	1; m	3; 9	25	3; m	1; 27	39	m	3; 9; 27
12	m	3; 9	26	1; m	27	40	m	1; 3; 9; 27
13	m	1; 3; 9	27	m	27			
14	1; 3; 9; m	27	28	m	1; 27			

P2.2.8. Atrodi skaitli!

Apzīmēsim $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ un $a! = a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (izņēmums ir $0! = 1$; $a!$ sauc par skaitļa a faktoriālu). Atrodi visus tādus trīsciparu skaitļus, kam izpildās $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka *a, b* un *c* ir mazāki nekā 7, jo $7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$ jau ir četrciparu skaitlis. Ne *a*, ne *b*, ne *c* nevar būt 6, jo $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$ un tad skaitļa $\overline{abc}$ cipars *a* būtu vismaz 7, bet iepriekš pamatojām, ka $a < 7$.

Vismaz vienam no cipariem jābūt 5, jo pretējā gadījumā trīs faktoriālu summa nebūs trīsciparu skaitlis (jo $4! = 24$). Ievērojam, ka $a \neq 5$, jo $5! + b! + c! = 120 + b! + c! < \overline{5bc}$. Nevar būt, ka gan $b = 5$, gan $c = 5$, jo tad nevar atrast tādu *a*, ka $a! + 5! + 5! = a! + 240 = \overline{a55}$. Tā kā tieši viens no skaitļiem *a, b, c* ir 5 un abi pārējie ir mazāki nekā 5, tad $\overline{abc} \leq 5! + 4! + 4! = 120 + 24 + 24 = 168$ un tātad $a = 1$. Atliek pārbaudīt divus gadījumus: vai nu $b = 5$, vai $c = 5$. Ja $b = 5$, tad nevar atrast tādu *c*, ka $\overline{15c} = 1! + 5! + c! = 121 + c!$. Savukārt, ja $c = 5$, tad $\overline{1b5} = 1! + b! + 5!$ jeb $\overline{1b5} = 120 + b!$, no kā iegūstam, ka $b = 4$.

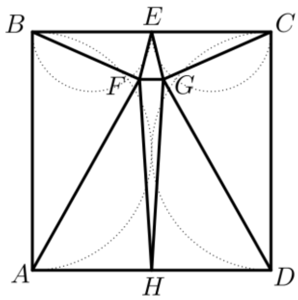
Līdz ar to vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 145.

Trešā nodarbība

P2.3.1. Kvadrāta griešana

Vai kvadrātu var sagriezt šaurleņķu trijstūros? *Atbildi pamato!*

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, 368. att.



368. att.

Kvadrāta katra leņķa lielums ir $90°$, tātad visi leņķi $\angle HAF$, $\angle FAB$, $\angle ABF$, $\angle FBE$, $\angle ECG$, $\angle GCD$, $\angle CDG$, $\angle GDH$ ir šauri. Leņķi $\angle AFB$, $\angle BFE$, $\angle EGC$, $\angle CGD$ ir šauri, jo to virsotne atrodas ārpus riņķa, uz kura diametra tie balstās. Leņķi $\angle EFG$, $\angle EGF$, $\angle HFG$, $\angle HGF$ ir šauri, jo vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata var būt tikai šauri.

Piezīme. Var pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt 8; 9; 10; 11; … šaurleņķu trijstūros , bet nevar – 2; 3; 4; 5; 6 vai 7 šaurleņķu trijstūros. Pie tam 9 trijstūrus iespējams iegūt tikai tad, ja vismaz viena dalījuma trijstūra virsotne atrodas cita trijstūra malas iekšējā punktā.

P2.3.2. Pūķu dārgumi

Slepenajā pūķu kambarī, pie kura durvīm guļ četri pūķi, glabājas dārgumi. Kambaris ir aizslēgts ar vairākām piekaramajām atslēgām. Katrs pūķis sargā dažas atslēgas. Zināms, ka ar nekādu divu pūķu atslēgu saišķiem nepietiktu, lai kambari atslēgtu, taču ar jebkuru trīs pūķu atslēgu saišķiem to var izdarīt. Kāds ir mazākais atslēgu skaits, kas nepieciešams, lai realizētos uzdevumā aprakstītais?

Atrisinājums. Mazākais piekaramo atslēgu skaits ir 6. Apzīmējam tās ar *A, B, C, D, E, F* un izsniegsim pūķiem šādus atslēgu komplektus:

- *A, B, C*;
- *A, D, E*;
- *B, D, F*;
- *C, E, F*.

Viegli pārbaudīt, ka nekādiem diviem pūķiem nav visu atslēgu (katriem diviem pūķiem ir tieši viena kopīga atslēga), bet jebkuriem trīs ir visas atslēgas.

Pierādīsim, ka ar piecām atslēgām nepietiek. Apzīmēsim četrus pūķus ar x_1, x_2, x_3, x_4. No tiem var izveidot sešus dažādus pārus: x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4. Tā kā neviens pūķu pāris nevar atslēgt kambari, tad ir atslēga, kuras nav nevienam pūķim no pāra; šādu atslēgu sauksim par šī pāra *ilgoto* atslēgu. Ja mēs pierādīsim, ka visām sešām *ilgotajām* atslēgām jābūt dažādām, tad būs pierādīts, ka nepieciešamas vismaz sešas atslēgas.

Pieņemsim, ka ir divi pūķu pāri, kuriem ir viena un tā pati *ilgotā* atslēga. Pastāv divas iespējas:

- ja šajos pāros nav neviens kopīgs pūķis, tad nevienam pūķim nav abu pāru kopīgās *ilgotās* atslēgas, un viņi nevar atslēgt seifu pat salasījušies visi četri kopā (pretruna ar doto);
- ja šajos pāros ir viens kopīgs pūķis, tad šie trīs pūķi pat salasījušies kopā nevar atslēgt seifu (pretruna ar doto).

Esam pierādījuši, ka visu pāru *ilgotās* atslēgas ir dažādas, tātad ir vismaz sešas dažādas atslēgas.

P2.3.3. Vecā Zane

Zanei pašreiz ir divas reizes vairāk gadu nekā Aigaram. Pēc kāda laika viņai būs trīs reizes vairāk gadu nekā Aigaram. Cik gadu tagad ir Zanei?

Atrisinājums. Aigara gadu skaitu apzīmējam ar *n*. Tad Zanei šobrīd ir 2*n* gadi un pēc kāda laika viņai paliks $2n+1$ gads. Tad no uzdevuma nosacījumiem iegūstam, ka $2n+1=3n$ jeb $n=1$. Tātad Aigaram šobrīd ir 1 gads un Zanei ir 2 gadi. Pēc kāda laika Zanei būs dzimšanas diena (agrāk nekā Aigaram) un viņai paliks 3 gadi. Tātad Zanei šobrīd ir 2 reizes vairāk gadu, bet pēc dzimšanas dienas viņai būs 3 reizes vairāk gadu nekā Aigaram.

P2.3.4. Sapnis

Andris nosapņoja divus īpašus veselus skaitļus *A* un *B*, kuriem izpildās šādas īpašības:

- *A* reizinot ar *A*, iegūst skaitli *B*;
- *A* un *B* pierakstā kopā ir izmantoti visi deviņi nenulles cipari, katrs tieši vienu reizi.

Vai Andra nosapņotie skaitļi eksistē?

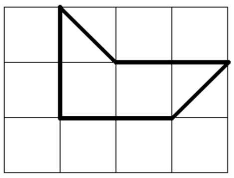
Atrisinājums. Jā, šādi skaitļi eksistē, Piemēram, der $A=567$ un $B=321489$, jo $A\cdot A=567\cdot 567=321489$ un to pierakstā kopā ir izmantoti visi deviņi nenulles cipari, katrs tieši vienu reizi.

Piezīme. Meklējot skaitli, var izmantot šādus apsvērumus:

- ja *A* un *B* kopā satur deviņus ciparus, tad tas iespējams tikai tad, ja *A* ir trīsciparu skaitlis un *B* ir sešciparu skaitlis;
- lai *B* būtu sešciparu skaitlis, tad skaitļa *A* pirmajam ciparam jābūt vismaz 3;
- skaitļa *A* pēdējais cipars nevar būt 1; 5; 6, jo tad arī *B* pēdējais cipar būs tāds pats un cipari atkārtosies;
- tā kā neviena naturāla skaitļa kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 2; 3; 7; 8, tad tāds nevar būt arī skaitļa *B* pēdējais cipars.

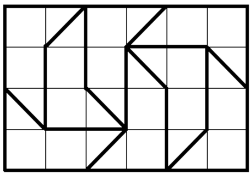
P2.3.5. Kuģītis

Vai no astoņām 369. att. redzamajām figūrām var salikt taisnstūri?



369. att.

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, 370. att.



370. att.

P2.3.6. Miķeļa grīda

Kaķa Miķeļa virtuvē ir grīda, kas sastāv no 4×4 kvadrātveida flīzēm, kas saliktas kā rūtiņu tīkls. Viņš izdomāja lēkāt tikai par 2 vai 3 rūtiņām (Miķelis var aizlekt gan 2, gan 3 rūtiņas uz priekšu) horizontālā vai vertikālā virzienā. Vai Miķelis var apstaigāt grīdu, uz katras flīzes nonākot tieši vienu reizi un beigās atgriežoties uz sākuma flīzes?

Atrisinājums. Jā, var, iespējamo gājienu secību skat. 371. att.

5	11	6	12
1	15	2	16
8	10	7	9
4	14	3	13

371. att.

P2.3.7. Starpbrīdis

Paula uz plakāta uzzīmēja skaitļu tabulu ar n rindām un m kolonnām. Tabulas rūtiņās viņa ierakstīja naturālus skaitļus no 1 līdz $n \cdot m$ (katrā rūtiņā vienu skaitli) augošā secībā pa rindiņām, sākot ar pirmo (skat. piemēru 372. att., ja $n = 2$ un $m = 4$). Diemžēl Ģirts netīšām uzgāza uz plakāta tintes pudelīti tā, ka vairs nevar redzēt nevienu skaitli. Paula atcerējās, ka skaitlis 20 bija ierakstīts trešajā rindā, skaitlis 41 – piektajā rindā, bet skaitlis 103 – pēdējā rindā. Paula bija bēdīga, bet Ģirts apsolīja starpbrīža laikā izdomāt, kādi bija tabulas izmēri. Palīdzi Ģirtam atrast n un m vērtības!

1	2	3	4
5	6	7	8

372. att.

Atrisinājums. Izmantojot uzdevumā doto, izveidosim tabulu, skat. 373. att.

1	2	…	m
$m+1$	…	…	$2m$
…	…	…	$3m$
…	…	…	$4m$
…	…	…	$5m$
…	…	…	…
…	…	…	$(n-1) \cdot m$
…	…	…	$n \cdot m$

373. att.

Uzdevuma nosacījumu, ka skaitlis 20 atrodas tabulas trešajā rindā, var aprakstīt ar nevienādību $2m < 20$. No tā izriet, ka $m < 10$, turklāt tā kā m ir naturāls skaitlis, tad

$$m \le 9. \quad (1)$$

Nosacījumu, ka skaitlis 41 atrodas tabulas piektajā rindā, var aprakstīt ar nevienādību $41 \le 5m$. No tā izriet, ka $m \ge 8{,}2$, turklāt tā kā m ir naturāls skaitlis, tad

$$m \ge 9. \quad (2)$$

Tā kā ir jāizpildās gan nevienādībai (1), gan (2), varam secināt, ka $m = 9$.

Nosacījumu, ka skaitlis 103 atrodas tabulas pēdējā (n-tajā) rindā, var aprakstīt ar nevienādību $(n-1)m < 103 \le nm$. Ievietojot $m = 9$, iegūstam $9(n-1) < 103 \le 9n$, no kā izriet, ka $n \le 12$ un $n > 11$. Tā kā n ir naturāls skaitlis, tad ir tikai viena iespēja, ka $n = 12$. Tātad dotajā tabulā ir 12 rindas un 9 kolonnas.

P2.3.8. Apdzīvotā sala

Iedomājies, ka tu esi nonācis uz kādas salas Karību jūrā. To, kā par brīnumu, apdzīvo cilvēki, kas vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Tu zini, ka viņu valodā „nao" un „sim" nozīmē „jā" un „nē", bet nezini, kurš no šiem vārdiem nozīmē „jā" un kurš – „nē". Kā, satiekot nepazīstamu salas iedzīvotāju un uzdodot tam vienu jautājumu, panākt lai viņš atbild tikai „sim"?

Atrisinājums. Viens no iespējamajiem jautājumiem: „Ja pareizā atbilde uz kādu jautājumu ir „nao", tad ko uz šādu jautājumu atbildētu salas iedzīvotājs, kas nav tavs *ciltsbrālis*?" (Ar *ciltsbrāli* melim saprotam citu meli, bet patiesības teicējam – citu patiesības teicēju.)

Ja satiktais salas iedzīvotājs būtu melis, tad viņš atbildētu "sim", jo zina, ka patiesības teicējs īstenībā teiktu "nao", bet viņam ir jāmelo par to, ko teiktu patiesības teicējs (skat. tabulā).

Ja satiktais salas iedzīvotājs būtu patiesības teicējs, tad viņš atbildētu "sim", jo zina, ka melis melotu par to, ka īstenībā patiesības teicējs teiktu "nao" (skat. tabulā).

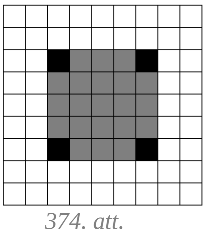
	Ko atbildētu patiesības teicējs?	Ko atbildētu melis?
Pareizā atbilde uz kādu jautājumu ir "nao"	nao	sim
Ko uz tādu jautājumu atbildētu salas iedzīvotājs, kas nav tavs *ciltsbrālis*?	**sim**	**sim**

Ceturtā nodarbība

P2.4.1. Saskaiti rūtiņas!

Dots kvadrāts 9×9 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis 1. Vienā gājienā var izvēlēties 4×4 rūtiņu lielu kvadrātu un katram tajā esošajam skaitlim pieskaitīt 1. Pierādīt, ka pēc 96. gājiena varēs atrast 5×5 rūtiņas lielu kvadrātu, kura četrās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būs tieši 100.

Atrisinājums. Meklētais kvadrāts redzams 374. att.



374. att.

Ievērosim, ka katrs gājiens (vieninieka pieskaitīšana skaitļiem kādā 4×4 rūtiņu kvadrātā) iekļauj tieši vienu no pelēkā kvadrāta stūra rūtiņām. Tātad pēc 96 gājieniem šajās četrās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa palielināsies par 96, tātad kļūs vienāda ar $4 + 96 = 100$.

P2.4.2. Pie ugunskura

Ap ugunskuru sēž Ritvars, Sindija un Ivars. Ritvars nolemj spēlēt tradicionālo ugunskura spēli un saka: „Es iedomājos divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus.” Vienu no šiem skaitļiem viņš iečukst ausī Sindijai, bet otru – Ivaram. Tad starp abiem bērniem norisinās tālāk aprakstītā saruna.

Sindija: „Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”
Ivars: „Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”
Sindija: „ Tagad es zinu, kādi ir iedomātie skaitļi!”

Kādus skaitļus varēja iedomāties Ritvars?

Piezīme. Visi izteiktie apgalvojumi ir patiesi.

Atrisinājums. Pēc Sindijas pirmā apgalvojuma ir skaidrs, ka Sindijai pateiktais skaitlis nav 1. Pretējā gadījumā Sindijas apgalvojums būtu aplams, jo, zinot, ka skaitļi ir viens otram sekojoši, viņa konstatētu, ka tie ir 1 un 2, taču pēc dotā visi izteiktie apgalvojumi ir patiesi.

Līdzīgi spriežot, secinām, ka arī Ivaram nav pateikts skaitlis 1, turklāt pēc Sindijas pirmā apgalvojuma Ivars zina, ka Sindijai nav pateikts skaitlis 1. Tā kā arī Ivara apgalvojums ir patiess, tad Ivaram nevar būt pateikts skaitlis 2. Tiešām, ja Ivaram būtu pateikts 2, tad viņš, zinot, ka Sindijai nav pateikts 1, varētu pateikt abus skaitļus – 2 un 3.

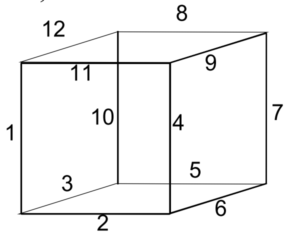
Tātad pēc pirmajiem diviem apgalvojumiem Sindija zina, ka Ivaram nav pateikts ne 1, ne 2. Tā kā tagad Sindija apgalvo, ka viņa zina pateiktos skaitļus, tad Sindijai var būt pateikts vai nu 2 (tad Ivaram ir pateikts 3), vai 3 (tad Ivaram ir pateikts 4). Sindija nevarētu šādi apgalvot, ja viņas skaitlis būtu 4, jo tad būtu jāšaubās starp skaitļu pāriem (3; 4) un (4; 5); līdzīgas šaubas rastos, ja Sindijai būtu pateikts skaitlis, kas lielāks nekā 4.

Līdz ar to Ritvars varēja iedomāties vai nu skaitļus 2 un 3, vai skaitļus 3 un 4.

P2.4.3. Alternatīvās skudras

Astoņas skudras uzbūvēja pūzni kuba formā. Pašas skudras dzīvo kuba virsotnēs (katrā virsotnē viena skudra), bet ceļi starp skudru mājām ir izbūvēti kuba šķautņu vietā (tātad no katras skudras mājas iziet 3 ceļi). Vai uz katra no 12 ceļiem var uzlikt atšķirīgu skaitu oliņu no 1 līdz 12 tā, lai uz trīs ceļiem, kas iziet no katras skudras mājas, kopā esošo oliņu skaits dalītos ar 3?

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, 375. att.



375. att.

Piezīme. Uzdevumu var palīdzēt atrisināt tālāk aprakstītie spriedumi.

Par *ligzdu* sauksim oliņu grupu, kas uzdevumā ir jāsavieto uz kuba šķautnēm (tātad tās ir oliņu grupas, kas satur 1, 2, ..., 11 vai 12 oliņas). Sadalīsim *ligzdas* 3 grupās:

- pirmajā grupā būs tādas *ligzdas*, kuru oliņu skaits dalās ar 3, tas ir, *ligzdas* ar 3; 6; 9; 12 oliņām;
- otrajā – tādas *ligzdas*, kuru oliņu skaits, dalot ar 3, dod atlikumā 1, tas ir, *ligzdas* ar 1; 4; 7; 10 oliņām;
- trešajā – tāds *ligzdas*, kuru oliņu skaits, dalot ar 3, dod atlikumā 2, tas ir, *ligzdas* ar 2; 5; 8; 11 oliņām.

Vispārīgā veidā pirmās grupas *ligzdās* esošo oliņu skaitu var uzrakstīt formā $3k$, otrās – formā $3n+1$, bet trešās – formā $3m+2$, kur *k*, *n* un *m* ir veseli skaitļi. Ņemot pa vienai *ligzdai* no katras grupas un saskaitot kopā tajās esošās oliņas, iegūstam $3k+(3n+1)+(3m+2)=3k+3n+3m+3=3(k+n+m+1)$. Šis skaitlis dalās ar 3.

Lai izpildītu uzdevuma nosacījumu, uz visām četrām šķautnēm, kas ir savstarpēji paralēlas, liksim oliņu skaitu no vienas *ligzdu* grupas. Tad uz šķautnēm, kas iziet no vienas virsotnes būs pa vienai *ligzdai* no katras aprakstītās grupas un oliņu summa dalīsies ar 3.

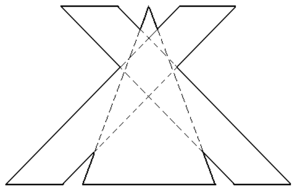
(Dotais risinājums ir tikai viens no iespējamiem. Var būt risinājumi, kas balstīti uz pavisam citām idejām.)

P2.4.4. Dīvainais daudzstūris

Vai eksistē tāds 17-stūris, kuram uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas vēl vismaz viena cita šī 17-stūra mala?

Piezīme. Mala atrodas uz taisnes, ja visi šīs malas punkti atrodas uz taisnes.

Atrisinājums. Jā, tāds 17-stūris eksistē, skat., piemēram, 376. att.



376. att.

Piezīme. Var pierādīt, ka neeksistē tāds 13-stūris, kas apmierinātu uzdevuma nosacījumus, un ka katram $n \geq 14$ eksistē n-stūris, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

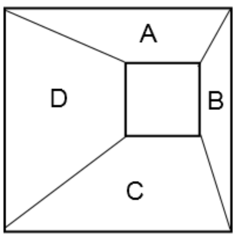
P2.4.5. Starpbrīdis

Skolotāja apgalvo, ka mājās viņa izdomājusi četrciparu skaitli ar šādu īpašību: ja skaitļa pēdējo ciparu pārceļ uz skaitļa sākumu, tad iegūst četrciparu skaitli, kas ir 6 reizes mazāks nekā sākotnējais skaitlis. Gandrīz visi skolēni noticēja un aizgāja pusdienās, bet Juris un Andris palika rēķinot. Palīdzi puišiem noskaidrot, vai skolotāja saka taisnību!

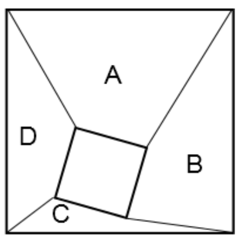
Atrisinājums. Nē, skolotāja nevarēja izdomāt šādu skaitli. Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Apzīmēsim sākotnējo četrciparu skaitli ar a, bet iegūto četrciparu skaitli ar b. Tādā gadījumā $6b=a$. Tā kā a dalās ar 6; tad a ir pāra skaitlis. Tātad a pēdējais cipars ir pāra cipars. Tas nevar būt 0, jo tad b nebūtu četrciparu skaitlis. Tātad skaitļa a pēdējā cipara mazākā iespējamā vērtība ir 2 un arī b pirmais cipars ir vismaz 2. Pat tādā gadījumā, ja četrciparu skaitļa pirmais cipars ir mazākais iespējamais, tas ir, četrciparu skaitlis ir $\overline{2xyz}$ un to reizina ar 6 (reizinājums ir skaitlis a), jau iegūst piecciparu skaitli, bet a ir četrciparu skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu.

P2.4.6. Divi kvadrāti plaknē

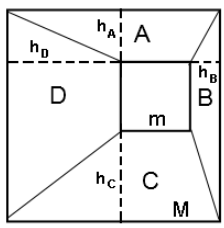
Doti divi kvadrāti, kuru attiecīgās malas **a)** ir paralēlas (skat. 377. att.); **b)** nav paralēlas (skat. 378. att.). Pierādīt, ka katrā no dotajiem gadījumiem starp laukumiem *A, B, C, D* pastāv šāda sakarība: $A+C=B+D$.



377. att.



378. att.



379. att.

Atrisinājums. a) Figūras, kuru laukumi ir *A*, *B*, *C* un *D*, ir trapeces, kuru attiecīgie pamati ir vienādi, jo tie ir lielā un mazā kvadrāta malas. Trapeces laukums ir vienāds ar tās pamatu garumu pussummas un augstuma reizinājumu. Apzīmēsim doto kvadrātu malas ar *M* un *m*, bet trapeču augstumus ar h_A, h_B, h_C un h_D (skat. 379. att.).

Tad trapeču laukumi $A=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_A$; $B=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_B$; $C=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_C$; $D=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_D$. Saskaitot $A+C$ un $B+D$, iegūstam

$$A+C=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_A+\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_C=\frac{1}{2}(m+M)\cdot(h_A+h_C);$$

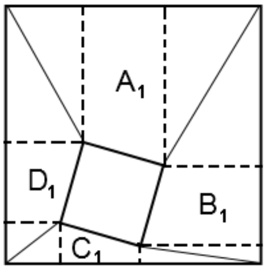
$$B+D=\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_B+\frac{1}{2}(m+M)\cdot h_D=\frac{1}{2}(m+M)\cdot(h_B+h_D).$$

Tā kā $h_A+h_C=M-m$ (kvadrātu malu starpība) un arī $h_B+h_D=M-m$, tad trapeču *A* un *C* laukumu summa vienāda ar trapeču *B* un *D* laukumu summu jeb $A+C=B+D$.

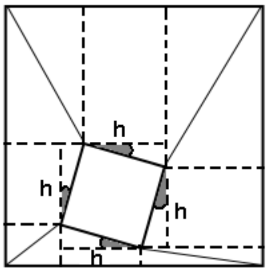
b) Sadalām doto figūru tā, kā parādīts 380. att., kur pie katras lielā kvadrāta virsotnes atrodas divi taisnleņķa trijstūri. Tā kā iegūtie taisnleņķa trijstūri ir pa pāriem vienādi, tad pietiek pierādīt, ka pie pretējām lielā kvadrāta malām atlikušo laukumu summas ir vienādas, proti, $B_1+D_1=A_1+C_1$.

Figūras, kuru laukumi ir A_1, B_1, C_1 un D_1, ir trapeces. To augstumi *h* ir vienādi kā katetes vienādos taisnleņķa trijstūros (pazīme $\ell m\ell$) (skat. 381. att.).

Ja mēs sabīdītu kopā trapeces A_1 ar C_1 un B_1 ar D_1, veidotos divi taisnstūri, kuriem vienas malas garums ir vienāds ar trapeces augstumu *h*, bet otras malas garums ir vienāds ar lielā kvadrāta malas garuma un augstuma *h* starpību. Tātad abu taisnstūru laukumi ir vienādi, un līdz ar to arī *A* un *C* summa ir vienāda ar *B* un *D* summu.



380. att.



381. att.

P2.4.7. Meklējot skaitli

Vai var atrast tādus skaitļus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, lai jebkurai reālai *x* vērtībai tieši trīs no vienādībām $a\cdot x=b$, $b\cdot x=c$, $c\cdot x=d$, $d\cdot x=e$, $e\cdot x=a$ būtu patiesas, bet divas būtu aplamas?

Atrisinājums. Nē, šādi skaitļi neeksistē. Tā kā uzdevuma nosacījumiem jāizpildās jebkurai reālai *x* vērtībai, tad tiem jāizpildās arī tad, ja $x=0$. Tādā gadījumā iegūstam

(1) $a\cdot 0=b$; (2) $b\cdot 0=c$; (3) $c\cdot 0=d$; (4) $d\cdot 0=e$; (5) $e\cdot 0=a$.

Tātad, ja no skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

- vairāk nekā trīs būs vienādi ar 0, tad vairāk nekā trīs vienādības būs patiesas;
- mazāk nekā trīs būs vienādi ar 0, tad vairāk nekā divas vienādības būs aplamas.

Tātad tieši trīs no skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ir 0. Ievērojam, ka pastāv divi dažādi gadījumi (visi pārējie ir identiski kādam no šiem gadījumiem):

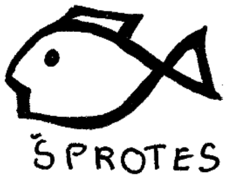
1) ja $a=0$; $b=0$; $c=0$; $d\neq 0$; $e\neq 0$, tad jebkurai citai reālai *x* vērtībai, izņemot $x=0$ vai $x=\frac{e}{d}$, aplamas ir trīs nevienādības: $e\cdot x=0$, $d\cdot x=e$, $0\cdot x=d$;
2) ja $a=0$; $b=0$; $c\neq 0$; $d=0$; $e\neq 0$, tad jebkurai citai reālai *x* vērtībai, izņemot $x=0$, aplamas ir četras nevienādības: $0\cdot x=c$; $c\cdot x=0$; $0\cdot x=e$; $e\cdot x=0$.

Tātad neeksistē tādi skaitļi, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

P2.4.8. Gudrais Miķelis

Kaķis Miķelis uz konservu iepakojuma atrada šādu uzdevumu:

> Dots, ka *a*, *b*, *c* nav 0 un
> $$\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}.$$
> Pierādīt, ka vai nu $a+b+c=0$, vai $a=b=c$.



Palīdzi Miķelim atrisināt uzdevumu!

Atrisinājums. Pieskaitot visām vienādajām izteiksmēm skaitli 2, iegūstam
$$\frac{-a+b+c}{a}+2=\frac{a-b+c}{b}+2=\frac{a+b-c}{c}+2.$$
Vienādojot saucējus un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam
$$\frac{-a+b+c+2a}{a}=\frac{a-b+c+2b}{b}=\frac{a+b-c+2c}{c} \text{ jeb } \frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c},$$
no kā izriet, ka vai nu $a+b+c=0$, vai arī $a=b=c$.

Piektā nodarbība

P2.5.1. Muzikants Džonijs

Uz riņķa līnijas ir izvietotas 300 vijoļu darbnīcas. Pirmajā darbnīcā atrodas sienāzis Džonijs, kurš cer salabot savu vijoli. Sienāzis meklē darbnīcu, kurā salabotu viņa vijoli, pēc tālāk aprakstītā plāna. Viņš sāk apmeklēt darbnīcas pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam un savu virzienu nemaina. Ar pirmo lēcienu viņš nonāk blakusesošajā 2. darbnīcā, ar otro lēcienu viņš izlaiž vienu darbnīcu un nonāk 4. darbnīcā, ar trešo lēcienu viņš izlaiž divas darbnīcas un nonāk 7. darbnīcā utt. Katrā darbnīcā, kurā viņš nonāk, Džonijam paziņo, ka viņa vijoli salabot nevar. Pierādi, ka ir tāda darbnīca, kurā Džonijs nekad nenonāks!

Atrisinājums. Ierakstām tabulā dažu pirmo Džonija apmeklēto darbnīcu numurus.

Darbnīcas numurs	1	2	4	7	11	16	…
Par cik darbnīcām palec uz priekšu	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	…	

Ievērojam, ka darbnīcas numuru *A*, kurā iegriezīsies Džonijs, var iegūt pirmās darbnīcas numuram pieskaitot visu veikto lēcienu garumu summu, kuru var izteikt kā aritmētiskās progresijas locekļu summu
$$A=1+\frac{(1+n)\cdot n}{2},$$
kur *n* ir veikto lēcienu skaits.

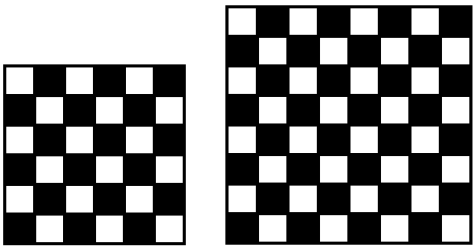
Pierādīsim, ka *A* nedalās ar 3, apskatot trīs iespējamos gadījumus:

1) ja $n=3k$, kur $k>0$ ir vesels skaitlis, iegūstam $A=1+\frac{(1+3k)}{2}\cdot 3k$, kas, dalot ar 3, atlikumā dod 1;
2) ja $n=3k+1$, kur $k>0$ ir vesels skaitlis, iegūstam $A=1+\frac{(3k+2)\cdot(3k+1)}{2}=1+\frac{9k^2+9k+2}{2}=2+\frac{9k^2+9k}{2}=2+9\cdot\frac{k^2+k}{2}$, kas, dalot ar 3, atlikumā dod 2;
3) ja $n=3k+2$, kur $k>0$ ir vesels skaitlis, iegūstam $A=1+\frac{(3k+3)\cdot(3k+2)}{2}=1+3\cdot\frac{(k+1)\cdot(3k+2)}{2}$, kas, dalot ar 3, atlikumā dod 1.

Tātad, ja darbnīcas būtu izkārtotas bezgalīgi garā rindā, Džonijs nekad nevarētu ielēkt darbnīcās, kuru numurs dalās ar 3, taču tās ir izkārtotas pa apli. Tas nozīmē, ka, piemēram 1. darbnīcai atbilst arī numurs 301; 601 utt. Tātad vienai darbnīcai atbilst bezgalīgi daudz numuru: $d + 300 \cdot a$, kur m ir darbnīcas numurs, ja $0 < m \leq 300$, un $a > 0$ ir apriņķojumu skaits. Tātad, apejot riņķi, tām darbnīcām, kuru numurs m dalījās ar 3, paliek numurs, kas dalās ar 3. No tā var secināt, ka Džonijs nekad nenonāks darbnīcās, kuru numurs dalās ar 3.

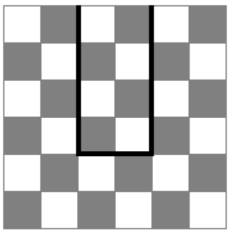
P2.5.2. Karalienes untumi

Karaliene Elizabete XIII galma šuvējam bija pasūtījusi pagatavot divus kvadrātveida rūtainus paklājus ar izmēriem 6×6 m^2 un 8×8 m^2 (katra paklāja rūts ir 1×1 m^2 liela). Kad šuvējs pēc septiņām dienām un septiņām naktīm darba nesa veikumu novērtēt (skat. 382. att.), karaliene pēkšņi paziņoja, ka vairs nevēlas divus paklājus, bet gan vienu 10×10 m^2 lielu kvadrātveida paklāju. Galma šuvējs bija attapīgs vīrs un izdomāja, kā bez pūlēm karalienei izdabāt. Viņš izgudroja, ka katru paklāju var sagriezt divās daļās, nepārgriežot nevienu rūti, un no tām sašūt 10×10 m^2 paklāju. Kā viņš to panāca?

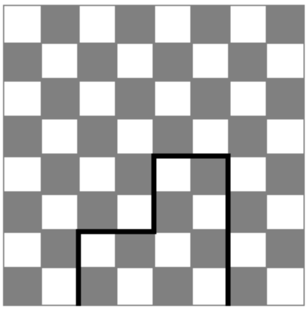


382. att.

Atrisinājums. Viens no variantiem, kā galma šuvējs varēja sagriezt paklājus, redzams 383. att. un 384. att.

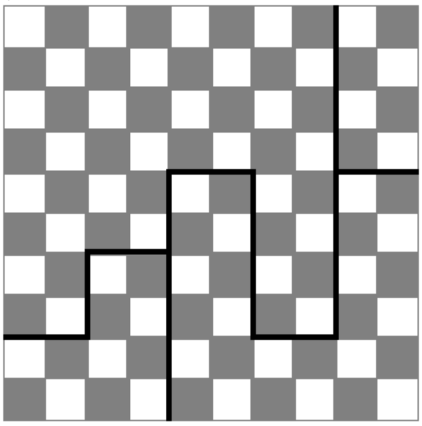


383. att.



384. att.

Sašūtais 10×10 m^2 lielais paklājs redzams 385. att.



385. att.

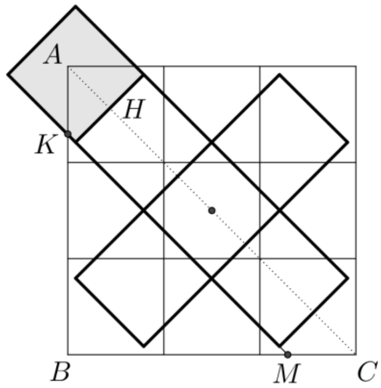
P2.5.3. Kubiņa apsegšana

Vai kvadrātisku papīra loksni ar izmēriem 3×3 var salocīt tādā veidā, lai tā apsegtu visu virsmu kubam, kura šķautnes garums ir 1 (pieļaujot, ka dažās vietās papīrs gulstas vairākās kārtās)? Papīru nedrīkst ieplēst vai saplēst vairākās daļās.

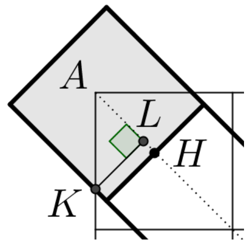
Atrisinājums. Jā, var. Kubs jānovieto kvadrāta centrā tā, lai kvadrātam pieguļošās kuba šķautnes veidotu ar kvadrāta malām $45°$ leņķi. Skat. 386. att., kurā parādīts kuba izklājums.

Pamatosim, ka piecas skaldnes tādā veidā ir pārklātas, proti, ir jāpamato, ka $KM \geq 3$. Tā kā ALK (skat. 387. att.) ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad $AK = 0{,}5\sqrt{2}$ un $KB = 3 - 0{,}5\sqrt{2}$. Tad no vienādsānu taisnleņķa trijstūra KBM iegūstam, ka $KM = 3\sqrt{2} - 1 > 3 \cdot 1{,}4 - 1 > 3$.

Pamatosim, ka ar atlikušo papīru var noklāt arī sesto skaldni. Tā kā $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, tad $AH = \dfrac{3\sqrt{2} - 3}{2} = 1{,}5(\sqrt{2} - 1) > 1{,}5 \cdot 0{,}4 > 0{,}5$. Tātad, salokot visus četrus papīra loksnes stūrus, būs noklāta arī sestā skaldne.



386. att.



387. att.

P2.5.4. Bada spēles

Uz galda ir 500 desmaizes. Juris un Andris nolēma spēlēt spēli – pēc kārtas ņemt no galda desmaižu skaitu, kuram jābūt divnieka pakāpei ar veselu nenegatīvu kāpinātāju. Zaudē tas, kuram vairs nav ko paņemt, uzvarētājs saņem visas maizītes. Andris spēli sāk pirmais. Kurš no puišiem, pareizi spēlējot, var uzvarēt spēli un balvā saņemt visas desmaizes?

Atrisinājums. Pareizi spēlējot, uzvar Andris (pirmais spēlētājs). Andrim katrā gājienā jāpaņem vai nu $2^0 = 1$ desmaize, vai $2^1 = 2$ desmaizes tā, lai pēc viņa gājiena atlikušais desmaižu skaits dalītos ar 3.

Pamatosim, ka šī stratēģija garantē Andra uzvaru. Pirmajā gājienā Andrim jāpaņem 2 desmaizes, atstājot 498 desmaizes (skaitlis, kas dalās ar 3). Tā kā 2^n nedalās ar 3 nekādiem veseliem nenegatīviem n, un no skaitļa, kas dalās ar 3, atņemot skaitli, kas nedalās ar 3, iegūst skaitli, kas nedalās ar 3, tad pēc Jura gājiena desmaižu skaits nedalīsies ar 3 jeb desmaižu skaits, dalot ar 3, atlikumā dos vai nu 1, vai 2. Līdz ar to Andris pēc sava gājiena atkal varēs atstāt desmaižu skaitu, kas dalās ar 3. Tātad situācija, kad uz galda ir 0 desmaizes (skaitlis, kas dalās ar 3), būs sasniedzama tikai pēc Andra gājiena.

P2.5.5. Starpbrīdis

Andris teica, ka padalīsies ar Juri ar desmaizēm, ja viņš atrisinās tālāk doto uzdevumu.

Doti naturāli skaitļi a, b, c, kam izpildās $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Jāpierāda, ka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$.

Palīdzi Jurim tikt pie pusdienām!

Atrisinājums. No dotās nevienādības

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1 \qquad (1)$$

izriet, ka neviens no naturālajiem skaitļiem *a, b, c* nevar būt mazāks kā 2. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $a \le b \le c$. Apskatīsim atsevišķi gadījumus $a=2$ un $a \ge 3$.

- Ja $a \ge 3$, tad $b \ge 3$ un $c \ge 4$ (*a*, *b*, un *c* vienlaicīgi nevar būt 3, jo tad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, bet tas ir pretrunā ar (1)). Līdz ar to $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$.
- Ja $a=2$, tad no nevienādības (1) izriet, ka

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{2}, \qquad (2)$$

tāpēc ne *b*, ne *c* vērtība nevar būt mazāka kā 3. Apskatīsim atsevišķi gadījumus $b=3$ un $b \ge 4$.

  - Ja $b=3$, tad $c \ge 7$, jo pretējā gadījumā, ja $c<7$, tad $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, kas ir pretrunā ar (2). Līdz ar to $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$.
  - Ja $b \ge 4$, tad $c \ge 5$ (tas izriet no (2)) un $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$.

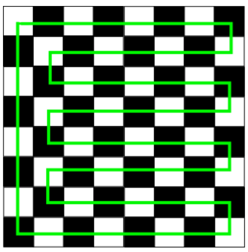
Esam apskatījuši visas iespējamās *a, b, c* vērtības, kas apmierina doto nosacījumu (1), un ieguvuši, ka ar visām šīm vērtībām $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{41}{42}$, kas arī bija jāpierāda.

P2.5.6. Sagrieztais kvadrāts

Dots 8×8 rūtiņu laukums, kas nokrāsots kā šaha dēlītis. No tā ir izgrieztas divas rūtiņas. Vai atlikušo figūru var noklāt (bez pārklāšanās) ar taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×2, ja **a)** izgrieztās rūtiņas ir vienā krāsā; **b)** izgrieztās rūtiņas ir dažādās krāsās. *Atbildi pamato*!

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Lielajā kvadrātā sākumā ir 32 baltas un 32 melnas rūtiņas. Nezaudējot vispārīgumu varam pieņemt, ka izgrieztas 2 baltas rūtiņas. Tas nozīmē, ka kopā palikušas 62 rūtiņas un 30 no tām ir baltas. Katrā mazajā taisnstūrī ir 1 balta un 1 melna rūtiņa. Lai pārklātu 62 rūtiņas ir nepieciešams $\frac{62}{2}=31$ taisnstūris. Taču 31 taisnstūrī kopā ir 31 balta rūtiņa, kas nesakrīt ar palikušo balto rūtiņu skaitu. Tātad uzdevuma nosacījumos aprakstītā situācija nav iespējama.

b) Jā, var. Caur kvadrāta rūtiņām izvelkam „ceļu”, kā parādīts 388. att.



388. att.

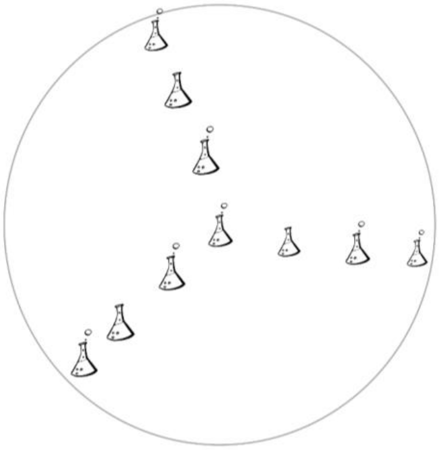
Ievērojam, ka starp jebkurām 2 rūtiņām (vienu melnu, otru baltu) uz šī „ceļa” ir pāra skaits rūtiņu. Tāpēc, lai kuras 2 rūtiņas mēs izgrieztu no šī kvadrāta, uz „ceļa” starp tām vienmēr būs pāra skaits rūtiņu. Tas nozīmē, ka atlikušos ceļa posmus vai posmu varēs sadalīt 1×2 taisnstūros, jo pāra skaitļi dalās ar 2.

P2.5.7. Paulas laboratorija

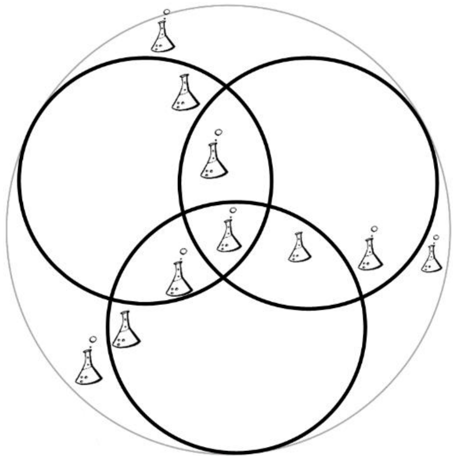
Paulai ir riņķveida laboratorija, kurā izvietoti 10 trauciņi ar ķīmiskām vielām (skat. 389. att.), kuras ilgi nedrīkst stāvēt vienā telpā, citādi laboratorija uzsprāgs. Kā Paulai uzbūvēt trīs riņķa līnijas formas sienas, lai katrs trauciņš būtu izolēts no pārējiem ar jaunuzbūvēto sienu un laboratorijas sienu palīdzību?

Piezīme. Paulas būvētās sienas drīkst pieskarties laboratorijas malām, bet nevar iziet ārpus laboratorijas. Sienas drīkst krustoties savā starpā.

Atrisinājums. Skat. 390. att.



389. att.



390. att.

P2.5.8. Zanes olīvas

Zane un Aigars pasūtīja picu ar olīvām, kas tik ļoti garšo Zanei. Aigars gribēja Zani izjokot, tāpēc viņš nolasīja visas olīvas no picas un teica, ka atdos tās Zanei tikai tad, ja viņa spēs noteikt olīvu skaitu, kas atradās uz picas. Aigars pateica tikai to, ka olīvu skaits ir mazākais iespējamais skaitlis, kas

- dalot ar 2, dod atlikumu 1;
- dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- dalot ar 4, dod atlikumu 1;
- dalot ar 5, dod atlikumu 1;
- dalot ar 6, dod atlikumu 1;
- dalās ar 7.

Palīdzi Zanei tikt pie olīvām!

Atrisinājums. Meklēto skaitli apzīmējam ar x. No uzdevumā dotā izriet, ka $x-1$ dalās ar 2, 3, 4, 5 un 6, bet x dalās ar 7. Skaitļu 2, 3, 4, 5 un 6 mazākais kopīgais dalāmais ir 60. Tātad jāatrod skaitlis, kas dalās ar 7 un ir par vienu vienību lielāks nekā skaitlis, kurš dalās ar 60. Apskatīsim visus iespējamos gadījumus, sākot ar mazāko:

- ja $x-1=60$, tad $x=61$, kas nedalās ar 7, tātad šis skaitlis neder;
- ja $x-1=2\cdot 60=120$, tad $x=121$, kas nedalās ar 7, tātad šis skaitlis neder;
- ja $x-1=3\cdot 60=180$, tad $x=181$, kas nedalās ar 7, tātad šis skaitlis neder;
- ja $x-1=4\cdot 60=240$, tad $x=241$, kas nedalās ar 7, tātad šis skaitlis neder;
- ja $x-1=5\cdot 60=300$, tad $x=301=7\cdot 43$, kas dalās ar 7, tātad šis skaitlis der.

Tātad mazākais skaitlis, kas dalās ar 7 un, dalot ar 2, 3, 4, 5 un 6, atlikumā dod 1, ir skaitlis 301. Secinām, ka uz picas bija 301 olīva.

P2.5.9. Atlikušās sviestmaizes

Andris tomēr nevarēja apēst visas 500 laimētās desmaizes. Visas pāri palikušās desmaizes, izņemot divas, ir ar salami desu, kā arī visas palikušās, izņemot divas, ir ar doktora desu un visas palikušās, izņemot divas, ir ar siera desu. Cik un kādas desmaizes Andrim palika pāri? *Atrodi visus iespējamos variantus un pierādi, ka citu nav*!

Atrisinājums. Jāņem vērā, ka par maizītēm mēs zinām tikai, ka

- to maksimālais skaits ir 500;
- tās visas ir desmaizes;
- uz maizītēm var atrast doktora desu, siera desu un salami desu.

Nekas nav teikts par to, ka nevarētu būt cita veida desa, vai arī uz maizītes nevarētu būt vairāk kā viena veida desa (cita veida sastāvdaļas risinājumu neietekmē). Ērtības labad doktora desu, siera desu un salami desu apzīmēsim attiecīgi ar D, Si un Sa.

Apskatīsim iespējamos gadījumus.

1) Ja uz katras maizes ir vismaz viena no uzdevumā minētajām desām, tad iespējami divi gadījumi. (Ja papildus uz kādas maizes ir vēl kāda cita veida desa, tas šī gadījuma risinājumu neietekmē, tāpēc tās var neņemt vērā.)
   a) Ja uz katras maizītes var būt tikai viena veida desa, tad vienīgā desmaižu kombinācija, kas apmierina šos nosacījumus, ir pa vienai desmaizei no katra veida.
   b) Apskatīsim gadījumu, kad uz maizītēm var būt vairāk nekā viena veida desa.
      1. Ja uz maizītes var būt divu veidu desas, tad a) gadījuma jebkuru vienu desmaizi, var nomainīt uz divām desmaizēm ar divām desām uz katras tā, lai izpildās nosacījumi. Vienīgais variants, kā to izdarīt, ir, ja D nomaina uz D+Si un D+Sa; Si nomaina uz Si+D un Si+Sa; Sa nomaina uz Sa+D un Sa+Si.
         Tātad ir iespējami 7 varianti (trīs varianti nomainot vienu maizīti, trīs varianti nomainot divas maizītes, viens variants nomainot visas maizītes), kādas var būt pāri palikušās maizītes.
      2. Ja uz maizītes var būt visu trīs veidu desas, tad šādu maizīšu skaits var būt jebkāds, jo šīs maizītes neietekmē maizīšu skaitu, uz kurām kādas desas nav.
2) Ja uz kādas maizītes, ir tikai desas, kas nav minētas uzdevumā, tad no dotā izriet, ka šādu maizīšu skaits nevar būt lielāks kā 2, tāpēc ir iespējami divi gadījumi. (Ja papildus uz kādas maizes, uz kuras ir uzdevumā minētās desas, ir vēl kāda cita veida desa, tas šī gadījuma risinājumu neietekmē, tāpēc tās var neņemt vērā.)
   a) Ja šādas maizītes ir divas, tad, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, uz visām pārējām maizēm jābūt visu trīs uzdevumā minēto veidu desām. Šādu desmaižu skaits var būt patvaļīgs.
   b) Ja šāda maizīte ir tikai viena, tad ir iespējami četri dažādi gadījumi, kādām maizītēm noteikti vēl ir jābūt:
      - Sa+Si, Sa+D un Si+D;
      - Sa+Si un D;
      - Sa+D un Si;
      - Si+D un Sa.

      Pārējo maizīšu skaits, uz kurām ir visas 3 uzdevumā minētās desas, ir patvaļīgs.

P2.5.10. Viltīgā aita

Dots taisnstūrveida aploks, kura malu garumi ir 13 m un 19 m. Aploka centrā ganās aita, bet vienā stūrī gaida vilks. Vilks var skriet tikai pa aploka malām, bet aita – pa malām un diagonālēm. Vilka ātrums ir 10 reizes lielāks nekā aitas ātrums. Gan vilks, gan aita var mainīt kustības virzienu tikai aploka stūros vai centrā. Viņi abi sāk skriet reizē un skrien bez apstāšanās. Vilks vienmēr zina, kur atrodas aita, bet aita nekad nezina, ko dara un kur atrodas vilks. Vai aita var izdomāt stratēģiju, kā izdzīvot, neatkarīgi no tā, ko dara vilks?

Atrisinājums. Jā, aita var izdomāt izdzīvošanas stratēģiju, tai jāskrien tikai pa aploka diagonālēm. Pamatosim, ka, izmantojot šādu stratēģiju, aita un vilks nekad nesatiekas.

Tā kā aita un vilks sāk skriet vienā un tajā pašā laika momentā, tad satikšanās brīdī viņi būs skrējuši vienādi ilgu laiku *t*. Apzīmēsim aitas ātrumu ar *v*, tad vilka ātrums ir 10*v*. Aitas noskrieto ceļu apzīmēsim ar l_a un vilka noskrieto ceļu – ar l_v. Tā kā skriešanas laiku varam iegūt, ceļu dalot ar ātrumu, tad iegūstam šādu sakarību:

$$t = \frac{l_a}{v} = \frac{l_v}{10 \cdot v}$$

No kā iegūstam, ka $l_v = 10 \cdot l_a$. Aitas ceļš sastāv no vesela skaita diagonāļu pusēm, savukārt vilka ceļš sastāv no vesela skaita malu garumiem. Skaidrs, ka vilka noskrietais ceļš metros ir vesels skaitlis. Toties aitas noskrietais ceļš ir

$$\frac{n}{2} \cdot \sqrt{13^2 + 19^2} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{530}\,,$$

kur *n* ir naturāls skaitlis. Redzam, ka aitas noskrietā ceļa garums metros nav racionāls skaitlis, tāpēc vienādība $l_v = 10 \cdot l_a$ nevar izpildīties. Tātad aita ar vilku nekad nesatiksies.

Sagatavošanās olimpiāde

5. klase

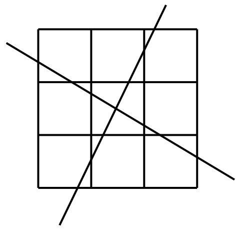
S2.5.1. Rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 2014 ieskaitot, katrs vienu reizi. Cik ciparu uzrakstīts?

Atrisinājums. Pavisam ir 9 viencipara skaitļi, 90 divciparu skaitļi, 900 trīsciparu skaitļi un 1015 četrciparu skaitļi; tāpēc kopējais ciparu skaits ir

$$9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3+1015\cdot 4=6949\ .$$

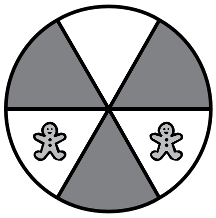
S2.5.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām rūtiņām. Vai tās visas var pārsvītrot ar divām taisnēm? (Taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur kādu rūtiņas iekšēju punktu.)

Atrisinājums. Jā, visas rūtiņas var pārsvītrot ar divām taisnēm, skat., piemēram, 391. att.



391. att.

S2.5.3. Uz vecmāmiņas galda uzklāta divu krāsu sedziņa, kas sadalīta sešos laukumos (skat. 392. att.). Uz tās atrodas divas piparkūkas. Ieva izdomāja spēlēt tādu spēli: katrā gājienā viņa drīkst divos blakus laukumos palielināt piparkūku skaitu par 1. Vai Ieva var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos laukumos būs vienāds skaits piparkūku?



392. att.

Atrisinājums. Saskaitām piparkūku kopējo skaitu vienādas krāsas laukumos spēles sākumā: melnajos – tas ir 2, bet baltajos – 0. Starpība starp piparkūku skaitu melnajos un baltajos laukumos ir 2. Ar katru gājienu par 1 palielinās piparkūku skaits gan melnajos, gan baltajos laukumos, tātad starpība starp piparkūku skaitu dažādu krāsu laukumos paliek 2, un nevarēs iegūt vienādu piparkūku skaitu visos laukumos.

6. klase

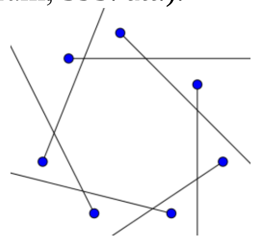
S2.6.1. **a)** Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 11, dod atlikumu 5, bet, dalot ar 13, dod atlikumu 9? **b)** Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 4, dod atlikumu 1, bet, dalot ar 8, dod atlikumu 2?

Atrisinājums. **a)** Jā, var. Tāds ir, piemēram, skaitlis 126, jo $126:11=11, atl.\,5$ un $126:13=9, atl.\,9$.

b) Nē, nevar. No nosacījuma “dalot ar 4, dod atlikumu 1” izriet, ka tam jābūt nepāra, bet no nosacījuma “dalot ar 8, dod atlikumu 2” izriet, ka tam jābūt pāra skaitlim. Iegūta pretruna, jo viens skaitlis vienlaicīgi nevar būt gan pāra, gan nepāra.

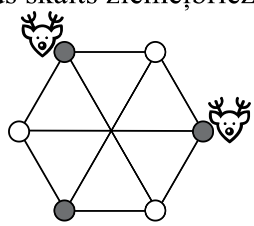
S2.6.2. Vai plaknē var uzzīmēt 7 starus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus?

Atrisinājums. Jā, var (skat., piemēram, 393. att.).



393. att.

S2.6.3. Elfi spēlējas ar ziemeļbriežiem. Pie staļļa ir seši mieti, pie diviem no tiem piesieti ziemeļbrieži (skat. 394. att.). Ar vienu gājienu drīkst piesiet pa ziemeļbriedim pie jebkuriem diviem mietiem, kas savienoti ar nogriezni. Vai elfi var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem pie visiem mietiem būtu piesiets vienāds skaits ziemeļbriežu?



394. att.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt. Ar katru gājienu par 1 palielinās gan pie pelēkajiem, gan pie baltajiem mietiem piesieto ziemeļbriežu kopējais skaits. Sākumā pie pelēkajiem mietiem kopā bija piesieti 2 ziemeļbrieži, bet pie baltajiem – 0. Ievērojam, ka pēc katra gājiena starpība starp pie pelēkajiem un pie baltajiem mietiem piesieto ziemeļbriežu kopējo skaitu paliek nemainīga, t. i., 2. Ja pie visiem mietiem piesieto ziemeļbriežu skaits būtu vienāds, tad arī abām kopējām summām jābūt vienādām. Tātad kopējais ziemeļbriežu skaits pie dažādu krāsu mietiem nekad nekļūs vienāds.

7. klase

S2.7.1. Apskatām 10 dažādus skaitļus un visas to starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Kāds ir mazākais iespējamais dažādo starpību skaits?

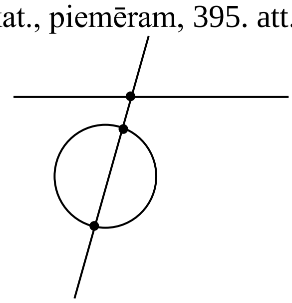
Atrisinājums. Mazākais iespējamais dažādo starpību skaits ir deviņas. Piemēram, var izvēlēties skaitļus 1; 2; 3; ...; 10, tad iegūs starpības 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Mazāk kā deviņas starpības nevar iegūt. Tā kā visi desmit skaitļi ir dažādi, tad, no lielākā skaitļa atņemot visus citus skaitļus, iegūst dažādas starpības.

S2.7.2. Vai var uzzīmēt trīs nogriežņus tā, lai tiem visiem būtu dažāds krustpunktu skaits ar abiem pārējiem? Vai tā var uzzīmēt trīs patvaļīgas līnijas?

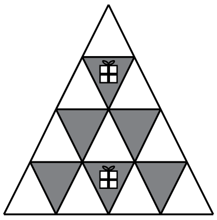
Atrisinājums. a) Nē, nevar. Tā kā diviem nogriežņiem ir ne vairāk kā viens krustpunkts, tad iespējamais krustpunktu skaits katram nogrieznim ir 0, 1 vai 2. Ja kādam nogrieznim ir 2 krustpunkti, tad tas krustojas ar abiem pārējiem, bet tad nav nogriežņa, kas nekrustojas ne ar vienu no abiem pārējiem. Tas nozīmē, ka iespējamas ir tikai 2 vērtības, bet nogriežņu skaits ir 3.

b) Jā, tādas līnijas var uzzīmēt (skat., piemēram, 395. att.).

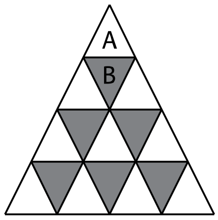


395. att.

S2.7.3. Rūķīši uz grīdas ir uzzīmējuši spēļu laukumu un spēlējas ar dāvanām. Sākumā uz laukuma atrodas divas dāvanas (skat. 396. att.). Vienā gājienā ir atļauts divos trijstūrīšos, kam ir kopīga mala, pievienot pa vienai dāvanai. Vai rūķīši var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos trijstūrīšos būs novietots vienāds skaits dāvanu?



396. att.



397. att.

1. atrisinājums. Pierādīsim, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt. Ar katru gājienu par 1 palielinās gan melnajos, gan baltajos trijstūrīšos novietoto dāvanu kopējais skaits.

Sākumā visos melnajos trijstūrīšos novietoto dāvanu kopējais skaits ir 2, bet visos baltajos trijstūrīšos novietoto dāvanu kopējais skaits ir 0. Tātad baltajos trijstūrīšos novietoto dāvanu kopējais skaits nekad nekļūs lielāks kā melnajos trijstūrīšos novietoto dāvanu kopējais skaits, bet, ja visos trijstūros novietoto dāvanu skaits būtu vienāds, tad otrajai summai jābūt lielākai, jo balto trijstūrīšu ir vairāk.

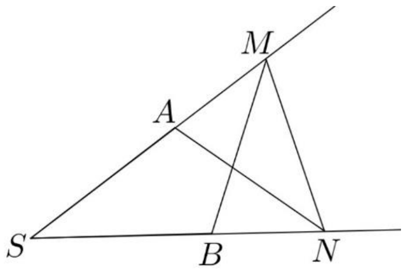
2. atrisinājums. Pierādīsim, ka uzdevumā prasīto nevar izdarīt. Apskatām trijstūrus A un B (skat. 397. att.). Sākumā trijstūrī B novietots lielāks dāvanu skaits nekā trijstūrī A. Trijstūrī B novietoto dāvanu skaitu var palielināt, vienlaicīgi nepalielinot A novietoto dāvanu skaitu; turpretī, palielinot trijstūrī A novietoto dāvanu skaitu par 1, par 1 palielinās arī B novietoto dāvanu skaits. Tāpēc B novietoto dāvanu skaits vienmēr būs lielāks nekā A novietoto dāvanu skaits.

8. klase

S2.8.1. Cik ir tādu funkciju, kurām definīcijas kopa sastāv no četriem elementiem: 0; 1; 2; 4, bet vērtību kopa sastāv no diviem elementiem: 0; 1 ?

Atrisinājums. Katrā no četriem definīcijas kopas punktiem funkcija var pieņemt jebkuru no divām vērtībām. Tātad pavisam iespējamas $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ dažādas funkcijas.

S2.8.2. Dots, ka $SA=SB=AN=BM=MN$ (skat. 398. att.). Aprēķināt $\angle ASB$!



398. att.

Atrisinājums. Apzīmējam $\angle ASB=\alpha$ (skat. 398. att.). Tā kā ΔSAN ir vienādsānu, tad $\angle SNA=\alpha$ un $\angle SAN=180°-2\alpha$, un $\angle MAN=2\alpha$ (pēc blakusleņķu īpašības). Arī $\angle AMN=2\alpha$, jo ΔANM ir vienādsānu.

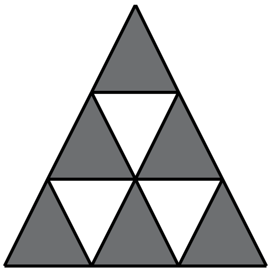
Tā kā ΔSBM ir vienādsānu, tad $\angle SMB=\alpha$ un $\angle MBN=2\alpha$ (pēc blakusleņķu īpašības). ΔBMN ir vienādsānu, tātad $\angle BNM=2\alpha$.

Aplūkojot trijstūra *SMN* iekšējo leņķu summu, iegūstam vienādību $\alpha+2\alpha+2\alpha=180°$, no kā izriet, ka $\alpha=36°$ jeb meklētais leņķis $\angle ASB=36°$.

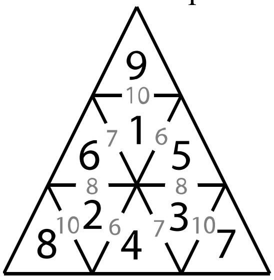
S2.8.3. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem (skat. 399. att.) ierakstīts viencipara naturāls skaitlis; dažādos trijstūrīšos ierakstīti dažādi skaitļi. Aplūkojam visas tādas divu skaitļu summas, kuri ierakstīti trijstūrīšos ar kopīgu malu.

a) Vai var būt, ka neviena no šīm summām nepārsniedz 10?

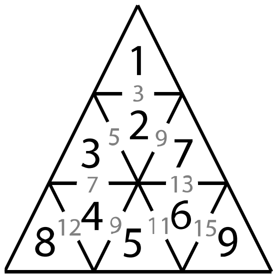
b) Kāds mazākais skaits no šīm summām var būt pāra skaitļi?



399. att.



400. att.



401. att.

Atrisinājums. a) Jā, var (skat., piemēram, 400. att.).

b) Viena no summām var būt pāra skaitlis (skat. 401. att.). Pierādīsim, ka visas summas nevar būt nepāra skaitļi. Lai divu skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, tad jāsaskaita dažādas paritātes skaitļi (viens pāra un otrs nepāra). Tātad visos pelēkajos trijstūrīšos (skat. 399. att.) ierakstīto skaitļu paritātei jābūt vienai un visos baltajos – otrai, bet no 1 līdz 9 nav sešu (tik, cik pelēko trijstūru) vienas paritātes skaitļu.

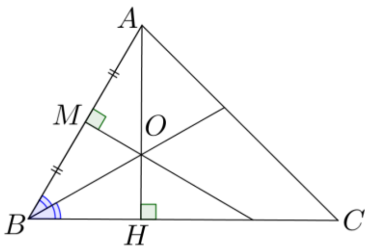
9. klase

S2.9.1. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai var gadīties tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

Atrisinājums. Vienas komandas izspēlēto spēļu skaits var būt tikai 0, 1, 2, ... , 9 (desmit dažādas vērtības). Ja visas 10 komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu, tad ir komanda, kas izspēlējusi 9 spēles – tātad spēlējusi ar visām pārējām komandām. Tas nozīmē, ka nav komandas, kura ir izspēlējusi 0 spēles. Tātad nav tāda brīža, kad visas komandas ir izspēlējušas dažādu spēļu skaitu.

S2.9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā O. Aprēķināt $\angle ABC$!

Atrisinājums. Apzīmējam $\angle BAO = \alpha$ (skat. 402. att.). Ievērojam, ka $\Delta AMO = \Delta BMO$ (pēc pazīmes $m\ell m$), jo $BM = MA$ (pēc vidusperpendikula definīcijas), $\angle AMO = \angle BMO = 90°$ un mala MO kopīga. Tad $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. No bisektrises definīcijas izriet, ka $\angle ABC = 2\alpha$. No ΔABH iekšējo leņķu summas iegūstam $\alpha + 2\alpha + 90° = 180°$ jeb $\alpha = 30°$. Tātad $\angle ABC = 2\alpha = 60°$.

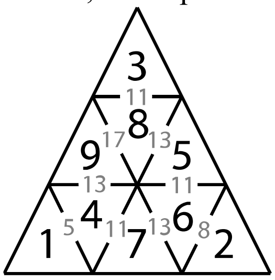


402. att.

S2.9.3. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 399. att.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

Atrisinājums. Pavisam ir 9 summas. Astoņas no šīm summām var būt pirmskaitļi (skat. 403. att.).

Pierādīsim, ka visas 9 summas nevar būt pirmskaitļi. Ja visas summas būtu pirmskaitļi, tad šīs summas būtu nepāra skaitļi (vienīgo pāra pirmskaitli 2 nevar iegūt, saskaitot divus dažādus naturālus skaitļus); tāpēc blakus esošiem skaitļiem būtu jābūt dažādas paritātes skaitļiem. Tātad vienas paritātes skaitļiem jāatrodas baltajos laucinos, bet otras paritātes skaitļiem – pelēkajos laucinos (skat. 399. att.). Tas nav iespējams, jo ir 5 nepāra skaitļi un 4 pāra skaitļi, bet pelēko laucinu skaits ir 6. Tātad lielākais summu, kas ir pirmskaitļi, skaits ir 8.



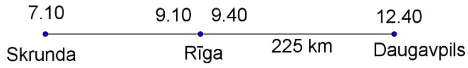
403. att.

Novada olimpiāde

5. klase

N2.5.1. Mudīte ar automašīnu plkst. 7:10 devās ceļā no Skrundas uz Daugavpili, braucot cauri Rīgai. Rīgā viņa iebrauca plkst. 9:10 un no Rīgas uz Daugavpili izbrauca plkst. 9:40. Daugavpilī viņa nokļuva plkst. 12:40. Aprēķini attālumu no Skrundas līdz Rīgai, ja attālums no Rīgas līdz Daugavpilij ir 225 kilometri! Braukšanas ātrums visā ceļa posmā bija viens un tas pats.

Atrisinājums. Shematiski attēlojam uzdevumā doto (skat. 404. att.).



404. att.

No Rīgas uz Daugavpili Mudīte brauca 3 stundas. Tātad vienā stundā viņa veica $225:3=75$ km. No Skrundas uz Rīgu Mudīte brauca 2 stundas, tātad attālums no Skrundas līdz Rīgai ir $75\cdot 2=150$ km.

N2.5.2. Niknajam jūras laupītājam Smuidrim ir četras kaudzes ar zelta monētām. Viņš māk vienu kaudzi sadalīt 3 vai 5 mazākās kaudzēs. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Smuidris varēs iegūt tieši 2015 kaudzes, ko piešķirt saviem palīgiem?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā bija 4 kaudzes – pāra skaitlis.

Ja vienu kaudzi sadala

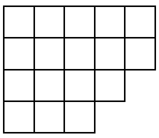
- 3 daļās, tad kopējais kaudžu skaits palielinās par 2 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 5 daļās, tad kopējais kaudžu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais kaudžu skaits vienmēr būs pāra skaitlis. Tā kā 2015 ir nepāra skaitlis, tad tieši 2015 kaudzes iegūt nevarēs.

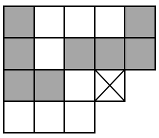
N2.5.3. Rihards ir izcepis interesantas formas torti, kuras pamatā ir 17 kvadrātveida cepumi (skat. 405. att.). Parādi vienu veidu, kā torti sadalīt četros pēc formas vienādos gabalos, lai katrs saturētu tieši četrus cepumus, un gabaliņš ar vienu cepumu paliktu pāri. Tā kā tortes augšpuse ir izdekorēta, tad gabalus drīkst grozīt, bet nedrīkst apmest otrādi.

Atrisinājums. Tortes sadalījumu skat., piemēram, 406. att.

Piezīme. Iespējami arī citi sadalījumi.



405. att.



406. att.

N2.5.4. Reizināšanas piemērā ciparus aizstāja ar burtiem – vienādi cipari tika aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Tika iegūta šāda izteiksme:

$$EJA\cdot M=2015\,.$$

Nosaki, kāds cipars atbilst katram burtam! Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!

1. atrisinājums. Skaitlis M nevar būt pāra skaitlis, jo tad arī reizinājums būtu pāra skaitlis.

Skaitlis M nevar būt 1, jo tad $EJA\cdot 1=EJA\neq 2015$.

Skaitļa 2015 ciparu summa ir $2+0+1+5=8$, tāpēc tas nedalās ne ar 3, ne ar 9. Līdz ar to $M\neq 3$ un $M\neq 9$.

Ievērojam, ka skaitlis 2015 nedalās ar 7, jo $2015:7=287,\ atl.\ 6$. Tātad $M\neq 7$.

Vērtība $M=5$ der, jo $403\cdot 5=2015$.

Tātad vienīgā iespēja, kā var būt aizstāti cipari, ir $E=4,\ J=0,\ A=3,\ M=5$.

2. atrisinājums. Skaitlis M nevar būt ne 0, ne 1, jo tad $EJA \cdot 0 = 0 \neq 2015$ vai $EJA \cdot 1 = EJA \neq 2015$. Sadalām skaitli 2015 pirmreizinātājos: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Tātad vienīgais viencipara skaitlis, kas ir 2015 reizinātājs, ir 5 un cipari ir aizvietoti šādi: $E = 4,\ J = 0,\ A = 3,\ M = 5$.

N2.5.5. Raimonds stāv upes krastā un viņam ir divi spaiņi. Viena spaiņa tilpums ir 10 litri, bet otra spaiņa tilpumu Raimonds ir aizmirsis – tas ir vai nu 7, vai 8 litri. Kā Raimondam ar ūdens pārliešanu palīdzību noteikt otrā spaiņa tilpumu? Nekādu citu palīglīdzekļu Raimondam nav un ieskatoties nepilnā spainī nav iespējams precīzi noteikt tajā esošā ūdens daudzumu.

Atrisinājums. Spaini, kura tilpums ir 10 litri, sauksim par lielo spaini, otru spaini – par mazo.

Ievērojam, ka $4 \cdot 7 = 28$ un $4 \cdot 8 = 32$. Tas nozīmē:

- ja mazā spaiņa tilpums ir 7 litri, tad var pieliet 4 pilnus spaiņus un vēl ūdens paliek pāri (No lielā spaiņa lej ūdeni mazajā, kamēr tas pilns, tad mazo spaini iztukšo un atlikušo ūdeni no lielā spaiņa atkal ielej mazajā spainī, piepilda lielo spaini. Darbības atkārto līdz ir izlieti 3 lielie spaiņi.);
- ja mazā spaiņa tilpums ir 8 litri, tad var pieliet 3 pilnus spaiņus un ceturtais spainis nav pilns.

30 litri
(trīs reizes pieliets lielais spainis)

Ja mazā spaiņa tilpums ir 7 litri

Ja mazā spaiņa tilpums ir 8 litri

Piezīme. Ir arī citi atrisinājumi.

6. klase

N2.6.1. Veikalā ir divu veidu saldumu pakas. Vienā pakā ir 8 vienādas lielas šokolādes un 6 vienādas mazas šokolādes, bet otrā pakā ir 12 tādas pašas lielas šokolādes un 6 tādas pašas mazas šokolādes. Aprēķini, cik maksā viena lielā šokolāde un cik maksā viena mazā šokolāde, ja pirmās pakas cena ir 15 eiro un otrās – 21 eiro! (Pakas cena veidojas, saskaitot tajā ielikto šokolāžu cenu.)

Atrisinājums. Ievērojam, ka abās pakās ir vienāds skaits mazo šokolāžu, un paku saturs atšķiras tikai par $12 - 8 = 4$ lielajām šokolādēm. Tā kā paku cena atšķiras par $21 - 15 = 6$ eiro, tad vienas lielās šokolādes cena ir $6 : 4 = 1{,}50$ eiro. Tātad 8 lielās šokolādes maksā $8 \cdot 1{,}50 = 12$ eiro un 6 mazās šokolādes maksā $15 - 12 = 3$ eiro. Tad vienas mazās šokolādes cena ir $3 : 6 = 0{,}50$ eiro.

N2.6.2. Bagātajai Austrumu princesei Smuidrai zem gultas ir 6 lādes. Sākumā lādēs ir attiecīgi 1, 5, 0, 0, 2, 3 zelta monētas. Katru stundu viņa izvēlas 2 lādes un katrā no tām pieliek klāt 1 monētu. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, var panākt, ka kādā brīdī visās lādēs būs vienāds skaits monētu?

Atrisinājums. Sākumā lādēs esošo monētu kopējais skaits ir *nepāra skaitlis*: $1 + 5 + 0 + 0 + 2 + 3 = 11$.

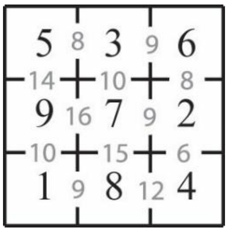
Katrā stundā, pieliekot pa vienai monētai katrā no divām izvēlētajām lādēm, visu monētu kopējais skaits palielinās par 2 (par *pāra skaitli*). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst *nepāra skaitli*. Tātad visu monētu kopējais skaits pēc katras stundas paliek *nepāra skaitlis*.

Beigās prasīts iegūt, ka visās lādēs ir vienāds monētu skaits, bet sešu vienādu skaitļu summa ir *pāra skaitlis*. Tātad nevar panākt, ka visās lādēs ir vienāds monētu skaits.

N2.6.3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka neviena no šīm summām nav pirmskaitlis?

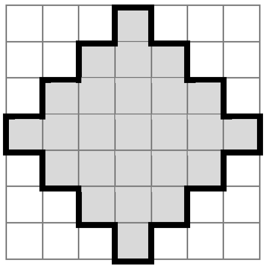
Atrisinājums. Jā, skaitļus var ierakstīt tā, ka neviena no summām nav pirmskaitlis (skat., piemēram, 407. att.).

Piezīme. Iespējami arī citi skaitļu izvietojumi.

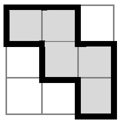


407. att.

N2.6.4. Rūtiņu lapā uzzīmēta figūra (skat. 408. att.). Kāds ir lielākais skaits 409. att. doto figūru, ko var izgriezt no 408. att. figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



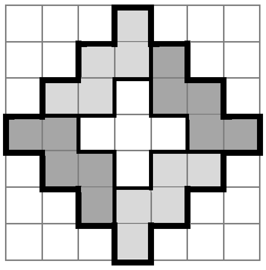
408. att.



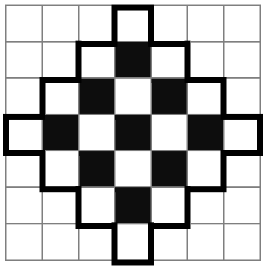
409. att.

1. atrisinājums. No dotās figūras var izgriezt četras 409. att. figūras (skat. 410. att.).

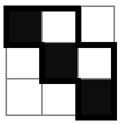
Pierādīsim, ka vairāk figūru izgriezt nevar. Izkrāsojam 408. att. doto figūru kā šaha galdiņu (skat. 411. att.), tā satur 9 melnas rūtiņas. Ir divi dažādi varianti, cik melnās rūtiņas var saturēt 409. att. figūra (skat. 412. att. un 413. att.). Abos gadījumos tā satur vismaz 2 melnas rūtiņas. Tātad var izgriezt ne vairāk kā 4 figūras, jo piecas 409. att. figūras kopā satur vismaz $5\cdot2=10$ melnās rūtiņas.



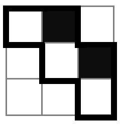
410. att.



411. att.



412. att.



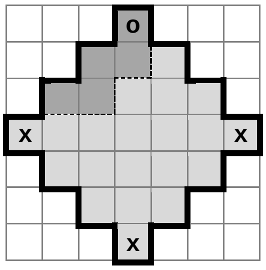
413. att.

2. atrisinājums. No dotās figūras var izgriezt četras 3. att. figūras (skat. 410. att.).

Pierādīsim, ka vairāk figūru izgriezt nevar. Tā kā dotā figūra sastāv no 25 rūtiņām un 409. att. figūra satur 5 rūtiņas, tad nevarētu izgriezt vairāk kā $25:5=5$ figūras.

Ar “o” atzīmēto rūtiņu var saturēt figūra, kāda redzama 414. att. (simetrisko gadījumu neapskatām, jo tas ir analoģisks tālāk aprakstītajam). Pēc tam figūras, kas satur ar “x” apzīmētās rūtiņas, var izgriezt vienā vienīgā veidā (kā parādīts 410. att.). No atlikušās daļas (skat. 410. att.) nevar izgriezt 409. att. doto figūru.

Tātad lielākais skaits 409. att. figūru, ko var izgriezt no dotās figūras, ir 4.



414. att.

N2.6.5. Sivēntiņš 229 ābolus salika 60 grozos. Dažos grozos viņš ielika *x* ābolus, bet pārējos – katrā pa 3 āboliem. Nosaki visas iespējamās naturālās *x* vērtības!

Atrisinājums. Ja katrā grozā būtu tieši 3 āboli, tad kopā grozos būtu salikti tikai $3\cdot 60=180$ āboli. Tātad atlikušie $229-180=49$ āboli ir jāsadala pa dažiem groziem. Tā kā $49=7\cdot 7=49\cdot 1$ un ir 60 grozi, tad iespējami trīs gadījumi:

- 1 grozā jāpieliek 49 āboli – tātad $x=3+49=52$;
- 7 grozos vēl jāieliek katrā pa 7 āboliem – tātad $x=3+7=10$;
- 49 grozos vēl jāieliek katrā pa 1 ābolam – tātad $x=3+1=4$.

Līdz ar to vienīgās iespējamās naturālās *x* vērtības ir 4, 10 vai 52.

7. klase

N2.7.1. Atrisini vienādojumu $\frac{8a-5}{5}-\frac{2a-7}{2}=-3$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{8a-5}{5}-\frac{2a-7}{2}=-3 \quad |\cdot 10$$

$$2\cdot(8a-5)-5\cdot(2a-7)=-30;$$

$$16a-10-10a+35=-30;$$

$$6a=-55;$$

$$a=-\frac{55}{6}.$$

Atbilde: $a=-\frac{55}{6}$.

N2.7.2. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā kopējais mājlopu skaits ir $99+21=120$ – pāra skaitlis.

Aplūkojam, kā izmainās kopējais mājlopu skaits, atkarībā no tā, kurā pilsētā notiek maiņa:

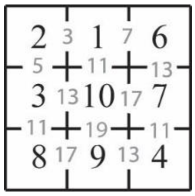
- ja par 4 kamieļiem pretī saņem 8 aitas, tad kopējais mājlopu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- ja par 5 aitām pretī saņem 3 kamieļus, tad kopējais mājlopu skaits samazinās par 2 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un paliek pāra skaitlis, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais mājlopu skaits vienmēr būs pāra skaitlis. Tā kā 2015 ir nepāra skaitlis, tad tieši 2015 mājlopus iegūt nevarēs.

N2.7.3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10, visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka visas iegūtās summas ir pirmskaitļi?

Atrisinājums. Jā, skaitļus var ierakstīt tā, ka visas summas ir pirmskaitļi (skat., piemēram, 415. att.).

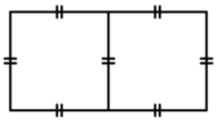
Piezīme. Iespējami arī citi skaitļu izvietojumi.



415. att.

N2.7.4. Taisnstūris *ABCD* sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai taisnstūra *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

Atrisinājums. Nē, taisnstūra perimetrs var nebūt naturāls skaitlis. Piemēram, ja taisnstūris ar izmēriem $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ sadalīts divos kvadrātos, kuru malu garumi ir $\frac{1}{4}$ (skat. 416. att.). Tādā gadījumā kvadrātu perimetri ir $4\cdot\frac{1}{4}=1$ (naturāls skaitlis), bet taisnstūra perimetrs ir $2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ (nav naturāls skaitlis).

$\frac{1}{4}$

416. att.

N2.7.5. Uz galda rindā novietotas sešas monētas, zināms, ka starp tām ir vismaz viena īsta un vismaz viena viltota monēta, kas ir vieglāka nekā īstā. Visu īsto monētu masas ir vienādas un arī visu vilto monētu masas ir vienādas. No katras īstās monētas pa labi (ne noteikti blakus) atrodas kāda viltota monēta, bet no katras viltotās pa kreisi (ne noteikti blakus) atrodas kāda īsta monēta. Kā ar divām svēršanām ar sviru svariem bez atsvariem var noteikt katra veida monētu skaitu?

Atrisinājums. Tā kā no katras īstās monētas pa labi atrodas kāda viltota monēta, tad pirmā monēta no labās puses nevar būt īsta, tātad tā ir viltota. Līdzīgi secinām, ka pirmā monēta no kreisās puses ir īsta.

Pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa liekam īsto un viltoto monētu, bet uz otra – divas no atlikušajām monētām. Iespējami trīs svaru stāvokļi:

- ja svari ir līdzsvarā, tad uz otra kausa arī ir viena īsta un viena viltota monēta;
- ja svaru kauss, uz kura ir īstā un viltotā monēta, ir smagāks, tad otrā kausā ieliktās abas monētas ir viltotas;
- ja svaru kauss, uz kura ir īstā un viltotā monēta, ir vieglāks, tad otrā kausā ieliktās abas monētas ir īstas.

Otrajā svēršanā uz viena svaru kausa liekam īsto un viltoto monētu, bet uz otra – vēl nesvērtās divas monētas. Līdzīgi kā pirmajā svēršanā, nosaka, kādas monētas ir uz otrā kausa. Līdz ar to ar divām svēršanām ir noskaidrots, kādas monētas ir novietotas uz galda.

8. klase

N2.8.1. Pierādi, ka **a)** 49^5+7^9 dalās ar 2; **b)** 49^5-7^9 dalās ar 6.

Atrisinājums. a) Izmantojot pakāpju īpašības, iegūstam

$$49^5+7^9=(7^2)^5+7^9=7^{10}+7^9=7^9(7+1)=7^9\cdot 8.$$

Doto izteiksmi esam sadalījuši reizinātājos, no kuriem viens dalās ar 2, tāpēc arī reizinājums dalās ar 2. Tātad esam pierādījuši, ka skaitlis 49^5+7^9 dalās ar 2.

b) Izmantojot pakāpju īpašības, iegūstam

$$49^5-7^9=(7^2)^5-7^9=7^{10}-7^9=7^9(7-1)=7^9\cdot 6.$$

Doto izteiksmi esam sadalījuši reizinātājos, no kuriem viens dalās ar 6, tāpēc arī reizinājums dalās ar 6. Tātad esam pierādījuši, ka skaitlis 49^5-7^9 dalās ar 6.

Piezīme. **a)** daļu var pierādīt, pamatojot, ka skaitlis 49^5+7^9 ir pāra skaitlis (nepāra skaitli kāpinot jebkurā naturālā pakāpē, iegūst nepāra skaitli; divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad tas dalās ar 2.

N2.8.2. Autoservisā „Šrotiņš” ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 20. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā” kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā mašīnu skaits ir 39, kas dalās ar 3.

Aplūkosim, kā izmainās kopējais mašīnu skaits, atkarībā no tā, kuru darbību Maigonis veic:

- ja pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits palielinās par 9 (par skaitli, kas dalās ar 3);
- ja 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits samazinās par 15 (par skaitli, kas dalās ar 3).

Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k\pm 3m=3\cdot(k\pm m)$.

Tātad kopējais mašīnu skaits pēc katras darbības dalās ar 3.

Skaitļa 2015 ciparu summa ir $2+0+1+5=8$, kas nedalās ar 3, tātad arī pats skaitlis 2015 nedalās ar 3. Tātad nav iespējams, ka „Šrotiņā” kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas.

N2.8.3. Kurš no skaitļiem $(a+b)(c+d)$, $(b+c)(d+a)$, $(a+c)(b+d)$ ir vislielākais un kurš – vismazākais, ja zināms, ka $a>b>c>d>0$? *Pamato atbildi!*

Atrisinājums. Vislielākais ir skaitlis $(b+c)(d+a)$ un vismazākais ir skaitlis $(a+b)(c+d)$.

Pierādīsim, ka

1) $(b+c)(d+a)>(a+c)(b+d)$;
2) $(a+c)(b+d)>(a+b)(c+d)$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

1) $(b+c)(d+a)>(a+c)(b+d)$;
$bd+ba+cd+ca>ab+ad+cb+cd$;
$bd+ca>ad+cb$;
$bd+ca-ad-bc>0$;
$d(b-a)-c(b-a)>0$;
$(b-a)(d-c)>0$.

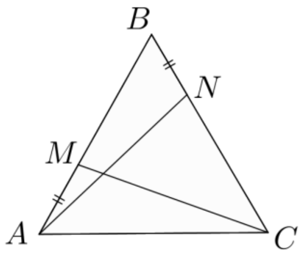
Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo $b-a<0$, $d-c<0$ un divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs skaitlis.

2) $(a+c)(b+d) > (a+b)(c+d)$;
$ab+ad+bc+cd > ac+ad+bc+bd$;
$ab+cd > ac+bd$;
$ab+cd-ac-bd > 0$;
$a(b-c)-d(b-c) > 0$;
$(b-c)(a-d) > 0$.
Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo $b-c>0$, $a-d>0$ un divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs skaitlis.

Tātad esam ieguvuši, ka $(b+c)(d+a) > (a+c)(b+d) > (a+b)(c+d)$ no kā seko prasītais.

N2.8.4. Uz vienādmalu trijstūra *ABC* malām *AB* un *BC* attiecīgi atlikti punkti *M* un *N* tā, ka $MB+BN=AC$. Pierādi, ka $\angle MAN+\angle MCN=60°$.

Atrisinājums. Trijstūris *ABC* ir regulārs, tāpēc $AC=AB$. No nogriežņu garuma īpašībām iegūstam, ka $AB=AM+MB$. Tā kā $AC=MB+BN$, tad $AM+MB=MB+BN$ jeb $AM=BN$ (skat. 417. att.). Tāpēc $\Delta ABN=\Delta CAM$ (pēc pazīmes $m\ell m$), jo $AM=BN$, $\angle ABN=\angle CAM=60°$ un $AB=AC$. Tad $\angle BAN=\angle ACM$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Līdz ar to $\angle MAN+\angle MCN=\angle ACM+\angle MCN=\angle ACB=60°$.



417. att.

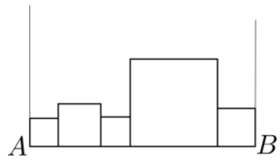
Piezīme. Uzdevumu var risināt arī pamatojot, ka $MB=NC$ un $\Delta MBC=\Delta NCA$.

N2.8.5. Kvadrāts *ABCD* sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai kvadrāta *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

Atrisinājums. Apskatām dotā kvadrāta *ABCD* vienu malu *AB* un visus kvadrātus, kam viena mala atrodas uz *AB* (skat. 418. att.). Apzīmējam *AB* garumu ar *a*, bet mazo kvadrātu malu garumus ar $a_1, a_2, ..., a_n$. No dotā izriet, ka katras malas garuma a_i reizinājums ar 4 ir naturāls skaitlis, t. i., $4a_i$ ir naturāls skaitlis. Tā kā $P_{ABCD}=4a$ un $a=a_1+a_2+...+a_n$, tad

$$P_{ABCD}=4\cdot(a_1+a_2+...+a_n)=4a_1+4a_2+...+4a_n.$$

Vairāku naturālu skaitļu summa ir naturāls skaitlis, tāpēc kvadrāta *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis.



418. att.

9. klase

N2.9.1. Atrisināt vienādojumu $\dfrac{5}{x^2-9}-\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{2}$.

Atrisinājums. Definīcijas kopa:

$$\begin{cases} x^2-9\neq 0 \\ 3-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\neq 3 \text{ un } x\neq -3 \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty).$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{5}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{10}{2(x-3)(x+3)}+\frac{2x+6}{2(x-3)(x+3)}=\frac{x^2-9}{2(x-3)(x+3)}; \qquad \Big|\cdot 2(x-3)(x+3)\neq 0$$

$10+2x+6=x^2-9;$

$x^2-2x-25=0.$

Izmantojot kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas, iegūstam

$D=4-4\cdot 1\cdot(-25)=4+100=104=4\cdot 26$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 26}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{26}}{2}=1\pm\sqrt{26}$$

Abas x vērtības pieder vienādojuma definīcijas kopai.

Atbilde: $x=1+\sqrt{26}$ vai $x=1-\sqrt{26}$.

N2.9.2. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

Atrisinājums. Visi skaitļi, kas uzrakstīti regulārā astoņstūra virsotnēs, sākumā ir nepāra skaitļi.

Ievērojam, ka

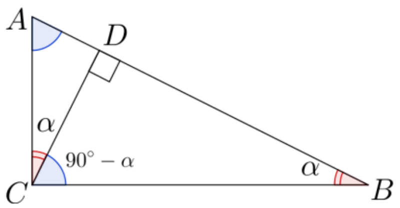
1) nepāra skaitlim pieskaitot divus nepāra skaitļus, iegūst nepāra skaitli;

2) no nepāra skaitļa atņemot divkāršotu nepāra skaitli, iegūst nepāra skaitli.

Tātad gan pēc pirmās, gan pēc otrās darbības astoņstūra virsotnē atkal būs ierakstīts nepāra skaitlis. Līdz ar to visi skaitļi, kas atrodas astoņstūra virsotnēs, vienmēr paliek nepāra. Bet skaitlis 2014 ir pāra skaitlis, tātad skaitli 2014 iegūt nevarēs.

N2.9.3. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt **a)** 2014, **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums. Taisnstūra diagonāle sadala taisnstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros. Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

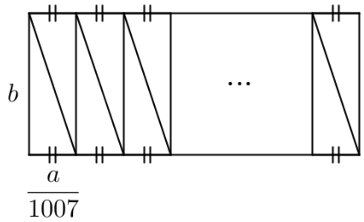


419. att.

Ja taisnais leņķis ir $\angle ACB$ (skat. 419. att.), tad no tā velk perpendikulu CD pret hipotenūzu AB. Trijstūri ABC, ACD un CBD ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle ACB=\angle ADC=\angle CDB=90°$; $\angle CBA=\angle DCA=\angle DBC=\alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pat veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai N ($N\geq 2$) vērtībai. Tātad šādu sadalījumu var atrast arī, ja $N=2014$ vai $N=2015$.

Piezīme. Doto taisnstūri var sadalīt 2014 vienādos trijstūros (tie ir līdzīgi ar līdzības koeficientu 1). Vispirms doto taisnstūri sadala 1007 vienādos taisnstūros un pēc tam katru no iegūtajiem taisnstūriem sadala divos vienādos taisnleņķa trijstūros (skat. 420. att., kur dotā taisnstūra malu garumi ir *a* un *b*).



420. att.

N2.9.4. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 13. Dārta grib nodzēst vienu no tiem, bet pārējos ierakstīt 3×4 rūtiņu tabulā (katru skaitli vienā rūtiņā) tā, lai visās rindās un kolonnās skaitļu vidējais aritmētiskais būtu vienāds.

a) Pierādīt, ka ir tieši viens skaitlis, kuru nodzēšot, viņa to varēs izdarīt!

b) Atrast vienu skaitļu izvietojuma piemēru!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka tabulā ir trīs rindas un četras kolonnas. Ar A apzīmējam rindā ierakstīto četru skaitļu vidējo aritmētisko. Tad rindā ierakstīto skaitļu summa ir $4A$ un trīs rindās (jeb visā tabulā) ierakstīto skaitļu summa ir $12A$. Pirmo trīspadsmit naturālu skaitļu summa ir

$$\frac{(1+13)\cdot 13}{2}=91.$$

Ar x apzīmējam skaitli, kuru Dārta nodzēsīs. To nosakām no vienādojuma

$$12A = 91 - x. \tag{*}$$

Pierādīsim, ka A ir naturāls skaitlis. Ja $A=n+p,$ kur $n\in N, 0<p<1$, tad no nosacījuma, ka katrā rindā ierakstīto skaitļu summa ir $4A$, izriet, ka $4p\in N.$ Savukārt no nosacījuma, ka katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir $3A$, izriet, ka $3p\in N.$ Tātad $4p-3p=p\in N,$ kas ir pretrunā ar to, ka $0<p<1$.

Esam pierādījuši, ka vienādības (*) abu pušu izteiksmju vērtība ir naturāls skaitlis. Tā kā (*) kreisās puses izteiksme dalās ar 12, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar 12.

Ievērojam, ka skaitlis 91, dalot ar 12, dod atlikumu 7, tāpēc $91-x$ dalīsies ar 12, ja x būs formā $12k+7$, kur k ir nenegatīvs vesels skaitlis, no kā izriet, ka $x=7$, jo dotie skaitļi nepārsniedz 13. Tātad tabulā nebūs ierakstīts skaitlis 7. Vidējā aritmētiskā vērtība ir $A=84:12=7$.

Lai iegūtu 12 skaitļu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 vajadzīgo izvietojumu, vispirms divās rindās ierakstām tādus skaitļus, kuru summa katrā rindā ir $4A = 28$. Trešajā rindā ierakstām atlikušos četrus skaitļus. Tad mainām skaitļu secību pa rindām, lai katras kolonnas skaitļu summa būtu 21. Skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 421. att.

4	13	1	10
6	5	8	9
11	3	12	2

13	1	10	4
2	11	3	12
6	9	8	5

421. att.

N2.9.5. Apskata visas funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a + 2b = 2015$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas vērtību, ja $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$y = a\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2015}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tātad punkti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ir kopīgi visu aplūkoto funkciju grafikiem.

Piezīmes

1. Ievērot to, ka šie punkti pieder visām parabolām, var, pamanot, ka izteiksmes $\frac{1}{2}a + b$ vērtība ir $\frac{2015}{2}$ neatkarīgi no a un b vērtībām. Tad, ņemot $x^2 = \frac{1}{2}$, funkcijas vērtība nebūs atkarīga no konkrētajām a un b vērtībām.
2. Kopīgos punktus $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2015}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ var iegūt arī no dotajām parabolām paņemot divas patvaļīgas (piemēram, $a = 0, b = \frac{2015}{2}$ un $a = 1, b = 1007$) un atrodot to krustpunktus (tas ir, atrisinot kvadrātvienādojumu).

Valsts olimpiāde

9. klase

V2.9.1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus *n* un *m*, kuriem $\frac{2015}{n^4 - m^4}$ arī ir naturāls skaitlis!

Atrisinājums. Ievērojam, ka $n^4 - m^4 = (n-m)(n+m)(n^2+m^2)$. Tā kā n un m ir naturāli skaitļi, tad $\frac{2015}{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}$ var būt naturāls skaitlis tikai tad, ja $n > m \geq 1$. Līdz ar to $1 \leq n-m < n+m < n^2+m^2$. Tas nozīmē, ka $n-m$, $n+m$ un n^2+m^2 ir trīs dažādi skaitļa 2015 dalītāji. Sadalām skaitli 2015 pirmreizinātājos: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Uzrakstām augošā secībā visus skaitļa 2015 dalītājus: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015.

Novērtējam saucēja izteiksmi:

$$n^4 - m^4 \geq n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = 4n(n-1)^2 + 2n^2 - 1 > 4(n-1)^3 - 1.$$

Tā kā $n^4 - m^4 \leq 2015$, tad arī $4(n-1)^3 - 1 < 2015$. No kurienes iegūstam, ka $(n-1)^3 < 504 < 512 = 8^3$, tātad $n - 1 < 8$ jeb $n < 9$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka lielākā iespējamā *n* vērtība ir 8 un $n + m \leq 8 + 7 = 15$. Apskatām visus iespējamos gadījumus.

$n-m$	$n+m$	n	m	n^2+m^2	
1	5	**3**	**2**	13	Der, jo $2015:(1\cdot 5\cdot 13) = 31$.
1	13	7	6	85	Neder, jo nav 2015 dalītājs.
5	13	9	4	97	Neder, jo nav 2015 dalītājs.

Tātad vienīgās iespējamās vērtības ir $n = 3$ un $m = 2$.

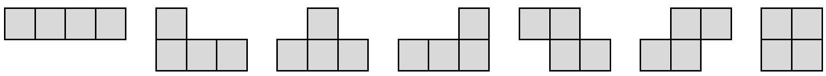
Piezīme. Var iegūt arī vājāku summas $n+m$ novērtējumu. Ievērojam: ja $n^2 + m^2 = 2015$, tad $n - m = n + m = 1$, kas nav dažādi skaitļi. Tātad $n^2 + m^2 \leq 403 < 441 = 21^2$. Līdz ar to ne *n*, ne *m* nevar pārsniegt 21, tātad $n + m \leq 42$. Šajā gadījumā papildus jāpārbauda vēl arī tās vērtības, kurām $n + m = 31$.

V2.9.2. Pierādīt, ka, izmantojot

a) visas septiņas dotās figūras (skat. 422. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

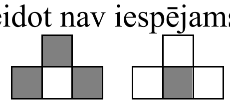
b) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri!

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



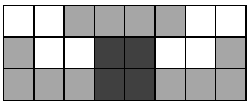
422. att.

Atrisinājums. a) Visas septiņas dotās figūras kopā satur 28 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 28 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×28 (neder), 2×14, 4×7. Izkrāsojot taisnstūrus kā šaha galdiņu, katrā no tiem melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja visas dotās figūras izkrāsotu kā šaha galdiņu, tad tās visas, izņemot trešo, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Trešā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. 423. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām septiņām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk nekā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot visas septiņas dotās figūras, taisnstūri izveidot nav iespējams.

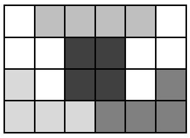


423. att.

b) Ja neizmanto trešo figūru, tad taisnstūri ir iespējams izveidot (skat., piemēram, 424. att. vai 425. att.).



424. att.



425. att.

V2.9.3. Aija izvēlas naturālu skaitli $n \le 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \le 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis *n*, tad skaitli *n* sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo 40; 80; 60; 20; 40; …, bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; … (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

1. atrisinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Katrs no tiem pieder vienam no trim cikliem:

100→100;

20→40→80→60→20;

4→8→16→32→64→28→56→12→24→48→96→92→84→68→36→72→44→88→76→5
2→4.

Pierādīsim, ka tie skaitļi, kas nedalās ar 4, nevar būt patīkami. Šķirojam divus gadījums.

- Nepāra skaitļi nevar būt patīkami, jo visi nākamie virknes locekļi būs tikai pāra skaitļi un, tātad, sākotnējā *n* vērtība tajā atkārtoti parādīties nevar.
- Pāra skaitli, kas nedalās ar 4, var pierakstīt formā $n = 4k + 2$. Šajā gadījumā otrais virknes loceklis ir vai nu $2 \cdot (4k + 2) = 4 \cdot (2k + 1)$, vai $2 \cdot (4k + 2) - 100 = 4 \cdot (2k - 24)$. Abos gadījumos virknes otrais loceklis dalās ar 4 un tas ir uzrakstāms formā $4m$. Visi nākamie virknes locekļi arī dalīsies ar 4, jo vai nu $2 \cdot 4m = 8m$, vai $2 \cdot 4m - 100 = 4 \cdot (2m - 25)$. Līdz ar to virknē nevar atkārtoti parādīties skaitlis, kas nedalās ar 4, un skaitlis $n = 4k + 2$ nav patīkams.

Tātad pavisam ir 25 patīkami skaitļi.

2. atrisinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Ja skaitlis *x* dalās ar 4, tad gan 2*x*, gan $2x - 100$ arī dalīsies ar 4. Aplūkosim virkni, sākot ar patvaļīgu skaitli x_1, kas dalās ar 4: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Tā kā ir tikai 25 skaitļi, kas tajā var parādīties, tad skaidrs, ka kādā brīdī virknes locekļi sāks atkārtoties. Aplūkosim pirmo skaitli virknē, kas atkārtojas, tas ir, tādu x_{j+1}, ka visi iepriekšējie $x_1, x_2, \ldots, x_j$ ir dažādi, bet x_{j+1} ir vienāds ar kādu no tiem. Pierādīsim, ka $x_{j+1} = x_1$, ar to arī būs pierādīts, ka skaitlis x_1 ir patīkams. Pieņemsim pretējo, ka $x_{j+1} = x_{k+1}$ un aplūkosim, kādi varēja būt iepriekšējie skaitļi x_j un x_k. Tā kā tiem jābūt dažādiem, tad skaidrs, ka x_{j+1} un x_{k+1} tika iegūti ar dažādām darbībām, tas ir, $x_{j+1} = 2x_j$ un $x_{k+1} = 2x_k - 100$ (vai otrādi), kas nozīmē, ka $2x_j = 2x_k - 100$ jeb $x_k - x_j = 50$ un tā ir pretruna, jo gan x_j, gan x_k dalās ar 4, bet 50 nedalās ar 4.

Vēl jāpierāda, ka pārējie skaitļi nav patīkami. Skaidrs, ka nepāra skaitļi nav patīkami, jo, ja *x* ir nepāra skaitlis, tad gan 2*x*, gan $2x - 100$ ir pāra skaitļi un tālāk virknē visi skaitļi būs pāra.

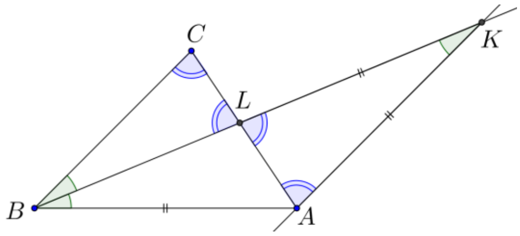
Ja skaitlis *x* dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tad *x* nav patīkams, jo gan 2*x*, gan $2x - 100$ dalās ar 4 un tālāk virknē visi skaitļi dalīsies ar 4.

V2.9.4. Trijstūrī *ABC* novilkta bisektrise *BL* (*L* atrodas uz malas *AC*), tā krusto taisni, kas no *A* vilkta paralēli *BC*, punktā *K*. Zināms, ka $LK = AB$. Pierādīt, ka $AB > BC$!

Atrisinājums. Tā kā $\angle LBC = \angle LBA$ pēc bisektrises definīcijas un $\angle LBC = \angle AKB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *BC* un *AK*, tad $\angle LBA = \angle AKB$ un trijstūris *AKB* ir vienādsānu, pie kam $AB = AK$ (skat. 426. att.). Arī trijstūris *AKL* ir vienādsānu, jo pēc dotā un iepriekš iegūtā $LK = AB = AK$. Vienādsānu trijstūrim leņķi pie pamata ir vienādi, tāpēc $\angle ALK = \angle LAK$.

Tā kā $\angle ALK = \angle BLC$ kā krustleņķi un $\angle LAK = \angle ACB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *BC* un *AK*, tad $\angle BLC = \angle BCL$ un trijstūris *LBC* ir vienādsānu, pie kam $BL = BC$.

No trijstūra nevienādības $AB + AK > BK = BL + LK = BC + AK$ un līdz ar to $AB > BC$.



426. att.

V2.9.5. Kāda ir izteiksmes $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja *a* ir reāls skaitlis?

1. atrisinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a = 0$. Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4+1} = a^{20} + \frac{a^8 + a^4 + 1}{a^4+1} = a^{20} + \frac{a^8}{a^4+1} + 1.$$

Pirmie divi saskaitāmie ir nenegatīvi, tātad šīs izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

2. atrisinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a = 0$. Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4+1} = a^{20} - 1 + (a^4+1) + \frac{1}{a^4+1}.$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$(a^4+1) + \frac{1}{a^4+1} \geq 2 \cdot \sqrt{(a^4+1) \cdot \frac{1}{a^4+1}} = 2.$$

Tā kā $a^{20} \geq 0$, tad iegūstam $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1} \geq 0 - 1 + 2 = 1$. Tātad dotās izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

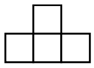
Atklātā matemātikas olimpiāde

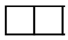
5. klase

A2.5.1. Izsaki skaitli 1 kā piecu atšķirīgu daļu summu, kuru saucēji ir vienādi!

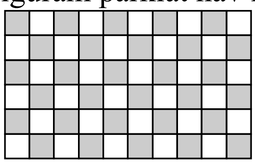
Atrisinājums. Piemēram, $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{15}{15}=1$.

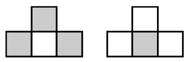
A2.5.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 6×10 rūtiņas var pārklāt ar vienu 427. att. redzamo figūru un 28 figūrām, kādas redzamas 428. att.? Figūras drīkst pagriezt.


427. att.


428. att.

Atrisinājums. Nē, prasīto izdarīt nevar. Iekrāsosim doto taisnstūri kā šaha galdiņu (skat. 429. att.). Lai kur novietotu 428. att. figūru, tā vienmēr pārklās tieši vienu melnu rūtiņu, tātad 28 tādas figūras kopā pārklās 28 melnas rūtiņas. Ar vienu 427. att. figūru var pārklāt vai nu tieši 3 melnas, vai tieši 1 melnu rūtiņu (skat. 430. att.), tātad kopā ar visām dotajām figūrām būs pārklātas 29 vai 31 melna rūtiņa, bet taisnstūrī ir 30 melnas rūtiņas. Līdz ar to taisnstūri ar dotajām figūrām pārklāt nav iespējams.


429. att.


430. att.

A2.5.3. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, der taisnstūris ar malu garumiem 1 un 3, tad laukums ir 3, kas ir pirmskaitlis.

b) Nē, nav iespējams. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b, tad taisnstūra perimetrs ir $P=2\cdot(a+b)$. Perimetrs vienmēr ir pāra skaitlis. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tāpēc $a+b$ būtu jābūt vienādam ar 1, bet tas nav iespējams, jo a un b ir naturāli skaitļi.

A2.5.4. Kādu naturālu skaitli, saskaitot ar savu ciparu summu, iegūst skaitli 328? *Atrodi visus tādus skaitļus un pamato, ka citu nav!*

Atrisinājums. Meklētajam skaitlim nevar būt mazāk kā trīs cipari, jo pat lielāko divciparu skaitli saskaitot ar tā ciparu summu iegūst $99+9+9=117$, kas ir mazāk nekā 328. Meklētajam skaitlim nevar būt vairāk kā trīs cipari, jo tad, saskaitot šo skaitli ar tā ciparu summu, iegūst vismaz četrciparu skaitli. Tātad meklētais skaitlis ir trīsciparu, tā pirmo ciparu apzīmējam ar a, otro – ar b, trešo – ar c. Tā kā meklētā skaitļa un tā ciparu summa ir 328, tad a nav lielāks kā 3. Līdz ar to ciparu summa $a+b+c$ nevar būt lielāka kā $3+9+9=21$, tāpēc meklētais skaitlis nav mazāks kā $328-21=307$. Tas nozīmē, ka $a=3$. Ievērojam, ka skaitļa otrais cipars b var būt tikai 0, 1 vai 2. Apskatām katru no gadījumiem.

1) Ja $b=0$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $300+c$ un tā ciparu summa ir $3+0+c=3+c$. Tātad $300+c+3+c=328$ jeb $2c=25$, kas ir pretrunā ar to, ka c ir cipars.
2) Ja $b=1$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $310+c$ un tā ciparu summa ir $3+1+c=4+c$. Tātad $310+c+4+c=328$ jeb $2c=14$, no kā izriet, ka $c=7$ un meklētais skaitlis ir 317 (tiešām $317+3+1+7=328$).
3) Ja $b=2$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $320+c$ un tā ciparu summa ir $3+2+c=5+c$. Tātad $320+c+5+c=328$ jeb $2c=3$, kas ir pretrunā ar to, ka c ir cipars.

Tātad vienīgais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 317.

Piezīme. Var veikt pilno pārlasi.

A2.5.5. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām divas ir viltotas. Visu īsto monētu masas ir vienādas. Arī abām viltotajām monētām ir vienāda masa, bet tā ir lielāka nekā īstās monētas masa. Kā ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast abas viltotās monētas?

Atrisinājums. Sanumurēsim monētas ar skaitļiem no 1 līdz 9 un sadalīsim grupās pa trim: $a=(1,2,3)$, $b=(4,5,6)$, $c=(7,8,9)$. Abas viltotās monētas var atrasties vienā grupā vai arī divās dažādās grupās. Vispirms ar divām svēršanām noskaidrosim, kurās grupās atrodas viltotās monētas. Salīdzinām *a* ar *b*, tad smagāko no tām (vai jebkuru, ja tās vienādas) salīdzinām ar *c*:

- ja $a>b$ (tad grupā *b* visas monētas ir īstas) un
  - $a>c$, tad abas viltotās monētas ir grupā *a*;
  - $a=c$, tad viena viltotā monēta ir grupā *a*, otra – *c*;
- ja $a=b$ (tad abās grupās ir vienāds skaits viltoto monētu) un
  - $a>c$, tad viena viltotā monēta ir grupā *a*, otra – *b*;
  - $a<c$, tad abas viltotās monētas ir grupā *c*.

Gadījums, kad $a<b$ ir identisks gadījumam, kad $a>b$.

Tā ar divām svēršanām esam noskaidrojuši viltoto monētu sadalījumu pa grupām. Tālāk katrā grupā, kur ir kāda viltotā monēta, uz katra svaru kausa uzliekot pa vienai monētai un vienu atstājot malā, ar vienu svēršanu var noskaidrot, kura ir viltotā:

- ja grupā ir viena viltotā monēta un
  - svaru kausi nav līdzsvarā, tad smagākā ir viltotā;
  - svaru kausi ir līdzsvarā, tad šīs abas ir īstas un viltota ir tā trešā, kas stāv malā;
- ja grupā ir divas viltotas monētas un
  - svaru kausi ir līdzsvarā, tad tās abas ir viltotas;
  - svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā ir īstā, bet abas pārējās (smagākā un tā, kas stāv malā) ir viltotas.

6. klase

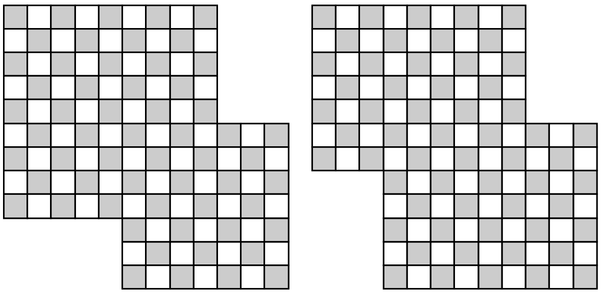
A2.6.1. Profesors Cipariņš iedomājās četrus skaitļus, kuru summa ir vesels skaitlis. Pēc tam viņš saskaitīja šos skaitļus visos iespējamos veidos pa pāriem un ieguva sešas summas. Izrādījās, ka viena no šīm summām ir daļskaitlis. **a)** Pierādi, ka vēl vismaz viena no iegūtajām summām ir daļskaitlis. **b)** Vai var būt tā, ka tieši divas summas ir daļskaitļi, bet pārējās – veseli skaitļi?

Atrisinājums. a) Visu četru skaitļu *a*, *b*, *c*, *d* summu apzīmēsim ar $S=a+b+c+d$ un to summu, kas ir daļskaitlis, apzīmēsim ar $S_1=a+b$. Tā kā *S* ir vesels skaitlis, tad starpība $S-S_1=a+b+c+d-(a+b)=c+d$ arī ir daļskaitlis. Tātad vēl vismaz viena no iegūtajām summām ir daļskaitlis.

b) Jā, tieši divas summas var būt daļskaitļi, ja profesors Cipariņš ir iedomājies, piemēram, skaitļus $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

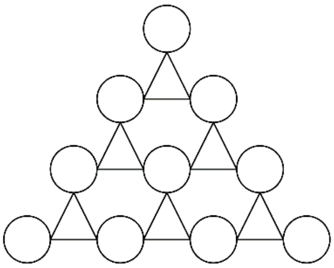
A2.6.2. Vai kvadrātu ar izmēriem 12×12 rūtiņas, kuram no diviem pretējiem stūriem izgriezti taisnstūri 3×5 rūtiņas, var pārklāt ar 57 taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×2 rūtiņas?

Atrisinājums. Nē, prasīto izdarīt nevar. Ir divi dažādi veidi, kā no kvadrāta pretējiem stūriem var izgriezt 3×5 rūtiņu taisnstūrus: 1) viens novietots horizontāli, otrs – vertikāli, 2) abi novietoti vienā virzienā. Iekrāsosim atlikušo figūru kā šaha galdiņu. Neatkarīgi no tā, kā ir izgriezti taisnstūri, figūrā ir 58 melnas un 56 baltas rūtiņas (skat. 431. att.). Lai kur novietotu domino kauliņu, tas vienmēr pārklās tieši vienu melnu un tieši vienu baltu rūtiņu. Līdz ar to 57 domino kauliņi pārklās vienāda skaita melno un balto rūtiņu. Iegūta pretruna, jo figūrā nav vienāds skaits melno un balto rūtiņu.



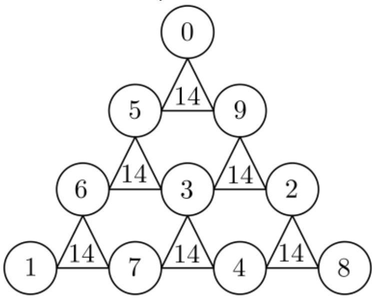
431. att.

A2.6.3. Aldis aplīšos (skat. 432. att.) ierakstīja ciparus no 0 līdz 9 (katrā aplītī citu) un katrā trijstūrī ierakstīja tā virsotnēs esošo skaitļu summu. Vai var gadīties, ka visi seši trijstūros ierakstītie skaitļi ir vienādi?



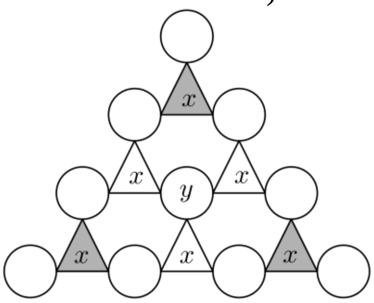
432. att.

Atrisinājums. Jā, trijstūros ierakstītie skaitļi var būt vienādi, skat., piemēram, 433. att.

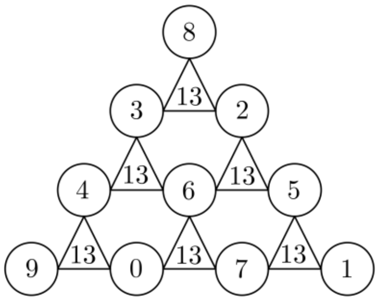


433. att.

Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast šādi spriedumi. Ar x apzīmējam summu, kas ierakstīta katrā trijstūrī, ar y – skaitli, kas ierakstīts *centrālajā* aplītī (skat. 434. att.). Ievērojam, ka pelēko trijstūru virsotnēs ierakstīto skaitļu un *centrālajā* aplītī ierakstītā skaitļa summa ir $0+1+2+...+9=3x+y$ jeb $3x+y=45$. Tā kā pēdējās vienādības labā puse dalās ar 3, tad arī kreisajai pusei jādalās ar 3. Tas iespējams tikai tad, ja y dalās ar 3. Skaitlis y nevar būt 0 (jo tad $x=15$ un nevar atrast 3 skaitļu pārus, ko ierakstīt tam apkārt, kuru summa ir 15); tieši tāpat y nevar būt 9. Tātad y var būt 3 vai 6, tad x attiecīgi ir 14 vai 13 (skaitļu izkārtojumu skat. attiecīgi 433. att. un 435. att.).



434. att.



435. att.

A2.6.4. Pierādi, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no sešiniekiem un nullēm! (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi).

Atrisinājums. Tā kā skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi, tad visi dažādie pirmreizinātāji tam ir pāra skaitā. Ja skaitlis beidzas ar pāra skaita nullēm, tad šīs nulles varam atmest, jo šādā gadījumā mēs atmetam reizinātāju $10 = 2 \cdot 5$ pāra skaitā. Lai dotais skaitlis būtu kvadrāts, tad atlikušajam skaitlim (bez pāra skaita nullēm beigās) visi dažādie pirmreizinātāji jāsatur pāra skaitā. Ja atlikušā skaitļa pēdējie divi cipari ir

- 60, tad tas dalās ar 5, bet nedalās ar 25, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 5;
- 06 vai 66, tad šis skaitlis dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 2.

Tātad esam pierādījuši, ka dotais skaitlis nav naturālā skaitļa kvadrāts.

A2.6.5. Vairāki bērni devās pārgājienā un mājupceļā katrs kā suvenīru paņēma vienu vai vairākus akmentiņus. Zināms, ka visu akmentiņu masas ir dažādas. Atpūtas brīdī katrs no bērniem izvēlējās vienu no saviem akmentiņiem un pēc vienas vai vairākām maiņām beigās dabūja kāda cita bērna akmentiņu.

Vai var būt, ka pēc šīs maiņas **a)** katra bērna akmentiņu kopējā masa samazinājās, **b)** tieši viena bērna akmentiņu kopējā masa palielinājās, bet katram no pārējiem bērniem – samazinājās?

Atrisinājums. a) Tas nav iespējams. Ja katra bērna akmentiņu masa būtu samazinājusies, tad arī visu akmeņu kopējai masai būtu jāsamazinās, bet maiņas rezultātā visu akmeņu kopējā masa nevar samazināties.

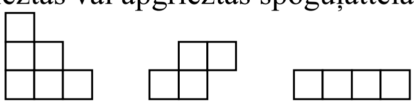
b) Tas ir iespējams. Parādīsim piemēru, kurā tas izpildās. Visi bērni paņem rokā to akmentiņu, ko plānojuši mainīt un sastājas rindā tā, ka pirmais stāv bērns ar visvieglāko akmeni, otrais – ar otru vieglāko akmeni, …, pēdējais – ar vissmagāko akmeni. Ja pirmais bērns iedod savu akmeni otrajam, otrais – trešajam, …, pēdējais – pirmajam, tad tikai pirmajam bērnam akmentiņu masa ir palielinājusies, bet visiem pārējiem – samazinājusies.

7. klase

A2.7.1. Deviņas vienādas cepures kopā maksā mazāk nekā 10 eiro, bet desmit tādas pašas vienādas cepures maksā vairāk nekā 11 eiro. Cik maksā viena cepure?

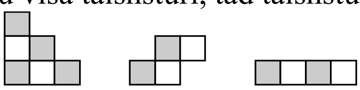
Atrisinājums. Ar c apzīmējam vienas cepures cenu. Tad no dotā izriet, ka $9c < 10$ un $10c > 11$ jeb $c < 1\frac{1}{9}$ un $c > 1\frac{1}{10}$. Tātad $c \in \left(1\frac{1}{10}; 1\frac{1}{9}\right)$ un, ievērojot, ka $1\frac{1}{10} = 1{,}10$ un $1\frac{1}{9} = 1{,}111...$, iegūstam, ka cepures cena ir 1,11 eiro.

A2.7.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 7×6 rūtiņas var pārklāt ar 436. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



436. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā. Melnā krāsā ir nokrāsota 21 (nepāra skaits) rūtiņa. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietotas dotās figūras, katra no tām vienmēr noklās pāra skaita melnās rūtiņas (skat. 437. att.). Tāpēc arī visas izmantotās figūras kopā var noklāt tikai pāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



437. att.

Piezīme. Der arī krāsojums joslās.

A2.7.3. **a)** Atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 13, pēdējie divi cipari ir 13 un kurš dalās ar 13.

b) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 11, pēdējie divi cipari ir 11 un kurš dalās ar 11?

Atrisinājums. a) Der, piemēram, skaitlis 11713, jo $1+1+7+1+3=13$ un $11713:13=901$.

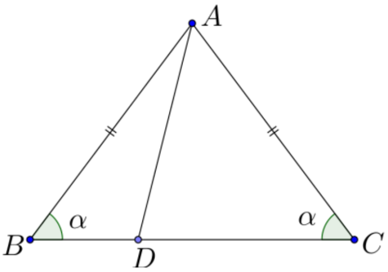
Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast šādi spriedumi. Skaitļa pirmo ciparu (bez pēdējiem diviem cipariem 1 un 3) veidotā skaitļa x ciparu summai jābūt 9. Tas nozīmē, ka skaitlis x dalās ar 9. Bet tam ir jādalās arī ar 13, jo meklētajam skaitlim $100x+13$ jādalās ar 13 un skaitļi 100 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad x jādalās ar $9\cdot 13=117$. Pats skaitlis 117 arī ir mazākais iespējamais skaitlis x.

b) Nē, nevar. Izmantosim dalāmības pazīmi ar 11: skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu, kas atrodas pāra pozīcijās, summas un ciparu, kas atrodas nepāra pozīcijās, summas starpība dalās ar 11.

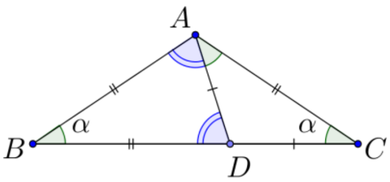
Pieņemsim, ka var atrast skaitli formā $\overline{m_1m_2...m_k11}$, kas dalās ar 11. Tad $(m_1+m_3+...)-(m_2+m_4+...)$ jādalās ar 11. Tā kā $m_1+m_2+m_3+...+m_k=9$, tad vienīgā iespēja, ka $(m_1+m_3+...)-(m_2+m_4+...)=0$. Saskaitot pēdējās divas vienādības, iegūstam, ka $2\cdot(m_1+m_3+m_5+...)=9$ jeb $m_1+m_3+m_5+...=4{,}5$, kas nav iespējams nekādām ciparu m_i vērtībām.

A2.7.4. Vienādsānu trijstūrī ABC uz pamata malas BC atzīmēts iekšējs punkts D tā, ka arī trijstūri ABD un ACD ir vienādsānu. Aprēķini trijstūra ABC leņķus! *Atrodi visus gadījumus un pamato, ka citu nav!*

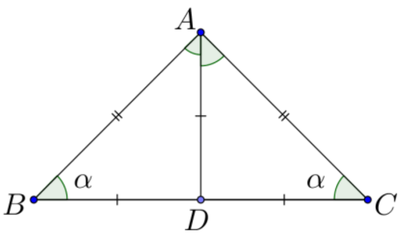
Atrisinājums. Apzīmējam $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$ (skat. 438. att.).



438. att.



439. att.



440. att.

Apskatām vienādsānu trijstūri ABD. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

1) Ja $AB=AD$, tad punkts D nav BC iekšējs punkts.

2) Ja $BD=AB$, apskatām vienādsānu trijstūri ACD. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

2.1) Ja $AD=AC$, tad punkts D nav BC iekšējs punkts.
2.2) Ja $AC=CD$, tad $AB+AC=BC$, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.
2.3) Ja $AD=CD$ (skat. 439. att.), tad $\angle ADC=180°-2\alpha$ un $\angle BDA=\angle BAD=2\alpha$. Tad no ΔBAD iekšējo leņķu summas izriet, ka $\alpha+2\alpha+2\alpha=180°$ jeb $\alpha=36°$. Līdz ar to trijstūra ABC leņķi ir $\angle ABC=\angle ACB=36°$ un $\angle BAC=108°$.

3) Ja $AD=BD$, apskatām vienādsānu trijstūri ACD. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

3.1) Ja $AD=AC$, tad punkts D nav BC iekšējs punkts.
3.2) Ja $AC=CD$, tad simetrijas dēļ šis gadījums ir analogs 2.3) gadījumam.
3.3) Ja $AD=CD$, tad $\angle ABD=\angle ACB=\angle CAD=\angle BAD=\alpha$ (skat. 440. att.). No ΔABC iekšējo leņķu summas izriet, ka $4\alpha=180°$ jeb $\alpha=45°$. Līdz ar to trijstūra ABC leņķi ir $\angle ABC=\angle ACB=45°$ un $\angle BAC=90°$.

A2.7.5. Uz galda stāv četras pēc izskata vienādas bumbiņas, to masas attiecīgi ir 10, 11, 12 un 13 grami. Vai ar dažām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem, kur katrā kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, iespējams **a)** atrast visvieglāko un vissmagāko bumbiņu; **b)** noteikt katras bumbiņas masu?

Atrisinājums. Tā kā katrā svaru kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, tad ir iespējami trīs dažādi varianti, kā bumbiņas var būt izvietotas uz svaru kausiem:

- $10+11<12+13$;
- $10+12<11+13$;
- $10+13=11+12$.

Veiksim visas trīs iespējamās svēršanas. Smagākā būs bumbiņa, kas abos nevienādajos rādījumos bija uz smagākā kausa, bet vieglākā – kas abos nevienādajos rādījumos bija uz vieglākā kausa. Atlikušās divas bumbiņas pēc visu iespējamo svēršanu rezultātiem atšķirt nav iespējams. Tātad a) visvieglāko un vissmagāko bumbiņu ir iespējams atrast, b) noteikt katras bumbiņas masu noteikt nav iespējams.

8. klase

A2.8.1. Nosaki, vai izteiksmes $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vērtība ir racionāls skaitlis!

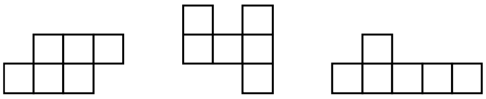
Atrisinājums. Pārveidojam doto izteiksmi:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$$

$$=|\sqrt{5}+1|-|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2.$$

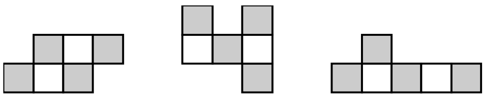
Izteiksmes vērtība ir racionāls skaitlis, jo 2 ir racionāls.

A2.8.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 10×9 rūtiņas var pārklāt ar 441. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



441. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā. Taisnstūrī kopā ir 90 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 6 rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietotas dotās figūras, katra no tām vienmēr pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas (skat. 442. att.). Tātad visas figūras kopā pārklās pāra skaita melnās rūtiņas. Tā kā taisnstūrī melnā krāsā ir nokrāsotas 45 (nepāra skaits) rūtiņas, tad prasīto nevar izdarīt.



442. att.

Piezīme. Der arī krāsojums joslās.

A2.8.3. Atrast vienu naturālu skaitli, kas lielāks nekā 2015 un ko nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu.

Atrisinājums. Der, piemēram, skaitlis 2500. Parādīsim, ka to nevar izteikt kā izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu. Pieņemsim pretējo, ka $2500=k^2+p$, kur k ir naturāls skaitlis un p ir pirmskaitlis. Tad $p=2500-k^2=50^2-k^2=(50-k)(50+k)$. Lai p būtu pirmskaitlis, mazākajam reizinātājam jābūt vienādam ar 1, tas ir, $50-k=1$ jeb $k=49$. Tādā gadījumā $p=50+49=99$, kas nav pirmskaitlis. Tātad pieņēmums ir aplams un skaitli 2500 nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu.

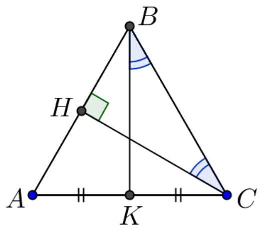
Piezīme. Der jebkurš naturāls skaitlis $n>2015$ tāds, ka $n=m^2$ un $2m-1$ ir salikts skaitlis.

A2.8.4. Divu taisnstūra paralēlskaldņu visu šķautņu garumi ir naturāli skaitļi. Pirmā paralēlskaldņa trīs dažādo skaldņu perimetri ir p_1, q_1, r_1, bet otrā p_2, q_2, r_2, turklāt $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$. Vai var apgalvot, ka pirmā paralēlskaldņa tilpums ir mazāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums?

Atrisinājums. Dotais apgalvojums ne vienmēr ir patiess. Parādīsim pretpiemēru. Par pirmo izvēlēsimies paralēlskaldni, kura šķautņu garumi ir 3, 10 un 12, bet par otro – kura šķautņu garumi 2, 12 un 14. Tad $p_1 = 2\cdot(3+10) = 26$, $q_1 = 2\cdot(3+12) = 30$ un $r_1 = 2\cdot(10+12) = 44$, bet $p_2 = 2\cdot(2+12) = 28$, $q_2 = 2\cdot(2+14) = 32$ un $r_2 = 2\cdot(12+14) = 52$. Tātad ir spēkā uzdevumā dotās sakarības: $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$, bet paralēlskaldņu tilpumi ir $V_1 = 3\cdot 10\cdot 12 = 360$ un $V_2 = 2\cdot 12\cdot 14 = 336$, kur pirmā paralēlskaldņa tilpums ir lielāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums.

A2.8.5. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *CH* un mediāna *BK*. Zināms, ka $CH = BK$ un $\angle HCB = \angle KBC$. Pierādīt, ka trijstūris *ABC* ir vienādmalu!

1. atrisinājums. Tā kā $BK = HC$, $\angle KBC = \angle HCB$ un *BC* – kopīga mala (skat. 443. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\angle BKC = \angle CHB = 90°$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros). Tātad *BK* ir gan augstums, gan mediāna, līdz ar to ΔABC ir vienādsānu trijstūris ($AB = BC$). Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu, iegūstam $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CH = \frac{1}{2}AC\cdot BK$. Tā kā $CH = BK$, tad arī $AB = AC$. Tātad $AB = AC = BC$ un ΔABC ir vienādmalu trijstūris.



443. att.

2. atrisinājums. Tā kā $BK = HC$, $\angle KBC = \angle HCB$ un *BC* – kopīga mala (skat. 443. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\angle BKC = \angle CHB = 90°$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros) un *BK* ir augstums no virsotnes *B* pret malu *AC*. Tā kā $AK = KC$, $\angle AKB = \angle BKC = 90°$ un *BK* – kopīga mala, tad $\Delta AKB = \Delta BCK$ pēc pazīmes $m\ell m$. No kā izriet, ka $\angle ABK = \angle KBC$. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam

- no ΔHCB: $\angle HBC + \angle BCH + \angle CHB = 180°$;
  $2\cdot\angle ABK + \angle ABK + 90° = 180°$;
  $3\cdot\angle ABK = 90°$ jeb $\angle ABK = 30°$;
- no ΔABK: $\angle BAC = 180° - \angle ABK - \angle AKB = 180° - 30° - 90° = 60°$;
- no ΔABC: $\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 60° - 2\cdot 30° = 60°$.

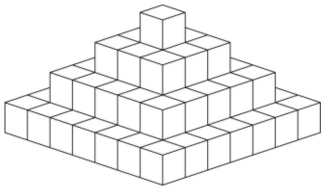
Esam ieguvuši, ka katrs trijstūra *ABC* leņķis ir $60°$, tātad ΔABC ir vienādmalu trijstūris.

9. klase

A2.9.1. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

Atrisinājums. Dotos skaitļus apzīmējam ar x un $x+2015$. Šo skaitļu reizinājums ir $x\cdot(x+2015)$. Apskatām funkciju $f(x) = x\cdot(x+2015) = x^2 + 2015x$. Funkcijas grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_v = \frac{-2015}{2} = -1007{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tātad meklētie skaitļi ir $-1007{,}5$ un 1007,5.

A2.9.2. Tornis ir salikts no vienības kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$. Apakšējā slānī ir 7×7 kubiņi. Otrs slānis ir novietots virs pirmā slāņa centrālās daļās, tajā ir 5×5 kubiņi. Trešajā slānī, kurš novietots apakšējās daļas centrā, ir 3×3 kubiņi un augšā centrā ir 1 vienības kubiņš (skat. 444. att.). Vai šo torni var salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$?



444. att.

Atrisinājums. Katru slāni izkrāsosim trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. 445. att.). Katrs bloks ar izmēriem $1\times1\times3$ satur visas trīs krāsas, tāpēc visi bloki kopā satur vienāda skaita katras krāsas kubiņu. Tā kā tornis satur 29 vienības kubiņus krāsā 1, 28 – krāsā 2, 27 – krāsā 3, tad torni nevar salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1

445. att.

A2.9.3. Pierādīt, ka x^5-5x^3+4x dalās ar 120, ja x ir vesels skaitlis!

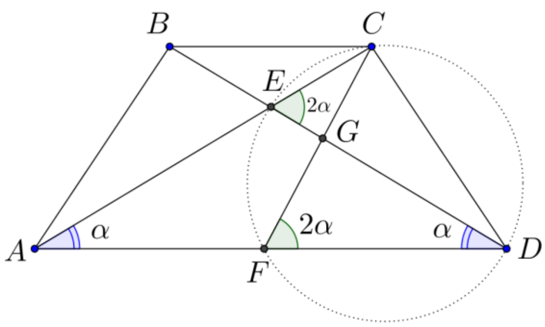
Atrisinājums. Sadalām doto izteiksmi reizinātājos:

$$x^5-5x^3+4x=x\cdot(x^4-5x^2+4)=x\cdot(x^4-x^2-4x^2+4)=x\cdot(x^2(x^2-1)-4(x^2-1))=$$
$$=x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-4)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2).$$

Esam ieguvuši, ka dotā izteiksme ir piecu pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums. Vismaz divi no šiem skaitļiem dalās ar 2, no kuriem viens dalās arī ar 4, vismaz viens – ar 3, un vismaz viens – ar 5. Tātad šo skaitļu reizinājums dalās ar $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

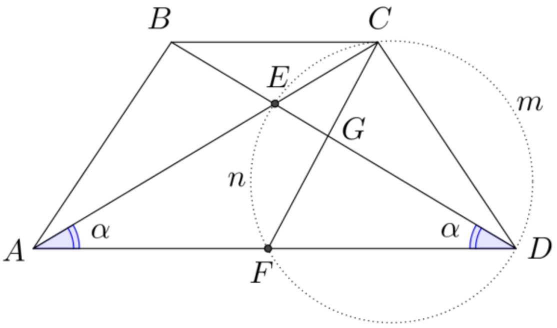
A2.9.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, bet diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *CDE* apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu *AD* iekšējā punktā *F*. Nogriežņu *CF* un *BD* krustpunkts ir *G*. Nosaki $\angle CGD$ lielumu, ja $\angle CAD=\alpha$!

1. atrisinājums. Tā kā trapece *ABCD* ir vienādsānu, tad arī $\angle ADE=\alpha$ (skat. 446. att.). No trijstūra *AED* iegūstam, ka $\angle AED=180°-2\alpha$. Pēc blakusleņķu īpašības $\angle CED=2\alpha$. Punkti *C*, *E*, *F*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\angle CED=\angle CFD=2\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka *CD*. No trijstūra *FGD* iegūstam, ka $\angle FGD=180°-3\alpha$ un šī leņķa blakusleņķis $\angle CGD=3\alpha$.



446. att.

2. atrisinājums. Tā kā trapece *ABCD* ir vienādsānu, tad arī $\angle ADE=\alpha$ (skat. 447. att.). Punkti *C*, *E*, *F*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\overset{\frown}{EF}=2\alpha$ kā ievilktajam leņķim *FDE* atbilstošā loka lielums. Leņķis CAD ir riņķa līnijas ārējais leņķis, tāpēc $\angle CAD = \frac{1}{2}(C\breve{m}D - E\breve{n}F)$. Ievietojot zināmos lielumus un izsakot $C\breve{m}D$, iegūstam $C\breve{m}D = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$. Tā kā $\angle CGD$ ir riņķa līnijas iekšējais leņķis, tad $\angle CGD = \frac{1}{2}(C\breve{m}D + E\breve{n}F) = \frac{1}{2}(4\alpha + 2\alpha) = 3\alpha$.



447. att.

A2.9.5. Parādīt, kā naturālos skaitļus no 1 līdz $2n-1$ uzrakstīt rindā tā, ka visas blakus esošo skaitļu starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko) ir dažādas un skaitlis 1 ir vidējais (n-tais), ja **a)** $n=5$; **b)** $n=1008$.

Atrisinājums. a) Der, piemēram, virkne

7; 4; 6; 5; 1; 9; 2; 8; 3

3 2 1 4 8 7 6 5

b) Aplūkosim skaitļu virkni 1; 2015; 2; 2014; 3; 2013; 4; 2012; ...; 1007; 1009; 1008 (šī virkne sastāv no divām virknēm – vienas augošas 1; 2; 3; …; 1008 un otras dilstošas 2015; 2014; …; 1009). Šajā virknē ir visi skaitļi no 1 līdz 2015 un starpības starp katriem diviem blakus esošiem skaitļiem dilst no 2014 līdz 1. Šī virkne pēc savām īpašībām ir ļoti līdzīga nepieciešamajai, tikai skaitlis 1 šajā virknē ir pirmais nevis 1008. loceklis. Virknes 1008. loceklis (jeb 504. loceklis dilstošajā virknē ir $a_{504} = 2015 + (-1)(504-1) = 1512$) ir 1512, virknes 1009. loceklis (jeb 505. loceklis augošajā virknē) ir 505. Starpība starp virknes 1008. un 1009. locekli ir $1512 - 505 = 1007$. „Pārgriezīsim" izveidoto virkni starp 1008. un 1009. elementu, iegūstot divus virknes fragmentus, no kuriem pirmais satur 1008 locekļus, bet otrais satur 1007 locekļus. No sākotnējām blakus elementu starpībām ir pazaudēta tikai „pārgrieztā" starpība 1007. Tagad saliksim šos fragmentus pretējā secībā – tā, ka vispirms ir fragments, kurā ir 1007 skaitļi un kurš beidzas ar skaitli 1008, un pēc tam fragments, kurā ir 1008 skaitļi un kurš sākas ar skaitli 1. „Salīmēsim" šos fragmentus kopā, iegūstot trūkstošo starpību 1007. Vajadzīgā virkne ir izveidota, skaitlis 1 ir jaunās virknes 1008. loceklis un starp blakus elementu starpībām atrodami visi skaitļi no 1 līdz 2014:

505; 1511; 506; 1510; … 1010; 1007; 1009; 1008; **1;** 2015; 2; 2014; 3; … 504; 1512

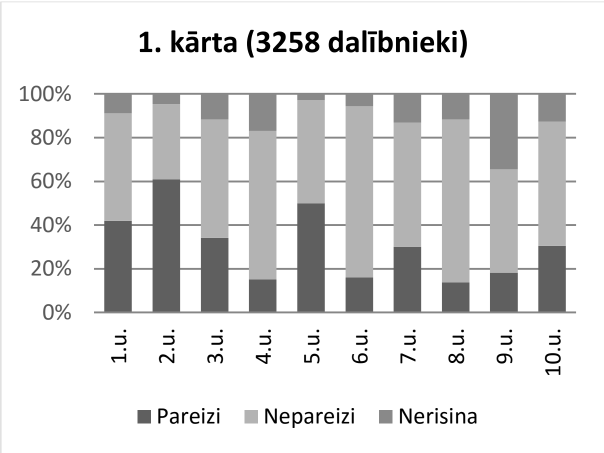
1006 1005 1004 1003 … 4 3 2 1 1007 2014 2013 2012 2011 2010 … 1009 1008

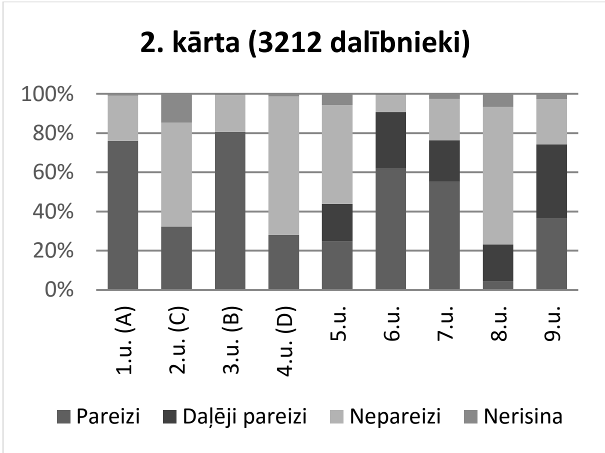
Pārskats

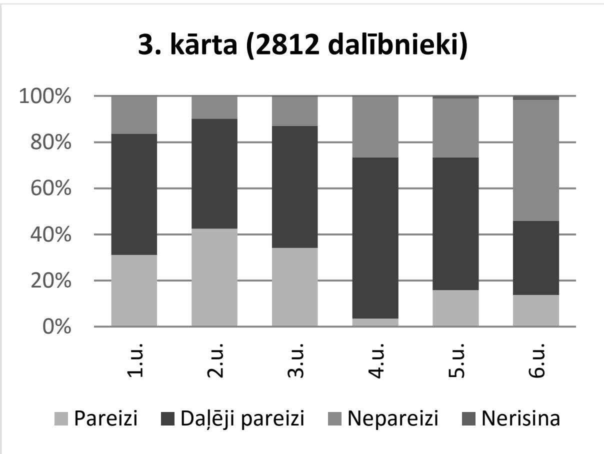
Šajā nodaļā dots skolēnu rezultātu apkopojums konkursā “Tik vai… Cik?”, Novada olimpiādē, Valsts olimpiādē un Atklātajā matemātikas olimpiādē.
Tabulās norādīta informācija par to, cik procenti no skolēniem ir ieguvuši attiecīgo punktu skaitu katrā uzdevumā; ailē “vidēji” norādīts vidējais iegūto punktu skaits par uzdevumu.
Jauno matemātiķu konkursam un Profesora Cipariņa klubam aprakstītas skolēnu biežāk pieļautās kļūdas, doti ieteikumi un vērtēšanas kritēriji.

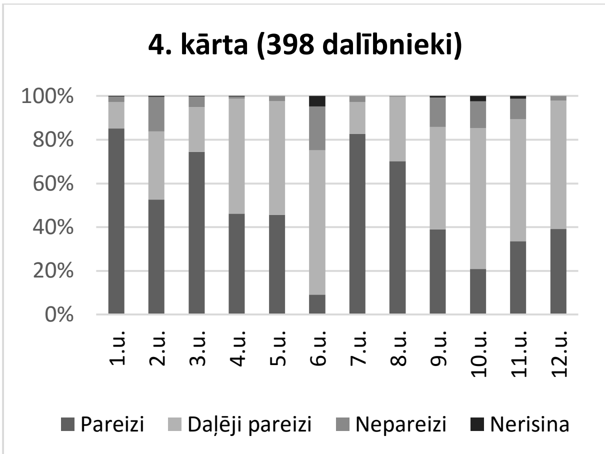
2013./2014. mācību gads

Tik vai… Cik?









Jauno matemātiķu konkurss

Pirmā kārta

J1.1.1. Rēbuss

Lielākā daļa risinātāju ar šo uzdevumu bija tikuši galā. Daži pat bija izdomājuši vairākus iespējamos variantus, bet tā kā nebija prasīts atrast visus iespējamos variantus, tad papildus punktus par to nevarēja saņemt.

J1.1.2. Par pelēniem

Tie skolēni, kas bija pieņēmuši, ka abi pelēni ir savākuši konkrētu (piemēram, 100 vai kādu citu) skaitu pupiņu un tad, balstoties uz šo pieņēmumu, izdarījuši pārējos aprēķinus, nesaņēma maksimālo punktu skaitu. Šādi uzdevumi prasa vispārīgus spriedumus, jo, ja nu, piemēram, kādam skaitam pupiņu prasītais neizpildītos...

Daļa skolēnu bija veikuši nekorektas darbības ar procentiem.

J1.1.3. Krāsainās puķītes

Ja uzdevumā ir jautājums "Cik...?", tad nepietiek atrast vienu vai dažas iespējamās vērtības, bet

1) jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības;

2) jāpamato, ka citu vērtību nav.

Liela daļa risinātāju bija tikai uzzīmējuši 6 iespējamos dažādos veidus, taču nebija pamatojuši, ka citu variantu nav. Dažos risinājumos bija norādīts lielāks iespējamo veidu skaits nekā tas ir patiesībā, jo šie risinātāji nebija pamanījuši, ka daudzas no izkrāsotajām puķītēm ir vienādas, jo tās var iegūt vienu no otras, pagriežot puķīti ap tās centru.

J1.1.4. Daudzstūri un diagonāles

Lielākā daļa risinātāju bija tikuši galā ar uzdevuma a) daļu, taču b) daļa sagādāja grūtības diezgan daudziem. Daži nesaņēma maksimālo iespējamo punktu skaitu, jo, piemēram, bija novilkuši tikai septiņstūra pilnībā iekšpusē esošās diagonāles, bet nebija uzzīmējuši pārējās. Daļai b) daļas risinājums vispār bija nepareizs, jo daudzstūrim, kas nav ieliekts septiņstūris, nebija novilktas visas diagonāles, bet, ja tās būtu novilktas, tad šis daudzstūris neatbilstu uzdevuma prasībām.

J1.1.5. Lauztā līnija

Ja uzdevumā ir jautājums "Kāds ir mazākais...?", tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast šo vismazāko vērtību un uzrādīt piemēru;

2) pierādīt, ka mazāka vērtība nevar būt.

Vairumā risinājumu vai nu vispār trūka 2) daļa (pierādījums), vai arī tā nebija pilnīga.

Lauztas līnijas katriem diviem secīgiem nogriežņiem ir tieši viens kopējs punkts, un šie nogriežņi neatrodas uz vienas taisnes. Tāpēc risinājums, kur posmi ar garumiem 1 un 7 atrodas uz vienas taisnes, nav pareizs.

Otrā kārta

J1.2.1. Naudas maiņa

Lielākā daļa risinātāju ar šo uzdevumu bija tikuši galā. Daži pat bija izdomājuši vairākus iespējamos variantus, bet tā kā tas nebija prasīts, tad papildus punktus par to nevarēja saņemt. Daļa skolēnu nebija kārtīgi izlasījuši uzdevuma noteikumus un noapaļojuši nevis līdz veseliem centiem, bet gan līdz veseliem eiro, tādējādi neiegūstot prasīto. Citi jau uzreiz bija noapaļojuši doto kursu un tad izpildījuši darbības, kas arī nedod vajadzīgo rezultātu. Vēl daži skolēni, dalīšanas vietā lietojot reizināšanu, bija ieguvuši aplamu rezultātu – eiro sanāk mazāk nekā latu.

J1.2.2. Par taisnstūri

Salīdzinoši maza daļa skolēnu bija sapratuši, kas īsti uzdevumā ir prasīts, proti, ka taisnstūra malu garumi var būt jebkuri pozitīvi skaitļi, kam izpildās atbildēs aprakstītā sakarība. Gandrīz visi bija meklējuši (no kuriem daudzi pat mēģinājuši vienkārši uzminēt) tādu atrisinājumu, lai visu doto nogriežņu garumi būtu naturāli skaitļi, kas nebija prasīts.

J1.2.3. Rūķīši un lampiņas

Gandrīz visi skolēni, kas bija tikuši galā ar šo uzdevumu, risinājumā izmatoja tabulu, kurā pakāpeniski norādīja, kuras spuldzītes tiek pārslēgtas. Atcerieties, ka norādot tikai atbildi bez risinājuma, nevar saņemt maksimālo punktu skaitu!

J1.2.4. Par zvejas tīklu

Ja ir jautāts "Kāds ir lielākais...?", tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast vislielāko vērtību un uzrādīt piemēru;

2) pierādīt, ka lielāka vērtība nav iespējama.

Vairumā risinājumu vispār trūka 2) daļa (pierādījums). Dažiem skolēniem šis „pamatojums” sastāvēja no dažu speciālgadījumu aplūkošanas, kā drīkst pārgriezt aukliņas, kas nav vispārīgs pierādījums.

J1.2.5. Jūras akmentiņi

Uzdevumos, kuros prasīts aprakstīt, kā kāds no spēlētājiem var panākt savu uzvaru, jāapraksta plāns, pēc kura rīkojoties, viens no spēlētājiem pilnīgi noteikti, neatkarīgi no tā, ko darīs viņa pretinieks, var uzvarēt. Diezgan daudzi skolēni bija parādījuši tikai vienu vai dažus spēles variantus, bet tas nav uzdevuma pilns risinājums.

Trešā kārta

J1.3.1. Par krustpunktiem

Liela daļa skolēnu nebija sapratuši uzdevumu. Vieni bija risinājuši uzdevumu, vispār neņemot vērā vārdus „vai nu paralēlas, vai perpendikulāras taisnes”, citi nebija sapratuši, ko šajā uzdevumā nozīmē frāze „**katras** divas taisnes”. (Proti, tas nozīmē, ka izvēloties jebkuru no taisnēm, tā būs vai nu paralēla, vai perpendikulāra visām pārējām taisnēm, nevis tikai kādai no tām.)

J1.3.2. Ziemassvētku mīkla

Vairākums skolēnu šo uzdevumu bija līdzīgi, kā parādīts zemāk.

Apzīmēsim  ar *b*,  ar *p*,  ar *d* un  ar *z*. Tad uzdevumā doto var pārrakstīt

$$\begin{cases} b+p=d & (1) \\ p+\dfrac{z}{3}=20 & (2) \\ \dfrac{z}{5}-b=\dfrac{p}{2} & (3) \end{cases}$$

No (2) un (3) ievērojam, ka z dalās ar 3 un ar 5. Vēl no (2) ievēro, ka $\frac{z}{3}<20$. Tad iespējamās z vērtības ir 15, 30, 45. Pārbaudīsim visus šos gadījumus.

Ja $z=15$, tad no (2) izriet, ka arī $p=15$, bet pēc dotā visām burtu vērtībām jābūt dažādām – šis gadījums neder.

Ja $z=30$, tad var iegūt, ka $b=1$, $p=10$ un $d=11$. Šajā gadījumā pretruna nerodas.

Ja $z=45$, tad $p=5$, bet no (3) izriet, ka p jābūt pāra skaitlim – šis gadījums neder.

Tātad vienīgā iespēja, ka $b=1$, $p=10$, $d=11$, $z=30$.

J1.3.3. Ziemassvētku vecīša paklājs

Šis uzdevums izrādījās visvienkāršākais. Tikpat kā visi ieguva maksimālo punktu skaitu.

J1.3.4. Divnieku un trijnieku summas

Šis uzdevums skolēniem bija šķitis vissarežģītākais. Tikai retais ieguva maksimālo punktu skaitu. Daudzi bija juceklīgi mainījuši saskaitāmo secību. Daļa bija mēģinājuši saskatīt sakarības, kā mainās saskaitāmo novietojums. Daži bija izmantojuši jau gatavas formulas. Tikai pāris skolēni bija mēģinājuši domāt tā, kā mūsu piedāvātajā risinājuma 2. variantā.

J1.3.5. Izklaidīgais Ziemassvētku vecītis

Kā izrādījās, tad arī šis uzdevums bija viens no vienkāršākajiem šajā kārtā un gandrīz visi skolēni bija atšķetinājuši šo lietu ☺.

Ceturtā kārta

J1.4.1. Kvadrāts

Gandrīz visi skolēni šajā uzdevumā ieguva maksimālo punktu skaitu. Tikai daži skolēni nebija uzmanīgi lasījuši uzdevuma tekstu, ka ir dotas tieši četras katra veida figūras.

J1.4.2. Reizinātāju juceklis

Arī šis uzdevums lielākajai daļai skolēnu bija atrisināts pareizi. Biežāk pamanītā kļūda bija, ka skolēni nesaprot atšķirību starp cipariem un skaitļiem. Uzdevumā katrā rūtiņā bija jāieraksta viens cipars, bet bija skolēni, kas rūtiņās bija ierakstījuši divciparu skaitļus. Daži bija palaiduši garām nosacījumu, ka katrā reizinājumā visiem reizinātājiem jābūt dažādiem.

Atceries! Ir desmit dažādi cipari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (līdzīgi kā burti alfabētā). No cipariem tiek veidoti skaitļi (līdzīgi kā no burtiem veido vārdus). Piemēram, 14 ir divciparu skaitlis.

J1.4.3. Namdari un baļķis

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija risinājuši attiecīgā mērogā uzzīmējot visas atzīmes vai arī uzrakstot ar skaitļiem visas vietas, kurās uzvilktas atzīmes un izcēluši tās, kurās tās sakrīt. Protams, arī šie ir pareizi risinājumi.

Rakstot uzdevuma tekstu bijām izlaiduši frāzi, ka atzīmes abi namdari sāk vilkt no viena un tā paša baļķa gala. Ļoti priecājamies par tiem skolēniem, kas bija apskatījuši abus gadījumus, proti, ka otrs namdaris var sākt atzīmēt arī no pretējā baļķa gala.

J1.4.4. Baktērijas un vīrusi

Šajā uzdevumā punkti tika samazināti tiem skolēniem, kas bija „uzminējuši", ka derēs gadījums, kad sākumā ir 15 baktērijas, un pēc tam pārbaudījuši, ka tas tiešām tā ir, jo tas neizslēdz iespēju, ka neder vēl kāda cita vērtība.

J1.4.5. Trijstūra augstumi

Vairākums skolēnu bija pamanījuši, ka šo uzdevumu var atrisināt, trijos dažādos veidos ar augstumiem un malām izsakot trijstūra laukumu (skat. atrisinājumos). Punkti tika samazināti tiem skolēniem, kas, iegūstot malu attiecību, ievietoja tajā konkrētus skaitļus un no tā secināja, ka trijstūris neeksistē, nevis pierādīja vispārīgā gadījumā.

Piektā kārta

J1.5.1. Pēc kārtas sekojoši skaitļi

Daļa skolēnu nebija pamatojuši, ka citu variantu nav. Šoreiz pamatojums bija, piemēram, visu gadījumu pārlase.

Atceries! Ja uzdevumā tiek prasīts atrast visas iespējamās vērtības, tad 1) tās visas ir jāatrod un 2) jāpamato, ka citu nav, tas ir, ka tiešām ir atrastas <u>visas</u> iespējamās vērtības.

J1.5.2. Mušas un zirnekļi

Ja uzdevumā ir uzdots jautājums „Cik... ?”, tad līdzīgi kā pirmajā uzdevumā, arī šādos uzdevumos 1) ir jāatrod visas iespējas un 2) jāpamato, ka citu iespēju nav.

Daži skolēni bija rakstījuši: „Citu iespēju nav, jo veidojot tabulu citi varianti nesanāca.” Ar šādu komentāru nepietiek! Ir jāparāda šī tabula, ir jāparāda, ka tās citas vērtības nav iespējamas.

J1.5.3. Sešstūris un piecstūris

Arī šajā uzdevumā bija jāapskata visas iespējas un jāpamato, ka citu nav.

Daļa skolēnu bija atraduši tikai dažus piemērus.

Daži skolēni bija nosaukuši, kādi daudzstūri ir iespējami, bet nebija uzzīmējuši piemērus, taču, lai uzdevums būtu pilnībā atrisināts, ir ne tikai jāpamato, kādi daudzstūri ir iespējami, bet arī jāparāda piemēri, ka visus šādus daudzstūrus tiešām ir iespējams iegūt!

J1.5.4. Loterija

Tāpat kā visos iepriekšējos uzdevumos, arī šajā bija jāatrod visas iespējas un jāpamato, ka citu nav. Kaut arī brīžiem kaut kas šķiet pašsaprotams, tas pamatojumā ir jāpiemin. Tā, piemēram, šajā uzdevumā bija jāuzraksta, ka biļetes numurs nevar būt viencipara skaitlis, jo tad lielākā iespējamā ciparu summa ir 9, un nevar būt arī divciparu skaitlis, jo tad lielākā iespējamā ciparu summa ir 9 + 9 = 18. Lielākā daļa skolēnu to arī bija izdarījuši.

J1.5.5. Triks ar glāzēm

Atceries! Ja uzdevumā tiek prasīts, vai kaut kas ir iespējams, vai kaut ko var panākt, tad ir divas iespējas:

- ja atbilde ir „jā”, tad ir jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- ja atbilde ir „nē”, tad ir jāpierāda, ka tiešām tas nekādā gadījumā nav iespējams; ar atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros prasītais neizpildās, nepietiek, jo varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies atrast piemēru, bet tāds tomēr pastāv.

Atbilde uz šī uzdevuma jautājumu ir „nē”, tātad bija nepieciešams pamatojums. Nepietiek ar viena vai dažu gadījumu apskatīšanu, kā to bija darījusi lielākā daļa skolēnu. Ir jāapskata vai nu pilnīgi visi iespējamie dažādie gadījumi, vai arī spriedumiem jābūt vispārīgiem, kas ietver visas situācijas.

Neder tādi komentāri, kā, piemēram,

- ja ir nepāra skaits glāžu, bet jāapgriež pāra skaits glāžu, tad vienmēr kāda paliks nepareizi – *ir jāpamato, ka tiešām tā būs vienmēr*;
- 9 nedalās ar 4, tāpēc viena glāze paliks neapgriezta – aplams spriedums, jo arī, piemēram, 10 nedalās ar 4, bet 10 glāzes pēc šiem pašiem noteikumiem ir iespējams apgriezt.

Atrisinājumos piedāvātais šī uzdevuma risinājums, protams, ka nebija vienīgais iespējamais.

Pāris skolēni bija izveidojuši shēmas, kas ietver visus iespējamos gājienus.

Daži skolēni to bija pamatojuši tā: „Lai glāze stāvētu pareizi, tā ir jāapgriež nepāra skaita reižu. Tā kā ir 9 glāzes (nepāra skaits), tad pavisam kopā nepieciešams nepāra skaits apgriešanu, bet tā kā vienā gājienā drīkst apgriezt 4 glāzes (pāra skaits), tad, lai cik gājienu arī tiktu izdarīti, vienmēr būs notikušas pāra skaits apgriešanu. Tātad tas nav iespējams.”

Profesora Cipariņa klubs

Pirmā nodarbība

P1.1.1. Kautrīgo rūķu nams

Jāapskata visi iespējamie gadījumi – svarīgi atcerēties, ka rūķīši var arī būt vienāda garuma.

P1.1.2. Matemātiķis Miķelis

Uzdevuma nosacījumos nebija teikts, ka pelei jāpaņem vismaz 1 gabaliņš. To svarīgi atcerēties, kad apskata minimālo gabaliņu skaitu.

Ja uzdevumā ir jāpierāda, ka kaut kas vienmēr izpildās – nepietiek ar vienu piemēru, vajadzīgs pierādījums!

Rūpīgi jālasa uzdevuma nosacījumi! Tur nebija teikts, ka pelēm būtu jāsaņem vienāds siera gabaliņu skaits.

P1.1.3. Starpbrīdis

Piemērs tam, ka var iegūt skaitli 4, nepierāda to, ka nevar iegūt skaitli – 4.

P1.1.4. Figūru savietošana

Daudzi pieņēma, ka pilnībā noklāts taisnstūris skaitās arī tāds, kad daļa doto figūru atrodas ārpus izvēlētā taisnstūra robežām. Šāds pieņēmums ir aplams.

P1.1.5. Raganas namiņā

Aplams bija pieņēmums, ja cepuma diametrs ir $\frac{a}{3}$, tad cepums aizņem $\frac{1}{3}$ galda virsmas laukuma.

Daži no rēķinātājiem mēģināja risinājumā izmantot laukumus, bet neiedomājas, ka cepumiem ir noteikta forma un tie nevar noklāt galdu pilnībā.

Matemātikā visam jābūt skaidri definētam. Tāpēc tādas neskaidri formulētas definīcijas kā „nelielas atstarpes starp cepumiem" vai „Grietiņai jārīkojas gudri" pie pareizā risinājuma nevedīs.

Protams, ir iespējams izņēmums, kad cepuma diametrs ir lielāks nekā galda diametrs. Šajā gadījumā Grietiņa zaudē.

Ja a) gadījumā bija iespējams apskatīt visus gadījumus, tad b) variantā tā nevar, jo uzdevums ir ļoti vispārīgs – mēs neko nezinām ne par cepumu, ne galda izmēriem.

P1.1.6. Dažādie reizinātāji

Uzdevuma a) un b) daļā ar dažiem piemēriem nepietiek, lai varētu apgalvot, ka prasītais noteikti izpildās. Lai kaut ko pierādītu visiem iespējamiem gadījumiem, jāveido spriedumu virkne, kas nodrošina pareizu risinājumu neatkarīgi no ievietotajiem skaitļiem.

Lai pierādītu c) un d) daļu pietika parādīt vienu piemēru, kurā nosacījums neizpildās.

Uzdevuma nosacījumos nebija teikts, ka visi skaitļi ir atšķirīgi.

P1.1.7. Zvaigznīte

Ideju par to, ka leņķi varētu uzminēt, var izmantot. Bieži vien tas atvieglo uzdevuma risināšanu. Taču ir jābūt ļoti uzmanīgam – piemēram, šajā uzdevumā, ja esi uzminējis leņķu summas vērtību un parādījis, ka tā der, Tu vēl neesi pilnībā atrisinājis uzdevumu, papildus jāapskata, vai leņķu summa nevar pieņemt vēl kādu vērtību.

P1.1.8. Tukšais kvadrāts

Saņēmām daudz darbu, kuros bija pareiza doma, bet neprecīzi noformulēta. Uzdevuma galvenā doma bija, pirmkārt, sadalīt kvadrātu mazākos taisnstūros un, otrkārt, pēc tam katru šo jauniegūto daļu sadalīt, kā uzdevumā prasīts. Daudzi no jums izpildīja risinājuma otro daļu, nepadomājot par to, ka korekti jāpieraksta arī pirmā.

Otrā nodarbība

P1.2.1. Versaļas pils

Ja ir jārēķina šāda tipa uzdevumi, bet neizdodas atrisināt uzdevumu pilnībā, bieži vien dažus punktus var iegūt, uzrādot to, ko ir izdevies izdomāt.

P1.2.2. Spēle

Jāievēro korekts pieraksts! Piemēram, trīsciparu skaitlim *y*, kura cipari jāapzīmē ar burtiem, neder pieraksts $y = abc$, jo „*abc*” nozīmē skaitļu *a*, *b* un *c* reizinājumu. Trīsciparu skaitli pieraksta formā $y = \overline{abc}$, ko var pārrakstīt formā: $y = \overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Šajā uzdevumā nepietiek tikai ar atbildi. Obligāti ir jāpierāda, ka nav citu variantu! Bija jāievēro, ka iespējami divi atbilžu varianti, nevis tikai viens.

P1.2.3. Trajektorijas

Šo uzdevumu viegli varēja atrisināt, izmantojot divus dažādas krāsas zīmuļus – katru stienīša galu apzīmē ar vienu no krāsām un, velkot zīmuļus pa papīru, vēro, kādas trajektorijas var iegūt.

P1.2.4. Starpbrīdis

Daudzi risinātāji apgalvoja, ka 201200002013 ir pirmskaitlis, tāpēc to nevar izteikt kā reizinājumu. Skaitlis 201200002013 nav pirmskaitlis, jo to var izteikt kā skaitļu 342759799 un 587 reizinājumu. Šādiem uzdevumiem risinājumu var balstīt uz sadalīšanu reizinātājos, taču olimpiādē tam nav atvēlēts ne laiks, ne arī dots kalkulators, tāpēc vērtīgāk ir atrast citu risinājumu!

Pirmskaitļiem izpildās ļoti skaista īpašība – visi pirmskaitļi $p > 3$ ir uzrakstāmi formā $p = 6k \pm 1$, kur *k* ir naturāls skaitlis. Vari pamēģināt šo īpašību pierādīt! Taču ne visi skaitļi, kas ir šādi uzrakstāmi, ir pirmskaitļi.

Piemēri tam, kādi varētu būt skaitļi *x* un *y*, ja mērķis būtu iegūt citu skaitli, nevis 201200002013, neko šajā uzdevumā nepierāda.

P1.2.5. Šūnas

Ja neizdodas ievietot pašus skaitļus, tad skaitļu ievietošanas algoritms vai idejas arī ir ļoti vērtīgas.

P1.2.6. Kosmosa misija

Daudzi nepareizi pieņēma, ka pirmajam kosmonautam visu laiku ir jāatrodas ceļā, jo viņa pāriešanas laiks starp stacijām ir tikai 1 minūte. Bet tas nenozīmē, ka šādā veidā var iegūt minimālo laiku, kādā visi kosmonauti pāriet no vienas stacijas uz otru. Ar šo paņēmienu kopējais laiks ir 27 minūtes, bet, kā redzams uzdevuma atrisinājumā, to var izdarīt arī 25 minūtēs!

P1.2.7. Melīgo rūķu nams

Ir jāatrod loģiska spriedumu virkne, kas parāda, ka Meija ir vienīgā iespējamā zagle.

P1.2.8. Rūtiņu kvadrāts

Daudzi bija piemirsuši, ka kvadrāts arī ir taisnstūris.

Ja ir dots kvadrāts ar izmēriem 8×8, tad no tā nevar izgriezt taisnstūri ar izmēriem 1×9!

Daži centās a) gadījuma zīmējumu izmantot par pamatu pierādījumam, ka b) gadījums nav iespējams.

Piemēram, sadalot kādu no a daļā izmantotajiem taisnstūriem divās daļās un pasakot, ka tā b daļa neizpildītos. Šāds risinājums nav viennozīmīgs, jo ir taču ļoti daudz citu iespēju, kā uzzīmēt uzdevumu. Lai pierādītu, ka b daļu nevar izpildīt, ar šādu metodi būtu jāapskata visi iespējamie gadījumi.

Trešā nodarbība

P1.3.1. Matemātiķis Miķelis

Daži bija piemirsuši to, kā izskatās smilšu pulkstenis – to nevar sadalīt pa minūtēm. Ja ar to var nomērīt 5 minūtes, tad nevar precīzi zināt, kad ir pagājusi 1 minūte.

Ja esi izdomājis shēmu, kā iegūt noteikto minūšu skaitu, neaizmirsti pierakstīt, kad jāieliek vārīties ola!

Brīviem brīžiem piedāvājam līdzīgu uzdevumu: Jūs esat mežā un jums ir daudz vienādu zariņu, kuri katrs vienmērīgi deg tieši stundu. Jums jānosaka 15 minūtes, lai pagatavotu zupu.

P1.3.2. Mulsinošie gadskaitļi

Sava risinājuma pareizību, protams, var pārbaudīt ar kalkulatoru, bet ir jāizvairās to izmantot par pamatu risinājumam. Vērtīgāk ir atrast risinājumu, kas kalkulatoru neizmanto, jo olimpiādē to izmantot nevarēs. Bez tam katram kalkulatoram ir noteikta precizitāte, ar kādu tas rēķina. Tātad ar šādu risinājumu nekad nevar būt drošs, ka atrastais rezultāts ir precīzs.

P1.3.3. Gliemežu ekspedīcija

Lai iegūtu maksimālo punktu skaitu par uzdevumu, savs domu gājiens ir jāpaskaidro. Tikai zīmējums bez atbildes un bez jebkādiem paskaidrojumiem vēl nav pilnvērtīgs uzdevuma risinājums.

P1.3.4. Dīvainais Jānis

Uzdevumi ir vienmēr rūpīgi jāpārlasa – vai viss saprasts pareizi. Jo galvenā doma bieži vien var slēpties vienā vienīgā vārdā. Šim uzdevumam nederēja risinājums, kas saistīts ar 29. februāri.

P1.3.5. Starpbrīdis

Lai pierādītu, ka skaitļus no 1 līdz 16 nevar izkārtot aplī, nepietiek ar derīgas rindas „salocīšanu” aplī un pateikšanu, ka šis aplis neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Šāds risinājums varētu būt korekts gadījumā, ja pierādīts, ka atrastais gatavās rindas variants ir vienīgais iespējamais.

P1.3.6. Šifrētā matemātika

Šādos uzdevumos nepietiek tikai ar atbildi, jo tas nepierāda, ka tas ir vienīgais iespējamais variants. Ir jāpamato, kāpēc der tikai tas un neviens cits cipars konkrētā burta vietā. Piemēram, kāpēc burts A nevar pārsniegt vērtību 1 un kāpēc burta E vietā der tikai cipars 0.

P1.3.7. Diagonāles

Brīvā brīdī var atrisināt līdzīgu, bet mazliet grūtāku uzdevumu – atrast sešstūri, kura diagonāles savā starpā nekrustojas.

P1.3.8. Šaha zirdziņi

Nedrīkst aizmirst pierādīt, ka vairāk kā 32 zirdziņus uzlikt uz galdiņa nevar, par spīti tam, ka atbilde šķiet acīmredzama. Nepietiek uzrakstīt, ka atrastajā izkārtojumā vairs nevienu citu zirdziņu nevar pievienot, jo varbūt kādā citā izkārtojumā to var izdarīt.

Līdzīga veida uzdevumu pierādījumos bieži noderīgi ir izmantot rūtiņu krāsošanu.

Ceturtā nodarbība

P1.4.1. Miķeļa brīvdienas

Vērība jāpievērš korektam uzdevuma pierakstam. Piemēram, ja mums ir trauki *A, B, C, D,* tad frāze „veikt darbības ar ik 2 no tiem” nozīmē, ka mēs veicam darbības ar *A* un *B, A* un *C, A* un *D, B* un *C, B* un *D, C* un *D,* nevis tikai ar *A* un *B, C* un *D*.

Šāda tipa uzdevumos risinājuma uzskatāmībai ieteicams pievienot shēmu vai tabulu.

P1.4.2. Starpbrīdis

Risinot uzdevumus, jābūt ļoti uzmanīgiem ar aritmētiskām darbībām. Šajā uzdevumā bija jāuzrāda arī risinājuma gaita, nevis tikai atbilde.

P1.4.3. Iesprostotās figūras

Daudziem izdevās izveidot vismaz vienu no prasītajiem taisnstūriem. Tas bija ļoti labi. Bet jāatceras, ka tas, iespējams, nav vienīgais veids, kā to varēja izdarīt. Tādēļ pierādījums, ka no atlikušajām figūrām nevar izveidot otru taisnstūri, nepierāda to, ka uzdevumā prasītais vispārīgi nav iespējams.

P1.4.4. Pilnīgie skaitļi

Lai pierādītu, ka ir tikai viens vienīgs atrisinājums, nepietiek tikai ar to, ka apskatīti vairāki piemēri. Ir uzdevumi, kurus var atrisināt veicot visu variantu pārlasi, bet šis nebija tas gadījums, jo ir bezgalīgi daudz naturālu skaitļu.

Ļoti daudzi risinātāji piemirsa, ka skaitlis 1 ir naturāls skaitlis, tātad arī šis gadījums (kaut arī ļoti elementārs un acīmredzams) obligāti jāapskata.

P1.4.5. Sacensības

Šajā uzdevumā bija iespējami četri dažādi atbilžu varianti. Tādēļ nepietiek ar vienu vai divām atbildēm, bet ir jāuzskaita visi iespējamie varianti un jāpamato, ka citu nav.

P1.4.6. „Ansītis & Co”

Uzdevums bija vieglāk atrisināms, domājot no otras puses – kas notiks, ja paliks tikai divi priekšnieki?

Daudzi nebija pievērsuši vērību naudas daudzumam, kas ir jāpiešķir, lai priekšnieks piekristu. Kāpēc lai priekšnieks kādam iedalītu 10000 latu, ja naudu saņemošais balsos apstiprinoši, pat ja viņam iedos 1 santīmu?

Šoreiz ar maksimālo punktu skaitu ieskaitījām abus variantus risinājumam - kas kā mazāko iedoto naudas summu izmantoja vai nu 1 latu, vai 1 santīmu.

P1.4.7. Mājiņas

Šajā uzdevumā galvenais bija saprast ideju, kā varēja spriest par cipariem, kas bija jāieraksta rūtiņās. Arī par nepilnīgu risinājumu varēja nopelnīt punktus.

P1.4.8. Dīvainie nogriežņi

Ar zīmējumu, kurā ir nomērīti garumi nogriežņiem nepietika, jo tādā gadījumā ir jāpierāda, ka viss izpildās ar precīzi tādiem garumiem. Mērinstrumenti nekad nebūs pietiekami precīzi, lai tiktu uzskatīti par daļu no matemātiski korekta risinājuma.

Dažus punktus dažkārt var iegūt arī tikai par zīmējumu, bez risinājuma, ja neizdodas atrast pamatojumu.

Piektā nodarbība

P1.5.1. Siera klucīši

„Jā-nē” atbildes uzdevumos dažreiz par atbildi punktus nepiešķir, jo tā var būt arī uzminēta. Tāpēc ir labi uzrakstīt vismaz savus mēģinājumus, kā tikt pie pareizās atbildes.

Vienkārši parādīts ēšanas ceļš, kā korekts risinājums neder, jo tad jāapskata visi veidi, kā var apēst siera kluci.

Šādos uzdevumos dotais ir jāmēģina kaut kā grupēt, iezīmēt, krāsot. Klasisks risinājums ir izkrāsošana kā šaha galdiņš. Daudzi mēģināja klucīšus numurēt, grupēt – malas klucīšos, stūra klucīšos. Daudzi šādi arī nonāca pie pareizā risinājuma, bet ir jācenšas atrast pēc iespējas pārskatāmāku veidu, kā to darīt.

Daži uzdevumu pārprata, domājot, ja apēd siera klucīti, tad visi tie, kas bija virs tā nokrīt lejā. Tas uzdevumā netika minēts. Šādu neskaidrību gadījumā droši var uzdot jautājumus.

P1.5.2. Starpbrīdis

a) gadījumā vairāki risinātāji apskatīja visus iespējamos variantus, ar kādu ciparu var beigties dotais skaitlis. Tas, protams, bija pareizi, bet vērtīgāk būtu meklēt likumsakarības, kas novestu pie atrisinājuma racionālāk.

Kļūda bija pierādījums, kura pamatā tika izmantoti konkrēti piemēri, kādēļ skaitli 2014 nevar iegūt, izmantojot sešas darbības zīmes.

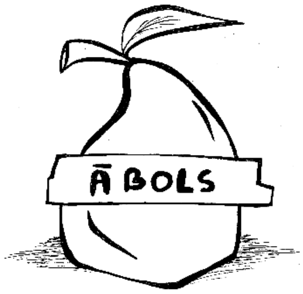
P1.5.3. Matemātiķu valsts

Svarīgākais šajā uzdevumā bija izdomāt, kāds izskatīsies ciemu izvietojums plaknē. Ļoti labs risinājums bija izmantot riņķa līnijas, lai pierādītu, ka punkti *C, D, G, E* un *F* atrodas uz vienas taisnes.

Nepietiek tikai ar zīmējumu. Noteikti vajag pierakstīt klāt vārdiskus paskaidrojumus, kā konstruēts zīmējums.

P1.5.4. Trīs dīvainas kastes

Uzdevumā bija divi varianti – ja no „āboli-bumbieri" kastes izvelk ābolu un ja izvelk bumbieri. Abi varianti risināmi vienādi, taču to nedrīkst aizmirst pierakstīt kaut vai ar vārdiem – *„pēc analoģijas var apskatīt arī otru gadījumu".* Nepierakstot, kā apskata visus gadījumus, var pazaudēt punktus, pat ja risinājums ir triviāls!



P1.5.5. Sistēma

Kad atrisināts uzdevums, noteikti vēlreiz visu pārbaudi, lai pārliecinātos, vai nav aritmētiskas kļūdas! Šajā uzdevumā varēja pārliecināties par atbilžu pareizību, iegūtās vērtības ievietojot dotajā vienādojumu sistēmā.

P1.5.6. Trijstūru konstruktors

Šajā uzdevumā ļoti uzmanīgi bija jālieto zīmes $\geq, \leq, >, <$. Drošs veids, kā rīkoties šādās situācijās, ir apskatīt speciālgadījumus, par kuriem ir šaubas, un tad rakstīt pārējo pierādījumu. Ne šajā, ne arī citos ģeometrijas uzdevumos risinājuma pamatā nevar būt mērījumi ar lineālu (ja vien tas nav īpaši norādīts uzdevuma nosacījumos).

P1.5.7. Pazaudētie pirmskaitļi

Jāatceras, ka 1 nav pirmskaitlis, jo pirmskaitlim ir tieši divi dažādi dalītāji – pats skaitlis un 1. Visi fakti, kas nav acīmredzami, ir jāpierāda, piemēram, apgalvojums, ka 3 pēc kārtas ņemti nepāra skaitļi dalās ar 3.

P1.5.8. Nagliņas un striķīši

Pārsvarā visi savu atbildi pamatoja ar zīmējumu, kas šajā uzdevumā ir korekts risinājums. Bieži vien olimpiādēs tas ir solis uz sarežģītāka uzdevuma risinājumu. Uzdevums ir interesants ar to, ka var atrast risinājumu arī *n* nagliņām. Brīvā brīdī var padomāt – kā būtu, ja būtu pāra skaits nagliņu? Kā krāsot striķīšus 101 nagliņai?

Vairāki nebija sapratuši pareizi uzdevuma prasības. Mērķis bija atrast visu iespējamo veidu trijstūrus, kuru malas ir nokrāsotas dažādās krāsās. Ja rodas jautājumi par uzdevumu, nevajag baidīties tos jautāt.

Sestā nodarbība

P1.6.1. Viesību sarunas

Šādā uzdevumā noteikti ir jānorāda, kurš no kaķiem melo un kā to var izdomāt. Daži risinātāji nebija sapratuši formulējumu: „Esmu apēdis 11 līdz 20 peles (11 un 20 ieskaitot)." Tas nenozīmē, ka ir apēstas 10 peles. Tas nozīmē, ka kaķis ir apēdis 11 vai 12, vai 13, vai 14, … , vai 19, vai 20 peles.

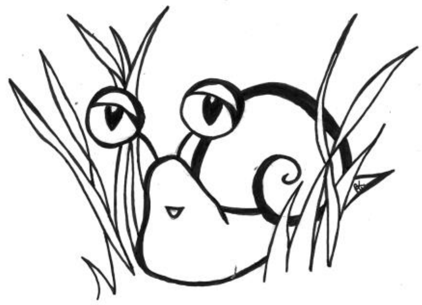
Nebija pareiza atbilde, ka katrs kaķis ir apēdis 11 – 20 peles, jo kaķi apēda konkrētu skaitu peļu.

P1.6.2. Cepumu izklaides

Ir uzdevumi, kurus var atrisināt parādot vienu piemēru. Šis nebija tāds uzdevums. Spēles gaita ir atkarīga gan no Annas izvēles, gan no Kārļa izvēles, cik cepumus paņemt. Tādēļ nevajadzētu rakstīt piemēru un pieņemt, ka Kārlis izvēlēsies tieši tik pat cepumiņus, cik tas tiek pieņemts dotajā piemērā.

Vairāki dalībnieki nebija sapratuši pareizi uzdevuma nosacījumus – uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais paņem cepumu, bet šis cepums nedrīkst būt pēdējais cepums uz galda. Pēc uzdevuma nosacījumiem – nevienā gājienā nedrīkst paņemt visus uz galda esošos cepumus.

P1.6.3. Palīdzi Gliemezim!



Visbiežākais risinājums bija – aizvest Gliemezi 0,5 m attālumā no vietas, kur tas atradās sākotnēji, un tad vest Gliemezi pa apli, līdz viņš noteikti sasniegs pļavas malu. Tā ir laba ideja, bet šādā veidā Gliemezim noteikti jānoiet vairāk nekā 3,5 m, kas bija prasīti uzdevuma b) daļā.

Cita ideja, kas tik labi nestrādā bija, ka Gliemezim jāiet 0,5 m uz ziemeļiem, tad jānāk atpakaļ, tad 0,5 m uz rietumiem, jānāk atpakaļ utt., izejot caur visām 4 debess pusēm. Šādi tiek apskatīti tikai 4 punkti, kur varētu atrasties pļavas mala, bet ir bezgalīgi daudz punktu 0,5 m attālumā no Gliemeža, kur tā varētu atrasties!

Lai pareizi risinātu šo uzdevumu, nevajadzētu aizmirst, ka pļavas mala ir taisna līnija, nevis viens punkts.

P1.6.4. Ojāra meistarstiķis

Bieži tika aizmirsts, ka Ojārs nezina, kuras summas sastāv no kuriem skaitļiem.

Nereti viens no svarīgākajiem uzdevumu āķiem, it īpaši šajā uzdevumā, ir kārtot skaitļus augošā secībā.

Otrs āķis bija pamanīt, ka visas summas jāsasummē. Prieks, ka ar šo ļoti daudzi tika galā.

Uzdevums interesants ar to, ka risināms arī ar citu skaitļu skaitu. Piemēram, ja Ojāra māsa nosauktu 4 skaitļus, viņš triku veikt vairs nevarētu. Savukārt ar 6 skaitļiem triks ir iespējams.

P1.6.5. Dārgās ledenes

Daudzi bija pareizi iesākuši risināt, pirmajā svēršanas reizē liekot uz svaru kausiem katrā pusē pa vienai divu dažādu krāsu konfektei un katrā no kausiem vēl pa vienai trešās krāsas konfektei. Bet ne visi spēja saskatīt pareizu otro svēršanu. Šādos svēršanas uzdevumos jāatceras, ja ir prasītas divas svēršanas, tad trīs svēršanas nedrīkst veikt. Par atsevišķu svēršanu sauc arī svaru novērtēšanu pēc tam, kad daļa no iepriekšējās svēršanas priekšmetiem ir noņemti no svaru kausiem.

P1.6.6. Starpbrīdis

Jāatceras, ka 1 nav pirmskaitlis. Pirmskaitlis ir tāds naturāls skaitlis, kam ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.

Šajā uzdevumā nepietika ar vairāku piemēru uzrakstīšanu – vajadzīgs pierādījums. Savukārt, ja ir izdevies pierādīt, ka vairāk nekā 7 skaitļi a) gadījumā un 6 skaitļi b) gadījumā nevar būt, tad ir vajadzīgs piemērs, kas apstiprina, ka var būt attiecīgi 7 un 6 pirmskaitļi.

P1.6.7. Pirmskaitļu ģeometrija

Šajā uzdevumā sīki jāparāda, kā konstruēt katru posmu risinājumā.

Risinājums, kas ietver mērīšanu ar lineālu šeit un arī citos matemātikas uzdevumos neder.

P1.6.8. Komandējumā

Kā uzdevuma atrisinājumu saņēmām arī ļoti negaidītu un interesantu risinājumu – mezglu, kas turas stingri zem spiediena, bet atsienas, ja spiediena vairs nav. Mēs to pieņēmām kā pareizu risinājumu, taču šo mezglu mēdz dēvēt arī par "kamikadzes mezglu" – tas apdraud dzīvību un nestrādās, ja virvei ir gluda virsma. Tāpēc gadījumā, ja jums gadās komandējuma laikā nokļūt uz klints, labāk šo mezglu nelietot. :)

Novada olimpiāde

5. klase (1183 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	1%	1%	10%	4%	4%
9	1%	0%	5%	1%	1%
8	5%	1%	2%	2%	1%
7	3%	0%	2%	1%	0%
6	5%	1%	3%	0%	1%
5	9%	3%	49%	3%	2%
4	9%	3%	3%	2%	2%
3	10%	16%	2%	5%	2%
2	15%	7%	5%	10%	7%
1	24%	17%	6%	24%	19%
0	18%	49%	13%	48%	61%
n	1%	1%	0%	0%	1%
vidēji	**2,73**	**1,40**	**4,72**	**1,60**	**1,15**

6. klase (958 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	12%	34%	10%	6%	8%
9	4%	2%	1%	1%	2%
8	1%	2%	1%	3%	5%
7	1%	1%	2%	3%	6%
6	1%	1%	2%	2%	20%
5	5%	10%	5%	5%	15%
4	2%	1%	1%	6%	5%
3	3%	2%	2%	6%	4%
2	4%	3%	5%	10%	9%
1	10%	8%	9%	18%	11%
0	56%	36%	60%	39%	14%
n	2%	1%	4%	1%	1%
vidēji	**2,37**	**4,58**	**1,93**	**2,37**	**4,38**

7. klase (916 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	2%	0%	9%	6%	1%
9	3%	0%	3%	2%	0%
8	2%	1%	6%	3%	0%
7	3%	1%	6%	5%	1%
6	3%	1%	2%	2%	1%
5	3%	3%	5%	5%	9%
4	6%	4%	4%	4%	1%
3	10%	8%	4%	3%	0%
2	17%	22%	7%	13%	21%
1	23%	43%	17%	13%	16%
0	28%	17%	37%	43%	48%
n	1%	0%	2%	2%	2%
vidēji	**2,27**	**1,63**	**3,01**	**2,36**	**1,30**

8. klase (697 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	1%	1%	15%	5%	0%
9	0%	0%	8%	1%	0%
8	1%	1%	3%	4%	1%
7	1%	2%	5%	12%	0%
6	1%	1%	4%	11%	1%
5	3%	3%	3%	8%	2%
4	6%	6%	6%	7%	4%
3	16%	6%	9%	6%	5%
2	7%	16%	10%	14%	12%
1	20%	47%	16%	10%	24%
0	42%	16%	21%	20%	47%
n	3%	1%	1%	3%	3%
vidēji	**1,47**	**1,80**	**4,12**	**3,69**	**1,12**

9. klase (740 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	4%	8%	1%	9%	7%
9	2%	6%	1%	4%	3%
8	1%	3%	0%	7%	4%
7	1%	1%	1%	4%	2%
6	2%	2%	0%	2%	2%
5	2%	5%	1%	3%	4%
4	4%	9%	3%	2%	5%
3	5%	18%	4%	2%	10%
2	13%	21%	13%	8%	13%
1	28%	18%	17%	16%	26%
0	36%	9%	55%	43%	23%
n	1%	0%	3%	1%	1%
vidēji	**1,85**	**3,52**	**1,07**	**2,81**	**2,81**

Valsts olimpiāde

9. klase (62 dalībnieki)

	1.uzd.	**2.uzd.**	**3.uzd.**	**4.uzd.**	**5.uzd.**
10	18%	48%	0%	3%	0%
9	2%	16%	0%	0%	0%
8	2%	8%	0%	3%	3%
7	6%	2%	0%	8%	3%
6	0%	2%	0%	3%	2%
5	13%	0%	0%	6%	5%
4	8%	3%	2%	5%	6%
3	11%	10%	2%	6%	5%
2	21%	10%	6%	23%	2%
1	13%	2%	81%	27%	3%
0	5%	0%	8%	10%	55%
n	2%	0%	2%	5%	16%
vidēji	**4,43**	**7,77**	**1,07**	**2,92**	**1,54**

Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase (560 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	19%	9%	3%	4%	3%
9	16%	2%	1%	0%	1%
8	18%	2%	2%	2%	1%
7	13%	4%	2%	2%	1%
6	8%	4%	6%	7%	3%
5	6%	10%	2%	18%	7%
4	3%	6%	4%	5%	0%
3	2%	10%	10%	3%	1%
2	2%	6%	19%	29%	8%
1	4%	13%	11%	7%	9%
0	9%	32%	29%	19%	52%
n	0%	2%	11%	4%	14%
vidēji	**6,72**	**3,12**	**2,34**	**3,11**	**1,55**

6. klase (455 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	31%	3%	3%	2%	7%
9	11%	2%	2%	0%	8%
8	7%	3%	1%	0%	0%
7	5%	3%	2%	1%	0%
6	3%	2%	2%	2%	0%
5	5%	4%	2%	6%	1%
4	13%	6%	4%	2%	42%
3	7%	11%	7%	3%	3%
2	6%	5%	16%	4%	1%
1	5%	36%	33%	7%	5%
0	4%	18%	25%	58%	33%
n	3%	6%	3%	14%	0%
vidēji	**6,56**	**2,48**	**2,01**	**1,27**	**3,29**

7. klase (449 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	2%	30%	1%	2%	1%
9	4%	4%	0%	0%	0%
8	3%	2%	1%	0%	0%
7	4%	2%	14%	0%	0%
6	5%	1%	5%	0%	2%
5	7%	3%	5%	1%	2%
4	16%	1%	5%	2%	15%
3	33%	2%	4%	18%	0%
2	3%	6%	23%	1%	2%
1	4%	22%	15%	2%	6%
0	14%	12%	15%	45%	70%
n	3%	15%	12%	28%	1%
vidēji	**3,63**	**5,08**	**3,00**	**1,34**	**1,05**

8. klase (349 dalībnieki)

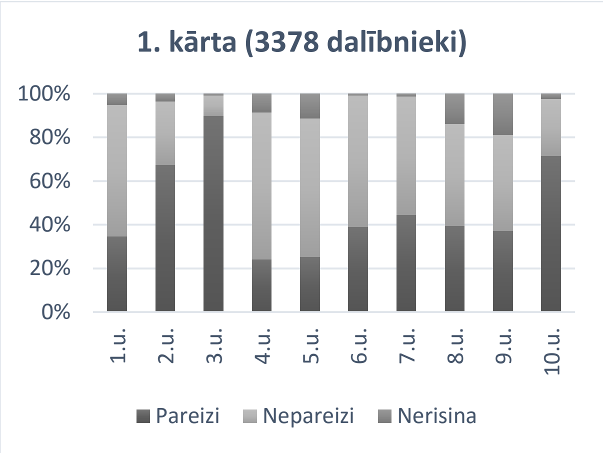
	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	18%	11%	1%	2%	3%
9	4%	4%	0%	0%	1%
8	3%	4%	1%	3%	1%
7	15%	4%	2%	6%	2%
6	8%	3%	1%	5%	9%
5	5%	5%	3%	5%	7%
4	3%	5%	12%	7%	4%
3	1%	9%	5%	17%	15%
2	3%	15%	7%	21%	29%
1	4%	11%	21%	23%	24%
0	31%	19%	45%	9%	4%
n	5%	9%	3%	2%	1%
vidēji	**4,67**	**3,69**	**1,51**	**2,88**	**2,97**

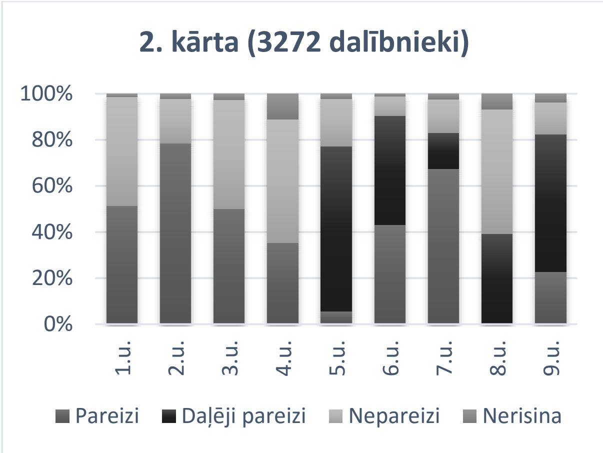
9. klase (321 dalībnieks)

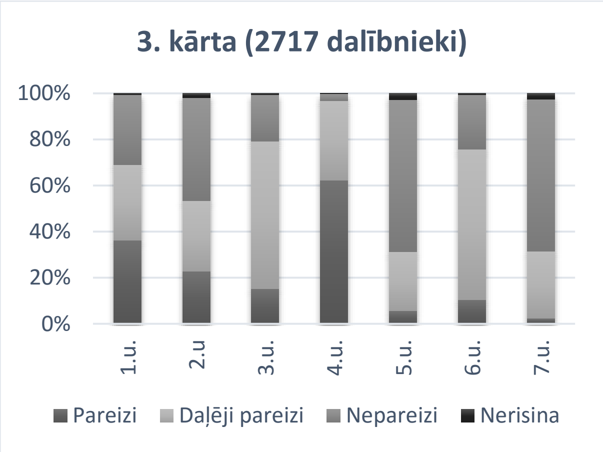
	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	19%	30%	1%	5%	9%
9	22%	11%	0%	2%	0%
8	15%	2%	0%	2%	5%
7	11%	2%	0%	2%	1%
6	7%	2%	1%	2%	0%
5	4%	3%	0%	5%	4%
4	2%	2%	3%	7%	2%
3	2%	3%	1%	3%	8%
2	2%	14%	3%	9%	10%
1	4%	5%	10%	6%	30%
0	5%	17%	59%	36%	18%
n	7%	8%	22%	20%	14%
vidēji	**7,13**	**5,57**	**0,61**	**2,51**	**2,77**

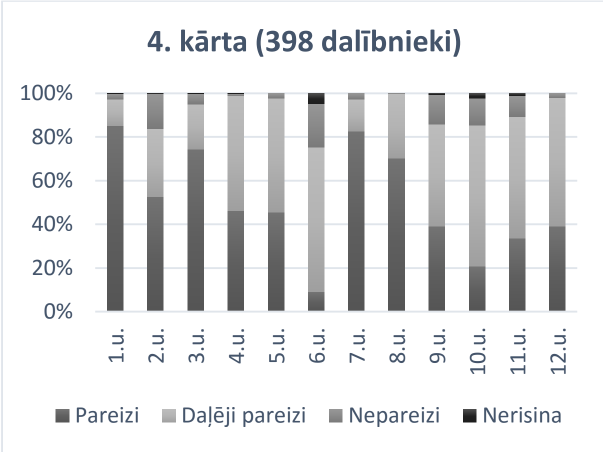
2014./2015. mācību gads

Tik vai… Cik?









Jauno matemātiķu konkurss

Pirmā kārta

J2.1.1. Saskaiti!

Lielākā daļa risinātāju ar šo uzdevumu bija tikuši galā. Ja risinājumā nebija skaidri norādīta un saprotama sistēma, pēc kuras nogriežņi tika skaitīti, tad par šo uzdevumu varēja iegūt ne vairāk kā 4 punktus. Tikai par pareizu atbildi bez risinājuma varēja saņemt 1 punktu.

J2.1.2. No 1 līdz 7

Ja risinājumā bija parādīti tikai 4 iespējamie varianti bez pamatojuma, kāpēc citi varianti nav iespējami, tad par šo uzdevumu varēja saņemt ne vairāk kā 2 punktus.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums "Cik...?", tad nepietiek atrast vienu vai dažas iespējamās vērtības, bet

1) jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības;

2) jāpamato, ka citu vērtību nav.

2.1.3. Trīsciparu skaitlis

Tikai par pareizu atbildi bez pamatojuma, ka vēl mazāks skaitlis nav iespējams, varēja saņemt ne vairāk kā 2 punktus. Punktu skaits tika samazināts par 1, ja nebija parādīts, ka 119 tiešām ir salikts skaitlis nevis pirmskaitlis.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums "Kāds ir mazākais...?", tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast šo vismazāko vērtību un parādīt piemēru;

2) pierādīt, ka mazāka vērtība nevar būt.

J2.1.4. Taisnstūris

Ļoti laba ideja ir sākumā salīdzināt taisnstūru laukumus – ja tie nebūtu vienādi, tad no viena taisnstūra otru taisnstūri iegūt nevarētu. Tas gan neattiecas uz taisnstūru perimetriem – ja tie nav vienādi, tas nenozīmē, ka no viena taisnstūra otru iegūt nevarēs. Tā bija viena no raksturīgākajām kļūdām.

Diezgan daudz skolēnu bija pieņēmuši, ka taisnstūris jāsadala divās vienādās daļās ar vienu taisnu griezienu, tāpēc izdarīja aplamus secinājumus, ka uzdevumu nav iespējams atrisināt.

Punktu skaits tika samazināts par 1, ja nebija parādīts, kā no abām iegūtajām daļām salikt taisnstūri.

J2.1.5. Rudens lapa

Šis bija šīs konkursa kārtas grūtākais uzdevums. Punktus varēja saņemt arī tad, ja vispār bija saprasts, kā kļavas lapa jākrāso. Liels prieks par tiem dažiem individuālajiem un kolektīvajiem risinātājiem, kas ar šo uzdevumu bija tikuši galā, turklāt vēl atraduši citu risinājumu, kas atšķiras no mūsu piedāvātā. Priecājamies arī par tiem centīgajiem dalībniekiem, kas tiešām bija izkrāsojuši vairākus simtus lapu. Dažās skolās pat tika rīkota izstāde (skat. http://nms.lu.lv/interesantumi/).

Otrā kārta

J2.2.1. Tabula

Lielākā daļa risinātāju ar šo uzdevumu bija tikuši galā.

Ja kādā rindā vai kolonnā atkārtojās cipari, tad par šo uzdevumu varēja iegūt ne vairāk kā 4 punktus.

Piezīme. Uzdevumam ir iespējami arī citi atrisinājumi, kas atšķiras no atrisinājumos dotā.

J2.2.2. Vai var sadalīt?

Šis uzdevums izrādījās diezgan grūts – daļa risinātāju ar uzdevumu nebija tikuši galā, daļa mēģināja pierādīt, ka figūru nav iespējams sadalīt.

Par pareizi sadalītu figūru varēja saņemt 5 punktus. Par secinājumu, ka katrā daļā jābūt 9 rūtiņām varēja iegūt 1 punktu. Ja figūras nebija vienādas, bet katrā daļā bija pa vienam katra veida simbolam, tad varēja iegūt 2 punktus.

J2.2.3. Cik pirmskaitļu?

Labotājiem par pārsteigumu skolēni ar šo uzdevumu ļoti labi bija tikuši galā. Ļoti uzkrītoši šajā uzdevumā tika nepareizi lietoti jēdzieni: skaitļi – cipari un īpašības – pazīmes. Punktu skaits tika samazināts par 1, ja trūka secinājums: ja skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad arī pats skaitlis dalās ar 3.

J2.2.4. Taisnstūris

Arī šis uzdevums skolēniem šķita vienkāršāks nekā uzdevuma sastādītāji bija domājuši. Lielākajai daļai skolēnu risinājumi bija ļoti līdzīgi atrisinājumos dotajam 1. risinājumam. Daži aplūkojamo gadījumu skaitu bija samazinājuši, secinot, ka lielā taisnstūra platums nevar būt nepāra skaitlis.

Par katru iespējamo gadījumu bez pamatojuma, ka citu iespēju nav, varēja iegūt 1 punktu. Punktu skaits tika samazināts par 1, ja tika izlaists kāds būtisks secinājums vai paskaidrojums. Ja nebija uzrakstīti visi gadījumi, arī tie, kas neder, varēja saņemt ne vairāk kā 3 punktus. Ja uzrakstīta tikai frāze “es pārbaudīju visus iespējamos gadījumus un man nesanāca”, tad labotājs nevar zināt, vai tiešām pārbaude ir veikta.

J2.2.5. Par vecmāmiņām

Diezgan daudz skolēnu, lai noteiktu vecmāmiņu skaitu, bija vienkārši saskaitījuši kopā visus dotos skaitļus, vai dažus no tiem – tas nav pareizi, tieši tāpēc šo uzdevumu ļoti uzskatāmi var attēlot ar Eilera riņķiem.

Ja risinājums bija balstīts uz vienu vai dažiem atsevišķiem piemēriem, par to varēja saņemt ne vairāk kā 1 punktu. Punktu skaits tika samazināts par 1-2 punktiem, ja risinājumā trūka dažu paskaidrojumu.

Daļa skolēnu bija pauduši savu sašutumu, kā gan vecmāmiņām var nepatikt cept rausīšus (skat., piemēram, http://nms.lu.lv/interesantumi/).

Trešā kārta

J2.3.1. Ziemassvētku vecīša pagalms

Gandrīz visi risinātāji ar šo uzdevumu bija tikuši galā. Daži bija pārpratuši, ka eglīte jāizvieto pa 3 rūtiņām nevis pa 4, kā tas bija dots.

J2.3.2. Sacīkšu ziemeļbrieži

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums "Kāds var būt...?", tad **nepietiek** atrast vienu vai dažas iespējamās vērtības, bet ir

1) jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības;

2) **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

Daļa skolēnu bija **tikai** uzrādījuši vienu, divus vai visus trīs iespējamos numurus. Ar to nepietiek! Par to varēja iegūt tikai 1 punktu. Šāda veida uzdevumos vienmēr ir jāraksta risinājums un jāpamato, ka ir atrastas visas iespējamās vērtības.

Taču diezgan daudz dalībnieku šo uzdevumu bija ļoti labi atrisinājuši. Punktu skaits tika samazināts par 1, ja nebija pamatots, ka vidējo četru ciparu skaitli var iegūt tikai vienā veidā, t.i., ka neder gadījumi $11 \cdot 11 = 121$ un $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 14641$ (daudzi bija aizmirsuši pierakstīt tieši to, ka 11^4 jau ir piecciparu skaitlis, tāpēc vairs neder). Punktu skaits tika samazināts par 1 arī tad, ja nebija apskatīti visi iespējamie gadījumi, kāds var būt sešciparu skaitļa pirmais un pēdējais cipars, t.i., ja netika pamatots, kāpēc ir iespējami tikai trīs varianti. Frāze “es pārbaudīju visus iespējamos gadījumus un man sanāca tikai šīs trīs iespējas” netiek uzskatīta par pamatojumu.

Ja tika ievērots tikai viens vai divi uzdevumā minētie nosacījumi, tad punktus par to nevarēja saņemt.

J2.3.3. Rūķīšu dāvanu krāvums

Šo uzdevumu bija ļoti interesanti labot. Daudzi risinātāji bija ņēmuši palīgā dažādus klucīšus, fotografējuši krāvumus un risinājumos ievietojuši bildes.

Liela daļa dalībnieku bija kļūdījušies uzskatot, ka mazākais iespējamais klucīšu skaits krāvumā ir 10, jo nebija ievērojuši, ka priekšējās rindas vai nu labajā, vai kreisajā pusē divas dāvanas ir liekas.

Arī šajā uzdevumā nepietiek tikai ar atbildi vien. Jāparāda arī piemēri, kā dāvanas krāvumā ir izvietotas un jāpaskaidro, kāpēc minētais dāvanu skaits tiešām ir lielākais vai mazākais iespējamais. Ja kāds pamatojums vai piemērs trūka, par to tika samazināts punktu skaits.

J2.3.4. Vecmāmiņas cimdi

Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums "Kāds ir mazākais...?", tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast vismazāko vērtību un parādīt piemēru;

2) pierādīt, ka mazāka vērtība nevar būt.

Nepietiek tikai parādīt, ka no četriem ziliem cimdiem noteikti var izveidot pāri. Ir jāpamato, ka vienmēr nevarēs izveidot saderīgu pāri ne no diviem cimdiem, ne no trīs cimdiem. Tikai par pareizu atbildi varēja saņemt 1 punktu.

J2.3.5. Sērkociņu grafs

Lai gan šo uzdevumu daudzi bija ļoti labi risinājuši, tomēr pavisam maz risinātāju šo uzdevumu bija atrisinājuši pilnīgi pareizi. Vairums nebija pamanījuši, ka daži no izveidotajiem salikumiem nav uzskatāmi par dažādiem.

Ceturtā kārta

J2.4.1. Izdomā sakarību!

Šajā uzdevumā skolēni bija radoši izpaudušies un atraduši arī vēl citas sakarības, kas atšķiras no atrisinājumos dotajām. Ja nebija parādīts, ka izdomātā sakarība izpildās pirmajām divām tabulām, tad punktu skaits tika samazināts par 2.

J2.4.2. Metamie kauliņi

Ar šo uzdevumu skolēni bija ļoti labi tikuši galā. Punktu skaits tika samazināts, ja trūka paskaidrojumu, kā iegūts kāds starprezultāts.

J2.4.3. Caurumiņa ceļš

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi. Vairāki skolēni bija aprakstījuši, ka viņi no kartona ir izgriezuši modeļus, bīdījuši kvadrātu un tad izmērījuši caurumiņa ceļu. Lai gan tas palīdz izprast uzdevumu, ar to vien nepietiek, lai iegūtu maksimālo punktu skaitu.

J2.4.4. Cik bērnu?

Šis bija grūtākais uzdevums. Lai gan ļoti daudzi skolēni bija kaut kā nonākuši pie pareizās atbildes, tikai neliela daļa skolēnu bija pamatojuši, ka tā ir vienīgā iespējamā atbilde. Tikai par pareizu atbildi varēja saņemt 1 punktu.

J2.4.5. Flīzes

Kā izrādījās, tad arī šis šķietami grūtais uzdevums ļoti daudziem dalībniekiem bija pa spēkam. Skolēni bija atraduši arī vēl citus veidus, kā aprakstīt dažādo flīžu laukumu veidu skaitu, kas atšķiras no diviem mūsu dotajiem risinājumiem.

Piektā kārta

J2.5.1. Pirmskaitļu maģiskais kvadrāts

Lielākā daļa skolēnu šo uzdevumu bija atrisinājuši pareizi. Ja nebija uzrakstīta summa, tad punktu skaits tika samazināts par 1. Ja skaitļu summa visās norādītajās vietās nebija viena un tā pati, tad nevarēja iegūt vairāk kā 2 punktus.

J2.5.2. Izlocīt kubiņus

Lai gan šis uzdevums uzdevumu veidotājiem nešķita viegls, skolēni ar to ļoti labi bija tikuši galā. Ja bija parādītas tikai iegūtās figūras un nebija parādīts, kā jāsagriež dotā figūra, tad varēja iegūt 3 punktus.

J2.5.3. Cik dažādu četrstūru?

Ja bija parādīti visi 16 varianti, bet nebija aprakstīta sistēma, kā daudzstūri tiek meklēti, nevarēja iegūt vairāk kā 4 punktus. Daļa skolēnu nebija sapratuši, kādus četrstūrus uzskata par dažādiem.

J2.5.4. Debesmanna nedalās ar 264

Vairāki skolēni bija atraduši vienu vai dažus atsevišķus piemērus, kāds skaitlis var būt formā *ANBCDENNN* un tad pamatojuši, ka, ievietojot atbilstošos ciparus vārdā *DEBESMANNA,* iegūtais skaitlis nedalās ar 264. Diemžēl tas nenozīmē, ka nav neviens cits skaitlis, kas arī var būt formā *ANBCDENNN* tāds, ka *DEBESMANNA* nedalās ar 264. Par atsevišķiem piemēriem nevarēja iegūt vairāk kā 2 punktus.

J2.5.5. Trapeču virknīte

Par a), b) un c) daļu varēja saņemt 3 punktus (par katru daļu 1 punktu), par d) daļu varēja saņemt 2 punktus. Ja aprēķinos tika pieļauta kļūda, kopējais punktu skaits tika samazināts par 1.

Profesora Cipariņa klubs

Pirmā nodarbība

P2.1.1. Nevienādības

Uzdevums bija vienkāršs, taču ļoti pamācošs. Lai uzdevumā iegūtu maksimālo punktu skaitu (Un ļoti daudzos līdzīgi formulētos uzdevumos!) bija jātiek galā ar diviem apakšuzdevumiem:

- jāpierāda, ka visas piecas nevienādības vienlaicīgi nevar būt patiesas;
- jāpierāda, ka ir tādas 4 no dotajām nevienādībām, kas vienlaicīgi ir patiesas.

Visdrošākais veids, kā tikt galā ar 2. apakšuzdevumu, ir uzrakstīt piemēru. Lai cik tas triviāli nešķistu, matemātiski korektam risinājumam tas ir ļoti svarīgi. Bija iesūtīti vairāki labi risinājumi, kas tika galā ar grūtāko 1. daļu, bet ne ar 2.

Jāatceras, protams, ka ar dažu piemēru apskatīšanu nevar pierādīt 1. daļu.

P2.1.2. Gliemeži

Uzdevuma nosacījumos bija teikts, ka asteres vienmērīgi aug. Tas nozīmē, ka visu laiku, kamēr gliemeži grauž asteres, asteru daudzums turpina palielināties. Tāpat jāatceras, ka jau pirms gliemeži sāk ēst, dobē ir kaut kāds asteru daudzums.

P2.1.3. Starpbrīdis

Daudzi bija pārpratuši šo uzdevumu. Nebija jāpierāda, ka var salikt kvadrātu, kurā visās rūtiņās var ierakstīt pa skaitlim tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa būtu salikts skaitlis. Bija jāpierāda, ka vienmēr vismaz viena no summām būs salikts skaitlis.

Atrisinājums, kurā ir parādīti pāris piemēri, ka nesanāk uzdevumā prasītais, nav uzskatāms par pierādījumu.

P2.1.4. Ojāra dzīve

Šāda tipa uzdevumos nav korekti ieviest patvaļīgas vērtības, ar kurām būtu vieglāk aprēķināt uzdevumā prasīto. Piemēram, attālumu no skolas līdz mājām un laiku, ko Ojāra tētis pavada ceļā. Tādā gadījumā būtu jāpārbauda visas iespējamās vērtības, nevis tikai viena. Jāatceras, ka atbilde ir jāpamato.

P2.1.5. Priecīgie kubiņi

Lai vieglāk tiktu galā ar šo uzdevumu, varēja izmantot mājās atrodamus kubiskas formas priekšmetus.

Rūpīgi jāpārlasa uzdevuma nosacījumi – kādas kubu saskaršanās tiek uzskatītas par atļautām un kādas ne.

P2.1.6. Darba cilvēki

Galvenā atziņa – izskati visus iespējamos gadījumus! Nav jau teikts, ka uzdevumam ir tikai viena atbilde.

Uzdevumu varēja risināt divējādi. Pirmais – kā piedāvāts mūsu risinājumos. Šeit ir jāizskata visi iespējamie strādnieka varianti, arī Zintis un Alvis, par kuriem bieži aizmirsa. Otrais – izvēloties vienu patieso teikumu un apskatot, vai pārējie teikumi var būt nepatiesi. Šeit ir jāpārbauda visi teikumi. Daži secināja, ka 4. der, un aizmirsa pārbaudīt, kā būtu, ja patiess būtu kāds cits teikums.

P2.1.7. Taisnleņķu ģeometrija

Daudzi savā risinājumā aizmirsa pierakstīt, ka punkti jāatliek kvadrāta virsotnēs. Citiem četrstūriem šāds risinājums neatbilst uzdevuma prasībām!

P2.1.8. Mednieks Miķelis

Šajā uzdevumā bija svarīgi saprast, ka nevar patvaļīgi pieņemt, pa kuriem lauciņiem staigās pele, pat ja izvēlētais variants šķiet pelei visizdevīgākais. Lai Miķelis noteikti noķertu peli, jāapskata visi gadījumi, kur pele varētu iet.

Otrā nodarbība

P2.2.1. Mānīgie uzraksti

Šo uzdevumu bija ļoti interesanti labot, jo bija iesūtīti daudzi oriģināli risinājumi.

Bija svarīgi saprast, ka svēršanai ir jēga tikai tad, ja abos svaru kausos atsvaru uzrakstu summas ir vienādas. Pretējā gadījumā neko daudz no svēršanas rezultāta nevar secināt.

P2.2.2. Lecošie zirdziņi

a) Šī uzdevuma jautājums bija „Vai var izdarīt?”. Ja pēc vairākiem mēģinājumiem esi secinājis, ka tas nav iespējams, tad noteikti ir jāsniedz pierādījums, kādēļ to nevar izdarīt. Nepietiek atbildēt tikai ar vārdiem: „Nē, to nevar izdarīt.” .

b) Ja Tev ir izdevies tikt galā ar uzdevumā prasīto, tas noteikti ir jāuzraksta atbildē. Nepietiek pateikt: „Zirgi seko ritmam.”, vajadzīgs sakārtots un detalizēts risinājums.

P2.2.3. Pētnieks Miķelis

Kad esi atrisinājis uzdevumu, vēlreiz rūpīgi pārlasi uzdevuma nosacījumus. Sevišķi lielu uzmanību pievērs uzdevuma jautājumam. Šajā uzdevumā jautājums bija „Cikos tas notiks?”, tādēļ nepietika tikai atbildēt, ka tas notiks pēc 44 min.

P2.2.4. Burkānu raža

Šajā uzdevumā daudzi bija sapratuši galveno ideju, tomēr risinājums nebija pārdomāts līdz galam. Svarīgi saprast, ka risinājumā abas vagas nedrīkst apvienot vienā, jo stratēģija vienas kopīgas vagas gadījumā nav tāda pati, kā divu atšķirīgu vagu gadījumā.

P2.2.5. Gliemežu sistēma

Lai uzzinātu, ar ko vienāda prasītā izteiksme, tās locekļi bija jāpārveido uz *mūsu* skaitīšanas sistēmu, jāsaskaita un tad jāpārveido atpakaļ. Daudzi nebija beigu rezultātu izteikuši gliemežu pierakstā. Vienmēr rūpīgi jāpārlasa uzdevuma noteikumi!

P2.2.6. Starpbrīdis

Šis bija viens no retajiem uzdevumiem, kur ļoti augstu tika vērtēta pareiza atbilde, jo tās visas bija ļoti grūti atrast. Maksimālo punktu skaitu ieguva tikai tie, kas ļoti labi prata pamatot, ka ir atraduši visus variantus.

P2.2.7. Laimīgais negadījums

Ja esat pazīstami ar bināro skaitīšanas sistēmu (tā ir skaitīšanas sistēma, kuras pierakstā lieto tikai 0 un 1), kuru lieto elektroniskajās ierīcēs, tad zināt, ka jebkuru naturālo skaitli var uzrakstīt kā divnieku pakāpju summu.

Tā nav sagadīšanās, ka uzdevumā skaitļus var salikt atņemot un saskaitot trijnieku pakāpes – skaitīšanas bāzes var būt ne tikai 2 un 10, bet jebkurš naturāls skaitlis lielāks nekā 1.

P2.2.8. Atrodi skaitli!

Viens variants, kā risināt uzdevumu, bija pārbaudīt visus 900 variantus. Ja nezina, ko iesākt, tas nemaz nav slikts variants! Šādi var pamanīt dažādas likumsakarības un arī uzdevumos, kur ir tūkstošiem variantu, šis ir svarīgs paņēmiens. Kā zināms, slinkums bīda cilvēces progresu, šādos uzdevumos ir “jācenšas būt slinkam” un pēc iespējas jāsaīsina risinājums. Vienīgie, kas zaudēja punktus, bija visslinkākie, kas tikai uzrādīja atbildi, vai nepietiekami pamatoja, kāpēc 145 ir vienīgais iespējamais skaitlis. Pārāk liels slinkums nav veselīgs.

Trešā nodarbība

P2.3.1. Kvadrāta griešana

Daudzi zaudēja punktus, jo bija arī jāpierāda, kāpēc uzzīmētie trijstūri ir šaurleņķu.

P2.3.2. Pūķu dārgumi

Ja uzdevuma jautājums ir ”Kāds ir mazākais…?”, tad noteikti ir jāpierāda, ka Jūsu atrastā vērtība patiešām ir pati mazākā iespējamā. Nepietiek tikai ar atbildi un piemēru, kurā tas izpildās. Pamatojums nedrīkst balstīties tikai uz vienu konkrētu piemēru, kurā kaut kas neizpildās. Tam ir jābūt spēkā visos iespējamos gadījumos.

P2.3.3. Vecā Zane

Šajā uzdevumā jāpievērš uzmanība jautājuma formulējumam. Tika prasīts „Cik gadu tagad Zanei?”, nevis cik veca viņa ir vai cik gadu viņai būs. Uzdevumā ir runa par gadiem, nevis mēnešiem, dienām, stundām…

P2.3.4. Sapnis

Sākot uzdevumu, vajadzētu izdomāt, cik ciparus saturēs skaitlis A un B. Nākamais solis ir saprast, ar kādu ciparu nevar beigties skaitlis A.

P2.3.5. Kuģītis

Šis uzdevums kopumā tika diezgan veiksmīgi risināts. Līdzīgos uzdevumos var būt noderīgi izgriezt dotās figūras no papīra.

P2.3.6. Miķeļa grīda

Šāda veida uzdevumos iesūtiet arī nepilnīgus risinājumus, pat ja neesat tikuši galā ar visiem uzdevuma nosacījumiem. Daži punkti tika piešķirti arī par risinājumiem, kuros Miķelim izdevās apstaigāt visu grīdu, bet neizdevās atgriezties uz sākotnējās flīzes.

P2.3.7. Starpbrīdis

Daudzi aizmirsa, ka ar derīgu vienu piemēru nepietiek, lai pierādītu, ka šie ir vienīgie iespējamie tabulas izmēri.

P2.3.8. Apdzīvotā sala

Līdzīga veida uzdevumos savos jautājumos ļoti derīgi ir iesaistīt uzdevuma nosacījumos minētos tēlus vai frāzes. Vienmēr kārtīgi jāpārbauda, ja šķiet, ka esat izdomājuši risinājumu, kurš liekas „pārāk vienkāršs”, lai būtu pareizs. Piemēram, jautājums: „Kā izrunā vārdu „sim”?” negarantē meklēto atbildi, jo meļiem nav jāatbild uz šo jautājumu godīgi.

Ceturtā nodarbība

P2.4.1. Saskaiti rūtiņas!

Šajā un arī citos uzdevumos, kur prasīts pierādīt kādu īpašību, kas izpildīsies pēc n gājieniem, ir jāsaprot, ka šie gājieni ir patvaļīgi, tas ir, mēs paši nevaram izvēlēties, kādi šie gājieni būs. Tāpēc neder pierādījums, kurš apskata konkrētu gadījumu, kurā izpildās prasītā īpašība.

P2.4.2. Pie ugunskura

Šim uzdevumam svarīgi bija pieņemt, ka mēs nezinām, kādus skaitļus Ritvars ir iedomājies, un tad ar loģiskiem spriedumiem secināt, kādi ir Ritvara iedomātie skaitļi. Nav pareizs (līdz galam pabeigts) risinājums, kurā tiek atrasts viens no variantiem un pēc tam pārbaudīts, ka šis variants patiešām atbilst uzdevuma nosacījumiem.

P2.4.3. Alternatīvās skudras

Gandrīz visi dalībnieki sekmīgi tika galā ar šo uzdevumu. Lai iegūtu maksimālo punktu skaitu, pietika uzrādīt vienu piemēru, kurā prasītais izpildās. Malači tie, kuri bija izdomājuši un uzrakstījuši ne tikai piemēru, bet arī matemātisku pamatojumu tam, kā to var izdarīt.

P2.4.4. Dīvainais daudzstūris

Šajā uzdevumā punkti tika piešķirti arī par nepilnīgiem risinājumiem – ja dalībnieks bija atradis citu daudzstūri, kuram izpildās uzdevumā prasītā īpašība. Atceries, ja Tev ir kāda laba ideja uzdevuma atrisinājumam, bet ar pilno risinājumu neesi ticis galā, tad noteikti iesūti arī savu nepilnīgo risinājumu!

P2.4.5. Starpbrīdis

Daudzi aizmirsa parādīt gadījumu, kas notiks, ja izdomātais skaitlis beigsies ar 0. Jāatceras, ka skaitļu virkne, kas sākas ar 0, netiek uzskatīta par skaitli, ja uzdevumā nav kā citādi atrunāts.

Dažos darbos bija nepilnīgi spriedumi gadījumiem, ja skaitlis beigsies ar 1 – precīzs risinājums šajā gadījumā ir tāds, kas pierāda, ka visi skaitļi, kas beidzas ar 1, neder.

P2.4.6. Divi kvadrāti plaknē

Skaidrs un uztverams pieraksts var nākt tikai par labu rezultātam, it īpaši ģeometrijas uzdevumos. Bija darbi, kuros trūka zīmējumu, vai arī bija zīmējumi, kuros nebija apzīmējumu. Labotājiem ir ne tikai grūti uztvert, vai esi sapratis ideju un korekti atrisinājis, bet arī Tu pats šādi vari ļoti viegli kļūdīties. Tāpēc pirms raksti tīrrakstu uzdevumiem, kas iekļauj daudz formulu, īpaši apdomā, kā strukturēt domu un izcelt svarīgākās idejas.

P2.4.7. Meklējot skaitli

Galvenais šajā uzdevumā bija saprast, ja prasīts, lai uzdevuma nosacījumi izpildās jebkurai x vērtībai, tad neder variants, kurā uzdevuma nosacījumi dažiem x izpildās, bet dažiem – nē.

P2.4.8. Gudrais Miķelis

Parādīt, ka pierādāmās izteiksmes dotajā uzdevuma vienādojumā izpildās, ir nepietiekams atrisinājums.

Uzdevumā ir jāpierāda – ja izpildās vienādības $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$, tad no tā izriet, ka ir spēkā arī vai nu $a+b+c=0$, vai arī $a=b=c$. Nevis – ja izpildās $a+b+c=0$ vai $a=b=c$, tad ir patiesas vienādības $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$. Uzdevumos ļoti svarīgi ir saprast, kas ir dots un kas ir jāpierāda.

Arī ar vienkāršu skaitlisku piemēru nepietiek, lai atrisinātu uzdevumu, jo jāatceras, ka jāapskata visi iespējamie gadījumi – visi reālie skaitļi, kuru vērtības a, b un c varētu pieņemt.

Piektā nodarbība

P2.5.1. Muzikants Džonijs

Šajā uzdevumā nepietika parādīt, ka Džonija lēkāšana pa darbnīcām pēc laika atkārtojas. Lai iegūtu 5 punktus par risinājumu, bija jāpierāda arī tas, kāpēc rodas šāds cikls.

P2.5.2. Karalienes untumi

Gandrīz visi risinātāji veiksmīgi tika galā ar šo uzdevumu. Mums bija īpaši liels prieks par tiem, kas ne tikai sagrieza paklājus un salika tos kopā, bet arī piedomāja pie tā, lai paklāja raksts paliktu nemainīgs un neviens no paklāja gabaliem nebūtu jāgriež otrādi – ar lejas daļu uz augšu, tos atkal sašujot kopā.

P2.5.3. Kubiņa apsegšana

Šajā uzdevumā bija svarīgi arī matemātiski pamatot, ka izvēlētajā veidā kubiņu tiešām var apsegt.

P2.5.4. Bada spēles

Daudzi risinātāji bija apskatījuši tikai konkrētus gadījumus vai arī uzvarošo stratēģiju atraduši no kāda konkrēta sviestmaižu skaita, bet nebija uzrakstījuši, kā līdz šādam skaitam nonākt. Šāda tipa uzdevumos ir svarīgi, lai stratēģija darbotos no paša sākuma līdz beigām neatkarīgi no visiem iespējamiem pretinieka gājieniem.

P2.5.5. Starpbrīdis

Šis uzdevums bija viegli risināms arī a, b un c vietās ievietojot skaitļus, jo uzdevuma nosacījumos bija minēts, ka tie ir naturāli skaitļi. Taču tad ir ļoti rūpīgi jāpārbauda, vai ar izrēķinātajiem piemēriem pilnībā pietiek, lai varētu spriest par visiem iespējamajiem gadījumiem. Daudzi zaudēja punktus (ja spriedums bija līdzīgs atrisinājumos piedāvātajam), jo bija atraduši tikai vienu no trim iespējamajām a, b un c vērtībām, kurām izpildās vienādība $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

P2.5.6. Sagrieztais kvadrāts

Lielākās grūtības sagādāja b) daļa, kurā bija jāpierāda, ka prasītais iespējams pie jebkuras izgriezto rūtiņu kombinācijas. Jāatceras, ka līdzīgos gadījumos nepietiek ar dažiem konkrētiem piemēriem.

P2.5.7. Paulas laboratorija

Daži bija piemirsuši uzdevuma nosacījumu – jaunuzbūvētās sienas nedrīkst atrasties ārpus laboratorijas. Ja esi izdomājis labu ideju, tad kārtīgi uzzīmē zīmējumu, lai sienas nešķērsotu trauciņus ar ķīmiskajām vielām. Kad esi pabeidzis rakstīt uzdevumu tīrrakstu, pārlasi visu vēlreiz, lai nekas nebūtu aizmirsies!

P2.5.8. Zanes olīvas

Šāda tipa uzdevumos nepietiek tikai ar atbildi – vajadzīgs risinājums. Daudzi bija piemirsuši, kā atrod vairāku skaitļu mazāko kopīgo dalāmo. Tādēļ, aprēķinot skaitļu 2, 3, 4, 5 un 6 mazāko kopīgo dalāmo, ieguva skaitli 120, nevis 60.

P2.5.9. Atlikušās sviestmaizes

Uzdevums bija krietni atjautīgāks, nekā sākumā varēja šķist, jo bija jāprot izmantot to, kas uzdevuma tekstā nebija teikts. Trīs uzdevumā minētie desu veidi varēja nebūt vienīgie – nav izslēgts, ka kāda no desmaizēm varbūt bija ar aknu desu! Kā arī varbūt uz kādas no maizītēm bija vairāk nekā viena desa.

P2.5.10. Viltīgā aita

Šajā un citos uzdevumos der atcerēties par dažādām skaitļu klasēm, piemēram, ka racionāls skaitlis nevar būt vienāds ar skaitli, kurš nav racionāls. Jāatzīst, ka īstajā dzīvē aita tik viegli nevarētu izglābties, jo ne aita, ne vilks patiesībā nav punkts.

Novada olimpiāde

5. klase (1042 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	51%	4%	41%	7%	3%
9	13%	1%	0%	4%	0%
8	9%	1%	0%	6%	0%
7	2%	2%	0%	7%	2%
6	2%	2%	33%	10%	2%
5	4%	3%	0%	46%	1%
4	4%	2%	1%	10%	1%
3	2%	3%	0%	1%	1%
2	4%	9%	0%	1%	5%
1	4%	20%	10%	1%	14%
0	5%	51%	14%	7%	70%
n	0%	1%	0%	0%	2%
vidēji	**7,75**	**1,57**	**6,28**	**5,44**	**0,92**

6. klase (876 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	62%	8%	8%	2%	0%
9	3%	1%	3%	0%	0%
8	3%	4%	6%	1%	0%
7	2%	2%	3%	5%	0%
6	1%	2%	0%	6%	1%
5	2%	4%	0%	67%	2%
4	2%	6%	1%	3%	5%
3	1%	7%	8%	1%	9%
2	3%	21%	15%	1%	14%
1	4%	23%	24%	3%	18%
0	15%	21%	30%	10%	47%
n	1%	1%	2%	0%	3%
vidēji	**7,34**	**2,83**	**2,60**	**4,62**	**1,21**

7. klase (846 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	16%	21%	16%	14%	9%
9	13%	3%	1%	2%	2%
8	6%	9%	6%	1%	1%
7	9%	2%	3%	0%	1%
6	4%	3%	0%	0%	2%
5	2%	6%	2%	1%	4%
4	5%	4%	2%	1%	5%
3	6%	7%	12%	1%	20%
2	7%	10%	11%	9%	6%
1	11%	18%	15%	32%	15%
0	20%	17%	31%	39%	33%
n	2%	1%	1%	0%	2%
vidēji	**4,90**	**4,49**	**3,39**	**2,31**	**2,60**

8. klase (722 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	11%	20%	2%	7%	3%
9	2%	3%	0%	1%	0%
8	4%	2%	1%	3%	2%
7	3%	4%	0%	0%	1%
6	7%	1%	3%	1%	1%
5	21%	3%	7%	1%	4%
4	6%	3%	60%	3%	3%
3	3%	12%	5%	4%	5%
2	9%	23%	10%	17%	28%
1	13%	14%	4%	8%	30%
0	21%	13%	7%	54%	20%
n	0%	1%	0%	0%	1%
vidēji	**3,90**	**4,11**	**3,67**	**1,83**	**2,07**

9. klase (726 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	5%	40%	2%	3%	1%
9	5%	6%	0%	2%	0%
8	9%	4%	1%	9%	0%
7	13%	2%	1%	3%	0%
6	7%	2%	2%	7%	1%
5	5%	3%	3%	8%	0%
4	4%	3%	8%	8%	1%
3	5%	3%	9%	4%	1%
2	11%	6%	14%	8%	2%
1	15%	10%	22%	12%	14%
0	20%	17%	36%	33%	71%
n	1%	3%	2%	4%	8%
vidēji	**3,91**	**6,00**	**1,73**	**3,06**	**0,47**

Valsts olimpiāde

9. klase (73 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	0%	36%	7%	11%	3%
9	0%	1%	1%	0%	0%
8	0%	0%	1%	1%	0%
7	3%	1%	8%	1%	0%
6	5%	26%	4%	10%	0%
5	8%	15%	1%	14%	0%
4	4%	0%	21%	8%	1%
3	5%	0%	15%	21%	19%
2	25%	1%	7%	11%	23%
1	23%	7%	16%	15%	11%
0	23%	12%	18%	7%	33%
n	3%	0%	0%	1%	10%
vidēji	**2,04**	**6,19**	**3,38**	**3,93**	**1,64**

Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase (722 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	57%	12%	1%	1%	1%
9	1%	2%	3%	1%	0%
8	2%	2%	4%	1%	0%
7	0%	1%	4%	2%	1%
6	2%	2%	4%	4%	3%
5	2%	1%	8%	8%	1%
4	2%	3%	7%	23%	0%
3	0%	2%	5%	11%	0%
2	9%	8%	22%	2%	1%
1	6%	49%	20%	2%	31%
0	14%	16%	14%	38%	50%
n	5%	0%	8%	8%	12%
vidēji	**6,79**	**2,73**	**2,91**	**2,47**	**0,88**

6. klase (549 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	1%	14%	5%	0%	13%
9	0%	5%	2%	0%	1%
8	1%	2%	0%	0%	7%
7	0%	8%	0%	0%	3%
6	2%	8%	0%	0%	12%
5	1%	7%	0%	0%	6%
4	13%	8%	0%	0%	8%
3	4%	7%	3%	1%	6%
2	11%	14%	9%	0%	13%
1	39%	7%	40%	4%	6%
0	22%	19%	38%	80%	21%
n	6%	1%	4%	15%	4%
vidēji	**1,75**	**4,32**	**1,34**	**0,07**	**4,13**

7. klase (492 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	5%	14%	0%	0%	4%
9	7%	9%	1%	0%	4%
8	9%	7%	2%	1%	5%
7	10%	4%	11%	0%	5%
6	11%	8%	28%	2%	4%
5	12%	5%	15%	2%	4%
4	12%	3%	6%	11%	6%
3	9%	3%	1%	14%	3%
2	10%	4%	1%	11%	8%
1	7%	33%	16%	16%	30%
0	5%	8%	14%	34%	18%
n	2%	3%	6%	10%	8%
vidēji	**4,98**	**4,47**	**4,10**	**1,71**	**3,09**

8. klase (409 dalībnieki)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	3%	35%	0%	7%	19%
9	0%	7%	0%	0%	3%
8	1%	4%	0%	1%	3%
7	0%	3%	1%	1%	3%
6	0%	2%	1%	3%	9%
5	0%	4%	1%	3%	3%
4	0%	1%	0%	0%	4%
3	0%	1%	0%	0%	4%
2	2%	4%	1%	3%	6%
1	26%	21%	6%	7%	13%
0	59%	14%	71%	68%	30%
n	8%	4%	19%	6%	3%
vidēji	**0,77**	**5,60**	**0,37**	**1,43**	**4,00**

9. klase (351 dalībnieks)

	1.uzd.	2.uzd.	3.uzd.	4.uzd.	5.uzd.
10	6%	9%	1%	5%	1%
9	1%	2%	0%	5%	1%
8	1%	2%	0%	2%	1%
7	2%	3%	1%	2%	2%
6	4%	1%	1%	3%	7%
5	1%	1%	0%	7%	12%
4	4%	5%	3%	9%	11%
3	10%	9%	3%	24%	5%
2	9%	27%	6%	22%	32%
1	26%	17%	52%	15%	19%
0	31%	22%	21%	7%	7%
n	3%	1%	11%	0%	4%
vidēji	**2,24**	**2,87**	**1,27**	**3,42**	**2,87**

Uzdevumu sadalījums pa tēmām

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika. Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.
Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Algebriski pārveidojumi – T1.4.6., P1.3.2., S1.9.1., A2.8.1., A2.9.3.

Darbības ar mērvienībām – T1.3.1., J1.2.1., T2.3.1.

Vienādojumi – T1.4.3., T1.4.4., P1.4.2., N1.7.1., N1.8.1., N1.9.1., V1.9.5., T2.1.8., T2.4.1., J2.2.5., P2.4.8., N2.7.1., N2.9.1.

Nevienādības – T1.2.6., V1.9.1., A1.7.3., T2.2.6., T2.4.3., P2.1.1., P2.3.7., P2.5.5., N2.8.3., V2.9.5., A2.7.1.

Vienādojumu sistēmas – J1.2.3., P1.4.2., P1.5.5., N2.6.1.

Skaitļu virknes – V1.9.2., P2.5.1., S2.5.1., V2.9.3., A2.9.5.

Rekurences sakarības – J1.3.4., J1.4.4.

Funkcijas un diagrammas – T1.1.10., T1.4.8., T1.4.12., S1.8.3., T2.1.10., T2.4.12., S2.8.1., N2.9.5., A2.9.1.

Attiecības, daļas, daļskaitļi – T1.1.6., T1.1.8., T1.4.7., T1.4.9., T2.1.2., T2.1.7., T2.4.9., A2.5.1., A2.6.1.

Teksta uzdevumi par kustību – T1.3.6., T1.4.5., T1.4.12., T2.4.11., P2.1.4., P2.5.10., N2.5.1.

Dažādi teksta uzdevumi – T1.1.7., T1.2.2., J1.1.2., P1.3.1., S1.5.1., S1.5.3., S1.6.5., A1.5.1., A1.6.1., A1.6.3., A1.7.3., T2.2.2., T2.2.4., T2.3.2., P2.1.2., P2.3.3., N2.6.1., N2.6.5.

Skaitļu teorija

Aritmētika – T1.1.1., T1.2.1., T1.2.7., T1.4.1., P1.1.3., P1.5.2., S1.8.1., N1.5.3., N1.6.1., N1.6.3., A1.8.1., T2.1.1., T2.1.2., T2.1.5., T2.2.1., P2.4.7., S2.7.1.

Naturālu skaitļu dalāmība, dalāmības pazīmes, atlikumi – T1.1.3., J1.2.3., P1.1.6., P1.3.5., P1.5.7., P1.6.6., S1.6.1., N1.5.2., T2.3.5., J2.1.3., J2.2.3., J2.3.2., J2.5.4., P2.5.1., P2.5.8., S2.6.1., N2.8.1., N2.9.4., A2.6.4., A2.7.3., A2.9.3.

Pirmskaitļi, skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā – P1.5.7., P1.6.6., S1.9.3., N1.7.3., A1.6.2., J2.2.3., J2.4.4., V2.9.1.

Skaitļa pieraksts – T1.1.2., T1.4.2., J1.5.1., P1.2.2., S1.6.1., S1.8.4., A1.5.2., A1.8.2., A1.9.2., J2.3.2., J2.5.4., P2.2.5., P2.2.6., P2.2.8., P2.3.4., P2.4.5., A2.5.4., A2.6.4., A2.7.3.

Skaitļi un kombinatorika – J1.3.4., P1.3.5., S1.5.2., S1.7.1., N1.5.4., N1.6.4., N1.7.3., N1.8.3., S2.5.1.

Skaitļa sadalījums reizinātājos, pakāpju īpašības – J1.4.2., P1.4.4., A1.5.5., T2.4.6., N2.6.5., N2.8.1., A2.8.3.

Vienādojumi veselos skaitļos – P1.2.4., S1.7.3., N1.9.3., A1.7.2.

Skaitļu rēbusi, skaitļu mīklas – T1.1.9., T1.2.7., J1.1.1., J1.3.2., J1.4.1., P1.2.5., P1.3.6., S1.5.5., A1.7.4., A1.8.5., A1.9.4., T2.1.9., T2.2.7., J2.1.2., J2.2.1., J2.5.1., J2.5.4., S2.9.3., N2.5.4., N2.6.3., N2.7.3., A2.6.3.

Skaitļa ciparu summa – T1.2.5., J1.5.4., S1.5.4., N1.5.2., A1.9.2., T2.2.5., T2.3.6., A2.5.3.

MKD, LKD – J1.4.3., P2.5.8.

Ģeometrija

Figūru sagriešana un salikšana – T1.1.5., T1.2.3., T1.3.2., J1.4.1., J1.5.3., P1.1.8., P1.2.8., P1.4.3., S1.7.2., N1.5.1., A1.5.4., A1.6.5., A1.7.5., T2.3.3., T2.4.5., J2.1.4., J2.2.2., J2.5.2., P2.3.1., P2.3.5., P2.5.2., P2.5.6., N2.5.3., N2.6.2., N2.7.4., N2.8.5., N2.9.3., V2.9.2.

Invariantu metode, krāsošana – P1.5.1., P2.1.3., S2.5.3., S2.6.3., S2.7.3., S2.8.3., S2.9.3., N2.6.4., V2.9.2., A2.5.2., A2.6.2., A2.7.2., A2.8.2., A2.9.2.

Figūru sistēmas, to savstarpējais novietojums – T1.1.4., T1.3.4., T1.3.5., P1.1.4., J2.4.3., J2.5.5., S2.5.2., S2.6.2., S2.7.2.

Daudzstūri – T1.1.4., T1.3.4., T1.4.10., J1.1.4., J1.1.5., J1.2.2., J1.4.5., P1.1.7., P1.3.7., P1.5.3., S1.8.2., S1.9.2., N1.5.1., N1.7.2., N1.8.2., N1.9.1., N1.9.5., V1.9.3., A1.5.3., A1.6.4., A1.7.1., A1.9.3., T2.1.3., T2.1.4., T2.2.8., T2.4.10., J2.2.4., J2.5.5., P2.4.4., P2.4.6., S2.8.2., S2.9.2., N2.7.4., N2.8.4., V2.9.4., A2.5.3., A2.7.4., A2.8.5., A2.9.4.

Trijstūra nevienādība – J1.4.5., P1.5.6.

Riņķa līnija un riņķis – P1.4.8., P1.6.3., P1.6.7., A1.9.1., T2.4.10., A2.9.4.

Ģeometriskie pārveidojumi – P1.5.8.

Dirihlē princips –

Ģeometriskie objekti telpā – T1.4.11., A1.8.3., T2.2.3., P2.1.5., P2.4.3., P2.5.3., A2.8.4.

Objektu novietojums plaknē – T1.3.5., J1.3.1., P1.2.3., P1.4.8., P1.5.3., S1.6.3., P2.1.7., P2.5.7., S2.6.2., S2.7.2.

Objekti rūtiņu plaknē – J1.1.5., J1.5.3., N1.6.2., N1.8.5., A1.8.4., T2.1.3., T2.1.7.

Kombinatoriskā ģeometrija – P1.2.1., S1.6.2., J2.3.3., J2.5.3.

Kombinatorika

Objektu skaitīšana – T1.2.4., J1.1.3., J1.2.4., J1.3.4., J1.5.2., S1.6.2., N1.5.4., N1.5.5., N1.6.4., N1.8.3., N1.9.4., A1.9.5., T2.1.6., T2.3.7., T2.4.8., J2.1.1., J2.1.5., J2.2.5., J2.4.5., P2.4.1.

Kombinatoriskās struktūras – J1.2.5., J1.3.3., J1.4.4., J1.5.2., P1.1.2., P1.2.1., P1.3.8., P1.4.5., P1.4.7., P1.5.4., P1.6.1., S1.6.4., S1.7.5., S1.9.4., N1.7.4., N1.8.4., P2.3.2., S2.9.1.

Invariantu metode – J1.2.5., J1.5.5., P1.1.3., P1.1.5., P1.5.1., P1.6.2., S1.9.5., N1.6.5., P2.2.2., N2.5.2., N2.6.2., N2.7.2., N2.8.2., N2.9.2.

Ekstremālā elementa metode –

Loģiska satura uzdevumi – J1.3.5., P1.2.1., P1.3.3., P1.6.1., J2.3.4., P2.5.9.

Dirihlē princips – S1.8.5., V1.9.4.

Gadījumu pārlase – T1.2.8., J1.5.2., S1.7.1., N1.9.2.

Dažādi uzdevumi –

Grafi – J1.3.5., J2.3.5.

Algoritmika

Algoritma izstrāde – P1.2.3., P1.2.6., P1.4.1., P1.4.6., P1.5.8., P1.6.2., P1.6.3., P1.6.4., P1.6.7., S1.9.5., N1.6.5., N1.7.5., T2.4.7., P2.1.8., P2.2.2., P2.2.4., P2.3.6., P2.5.5., N2.5.5., A2.9.5.

Algoritma analīze – J1.2.3., J1.4.3., P1.6.4., T2.3.4., P2.2.3.

Loģiska rakstura uzdevumi – T1.2.9., T1.3.3., P1.1.1., P1.2.7., P1.3.4., P1.5.4., P1.6.8., T2.2.9., T2.4.4., J2.3.1., J2.4.1., J2.4.2., P2.1.7., P2.3.8., P2.4.2., A2.6.5.

Turnīri, svēršanas – P1.6.5., S1.7.4., T2.4.2., P2.2.1., P2.2.7., S2.9.1., N2.7.5., A2.5.5., A2.7.5.

Izmantotā literatūra

1. **Siliņš A.** *M. Dukurs: "Mani redzēja kā ieroci pret krievu sportistiem"* – atsauce [07.11.2015.] Pieejams: http://sportacentrs.com/ziemas_sports/skeletons/16022013-m_dukurs_mani_redzeja_ka_ieroci_pret_krie?is_mobile=1
2. *Panākumu piramīda* – atsauce [07.11.2015.] Pieejams: http://www.sporto.lv/raksts/panakumu_piramida
3. **Andžāns A., Andžāne D.** *Izdales materiāls darbam ar spējīgākajiem 5.-9. klašu skolēniem.* Rīga: Valsts firma „Transiaform", 1992.
4. **Andžāns A., Bērziņš A.** *Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi.* Rīga: Zvaigzne ABC, 1998.
5. **Andžāns A., Kreicberga I.** *Vai vari atrisināt?* Rīga: Zvaigzne, 1985.
6. **Carter P., Russell K.** *The Complete Book of Fun Maths: 250 Confidence Boosting Tricks, Tests and Puzzles.* Wiley, 2004.
7. **Djudenī H.** *520 atjautības, pacietības un domu spēles.* Rīga: Zvaigzne, 1979.
8. **Ignatjevs J**. *Atjautības brīnumzemē.* Rīga: Avots, 1988.
9. **Peterson I.** *Mathematical Treks From Surreal Numbers to Magic Circles*. The Mathematical Association of America, 2002.
10. **Riekstiņš E., Andžāns A.** *Atrisini pats!* Rīga: Zvaigzne, 1984.
11. *Boot Camp Puzzles Brain Blitz.* SevenOaks, 2012.
12. *The UK Mathematics Trust Yearbook 2000-2001*. UKMT, 2001.
13. *Stellas's Stunners. Magic Square with Primes*. Pieejams: http://ohiorc.org/for/math/stella/problems/problem.aspx?id=110#
14. *Условия задач Санкт-Петербургской олимпиады по математике 2006 года.* Pieejams: http://www.pdmi.ras.ru/~olymp/2006/problems.html
15. *Junior Balkan Mathematical Olympiad.* Pieejams: https://www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Junior_Balkan_Mathematical_Olympiad

Sērijas "LAIMA" grāmatas

Projekts LAIMA ir **La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts, kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem. Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir Benedikts Johannessons.

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.
48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.
51. Z. Kaibe, D. Kūma, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.
52. M. Avotiņa, A.Ķerubiņa. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.
53. A. Locāns, I. Ošiņa. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.
54. M. Avotiņa, M. Kokainis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.** Rīga: LU, 2015.
55. M. Avotiņa, A. Šuste. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2013./2014. un 2014./2015. mācību gadā.** Rīga: LU, 2015.