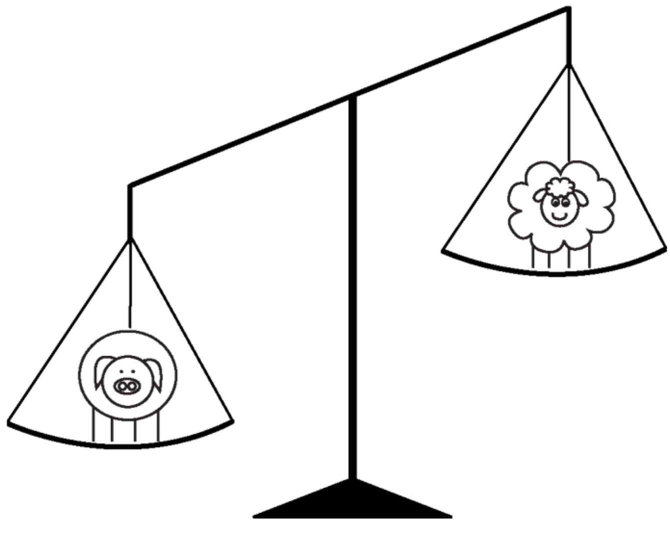
ANDRIS LOCĀNS, ILZE OŠIŅA

MATEMĀTIKAS SACENSĪBAS 4. – 9. KLASĒM 2012./2013. MĀCĪBU GADĀ



RĪGA 2014

A. Locāns, I. Ošiņa. ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2012./2013. mācību gadā***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2014. – 135 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2012./2013. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi, ieteikumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Izsakām pateicību 2012./2013. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Andrim Ambainim, Aivaram Bērziņam, Andrejam Cibulim, Zanei Kaibei, Mārtiņam Kokainim, Dacei Kūmai, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Agnesei Šustei, Mārim Valdatam, Jevgēnijam Vihrovam.

Izsakām pateicību vāka dizaina autorei Kristīnei Ošiņai.

Redaktores: Maruta Avotiņa un Agnese Šuste

ISBN 978-9934-517-72-3

SATURS

IEVADS

Matemātikas olimpiāžu pirmsākumi meklējami 1894. gadā Ungārijā, kur oktobrī tika rīkotas sacensības iepriekšējā gada ģimnāziju absolventiem. Šajās sacensībās varēja lietot jebkuru literatūru, līdz ar to tās bija citādākas nekā mūsdienu olimpiādes. Matemātikas olimpiādes mūsdienu izpratnē aizsākās 1934. gadā toreizējā Padomju Savienībā, Ļeņingradā. Olimpiāžu sistēma pakāpeniski auga, un patlaban tā aptver lielāko daļu pasaules valstu.

Matemātikas olimpiādes paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas olimpiāžu uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Tieši māku pierādīt kā galveno guvumu no Latvijas matemātikas olimpiādēm ir pieminējuši šobrīd pasaulslaveni latviešu zinātnieki. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Lai veiksmīgi piedalītos olimpiādēs, skolēniem ir nepieciešams tām pienācīgi sagatavoties, ieguldot gan laiku, gan darbu. Pirmkārt, nepieciešams sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot matemātikas pamatzināšanas un izmantojot tās dažādu uzdevumu risināšanā. Tur skolēni iegūst vispārēju priekšstatu par matemātiku. Otrkārt, ļoti noderīgs ir ārpusstundu darbs gan skolā (fakultatīvās nodarbības un pulciņi matemātikā), gan ārpus skolas (dalība dažādos matemātikas konkursos, olimpiādēs, nodarbībās, kursos u.c.). Arī internetā atrodams plašs mācību materiālu un uzdevumu klāsts (skat., piemēram, http://nms.lu.lv).

Sens un pārbaudīts līdzeklis dažādu zināšanu apguvē ir grāmata. Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs pamatskolas skolēniem, lai gatavotos olimpiādēm un konkursiem. Grāmatu var izmantot arī skolotāji, lai organizētu darbu ar skolēniem ārpusstundu nodarbībās. Šāda veida mācību līdzeklis kopš 2005./2006. mācību gada tiek izdots katru gadu. Lai gan dažādu gadu uzdevumu krājumu autori ir mainījušies, šajos uzdevumu krājumos iespēju robežās ir saglabāts profesora Agņa Andžāna iedibinātais formāts.

Šajā uzdevumu krājumā ir apskatītas šādas matemātikas olimpiādes un konkursi, kuros 2012./2013. mācību gadā bija iespēja piedalīties Latvijas 4. – 9. klašu skolēniem:

- *Sagatavošanās olimpiāde matemātikā.* Notiek kopš 1987./1988. mācību gada, tās rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai. Šī olimpiāde ir lielisks veids, kā skolēniem iesākt jauno olimpiāžu gadu. Lai gan katrai skolai novembra vidū tiek nosūtīti šīs olimpiādes uzdevumu komplekti, tomēr tikai no matemātikas skolotājiem ir atkarīgs, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Novada olimpiādē.
- *Novada* (*agrāk – Rajona*) *matemātikas olimpiāde.* Notiek kopš XX gadsimta piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1987./1988. mācību gada tā tiek rīkota, sadarbojoties Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijai (LR IZM) un Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes Matemātikas skolai (LU A. Liepas NMS). Novada olimpiāde notiek novada/novadu apvienības/pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes laureāti tiek izvirzīti dalībai Valsts olimpiādē, kā to paredz Latvijas Valsts matemātikas olimpiāžu nolikums.
- *Valsts matemātikas olimpiāde* 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm, tāpat kā Novada olimpiāde, notiek kopš XX gs. piecdesmitajiem gadiem un kopš 1987./1988. mācību

gada tā tiek rīkota, sadarbojoties LR IZM un LU A. Liepas NMS. Šī olimpiāde parasti notiek divas dienas Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

- *Atklātā matemātikas olimpiāde* notiek kopš 1974. gada. Tajā drīkst piedalīties jebkurš Latvijas skolēns, kas noteiktajā termiņā piesaka savu dalību. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās tik auglīga un vilinoša, ka turpmākajos gados līdzīgas olimpiādes sāka rīkot citās nozarēs, tāpat kā citās valstīs. Atklāto matemātikas olimpiādi rīko LU A. Liepas NMS. Katru gadu ap 3000 skolēnu piedalās šajā olimpiādē, kas ir lielākais šāda veida pasākums Latvijā.
- *Matemātikas konkurs-olimpiāde 4. klašu skolēniem "Tik vai... Cik?"* (TVC)

  Ideja par olimpiādi radās sadarbībā ar Lietuvas kolēģiem. Šauļu universitāte katru gadu rīko matemātikas olimpiādi 4.-5. klašu skolēniem 3 kārtās – skolas, rajona un valsts. 2004. gada ziemā viņi izteica piedāvājumu šajā olimpiādē piedalīties arī citām valstīm. Tā 2004. gada maijā dažas Latvijas skolas rīkoja šādu olimpiādi. Toreiz skolēniem risināšanai tika piedāvāti Lietuvas valsts olimpiādes uzdevumi. Kopš 2004./05. mācību gada šī olimpiāde tika ieviesta arī Latvijā jau kā tradicionāls ikgadējs pasākums jaunāko klašu skolēniem, kurā pirmajās trīs kārtās tiek piedāvāti mūsu pašu sastādīti uzdevumi, bet 4. kārtu rīkojam vienlaicīgi ar Lietuvas valsts olimpiādi, un uzdevumu komplektu šai kārtai veidojam kopā ar Lietuvas kolēģiem.
- *Jauno matemātiķu konkurss* (JMK) paredzēts skolēniem līdz 7. klasei. Tā kā PCK uzdevumi nav pārāk viegli, un jaunāku klašu skolēniem tie parasti nav pa spēkam, tad 1991. gadā Preiļu 1. vidusskolas matemātikas skolotājai Mārītei Seilei radās ideja organizēt kādu vietēja mēroga konkursu, līdzīgu PCK. Pirmie JMK 1. kārtas uzdevumi tika publicēti 1993. gada 7. janvārī. Sākumā šis konkurss notika tikai Preiļu rajonā. Kopš JMK uzdevumi tiek publicēti arī internetā, konkursa risinātāji ir ne tikai no Latgales, bet no visas Latvijas.
- *Profesora Cipariņa klubā* (PCK) var piedalīties skolēni līdz 9. klasei. Tas ir senākais un tradīcijām bagātākais neklātienes matemātikas konkurss Latvijā. Profesora Cipariņa klubs tika nodibināts 1974. gadā (toreiz gan konkursu vēl tā nesauca), kad, pēc Latvijas Valsts universitātes (LVU) Fizikas un matemātikas fakultātes Neklātienes matemātikas skolas rīkotās 1. atklātās Republikas matemātikas olimpiādes rezultātu publicēšanas presē, avīzes „Pionieris" redaktore Velta Juršēvica griezās pie Agņa Andžāna (toreiz – LVU Skaitļošanas centra jaunākā zinātniskā līdzstrādnieka) ar lūgumu organizēt olimpiādei līdzīgu konkursu visa mācību gada garumā. Savu nosaukumu – „Profesora Cipariņa klubs" – konkurss iegūst 1976. gadā. Šādu nosaukumu organizatoriem ieteica A.Andžāna māte O.Andžāne.

Šajā uzdevumu krājumā apkopoti un izvērsti aprakstīti 2012./2013. mācību gada matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi, atrisinājumi, kā arī iekļauta sadaļa „Ieteikumi". Sadaļā „Ieteikumi" skolēni var smelties idejas uzdevuma risināšanā, ja neizdodas uzdevumu atrisināt patstāvīgi. Skolotāji ieteikumus var izmantot, lai virzītu skolēnu risinājumu uz grāmatā doto atrisinājumu. Lai sasniegtu labāku rezultātu, iesakām skolēniem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašu spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos.

Grāmatā apskatīto uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu.

Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevumu atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem. Grāmatā uzdevumiem dots izvērsts un pilnīgs atrisinājums, lai skolēniem būtu priekšstats par pareizu uzdevuma atrisinājuma pierakstu. Lielākajam skaitam uzdevumu ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi, pareizi atrisinājumi. Bieži vien pat atrisinājumu idejas var būt radikāli atšķirīgas. Tāpēc doto atrisinājumu nevajag uztvert kā vienīgo iespējamo un nevajag baidīties meklēt jaunus ceļus līdz pilnam risinājumam.

Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, bet arī atrisinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja tā notiek un atrisinājumos tiek izmantoti kādi nezināmi paņēmieni, iesakām apgūt šos paņēmienus, lai varētu izmantot tos turpmāk.

Ceram, ka šī grāmata attīstīs Jūsu radošumu un risināšanas gaitā iegūtās zināšanas un pieredze palīdzēs izvirzīt un veiksmīgi sasniegt savus mērķus!

Autori

UZDEVUMI

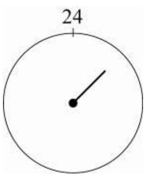
1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

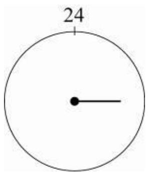
1.1. Pirmā kārta

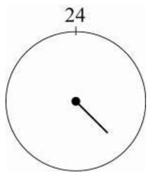
1.1.1. Kura no vienādībām **nav** patiesa?

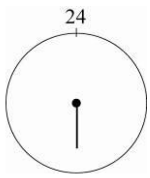
a) $18+32=26+24$
b) $4\cdot 3:2-2=(11+5):4$
c) $25-5\cdot 2=25\cdot 2-10$
d) vairāk kā viena nav patiesa
e) visas ir patiesas

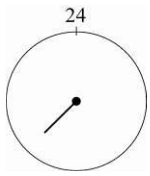
1.1.2. Ulrikai ir dīvains pulkstenis – tā ciparnīca sadalīta nevis 12 daļās, kā tas ir parasti, bet gan 24 daļās. Tas nozīmē, ka stundu rādītājs diennaktī veic tikai vienu pilnu apgriezienu nevis divus. Kur atrodas šī dīvainā pulksteņa stundu rādītājs pulksten 15.00?

a) 

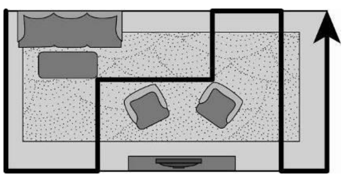
b) 

c) 

d) 

e) 

1.1.3. Robots-putekļusūcējs pa istabu ar izmēriem 3×6 metri pārvietojās tā, kā ar bultiņu parādīts zīmējumā. Cik metru garš ir putekļusūcēja veiktais ceļš (skat. U1.1. zīm.)?



U1.1. zīm.

a) 12 **b)** 15 **c)** 18 **d)** 21 **e)** trūkst informācijas

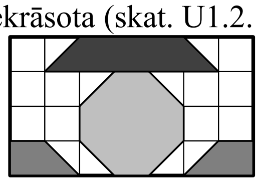
1.1.4. Aprēķini!

3 gadi 5 mēneši – 8 mēneši =
a) 45 mēneši **b)** 33 mēneši **c)** 31 mēnesis **d)** 23 mēneši **e)** 21 mēnesis

1.1.5. Papīra lapu pārlocīja uz pusēm, tad vēlreiz uz pusēm, tad vēlreiz uz pusēm un vēlreiz uz pusēm. Tad viducī izdūra caurumu. Cik caurumu būs papīra lapā, kad to atlocīs vaļā?

a) 8 **b)** 12 **c)** 16 **d)** 32 **e)** tas atkarīgs no tā, kādā veidā lapu locīja uz pusēm

1.1.6. Kāda daļa no taisnstūra ir iekrāsota (skat. U1.2. zīm.)?



U1.2. zīm.

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{28}$ **c)** $\frac{1}{14}$ **d)** 4 **e)** 14

1.1.7. Cik no dotajiem apgalvojumiem ir patiesi?

1) *Jebkuru divu nepāra skaitļu starpība ir nepāra skaitlis.*
2) *Ja divu skaitļu starpība ir 2, tad tie noteikti ir pāra skaitļi.*
3) *Ja dalījums ir 6 un dalītājs ir 2, tad dalāmais ir 3.*
4) *Ja mazināmais ir par 3 lielāks nekā mazinātājs, tad starpība ir 3.*

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

1.1.8. Cik vecs ir hokejists Māris Jučers, ja zināms, ka

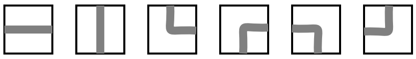
$\underbrace{\textit{Māris Jučers, Guntis Galviņš, Māris Bičevskis, Raitis Ivanāns}}_{\textit{105 gadi}}$

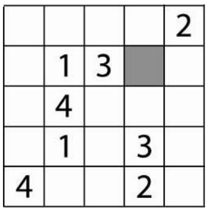
$\underbrace{\textit{Māris Bičevskis, Raitis Ivanāns, Māris Jučers}}_{\textit{79 gadi}}$

$\underbrace{\textit{Raitis Ivanāns, Guntis Galviņš}}_{\textit{59 gadi}}$

$\underbrace{\textit{Raitis Ivanāns, Māris Jučers}}_{\textit{58 gadi}}$

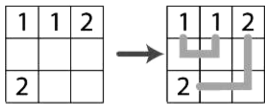
a) 21 **b)** 25 **c)** 26 **d)** 33 **e)** nevar noteikt

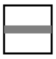
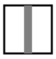
1.1.9. Dotajā mīklā visi vienādie skaitļi jāsavieno ar nepārtrauktu līniju. Ir tikai 6 varianti, kā līnija var aizpildīt rūtiņu: . Līnijas nedrīkst vilkt cauri rūtiņām, kurās ir skaitļi un līnijām ir jāaizpilda visas tukšās rūtiņas. Kā būs aizpildīta iekrāsotā rūtiņa (skat. U1.3. zīm.)?



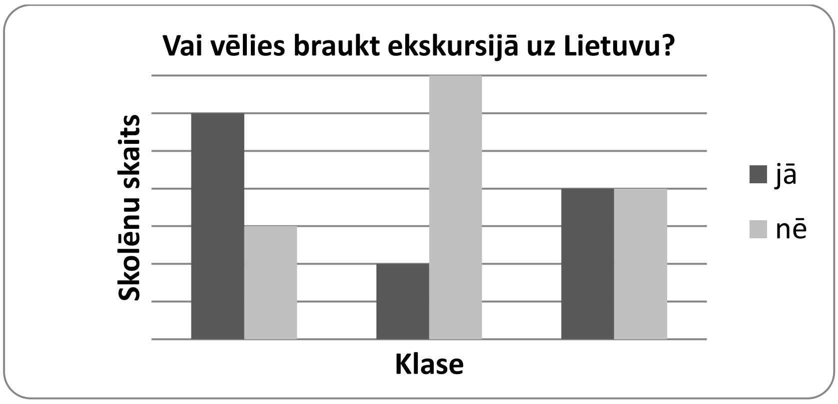
U1.3. zīm.

Piemērs



a)  **b)**  **c)**  **d)**  **e)** 

1.1.10. No diagrammas nosaki, kuras atbildes ir vairāk – „jā” vai „nē”!



a) vairāk ir atbildes „jā”
b) vairāk ir atbildes „nē”
c) atbildes „jā” un „nē” ir vienādā skaitā
d) nevar noteikt

1.2. Otrā kārta

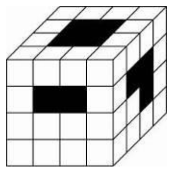
1.2.1. Aprēķini! $7 \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 3 \cdot 0 =$

a) 0 **b)** 112 **c)** 115 **d)** 136 **e)** cits skaitlis

1.2.2. Sintijai makā ir *m* lati, bet krājkasītē ir *k* lati. Sintija makā ielika vēl 3 latus, bet no krājkasītes izņēma 2 latus. Ko izsaka izteiksme $m + k + 1$?

a) tik latu Sintija izņēma no maka un krājkasītes kopā
b) par tik latiem palielinājās kopējais naudas daudzums makā un krājkasītē kopā
c) par tik latiem pamazinājās kopējais naudas daudzums makā un krājkasītē kopā
d) tik latu palika makā un krājkasītē kopā
e) dotā izteiksme neko neizsaka

1.2.3. Vispirms no 64 vienādiem klucīšiem salipināja kubu. Pēc tam vairākus klucīšus izņēma ārā – izveidoja caurumus, kuru forma nemainās no augšas līdz apakšai, no labā sāna līdz kreisajam sānam un no priekšas līdz aizmugurei. Šī figūra un caurumu novietojums (*caurumi iekrāsoti melnā krāsā*) redzams zīmējumā. Cik klucīšus izņēma ārā (skat. U1.4. zīm.)?



U1.4. zīm.

a) 9 **b)** 21 **c)** 23 **d)** 26 **e)** cits skaitlis

1.2.4. Kurš no atbilžu variantos dotajiem skaitļiem nav divu citu doto skaitļu starpība?

a) 3 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 4 **e)** neviens no šiem

1.2.5. Saskaiti dotos skaitļus un atbildi pieraksti ar cipariem!

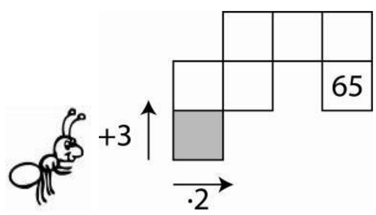
seši tūkstoši piecdesmit + trīs simti trīs =
divi tūkstoši + pieci tūkstoši divdesmit trīs =

1.2.6. Salīdzini, kad būs pagājis vairāk minūšu! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

no 07:07 līdz 19:19 ○ no 11:11 līdz 23:23

no 07:10 līdz 12:15 ○ no 08:14 līdz 13:08

1.2.7. Skudriņa sāk pārvietoties no iekrāsotās rūtiņas uz pēdējo rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis 65. Kad skudriņa paiet vienu rūtiņu uz augšu, tad pieskaita 3. Kad paiet vienu rūtiņu uz leju, tad atņem 3. Kad paiet vienu rūtiņu pa labi, tad reizina ar 2. Kāds skaitlis ierakstīts iekrāsotajā rūtiņā (skat. U1.5. zīm.)? Aizpildi visas tukšās rūtiņas!



U1.5. zīm.

1.2.8. Dotas četru veidu acis un četru veidu mutes (skat. U1.6. zīm.):

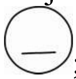
U1.6. zīm.

Iezīmē zemāk dotajos aplīšos tādas sejiņas, ka katrai sejiņai ir atšķirīga veida acis un mute, turklāt tā, lai

1)  atrodas tieši starp  un ;

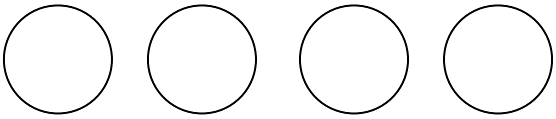
2)  atrodas pa labi no , tieši blakus tai;

3)  nav mute ne pirmajai, ne pēdējai sejiņai;

4)  atrodas pa labi no  un ;

5)  neatrodas blakus ?

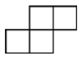
Atbilde:



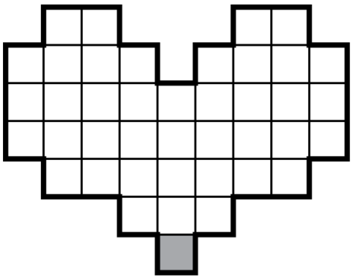
1.3. Trešā kārta

1.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki centimetros!

$$\left(\left(\frac{1}{10}\ \text{no}\ 3\,\text{km}\right)+\left(\frac{1}{5}\ \text{no}\ 1\,\text{dm}\right)\right)\cdot 2=$$

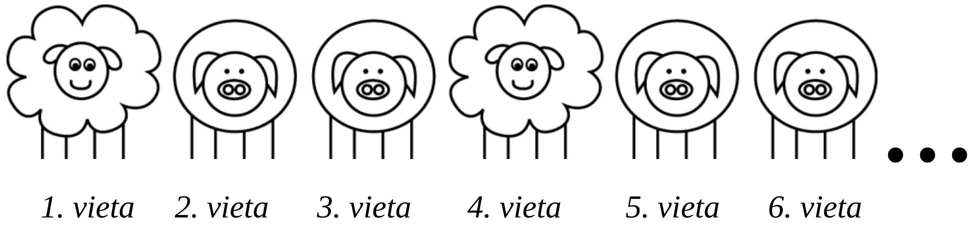
1.3.2. Sadaliet visu doto figūru (neiekrāsoto daļu) šādās figūriņās  (skat. U1.7. zīm.)!

Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām. Figūriņas var būt arī pagrieztas vai apgāztas savādāk.



U1.7. zīm.

1.3.3. Jokainajā lauku sētā, ziemas laikā aitas un cūkas sastājušās garā ierindā (skat. U1.8. zīm.) visu laiku pēc šāda likuma (*ik pēc 3 dzīvniekiem secība atkārtojas*):



U1.8. zīm.

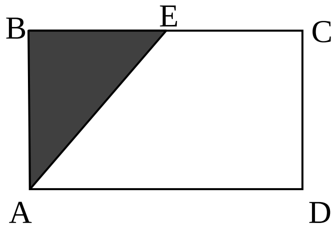
Uzskicē vai uzraksti, kas atradīsies šīs ierindas 2013. vietā! Paskaidro, kāpēc!

2013. vieta

1.3.4. Henrietes burtnīcā iezīmēts taisnstūris ABCD (skat. U1.9. zīm.). Diemžēl rūtiņas saulē ir izbalējušas. Henriete atceras, ka iekrāsotās figūras laukums ir 6 rūtiņas un ka nogrieznis BE ir puse no taisnstūra malas BC. (*Punkti* A, B, C, D *un* E *atrodas rūtiņu virsotnēs*.)

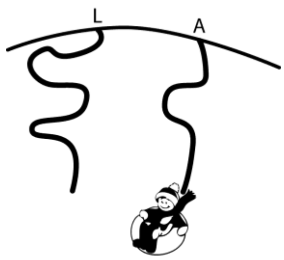
Nosaki taisnstūra laukumu!

Nosaki taisnstūra perimetru, ja zināms, ka **ne visu** taisnstūra malu garumi ir pāra skaitļi un visas malas ir garākas nekā 1 rūtiņa!



U1.9. zīm

1.3.5. Bērni izveidojuši divas kameršļūkšanas trases: lēno (L), kuras garums ir 23 m, un ātro (A), kuras garums ir 14 m (skat. U1.10. zīm.). Rūsiņš nošļūca 4 reizes, un kopā viņš bija nošļūcis 83 metrus. Cik reizes pa katru trasi Rūsiņš šļūca?



U1.10. zīm.

1.3.6. Artis un viņa divi draugi Brunis un Cēzars katrs fano par vienu no šiem hokejistiem: Karsumu, Daugaviņu un Indraši. Par ko fano katrs zēns, ja zināms, ka

1) Artis nefano par Indraši;
2) Brunim ir viena māsa, un tā mācās 5. klasē;
3) Brunis mācās 5. klasē;
4) zēns, kurš fano par Indraši, mācās 4. klasē;
5) zēna, kurš fano par Daugaviņu, māsa mācās 3. klasē.

1.4. Ceturtā kārta

1.4.1. Starp cipariem 1, 2, 3, 4, 5 ieliec darbības zīmes un iekavas tā, lai rezultāts būtu 40.

1 2 3 4 5 = 40

1.4.2. Automašīnas odometrs rādīja 12921 km. Pēc 2 stundām odometra rādījums bija skaitlis, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Ar kādu ātrumu brauca automašīna?
Odometrs rāda automašīnas nobraukto attālumu kilometros.

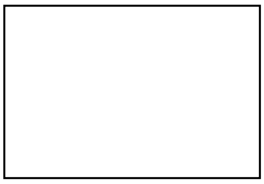
1.4.3. Ir doti divi smilšu pulksteņi – viens iztek 3 minūtēs, otrs – 7 minūtēs. Ola jāievieto vārošā ūdenī uz precīzi 4 minūtēm. Kā to izdarīt, izmantojot tikai abus dotos smilšu pulksteņus?

1.4.4. Ir doti sviras svari un pieci atsvari: 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g. Kā, izmantojot tikai šos atsvarus, uz svariem nolīdzsvarot 47 g smagu lodīti? Atsvarus drīkst likt uz abiem svaru kausiem.

1.4.5. Tabulā parādītas preču cenas. Otrajā rindiņā ieraksti, kāda būs katras preces cena pēc tam, kad to samazinās par $\frac{1}{5}$ no sākotnējās cenas.

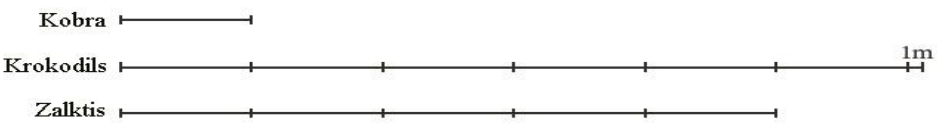
35 Ls	120 Ls	80 Ls	90 Ls	520 Ls	480 Ls

1.4.6. Pīrāgam ir taisnstūra forma. Ar diviem taisniem griezieniem to vajag sadalīt četrās daļās tā, lai divas iegūtās daļas būtu trijstūrveida, bet divas – četrstūrveida. Zīmējumā parādi, kā to izdarīt (skat. U1.11. zīm.)!



U1.11. zīm.

1.4.7. Zīmējumā parādīts trīs dzīvnieku garums (skat. U1.12. zīm.). Visu trīs garumu summa ir 19 *m*. Noskaidro katra dzīvnieka garumu!



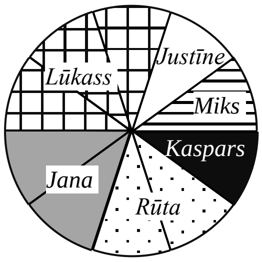
U1.12. zīm.

1.4.8. Aprēķini $\frac{3}{4}$ no katra skaitļa.

240 **360** **720**

1.4.9. Zināms, ka 9 no Romāna tēva darbabiedriem dodas pusdienot uz mājām, 7 ņem ēdienu sev līdzi, bet 5 pusdieno ēdnīcā. Kura daļa no visiem strādniekiem pusdieno ēdnīcā?

1.4.10. Zināms, ka 150 skolēni skolas domē ievēlēja 6 kandidātus. Diagrammā attēlots, kā sadalījās balsis (skat. U1.13. zīm.). Uzraksti, cik balsis ieguva katrs kandidāts.

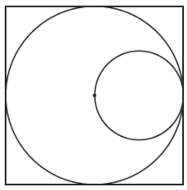


U1.13. zīm.

Lūkass _____________
Jana _______________
Rūta _______________
Kaspars ____________
Miks ______________
Justīne _____________

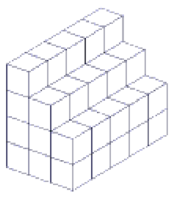
1.4.11. Taisnstūra viena mala ir par 5 cm garāka nekā otra. Taisnstūra perimetrs ir 58 cm. Aprēķini taisnstūra laukumu.

1.4.12. Kvadrāta perimetrs ir 48 cm. Aprēķini mazākā riņķa rādiusu (skat. U1.14. zīm.) .



U1.14. zīm.

1.4.13. Nosaki, cik mazie kvadrātiņi veido visu zīmējumā parādītās figūras virsmu (skat. U1.15. zīm.).



U1.15. zīm.

1.4.14. Uz sviras svaru viena kausa uzlikts ziepju gabals, bet uz otra $\frac{3}{4}$ tāda paša ziepju gabala un vēl atsvars, kas sver $\frac{1}{4}$ kg. Svari atrodas līdzsvarā. Cik sver pirmais ziepju gabals?

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. Pirmā kārta

2.1.1. ***Aritmētiskais šifrs***

Saskaitīšanas piemērā $ABCD + ABED = EDCAD$ vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi – ar dažādiem. Atšifrē to!

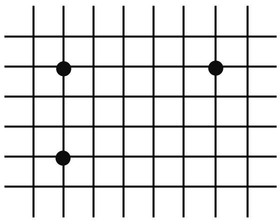
2.1.2. ***Neparastais bankomāts***

Smaragda pilsētas valūtu sauc par *salāriem*. Šajā pilsētā atrodas neparasts naudas maiņas automāts: ja tajā ievada divas banknotes, kuru vērtības ir x un y salāri, automāts izdod divas banknotes: vienas vērtība ir $(2x + y)$ salāri, bet otras – vai nu $(2x - y)$ salāri (ja $2x > y$), vai $(y - 2x)$ salāri (ja $2x < y$). (Piemēram, ja ievada banknotes $x = 2$ un $y = 3$, tad iegūst banknotes $2 \cdot 2 + 3 = 7$ un $2 \cdot 2 - 3 = 1$.)

Ellai ir divas 1 salāra vērtas banknotes. Vai, izmantojot šo automātu vairākas reizes, Ella var iegūt banknoti ar vērtību **a)** 13 salāri, **b)** 2 salāri?

2.1.3. ***Mazākais četrstūris***

Rūtiņu lapā nokrāsotas trīs rūtiņu virsotnes (skat. U2.1. zīm.). Nokrāso vēl vienu rūtiņu virsotni tā, lai visu četru nokrāsoto virsotņu veidotajam četrstūrim būtu pēc iespējas mazāks laukums.



U2.1. zīm.

2.1.4. ***Par pankūkām***

Māmiņa izcepa 6 apaļas pankūkas. Dēliņš Didzis tobrīd spēlējās ar lineālu un nolēma izmērīt pankūku diametrus. Izrādījās, ka pankūku diametri ir 11 cm, 12 cm, 13 cm, 14 cm, 15 cm un 16 cm. Tad Didzis ar mammu nolēma, ka visas pankūkas sadalīs pa trīs šķīvjiem (Didzim, mammai un tētim) tā, ka neviens šķīvis nepaliek tukšs un ne uz viena šķīvja nav uzliktas divas pankūkas, kuru diametri atšķiras par 1 cm.

Cik veidos Didzis un māmiņa var realizēt savu ieceri?

2.1.5. ***Noslēpumainie mākslinieki***

Kafejnīcā satikās rotkalis Baltiņš, skulptors Melnītis un gleznotājs Rudais. „Ievērojiet, vienam no mums ir blondi mati, vienam – rudi, bet trešais – tumšmatis, bet nevienam uzvārds neatbilst matu krāsai” – sacīja tumšmatis. „Tev taisnība” – Baltiņš piekrita.

Nosakiet, kādā krāsā ir mati katram no šiem māksliniekiem.

2.2. Otrā kārta

2.2.1. *Neparastais skaitlis*

Atrodi vislielāko piecciparu skaitli, kuram ceturtais cipars (desmitu cipars) ir lielāks nekā piektais cipars (vienu cipars), trešais cipars lielāks nekā ceturtā un piektā cipara summa, otrais cipars ir lielāks nekā trešā, ceturtā un piektā cipara summa, bet pirmais cipars ir lielāks nekā visu pārējo ciparu summa!

2.2.2. *Sešstūra virsotņu numurēšana*

Izliekta sešstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, un 6, katrā virsotnē cits skaitlis. Pēc tam tika aprēķinātas katras diagonāles galos ierakstīto skaitļu summas. Vai var gadīties, ka visas iegūtās summas ir dažādas?

Ja tā var gadīties, parādi piemēru, ja nevar – pamato, kāpēc!

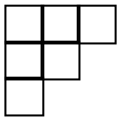
2.2.3. *Istaba un prožektors*

Istabas izmēri ir 5 m × 5 m. Tās vidū ir novietots prožektors, kas izplata gaismu visos virzienos. Ir pieejami aizslietņi, kuru garums ir 1 m (augstums vienāds ar istabas augstumu). Izvietojiet aizslietņus istabā tā, lai istabas sienas nemaz nebūtu apgaismotas; nekādi divi aizslietņi savā starpā nedrīkst saskarties. (Istaba sākotnēji ir pavisam tukša, tajā ir tikai prožektors.)

Piezīme. Pieņemam, ka gaisma izplatās staru veidā un tā no aizslietņiem neatstarojas.

2.2.4. *Cipari rūtiņās*

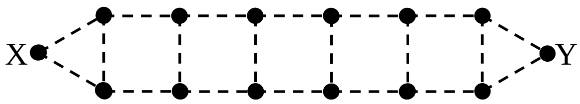
Ieraksti U2.2. zīm. attēlotajās rūtiņās visus ciparus no 1 līdz 6, katrā rūtiņā citu ciparu, tā, lai gan katrā rindiņā, gan katrā kolonnā cipari būtu izvietoti augošā secībā. Cik veidos to var izdarīt?



U2.2. zīm.

2.2.5. *Ceļu būve*

U2.3. zīm. attēlota plānotā ceļu sistēma, kas savieno pilsētas X un Y un iet caur 12 ciemiem (sastāv no 20 ceļu posmiem). Ceļu izbūve un asfaltēšana uzticēta divām ceļu būves firmām SIA „CAB” un SIA „BAC”. Lai darbi ritētu raitāk un kvalitatīvāk, Satiksmes ministrija darbu organizēšanai uzlika šādus nosacījumus: katra firma pēc kārtas izbūvē un noasfaltē vienu (jebkuru pēc pašu izvēles) no vēl nenoasfaltētajiem posmiem; tiesības pirmajiem sākt darbus izlozē ieguva SIA „BAC”. Tā firma, pēc kuras ceļa posma pabeigšanas pirmo reizi būs iespējams aizbraukt no pilsētas X un pilsētu Y pa asfaltētu ceļu, saņems prēmiju. Kura firma var uzvarēt (saņemt prēmiju) un kā tai ir jārīkojas?



U2.3. zīm.

2.3. Trešā kārta

2.3.1. ***Atrodi skaitli!***

Atrodi visus tādus divciparu naturālus skaitļus N, kas vienlaicīgi apmierina šādus nosacījumus:

(1) ja starp skaitļa N vienu un desmitu ciparu ieraksta ciparu 5, iegūst skaitli, kas ir par 230 lielāks nekā N;

(2) ja ciparu 5 uzraksta pirms skaitļa N cipariem, iegūst skaitli, kas ir veselu skaitu reižu lielāks nekā N.

2.3.2. ***Trijstūris***

Trijstūra divu malu garumi ir 7 *cm* un 13 *cm*. Kāds var būt trešās malas garums, ja trijstūra perimetrs ir P centimetri, kur P ir pirmskaitlis?

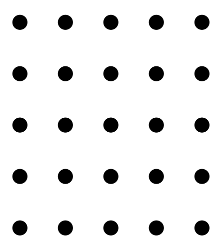
2.3.3. ***Skaitļu virkne***

Skaitļu virkne tiek veidota pēc šāda likuma: virknes pirmais skaitlis ir jebkurš naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1, bet katrs nākamais skaitlis tiek iegūts, saskaitot iepriekšējā skaitļa lielāko un mazāko pirmreizinātāju (piemēram, aiz skaitļa $28(=2\cdot2\cdot7)$ ir skaitlis $9(=2+7)$, aiz 23 ir skaitlis $46(=23+23)$ aiz $27(=3\cdot3\cdot3)$ ir skaitlis $6(=3+3)$).

Apskatām visas šādas virknes, kuru pirmais skaitlis ir attiecīgi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Kuros no šiem 9 gadījumiem virknes pirmais skaitlis virknē būs sastopams vēl vismaz vienu reizi, bet kuros gadījumos virknes pirmais skaitlis virknē vairs neatkārtosies?

2.3.4. ***Lauztā līnija***

U2.4. zīm. attēlotos punktus savieno ar slēgtu lauztu līniju tā, lai lauztās līnijas posmi ietu pa rūtiņu malām vai rūtiņu diagonālēm, pie tam lauztā līnija nedrīkst krustot pati sevi un pa diagonāli drīkst iet ne vairāk kā viens posms.



U2.4. zīm.

2.3.5. ***Meļi un bruņinieki***

Uz kādas salas dzīvo divas ciltis – bruņinieki un meļi. Bruņinieki vienmēr saka patiesību, bet meļi vienmēr melo. Katrs salas iemītnieks apgalvo: „*Manā ciltī man ir vairāk draugu nekā kaimiņu ciltī.*”

Vai var gadīties, ka bruņinieku ir mazāk nekā meļu?

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. ***Daļas, daļas, daļas…***

Aprēķini!

$$1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{5}}}}$$

2.4.2. ***Akmeņu dalīšana***

Anna jūrmalā atrada 111 akmentiņus. Izrādījās, ka visi šie akmeņi sver dažādi, turklāt to masa ir 1 g, 2 g, 3 g, …, 110 g un 111 g. Anna vēlas visus šos akmentiņus sadalīt trīs kaudzītēs tā, lai visās kaudzītēs būtu vienāds skaits akmentiņu un katrā kaudzītē akmentiņu kopējā masa būtu viena un tā pati. Palīdzi Annai tikt galā ar viņas uzdevumu!

2.4.3. ***Daudzstūrainie daudzstūri***

Izliektā septiņstūrī novilktas visas tā diagonāles. Pēc tam septiņstūris tika sagriezts pa visām novilktajām līnijām, iegūstot vairākus mazākus daudzstūrus. Kāds lielākais malu skaits var būt kādam no iegūtajiem daudzstūriem?

Atbildi pamato, t.i., uzzīmē piemēru un paskaidro, kāpēc nevar būt daudzstūris ar vairāk malām!

2.4.4. ***Ceļotāji***

Divi draugi Andris un Bērtulis grib no Sūnu ciema nokļūt Mežciemā. Attālums starp abiem ciemiem ir 15 km. Abi ceļotāji kājām pārvietojas ar ātrumu 6 km/h. Draugiem vēl ir viens velosipēds (uz kura var braukt tikai viens cilvēks); ar velosipēdu puiši pārvietojas ar ātrumu 15 km/h. Savukārt Mežciemā dzīvo abu paziņa Egons, kurš ap to pašu laiku devās pa to pašu ceļu no Mežciema uz Sūnu ciemu.

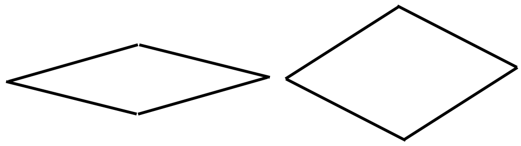
Andris un Bērtulis vienlaicīgi startēja no Sūnu ciema: Andris gāja kājām, bet Bērtulis brauca ar velosipēdu. Kad Bērtulis satika Egonu, viņš velosipēdu iedeva Egonam un turpināja ceļu uz Mežciemu kājām. Savukārt, Egons tagad ar velosipēdu turpināja braukt Sūnu ciema virzienā līdz satika Andri. Tad Egons nodeva velosipēdu Andrim, kurš ar to nobrauca atlikušo ceļa posmu līdz Mežciemam. Egons pārvietojas ar tādiem pašiem ātrumiem kā Andris un Bērtulis.

Andris un Bērtulis Mežciemā ieradās vienlaicīgi.

Noskaidro, vai Egons no Mežciema izgāja tajā pašā brīdī, agrāk vai vēlāk un par cik stundām agrāk vai vēlāk nekā Andris un Bērtulis no Sūnu ciema!

2.4.5. ***Mozaīka***

Doti divu veidu rombi – vienam leņķu lielumi ir 144° un 36°, bet otram – 108° un 72°, malu garumi abiem rombiem ir vienādi (skat. U2.5. zīm.). Izveido mozaīku, izmantojot vismaz 20 katra veida rombus. Mozaīkā rombiem jāsaskaras pa vesela garuma malām, tie nedrīkst pārklāties, kā arī mozaīkas iekšpusē nedrīkst palikt „caurumi”.



U2.5. zīm.

Piezīme. Rombs ir četrstūris, kura visas malas ir vienāda garuma. Romba pretējie leņķi ir vienāda lieluma.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. ***Lielais skaitlis***

Atrodi vienu tādu trīsciparu skaitli, kas nedalās ar 213, bet skaitlis, kuru iegūst, uzrakstot šo trīsciparu skaitli pēc kārtas 9 reizes, dalās ar 213.

2.5.2. ***Četrstūris***

Ritvars uzzīmēja četrstūri un novilka vienu tā diagonāli. Pēc tam viņš izmērīja visu piecu nogriežņu (četrstūra malu un diagonāles) garumus; mērījumu rezultāti bija 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm un 9 cm. Kurš no šiem lielumiem var būt diagonāles garums?

Pamato, kāpēc citas iespējas neder!

2.5.3. ***Klucīšu piramīda***

Alise no ziliem, sarkaniem un dzelteniem spēļu klucīšiem veido piramīdu tā, ka

(1) augšējā rindā ir viens klucītis, otrajā – divi klucīši, trešajā – trīs klucīši utt., t. i., katrā nākamajā rindā par vienu klucīti vairāk nekā iepriekšējā;

(2) vienā rindā visi klucīši ir vienādā krāsā;

(3) blakus rindiņās klucīšu krāsa atšķiras;

(4) visā piramīdā kopā ir izmantots vienāds skaits zilo, sarkano un dzelteno klucīšu.

Kāds mazākais skaits rindu var būt Alises izveidotajā piramīdā, ja tā atbilst visiem četriem nosacījumiem?

Parādi piemēru un pamato, kāpēc nevar būt mazāk rindu!

2.5.4. ***Skaitļu tabula***

Tabulā ierakstīti deviņi skaitļi (skat. U2.6. zīm.). Vienā gājienā atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus un samainīt tos vietām. Kāds mazākais gājienu skaits nepieciešams, lai iegūtu tabulu, kur katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 3?

Pamato, kāpēc ar mazāk gājieniem nepietiek!

7	**5**	**4**
11	**10**	**16**
22	**19**	**8**

U2.6. zīm.

2.5.5. *Kabatas nauda*

Kādu dienu tētis saviem pieciem dēliem iedeva kabatas naudu. Ansis ievēroja, ka tētis viņam iedeva divreiz vairāk nekā pirmajam brālim, trīsreiz vairāk nekā otrajam brālim, četrreiz vairāk nekā trešajam brālim un piecreiz vairāk nekā ceturtajam brālim. Tāpat izrādījās, ka Jānis saņēma par 30 santīmiem mazāk nekā Mārtiņš.

Noskaidro, cik lielu kabatas naudu varēja saņemt Ansis!

Apskati visas iespējas!

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. Pirmā nodarbība

3.1.1. ***Par kūkām***

Konditors Lācītis gadatirgū pircējiem piedāvāja kūkas *Kristīne, Skudru pūznis* un *Cielaviņa*. Zināms, ka trīs kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik četras kūkas *Kristīne*, bet divas kūkas *Skudru pūznis* – tikpat, cik viena *Cielaviņa* un divas *Kristīnes* kopā. Cik reižu vairāk vai mazāk maksā kūka *Skudru pūznis*, salīdzinot ar kūku *Cielaviņa*?

3.1.2. ***Palindromi***

Par palindromu sauc naturālu skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Piemēram, skaitļi 313 un 4482844 ir palindromi, bet 17 un 3313 – nav.
Atrodi lielāko sešciparu palindromu, kas dalās ar 15.

3.1.3. ***Rudens pārgājiens***

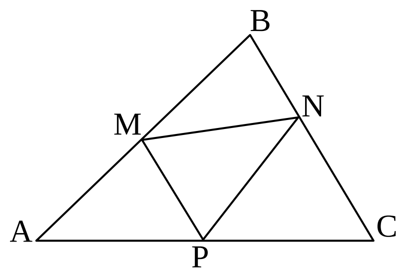
Rudens brīvlaikā Atvasaras vidusskolas skolēni un skolotāji devās pārgājienā. Pusdienās viņi ēda zupu, salātus un šokolādes krēmu, kas tika piegādāti speciālos iepakojumos. Katrs zupas iepakojums tika sadalīts starp četriem pārgājiena dalībniekiem, katrs salātu iepakojums – starp 3 dalībniekiem, bet katrs deserts – starp 2 dalībniekiem. Pavisam kopā tika atvērti 156 pārtikas iepakojumi. Cik skolēnu piedalījās pārgājienā?

3.1.4. ***Kuram taisnība?***

Matemātikas stundā skolotāja piedāvāja atrisināt vienādojumu $5a - ab = 9b^2$, ja zināms, ka a un b – naturāli skaitļi. Raivis ātri uzminēja vienu atbildi un apgalvoja, ka citu atbilžu nav, bet Dace norādīja, ka vienādojumam ir vairākas atbildes. Kuram no abiem skolēniem ir taisnība? Atrodi visas vienādojuma atbildes un pamato, ka citu nav!
(Par atbildi sauc skaitļu pāri, no kura pirmo skaitli ievietojot a vietā, bet otro – b vietā, iegūst patiesu vienādību.)

3.1.5. ***Pastāvīgie leņķi***

Uz trijstūra ABC malām atlikti punkti M, N un P (skat. U3.1. zīm.) tā, ka $PC = NC$ un $AP = AM$. Aprēķini $\angle MBN$ lielumu, ja zināms, ka $\angle MPN = 40°$!



U3.1.zīm.

3.1.6. ***Neparastā puzle***

Doti astoņu veidu puzles gabali, kas katrs sastāv no astoņām vienādām rūtiņām (sk. U3.2. zīm.).

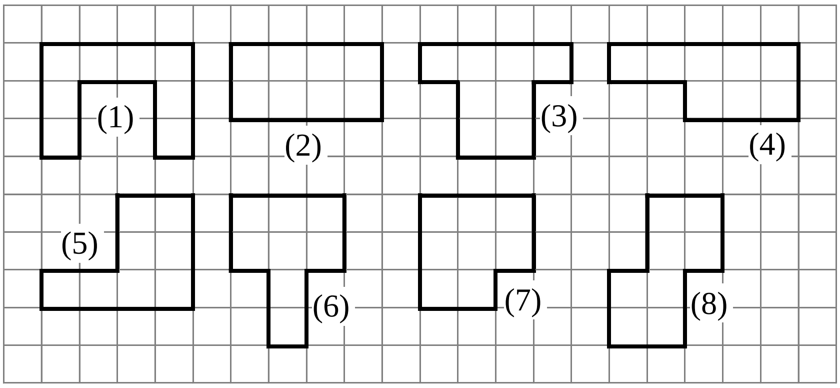
a) No dotajiem 8 puzles gabaliņiem izvēlies trīs dažādus gabaliņus un saliec taisnstūri. Atrodi vismaz divas iespējas, kā to var izdarīt, turklāt katru reizi izmantojot dažādus gabaliņus.

b) Ievieto 12×12 rūtiņu kvadrātā vairākus divu dažādu veidu puzles gabaliņus, lai kvadrāts tiktu pilnībā pārklāts.

c) Izveido taisnstūri no pieciem dažādiem gabaliņiem, turklāt ņemot tieši vienu gabaliņu no katra.

Piezīme. Liekot kopā puzles gabaliņus, tie nedrīkst pārklāties un starp tiem nedrīkst izveidoties caurumi.

Patstāvīgam treniņam: ja iepatikās darboties ar šīm puzlēm, tad pamēģini salikt kvadrātu, izmantojot visus astoņus puzles gabaliņus (katru tieši vienu reizi).



U3.2.zīm.

3.1.7. *Operācija ∇*

Ja $a>0$ un $b>0$, tad darbību ∇ ar šiem skaitļiem definēsim šādi: $a\nabla b=\dfrac{a+b}{1+ab}$.

Piemēram, $3\nabla 6=\dfrac{3+6}{1+3\cdot 6}=\dfrac{9}{19}$.

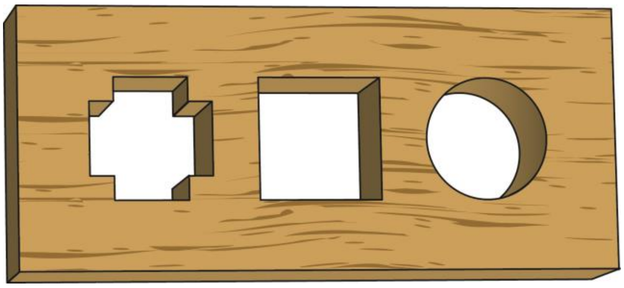
a) Aprēķini $2\nabla 5$.

b) Aprēķini $(1\nabla 2)\nabla 3$.

c) Zināms, ka $2\nabla x=\dfrac{5}{7}$; aprēķini x vērtību.

3.1.8. *Neparastais korķis*

Reiz kādas karaļvalsts karalis izsludināja balvu tam meistaram, kurš izgatavos korķi, ar kuru var cieši aiztaisīt katru no U3.3. zīm. redzamajiem caurumiem. Kādam jābūt šim korķim?



U3.3. zīm.

3.1.9. ***Nedienas ar veļas mašīnu***

Trīs draugi nopirka veļas mašīnu un vēlas to aizvest uz dzīvokli. Automašīnā ir vieta trim cilvēkiem; ja tajā ieliek arī veļas mašīnu, tad automašīnā var iesēsties vairs tikai divi cilvēki. Diemžēl veļas mašīna ir tik smaga, ka, lai to ieliktu automašīnā un izņemtu no tās, nepieciešami visi trīs draugi. Kā jārīkojas, lai veļas mašīna tiktu nogādāta dzīvoklī?

3.1.10. ***Piena laistīšana***

Kādu rītu piena tirgotājs veda uz savu veikaliņu divas 80 litru piena kannas. Ceļā viņš satika divas sievietes, kuras uzstāja, lai tirgotājs katrai pārdod tieši 2 litrus piena. Taču tirgotājam nebija neviena mērāmā trauka, savukārt vienai no sievietēm bija 5 litru kanniņa, bet otrai – 4 litru kanniņa. Kā rīkoties tirgotājam, lai abas sievietes varētu nopirkt 2 litrus piena?

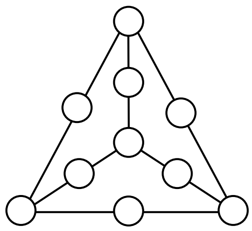
3.2. Otrā nodarbība

3.2.1. ***Viltīgais Skopulis***

Sava ceļojuma laikā Sprīdītis iemaldījās pie Skopuļa. Lai noskaidrotu ceļu mājup, viņam bija nepieciešama piekļuve internetam. Skopulis apsolīja Sprīdītim, ka pateiks viņam kaimiņa bezvadu interneta piekļuves paroli, ja Sprīdītis parādīs, kā skaitli $2\underbrace{00...0}_{2012\ nulles}12$ var izteikt kā triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājuma un citu triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summas starpību. Vai Sprīdītis varēs izpildīt Skopuļa prasību?

3.2.2. ***Neiespējamais uzdevums***

Santa vēlējās ierakstīt katrā U3.4. zīm. redzamajā aplī veselu skaitli no 1 līdz 10 ieskaitot tā, lai visas summas katriem trijiem skaitļiem, kas ierakstīti uz vienas taisnes esošos aplīšos, būtu savā starpā vienādas. Pierādi, ka to nav iespējams izdarīt.



U3.4.zīm.

3.2.3. ***Krustiskie nogriežņi***

Vai plaknē var uzzīmēt 8 vienāda garuma nogriežņus tā, lai katrs nogrieznis krustotos tieši ar trim citiem, turklāt nekādi trīs nogriežņi nekrustotos vienā punktā? Vai šis uzdevums ir atrisināms, ja jāizvieto 7 nogriežņi?

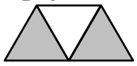
3.2.4. ***Neapdomīgais skrējējs***

Divi sportisti skrien pa apli pretējos virzienos. Didzis, būdams labāks skrējējs, Raivim iedeva *handikapu* $\frac{1}{8}$ distances. Taču Didzis bija pārvērtējis savus spēkus, jo, noskrējis $\frac{1}{6}$ distances, viņš sastapās ar Raivi un saprata, ka ir pārāk mazas izredzes gūt uzvaru.

Cik reizes ātrāk jāskrien Didzim, lai šo maču tomēr nezaudētu?

3.2.5. ***Trapečstūri***

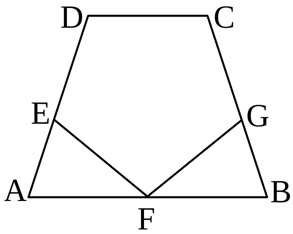
Jānītis uzzīmēja U3.5. zīm. attēloto trapeci, kas sastāv no trīs vienādiem vienādmalu trijstūriem. Viņš nolēma izveidot visus iespējamos n-stūrus, izmantojot trīs šādas trapeces, turklāt trapeces savienojot tā, ka tās nepārklājas, starp tām neveidojas *caurumi* un trapeces virsotne var tikt savienota tikai ar citas trapeces virsotni. Atrast visas iespējamās n vērtības!



U3.5. zīm.

3.2.6. ***Karogs***

Rudens nometnes laikā tika rīkots nakts pārgājiens. Lai dalībnieki un organizētāji vieglāk varētu atpazīt komandas, tām bija katrai jāizveido savs karogs. Komanda *Piecstūris* nolēma izgatavot savu karogu U3.6. zīm. attēlotajā formā, kur redzams regulārs piecstūris $CDEFG$, kas atrodas trapecē $ABCD$. Komandas māksliniece nolēma, ka karoga mala AB būs 60 *cm* gara. Palīdzi noteikt malas DC garumu!



U3.6. zīm.

Piezīmes

Regulārs daudzstūris – daudzstūris, kura visi leņķi ir vienādi un visu malu garumi ir vienādi.

Trapece – četrstūris, kura divas pretējās malas ir paralēlas, bet otras divas – nav.

3.2.7. ***Dalāmība ar 72***

Kādi cipari jāraksta a un b vietā, lai skaitlis $42a4b$ dalītos ar 72?

3.2.8. ***Aizmāršiņa istaba***

Aizmāršiņš vēlējās ieklāt savā istabā jaunu grīdas segumu, bet bija aizmirsis precīzus grīdas izmērus. Tomēr viņš atcerējās, ka istabas grīda ir taisnstūris, kura perimetrs vienāds ar tā laukumu, turklāt šī taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi.

Vai ar šīm zināšanām pietiek, lai Aizmāršiņš varētu viennozīmīgi noteikt grīdas izmērus? Kādi ir visi iespējamie šādas istabas grīdas izmēri?

3.2.9. ***Sarežģītā mācīšanās***

a) Astoņas skolnieces – Justīne, Kristīne, Anna, Linda, Nikola, Renāte, Sandra un Patrīcija – izdomāja mainīt kārtību, kādā viņas sēž pie divvietīgajiem galdiem matemātikas kabinetā. Viņas vienojās, ka ievēros šādus nosacījumus:

(1) Patrīcija sēdēs vai nu kopā ar Lindu, vai kopā ar Sandru;
(2) Nikola sēdēs vai nu kopā ar Annu, vai ar Justīni;
(3) Kristīne sēdēs vai nu kopā ar Justīni, vai Lindu;
(4) Renāte sēdēs kopā ar Sandru vai Annu;
(5) Justīne nesēdēs kopā ne ar Kristīni, ne ar Patrīciju.

Palīdzi meitenēm izspriest, kā viņām jāsēž! Paskaidro savus spriedumus!

b) Nākamajā dienā skolā nebija Linda un Patrīcija, un mūzikas stundā atlikušajām sešām meitenēm bija jāsasēžas divos trīsvietīgajos solos. Palīdzi viņām noteikt sēdēšanas kārtību, ja nepieciešams ievērot šādus nosacījumus:

(1) Justīne grib sēdēt blakus vai nu Nikolai, vai Annai;
(2) Kristīne grib sēdēt pie viena galda kopā ar Justīni, turklāt tieši pa labi no viņas;
(3) Anna negrib sēdēt blakus Sandrai;
(4) Renāte grib sēdēt sola vidū, bet ne blakus Nikolai;
(5) Anna grib sēdēt sola ārmalā;
(6) Sandra grib sēdēt pie viena galda ar Renāti, un tieši pa labi no viņas.

3.2.10. ***Kā apklusināt spokus?***

Pelnrušķītes pilī parādījušies divi spoki. Viens no tiem smejas, otrs – dzied. Katrs spoks vai nu vienu minūti klusē, vai vienu minūti trokšņo. Viņu darbība atkarīga no tā, kas noticis iepriekšējā minūtē.

Dziedošais spoks katrā nākamajā minūtē izturas tāpat kā iepriekšējā, ja vien iepriekšējā minūtē nav spēlējušas ērģeles un smejošais spoks ir klusējis – šajā gadījumā viņš maina savu izturēšanos uz pretējo.

Ja iepriekšējā minūtē ir degusi svece, tad smejošā spoka izturēšanās atkarīga no dziedošā spoka izturēšanās iepriekšējā minūtē – ja dziedošais spoks dziedājis, tad smejošais spoks smiesies; ja dziedošais spoks klusējis, tad tagad smejošais spoks klusēs. Savukārt, ja iepriekšējā minūtē svece nav degusi, tad šajā minūtē smejošais spoks darīs pretējo tam, ko darījis dziedošais spoks iepriekšējā minūtē.

Pašlaik abi spoki trokšņo.

Kādas secīgas darbības jāveic ar sveci un ērģelēm, lai pilī iestātos un arī turpinātos klusums?

3.3. Trešā nodarbība

3.3.1. ***Summa grieķu gaumē***

Izteiksmē $TETA + BETA = GAMMA$ burtu vietā ieraksti ciparus tā, lai iegūtā vienādība būtu patiesa. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari. Atrodi visas iespējamās atbildes un pierādi, ka citu nav!

3.3.2. ***Žetonu kārtošana***

Vai kvadrātā, kura izmēri ir 8×8 rūtiņas, var izkārtot žetonus tā, ka visās kolonnās ir vienāds skaits žetonu, bet katrā rindā – atšķirīgs skaits žetonu (katrā rūtiņā var būt, augstākais, viens žetons; protams, var būt rūtiņas, kurās nav žetona).

3.3.3. ***Sirsnīgie rūķi***

Ziemeļpolā dzīvo Ziemassvētku vecītis un rūķīši. Katru dienu katrs rūķītis kādam izteica vienu komplimentu (var būt arī, ka pats sev). Nedēļas beigās izrādījās, ka šīs nedēļas laikā katrs rūķītis ir saņēmis divus komplimentus, bet Ziemassvētku vecītis – simts komplimentus. Cik rūķīšu dzīvo Ziemeļpolā?

3.3.4. ***No kļūdām jāmācās***

Malvīne uzdeva Buratino uzdevumu: „Saskaiti ķēpājumus savā pierakstu kladē. Iegūtajam skaitlim pieskaiti 7, summu izdali ar 8, rezultātu reizini ar 6 un pēc tam atņem 9. Ja visu izdarīsi pareizi, rezultāts būs pirmskaitlis.”

Taču Buratino visu sajauca. Ķēpājumus viņš saskaitīja pareizi, bet iegūto skaitli pareizināja ar 7, no rezultāta atņēma 8, tad izdalīja ar 6 un pieskaitīja 9. Kādu skaitli Buratino ieguva?

3.3.5. ***Gara, gara virkne***

Matemātikas stundā skolotāja skolēniem piedāvāja sakarību, pēc kādas jāveido skaitļu virkne:

„Ja x ir virknes loceklis, tad nākamo locekli aprēķina pēc formulas $\frac{1}{1-x}$.”

Marija kā savas virknes pirmo locekli izvēlējās skaitli 3. Tad viņas virknes otrais loceklis bija $\frac{1}{1-3}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$; trešais virknes loceklis bija $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$;

ceturtais virknes loceklis bija $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$. Tātad iegūtās virknes pirmie četri

locekļi ir 3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; 3.

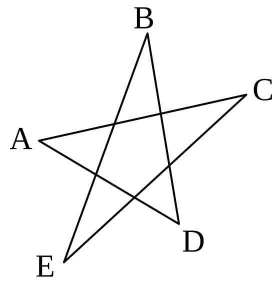
Einārs savu virkni sāka ar skaitli 2, un uzrakstīja pirmos 2012 virknes locekļus. Cik no visiem virknes locekļiem bija vienādi ar 2? Aprēķini Eināra iegūtās virknes visu locekļu summu!

3.3.6. ***Kvadrāta sagriešana***

Vai kvadrātu var sagriezt divos vienādos **a)** trijstūros; **b)** četrstūros; **c)** piecstūros?

3.3.7. ***Zvaigznes leņķi***

Dota piecstaru zvaigzne (skat. U3.7. zīm.), kurā $\angle ACE=\angle ADB$ un $\angle DBE=\angle BEC$. Zināms arī, ka $BD=CE$. Pierādi, ka $\angle ACD=\angle ADC$.



U3.7.zīm.

3.3.8. ***Trijstūru veidošana***

Līga un Jānis spēlēja spēli. Spēles sākumā bija viens stienītis. Pirmais spēlētājs šo stienīti salauž divās daļās. Tālāk katrs no spēlētājiem savā gājienā salauž divās daļās jebkuru no iegūtajiem stienīšiem. Uzvar tas spēlētājs, kurš pēc sava gājiena var izveidot vienu vai vairākus trijstūrus, izmantojot visus stienīšus (katrs trijstūris sastāv no tieši trim stienīšiem). Zināms, ka spēli sāk Līga, un spēlētāji gājienus izdara pamīšus. Kurš no spēlētājiem vienmēr varēs uzvarēt?

3.3.9. ***Kā izglābt Dzelzs Malkascirtēju?***

Smaragda pilsētas burvim pieder īpatnēja skaitļošanas mašīna. Ja tai iedod kartīti, uz kuras uzrakstīts skaitlis *x*, mašīna atdod atpakaļ šo kartīti un vēl otru kartīti, uz kuras uzrakstīts $\frac{1}{x}$. Ja mašīnai iedod divas kartītes, uz vienas no kurām uzrakstīts *x*, bet uz otras uzrakstīts *y* (turklāt $x > y$), tad mašīna atdod atpakaļ šīs kartītes un vēl trešo kartīti, uz kuras uzrakstīts skaitlis $x - y$. Ja mašīnai iedod divas kartītes ar vienādiem skaitļiem, tā salūst.

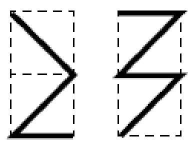
Mazajai Ellai ir tikai viena kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2012. Lai glābtu Dzelzs Malkascirtēju, burvim nepieciešama kartīte ar skaitli 100. Kā Ella var iegūt šādu kartīti? Vai var iegūt kartīti ar skaitli $100\frac{1}{100}$?

3.4. Ceturtā nodarbība

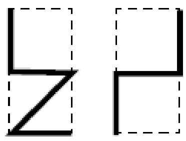
3.4.1. ***Zelta zivtiņas peldējums***

Katei Ziemassvētkos uzdāvināja akvāriju ar zelta zivtiņām. Kādu dienu viņa novēroja un shematiski attēloja vienas zelta zivtiņas peldējumu, skatoties uz akvāriju no priekšas un no labās puses. Uzzīmē zelta zivtiņas peldējumu no augšas, ja tās peldējums ir tāds, kā redzams **a)** U3.8. zīm.; **b)** U3.9. zīm.

(Zīmējumā kreisais attēls atbilst zelta zivtiņas peldējumam, skatoties uz akvāriju no priekšas, bet labais attēls – skatoties no labajiem sāniem; akvārijam ir taisnstūra paralēlskaldņa forma.)



U3.8. zīm.



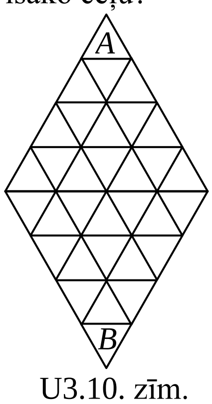
U3.9. zīm.

3.4.2. ***Skudras ceļojums***

U3.10. zīm. attēlotās figūras augšējā trijstūrī *A* atrodas skudra. Viņa var izgrauzties cauri trijstūra malai, lai nokļūtu kādā tam blakusesošā mazajā trijstūrī. Tātad sākumā skudrai ir tikai viens variants, kur doties – uz trijstūri, kas atrodas tieši zem sākotnējā trijstūra.

a) Cik trijstūrus, ieskaitot trijstūrus *A* un *B*, skudrai nepieciešams apmeklēt, ja viņa mēģina nokļūt trijstūrī *B* pa iespējami īsāko ceļu (t.i., apmeklējot pēc iespējas mazāk trijstūru)?

b) Cik dažādos veidos skudra var nokļūt no trijstūra *A* uz trijstūri *B*, ja viņa to cenšas izdarīt pa iespējami īsāko ceļu?



U3.10. zīm.

3.4.3. ***Meklējot trīsciparu pirmskaitli***

Atrodi lielāko trīsciparu skaitli, kas vienlaicīgi apmierina visus trīs nosacījumus:

a) tas ir pirmskaitlis;

b) ja trīsciparu skaitlī samaina vietām pirmo un pēdējo ciparu, arī iegūtais skaitlis ir pirmskaitlis;

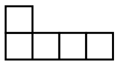
c) visu trīsciparu skaitļa ciparu reizinājums arī ir pirmskaitlis.

3.4.4. ***Taisnstūru griešana***

Katrai no četrām matemātikas pulciņa dalībniecēm tika iedots no papīra izgriezts taisnstūris, turklāt visi šie taisnstūri bija vienādi. Viņām bija jāsagriež taisnstūris divās daļās, no kurām var salikt trijstūri (kopā saliktās daļas nedrīkst pārklāties un starp tām nevar būt tukšumi). Visas meitenes tika galā ar uzdevumu. Vai varēja gadīties, ka visi meiteņu izveidotie trijstūri bija dažādi?

3.4.5. ***Figūru savietošana***

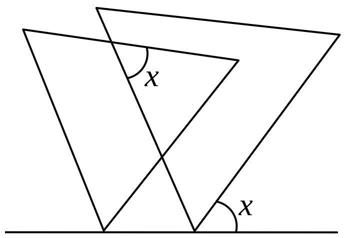
Kādu lielāko skaitu U3.11. zīm. redzamo figūru var ievietot kvadrātā, kura izmēri ir 8×8 rūtiņas (figūras nedrīkst pārklāties un to malām jāsakrīt ar rūtiņu malām)?



U3.11.zīm.

3.4.6. ***Vienādo leņķu nevienādība***

U3.12. zīm. attēloti divi vienādmalu trijstūri, kuriem viena virsotne atrodas uz vienas taisnes. Ar *x* apzīmētie leņķi ir vienādi. Pierādi, ka šo leņķu lielums ir lielāks nekā 30°!



U3.12. zīm.

3.4.7. ***Zīmīgie skaitļi***

Zināms, ka a, b un c ir veseli skaitļi, turklāt $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Pierādi, ka šo skaitļu kvadrātu summa ir kāda vesela skaitļa kvadrāts.

3.4.8. ***Jauktu skaitļu patiesā vērtība***

Kristīne attēloja skaitli 27 jaukta skaitļa veidā, izmantojot visus ciparus no 1 līdz 9 (katru ciparu tieši vienu reizi):

$$15\frac{9432}{786}.$$

Līdzīgā veidā, izmantojot visus ciparus no 1 līdz 9, uzraksti jauktu skaitli, kura vērtība ir **a)** 16; **b)** 20.

3.4.9. ***Volejbola turnīrs***

Volejbola sacensībās piedalījās 8 komandas. Katra komanda spēlēja ar katru no pārējām komandām vienu spēli. Par katru uzvarētu spēli tika piešķirts 1 punkts, bet par katru zaudējumu – 0 punkti; sacensībās nebija neizšķirtu rezultātu.

Pēc visām notikušajām spēlēm tika aprēķināts katras komandas iegūto punktu skaits. Ja starpība starp pirmajā un otrajā vietā esošo komandu iegūtajiem punktu

skaitiem nebija vairāk kā 1 punkts, tad šīs komandas spēlēja vienu papildus spēli. Līdzīgi papildus spēle tika izspēlēta, ja ne vairāk kā 1 punkts šķīra trešās un ceturtās vietas, piektās un sestās vietas, septītās un astotās vietas ieguvējus.
Kāds ir mazākais iespējamais papildus spēļu skaits? Pamato savu atbildi un parādi atbilstošu piemēru!

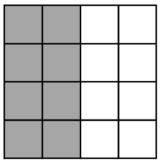
3.4.10. ***Toms un Džerijs***

Kādā istabā pie vienas sienas ir n alas, kas izvietotas taisnā līnijā ($n \geq 3$). Pele Džerijs ir paslēpies vienā no šīm alām, bet kaķis Toms cenšas viņu notvert. Katrā savā gājienā Toms var iebāzt ķepu jebkurā alā un, ja tur ir Džerijs, noķert viņu. Pēc katra neveiksmīga Toma gājiena Džerijs skrien uz blakus esošu alu (pa labi vai pa kreisi; Toms neredz, uz kuru alu Džerijs aizskrējis). Vai Toms noteikti var noķert Džeriju?

3.5. Piektā nodarbība

3.5.1. ***Krāsotāju šahs***

Kvadrāta, kura izmēri ir 4×4 rūtiņas, kreisajā pusē esošās astoņas rūtiņas tika nokrāsotas melnā krāsā, bet pārējās – baltā (skat. U3.13. zīm.). Vienā gājienā atļauts kvadrātā izvēlēties jebkādu taisnstūri un nokrāsot pretējā krāsā katru tajā esošo rūtiņu. Parādi, kā ar trīs gājieniem no dotā krāsojuma var iegūt šaha galdiņa krāsojumu!



U3.13. zīm.

3.5.2. ***Melīgie sivēntiņi***

Trīs sivēntiņi – Nif-Nifs, Naf-Nafs un Nuf-Nufs – katrs dzīvo savā mājiņā. Vienu dienu Nif-Nifs teica: „Attālums no manas mājas līdz Naf-Nafa mājai ir vairāk nekā divas reizes lielāks nekā attālums no manas mājas līdz Nuf-Nufa mājai.” Naf-Nafs teica: „Attālums no manas mājas līdz Nuf-Nufa mājai ir vairāk nekā divas reizes lielāks nekā attālums no manas mājas līdz Nif-Nifa mājai.” Savukārt Nuf-Nufs apgalvoja: „Attālums no manas mājas līdz Naf-Nafa mājai ir vairāk nekā divas reizes lielāks nekā attālums no manas mājas līdz Nif-Nifa mājai.” Vismaz divi sivēntiņi saka taisnību. Kurš no visiem trīs sivēntiņiem melo? Pamato savu atbildi!

3.5.3. ***Interesantās daļas***

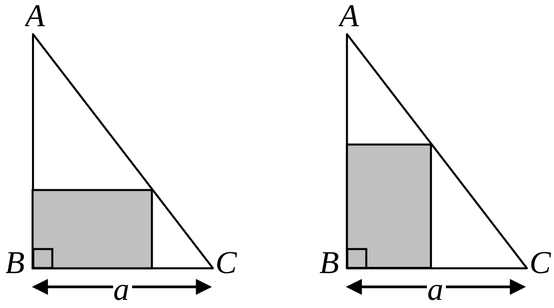
Rita uzrakstīja naturālu skaitli a. Margarita aprēķināja vienu sestdaļu, vienu piektdaļu, vienu ceturtdaļu, vienu trešdaļu un vienu pusi no šī skaitļa. Izrādījās, ka, saskaitot iegūtās vērtības, iegūst veselu skaitli. Nosaki, kāda ir mazākā iespējamā skaitļa a vērtība!

3.5.4. ***Cita skaitīšanas sistēma***

Patriks un Krišjānis brauca ar vilcienu un abi vienlaicīgi sāka skaļi skaitīt ceļa malā esošos elektrības stabus: „Viens, divi, …”. Patriks nevar skaidri izrunāt burtu „r”, tāpēc viņš nesaka skaitļus, kurus izrunājot ir jāsaka burts „r”; tā vietā viņš uzreiz sauc nākamo pēc kārtas esošo skaitli, kura izrunā nav burts „r”. Savukārt Krišjānis nevar izrunāt burtu „š”, tāpēc viņš izlaiž skaitļus, kuru izrunā ir burts „š”. Kādu skaitli nosauca Krišjānis, kad Patriks nosauca skaitli „simts”?

3.5.5. ***Figūru attiecības***

Taisnstūris *ievilkts* taisnleņķa trijstūrī *ABC* divos dažādos veidos tā, ka viena taisnleņķa virsotne atrodas uz trijstūra hipotenūzas *AC*, bet divas tā malas atrodas uz trijstūra katetēm (skat. U3.14. zīm.). Vienas trijstūra *ABC* malas garums ir *a*. Pierādi, ka taisnstūra perimetrs ir 2*a*!



U3.14. zīm.

3.5.6. ***Skaitļu grupējumi***

Naturālie skaitļi no 1 līdz 9 sadalīti trīs grupās pa trim skaitļiem katrā. Katrā grupā aprēķināta tajā ietilpstošo skaitļu summa. Vai var būt, ka

a) visas summas ir pirmskaitļi;

b) visas summas ir atšķirīgi pirmskaitļi?

3.5.7. ***Pēdējā cipara noteikšana***

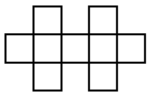
Nosaki, kāds ir summas $\underbrace{2013^{2013}+\ldots+2013^{2013}}_{2013\,reizes}$ pēdējais cipars!

3.5.8. ***Kaimiņu būšana***

Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos trijstūros tā, ka katram trijstūrim *kaimiņos* ir tieši trīs trijstūri. (Divus trijstūrus sauksim par *kaimiņiem,* ja tiem abiem viena mala atrodas uz kopīgas taisnes; ja trijstūriem ir kopīgs tikai viens punkts vai nav kopīgu punktu vispār, tad tos neuzskatām par *kaimiņiem*.)

3.5.9. ***Darbs ar polimino***

Uzzīmē divas vienādas figūras, no kurām pirmā sadalīta taisnstūros ar izmēriem 1×2 rūtiņas, bet otrā sadalīta U3.15. zīm. parādītajās figūrās. (*Figūras var būt arī ar „caurumiem”.*)



U3.15. zīm.

3.5.10. ***Kā atgūt atsvaru?***

Alisei ir astoņi pēc izskata pilnīgi vienādi atsvari, kuru masas ir 1, 2, 3, …, 8 grami. Kādu dienu Toms noslēpa vienu no atsvariem, bet atlikušos atsvarus sakārtoja augošā secībā pēc to masām.

Toms apsolīja Alisei atdot atsvaru, ja viņa pēc trīs gājieniem varēs pateikt paslēptā atsvara masu; vienā gājienā Alise var par jebkurām divām atsvaru grupām Tomam pavaicāt, vai tajās esošo atsvaru masas ir vienādas vai nē (Toms vienmēr atbild godīgi).

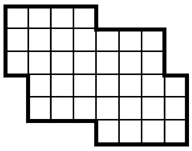
Kā jārīkojas Alisei, lai ar trim jautājumiem noskaidrotu paslēptā atsvara masu un tādējādi atsvaru atgūtu?

Piezīme. Alise var veidot jebkādas atsvaru grupas; grupā var būt arī tikai viens atsvars.

3.6. Sestā nodarbība

3.6.1. ***Vai pratīsi sagriezt figūru?***

Parādi vismaz vienu veidu, kā U3.16. zīm. attēloto figūru sagriezt 4 vienādās daļās, ja griezumiem jāiet pa rūtiņu malām.



U3.16. zīm.

3.6.2. ***Pēdējā cipara iegūšana***

Kāds mazākais reizinātāju skaits izteiksmē $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ jānosvītro, lai iegūtā reizinājuma pēdējais cipars būtu 2?

3.6.3. ***Skrējiens pēc dāvanas***

Vinnijs Pūks un Sivēntiņš tieši pusdienlaikā devās no Sivēntiņa mājas pie Ēzelīša I-ā uz dzimšanas dienas svinībām. Nogājis tieši pusceļu, Sivēntiņš atcerējās, ka mājās aizmirsis dāvanu, tāpēc uzreiz steidzās tai pakaļ, bet Vinnijs Pūks ar nemainīgu ātrumu turpināja ceļu pie Ēzelīša I-ā.

Skrienot pēc dāvanas, Sivēntiņa ātrums bija divas reizes lielāks nekā tad, kad viņš gāja kopā ar Vinniju Pūku. Nonācis mājās, Sivēntiņš paķēra dāvanu un uzreiz skrēja pie Ēzelīša I-ā (ar tādu pašu ātrumu, ar kādu skrēja pēc dāvanas).

Vinnijs Pūks pie Ēzelīša I-ā nonāca tieši paredzētajā laikā, bet Sivēntiņš nokavēja 10 minūtes. Cikos bija paredzēta ierašanās pie Ēzelīša I-ā?

3.6.4. ***Monētas divas puses***

Uz galda stāv četras monētas ar ģerboni uz augšu. Vienā gājienā atļauts apgriezt otrādi jebkuras 3 monētas. Šādus gājienus atļauts izdarīt vairākas reizes.

Kā panākt, lai beigās visas četras monētas būtu ar ciparu uz augšu? Vai to varētu izdarīt, ja būtu piecas monētas un vienā gājienā būtu atļaut apgriezt jebkuras 4 monētas?

3.6.5. ***Dažādie staru izkārtojumi***

Leņķa *MON*, kura lielums ir $120°$, iekšpusē novilkti stari *OA* un *OB* tā, ka katrs no tiem ir bisektrise kādam no iegūtajiem leņķiem *MOB, MOA, NOB, NOA* vai *MON*. Noskaidro leņķa *MOA* lielumu, aplūkojot visus iespējamos staru *OA* un *OB* izkārtojumus.

3.6.6. ***Iekavu reizinājumi***

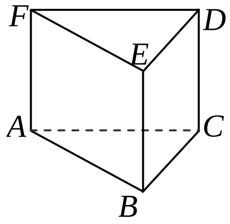
Atrodi visus tādus veselus skaitļus *n*, kuriem ir patiesa šāda vienādība:

$$(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot\ldots\cdot(n-2013)=n\cdot(n+2)\cdot(n+4)\cdot\ldots\cdot(n+2012).$$

3.6.7. ***Dažādās summas***

Elīna uzzīmēja trijstūra prizmu un tās virsotnēs *A*, *B*, *C*, *D*, *E* un *F* (skat. U3.17. zīm.) ierakstīja skaitļus 1; 2; 3; 4; 5 un 6 (katrā virsotnē citu skaitli). Tad viņa uz katras prizmas šķautnes uzrakstīja tās galapunktos ierakstīto skaitļu summu.

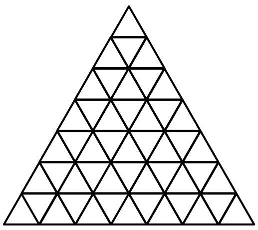
Vai Elīna prizmas virsotnēs skaitļus var ierakstīt tā, lai visi uz šķautnēm uzrakstītie skaitļi būtu dažādi?



U3.17. zīm.

3.6.8. ***Paralelogramu izgriešana***

Vienādmalu trijstūris ar malas garumu 7 *cm* sadalīts 49 vienādos vienādmalu trijstūros, kuru malu garumi ir 1 *cm* (skat. U3.18. zīm.). Pa iezīmētajām līnijām ir izgriezti vairāki paralelogrami, kuru viena mala ir 1 *cm*, bet otra – 2 *cm* garas. Kāds ir lielākais šādu paralelogramu skaits, ko var izgriezt no viena lielā trijstūra?



U3.18. zīm.

3.6.9. ***Rūķu aptauja***

Uz kādas salas dzīvo tikai rūķi, turklāt katrs no tiem pārstāv vai nu *papadumi*, vai arī *čapati* cilti. Papadumi cilts rūķi vienmēr runā tikai taisnību, bet rūķi no čapati cilts – vienmēr melo. Kādā dienā katram rūķim jautāja par katru no pārējiem rūķiem, vai tas ir papadumi vai čapati cilts pārstāvis.

Pavisam kopā tika saņemtas 26 atbildes „papadumi" un 30 atbildes „čapati". Cik rūķu no papadumi cilts dzīvo uz salas?

3.6.10. ***Kā atrast tukšāko lādi?***

Vienā rindā stāv 11 lādes, katrā no tām iekšā ir 100 monētas. No vienas lādes izņēma dažas monētas un tās pārlika pa vienai monētai katrā no lādēm, kas atrodas pa labi no izvēlētās lādes.

Ar vienu pārbaudi var noskaidrot, cik ir monētu vienā vai jebkurās vairākās lādēs kopā. Kā ar vienu pārbaudi var uzzināt, no kuras lādes monētas tika paņemtas?

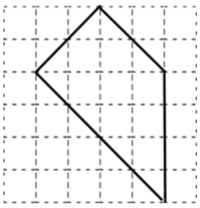
Piezīme. Ja nevari izdomāt, kā to izdarīt ar vienu pārbaudi, pacenties izdomāt citu pēc iespējas mazāku pārbaužu skaitu, ar kuru pietiek, lai varētu noskaidrot, no kuras lādes monētas tika pārliktas.

4. LATVIJAS 25. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. Piektā klase

4.5.1. Vilks kopā ar trim sivēntiņiem Nif-Nifu, Naf-Nafu un Nuf-Nufu ir sarakstījis grāmatu „*Izturīgās būves*”, bet kopā ar Sarkangalvīti un viņas vecmāmiņu – grāmatu „*Visvisādi pīrādziņi*”. Izdevniecība par katru grāmatu maksā honorāru, kas jāsadala vienādās daļās starp attiecīgās grāmatas autoriem. Pēc tam, kad Naf-Nafs bija saņēmis savu honorāra daļu, par abām grāmatām neizmaksātais honorārs bija 2520 lati. Cik liela naudas summa par abām grāmatām pienākas Vilkam?
Par katru grāmatu izmaksājamā honorāra lielums var atšķirties.

4.5.2. Tirmantiņš ir izcepis dīvainas formas torti (skat. U4.1. zīm.) un vēlas to sagriezt četrās pilnīgi vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās. Parādi zīmējumā, kā to var izdarīt!
Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt gan pagriezti, gan „apgriezti otrādi”.

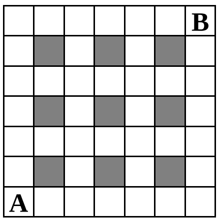


U4.1. zīm.

4.5.3. Kādu dienu Robinsons izrēķināja, ka nākamajās 1000 dienās ceturtdienu būs vairāk nekā piektdienu. Kurā nedēļas dienā Robinsons veica šos aprēķinus?

4.5.4. Septiņciparu skaitļa A ciparu summa ir divciparu skaitlis B, kura ciparu summa, savukārt, ir viencipara skaitlis C. Šo trīs skaitļu pierakstā tiek lietoti visi cipari no 0 līdz 9, un neviens cipars neatkārtojas. Kāds ir skaitlis C?

4.5.5. Noteikt, cik dažādos veidos no rūtiņas A var nonākt rūtiņā B (skat. U4.2. zīm.), ja katrā solī drīkst iet vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu uz augšu. (Iekrāsotajās rūtiņās ieiet nedrīkst.)



U4.2. zīm.

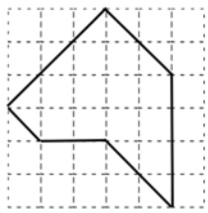
4.6. Sestā klase

4.6.1. Ar kādu mazāko naturālo skaitli jāreizina skaitlis 315, lai reizinājumā iegūtu skaitli, kas ir **a)** kāda naturāla skaitļa n reizinājums pašam ar sevi, t.i., $n \cdot n$, **b)** kāda naturāla skaitļa n reizinājums pašam ar sevi trīs reizes, t.i., $n \cdot n \cdot n$?

4.6.2. Vinnijs Pūks un Sivēntiņš savā starpā sadalīja torti. Pēc abu daļu apskates Sivēntiņš sacēla brēku, ka viņa gabals ir acīmredzami mazāks. Vinnijs Pūks atdeva Sivēntiņam ceturto daļu no sava gabala, kā rezultātā Sivēntiņa daļa palielinājās septiņas reizes. Kāda tortes daļa sākumā bija iedalīta Vinnijam Pūkam un kāda – Sivēntiņam?

4.6.3. Taisnstūrveida zemes gabala katras malas garums izsakāms veselā skaitā metru, turklāt zināms, ka viena mala ir par 7 metriem garāka nekā otra. Šī zemes gabala trīs malu garumu summa ir 2012 metri. Kāds ir šī zemes gabala perimetrs?

4.6.4. Tirmantiņš ir izcepis dīvainas formas torti (skat. U4.3. zīm.) un vēlas to sagriezt piecās pilnīgi vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās. Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt pagriezti, bet nedrīkst būt „spoguļattēlā”. Parādi, kā to var izdarīt!



U4.3. zīm.

4.6.5. Mazākais naturālais skaitlis, kuru var izteikt kā piecu dažādu naturālu skaitļu summu, ir $15=1+2+3+4+5$. Cik dažādos veidos kā piecu dažādu naturālu skaitļu summu var izteikt skaitli 20? (Divus veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, uzskatām par vienādiem.)

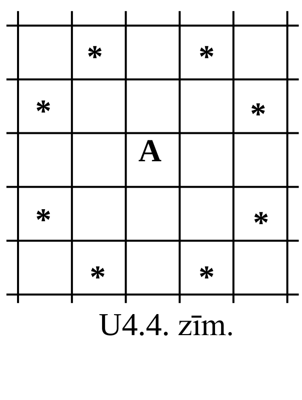
4.7. Septītā klase

4.7.1. Daļskaitļa skaitītājs un saucējs ir naturāli skaitļi, kuru summa ir 2012. Zināms, ka daļskaitļa vērtība nepārsniedz $\frac{1}{7}$. Atrodi lielāko iespējamo šāda daļskaitļa vērtību!

4.7.2. Uzzīmē slēgtu lauztu līniju, kurai ir **a)** 6, **b)** 7 posmi un kas pati sevi krusto tieši 7 dažādos punktos!

4.7.3. Rūtiņu lapā uzzīmēts taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu malām. Šī taisnstūra visas rūtiņas var apstaigāt ar šaha zirdziņu, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi. Kāds ir mazākais iespējamais šāda taisnstūra laukums?

Piezīme. Šaha zirdziņš no rūtiņas A skat. (U4.4. zīm.) ar vienu gājienu var nonākt tikai kādā no rūtiņām, kas apzīmētas ar * (ja tās atrodas taisnstūra iekšpusē).



U4.4. zīm.

4.7.4. Divos televīzijas kanālos vienlaicīgi sāka demonstrēt vienu un to pašu filmu. Pirmajā kanālā filma bija sadalīta 26 minūšu fragmentos un starp katriem diviem fragmentiem bija divas minūtes gara reklāma. Savukārt, otrajā kanālā filma bija sadalīta 13 minūšu fragmentos un starp katriem diviem fragmentiem bija vienu minūti gara reklāma. Kurā kanālā filma beigsies agrāk? Atbildi pamatot!

4.7.5. Vai naturāla skaitļa kvadrāts (reizinājums pašam ar sevi) var būt skaitlis **a)** $\overline{AABB}$, **b)** $\overline{ABAB}$, kur A un B ir dažādi cipari.

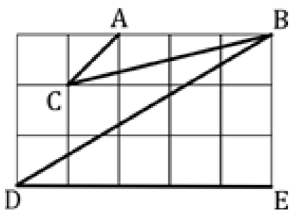
Pieraksts $\overline{KLM}$ nozīmē, ka skaitlī ir M vieni, L desmiti un K simti; K, L, M ir cipari.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Cik starp pirmajiem 2012 naturāliem skaitļiem ir tādi, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7?

4.8.2. Uz tāfeles uzrakstīti n ($n > 1$) dažādi naturāli skaitļi. Lielākais no tiem ir 11. Visu uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais arī ir naturāls skaitlis. Ja skaitli 11 nodzēš, tad atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais arī ir naturāls skaitlis. Kādai lielākajai n vērtībai tas ir iespējams? Kādi skaitļi šajā gadījumā sākumā bija uzrakstīti uz tāfeles? Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

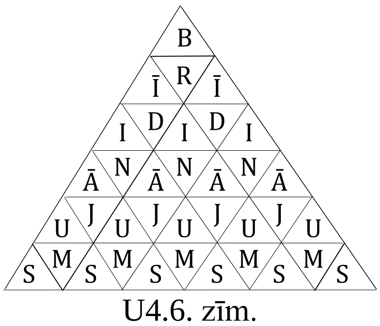
4.8.3. Kvadrātisku rūtiņu lapā atzīmētas piecas virsotnes A, B, C, D un E (skat. U4.5. zīm.). Salīdzini leņķus $\angle ACB$ un $\angle BDE$ (nosaki, kurš no tiem ir lielāks vai arī pamato, ka tie ir vienādi)!



U4.5. zīm.

4.8.4. Tūrists pārgājienā pavadīja 4,5 stundas. Katrā vienu stundu garā laika sprīdī viņš nogāja tieši 4 kilometrus. Vai noteikti tūrista vidējais ātrums visā pārgājienā bija 4 km/h? Ja nē, tad kāds ir mazākais iespējamais un lielākais iespējamais tūrista vidējais ātrums visā pārgājienā? Atbildi pamatot!

4.8.5. Cik dažādos veidos U4.6. zīm. var izlasīt vārdu BRĪDINĀJUMS, ja jāsāk lasīt no trijstūra augšējā luciņa, un visu laiku jāpārvietojas uz blakus luciņu?
Par blakus luciņiem sauc luciņus, kam ir kopīga mala.



U4.6. zīm.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Pieci veseli skaitļi *a, b, c, d* un *e* ir pēc kārtas sekojoši aritmētiskās progresijas locekļi. Zināms, ka *a* nav 0 un ka *b* un *d* ir kvadrātvienādojuma $ax^2 + cx + e = 0$ saknes. Noteikt skaitļu *a, b, c, d* un *e* vērtības!
Paskaidrojums. Par aritmētisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli.

4.9.2. Trijstūrī *ABC* izvēlēts malas *AB* iekšējs punkts *D* un novilkts nogrieznis *CD*. Dots, ka $AB = BC$ un $BD = DC = CA$. Aprēķināt leņķi $\angle ABC$.

4.9.3. Ar kādu lielāko skaitļa 2013 pakāpi dalās skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2012$?

4.9.4. Kvadrātveida tabulā ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Pierādīt, ka tabulā var izvēlēties piecas rūtiņas tā, ka nekādas divas neatrodas ne vienā rindiņā ne vienā kolonā, un tajās ierakstīto skaitļu summa ir pozitīva.

4.9.5. Iedomāsimies, ka uz Zemes ieradušies citplanētieši, un viņiem ir pastāstīts, ka uz Zemes laiku mēra gados, dienās un mēnešos. Pie tam ir zināms, ka:
1) gada ilgums ir 365 dienas,
2) gads ir sadalīts 28, 30 vai 31 dienu garos mēnešos.
Vai, zinot **tikai šo informāciju**, citplanētieši var viennozīmīgi noteikt **a)** mēnešu skaitu gadā, **b)** katra veida mēnešu skaitu?

5. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

5.5. Piektā klase

5.5.1. Vai var atrast 7 naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus), kuru summa vienāda ar to reizinājumu?

5.5.2. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt četros vienādos piecstūros.

5.5.3. Izveido sešciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 8 izmantots tieši vienu reizi.

5.5.4. Piecstūra katrā virsotnē ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai katras malas galapunktos ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs būtu 1, bet katras diagonāles galapunktos ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks nekā 1.

5.5.5. Doti 13 punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet tieši 3 vai 5 nogriežņi?

5.6. Sestā klase

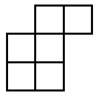
5.6.1. Atrodi tādus četrus dažādus naturālus skaitļus *a, b, c, d,* ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

5.6.2. Uz tāfeles rindā pēc kārtas uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.
a) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 1?
b) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 0?

5.6.3. Vai plaknē var uzzīmēt
a) 12-stūri,
b) 13-stūri
un riņķa līniju, kas krusto uzzīmētā daudzstūra katru malu tieši vienā punktā? (Riņķa līnija nepieskaras daudzstūra malām un neiet caur tā virsotnēm.)

5.6.4. Atrodi nenulles ciparus (ne obligāti dažādus):
a) *p, q* un *r* tādus, ka skaitlis $\overline{pqr}$ dalās ar $\overline{qr}$ un $\overline{qr}$ dalās ar *r*;
b) *k, l, m* un *n* tādus, ka skaitlis $\overline{klmn}$ dalās ar $\overline{lmn}$, $\overline{lmn}$ dalās ar $\overline{mn}$ un $\overline{mn}$ dalās ar *n*;
c) *a, b, c, d* un *e* tādus, ka skaitlis $\overline{abcde}$ dalās ar $\overline{bcde}$, $\overline{bcde}$ dalās ar $\overline{cde}$, $\overline{cde}$ dalās ar $\overline{de}$ un $\overline{de}$ dalās ar *e*.
(*Pieraksts* $\overline{xyzt}$ *nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir x tūkstoši, y simti, z desmiti un t vieni.*)

5.6.5. Vai kvadrātā 6×6 rūtiņas var iekrāsot **a)** 7 rūtiņas; **b)** 6 rūtiņas tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu U5.1. zīm. attēloto figūru (tā var būt pagriezta vai apgriezta citādi)?
Figūra var tikt novietota tikai tā, lai tās malas iet pa rūtiņu līnijām.



U5.1. zīm.

5.7. Septītā klase

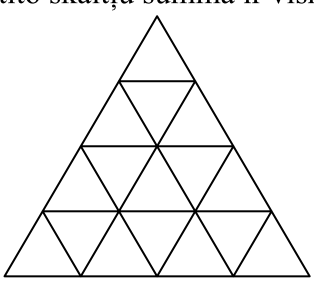
5.7.1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 18 sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī esošo skaitļu summa ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ar ko pārī apvienots skaitlis 1?
Par skaitļa kvadrātu sauc skaitļa reizinājumu pašam ar sevi.

5.7.2. Cik starp pirmajiem 2013 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111?

5.7.3. Vai eksistē tāds **a)** 11-stūris; **b)** 12-stūris, kuram astoņas virsotnes atrodas uz vienas taisnes?

5.7.4. Vai pa riņķi var uzrakstīt 13 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu starpība būtu 6, 10, 14 vai 18?

5.7.5. Vienādmalu trijstūris ar malas garumu 4 sadalīts 16 vienādos trijstūros (skat. U5.2. zīm.).
Katrā mazajā trijstūrī ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki.
Pierādi, ka var izvēlēties četrus trijstūrus, kas veido vienādmalu trijstūri ar malas garumu 2 un kuros ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



U5.2. zīm.

5.8. Astotā klase

5.8.1. Skaitli 8999999 uzraksti kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1.

5.8.2. Trijstūrī ABC novilkts augstums BH, bisektrise BL un mediāna BM. Zināms, ka punkts L atrodas starp punktiem M un H, turklāt $\angle MBL = \angle LBH$, $\angle CBH = \angle BAH$ un $BM = BC$. Nosaki trijstūra ABC leņķu lielumus!

5.8.3. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens pāra cipars?

5.8.4. Kvadrātā 3×3 rūtiņas ieraksti deviņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu viens un tas pats.

5.8.5. Rindā kaut kādā secībā stāv 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi bērni.

a) Pierādi, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni un pēc tam 10 meitenes.

b) Pierādi, ka sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām nevar panākt, ka vispirms stāv 10 zēni un pēc tam 10 meitenes.

5.9. Devītā klase

5.9.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kura kvadrāta pēdējie 9 cipari ir 987654321 ?

5.9.2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *K*. Pierādi, ka attālumu summa no punkta *K* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *K* izvēles.

5.9.3. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs un laukums izsakās ar vienu un to pašu skaitli. Atrodi visus šādus taisnstūrus.

5.9.4. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{2013} ir tādi naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_{2012} > \sqrt{a_{2013}}$ un $a_{2013} > \sqrt{a_1}$. Aprēķini mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ vērtību.

5.9.5. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni.

Pierādi ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu).

Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

6. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. Devītā klase

6.9.1. Atrodi tādas ciparu *a, b, c, d* vērtības, lai izpildītos vienādība $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2013$.

(Pieraksts $\overline{xyzt}$ nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir *x* tūkstoši, *y* simti, *z* desmiti un *t* vieni.)

6.9.2. Doti trīs regulāri trijstūri OAB, OCD un OEF (virsotnes norādītas pulksteņrādītāja secībā), kuru malu garumi var atšķirties. Punkti *A, C, E* neatrodas uz vienas taisnes; punkti *B, D, F* arī neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka $\Delta ACE=\Delta BDF$.

6.9.3. Dota virkne $a_1, a_2, a_3,\ldots$, kur $a_1=a_2=1$ un visiem $n>2$ izpildās

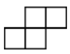
$$a_{n+1}=\left[\frac{2a_n+a_{n-1}}{3}\right]+4.$$

Aprēķini a_{2013}.

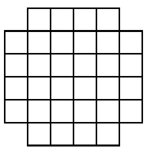
([*x*] ir veselā daļa no *x* – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz *x*; piemēram, $[3]=3$, $[4{,}6]=4$, $[0{,}2]=0$ u.tml.)

6.9.4. Divas komandas savā starpā izspēlējušas vairākas (vairāk nekā vienu) spēles. Par zaudējumu komanda saņem *n* punktus (*n* – naturāls skaitlis), bet par uzvaru *n*+3 punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Pēc spēļu beigām izrādījās, ka vienai komandai ir par vienu uzvaru vairāk nekā otrai. Zināms, ka viena no komandām kopsummā ieguva 92 punktus. Cik punktus ieguva otra komanda?

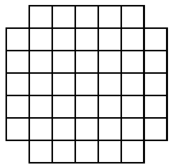
6.9.5. Kādu lielāko skaitu U6.1. zīm. attēloto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta $n\times n$, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n=6$ (skat. U6.2. zīm.), **b)** ja $n=7$ (skat. U6.3. zīm.). Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, U6.1. zīm. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



U6.1. zīm.



U6.2. zīm.



U6.3. zīm.

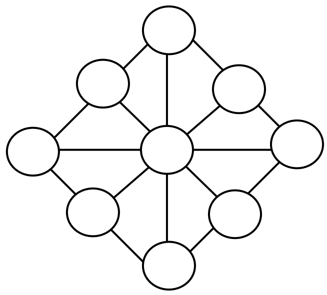
7. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. Piektā klase

7.5.1. Cik reizes diennaktī sakrīt pulksteņa stundu un minūšu rādītāji? (Plkst. 00:00 un 24:00 ieskaitīt vienu reizi.) *Atbildi pamatot!*

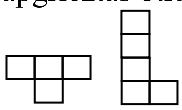
7.5.2. 24-stāvu mājā ir lifts, kuram ir divas pogas. Nospiežot vienu pogu, tas paceļas (ja iespējams) 17 stāvus uz augšu, nospiežot otru – nolaižas 8 stāvus uz leju (ja iespējams). Noskaidro, no kura stāva ar šo liftu var nokļūt uz jebkuru citu stāvu šajā mājā. (Lifts nevar uzbraukt augstāk par 24. stāvu un zemāk par 1. stāvu.)

7.5.3. U7.1. zīm. katrā aplītī ieraksti vienu ciparu, katrā aplītī – citu, tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati.



U7.1. zīm.

7.5.4. No U7.2. zīm. redzamajām figūrām salikt taisnstūri ar laukumu 40 rūtiņas. Figūras nedrīkst pārklāties un katra veida figūra jāizmanto vismaz vienu reizi. (Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas otrādi.)



U7.2. zīm.

7.5.5. Kuba katra skaldne sadalīta četros vienādos kvadrātos. Vai šos kvadrātus var nokrāsot **a)** divās; **b)** trīs krāsās tā, ka kvadrāti, kam ir kopīga mala, ir nokrāsoti dažādās krāsās? Katrs kvadrāts pilnībā ir jākrāso vienā krāsā. *Atbildi pamatot!*

7.6. Sestā klase

7.6.1. Uz tāfeles uzrakstīti desmit skaitļi

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alfons nodzēš jebkurus divus no tiem (apzīmēsim tos ar a un b) un to vietā uzraksta skaitli, kas vienāds ar $a+b+2$. Šo operāciju viņš atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.

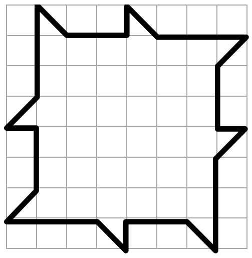
Pamato, ka neatkarīgi no secības, kādā Alfons izpilda darbības, beigās tiek iegūts viens un tas pats skaitlis. Kāds tas ir?

7.6.2. Vai var atrast tādus divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus, viens no kuriem dalās ar 3 un kuru

a) ciparu summas atšķiras par 3;

b) ciparu reizinājumi atšķiras par 3?

7.6.3. Sagriez U7.3. zīm. attēloto figūru 20 vienādās mazākās figūrās (figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas otrādi).



U7.3. zīm.

7.6.4. Vai skaitļus no 100 līdz 200 var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?

7.6.5. Una un Ivo, gājienus izdarot pēc kārtas, kvadrāta ar izmēriem 5×5 rūtiņas trīs **tukšās** vienas rindas vai kolonnas **blakus** rūtiņās ieraksta savu vārdu, katru burtu rakstot citā rūtiņā. Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais ieraksta savu vārdu. Una izdara pirmo gājienu. Kurš spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru?

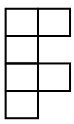
7.7. Septītā klase

7.7.1. Naturālā divciparu skaitlī neviens no cipariem nav 0. Pierādi, ka, dalot šo skaitli ar tā ciparu reizinājumu, dalījums ir vismaz $\frac{11}{9}$.

7.7.2. Doti seši nogriežņi ar garumiem $1\ cm$, $3\ cm$, $5\ cm$, $7\ cm$, $9\ cm$, $11\ cm$. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

7.7.3. Pierādi, ka skaitlis 1234567891011...175176 (pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 176) nav naturāla skaitļa kvadrāts.
(Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi.)

7.7.4. Vai kvadrātā 5×5 rūtiņas var iekrāsot **a)** 6 rūtiņas; **b)** 5 rūtiņas tā, lai atlikušajā daļā nevarētu ievietot nevienu U7.4. zīm. redzamo figūru (tā var būt pagriezta vai apgāzta otrādi)?



U7.4. zīm.

7.7.5. Una un Ivo, gājienus izdarot pēc kārtas, kvadrāta ar izmēriem 6×6 rūtiņas trīs **tukšās** vienas rindas vai kolonnas **blakus** rūtiņās ieraksta savu vārdu, katru burtu rakstot citā rūtiņā. Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais ieraksta savu vārdu. Una izdara pirmo gājienu. Kurš spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru?

7.8. Astotā klase

7.8.1. Atrodi visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1000000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 36 reizes!

7.8.2. Dots trijstūris ABC un punkts P tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta P līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra.

7.8.3. Doti tādi reāli skaitļi t un a, ka $t^2 - t \cdot \sqrt{t} + a = 0$. Pierādi, ka $t \geq 4a$.

7.8.4. Vai regulāru sešstūri var sadalīt **a)** deviņos; **b)** astoņos vienādos daudzstūros?

7.8.5. Rūķītis ir iedomājies skaitļus x_1, x_2, x_3 un x_4, katrs no tiem ir vai nu 0, vai 1. Ja rūķītim pajautā: „Kāds ir *i*-tais skaitlis?” (*i* = 1, 2, 3 vai 4 pēc izvēles), tad viņš pasaka x_i vērtību.

Pierādi, ka ar 3 jautājumiem pietiek, lai uzzinātu, vai virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona.

Skaitļu virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, ja tā ir nedilstoša vai neaugoša (t. i., $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ vai $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$).

7.9. Devītā klase

7.9.1. Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādi, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

7.9.2. Kvadrāta ar izmēriem 4×4 rūtiņas katra rūtiņu virsotne nokrāsota vienā no divām krāsām. Pierādi, ka noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.

7.9.3. Doti četri dažādi cipari, neviens no kuriem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 484. Atrodi dotos četrus ciparus.

7.9.4. Dota skaitļu virkne $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurā $x_0 > 0$ un $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$ visiem $n \geq 0$.

Pierādi, ka $x_{100} > 20$.

7.9.5. Dots izliekts četrstūris. Uzzīmēti četri riņķi, kuru diametri ir četrstūra malas. Pierādi, ka šie riņķi pilnībā pārklāj doto četrstūri.

IETEIKUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

1.1. Pirmā kārta

1.1.1. Pārbaudi katru atbildi!
1.1.2. Kur stundu rādītājs atrodas plkst. 12.00?
1.1.3. Cik reizes putekļusūcējs šķērso pilnu istabas garumu un cik reizes tas šķērso pilnu istabas platumu?
1.1.4. Pārveido visus dotos lielumus mēnešos!
1.1.5. Cik caurumus iegūst, ja lapu saloka vienreiz uz pusēm un izdur vidū caurumu? Un ja to saloka divreiz? Veic eksperimentu, lai pārliecinātos, ka esi visu sapratis pareizi!
1.1.6. Saskaiti, cik rūtiņas ir iekrāsotas un cik rūtiņu ir pavisam! Ievēro, ka, saliekot kopā divas iekrāsotu rūtiņu puses, veidojas viena vesela iekrāsota rūtiņa.
1.1.7. Pārbaudi katru atbildi. Ievēro, ka apgalvojums nav patiess, ja var atrast piemēru, kurā dotais neizpildās.
1.1.8. Noskaidro Gunta Galviņa vecumu!
1.1.9. Kā jāsavieno abi divnieki, lai vēl joprojām varētu savienot trijniekus?
1.1.10. Saskaiti, cik ir atbilžu „jā” un cik ir atbilžu „nē”.

1.2. Otrā kārta

1.2.1. Ievēro darbību secību!
1.2.2. Uzraksti izteiksmi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem! Salīdzini to ar izteiksmi $m + k + 1$.
1.2.3. Saskaiti, cik klucīšus izņēma no katra kuba slāņa.
1.2.4. Pārbaudi katru doto skaitli. Vai to var iegūt kā divu citu doto skaitļu starpību?
1.2.5. Katru doto skaitli pieraksti ar cipariem un aprēķini to summu.
1.2.6. Izrēķini, cik minūšu būs pagājis katrā gadījumā.
1.2.7. Sāc rēķināt uzdevumu no otra gala. Kāds skaitlis būs ierakstīts rūtiņā tieši virs skaitļa 65? Kāds skaitlis būs pa kreisi no jauniegūtā skaitļa?
1.2.8. Ko var secināt no pirmā un otrā uzdevumā dotā punkta? Kurā pusē no ,  un  sejiņām atrodas  sejiņa?

1.3. Trešā kārta

1.3.1. Atceries: $1km = 1000m$, $1m = 100cm$ un $1dm = 10cm$.
1.3.2. Sāc dalīt figūru, piemēram, no kreisā augšējā stūra.
1.3.3. Kāds dzīvnieks atradīsies ierindas 9. vietā, 12. vietā un visās pārējās vietās, kuru kārtas numurs dalās ar 3?
1.3.4. Sadali lielo taisnstūri vairākos tādos trijstūros, kāds ir iekrāsots zīmējumā. Nosaki visa taisnstūra laukumu. Apskati visus gadījumus, kādi var būt taisnstūra malu garumi!
1.3.5. Apskati visus iespējamos variantus, cik reižu pa katru trasi Rūsiņš varēja šļūkt.
1.3.6. Noskaidro, kurš no zēniem fano par Indraši, izmantojot 1., 3. un 4. apgalvojumu.

1.4. Ceturtā kārta

1.4.1. Starp dažiem cipariem var arī neatrasties darbības zīmes, tad šie cipari kopā veidos divciparu skaitli.

1.4.2. Apskati nākamo skaitli pēc 12921, kas ir lasāms no abiem galiem vienādi.

1.4.3. Olu var ievietot vārošā ūdenī arī pēc smilšu pulksteņu pagriešanas – tam nav jānotiek vienlaicīgi.

1.4.4. Sāc likt atsvarus pamīšus uz abiem svaru kausiem, sākot ar smagākajiem.

1.4.5. Aprēķini, cik ir $\frac{1}{5}$ daļa no katras dotās preces cenas.

1.4.6. Ar vienu taisnu griezienu sadali taisnstūri divos trijstūros.

1.4.7. Izsaki visu dzīvnieku garumus kobru garumos, ja kobras garums ir viena kobra. Kāds ir visu 3 dzīvnieku kopējais garums kobrās?

1.4.8. Katru doto skaitli vispirms izdali ar 4, un pēc tam rezultātu reizini ar 3.

1.4.9. Saskaiti, cik pavisam ir strādnieku.

1.4.10. Saskaiti, cik vienādas daļas attēlotas diagrammā. Cik balsis atbilst katrai tādai daļai?

1.4.11. Aprēķini, cik gara ir katra taisnstūra mala.

1.4.12. Aprēķini, cik gara ir kvadrāta mala. Atceries, ka riņķa rādiuss ir puse no riņķa diametra.

1.4.13. Saskaiti, cik kvadrātiņi veido figūras sānu malas, augšējo un apakšējo malu, priekšējo un aizmugurējo malu.

1.4.14. Cik kilogramu sver $\frac{1}{4}$ ziepju gabala?

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. Pirmā kārta

2.1.1. Ievēro, ka $D+D=D$ un ka no diviem četrciparu skaitļiem tiek iegūts piecciparu skaitlis.

2.1.2. **a)** Var.
b) Nevar. Ja Ella ievieto banknotes, kuru vērtība ir nepāra skaitlis, vai viņa var iegūt banknoti, kuras vērtība ir pāra skaitlis?

2.1.3. Ceturto virsotni nokrāso trīs doto punktu veidotā trijstūra iekšpusē.

2.1.4. Apskati, cik dažādos veidos uz šķīvjiem var uzlikt pankūku ar 11 cm diametru. Cik dažādos veidos var izvēlēties šķīvi pankūkai ar 12 cm diametru?

2.1.5. No mākslinieku sarunas secini, kāda matu krāsa ir Baltiņam.

2.2. Otrā kārta

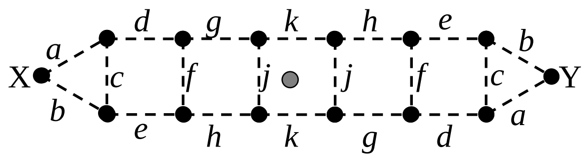
2.2.1. Kāds ir lielākais cipars, ar kādu var sākties šis piecciparu skaitlis? Kāda būs pārējo četru ciparu summa?

2.2.2. Aprēķini katru divu skaitļu summu! Cik dažādas vērtības var iegūt? Cik diagonāļu ir izliektam sešstūrim?

2.2.3. Apliec aizslietņus apkārt prožektoram. Mēģini to izdarīt ar pēc iespējas mazāk aizslietņiem.

2.2.4. Kurā rūtiņā var atrasties skaitlis 1? Un kurās skaitlis 6?

2.2.5. Izmanto simetriju pret figūras centru (skat. I2.1. zīm.).



U2.3. zīm.

2.3. Trešā kārta

2.3.1. No pirmā nosacījuma aprēķini skaitļa N desmitu skaitu. Izmantojot to, no otrā nosacījuma atrodi visas skaitļa N vienu vērtības.

2.3.2. Izmanto trijstūra nevienādību: trijstūra katras malas garums ir mazāks, nekā abu pārējo malu garumu summa.

2.3.3. Ievērojot uzdevuma nosacījumus, turpini virknes, kuru pirmais skaitlis ir 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

2.3.4. Sāc vilkt lauzto līniju no viena kvadrāta stūra.

2.3.5. Jā, var gadīties. Atrodi vienu piemēru!

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. Rēķini pakāpeniski no lejas uz augšu – no $4-\frac{1}{5}$.

2.4.2. Cik akmeņu būs katrā kaudzītē? Kā šajās kaudzītēs varētu sadalīt sešus pēc kārtas esošus akmeņus?

2.4.3. Kāds ir lielākais skaits diagonāļu, kas iziet no vienas septiņstūra virsotnes un kuras var saturēt kāda viena mazā daudzstūru malas?

2.4.4. Ievēro, ka Andris un Bērtulis ceļā ar kājām un ar velosipēdu pavadīja vienādu laiku. Lai vieglāk uztvertu uzdevuma nosacījumus, izveido shematisku zīmējumu, iekļaujot visus nozīmīgos draugu satikšanās punktus un ceļa galamērķus.

2.4.5. Izrēķini, kādus vairāku rombu stūrus var salikt kopā, lai noklātu vienu savienojuma vietu ar rombiem „bez caurumiem”. Izmanto faktu, ka pilnā riņķī ir $360°$. Lai izveidotos skaists raksts, dažus mozaīkas fragmentus izkrāso.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Sadali skaitli 213 pirmreizinātājos! Kādām prasībām jāizpildās, lai iegūtais 27-ciparu skaitlis dalītos ar skaitļa 213 dalītājiem?

2.5.2. Izmanto trijstūra nevienādību: trijstūra katras malas garums ir mazāks, nekā abu pārējo malu garumu summa.

2.5.3. Cik stāviem jābūt piramīdā, lai izpildītos (4) nosacījums? Naturālu skaitļu no 1 līdz n summu aprēķina šādi: $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Šo formulu iegūst, vispirms aprēķinot šīs summas locekļu vidējo vērtību. To dara, saskaitot summas pirmo un pēdējo locekli un izdalot ar 2: $\frac{(1+n)}{2}$. Tā kā šajā summā ir n locekļu, tad tās vērtību var aprēķināt, locekļu vidējo vērtību pareizinot ar n: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

2.5.4. Apskati, kādi ir doto skaitļu atlikumi, dalot tos ar 3. Tabulā esošos skaitļus drīkst aizstāt ar šiem atlikumiem.

2.5.5. Apzīmē brāļu saņemtos naudas daudzumus ar dažādiem burtiem un, izmantojot tos, sastādi uzdevuma nosacījumiem atbilstošus vienādojumus. Atsevišķi apskati katru gadījumu: vai iespējams, ka Jānis ir 1. brālis, Mārtiņš – 2.; Jānis – 1., Mārtiņš – 3. utt.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. Pirmā nodarbība

3.1.1. Pieraksti uzdevuma nosacījumus ar vienādojumu sistēmu!

3.1.2. Ar kādiem pirmskaitļiem dalās skaitlis, ja tas dalās ar 15? Kādam jābūt skaitļa pēdējam un pirmajam ciparam? Kādam jābūt otrajam ciparam?

3.1.3. Kādu daļu pārtikas iepakojuma izēd katrs pārgājiena dalībnieks?

3.1.4. Kādi naturāli skaitļi var būt *b* vietā? Kādai jābūt vienādojuma kreisās puses izteiksmei?

3.1.5. Izmanto to, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

3.1.6. Izgatavo figūras no papīra. Kādi var būt taisnstūra izmēri?

3.1.7. a) Dotajā darbības ∇ definīcijā a vietā ievieto 2 un b vietā ievieto 5.
b) Vispirms aprēķini iekavās esošās izteiksmes vērtību!
c) Izsaki $2\nabla x$, izmantojot doto darbības definīciju!

3.1.8. Kādam jāizskatās korķim no priekšas, augšas un sāniem?

3.1.9. Var braukt vairākas reizes.

3.1.10. Var izmantot arī 80 litru kannas.

3.2. Otrā nodarbība

3.2.1. Aplūko skaitļa dalāmību ar 3!

3.2.2. Apskati kopējo uz taisnēm esošo skaitļu summu!

3.2.3. Parādi, ka astoņus nogriežņus tā uzzīmēt var. Pamato, ka septiņus nogriežņus tā uzzīmēt nevar, apskatot kopējo krustpunktu skaitu!

3.2.4. Kādu daļu no distances veica Raivis, kamēr Didzis noskrēja $\frac{1}{6}$ no visas distances? Cik reizes Raivja ātrums ir lielāks nekā Didža ātrums?

3.2.5. Kāds ir lielākais un mazākais iespējamais virsotņu skaits? Katram virsotņu skaitam uzzīmē atbilstošu zīmējumu!

3.2.6. Nosaki regulāra piecstūra katra leņķa lielumu un leņķu lielumus trijstūrī *AEF*!

3.2.7. Apskati dotā skaitļa dalāmību ar 9 un 8!

3.2.8. Atceries: ja taisnstūra malu garumi ir *a* un *b,* tad tā laukums ir $a \cdot b$ un perimetrs ir $2 \cdot (a+b)$.

3.2.9. Atrodi divus nosacījumus, kas ļauj skaidri noteikt vienu meiteņu pāri!

3.2.10. Kāda darbība no situācijas, kad abi spoki klusē, nākamajā minūtē novestu pie tādas pašas situācijas?

3.3. Trešā nodarbība

3.3.1. Kādam jābūt skaitļa pirmajam un pēdējam ciparam?

3.3.2. Katrā kolonnā jābūt 4 žetoniem.

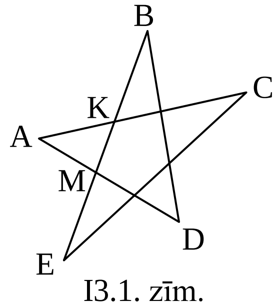
3.3.3. Cik komplimentu tika izteikti kopā?

3.3.4. Vai pēc Malvīnes aprakstīto darbību veikšanas iegūtais skaitlis dalās ar 3?

3.3.5. Aprēķini Eināra virknes pirmos locekļus! Vai vari saskatīt kādu sakarību?

3.3.6. Prasīto var izdarīt visos gadījumos.

3.3.7. Pierādi, ka trijstūris *AMK* ir vienādsānu (skat. I3.1. zīm.).



I3.1. zīm.

3.3.8. Vienmēr var uzvarēt Līga.

3.3.9. Iegūsti kartīti ar skaitli 2011!

3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Apskati zivtiņas peldējumu taisnstūra paralēlskaldnī!

3.4.2. Tos trijstūrus, kuriem viena virsotne ir uz leju, nokrāso pelēkus!

3.4.3. Divi šī skaitļa cipari ir vienādi ar 1. Kāds var būt trešais cipars?

3.4.4. Jā, tā var gadīties.

3.4.5. Parādi, ka kvadrātā var ievietot 12 figūras un pierādi, ka nevar ievietot 13 figūras!

3.4.6. Uzdevuma risinājumā jāizmanto fakts, ka trijstūra *ABC* ārējais leņķis pie virsotnes *A* ir vienāds ar trijstūra iekšējo leņķu *B* un *C* summu.

3.4.7. Meklētais veselais skaitlis ir $a+b+c$.

3.4.8. a) gadījumā skaitļa veselā daļa ir 12, bet b) gadījumā – 6.

3.4.9. Cik punktus maksimāli var iegūt viena komanda?

3.4.10. Sanumurē alas no 1 līdz *n* un apskati gadījumus, kad Džerijs atrodas vai nu alā ar pāra, vai nepāra numuru!

3.5. Piektā nodarbība

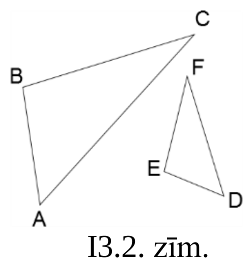
3.5.1. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!

3.5.2. Izmanto trijstūra nevienādību: trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa.

3.5.3. Lai divu veselu skaitļu dalījums būtu vesels skaitlis, dalāmajam jādalās ar dalītāju.

3.5.4. Kādus ciparus un skaitļus nevarēs izrunāt katrs no zēniem?

3.5.5. Izmanto līdzīgu trijstūru īpašības. Divus trijstūrus sauc par līdzīgiem, ja to atbilstošie leņķi ir vienādi un atbilstošās malas ir proporcionālas. Piemēram, ja trijstūris *ABC* ir līdzīgs trijstūrim *DEF* (skat. I3.2. zīm.), tad $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$, $\angle CAB = \angle FDE$ un $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD}$.



I3.2. zīm.

3.5.6. Apskati lielāko un mazāko iespējamo skaitļu summu!

3.5.7. Divu skaitļu reizinājuma pēdējo ciparu nosaka tikai šo skaitļu pēdējie cipari.

3.5.8. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!
3.5.9. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!
3.5.10. Kuru atsvaru kārtas numuri sakrīt un kuru atšķiras no atsvaru masām, ja noslēpts n-tais atsvars?

3.6. Sestā nodarbība

3.6.1. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!
3.6.2. Pietiek izsvītrot 3 reizinātājus.
3.6.3. Kur atradās Sivēntiņš, kad Vinnijs Pūks ieradās pie Ēzelīša I-ā?
3.6.4. Vai var mainīties to monētu skaita paritāte, kas atrodas ar ģērboni uz augšu?
3.6.5. Stari leņķi *MON* var sadalīt gan 3 daļās, kuras visas ir vienādas, gan tādās, kuras visas nav vienādas. Apskati visus izvietojumus!
3.6.6. Apskati divus gadījumus: 1) n ir pāra skaitlis; 2) n ir nepāra skaitlis.
3.6.7. Jā, var.
3.6.8. Izkrāso trijstūrīšus līdzīgi kā šaha galdiņu!
3.6.9. Cik rūķu dzīvo uz šīs salas?
3.6.10. Lai atrisinātu uzdevumu, pietiek apskatīt 5 lādes.

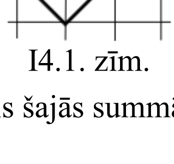
4. LATVIJAS 26. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. Piektā klase

4.5.1. Apzīmē ar simboliem, cik daudz latu par katru no grāmatām saņems tās autori. Izdomā sakarību, ņemot vērā to, ka Naf-Nafs jau ir saņēmis savu honorāru. Kādu daļu saņems Vilks?
4.5.2. Sadali torti četros mazākos tādas pašas formas gabalos, kāda ir torte!
4.5.3. Cik pilnu nedēļu ir 1000 dienās?
4.5.4. Kāda ir visu desmit ciparu summa? Apskati visas iespējamās C vērtības un tām atbilstošos skaitļus A un B!
4.5.5. Ieraksti katrā rūtiņā skaitli, kas norāda, cik dažādos veidos tur var nonākt no rūtiņas A!

4.6. Sestā klase

4.6.1. Sadali skaitli 315 pirmreizinātājos.
4.6.2. Cik reizes lielāku tortes daļu Sivēntiņš saņēma no Vinnija Pūka, salīdzinot ar to, kas Sivēntiņam jau bija?
4.6.3. Apskati abus iespējamos gadījumus:1) divu īsāko malu un vienas garākās malas garumu summa ir 2012; 2) divu garāko malu un vienas īsākās malas garumu summa ir 2012.
4.6.4. Sadali torti tādos gabaliņos, kā parādīts I4.1. zīm.



I4.1. zīm.

4.6.5. Ievēro, ka lielākais saskaitāmais šajās summās nepārsniedz 10.

4.7. Septītā klase

4.7.1. Kāda var būt skaitītāja lielākā vērtība, lai daļas vērtība nepārsniegtu $\frac{1}{7}$?

4.7.2. Lauztu līniju, kas apmierina b) gadījuma prasības, var iegūt no a) gadījuma, nemainot krustpunktu atrašanās vietu.

4.7.3. Parādi, kā ar šaha zirdziņu apstaigāt taisnstūri ar izmēriem 3×4 rūtiņas! Pamato, ka taisnstūri ar mazāku laukumu nav iespējams apstaigāt!

4.7.4. Ko rādīs abi televīzijas kanāli pēc katrām 28 minūtēm no filmas sākuma?

4.7.5. a) Jā, var; **b)** nē, nevar.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Cik no šiem skaitļiem dalās ar 5, cik ar 7 un cik ar 35?

4.8.2. Visu uzrakstīto skaitļu summu apzīmē ar *S*, uzrakstīto skaitļu vidējo aritmētisko apzīmē ar k_1, pēc skaitļa 11 nodzēšanas, atlikušo skaitļu vidējo aritmētisko apzīmē ar k_2. Izdomā sakarības starp šiem lielumiem!

4.8.3. Pagarini *CA*, lai veidojas taisleņķa trijstūris *CFB* ar taisno leņķi *F*.

4.8.4. Kāds ir tūrista lielākais un mazākais iespējamais pārgājienā veiktais attālums?

4.8.5. Cik dažādos veidos var no katra trijstūra nokļūt uz nākamo trijstūri?

4.9. Devītā klase

4.9.1. Izmantojot aritmētiskās progresijas definīciju, izsaki doto skaitļu vērtības ar a un f, kur f ir aritmētiskās progresijas diference.

4.9.2. Apzīmē leņķus $\angle ABC = x$, $\angle BAC = y$ un izsaki kāda trijstūra iekšējo leņķu summu ar *x* un *y*.

4.9.3. Sadali skaitli 2013 pirmreizinātājos. Izdomā, cik reizes šī skaitļa pirmreizinātāji ietilpst skaitlī 2012!.

4.9.4. Pierādi no pretējā. Izmantojiet krāsošanas metodi un izkrāsojiet tabulu piecās krāsās.

4.9.5. Pierādi, ka a) gadījumu var, bet b) nevar. Apzīmē ar *a* to mēnešu skaitu, kuros ir 28 dienas, ar *b* – to, kuros 30 dienas, un ar *c* – to, kuros 31 diena. Izdomā, kas notiek gadījumā, ja gadā ir 11 mēneši un 13 mēneši.

5. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

5.5. Piektā klase

5.5.1. Jā, var, atrodi piemēru!

5.5.2. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!

5.5.3. Kādi divciparu skaitļi, ko var izveidot no dotajiem cipariem, dalās ar 7? Vai sešciparu skaitlis, kas izveidots no šiem divciparu skaitļiem, uzrakstot tos vienu aiz otra, dalīsies ar 7?

5.5.4. Vai piecstūra virsotnēs var būt ierakstīti pirmskaitļi?

5.5.5. Ievēro, ka nogrieznim ir divi galapunkti!

5.6. Sestā klase

5.6.1. Mēģini uzdevumu atrisināt patstāvīgi!
5.6.2. a) Parādi piemēru, ka prasītais ir iespējams! b) Pierādi, ka prasītais nav iespējams!
5.6.3. Lai riņķa līnija tieši vienā punktā krustotu malu, vienai virsotnei jāatrodas tās iekšpusē, bet blakusesošajai – ārpusē.
5.6.4. Priekšpēdējo un pēdējo ciparu ņem attiecīgi 2 un 5.
5.6.5. Jā, var iekrāsot gan 6, gan 7 rūtiņas.

5.7. Septītā klase

5.7.1. Izdomā, ar ko pārī var būt katrs skaitlis! Atrodi skaitli, kurš var būt pārī tieši ar vienu citu skaiti!
5.7.2. Ievēro, ka izteiksme $x(x+1)(x+2)$ vienmēr dalās ar 3.
5.7.3. a) Nē, neeksistē. Ievēro: ja 3 blakus esošas daudzstūra virsotnes atrodas uz vienas taisnes, tad vidējā virsotne nemaz nav šī daudzstūra virsotne. b) Jā, eksistē, parādi piemēru!
5.7.4. Nē, nevar. Pierādījumā izmanto skaitļu paritāti!
5.7.5. Sadali doto trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2.

5.8. Astotā klase

5.8.1. Izmanto formulu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
5.8.2. Pierādi, ka trijstūris MBC ir vienādmalu.
5.8.3. Cik ir tādu skaitļu, kuru pierakstā ir tikai nepāra cipari?
5.8.4. Viens no veidiem, kā prasīto izdarīt, ir izmantot pakāpju īpašību $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
5.8.5. Kā būtu jārīkojas, ja pirmajā pozīcijā stāvētu meitene, nevis zēns?

5.9. Devītā klase

5.9.1. Atrodi skaitli, kuram piemīt uzdevumā prasīta īpašība!
5.9.2. Aprēķini trijstūra *ABC* laukumu divos dažādos veidos!
5.9.3. Apzīmē taisnstūra malas ar a un b. Pārveido izteiksmi $ab = 2a + 2b$ tā, lai vienā vienādības pusē būtu divu izteiksmju reizinājums, bet otrā – naturāls skaitlis!
5.9.4. Pamato, ka mazākā a_i, $i = 1, 2, ..., 2013$, vērtība ir 2. Ievēro, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas:
1) atrast izteiksmes mazāko vērtību – uzrādīt piemēru, ka izteiksme var pieņemt šo vērtību;
2) pamatot, ka mazāku vērtību iegūt nevar.
5.9.5. Izdomā, cik dažādus „atrisināto/neatrisināto uzdevumu" komplektus var izveidot!

6. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. Devītā klase

6.9.1. Izskati visus iespējamos gadījumus, sākot ar tūkstošus veidojošo ciparu!
6.9.2. Pierādi un izmanto citu trijstūru vienādību!
6.9.3. Izmanto matemātisko indukciju!
6.9.4. Izsaki katras komandas iegūto punktu skaitu ar n un a, kur a ir komandas-zaudētājas uzvarēto spēļu skaits, un noskaidro kura no abām komandām varēja iegūt 92 punktus!
6.9.5. Katra gadījuma atrisinājumam ir divas daļas: jāatrod lielākais skaits figūru, ko var izgriezt (piemērs), un jāpierāda, ka nevar izgriezt vairāk figūru.

7. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. Piektā klase

7.5.1. Cik reizes pulksteņa rādītāji sakrīt laika posmā no plkst. 1:00 – 11:00? Cik reizes no plkst. 11:00 – 13:00?
7.5.2. Ievēro, ka, izmantojot liftu, ne no viena stāva nav iespējams nokļūt uz 17. stāvu!
7.5.3. Izmanto, piemēram, ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kādai jābūt ciparu summai, kas atrodas uz vienas taisnes?
7.5.4. Saliec dotās figūras taisnstūrī ar izmēriem 5×8 rūtiņas!
7.5.5. Apskati kvadrātiņus, kas „satiekas” pie vienas kuba virsotnes. Kāds ir mazākais krāsu skaits, kas jāizmanto, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi?

7.6. Sestā klase

7.6.1. Cik šādas operācijas tiks veiktas?
7.6.2. Ja skaitlis dalās ar 3, tad tā ciparu summa dalās ar 3.
7.6.3. Cik rūtiņu lielai jābūt vienai mazajai figūriņai?
7.6.4. Nē, nevar. Vai uzdevuma nosacījumus var izpildīt, ja divās grupās jāsadala visi pirmskaitļi no 100 līdz 200?
7.6.5. Una vienmēr var uzvarēt, pirmajā gājienā viņai jāieraksta savs vārds tā, lai burts N būtu ierakstīts kvadrāta centrālajā rūtiņā. Izdomā, kā Unai jārīkojas pēc katra Ivo gājiena!

7.7. Septītā klase

7.7.1. Pārraksti divciparu skaitli $\overline{ab}$ kā $10a+b$.
7.7.2. Lai 3 nogriežņi varētu būt trijstūra malas, tiem jāapmierina trijstūra nevienādība: katru divu malu garumu summai jābūt lielākai nekā trešās malas garumam.
7.7.3. Izmanto dalāmības pazīmes ar 8 un 16:

- skaitlis dalās ar 8, ja ar 8 dalās skaitļa pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis;
- skaitlis dalās ar 16, ja ar 16 dalās skaitļa pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis.

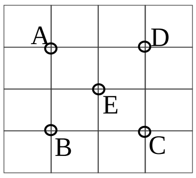
7.7.4. Prasīto var izdarīt gan a), gan b) gadījumā.
7.7.5. Izmanto centrālo simetriju!

7.8. Astotā klase

7.8.1. Uzraksti meklēto skaitli formā $a \cdot 10^k + b$.
7.8.2. Izmanto trijstūra nevienādību!
7.8.3. Apskati kvadrātvienādojuma diskriminantu!
7.8.4. Gan a), gan b) gadījumā prasīto var izdarīt.
7.8.5. Sākumā pajautā rūķītim, kādi ir skaitļi x_1 un x_3.

7.9. Devītā klase

7.9.1. Ievēro, ka, sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata!
7.9.2. Apskati punktus *A*, *B*, *C*, *D* un *E* (skat. I7.1. zīm.)!



I7.1. zīm.

7.9.3. Aprēķini doto četru ciparu summu!
7.9.4. Aplūko virkni $y_n = x_n^2$.
7.9.5. Dotajā četrstūrī *ABCD* novelc diagonāli *AC* un perpendikulus *BE* un *DF* pret šo diagonāli!

ATRISINĀJUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

1.1. Pirmā kārta

1.1.1. Atbilde: C.

Risinājums. Apskatām katru no dotajām vienādībām:

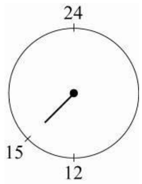
A $18+32=50$ un $26+24=50$. Redzams, ka abu izteiksmju vērtības ir vienādas, tāpēc vienādība $18+32=26+24$ ir patiesa.

B $4\cdot 3:2-2=12:2-2=6-2=4$ un $(11+5):4=16:4=4$. Abu izteiksmju vērtības ir vienādas, tāpēc vienādība $4\cdot 3:2-2=(11+5):4$ ir patiesa.

C $25-5\cdot 2=25-10=15$ un $25\cdot 2-10=50-10=40$. Redzams, ka abu izteiksmju vērtības atšķiras, tāpēc vienādība $25-5\cdot 2=25\cdot 2-10$ nav patiesa: $25-5\cdot 2\neq 25\cdot 2-10$.

1.1.2. Atbilde: E.

Risinājums. Pusdienlaikā jeb plkst. 12.00 stundu rādītājs būs veicis pusi no pilna apgrieziena. Pulksten 15.00 tas būs pavirzījies uz priekšu vēl par 3 stundām jeb $\frac{1}{8}$ no pilna apgrieziena (skat. A1.1. zīm.).



A1.1. zīm.

1.1.3. Atbilde: C.

Risinājums. Putekļusūcēja veiktais ceļš ir vienāds ar 4 istabas platumiem un 1 istabas garumu, t. i., $3\cdot 4+6\cdot 1=18$ (m).

1.1.4. Atbilde: B.

Risinājums. Ievērojam, ka 3 gados ir $3\cdot 12=36$ mēneši.

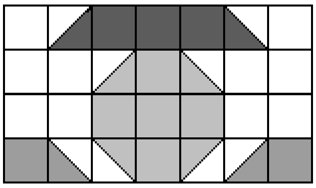
3 gadi 5 mēneši – 8 mēneši = 36 mēneši + 5 mēneši – 8 mēneši = = 41 mēnesis – 8 mēneši= 33 mēneši

1.1.5. Atbilde: C.

Risinājums. Papīra lapa uz pusēm tiek pārlocīta 4 reizes. Ja papīra lapu pārlocītu uz pusēm vienreiz un izdurtu caurumu, tad atlokot vaļā, būtu 2 caurumi. Katra nākamā locīšanas reize dubulto iepriekš iegūto caurumu skaitu. Tāpēc pēc 4 locīšanas reizēm lapā būs $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ caurumi.

1.1.6. Atbilde: A.

Risinājums. Taisnstūris sastāv no $4 \cdot 7 = 28$ vienādām rūtiņām. Tieši 14 rūtiņas ir iekrāsotas (skat. A1.2. zīm.) – tātad iekrāsota ir $\frac{1}{2}$ no taisnstūra.



A1.2. zīm.

1.1.7. Atbilde: B.

Risinājums

Pirmais apgalvojums nav patiess, jo, piemēram, $3-1=2$, kas nav nepāra skaitlis.

Arī otrais apgalvojums nav patiess, jo arī divu nepāra skaitļu starpība var būt pāra skaitlis, piemēram, $3-1=2$.

Trešais apgalvojums nav patiess, jo $3:2 \neq 6$.

Vienīgais patiesais apgalvojums ir ceturtais. Apzīmēsim mazinātāju ar *x*. Pēc uzdevuma noteikumiem mazināmais ir par 3 lielāks, nekā mazinātājs, tātad mazināmais ir $x+3$ un starpība $(x+3)-x=3$.

Tātad no dotajiem apgalvojumiem tieši viens ir patiess.

1.1.8. Atbilde: B.

Risinājums. Apzīmēsim hokejistu vecumus ar to uzvārda pirmajiem burtiem.

Iegūsim četras vienādības:

$J+G+B+I=105;$

$B+I+J=79;$

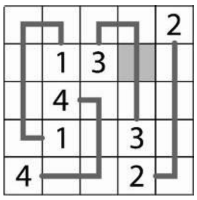
$I+G=59;$

$I+J=58.$

No pirmā vienādojuma izsakām Māra Jučera, Māra Bičevska un Raita Ivanāna gadu summu: $J+B+I=105-G$. Ievērojam, ka arī otrajā vienādojumā ir izteikta šo pašu trīs hokejistu gadu summa: $B+I+J=79$. Tātad $105-G=79$ jeb $G=105-79=26$ – Guntim Galviņam ir 26 gadi. Tagad varam uzzināt, cik gadu ir Raitim Ivanānam. No trešās vienādības, zinot *G* vērtību: $I=59-G=59-26=33$. No ceturtās vienādības varam izteikt Māra Jučera vecumu: $J=58-I=58-33=25$.

1.1.9. Atbilde: B.

Risinājums. Mīklas atrisinājumu skat. A1.3. zīm.



A1.3. zīm.

1.1.10. Atbilde: B.

Risinājums. Atbildes „nē” ir $9+21+12=42$, bet atbildes „jā” ir $18+6+12=36$. Tātad atbilžu „nē” ir vairāk.

1.2. Otrā kārta

1.2.1. Atbilde: B.

Risinājums. Ievērojot darbību secību, pakāpeniski iegūstam:

$7\cdot 8+8\cdot 7+3\cdot 0=56+56+0=112$

1.2.2. Atbilde: D.

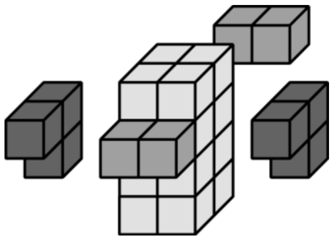
Risinājums

Sākumā krājkasītē un makā kopā bija $m+k$ lati. Ja Sintija makā ielika 3 latus, bet no krājkasītes izņēma 2 latus, tad kopējais naudas daudzums krājkasītē un makā palielinājās par $3-2=1$ latu, tātad makā un krājkasītē kopā palika $m+k+1$ lats.

1.2.3. Atbilde: D.

Risinājums. Zīmējumā redzami visi ārā izņemtie klucīši (skat. A1.4. zīm.).

Tātad ārā izņēma $4\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot 2=16+6+4=22+4=26$ klucīšus.



A1.4. zīm.

1.2.4. Atbilde: C.

Risinājums. Tā kā skaitlis 5 ir lielākais no visiem dotajiem, tad tas nevar būt divu citu doto skaitļu starpība. Pārējie skaitļi ir divu citu doto skaitļu starpība: $3=4-1;\ 1=5-4;\ 4=5-1$.

1.2.5. Risinājums

$6050+303=6353$

$2000+5023=7023$

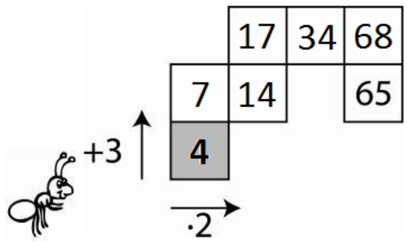
1.2.6. Risinājums

12 h 12 min $\boxed{=}$ 12 h 12 min

5 h 5 min $\boxed{>}$ 4 h 54 min

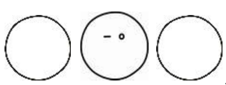
1.2.7. Atbilde: 4.

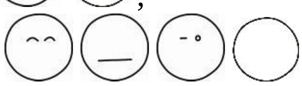
Risinājums. Skat. A1.5. zīmējumu.

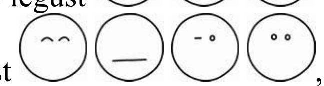
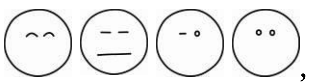
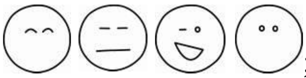


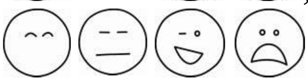
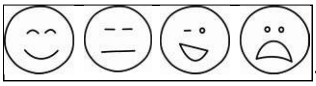
A1.5. zīm.

1.2.8. Risinājums

No 1) iegūst ;

no 1) un 2) iegūst ;

no 5) iegūst , tātad , no 3) iegūst ;

no 4) iegūst , tātad .

1.3. Trešā kārta

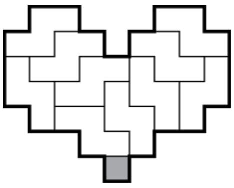
1.3.1. Atbilde: 60004 cm.

Risinājums. Atceries, ka 1 km = 1000 m un 1 m = 100 cm, kā arī to, ka 1 dm = 10 cm.

$$\left(\left(\frac{1}{10}\text{ no }3\,\text{km}\right)+\left(\frac{1}{5}\text{ no }1\,\text{dm}\right)\right)\cdot 2=\left(\left(\frac{1}{10}\text{ no }3000\,\text{m}\right)+\left(\frac{1}{5}\text{ no }10\,\text{cm}\right)\right)\cdot 2=$$

$$=(300\,\text{m}+2\,\text{cm})\cdot 2=(30000\,\text{cm}+2\,\text{cm})\cdot 2=30002\,\text{cm}\cdot 2=60004\,\text{cm}$$

1.3.2. Risinājums. Viens no iespējamajiem variantiem (skat. A1.6. zīm.):



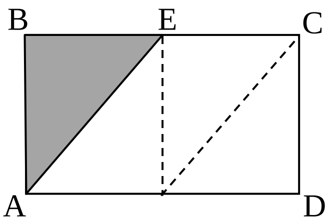
A1.6. zīm.

1.3.3. Atbilde: .

Risinājums. Virkne atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem, tāpēc tie dzīvnieki, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir . Tā kā $2013:3=671$, t.i., dalās ar 3, tad ierindas 2013. vietā atradīsies .

1.3.4. Atbilde. Taisnstūra laukums ir 24 rūtiņas, perimetrs ir 22 vienības.

Risinājums. Sadalām doto taisnstūri četros vienādos trijstūros (skat. A1.7. zīm.). Tā kā ir dots, ka viena tāda trijstūra laukums ir 6 rūtiņas, tad viss taisnstūra laukums ir $6\cdot 4=24$ rūtiņas.



A1.7. zīm.

Aplūkojam visas iespējas, kādi var būt taisnstūra malu garumi:

- 1 un 24 ($1\cdot 24=24$) – neder, jo uzdevumā dots, ka visas malas garākas nekā 1 rūtiņas malu garums;
- 2 un 12 ($2\cdot 12=24$) – neder, jo uzdevumā teikts, ka visas taisnstūra malas nav pāra skaitļi;

- 3 un 8 ($3 \cdot 8 = 24$) – der;
- 4 un 6 ($4 \cdot 6 = 24$) – neder, jo uzdevumā teikts, ka visas taisnstūra malas nav pāra skaitļi.

Kā redzams, der tikai gadījums, kad taisnstūra izmēri ir 3×8. Tātad taisnstūra perimetrs ir $2 \cdot (3+8) = 22$ vienības.

1.3.5. Atbilde: Pa trasi L Rūsiņš šļūca 3 reizes, bet pa trasi A – 1 reizi.

Risinājums. Tā kā Rūsiņš nošļūca 4 reizes, tad iespējamie varianti, kā viņš varēja šļūkt pa lēno un ātro trasi, ir

- 0 reizes pa L un 4 reizes pa A (neder, jo $4 \cdot 14 = 56 \neq 83$);
- 1 reizi pa L un 3 reizes pa A (neder, jo $23 + 3 \cdot 14 = 65 \neq 83$);
- 2 reizes pa L un 2 reizes pa A (neder, jo $2 \cdot 23 + 2 \cdot 14 = 74 \neq 83$);
- 3 reizes pa L un 1 reizi pa A (der, jo $3 \cdot 23 + 14 = 83$);
- 4 reizes pa L un 0 reizes pa A (neder, jo $4 \cdot 23 = 92 \neq 83$).

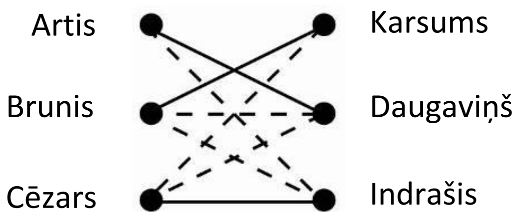
Tātad der tikai gadījums, ka pa trasi L Rūsiņš šļūca 3 reizes, bet pa trasi A – 1 reizi.

1.3.6. Atbilde. Artis fano par Daugaviņu, Brunis – par Karsumu un Cēzars – par Indraši.

Risinājums. Zēnus un hokejistus apzīmēsim ar punktiem.

Ar nepārtrauktu līniju attēlosim sakarību, ka zēns fano par hokejistu, bet ar pārtrauktu – ka nefano.

Attēlojam pirmo faktu „Artis nefano par Indraši” (skat. A1.8. zīm.);
no trešā un ceturtā apgalvojuma izriet, ka arī Brunis nefano par Indraši;
tā kā par Indraši nefano ne Artis, ne Brunis, tad par viņu fano Cēzars;
tā kā Cēzars fano par Indraši, tad viņš nefano ne par Karsumu, ne Daugaviņu;
no otrā un piektā apgalvojuma izriet, ka Brunis nefano par Daugaviņu, tātad Brunis fano par Karsumu, bet Artis fano par Daugaviņu.



A1.8. zīm.

1.4. Ceturtā kārta

1.4.1. Risinājums. Piemēram, $(12:3+4) \cdot 5 = 40$. Iespējami arī citi risinājumi.

1.4.2. Atbilde. Der, piemēram, atbildes 0 km/h, 55 km/h, 105 km/h, 155 km/h, 205 km/h.

Risinājums. Nākamie skaitļi pēc 12921, kas vienādi lasāmi no abiem galiem, ir 13031, 13131, 13231, 13331, utt.

Ja automašīna visu laiku stāvēja uz vietas, tad tās odometra rādījums visu laiku bija 12921, nobrauktais attālums 0 km, līdz ar to vidējais ātrums bija 0 km/h.

Ja odometra rādījums pēc 2 stundām ir 13031, tad 2 stundu laikā automašīna nobraukusi $13031 - 12921 = 110$ km, tātad vidējais braukšanas ātrums bija $110 : 2 = 55$ km/h.

Ja odometra rādījums pēc 2 stundām ir 13131, tad 2 stundu laikā automašīna nobraukusi $13131 - 12921 = 210$ km, tātad vidējais braukšanas ātrums bija $210 : 2 = 105$ km/h.

Ja odometra rādījums pēc 2 stundām ir 13231, tad 2 stundu laikā automašīna nobraukusi $13231-12921=310$ km, tātad vidējais braukšanas ātrums bija $310:2=155$ km/h.

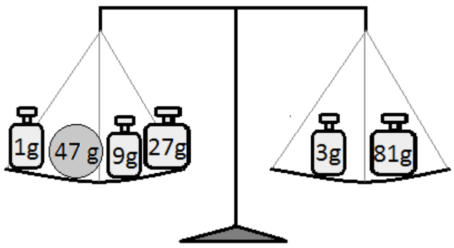
Ja odometra rādījums pēc 2 stundām ir 13331, tad 2 stundu laikā automašīna nobraukusi $13331-12921=410$ km, tātad vidējais braukšanas ātrums bija $410:2=205$ km/h.

Tā kā tik lielu vai lielāku ātrumu parastas automašīnas attīstīt nevar, nākamos skaitļus apskatīt nav vērts.

Piezīme. Uzdevums ir pareizi atrisināts, ja norādīts vismaz viens no šiem variantiem.

1.4.3. Risinājums. Abus smilšu pulksteņus vienlaicīgi apgriež. Brīdī, kad pagājušas 3 min. (iztecējis 3 min. pulkstenis), olu ievieto vārošā ūdenī un vāra, līdz iztek 7 min. pulkstenis; tajā brīdī olu izņem no ūdens. Tātad ola ūdenī ir bijusi 7 min. – 3 min. = 4 min.

1.4.4. Risinājums. Uz viena svaru kausa uzliek doto lodīti (47 g) un atsvarus, kas sver 27 g, 9 g un 1 g. Uz otra svaru kausa uzliek atsvarus, kas sver 81 g un 3 g (skat. A1.9. zīm.). Tiešām, $47+27+9+1=81+3=84$.



A1.9. zīm.

1.4.5. Atbilde:

Preces sākotnējā cena	35 Ls	120 Ls	80 Ls	90 Ls	520 Ls	480 Ls
Cena pēc samazināšanas	28 Ls	96 Ls	64 Ls	72 Ls	416 Ls	384 Ls

Risinājums

$35-35:5=35-7=28\text{Ls}$

$120-120:5=120-24=96\text{Ls}$

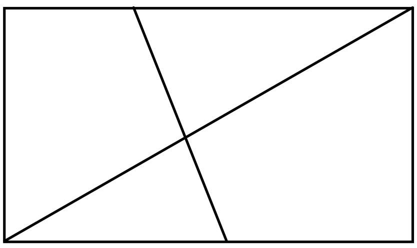
$80-80:5=80-16=64\text{Ls}$

$90-90:5=90-18=72\text{Ls}$

$520-520:5=520-104=416\text{Ls}$

$480-480:5=480-96=384\text{Ls}$

1.4.6. Atbilde. Skat., piemēram, A1.10. zīmējumā.



A1.10. zīm.

1.4.7. Atbilde. Kobra ir 1,5 *m* gara, krokodils ir 10 *m* garš, bet zalktis ir 7,5 *m*.

Risinājums. Izteiksmi visu dzīvnieku garumus kobru garumos. Kobras garums ir viena kobra. Krokodila garums ir 6 kobras un vēl 1 *m*. Zalkša garums ir 5 kobras. Ja visus dzīvniekus saliktu rindā, to kopējais garums būtu:

$kobra + krokodils + zalktis = kobra + 6 \cdot kobra + 1m + 5 \cdot kobra = 12 \cdot kobra + 1m$.

Uzdevumā teikts, ka visu dzīvnieku kopējais garums ir 19 *m*:

$kobra + krokodils + zalktis = 12 \cdot kobra + 1m = 19m$.

Tātad $12 \cdot kobra = 18m$ jeb $kobra = 18 : 12m = 1{,}5m$. Kobra ir 1,5 *m* gara.

Krokodila garums ir $6 \cdot kobra + 1m = 6 \cdot 1{,}5m + 1m = 9m + 1m = 10m$.

Zalkša garums ir $5 \cdot kobra = 5 \cdot 1{,}5m = 7{,}5m$ garš.

1.4.8. Risinājums: $\frac{3}{4}$ no $240 = 240 : 4 \cdot 3 = 180$, $\frac{3}{4}$ no $360 = 360 : 4 \cdot 3 = 270$, $\frac{3}{4}$ no $720 = 720 : 4 \cdot 3 = 540$.

1.4.9. Atbilde: $\frac{5}{22}$ no visiem strādniekiem pusdieno ēdnīcā.

Risinājums. Romāna tēvam ir $9 + 7 + 5 = 21$ darbabiedri, tātad pavisam kopā ar Romāna tēvu ir $21 + 1 = 22$ strādnieki, no kuriem $\frac{5}{22}$ pusdieno ēdnīcā.

1.4.10. Atbilde. Lūkass saņēma 45 balsis, Jana 30 balsis, Rūta 30 balsis, Kaspars 15 balsis, Miks 15 balsis, Justīne 15 balsis.

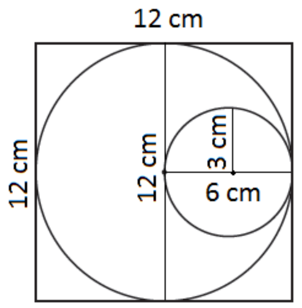
Risinājums. Diagramma sadalīta 10 vienādās daļās, tāpēc viena daļa atbilst 15 skolēniem. Tātad Lūkass saņēma $3 \cdot 15 = 45$ balsis, Jana $2 \cdot 15 = 30$ balsis, Rūta $2 \cdot 15 = 30$ balsis, Kaspars $1 \cdot 15 = 15$ balsis, Miks $1 \cdot 15 = 15$ balsis, Justīne $1 \cdot 15 = 15$ balsis.

1.4.11. Atbilde. Taisnstūra laukums ir 204 cm^2.

Risinājums. Apzīmēsim īsāko tasisnstūra malas garumu ar *a cm*. Tādā gadījumā otra taisnstūra mala ir *a+5 cm* gara. Šī taisnstūra perimetrs ir $2 \cdot a + 2 \cdot (a + 5) = 2 \cdot a + 2 \cdot a + 2 \cdot 5 = 4 \cdot a + 10$ cm. Uzdevumā teikts, ka perimetrs ir 58 cm liels. Tātad $4 \cdot a + 10 = 58$ cm jeb $4 \cdot a = 58 - 10 = 48$ cm un $a = 48 : 4 = 12$ cm. Viena taisnstūra mala ir $a = 12$ cm un otra mala ir $a + 5 = 12 + 5 = 17$ cm. Līdz ar to taisnstūra laukums ir $a \cdot (a + 5) = 12 \cdot 17 = 204$ cm^2.

1.4.12. Atbilde. Mazā riņķa rādiuss ir 3 cm.

Risinājums. Kvadrāta malas garums ir $48 : 4 = 12$ cm, tātad lielā riņķa diametrs ir 12 cm. Mazā riņķa diametrs ir puse no lielā riņķa diametra, t.i., 6 cm un mazā riņķa rādiuss ir puse no tā diametra, t.i., 3 cm (skat. A1.11. zīm.).



A1.11. zīm.

1.4.13. Atbilde. Visu zīmējumā parādītās figūras virsmu veido 88 mazie kvadrātiņi.

Risinājums. Abas sānu skaldnes sastāv no 9 kvadrātiņiem katra, aizmugurējā skaldne sastāv no $4 \cdot 5 = 20$ kvadrātiņiem, priekšējā skaldne (divas rindas) – no $2 \cdot 5 = 10$ kvadrātiņiem, apakšējā skaldne – no $3 \cdot 5 = 15$ kvadrātiņiem un „pakāpienu" virsma – no $5 \cdot 5 = 25$ kvadrātiņiem. Tātad visas figūras virsmu veido $9 + 9 + 20 + 10 + 15 + 25 = 88$ kvadrātiņi.

1.4.14. Atbilde: 1 kg.

Risinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\frac{1}{4}$ ziepju gabala sver $\frac{1}{4}$ kg, tātad viss ziepju gabals sver 1 kg.

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. Pirmā kārta

2.1.1. ***Aritmētiskais šifrs***

Atbilde: $5240+5210=10450$.

Risinājums

Pārrakstām doto summu:

$$\begin{array}{cccccc} & & A & B & C & D \\ + & & A & B & E & D \\ \hline & E & D & C & A & D \end{array}$$

Tā kā $D+D=D$, tad $D=0$.

Ja, saskaitot divus četrciparu skaitļus, summā tika iegūts piecciparu skaitlis, tad summas pirmais cipars var būt tikai 1, tātad $E=1$. Esam ieguvuši, ka $ABC0+AB10=10CA0$. Vienīgā iespēja, ka $A=5$: ja $A>5$, tad $A+A>10$; ja $A<5$, tad $A+A\leq 8$ un pārnesums no iepriekšējās šķiras nevar pārsniegt 1, tāpēc $A+A+1\leq 9$.

No $5BC0+5B10=10C50$ iegūstam, ka $C=4$ un $B=2$ un aizšifrētais piemērs ir $5240+5210=10450$.

2.1.2. ***Neparastais bankomāts***

Atbilde: a) var, b) nevar.

Risinājums

a) Jā, var. Ievērosim, ka Ellai visu laiku ir tikai 2 banknotes – sākumā viņai bija divas banknotes, bet ievadot bankomātā divas banknotes, tas atgriež atkal tikai divas banknotes. Tātad nākamajā maiņā var izmantot tikai tās divas banknotes, kas tika iegūtas iepriekšējā maiņā.

Pieraksts (x, y)→(a, b) nozīmē, ka, ievadot banknotes ar vērtībām x un y, bankomāts izdod banknotes ar vērtībām (a, b).

$x=1,\ y=1$: (1, 1)→(3, 1),

$x=1,\ y=3$: (1, 3)→(5, 1),

$x=1,\ y=5$: (1, 5)→(7, 3),

$x=3,\ y=7$: (3, 7)→(**13**, 1).

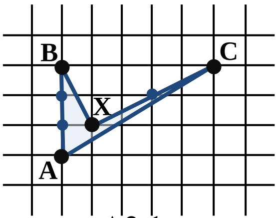
b) Ievērosim: ja x un y abi ir nepāra skaitļi, tad gan $(2x+y)$, gan $(2x-y)$, gan $(y-2x)$ būs nepāra skaitļi. Tā kā Ellai sākumā abas banknotes bija 1 (nepāra skaitlis) salāra vērtībā, tad arī vairākkārtēju maiņu rezultātā viņa var iegūt **tikai** banknotes, kuru vērtība ir nepāra skaits salāru. Tāpēc 2 salāru banknote nekad netiks iegūta.

2.1.3. ***Mazākais četrstūris***

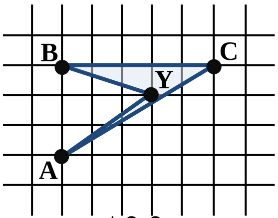
Atbilde. Var iegūt četrstūri, kura laukums ir 2,5 rūtiņas.

Risinājums. Lai iegūtu četrstūri ar mazāko iespējamo laukumu, ceturtajai virsotnei jāatrodas trijstūra ABC iekšpusē, pie tam tā, lai četrstūris veidotos no trijstūra ABC, izgriežot trijstūri ar vislielāko iespējamo laukumu. Tā kā ir jāpievieno tikai viena jauna virsotne, tad izgrieztajam trijstūrim būs divas sākotnējā trijstūra ABC virsotnes (jeb viena trijstūra ABC mala). Apskatīsim, kādi ir lielākie iespējamie izgrieztie trijstūri, kam viena no malām ir AB, BC vai AC un trešā virsotne ir rūtiņas virsotne trijstūra ABC iekšpusē: A2.1. zīm. tiek izgriezts trijstūris BCX, iegūtā četrstūra ABXC laukums ir $\frac{3\cdot 5-2\cdot 5}{2}=2{,}5$ rūtiņas;

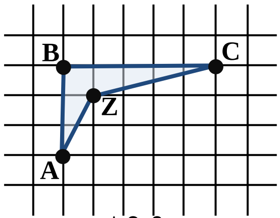
A2.2. zīm. tiek izgriezts trijstūris ABY, iegūtā četrstūra AYBC laukums ir $\frac{5\cdot3-3\cdot3}{2}=3$ rūtiņas; A2.3. zīm. tiek izgriezts trijstūris ACZ, iegūtā četrstūra ABCZ laukums ir $\frac{2\cdot1}{2}+1\cdot1+\frac{1\cdot4}{2}=4$ rūtiņas. Tātad, lai iegūtu četrstūri ar vismazāko laukumu, kā ceturtais jānokrāso punkts X (skat. A2.1. zīm.) un jāizveido četrstūris ABXC.



A2.1. zīm.



A2.2. zīm.



A2.3. zīm.

2.1.4. ***Par pankūkām***

Atbilde. To var realizēt 90 veidos. Gadījumā, ja šķīvju secību neievēro, tad tikai 15 veidos.

Risinājums. Vispirms apskatīsim gadījumu, ja šķīvju secību ievēro (Piemēram, jau iepriekš ir zināms, kurš ir mammas šķīvis, kurš tēta un kurš – Didža). Pankūku dalīšanu varētu veikt šādi:

Vispirms pankūku ar diametru 11 cm uzliekam uz jebkura šķīvja (3 iespējas). Pēc tam 12 cm lielo pankūku uzliekam uz viena no tiem šķīvjiem, uz kura nav uzlikta 11 cm lielā pankūka (2 iespējas). Tātad jau $3\cdot2=6$ iespējas, kā uzlikt pirmās divas pankūkas. Tad izvēlamies vienu no diviem šķīvjiem, uz kura nav 12 cm lielā pankūka, un uzliekam 13 cm lielo pankūku. Tā pēc kārtas izvēlamies, uz kura šķīvja tiks uzlikta 14 cm, 15 cm un 16 cm lielās pankūkas (katrai būs 2 iespējas).

Tātad pavisam pankūkas pa šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$ veidos. Taču starp šiem veidiem ir arī tādi, kad viens no šķīvjiem ir palicis tukšs. Tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja uz viena šķīvja ir pankūkas 11 cm, 13 cm, 15 cm, bet uz otra – 12 cm, 14 cm, 16 cm. Pie tam šie gadījumi pa trīs šķīvjiem var būt izkārtojušies 6 veidos, jo ir 3 šķīvju pāri un ir 2 veidi, kā pankūkas uzlikt uz katra no šiem pāriem..

Tātad uzdevuma prasībām atbilstošo sadalījumu skaits ir $96-6=90$.

Savukārt, ja nebūtu svarīga šķīvju secība, t.i., svarīgi tikai „pankūku komplekti" (piemēram, ir iepriekšēja vienošanās, ka Didzim vienmēr tiek šķīvis, uz kura ir 11 cm pankūka, mammai – šķīvis, uz kura ir 12 cm pankūka, bet tētim – trešais šķīvis), tad uzdevuma atbilde būtu $90:6=15$ veidos, jo katru „pankūku komplektu" pa trīs šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot1=6$ veidos. To secinām no fakta, ka *n* objektus var sakārtot *n*! dažādos veidos $(n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1)$.

2.1.5. ***Noslēpumainie mākslinieki***

Atbilde. Baltiņam ir rudi mati, Melnītim ir blondi mati un Rudais ir tumšmatis.

Risinājums. Tā kā Baltiņam nav blondi mati un viņš nav arī tumšmatis (jo tumšmatis bija otrs runātājs), tad Baltiņam ir rudi mati.

Tā kā Melnītim nav tumši mati un nav arī rudi mati (jo rudi mati ir Baltiņam), tad Melnītim ir blondi mati.

Tātad gleznotājs Rudais ir tumšmatis.

2.2. Otrā kārta

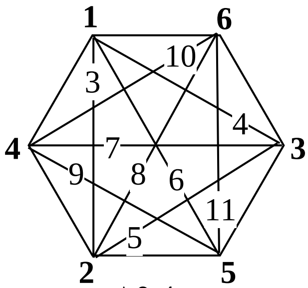
2.2.1. ***Neparastais skaitlis***

Atbilde: 95210.

Risinājums. Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, t.i., 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tāpēc tūkstošu ciparam ir jābūt 5, jo $9-6=3$ un 3 mazāko ciparu summa ir 3, kas nozīmē to, ka, ja tūkstošu cipars lielāks par 5, tad nevar izpildīties uzdevuma nosacījumi. Simtu, desmitu un vienu cipariem ir jābūt attiecīgi 2, 1 un 0, jo $0+1+2+5=8=9-1$, tātad, ja šī summa palielinātos vismaz par 1, tā vairs nebūtu mazāka par 9, kā prasīts uzdevuma nosacījumos.

2.2.2. ***Sešstūra virsotņu numurēšana***

Atbilde. Jā, var gadīties, skat., piemēram, A2.4. zīm.



A2.4. zīm.

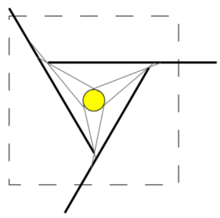
+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		3	4	5	6	7
2			5	6	7	8
3				7	8	9
4					9	10
5						11
6						

A2.5. zīm.

Risinājums. Atrisinājumam pietiek uzrādīt tikai piemēru. Aprakstīsim, kāda varēja būt domu gaita risinot. Izliektam sešstūrim ir 9 diagonāles. Aprēķinām katru divu skaitļu summu un iegūstam 9 dažādas vērtības (skat.A2.5. zīm.). Tātad ir jāparādās visām iespējamajām summu vērtībām. Ievērosim, ka četras summas var iegūt tikai vienā veidā: $3=1+2$, $4=1+3$, $10=4+6$ un $11=5+6$. Tātad šiem skaitļiem jāatrodas diagonāļu galapunktos.

2.2.3. ***Istaba un prožektors***

Atbilde. Pietiek ar 3 aizslietņiem, skat., piemēram, A2.6. zīm., kurā parādīts tikai istabas centrālais kvadrātmetrs (aizslietņi novietoti diezgan tuvu viens otram, bet nesaskaras).



A2.6. zīm.

2.2.4. ***Cipari rūtiņās***

Atbilde: 16 veidos.

Risinājums. Pavisam to var izdarīt 16 veidos, skat. A2.7. zīm. Ievērojam, ka skaitlis 1 var atrasties tikai kreisajā augšējā rūtiņā, bet skaitlis 6 – kādā no labējām rūtiņām.

1 2 3	1 2 3	1 2 4	1 2 4	1 2 5	1 2 5	1 2 6	1 2 6
4 5	4 6	3 5	3 6	3 4	3 6	3 4	3 5
6	5	6	5	6	4	5	4

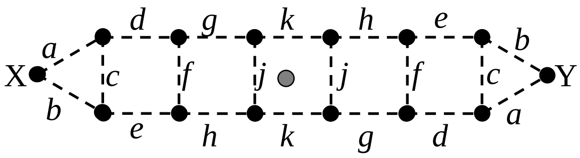
1 3 4	1 3 4	1 3 5	1 3 5	1 3 6	1 3 6	1 4 5	1 4 6
2 6	2 5	2 6	2 4	2 5	2 4	2 6	2 5
5	6	4	6	4	5	3	3

A2.7. zīm.

2.2.5. ***Ceļu būve***

Atbilde. Uzvarēt var firma „CAB”.

Risinājums. Tai jārīkojas šādi: ja firma „BAC” ir noasfaltējusi kādu ceļu, tad nākamajā gājienā firma „CAB” paskatās, vai ar viena posma noasfaltēšanu jau nevar uzvarēt (t.i., trūkst tieši viens posms, kas veido nepārtrauktu noasfaltētu ceļu no X uz Y). Ja ir tāds viens posms, tad asfaltē to. Ja tāda posma nav, tad „CAB” asfaltē posmu, kas ir centrāli simetrisks „BAC” tikko noasfaltētajam posmam (skat. A2.8. zīm., kur ar vienādiem burtiem apzīmēti centrāli simetriskie posmi). Tādējādi pēc katra „CAB” gājiena noasfaltētie posmi veidos centrāli simetrisku attēlu, kurā ar viena posma noasfaltēšanu noteikti nepietiks, lai pabeigtu ceļu. Tāpēc firma „BAC” nākamajā gājienā uzvarēt nevarēs un firma „CAB” varēs izdarīt nākamo gājienu.



A2.8. zīm.

2.3. Trešā kārta

2.3.1. ***Atrodi skaitli!***

Atbilde: 20 un 25.

Risinājums. Apzīmēsim skaitļa N desmitu ciparu ar *a*, bet vienu ciparu – ar *b*. Tad $N = 10a + b$.

No (1) nosacījuma iegūstam $100a + 50 + b = 10a + b + 230$. No abām vienādojuma pusēm atņemam $10a + b + 50$ un iegūstam, ka $90a = 180$. Izdalām abas vienādojuma puses ar 90 un iegūstam, ka $a = 2$.

No otrā nosacījuma iegūstam, ka $500 + 10a + b = k(10a + b)$. Zinot, ka $a = 2$, iegūst $500 + 10 \cdot 2 + b = k \cdot (10 \cdot 2 + b)$ jeb $520 + b = k \cdot (20 + b)$. Izteiksim *k*: $k = \frac{520 + b}{20 + b} = \frac{(20 + b) + 500}{20 + b} = 1 + \frac{500}{20 + b}$. Tā kā *k* ir vesels skaitlis, tad daļas $\frac{500}{20 + b}$ vērtība arī vesels skaitlis, t.i., 500 dalās ar (20+*b*). Tā kā $500 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ tad arī $(20 + b)$ nedrīkst būt nekādu citu pirmreizinātāju, kā 5 un 2. Tā kā *b* ir cipars, tad, tas iespējams vienīgi, ja $b = 0$ vai $b = 5$.

Pārbaudot redzam, ka abi skaitļi 20 un 25 apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.3.2. ***Trijstūris***

Atbilde. Trešās malas garums var būt 9 *cm*, 11 *cm* vai 17 *cm*.

Risinājums. No trijstūra nevienādības seko, ka trešās malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un lielāks nekā pārējo divu malu garumu starpība. Ja trešās malas garums ir a centimetri, kur $6 < a < 20$, tad trijstūra perimetrs $P = 7 + 13 + a$ centimetri un $26 < P < 40$. Tā kā P ir pirmskaitlis, tad tas var būt 29 *cm*, 31 *cm* vai 37 *cm*. Tad atbilstoši trijstūra trešās malas garums a var būt 9 *cm*, 11 *cm* vai 17 *cm*.

2.3.3. ***Skaitļu virkne***

Atbilde. Pirmais skaitlis virknē atkārtosies, ja tas būs: 4, 5, 6, 7, 9 vai 10.

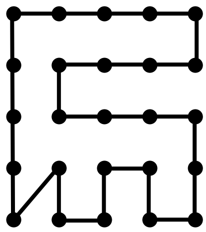
Risinājums. Apskatīsim virknes, kuru pirmie locekļi ir dotie skaitļi. Ievērosim: ja virknē kāds skaitlis atkārtojas, tad visa turpmākā virkne arī periodiski atkārtosies, jo katrs nākamais virknes loceklis ir iegūstams no iepriekšējā virknes locekļa.

2, $\underline{4}$, $\underline{4}$, …
3, 6, $\underline{5}$, 10, 7, 14, 9, 6, $\underline{5}$, …
4, **4**, …
5, 10, 7, 14, 9, 6, **5**, …
6, 5, 10, 7, 14, 9, **6**, …
7, 14, 9, 6, 5, 10, **7**, …
8, $\underline{4}$, $\underline{4}$, …
9, 6, 5, 10, 7, 14, **9**, …
10, 7, 14, 9, 6, 5, **10**, …

Redzam, ka virknē pirmais loceklis vēl atkārtosies gadījumos, kad virknes pirmais loceklis ir 4, 5, 6, 7, 9 vai 10. Savukārt pārējos gadījumos virknes pirmais loceklis neatkārtosies. Piemēram, 2 un 3 noteikti nevar atkārtoties, jo mazākā divu pirmskaitļu summa var būt $2 + 2 = 4 > 3$.

2.3.4. ***Lauztā līnija***

Atbilde. Skat., piemēram, A2.9. zīm.



A2.9. zīm.

2.3.5. ***Meļi un bruņinieki***

Atbilde. Jā, var gadīties (pietiek parādīt vienu piemēru).

Risinājums. Ja doto apgalvojumu „*Manā ciltī man ir vairāk draugu nekā kaimiņu ciltī.*” ir izteicis bruņinieks, tad tas ir patiess un nozīmē, ka bruņiniekam draugu-bruņinieku ir vairāk nekā draugu-meļu. Savukārt, ja šo apgalvojumu ir izteicis melis, tad tas nozīmē, ka melim draugu-meļu ir ne vairāk kā draugu-bruņinieku. Tātad katram salas iemītniekam draugu-meļu ir ne vairāk kā draugu-bruņinieku.

Var gadīties, ka bruņinieku ir mazāk nekā meļu. Piemēram, uz salas dzīvo 3 bruņinieki, kas visi draudzējas savā starpā, bet neviens nedraudzējas ne ar vienu meli (tātad katram bruņiniekam ir 2 draugi-bruņinieki un 0 draugi-meļi), un 4 meļi, kas ne ar vienu nedraudzējas (tātad katram melim ir 0 draugi-bruņinieki un 0 draugi-meļi). Visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

Piezīme. Dotais nav vienīgais piemērs, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. *Daļas, daļas, daļas…*

Atbilde: $\frac{33}{85}$.

Risinājums

$$1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{5}}}}=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3\frac{4}{5}}}}=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\left(1:\frac{19}{5}\right)}}=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\frac{5}{19}}}=$$

$$=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2\frac{14}{19}}}=1-\cfrac{1}{2-\left(1:\frac{52}{19}\right)}=1-\cfrac{1}{2-\frac{19}{52}}=1-\cfrac{1}{1\frac{33}{52}}=1-\left(1:\frac{85}{52}\right)=1-\frac{52}{85}=\frac{33}{85}$$

2.4.2. *Akmeņu dalīšana*

Risinājums. Katrā kaudzītē jābūt $111:3=37$ akmentiņiem.

1) Ievērosim, ka sešus akmentiņus, kuru masa ir attiecīgi n g, $n+1$ g, $n+2$ g, $n+3$ g, $n+4$ g, $n+5$ g, var sadalīt trīs kaudzītēs tā, ka katrā kaudzītē ir vienāds skaits akmeņu un to kopējā masa ir vienāda, piemēram,

1. kaudzīte: n g un $n+5$ g,
2. kaudzītē: $n+1$ g un $n+4$ g,
3. kaudzītē: $n+2$ g un $n+3$ g.

2) Arī akmeņus, kas sver 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g, 9 g, var sadalīt trīs kaudzītēs minētajā veidā, piemēram,

1. kaudzītē: 1 g, 6 g un 8 g,
2. kaudzītē: 2 g, 4 g un 9 g,
3. kaudzītē: 3 g, 5 g un 7 g.

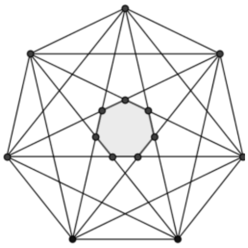
Tā kā $111=9+6\cdot 17$, tad Anna akmeņus var sadalīt šādi: vispirms akmeņus, kas sver 1 g līdz 9 g sadala tā, kā aprakstīts 2) gadījumā, pārējos akmeņus vispirms sadala kaudzītēs pa sešiem pēc kārtas (pēc masas) sekojošiem akmeņiem, katru no šīm kaudzītēm sadala trīs daļās tā, kā aprakstīts 1) gadījumā, un pa vienai daļai pievieno katrā no trim kaudzēm.

Piezīme. Uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

2.4.3. ***Daudzstūrainie daudzstūri***

Atbilde: 7 malas.

Risinājums. Griešanas rezultātā iegūto daudzstūru malas var atrasties uz dotā septiņstūra malām vai diagonālēm. Šī uzdevuma ietvaros nav principiālas atšķirības starp diagonālēm un malām. Par malām var domāt kā par diagonālēm, kas savieno blakusesošās virsotnes. **Ne vairāk kā divas** no vienas virsotnes izejošās diagonāles var saturēt kāda viena mazā daudzstūra malas. Tā kā katra diagonāle savieno divas virsotnes, tad nevienam iegūtajam mazajam daudzstūrim nevar būt vairāk kā $(2 \cdot 7) : 2 = 7$ malas. Šajā izteiksmē dalām ar 2 tāpēc, ka citādi katru diagonāli sanāk ierēķināt 2 reizes. Piemērs parāda, ka 7 malas var būt (skat. A2.10. zīm.).



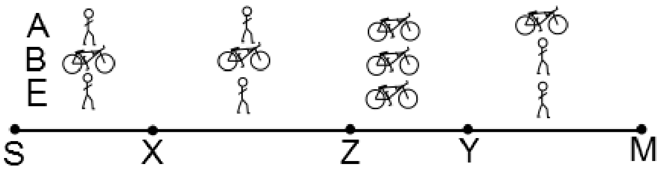
A2.10. zīm.

2.4.4. ***Ceļotāji***

Atbilde. Egons no Mežciema izgāja par $\frac{3}{11}$ stundām (~16 min.) ātrāk nekā Andris un Bērtulis no Sūnu ciema.

Risinājums. Tā kā Andris un Bērtulis vienlaicīgi izgāja no Sūnu ciema un vienlaicīgi nokļuva Mežciemā, tad abi draugi ceļā kopumā pavadīja vienādu laiku, pie tam, tā kā abiem ir vienādi pārvietošanās ātrumi, abi vienādi ilgi bija gājuši kājām un vienādi ilgi bija braukuši ar velosipēdu. (Pretējā gadījumā, tas, kurš ilgāk brauktu ar velosipēdu, galamērķi sasniegtu ātrāk.)

Pieņemsim, ka Andris un Bērtulis kājām gāja t_k stundas, bet ar velosipēdu brauca t_v stundas.



A2.11. zīm.

Shematiski attēlosim draugu satikšanās punktus (skat. A2.11. zīm.): S – Sūnu ciems, M – Mežciems, Y – vieta, kur Egons satika Bērtuli, Z – vieta, kur Egons satika Andri, X – tik tālu bija ticis Andris, kad Bērtulis satika Egonu. Virs katra ceļa posma redzams, kādā veidā katrs zēns pa to pārvietojās.

Tā kā Egons līdz punktam Y nogāja tik pat lielu attālumu, kā pēc tam kājām nogāja Bērtulis un abiem ir vienāds iešanas ātrums, tad Egons no M līdz Y ceļā bija pavadījis t_k stundas.

Bērtulis attālumu SY veica t_v stundās, tātad Andris attālumu SX arī veica tikpat ilgā laikā, t.i., t_v stundās. Savukārt SZ ir viss attālums, ko Andris veica kājām, tātad šajā posmā viņš ceļā pavadīja t_k stundas, bet posmā XZ Andris pavadīja $t_k - t_v$ stundas. Tā kā Andris no punkta X un Egons no punkta Y kustību sāka vienlaicīgi, tad līdz satikšanās vietai Z abi ceļā bija pavadījuši vienādu laiku, tātad Egons attālumu YZ nobrauca $t_k - t_v$ stundās.

Kustības ātrumu *v* aprēķina, dalot veiktā ceļa garumu *s* ar tajā pavadīto laiku *t*, tātad *ceļš = ātrums · laiks* jeb $s = v \cdot t$.

Izmantojot šo sakarību, ieviestos apzīmējumus un uzdevumā doto, iegūstam:

$$\mathrm{SM} = 6t_k + 15t_v = 15 \qquad (*)$$

$$\mathrm{SX} = 6t_v,\ \mathrm{SY} = 15t_v,\ \mathrm{YM} = 6t_k$$

$$\mathrm{XY} = \mathrm{SY} - \mathrm{SX} = 15t_v - 6t_v = 9t_v,\ \mathrm{XZ} = 6(t_k - t_v),\ \mathrm{YZ} = 15(t_k - t_v)$$

Pielīdzinām divos dažādos veidos iegūto XY garumu:

$$\mathrm{XZ} + \mathrm{YZ} = \mathrm{XY} \Rightarrow\ 6(t_k - t_v) + 15(t_k - t_v) = 9t_v$$

$$21t_k = 30t_v$$

$$t_v = \frac{7}{10}t_k$$

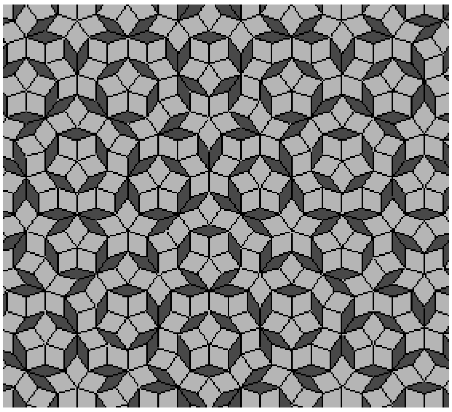
Ievietojam t_v sakarībā (*):

$$6t_k + 15 \cdot \frac{7}{10}t_k = 15 \Rightarrow \frac{33}{2}t_k = 15 \Rightarrow t_k = \frac{30}{33} = \frac{10}{11},\ t_v = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{7}{11}$$

Andris līdz punktam Z ceļā pavadīja $t_k = \frac{10}{11}$ stundas, bet Egons līdz šim pašam punktam ceļā pavadīja $t_k + (t_k - t_v) = 2t_k - t_v = 2 \cdot \frac{10}{11} - \frac{7}{11} = \frac{13}{11}$ stundas, jo posmu YM viņš veica t_k stundās un YZ posmu $(t_k - t_v)$ stundās. Tātad Egons ceļā līdz punktam Z pavadīja par $\frac{13}{11} - \frac{10}{11} = \frac{3}{11}$ stundām vairāk nekā Andris. Tas nozīmē, ka Egons no Mežciema izgāja par $\frac{3}{11}$ stundām (~16 min.) ātrāk nekā Andris un Bērtulis no Sūnu ciema.

2.4.5. *Mozaīka*

Risinājums. No dotā veida rombiem var izveidot dažādas mozaīkas, arī tādas, kuras var turpināt bezgalīgi un pārklāt visu plakni. Piemēram, novietojot rombiņus joslās vai tā, kā parādīts A2.12. zīm. (to sauc par Penrouza mozaīku).



A2.12. zīm.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. ***Lielais skaitlis***

Atbilde. Piemēram, skaitlis 142.

Risinājums. Ievērosim, ka $213=3\cdot 71$. Tātad, lai iegūtais 27 ciparu skaitlis dalītos ar 213, tam jādalās ar 3 un ar 71. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Ja 9 reizes pēc kārtas uzrakstīti vieni un tie paši 3 cipari, tad to summa dalās ar 3. Tātad, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 213, pietiek, ka trīsciparu skaitlis, kas atkārtojas, dalās ar 71.

2.5.2. ***Četrstūris***

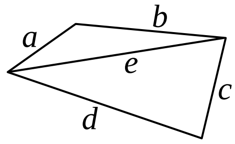
Atbilde. Diagonāles garums var būt tikai 4 cm.

Risinājums. Apzīmēsim četrstūra malu garumus ar *a*, *b*, *c* un *d*, bet diagonāles garumu – ar *e* (skat. A2.13. zīm.). Diagonāle četrstūri sadala divos trijstūros, pie tam četrstūra diagonāle ir mala katrā no šiem trijstūriem. Katrā trijstūrī ir spēkā trijstūra nevienādība, t.i., $a+b>e$, $|a-b|<e$ un $c+d>e$, $|c-d|<e$.

Ievērosim, ka 2 cm nogrieznis var veidot trijstūri tikai kopā ar nogriežņiem 3 cm un 4 cm. Pieņemsim, ka *a*, *b*, *e* garumi ir 2 cm, 3 cm un 4 cm (kaut kādā secībā). Skaidrs, ka $e\neq 2\text{ cm}$ (jo 2 cm nogrieznis var būt mala tikai vienā trijstūrī), tātad $e=3\text{ cm}$ vai $e=4\text{ cm}$.

Ja $e=3\text{ cm}$, tad *c* un *d* ir 6 cm un 9 cm, bet tad $3+6=9$, un šie nogriežņi neveido trijstūri. Tātad $e\neq 3\text{ cm}$.

Ja $e=4\text{ cm}$, tad *a* un *b* ir 2 cm un 3 cm, bet *c* un *d* ir 6 cm un 9 cm – abos trijstūros izpildās trijstūra nevienādības. Tātad diagonāles garums ir 4 cm.



A2.13. zīm.

2.5.3. ***Klucīšu piramīda***

Atbilde. Mazākais rindu skaits ir 8.

Risinājums. No (4) nosacījuma izriet, ka piramīdā kopā izmantoto klucīšu skaits dalās ar 3.

Piramīdā ar *n* rindām izmantoto klucīšu skaits ir $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Šo formulu iegūst, vispirms aprēķinot šīs summas locekļu vidējo vērtību. To dara, saskaitot summas pirmo un pēdējo locekli un izdalot ar 2: $\frac{(1+n)}{2}$. Tā kā šajā summā ir *n* locekļi, tad summas vērtību var aprēķināt, locekļu vidējo vērtību reizinot ar *n*: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Tātad vai nu *n*, vai $(n+1)$ jādalās ar 3. Tāpēc ir vērts apskatīt tikai piramīdas ar 2, 3, 5, 6, 8, 9, utt. rindām.

Tā kā katrā rindā ir vienas krāsas klucīši, un pavisam ir izmantoti visu trīs krāsu klucīši, tad piramīdā ir jābūt vismaz trīs rindām. Taču ar trīs rindām nepietiek, jo tad jābūt vienai zilo klucīšu rindai, vienai sarkano klucīšu rindai un vienai dzelteno klucīšu rindai, bet katrā rindā klucīšu skaits ir atšķirīgs (tātad neizpildās (4) nosacījums).

Piramīdā, kas sastāv no 5 rindām, pavisam ir izmantoti $1+2+3+4+5=15$ klucīši, tātad katrā no trīs krāsām ir $15:3=5$ klucīši. Tos var sakombinēt tikai vienā veidā: vienā krāsā ir tikai pēdējā rinda, otrā krāsā ir 1. rinda un 4. rinda, bet trešā krāsā ir 2. un 3. rinda, bet tas neatbilst (3) nosacījumam.

Piramīdā, kas sastāv no 6 rindām, pavisam ir izmantots $1+2+3+4+5+6=21$ klucītis, tātad katrā no trīs krāsām ir $21:3=7$ klucīši. Atkal iespējama tikai viena kombinācija: 6. rindai un 1. rindai jābūt vienā krāsā, 5. rindai un 2. rindai jābūt otrā krāsā, tātad 3. un 4. rinda ir trešajā krāsā, kas neatbilst (3) nosacījumam.

Piramīdā, kas sastāv no 8 rindām, pavisam ir izmantoti $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ klucīši, tātad katrā no trīs krāsām ir $36:3=12$ klucīši. Tos var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, skat., piemēram, A2.14. zīm.

s
d d
s s s
d d d d
z z z z z
d d d d d d
z z z z z z z
s s s s s s s s

A2.14. zīm.

2.5.4. ***Skaitļu tabula***

Atbilde. Mazākais gājienu skaits ir 2.

Risinājums. Vairāku skaitļu summa dalās ar 3, ja šo skaitļu atlikumu, dalot tos ar 3, summa dalās ar 3. Tāpēc apskatīsim tabulu, kurā dotos skaitļus aizstāsim ar atlikumiem, kādus tie dod, dalot ar 3 (skat. A2.15. zīm.).

1	**2**	**1**
2	**1**	**1**
1	**1**	**2**

A2.15. zīm.

11	**5**	**8**	=24
7	**10**	**16**	=33
22	**19**	**4**	=45

A2.16. zīm.

Ir jāpanāk, lai šajā tabulā katras rindiņas skaitļu summa dalās ar 3; tas būs gadījumā, ja vienā rindiņā būs skaitļi (atlikumi) 2, 2, 2, bet divās rindiņās – skaitļi (atlikumi) 1, 1, 1. Ar vienu gājienu nav iespējams novietot visus divniekus vienā rindā (jo katrā rindā ir tikai viens divnieks), tātad ir vajadzīgi vismaz divi gājieni.

Ar diviem gājieniem uzdevuma prasības var izpildīt, piemēram, vispirms samaina vietām skaitļus 7 un 11, bet pēc tam – skaitļus 4 un 8, iegūstot A2.16. zīm. attēloto tabulu.

2.5.5. ***Kabatas nauda***

Atbilde. Ansis varēja saņemt 1,20 Ls, 1,80 Ls, 3,60 Ls vai 6,00 Ls.

Risinājums. Apzīmēsim Anša saņemto kabatas naudu (santīmos) ar *A*, bet pārējo brāļu saņemtās kabatas naudas attiecīgi ar B_1, B_2, B_3 un B_4 (divas no šīm summām ir Jāņa un Mārtiņa kabatas naudas, bet nav zināms – kuras tieši, zināms tikai, ka Mārtiņš saņēma vairāk nekā Jānis).

Tad $A=2\cdot B_1=3\cdot B_2=4\cdot B_3=5\cdot B_4$. Tā kā katrs brālis saņēma veselu skaitu santīmu, tad *A* jādalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5, tātad *A* jādalās ar $2\cdot3\cdot4\cdot5=60$ jeb $A=60\cdot k$ (*k* – vesels skaitlis). Tad $B_1=30\cdot k$, $B_2=20\cdot k$, $B_3=15\cdot k$ un $B_4=12\cdot k$.

Apskatīsim visas iespējas, kāda var būt Mārtiņa un Jāņa kabatas nauda.

- Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 20 \cdot k = 10 \cdot k = 30$, tātad $k = 3$ un $A = 60 \cdot 3 = 180\,\text{sant.} = 1{,}80\ \text{Ls}$.
- Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 15 \cdot k = 15 \cdot k = 30$, tātad $k = 2$ un $A = 60 \cdot 2 = 120\,\text{sant.} = 1{,}20\ \text{Ls}$.
- Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 12 \cdot k = 18 \cdot k = 30$ – k nav vesels skaitlis, tātad šāda situācija nav iespējama.
- Ja Mārtiņš saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ santīmus, tad $20 \cdot k - 15 \cdot k = 5 \cdot k = 30$, tātad $k = 6$ un $A = 60 \cdot 6 = 360\,\text{sant.} = 3{,}60\ \text{Ls}$.
- Ja Mārtiņš saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $20 \cdot k - 12 \cdot k = 8 \cdot k = 30$– k nav vesels skaitlis, tātad šāda situācija nav iespējama.
- Ja Mārtiņš saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $15 \cdot k - 12 \cdot k = 3 \cdot k = 30$, tātad $k = 10$ un $A = 60 \cdot 10 = 600\,\text{sant.} = 6{,}00\ \text{Ls}$.

Tātad Ansis varēja saņemt 1,20 Ls, 1,80 Ls, 3,60 Ls vai 6,00 Ls.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. Pirmā nodarbība

3.1.1. ***Par kūkām***

Atbilde. Kūka *Skudru pūznis* ir divas reizes dārgāka nekā kūka *Cielaviņa*.

1. risinājums. Apzīmēsim vienas kūkas *Skudru pūznis* cenu ar *P*, kūkas *Kristīne* cenu ar *K*, bet kūkas *Cielaviņa* cenu – ar *C*.

Apgalvojumu „trīs kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik četras kūkas *Kristīne*" pierakstīsim: *PPP* = *KKKK*.

Apgalvojumu „divas kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik viena *Cielaviņa* un divas *Kristīnes* kopā" pierakstīsim: *PP* = *CKK*.

Pirmās vienādības kreisajā pusē, atbilstoši otrās vienādības sakarībai, *PP* aizstāsim ar *CKK*, iegūstot sakarību *PCKK* = *KKKK*. Tā kā abām pusēm kopīgs ir *KK* (jeb abās pusēs divreiz pieskaitīta kūkas *Kristīne* cena), tad vienādības patiesums nemainīsies, ja šos *KK* no abām pusēm *atmetam*, iegūstot: *PC* = *KK*.

Līdzīgi vienādības patiesums nemainīsies, ja abām pusēm pieskaitīsim *C*; to izdarot, iegūstam vienādību *PCC* = *CKK*.

Atkal izmantosim otro uzdevumā doto sakarību un aizstāsim *CKK* ar *PP*, iegūstot *PCC* = *PP*. Ievērojam, ka abās vienādības pusēs ir kopīgs *P*, tāpēc, to *atmetot*, iegūstam *CC* = *P*, no kurienes secinām uzdevumā prasīto sakarību: viena kūka *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik divas kūkas *Cielaviņa*.

2. risinājums. Uzdevumu var atrisināt, nosacījumus pierakstot ar vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 3p = 4k \\ 2p = c + 2k \end{cases},$$

kur p – kūkas *Skudru pūznis* cena, k – kūkas *Kristīne* cena, c – kūkas *Cielaviņa* cena.

Reizināsim otrā vienādojuma abas puses ar 2, iegūstot

$$\begin{cases} 3p = 4k \\ 4p = 4k + 2c \end{cases}.$$

No otrā vienādojuma atņemsim pirmo, iegūstot

$$p = 2c.$$

Tā arī ir meklētā sakarība.

3.1.2. ***Palindromi***

Atbilde. Šis skaitlis ir **597795.**

Risinājums. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar skaitli 3, gan ar 5. Turklāt, ja skaitlis dalās ar 5, tad pēdējais tā cipars ir 0 vai 5. Meklētā palindroma pēdējais cipars nevar būt 0, jo tad arī tā pirmajam ciparam būtu jābūt 0, kas būtu pretrunā ar nosacījumu, ka jāmeklē sešciparu palindroms.

Tātad mums jāmeklē lielākais sešciparu palindroms, kura pirmais un pēdējais cipars ir 5 un kurš dalās ar 3. Lielākais šāds sešciparu skaitlis var tikt uzrakstīts formā $59aa95$, kur a – cipars.

Izmantosim dalāmības pazīmi ar 3: naturāls skaitlis dalās ar skaitli 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Iegūtā skaitļa ciparu summa ir $5+9+a+a+9+5=18+10+2a=18+2(5+a)$. Tā kā 18 dalās ar 3, tad, lai summa $18+2(5+a)$ dalītos ar 3, arī $2(5+a)$ jādalās ar 3. Šis reizinājums dalās ar 3 tad, ja iekavās esošā izteiksme dalās ar 3. No visiem cipariem kā a vērtība der skaitļi 1; 4 un 7. Tā kā mums jānosaka lielākais sešciparu skaitlis, tad $a=7$. Tātad uzdevumā prasītais skaitlis ir **597795**.

3.1.3. ***Rudens pārgājiens***

Atbilde: 144 dalībnieki.

Risinājums. Katrs pārgājiena dalībnieks izēd ceturto daļu no zupas iepakojuma, trešdaļu no salātu iepakojuma un pusi no šokolādes krēma porcijas. Tātad katrs pārgājiena dalībnieks ir izēdis $\frac{1}{4}^{(\cdot 3}+\frac{1}{3}^{(\cdot 4}+\frac{1}{2}^{(\cdot 6}=\frac{13}{12}$ pārtikas iepakojumu. Tad pavisam kopā ir izēsti $\frac{13}{12}\cdot n$ pārtikas iepakojumi, kur n –pārgājiena dalībnieku skaits.

Tā kā dots, ka kopējais izlietoto iepakojumu skaits ir 156, varam uzrakstīt vienādojumu:

$$\frac{13}{12}n=156,$$

no kurienes $n=\frac{12}{13}\cdot 156=144$.

Tātad pārgājienā piedalījās **144** dalībnieki.

3.1.4. ***Kuram taisnība?***

Atbilde. Taisnība ir Dacei, jo vienādojumam ir divi atrisinājumi: $a=12$, $b=2$ un $a=144$, $b=4$.

Risinājums. Ievērojam, ka vienādojuma labā puse $9b^2$ ar jebkurām naturāla skaitļa b vērtībām vienmēr būs naturāls skaitlis (naturālu skaitli kāpinot kvadrātā, iegūst naturālu skaitli).

Tātad arī vienādojuma kreisās puses vērtībai ir jābūt naturālam skaitlim. Sadalām to reizinātājos, iegūstot $5a-ab=a(5-b)$. Tā kā reizinātājs a ir naturāls skaitlis, tad arī iekavās esošajai starpībai jābūt naturālam skaitlim. Tas iespējams tad, ja skaitļa b vērtība nepārsniedz 4 (jeb $b\le 4$). Tāpēc iespējamas četras skaitļa b vērtības: 1, 2, 3 un 4. Apskatīsim katru no tām atsevišķi.

- Ja $b=1$, tad iegūstam vienādojumu $(5-1)a=9\cdot 1^2$, tātad $4a=9$. Redzam, ka šim vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.
- Ja $b=2$, tad iegūstam vienādojumu $(5-2)a=9\cdot 2^2$, tātad $3a=36$ un $a=12$. Iegūstam vienu no atrisinājumiem: ***a* = 12, *b* = 2**.
- Ja $b=3$, tad iegūstam vienādojumu $(5-3)a=9\cdot 3^2$, tātad $2a=81$. Redzam, ka arī šim vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.
- Ja $b=4$, tad iegūstam vienādojumu $(5-4)a=9\cdot 4^2$, tātad $a=144$. Iegūstam otru atrisinājumu: ***a* = 144, *b* = 4**.

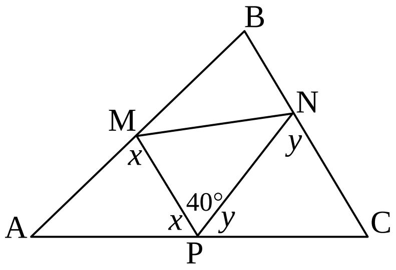
Jau iepriekš pierādījām, ka apskatītās b vērtības ir vienīgās iespējamās, tātad citu atrisinājumu uzdevumam nav.

3.1.5. ***Pastāvīgie leņķi***

Atbilde: $\angle MBN = 100°$.

Risinājums. Apzīmējam leņķa $\angle AMP$ lielumu ar x (skat. A3.1. zīm.). Tā kā dots, ka $AM = AP$, un trijstūrī pretī vienādām malām atrodas vienādi leņķi, tad $\angle APM = \angle AMP = x$.

Līdzīgi apzīmējot $\angle CNP = y$, no malu NC un CP vienādības izriet, ka $\angle CPN = \angle CNP = y$.



A3.1.zīm.

Tā kā punkti A, P un C atrodas uz vienas taisnes, tad $\angle APC = 180°$; tāpēc $x + y + 40° = 180°$, no kurienes $x + y = 140°$.

Izmantosim to, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°. Tāpēc varam izteikt $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumu: $\angle BAC = 180° - 2x$ un $\angle ACB = 180° - 2y$.

Savukārt $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA$. Ievietojot vienādībā izteiktos $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumus, iegūstam:

$$\begin{aligned}\angle MBN = \angle ABC &= 180° - (180° - 2x) - (180° - 2y) = \\ &= 180° - 180° + 2x - 180° + 2y = \\ &= 2x + 2y - 180° = \\ &= 2(x + y) - 180°\end{aligned}$$

Ievietojam iekavās iepriekš izteikto x un y summas vērtību, iegūstot

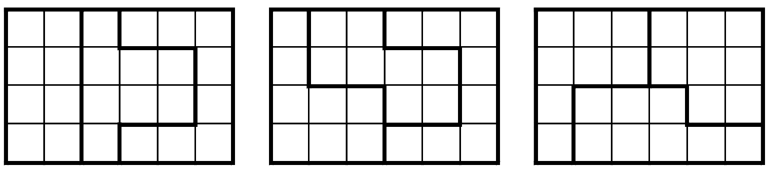
$\angle ABC = 2 \cdot 140° - 180° = 280° - 180° = \mathbf{100°}$

3.1.6. ***Neparastā puzle***

a) Risinājums. Tā kā katra dotā puzles gabaliņa laukums ir 8 rūtiņas, tad trīs gabaliņu veidotā taisnstūra laukumam jābūt $3 \cdot 8 = 24$ rūtiņas. Iespējamie taisnstūra malu garumi var būt 1×24, 2×12, 3×8, 4×6 rūtiņas

Noteikti nevar salikt taisnstūri ar izmēriem 1×24, jo visu puzles gabaliņu garums un platums ir lielāki nekā 1 rūtiņa; arī taisnstūri ar izmēriem 2×12 salikt nevar, jo tikai divu figūriņu platums ir divas rūtiņas, bet nepieciešams izmantot trīs figūriņas. Patstāvīgi var pārliecināties, ka arī taisnstūri ar izmēriem 3×8 salikt nevar.

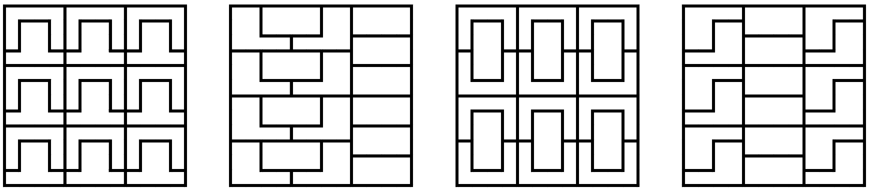
Trīs piemērus, kā var salikt taisnstūri ar izmēriem 4×6 rūtiņas, (skat. A3.2. zīm.).



(2), (3), (1)   (5), (8), (1)   (5), (4), (7)

A3.2.zīm.

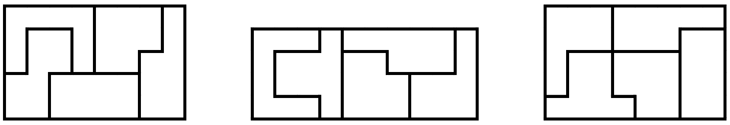
b) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat. A3.3. zīm.



(1) & (3) (2) & (5) (1) & (2) (2) & (5)

A3.3.zīm.

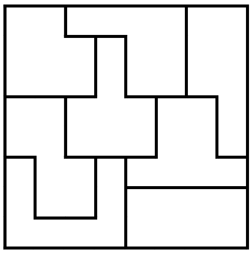
c) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat. A3.4. zīm.



(1), (2), (4), (7), (8) (1), (3), (4), (5), (7) (2), (3), (4), (5), (7)

A3.4.zīm.

Atbildi patstāvīgajam treniņam dotajam uzdevumam skat. A3.5. zīm.



A3.5.zīm.

3.1.7. *Operācija ∇*

Atbilde: a) $2\nabla 5=\frac{7}{11}$; **b)** $(1\nabla 2)\nabla 3=1$; **c)** $x=3$.

Risinājums

a) Izmantojot uzdevumā doto darbības ∇ definīciju, aprēķinām

$$2\nabla 5=\frac{2+5}{1+2\cdot 5}=\frac{7}{11}.$$

b) Ievērojot darbību secību, vispirms aprēķinām iekavās esošās izteiksmes vērtību

$$(1\nabla 2)\nabla 3=\left(\frac{1+2}{1+1\cdot 2}\right)\nabla 3=\left(\frac{3}{3}\right)\nabla 3=1\nabla 3=\frac{1+3}{1+1\cdot 3}=1.$$

Piezīme. Var pierādīt, ka katram nenegatīvam skaitlim *b*, izteiksmes $1\nabla b$ vērtība ir vienāda ar 1. Patiešām, $1\nabla b=\frac{1+b}{1+1\cdot b}=\frac{1+b}{1+b}=1$.

c) Izsakām $2\nabla x$, izmantojot doto darbības definīciju:

$$2\nabla x=\frac{2+x}{1+2x}.$$

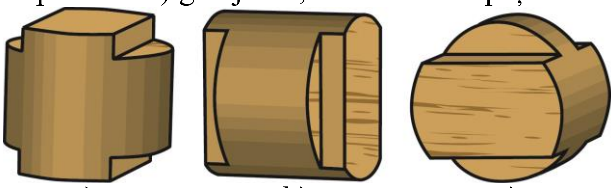
Tātad $\frac{2+x}{1+2x}=\frac{5}{7}$.

Tā kā algebriskās daļas saucēja $1+2x$ vērtība visiem pieļaujamajiem *x* nav 0 (darbība ∇ definēta tikai nenegatīviem skaitļiem), tad, vienādojot abu vienādojuma pušu saucējus, iegūstam $7(2+x)=5(1+2x)$, no kurienes tālāk $14+7x=5+10x$ un $9=3x$, tātad $x=3$.

3.1.8. ***Neparastais korķis***

Risinājums. Viens piemērs, kā var izskatīties korķis, ar kuru var aiztaisīt visus trīs uzdevumā dotos caurumus, parādīts A3.6. zīm.; zīmējumā korķis redzams skatā no priekšas, sāniem un augšas.

Pagriežot korķi, kā parādīts a) gadījumā, var aiztaisīt *krustveida* caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts b) gadījumā, var aiztaisīt taisnstūra veida caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts c) gadījumā, var aiztaisīt apaļo caurumu.



a) b) c)

A3.6.zīm.

3.1.9 ***Nedienas ar veļas mašīnu***

Risinājums. Uzdevumā prasīto var izdarīt diezgan vienkārši – vispirms visi draugi automašīnā ieliek veļas mašīnu, un divi draugi kopā ar veļas mašīnu aizbrauc līdz dzīvoklim. Tur viens no viņiem izkāpj, bet otrs – aizbrauc pakaļ trešajam draugam. Kad arī viņi ir aizbraukuši uz dzīvokli, visi trīs draugi izceļ veļas mašīnu un nogādā to dzīvoklī.

3.1.10. ***Piena laistīšana***

Risinājums. Viens no uzdevuma atrisinājumiem ir šāds (tabulas augšā norādīts trauku tilpums, zemāk – sākotnējais piena daudzums, bet katrā nākamajā rindā – piena daudzums katrā traukā pēc katras darbības):

80 *l*	80 *l*	5 *l*	4 *l*
80	80	0	0
75	80	5	0
75	80	1	4
79	80	1	0
79	80	0	1
74	80	5	1
74	80	2	4
78	80	2	0
78	76	2	4
80	76	2	2

Tātad no vienas kannas piepilda 5 *l* kanniņu, tad no tās pārlej pienu 4 *l* kanniņā. Pēc tam 4 *l* kanniņas saturu ielej atpakaļ kannā u.t.t. Tas viss ir viegli izdarāms. Pievērsiet uzmanību divām pēdējām asprātīgajām operācijām: 4 *l* kanniņu pielej no otras kannas, pēc tam līdz augšai piepilda pirmo kannu.

3.2. Otrā nodarbība

3.2.1. ***Viltīgais Skopulis***

Atbilde. Sprīdītis nevarēs izpildīt Skopuļa prasību.

Risinājums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 5. Zināms, ka 5 nedalās ar 3. Tātad arī dotais skaitlis nedalās ar 3.

Triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa S dalās ar 3:

$$S = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

Arī triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums $R = n(n+1)(n+2)$ dalās ar 3. Pierādīsim to. Apskatīsim skaitļa n iespējamos atlikumus, dalot ar 3:

Ja n dalās ar 3, tad ar 3 dalās arī reizinājums R.

Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad $n + 2$ dalās ar 3 un tāpēc arī R dalās ar 3.

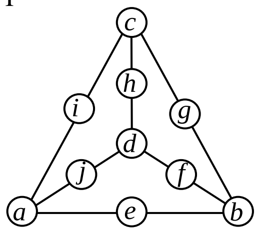
Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad $n + 1$ dalās ar 3 un arī R dalās ar 3.

Tā kā n vai nu dalās ar 3 bez atlikuma, vai arī dod atlikumā 1 vai 2, tad esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus.

Tātad gan S, gan R dalās ar 3. Tāpēc varam izteikt $S = 3 \cdot k$ un $R = 3 \cdot m$, kur k un m – veseli skaitļi. Tad starpība $S - R = 3k - 3m = 3(k - m)$ arī dalās ar 3. Tā kā dotais skaitlis nedalās ar 3, bet meklējamo skaitļu starpība noteikti dalās ar 3, tad Skopuļa prasību izpildīt nevar.

3.2.2. ***Neiespējamais uzdevums***

Risinājums. Apzīmēsim ar S uz katras taisnes esošo trīs skaitļu summu, un ar burtiem no a līdz j apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus (skat. A3.7. zīm.).



A3.7.zīm.

Ievērojam, ka skaitļi a, b, c, d sastopami pavisam uz trīs taisnēm, bet visi pārējie – katrs tieši uz vienas taisnes. Tāpēc, saskaitot uz visām sešām taisnēm uzrakstīto skaitļu summas, iegūstam

$$3(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S \text{ jeb}$$

$$2(a+b+c+d) + (a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S. \qquad (1)$$

Visu desmit skaitļu no 1 līdz 10 summa ir 55, t.i.,

$$(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 55.$$

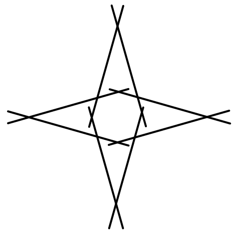
Tad vienādību (1) varam pārrakstīt

$$2(a+b+c+d) + 55 = 6S.$$

Ievērojam, ka skaitlis 55 ir nepāra skaitlis, bet $2(a+b+c+d)$ un $6S$ – pāra skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

3.2.3. ***Krustiskie nogriežņi***

Atbilde. Astoņus nogriežņus prasītajā veidā var uzzīmēt (skat. A3.8. zīm.), septiņus nogriežņus – nevar uzzīmēt.



A3.8.zīm.

Risinājums. Pieņemsim, ka septiņus nogriežņus tā var uzzīmēt. Tā kā pēc noteikumiem katram nogrieznim jākrusto 3 citi, varam saskaitīt to veidotos krustošanās punktus: 3 krustpunktu veidošanā piedalās 1. nogrieznis, 3 krustpunktu – 2. nogrieznis, ..., 3 krustpunktu – 7. nogrieznis; pavisam iegūstam 21 krustošanās punktu. Taču katru divu nogriežņu *a* un *b* krustošanās ir ieskaitīta divas reizes: krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *a*, un krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *b*. Tātad rezultātā būtu jāiegūst pāra skaitlis, taču ieguvām nepāra skaitli. Šī pretruna parāda, ka sākotnējais pieņēmums bijis aplams un 7 nogriežņus prasītajā veidā uzzīmēt nevar.

Piezīme. Risinājums ir derīgs arī tad, ja šie 7 nogriežņi nav vienādi.

3.2.4. ***Neapdomīgais skrējējs***

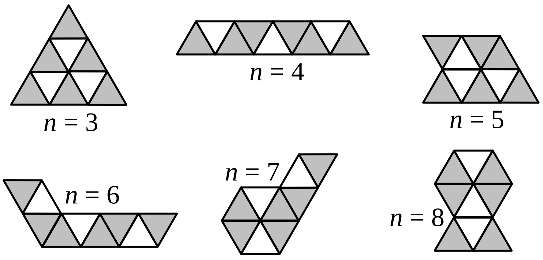
Atbilde: $\frac{85}{4}$ reizes.

Risinājums. Pa to laiku, kamēr Didzis bija veicis $\frac{1}{6}$ jeb $\frac{4}{24}$ visas distances, Raivis jau bija veicis $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}=\frac{5}{6}-\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$ visas distances. Tātad Raivja ātrums ir $\frac{17}{4}$ reizes lielāks nekā Didža ātrums. Didzim vēl bija jāskrien $\frac{5}{6}$ visas distances, bet viņa sāncensim – tikai $\frac{1}{6}$ distances. Tātad, lai Didzis varētu finišēt vienlaikus ar Raivi, viņam jāskrien ar ātrumu, kas ir 5 reizes lielāks nekā Raivja ātrums, t.i., 5 reizes lielāku nekā $\frac{17}{4}$ no Didža sākotnējā ātruma. Tātad Didzim jāskrien $\frac{85}{4}$ reizes ātrāk nekā sākumā.

3.2.5. ***Trapečstūri***

Atbilde. Pieļaujamās *n* vērtības ir 3, 4, 5, 6, 7 un 8.

Risinājums. Visām trim trapecēm kopā ir 12 virsotnes. Savienojot divas trapeces kopā, iegūtās figūras virsotņu skaits samazinās vismaz par 2. Tāpēc lielākā iespējamā *n* vērtība ir $12-2\cdot 2=8$. Tā kā iegūtajai figūrai jābūt daudzstūrim, tad *n* ir vismaz 3. Piemērus katrai *n* vērtībai no 3 līdz 8 skat. A3.9. zīm.

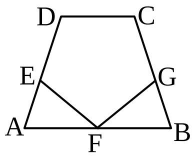


A3.9.zīm.

3.2.6. ***Karogs***

Atbilde: $DC=30cm$.

Risinājums. Izliekta daudzstūra visu leņķu summu var aprēķināt, izmantojot formulu $180°\cdot(n-2)$, kur *n* ir daudzstūra malu skaits. Tātad izliekta piecstūra visu leņķu summa ir $180°\cdot(n-2)=180°\cdot(5-2)=540°$. Ja piecstūrim *CDEFG* (skat. A3.10. zīm.) visi leņķi ir vienādi, tad katrs leņķis ir $540°:5=108°$ liels.



A3.10.zīm.

Pierādīsim, ka ΔAEF ir vienādsānu. Patiešām, $\angle AEF=72°$, jo tas ir piecstūra ārējais leņķis. Tā kā $AB \parallel DC$, un $\angle EAF$ ar $\angle EDC$ ir iekšējie vienpusleņķi, tad $\angle EAF=180°-108°=72°$. Trijstūrī pretī vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tāpēc $AF=EF$. Tātad ΔAEF ir vienādsānu.

Līdzīgi iegūstam, ka arī ΔBGF ir vienādsānu un tāpēc $BF=GF$.

Bet tad $AB=AF+FB=EF+FG=DC+DC=2\cdot DC$ (jo regulāra piecstūra visas malas ir vienāda garuma). Tāpēc $DC=\frac{1}{2}\cdot AB=30\ cm$.

3.2.7. ***Dalāmība ar 72***

Atbilde. Der 2 atrisinājumi: 1) $a=0$, $b=8$ vai 2) $a=8$, $b=0$.

Risinājums. Ja skaitlis dalās ar 72, tad tas dalās ar 8 un 9. Tātad tā ciparu summai jādalās ar 9. Ciparu summa ir $4+2+4+a+b=10+a+b$. Tātad vai nu $a+b=8$, vai arī $a+b=17$ (jo $0\le a\le 9$ un $0\le b\le 9$). Apskatīsim abus šos gadījumus.

Aplūkojam gadījumu, kad $a+b=8$. Ievērojam, ka triju pēdējo ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8 (jo $\overline{42a4b}=42000+\overline{a4b}$, un gan $\overline{42a4b}$, gan 42000 dalās ar 8). Pārbaudot iespējas $a=0,1,...,8$, iegūstam 2 atbildes: 1) $a=0$, $b=8$; 2) $a=8$, $b=0$.

Ja $a+b=17$, tad vai nu $a=9$ un $b=8$, vai arī $a=8$ un $b=9$. Pārbaudot redzam, ka neviena no šīm iespējām neder.

Tātad uzdevumam ir divi atrisinājumi: 1) $a=0$, $b=8$ vai 2) $a=8$, $b=0$.

3.2.8. ***Aizmāršiņa istaba***

Atbilde. Viennozīmīgi istabas grīdas izmērus nevar noteikt. Istabas izmēri var būt 6×3 vai 4×4.

Risinājums. Apzīmēsim taisnstūra malu garumus ar *x* un *y*. Tad vienīgais nosacījums, kas dots uzdevumā, ir $2x+2y=xy$; bez tam *x* un *y* jābūt veseliem skaitļiem. Šos nosacījumus apmierina, piemēram, vērtības $x=4$, $y=4$, kā arī $x=3$, $y=6$.

Tā kā mums nav nekādu noteikumu, kas dotu iespēju izvēlēties kādu no šīm divām atbildēm (bez tam pastāv iespēja, ka ir arī citas *x* un *y* vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumu), tad taisnstūra (grīdas) izmērus noteikt nevar.

Noskaidrosim visus iespējamos šādas istabas grīdas izmērus.

Vienādojumu $2x+2y=xy$ var izteikt formā $x(y-2)=2y$. Tā kā $x>0$ un $y>0$, tad arī $y-2>0$; un $x=\dfrac{2y}{y-2}$. Taisnstūra izmēri var būt jebkuri skaitļi *x* un *y*, kur $y>2$ un $x=\dfrac{2y}{y-2}$.

Parādīsim, kā atrast visus vienādojuma atrisinājumus **naturālos skaitļos**. Vienādojumu var pārrakstīt arī formā $(x-2)(y-2)=4$. Skaitli 4 var sadalīt divu naturālu skaitļu reizinājumā tikai 3 veidos: 4 · 1, 2 · 2, 1 · 4. Attiecīgi iegūstam šādas iespējas:

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=1 \\ y-2=4 \end{cases}$$

Iegūstam trīs atrisinājumus: $x=6$ un $y=3$; $x=4$ un $y=4$; $x=3$ un $y=6$, kas nozīmē, ka istabas grīdas izmēri var būt 6×3 vai 4×4.

3.2.9. ***Sarežģītā mācīšanās***

Atbilde

a)

Kristīne	*Linda*
Patrīcija	*Sandra*
Renāte	*Anna*
Justīne	*Nikola*

b)

Anna	*Renāte*	*Sandra*
Nikola	*Justīne*	*Kristīne*

Risinājums

a) No nosacījumiem (3) un (5) secinām, ka Kristīne sēž kopā ar Lindu. Bet tad no nosacījuma (1) izriet, ka Patrīcijai jāsēž kopā ar Sandru. Tāpēc no nosacījuma (4) secinām, ka Renāte sēdēs kopā ar Annu. Tad atliek, ka Justīnei jāsēž kopā ar Nikolu.

b) Atbilstoši nosacījumam (4), Renāte un Nikola nesēž pie viena sola; tātad Renāte sēž sola vidū un pa labi no viņas – Sandra (no (6)). Iegūstam šādu izkārtojumu pie viena no soliem:

	Renāte	*Sandra*

Tā kā Justīne grib sēdēt blakus vai nu Nikolai, vai Annai (no (1)), tad viņa noteikti nesēž pie šī paša galda. Savukārt no (2) izriet, ka arī Kristīne sēž pie otra sola. Tātad Justīnei jāsēž blakus gan Kristīnei, gan arī Nikolai vai Annai, tāpēc viņa sēž otra sola vidējā vietā. Tātad šobrīd izkārtojums pie otra sola ir šāds:

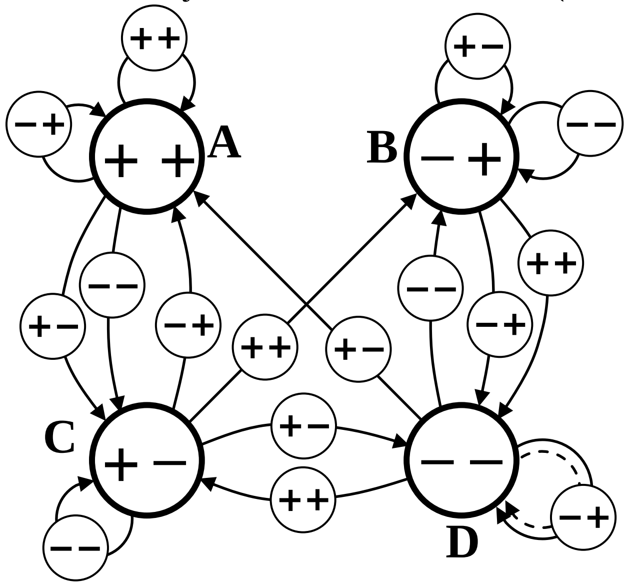
	Justīne	*Kristīne*

Tā kā Renāte nevēlas sēdēt blakus Nikolai (no (4)), tad viņa sēž pie otrā sola (tiek ievērots arī (1)), bet tad Anna sēž pirmā sola kreisajā malā (tādējādi tiek apmierināts arī (3) un (5)).
Esam ieguvuši šādu izkārtojumu pie galdiem:

Anna	*Renāte*	*Sandra*
Nikola	*Justīne*	*Kristīne*

3.2.10. ***Kā apklusināt spokus?***

Risinājums. Uzdevuma nosacījumus var attēlot shematiski (skat. A3.11. zīm.).



A3.11.zīm.

Ar tumšākajām līnijām apvilktie aplīši norāda uz spoku uzvedību: aplītī ierakstītā pirmā zīme rāda, vai dziedošais spoks dzied vai klusē, bet otrā – kā izturas smejošais spoks. Tā, piemēram, aplītis A atbilst stāvoklim, kad abi spoki ir trokšņaini. Skaidrs, ka pavisam iespējami 4 stāvokļi.
Atkarībā no darbībām ar ērģelēm un sveci, spoku izturēšanās mainās. Šīs izmaiņas diagrammā atspoguļojas ar bultiņām. Bultiņu vidū esošajās aplīšos ierakstītās zīmes rāda, kādām darbībām ar ērģelēm un sveci atbilst šī bultiņa: pirmā zīme rāda, vai ērģeles skan vai nē, otrā zīme – svece deg vai nē. Tā, piemēram, bultiņa, kas iet no C uz A, rāda, ka gadījumā, ja kādas minūtes laikā dziedošais spoks dziedājis, bet smejošais spoks klusējis un ērģeles nav skanējušas, bet svece degusi, tad nākošās minūtes laikā abi spoki atkal trokšņos.
Diagramma izveidota, pamatojoties uz uzdevuma noteikumos doto informāciju par spoku izturēšanos: parādīts, kādas izmaiņas notiek katrā stāvoklī, kas atbilst vienam no 4 iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, ja veic jebkuru no 4 iespējamām darbībām ar sveci un ērģelēm. No katra stāvokļa A, B, C, D, kas atbilst vienam no iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, jāiziet 4 bultiņām (bultiņas, kas iziet no viena stāvokļa un nonāk vienā citā stāvoklī, var arī apvienot,

bultiņas vidū esošajā aplītī ierakstot abas ērģeļu un sveces stāvokļu kombinācijas, kurām tās atbilst).
Pēc uzdevuma noteikumiem, pašreizējais stāvoklis atbilst aplītim A, bet pa diagrammas bultiņām mums jānonāk un jāpaliek aplītī D. Acīmredzot to var panākt, ejot, piemēram, no A uz C, no C uz D un pēc tam visu laiku pārejot no D uz D pa bultiņu, kas uzzīmēta ar pārtrauktu līniju. Atceroties, ko norāda zīmes aplīšos bultiņu vidū, redzam, ka to var panākt, piemēram, ar šādām darbībām: pašreizējās minūtes laikā nedara neko (bultiņa, kas iziet no A un atbilst „– –”, novedīs aplītī C), pēc tam vienu minūti jāskan ērģelēm, nedegot svecei (bultiņa, kas iziet no C un atbilst „+ –”, noved aplītī D), bet pēc tam ērģelēm jāapklust un jāiedegas svecei (bultiņa, kas iziet no D un atbilst „– +”, visu laiku atgriežas D).

3.3. Trešā nodarbība

3.3.1. ***Summa grieķu gaumē***

Atbilde: $4940+5940=10880$.

Risinājums. Pārrakstām doto summu:

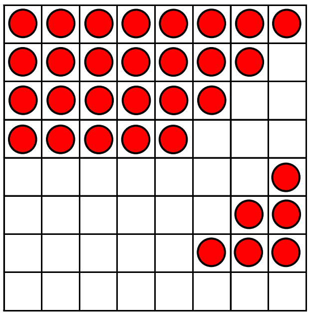
$$\begin{array}{cccccc} & & T & E & T & A \\ + & & B & E & T & A \\ \hline & G & A & M & M & A \end{array}$$

Tā kā G ir pārnesums, kas veidojas, saskaitot divus ciparus, tad $G=1$. Tā kā summa $A+A$ beidzas ar ciparu A, tad tas ir iespējams tikai tad, ja $A=0$. Tātad nākamajā šķirā pārnesumu nav, t.i., summas $T+T$ pēdējais cipars ir M; tāpēc M ir pāra cipars. Saskaitot $T+T$, pārnesumu nākamajā šķirā nav, pretējā gadījumā rodas pretruna ar to, ka summa $E+E+1$, kas ir nepāra skaitlis, beidzas ar pāra ciparu M. Tāpēc $2T<10$ un iespējamās T vērtības ir 2, 3 un 4. Pārbaudīsim visus šo gadījumus:

- Ja $T=2$, tad $M=4$ un $E=7$; bet tad arī B ir jābūt 7; rodas pretruna.
- Ja $T=3$, tad $M=6$ un $E=8$; bet tad B ir jābūt 6; rodas pretruna, jo jau ieguvām, ka $M=6$.
- Ja $T=4$, tad $M=8$ un $E=9$; tādā gadījumā B ir jābūt 5 un iegūstam vienīgo atbildi: $4940+5940=10880$.

3.3.2. ***Žetonu kārtošana***

Atbilde. Uzdevumā prasīto var izdarīt (skat., piemēram, A3.12. zīm.).



A3.12.zīm.

3.3.3. ***Sirsnīgie rūķi***

Atbilde. Ziemeļpolā dzīvo 20 rūķīši.

Risinājums. Apzīmēsim ar n rūķīšu skaitu. Tā kā katru dienu katrs rūķītis izteica vienu komplimentu, tad kopumā tika izteikti $7n$ komplimenti. No otras puses, nedēļas laikā katrs rūķītis saņēma divus komplimentus un Ziemassvētku vecītis – simts komplimentu; tātad kopējo nedēļā izteikto komplimentu skaitu var izteikt arī kā $2n+100$. Iegūstam vienādojumu $7n=2n+100$, no kurienes $n=20$.

3.3.4. ***No kļūdām jāmācās***

Atbilde. Buratino ieguva $18\frac{1}{6}$.

Risinājums. Apskatīsim Malvīnes uzdoto risināšanas gaitu. Pēc kārtas veicamās darbības „izdali ar 8” un „reizini ar 6” aizstāsim ar darbību „reizini ar $\frac{6}{8}$ jeb $\frac{3}{4}$”. Ja, veicot šo reizināšanu, iegūtu daļskaitli, tad, no tā atņemot 9, arī iegūtu daļskaitli. Bet rezultātam jābūt pirmskaitlim (tātad veselam skaitlim). Tāpēc, reizinot ar $\frac{3}{4}$ Buratino bija jāiegūst vesels skaitlis, kas turklāt arī dalās ar 3 (reizinot ar $\frac{3}{4}$, skaitītājā esošais trijnieks nevar „saīsināties”). Tad arī pēc atņemšanas skaitlis dalīsies ar 3. Vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3, ir pats skaitlis 3. Tātad, ja Buratino būtu visu izdarījis pareizi, tad rezultātā viņš iegūtu 3.
Veicot Malvīnes uzdotās darbības apgrieztā secībā, pakāpeniski iegūstam ķēpājumu skaitu:

$$(3+9):6\cdot 8-7=9.$$

Buratino ieguva skaitli $(9\cdot 7-8):6+9=18\frac{1}{6}$.

3.3.5. ***Gara, gara virkne***

Atbilde. Skaitlis 2 atkārtojas 671 reizi, visu virknes locekļu summa ir 1006.

Risinājums. Uzrakstīsim Eināra iegūtās virknes pirmos locekļus:

1. virknes loceklis: $x_1=2$;

2. virknes loceklis: $x_2=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$;

3. virknes loceklis: $x_3=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$;

4. virknes loceklis: $x_4=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Ievērojam, ka virknes ceturtais loceklis ir vienāds ar virknes pirmo locekli, tātad virknes piektais loceklis būs vienāds ar virknes otro locekli u.t.t. Tātad virknes locekļi atkārtosies ik pēc trīs (t.i., virkne ir periodiska ar periodu 3).

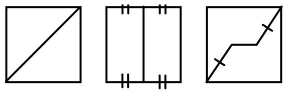
Tātad Eināra iegūtā virkne ir: 2; -1; $\frac{1}{2}$; 2; -1; $\frac{1}{2}$; 2; -1; $\frac{1}{2}$; ... .

Tā kā virknes periods sastāv no 3 skaitļiem, nepieciešams noskaidrot, cik šādu periodu pavisam ietilpst Eināra uzrakstītajā 2012 skaitļus garajā virknē. Tā kā $2012=3\cdot 670+2$, periods atkārtojas 670 reizes un divi pēdējie virknes locekļi ir 2 un (-1). Tātad pavisam virknē skaitlis 2 atkārtojas 671 reizi.

Aprēķināsim summu tiem trīs skaitļiem, kas veido periodu: $2+(-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Tā kā šie skaitļi atkārtojas 670 reizes, tad aprēķinām pirmo 2010 skaitļu summu: $\frac{3}{2}\cdot 670=1005$. Pieskaitot vēl atlikušos divus virknes locekļus, iegūstam, ka Eināra iegūtās virknes visu locekļu summa ir $1005+2+(-1)=1006$.

3.3.6. ***Kvadrāta sagriešana***

Atbilde. Jā, var. Piemēri doti A3.13. zīm.

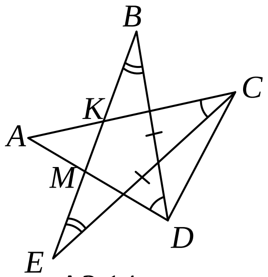


A3.13.zīm.

3.3.7. ***Zvaigznes leņķi***

Risinājums. Apzīmēsim ar K un M attiecīgi malu AC un AD krustpunktus ar malu BE (skat. A3.14. zīm.). No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka trijstūri CEK un DBM ir vienādi (pazīme *lml*). Tāpēc $\boldsymbol{CK = DM}$ un $\angle CKE = \angle DMB$ kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi. Tad arī $\angle AKE = \angle AMB$ kā vienādu leņķu blakusleņķi. Esam ieguvuši, ka trijstūrim AMK malas MK pieleņķi ir vienādi; tā kā trijstūrī pretī vienādiem leņķiem ir vienādas malas, tad $\boldsymbol{AK = AM}$ un trijstūris AMK ir vienādsānu.

Izmantojot izceltās sakarības, iegūstam $AC = AK + CK = AM + DM = AD$, tātad arī trijstūris ACD ir vienādsānu. Tāpēc $\angle ACD = \angle ADC$, kas arī bija jāpierāda.



A3.14.zīm.

3.3.8. ***Trijstūru veidošana***

Atbilde. Līga vienmēr var uzvarēt.

Risinājums. Ievērosim, ka spēle var beigties pēc tiem gājieniem, pēc kuriem kopējais stienīšu skaits dalās ar 3. Tātad pirmo reizi spēle var beigties pēc Jāņa gājiena, bet pēc tam – pēc Līgas gājiena.

Lai uzvarētu, Līgai savā pirmajā gājienā nepieciešams salauzt stienīti tieši uz pusēm. Lai arī kā Jānis pēc tam vienu no iegūtajām pusēm nepārlauztu divās daļās, viņš no iegūtajām daļām nevar salikt trijstūri, jo neizpildās trijstūra nevienādība (divu iegūto stienīšu summa būs tieši vienāda ar trešo stienīti). Līgai savā otrajā gājienā nepieciešams atkārtot Jāņa gājienu, t.i., lielāko stienīti salauzt tādās pašās divās daļās, kādās Jānītis salauza tā paša izmēra stienīti savā iepriekšējā gājienā.

Lai arī kā stienīšus Jānītis salauztu savā nākamajā gājienā, no tiem visiem trijstūrus izveidot viņš nevarēs, jo būs iegūti 5 stienīši. Savukārt, ja Līga pēc tam atkal atkārtos Jānīša gājienu (to viņa noteikti var izdarīt, jo pirms Jānīša gājiena bija divi pāri vienāda garuma stienīšu), pēc viņas gājiena tiks iegūti seši stienīši. Apzīmēsim to garumus ar a, b, c, a, b, c. Pieņemsim, ka $a \geq b \geq c$. Tad Līga var izveidot divus vienādsānu trijstūrus: pirmo ar malām a, a un c un otru – ar malām b, b, c.

3.3.9. ***Kā izglābt Dzelzs Malkascirtēju?***

Atbilde. Ella kartiņu ar skaitli $100\frac{1}{100}$ var iegūt.

Risinājums. Tā kā Ellai ir tikai viena kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2012, tad viņai ir tikai viena iespēja – šo kartīti ievadīt skaitļošanas mašīnā un saņemt atpakaļ divas kartītes: 2012 un $\frac{1}{2012}$. Ja mašīnā ievada šīs divas kartītes, tad Ella atpakaļ saņems trīs kartīes: 2012, $\frac{1}{2012}$ un $2011\frac{2011}{2012}$. Ja Ella ievadīs mašīnā kartītes $2011\frac{2011}{2012}$ un $\frac{1}{2012}$, tad bez šīm divām kartītēm Ella iegūs vēl kartīti ar skaitli $2011\frac{2010}{2012}$. Ja katrā nākamajā reizē Ella ievadīs mašīnā iepriekšējā reizē jauniegūto kartīti un kartīti ar skaitli $\frac{1}{2012}$, tad pēc kāda laika Ellas rīcībā nonāks kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2011. Ja tagad Ella ievadīs mašīnā kartītes ar skaitļiem 2012 un 2011, tad meitene savā rīcībā iegūs kartīti ar skaitli 1 (jo $2012-2011=1$). Turpmāk Ellai jāievada kartītes ar skaitļiem 2011 un 1. Tad viņa iegūs kartīti ar skaitli 2010. Šādu procesu turpinot, Ella iegūs kartītes ar skaitļiem 2009, 2008, ..., 102, 101 un visbeidzot 100. Tātad Dzelzs Malkascirtēju Ella būs izglābusi.

Tagad parādīsim, kā var iegūt kartīti ar skaitli $100\frac{1}{100}$. Ellas rīcībā jau ir kartītes ar skaitļiem 101 un 100. Ievadot mašīnā kartīti ar skaitli 100, var iegūt $\frac{1}{100}$. Ievadot kartītes ar skaitļiem 101 un $\frac{1}{100}$, var iegūt kartīti ar skaitli $100\frac{99}{100}$. Rīkojoties kā iepriekš, var iegūt kartītes ar skaitļiem $100\frac{98}{100}$, $100\frac{97}{100}$, ..., $100\frac{2}{100}$ un visbeidzot $100\frac{1}{100}$.

Piezīme. Iesakām padomāt, vai ar šādu skaitļošanas mašīnu un kartīti ar skaitli 2012 ir iespējams iegūt skaitli, kurš ir lielāks par 2012? Vai var iegūt jebkuru pozitīvu racionālu skaitli?

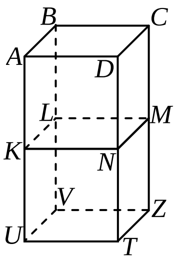
3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. *Zelta zivtiņas peldējums*

Atbilde. Zivtiņas peldējumu no augšas skat. A3.17. un A3.19. zīm.

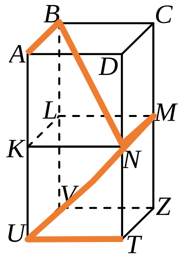
Risinājums

No uzdevuma nosacījumiem secinām, ka akvārijam ir paralēlskaldņa forma ar izmēriem $1\times1\times2$ vienības (skat. A3.15. zīm.). Pieņemsim, ka zelta zivtiņa peldēja no augšas uz leju.



A3.15.zīm

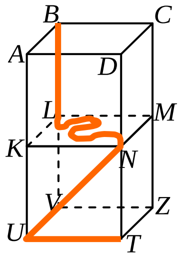
a) Pēc uzdevumā dotā zīmējuma kreisā attēla redzams, ka sākotnēji zivtiņa atradās kaut kur uz šķautnes *AB*, bet no labās puses attēla skaidrs, ka zivtiņa vispirms peldēja no punkta *A* uz *B* pa šķautni *AB*. Tālāk redzams, ka zivtiņa aizpeldēja taisni uz punktu *N*, bet tad peldēja pa nogriezni *NM* un tad uz virsotni *U*. Visbeidzot zivtiņa devās uz virsotni *T* pa šķautni *UT*. Tādējādi zelta zivtiņa peldēja pa maršrutu, kas redzams A3.16. zīm. To izmantojot, var uzzīmēt zivtiņas peldējumu, skatoties no augšas (skat. A3.17. zīm.).



A3.16.zīm.

A3.17.zīm.

b) Pēc uzdevumā dotā attēla redzams, ka zelta zivtiņa sāka ceļu virsotnē *B* un peldēja pa šķautni *BL*. Pēc tam viņa peldēja uz punktu *N*, bet viņas ceļš varēja nebūt taisnes nogrieznis – zivtiņa varēja peldēt pa jebkuru trajektoriju, ja vien *neizpeldēja ārā* no plaknes *KLMN*. No punkta *N* zivtiņa aizpeldēja taisni uz virsotni *U*, bet pēc tam pa šķautni *UT* uz virsotni *T*, kur beidza savu ceļu. Viens no iespējamiem maršrutiem redzams A3.18. zīm. (var atšķirties tikai zivtiņas peldēšanas trajektorija no punkta *L* uz punktu *N*). Uzzīmējot atbilstošo zelta zivtiņas peldējumu, skatoties no augšas, iegūstam A3.19. zīm. redzamo attēlu.



A3.18.zīm.

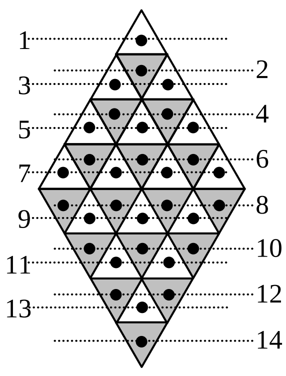
A3.19.zīm.

3.4.2. ***Skudras ceļojums***

Atbilde: a) 14 trijstūrus; **b)** 20 dažādos veidos.

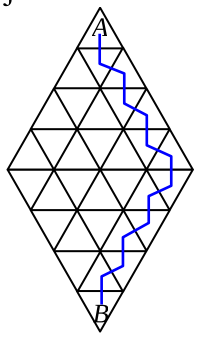
Risinājums

Trijstūrus, kuru viena virsotne ir uz leju, nokrāsosim pelēkus (skat. A3.20. zīm.). Sadalīsim trijstūrus rindās: visi trijstūri, kam virsotne ir uz augšu, atrodas nepāra rindās; visi trijstūri, kam virsotne ir uz leju, atrodas pāra rindās (skat. A3.20. zīm.). Tādā gadījumā 1. rindā ir tikai augšējais trijstūris *A*; 2. rindā ir viens pelēks trijstūris, kas atrodas blakus trijstūrim *A*; 3. rindā ir divi balti trijstūri; ...; 14. rindā ir viens pelēks trijstūris *B*.



A3.20.zīm.

a) Ievērosim, ka ar katru savu gājienu skudra nokļūst rindā, kuras kārtas numurs ir par 1 lielāks nekā tai rindai, kurā tā bija iepriekš. Tātad, lai nokļūtu no 1. rindas līdz 14. rindai, skudrai jāiet cauri visām 14 rindām, tātad jāapmeklē vismaz 14 trijstūri. Turklāt A3.21. zīm. redzams, ka skudrai pietiek apmeklēt 14 trijstūrus, lai no trijstūra *A* nokļūtu trijstūrī *B*.



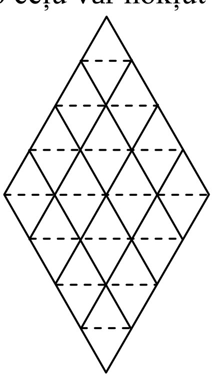
A3.21.zīm.

b) Ievērosim, ka

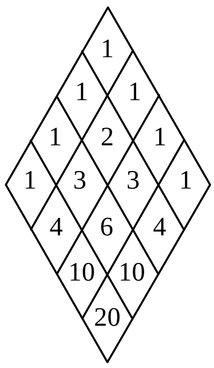
- savā maršrutā, izejot caur 14 trijstūriem, skudrai katrā gājienā nepieciešams palielināt rindas kārtas numuru;
- no trijstūriem, kas atrodas nepāra rindās, skudrai ir tikai viens iespējamais ceļš uz nākamo rindu – tieši uz leju.

Tātad varam apvienot trijstūrus, kā parādīts A3.22. zīm. To izmantojot, varam izskaitīt, cik dažādos veidos skudra var apmeklēt katru iegūto lauciņu.

Skaidrs, ka augšējo lauciņu skudra var apmeklēt vienā veidā. Lai apmeklētu jebkuru no zemāk esošajiem lauciņiem, skudrai pirms tam jābūt kādā no virs tā esošajiem lauciņiem. Tātad uzzināt, cik veidos skudra apmeklē kādu no lauciņiem, var, noskaidrojot, cik veidos var nokļūt lauciņos, kas atrodas tieši virs šī pa labi un pa kreisi, un iegūtos skaitļus saskaitot kopā. Darbojoties saskaņā ar šo spriedumu, iegūstam A3.23. zīm.; tātad skudra no trijstūra *A* uz trijstūri *B* pa īsāko ceļu var nokļūt 20 veidos.



A3.22.zīm.



A3.23.zīm.

3.4.3. ***Meklējot trīsciparu pirmskaitli***

Atbilde. Lielākais trīsciparu skaitlis, kas apmierina visas uzdevuma prasības, ir **311**.

Risinājums. Tā kā visu meklētā skaitļa ciparu reizinājums ir pirmskaitlis, tad skaitļa cipari var būt 1; 1 un *p* (ne obligāti tieši šādā secībā), kur *p* – viencipara pirmskaitlis. Viencipara pirmskaitļi ir 2, 3, 5 un 7. Apskatīsim katru no tiem:

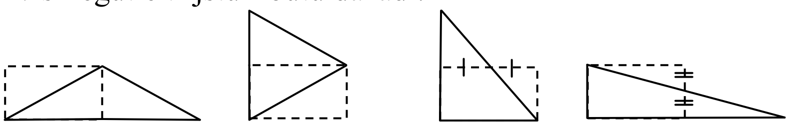
- ja $p = 7$, tad meklētā skaitļa ciparu summa $1+1+7=9$, tātad tas dalās ar 9 (nav pirmskaitlis), līdz ar to $p = 7$ neder;
- ja $p = 5$, tad vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir 151 (skaitlis 511 dalās ar 7, bet 115 dalās ar 5; tātad tie nav pirmskaitļi);
- ja $p = 3$, var izveidot trīs uzdevuma nosacījumiem atbilstošus skaitļus: 113, 131 un 311; lielākais no šiem skaitļiem ir 311;
- ja $p = 2$, tad nav neviena skaitļa, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem (skaitlis 121 dalās ar 11, skaitlis 112 dalās ar 2; savukārt skaitlī 211, samainot vietām pirmo un pēdējo ciparu, iegūst 112, kas nav pirmskaitlis), līdz ar to $p = 2$ neder.

No iegūtajiem skaitļiem 151 un 311 vislielākais ir 311.

3.4.4. ***Taisnstūru griešana***

Atbilde. Jā, tā var gadīties.

Risinājums. A3.24. zīm. attēlots, kā vienu taisnstūri četros veidos sagriezt divās daļās tā, lai visi iegūtie trijstūri būtu dažādi.



a) b) c) d)

A3.24.zīm.

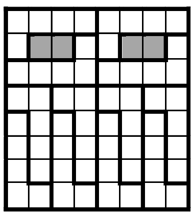
3.4.5. ***Figūru savietošana***

Atbilde: 12 figūras.

Risinājums. Kvadrātā var ievietot 12 figūras (skat. A3.25. zīm.). Vēl jāpamato, ka vairāk figūru ievietot nevar.

Lai ievietotu 13 figūriņas, būtu nepieciešamas $13 \cdot 5 = 65$ rūtiņas, bet uzdevumā dotajā kvadrātā ir tikai 64 rūtiņas.

Tātad 12 ir maksimālais figūru skaits, ko var ievietot kvadrātā.



A3.25.zīm.

3.4.6. ***Vienādo leņķu nevienādība***

Risinājums. Vienādmalu trijstūra katrs leņķis ir 60° liels; tātad $\angle C = 60°$ un $\angle EDF = 60°$ (skat. A3.26. zīm.). Apzīmēsim $\angle GHA = k$, $\angle HAD = n$ un $\angle HDA = m$.

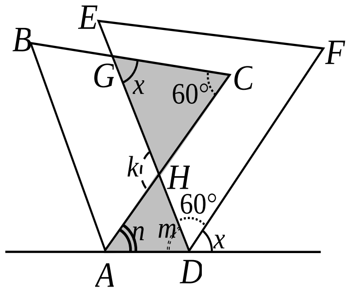
Tā kā izstiepts leņķis ir 180° liels, tad $m + 60° + x = 180°$ jeb

$$m = 120° - x. \qquad (1)$$

Tā kā $\angle GHA$ ir trijstūra CGH ārējais leņķis, tad $k = x + 60°$. No otras puses, $\angle GHA$ ir arī trijstūra AHD ārējais leņķis, tātad $k = n + m$. Iegūstam, ka $n + m = x + 60°$. Izmantojot vienādību (1), iegūstam

$$n = x + 60° - (120° - x) = 2x - 60°.$$

Tā kā n ir leņķa lielums, tad tas ir pozitīvs skaitlis. Tātad $2x - 60° > 0$, no kurienes $x > 30°$, kas arī bija jāpierāda.



A3.26.zīm.

3.4.7. ***Zīmīgie skaitļi***

Risinājums. No dotās vienādības izriet, ka *a*, *b*, *c* ≠ 0 un $\dfrac{ab + bc + ca}{abc} = 0$ jeb $ab + bc + ca = 0$.

Apskatām doto skaitļu summas kvadrātu:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(\underbrace{ab + bc + ca}_{=0}) = a^2 + b^2 + c^2$, kas arī bija jāpierāda.

3.4.8. ***Jauktu skaitļu patiesā vērtība***

Atbildes: a) $12\dfrac{3576}{894}$; **b)** $6\dfrac{13258}{947}$.

Risinājums

a) $16 = 12 + 4 = 12 + \dfrac{3576}{894} = 12\dfrac{3576}{894}$.

b) $20 = 6 + 12 = 6 + \dfrac{13258}{947} = 6\dfrac{13258}{947}$.

3.4.9. ***Volejbola turnīrs***

Atbilde. Mazākais iespējamais papildus spēļu skaits ir 1.

Risinājums. Pieņemsim, ka netika izspēlēta neviena papildus spēle. Tādā gadījumā punktu starpība starp 1. un 2. vietu, 3. un 4. vietu, 5. un 6. vietu, 7. un 8. vietu ir vismaz 2 punkti, tātad punktu starpība starp 1. un 8. vietu ir vismaz 8 punkti. Bet katra komanda spēlēja tieši 7 spēles, tātad 1. vietas ieguvēji varēja nopelnīt ne vairāk kā 7 punktus. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viena papildus spēle tika izspēlēta.

To, ka var pietikt ar vienu papildus spēli, var redzēt tabulā:

Komanda	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**Kopā punkti**
1.		1	1	1	1	1	1	1	**7**
2.	0		0	1	1	1	1	1	**5**
3.	0	1		0	0	1	1	1	**4**
4.	0	0	1		1	0	1	1	**4**
5.	0	0	1	0		1	1	1	**4**
6.	0	0	0	1	0		0	1	**2**
7.	0	0	0	0	0	1		1	**2**
8.	0	0	0	0	0	0	0		**0**

3.4.10. ***Toms un Džerijs***

Atbilde. Jā, Toms noteikti var noķert Džeriju.

Risinājums. Sanumurēsim alas no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz n. Definēsim „attālumu” starp alām i un j (i, j – naturāli skaitļi) ar $i-j$ (šis „attālums” var būt arī negatīvs skaitlis).

No sākuma Tomam jāpārbauda visas alas pēc kārtas no 1 līdz n. Ja brīdī, kad Toms pārbauda pirmo alu, Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru, tad Toms, pēc kārtas pārbaudot alas no 1 līdz n, atradīs Džeriju.

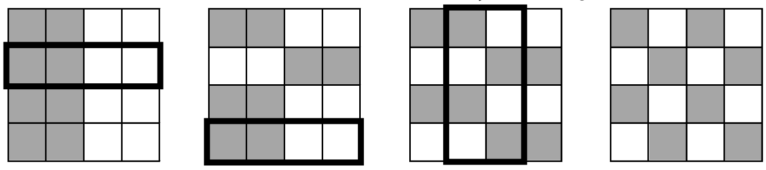
Patiešām, ja brīdī, kad Toms pārbauda pirmo alu, Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru, tad „attālums” starp viņiem ir pozitīvs pāra skaitlis. Ja tad, kad Toms pārbauda pēdējo alu, viņš joprojām Džeriju nav noķēris, tas nozīmē, ka „attālums” starp viņiem ir negatīvs skaitlis; turklāt tam joprojām jābūt pāra skaitlim, jo katrā Toma gājienā „attālums” starp viņu un Džeriju vai nu nemainās (ja viņi pārvietojas vienā un tajā pašā virzienā), vai arī mainās par 2 (ja viņi pārvietojas dažādos virzienos). Tātad, ja sākumā „attālums” bija pozitīvs pāra skaitlis, bet beigās – negatīvs pāra skaitlis, tad kādā brīdī attālums ir bijis 0, kas nozīmē, ka Toms noķēris Džeriju.

Atliek apskatīt gadījumu, kad Toms pārbauda pirmo alu un Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru. Tā kā „attālums” starp Tomu un Džeriju katrā gājienā mainās vai nu par 0, vai 2, tad brīdī, kad Toms pārbaudīs n-to alu, Džerijs atradīsies alā, kuras numuram ir cita paritāte, salīdzinot ar skaitli n. Pēc tam Džerijs pārvietojas uz alu, kurai ir tāda pati paritāte, kāda ir skaitlim n. Tālāk, secīgi pārbaudot visas alas no n līdz 1, Toms noteikti noķers Džeriju, jo „attālums” starp viņiem tagad ir pāra skaitlis.

3.5. Piektā nodarbība

3.5.1. ***Krāsotāju šahs***

Risinājums. Viens no veidiem, kā prasīto var izdarīt, attēlots A3.27. zīm.; tajā katrā gājienā iezīmēts taisnstūris, kurā esošo rūtiņu krāsojums mainīts uz pretējo.



A3.27. zīm.

3.5.2. ***Melīgie sivēntiņi***

Atbilde. Melo Naf-Nafs.

Risinājums. Apzīmēsim attālumu starp Nif-Nifa un Naf-Nafa mājām ar *IA*; attālumu starp Nif-Nifa un Nuf-Nufa mājām ar *IU*; attālumu starp Naf-Nafa un Nuf-Nufa mājām ar *AU*.

Attēlojot sivēntiņu teikto ar nevienādībām, iegūstam:

$$IA > 2IU\,;$$
$$AU > 2IA\,;$$
$$AU > 2IU\,.$$

Izmantojot pirmās divas nevienādības, pakāpeniski iegūstam:

$$AU > 2IA = IA + IA > IA + 2IU > IA + IU\,.$$

Tā kā *IA*, *IU* un *AU* ir trijstūra malas, tad iegūtā nevienādība $AU > IA + IU$ ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tātad nepatiesa ir vai nu pirmā, vai otrā nevienādība (tātad melo vai nu Nif-Nifs, vai Naf-Nafs).

Ja saskaitām otro un trešo nevienādību, tad iegūstam $AU + AU > 2IA + 2IU$, tātad $AU > IA + IU$, bet tas atkal ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tātad nepatiesa ir vai nu otrā, vai arī trešā nevienādība (tātad melo vai nu Naf-Nafs, vai Nuf-Nufs).

Tā kā zināms, ka vismaz divi sivēntiņi saka taisnību, tad melo Naf-Nafs.

3.5.3. ***Interesantās daļas***

Atbilde. Mazākā skaitļa *a* vērtība ir 20.

Risinājums. Saskaitot skaitļa *a* atbilstošās daļas, iegūstam:

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot a=\left(\frac{10}{60}+\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}+\frac{30}{60}\right)\cdot a=\frac{87a}{60}=\frac{29a}{20}\,.$$

Lai daļas $\frac{29a}{20}$ vērtība būtu vesels skaitlis, tad skaitlim *a* jādalās ar 20. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 20, ir pats skaitlis 20.

3.5.4. ***Cita skaitīšanas sistēma***

Atbilde. Krišjānis nosauca skaitli 81.

Risinājums. Patriks saka visus tos skaitļus, kuru pierakstā nav ciparu 3 un 4. Starp pirmajiem simts skaitļiem tādu ir $(10-2)^2 = 64$ (gan desmitu šķirai, gan vienu šķirai iespējamie 8 cipari), t.i., tad, kad Patriks aizskaitīja līdz simts, patiesībā viņš bija saskaitījis 64 elektrības stabus.

Krišjānis izlaiž skaitļus, kuru pierakstā ir cipars 6. Tāpēc, aizskaitījis līdz „59”, viņš ir izlaidis 6 skaitļus; tātad viņam atliek vēl saskaitīt $64-(59-6)=11$ stabus. Skaitot tos, Krišjānis izlaiž visus skaitļus no 60 līdz 69, kā arī skaitli 76. Tāpēc tad, kad Patriks nosauc skaitli „simts” (jeb patiesībā ir saskaitījis 64 stabus), Krišjānis nosauc skaitli $69+11+1=81$.

3.5.5. ***Figūru attiecības***

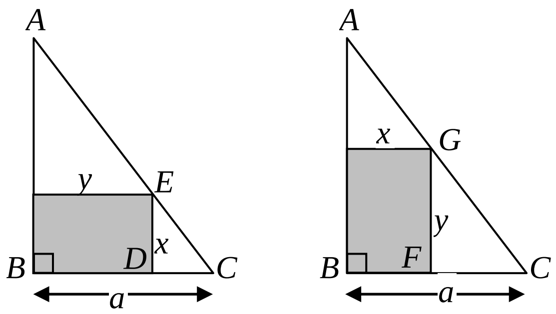
Risinājums. Apzīmēsim taisnstūra malu garumus ar x un y (skat. A3.28. zīm.). Tad $CD = a - y$ un $FC = a - x$.

Trijstūri DCE un FCG ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo $\angle EDC = \angle GFC = 90°$ un $\angle C$ ir trijstūra ABC leņķis, kas vienāds abiem trijstūriem. Tāpēc trijstūru malas ir proporcionālas:

$$\frac{x}{a-y} = \frac{y}{a-x} \text{ jeb } x(a-x) = y(a-y).$$

Atverot iekavas, iegūstam $ax - x^2 = ay - y^2$. Pārveidojam šo vienādību un sadalām reizinātājos: $ax - ay = x^2 - y^2 \Rightarrow a(x-y) = (x-y)(x+y)$.

Tā kā taisnstūris ievilkts trijstūrī divos dažādos veidos, tad secinām, ka $x \neq y$, tātad $x - y \neq 0$. Tāpēc iepriekš iegūtās vienādības abas puses izdalām ar $(x-y)$, tāpēc $a = x + y$. No šejienes iegūstam, ka taisnstūra perimetrs ir $2x + 2y = 2(x+y) = 2a$.



A3.28. zīm.

3.5.6. ***Skaitļu grupējumi***

Atbilde: a) jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums. a) Dotos skaitļus sadalām trīs grupās: (2; 4; 5), (1; 3; 7) un (6; 8; 9). Tajās esošo skaitļu summas ir attiecīgi 11, 11 un 23, kas visi ir pirmskaitļi.

b) No dotajiem skaitļiem mazākā iespējamā triju skaitļu summa ir 1 + 2 + 3 = 6, bet lielākā ir 7 + 8 + 9 = 24. Ir seši pirmskaitļi, kas atrodas starp šiem skaitļiem: 7, 11, 13, 17, 19 un 23. Visu deviņu skaitļu summa ir 45, tātad visu šajās trīs grupās esošo skaitļu summai arī jābūt 45. Tas nozīmē, ka no šiem sešiem pirmskaitļiem jāizvēlas 3 dažādi tā, ka to summa ir 45; bet pārbaudot var pārliecināties, ka to izdarīt nevar. Tātad prasītais nav iespējams.

3.5.7. ***Pēdējā cipara noteikšana***

Atbilde. Summas pēdējais cipars ir 9.

Risinājums. Izmantojot pakāpju īpašības, pārveidojam doto izteiksmi:

$$\underbrace{2013^{2013}+\ldots+2013^{2013}}_{2013\,reizes} = 2013\cdot 2013^{2013} = 2013^{2014}.$$

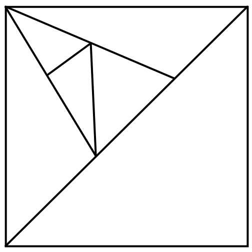
Kāpinot naturālā pakāpē skaitli 3, tā pēdējo ciparu veidotā virkne ir 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; ... . Redzam, ka tā ir periodiska ar periodu 4. Tas nozīmē, ka atliek noskaidrot, kāds ir atlikums, dalot kāpinātāju ar skaitli 4, lai uzzinātu pakāpes pēdējo ciparu:

- ja atlikums ir 1, tad pēdējais cipars ir 3;
- ja atlikums ir 2, tad pēdējais cipars ir 9;
- ja atlikums ir 3, tad pēdējais cipars ir 7;
- ja atlikums ir 0 (kāpinātājs dalās ar 4), tad pēdējais cipars ir 1.

Šajā gadījumā kāpinātājs ir 2014, kuru, izdalot ar skaitli 4, atlikumā iegūst 2; tātad uzdevumā dotās summas pēdējais cipars ir 9.

3.5.8. ***Kaimiņu būšana***

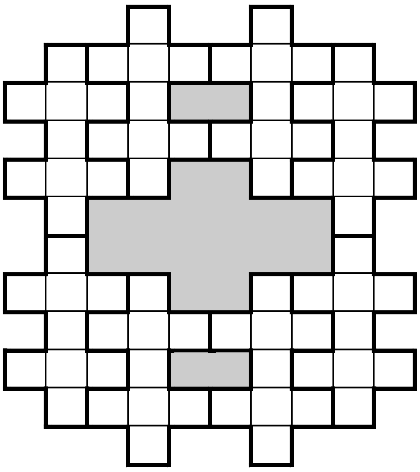
Risinājums. Uzdevumam iespējami vairāki atšķirīgi atrisinājumi; vienu no tiem skat., piemēram, A3.29. zīm.



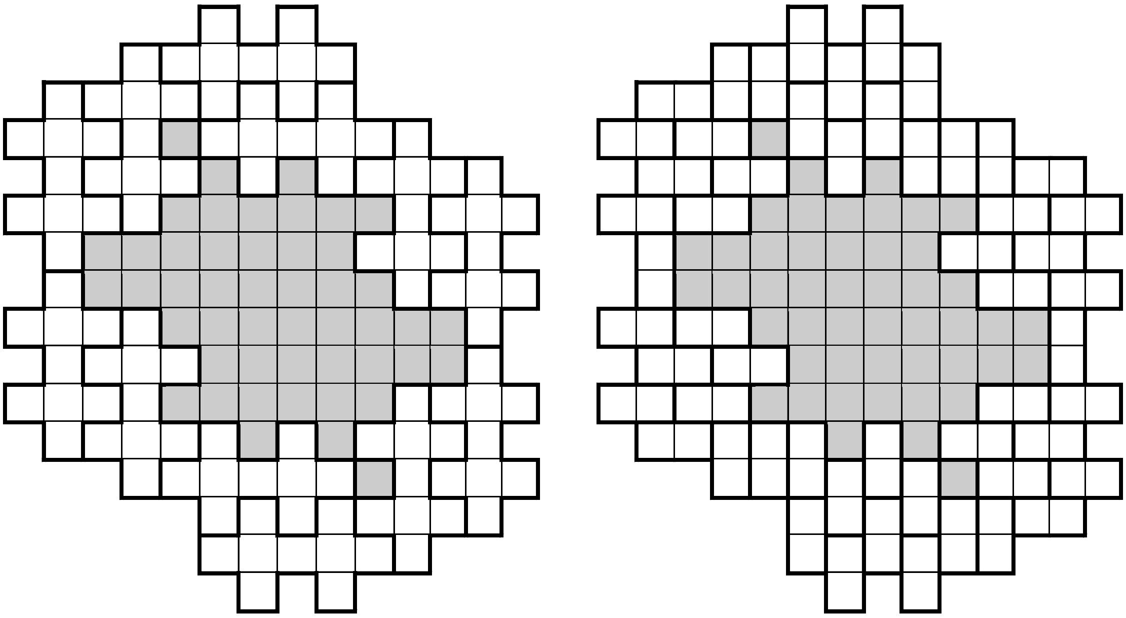
A3.29.zīm.

3.5.9. ***Darbs ar polimino***

Risinājums. Uzdevumam ir vairāki atrisinājumi. Lasītājam piedāvājam divus piemērus (skat. A3.30. un A3.31. zīm.; abus piemērus atsūtījuši PCK dalībnieki).



A3.30. zīm.

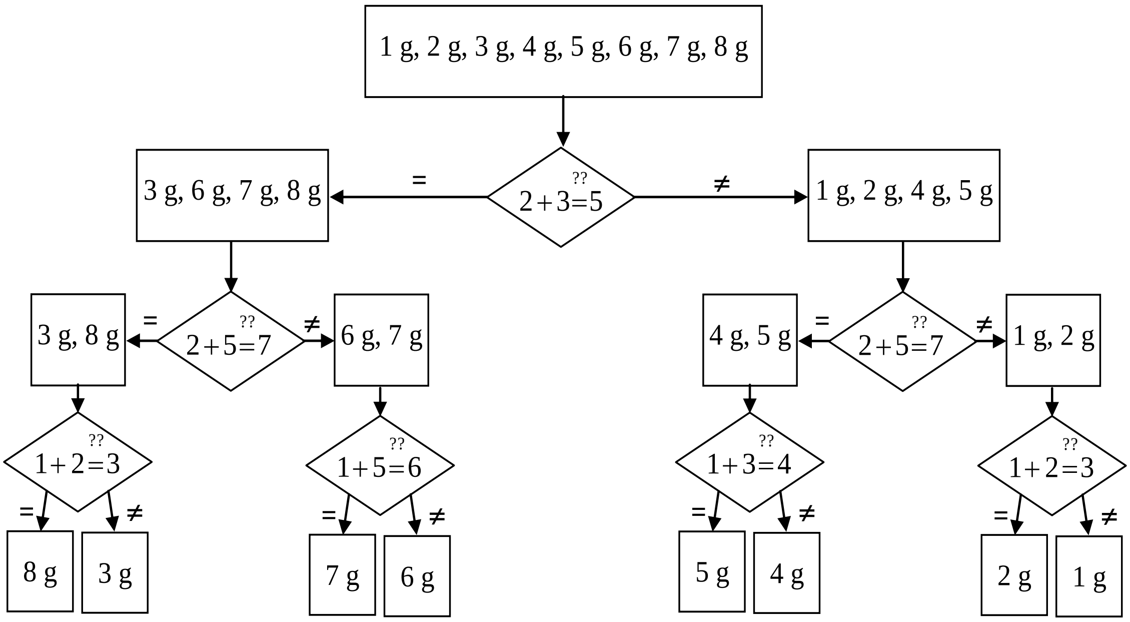


A3.31. zīm.

3.5.10. ***Kā atgūt atsvaru?***

Risinājums. Uzdevuma nosacījumos Alises jautājumus Tomam var aizstāt ar svēršanu uz sviras svariem – nepieciešams ar trim svēršanām noteikt, kurš no atsvariem ir pazudis.

Viens no variantiem, kā atrisināt uzdevumu, parādīts A3.32. zīm. Taisnstūros norādīti, kuri atsvari katrā solī vēl var būt noslēpti. Rombos tiek parādīts, kāda svēršana tiek veikta attiecīgajā solī; turklāt svēršanā tiek izmantoti nepaslēpto atsvaru kārtas numuri.



A3.32. zīm.

Ievērosim, ka gadījumā, ja noslēpts ir atsvars, kura masa ir *n* grami, tad atsvaru ar kārtas numuriem, kas ir mazāki nekā *n*, masa gramos sakrīt ar to kārtas numuru; savukārt atsvaru ar kārtas numuriem *n* vai lielākiem nekā *n* sver par 1 g vairāk nekā to kārtas numurs.

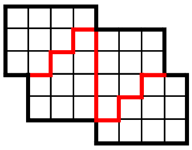
To zinot, var pārbaudīt piedāvāto atrisinājuma shēmu. Šobrīd pārbaudīsim tikai pirmo svēršanu. Iespējami 4 gadījumi:

- pazudis atsvars, kurš ir smagāks nekā 5 grami; tādā gadījumā svari nostāsies līdzsvarā: $2+3=5$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 4 g vai 5 g; tādā gadījumā svari līdzsvarā nenostāsies: $2+3\neq(5+1)$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 3 g; tādā gadījumā atkal būs līdzsvars: $2+(3+1)=(5+1)$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 1 g vai 2 g; šajā gadījumā līdzsvars nebūs: $(2+1)+(3+1)\neq(5+1)$.

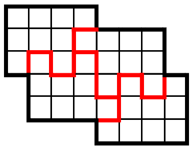
3.6. Sestā nodarbība

3.6.1. ***Vai pratīsi sagriezt figūru?***

Risinājums. Divus uzdevuma nosacījumiem atbilstošus piemērus skat. A3.33. un A3.34. zīm.



A3.33. zīm.



A3.34. zīm.

3.6.2. ***Pēdējā cipara iegūšana***

Atbilde. Pietiek izsvītrot 3 reizinātājus.

Risinājums Noteikti jānosvītro skaitļi, kas dalās ar 5, jo pretējā gadījumā reizinājuma pēdējais cipars būs 5 vai 0; tātad jānosvītro reizinātāji 5 un 10.

Apskatīsim atlikušo skaitļu reizinājumu: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$. Reizinājumi $2\cdot3$, $4\cdot9$ un $7\cdot8$ visi beidzas ar ciparu 6, tāpēc arī to visu reizinājums beidzas ar ciparu 6. Tātad nepieciešams izsvītrot vismaz vēl vienu reizinātāju.

Tiešām, pietiek izsvītrot trīs reizinātājus, piemēram, skaitļus 5, 10 un 3, iegūstot reizinājumu $1\cdot2\cdot(4\cdot9)\cdot(7\cdot8)\cdot6$, kas beidzas ar tādu pašu skaitli, ar kādu beidzas reizinājums $2\cdot6\cdot6\cdot6$, t.i., ar ciparu 2.

Piezīme. Var izsvītrot arī ciparus 5, 10 un 8; arī šajā gadījumā reizinājuma pēdējais cipars ir 2.

3.6.3. ***Skrējiens pēc dāvanas***

Atbilde. Ierašanās pie Ēzelīša I-ā bija paredzēta plkst. 12:40.

Piedāvājam divus risināšanas veidus.

1. risinājums. Tā kā Sivēntiņš skrēja divas reizes ātrāk nekā gāja Vinnijs Pūks, tad tajā brīdī, kad Vinnijs Pūks ieradās pie Ēzelīša I-ā, Sivēntiņš atkal bija pusceļā līdz Ēzelīša mājai. Tā kā viņš nokavēja 10 minūtes, tad Vinnijs Pūks pusceļu nogāja 20 minūtēs, bet visu ceļu – 40 minūtēs. Ja Vinnijs Pūks no mājas izgāja tieši plkst.12:00, tad ierašanās pie Ēzelīša I-ā bija paredzēta plkst. 12:40.

2. risinājums. Apzīmēsim ar t laiku minūtēs, cik ilgi Vinnijs Pūks gāja no Sivēntiņa mājas līdz Ēzelīša I-ā mājai. Sivēntiņš pusceļu nogāja kopā ar Vinniju Pūku; tātad tas bija $\frac{t}{2}$ minūtes. Pēc tam viņš noskrēja attālumu, kas vienāds ar $\frac{3}{2}$ attāluma no viņa mājas līdz Ēzelīša mājai. Tā kā viņš skrēja divas reizes ātrāk, tad viņam šī attāluma veikšanai bija nepieciešams divas reizes mazāk laika nekā Vinnijam, tātad $\frac{3}{4}\cdot t$ minūtes. Tātad kopā Sivēntiņa pavadītais laiks ceļā pie Ēzelīša ir $\frac{t}{2}+\frac{3}{4}\cdot t=\frac{5}{4}\cdot t$. Sivēntiņš nokavēja 10 minūtes, tātad $\frac{5}{4}\cdot t-t=10$, no kurienes $t=40$ minūtes. Ja Vinnijs Pūks no mājas izgāja tieši plkst.12:00, tad ierašanās pie Ēzelīša I-ā bija paredzēta plkst. 12:40.

3.6.4. ***Monētas divas puses***

Atbilde. a) Skat. A3.35. zīm.; **b)** ja sākumā dotas 5 monētas, tad tās šādi apgriezt nav iespējams.

Risinājums

a) Četras monētas atbilstošu uzdevuma noteikumiem var apgriezt tā, kā redzams A3.35. zīm.

A3.35. zīm.

b) Pieņemsim pretējo – ka ir izdevies no sākumā dotām piecām monētām ar ģerboni uz augšu iegūt visas piecas ar ciparu uz augšu. Tad katrai monētai jābūt apgrieztai nepāra skaitu reižu (jo, apgriežot vienu monētu pāra skaitu reižu, iegūstam tās sākuma stāvokli).

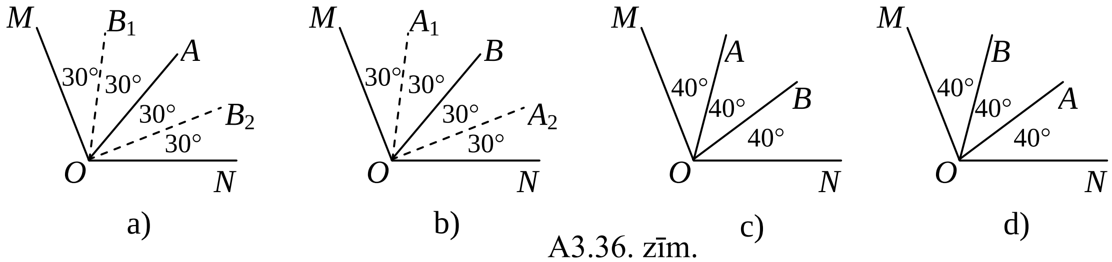
Pieņemsim, ka pirmā monēta apgriezta n_1 reizes, otrā monēta apgriezta n_2 reizes, trešā monēta apgriezta n_3 reizes, ceturtā monēta apgriezta n_4 reizes, piektā monēta apgriezta n_5 reizes (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 – nepāra skaitļi).

Tā kā katru reizi apgriež 4 monētas, tad kopējam monētu apgriešanu skaitam jādalās ar 4: $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 4k$, bet tas nav iespējams, jo piecu nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis un ar 4 dalīties nevar.

Piezīme. Līdzīgi var pierādīt: ja dotas n monētas, kur n – nepāra skaitlis, un ar vienu gājienu atļauts apgriezt $n-1$ monētas, tad visas monētas vienlaicīgi otrādi apgrieztas nevar būt.

3.6.5. ***Dažādie staru izkārtojumi***

Atbilde. Leņķa *MOA* lielums var būt $30°$, $40°$, $60°$, $80°$ vai $90°$. Visi iespējamie staru izkārtojumi redzami A3.36. zīm.



A3.36. zīm.

Risinājums

Apskatīsim visus iespējamos staru izkārtojumus.

a) Ja stars *OA* ir dotā leņķa *MON* bisektrise (skat. A3.36. a) zīm.), tad $\angle MOA = 60°$ (neatkarīgi no tā, vai stars *OB* ir leņķa *MOA* vai leņķa *NOA* bisektrise).

b) Ja stars *OB* ir dotā leņķa *MON* bisektrise (skat. A3.36. b) zīm.), tad $\angle MOA = 30°$ (ja stars *OA* ir leņķa *MOB* bisektrise) vai $\angle MOA = 90°$ (ja stars *OA* ir leņķa *NOB* bisektrise).

c) Ja stars *OA* ir leņķa *MOB* bisektrise, bet stars *OB* ir leņķa *NOA* bisektrise (skat. A3.36. c) zīm.), tad dotais leņķis tiek sadalīts trīs vienādās daļās un $\angle MOA = 40°$.

d) Ja stars *OB* ir leņķa *MOA* bisektrise, bet stars *OA* ir leņķa *NOB* bisektrise (skat. A3.36. d) zīm.), tad dotais leņķis atkal tiek sadalīts trīs vienādās daļās, bet šajā gadījumā $\angle MOA = 80°$.

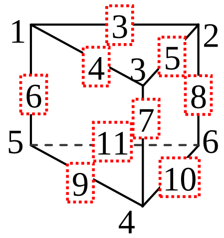
3.6.6. ***Iekavu reizinājumi***

Atbilde. Šādi skaitļi neeksistē.

Risinājums. Ja *n* ir pāra skaitlis, tad vienādības kreisā puse ir nepāra skaitlis, bet labā puse – pāra skaitlis. Ja *n* ir nepāra skaitlis, tad vienādības kreisā puse ir pāra skaitlis, bet labā puse – nepāra skaitlis. Tātad nav tādu veselu skaitļu, ar kuriem dotā vienādība būtu patiesa.

3.6.7. ***Dažādās summas***

Atbilde. Jā, to var izdarīt; vienu piemēru skat. A3.37. zīm. (uz šķautnēm uzrakstītās summas ierakstītas rāmītī).

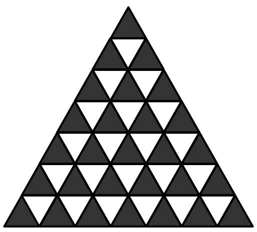


A3.37. zīm.

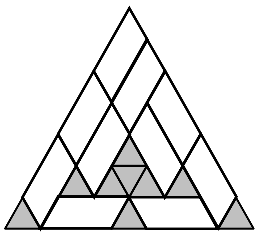
3.6.8. ***Paralelogramu izgriešana***

Atbilde. Lielākais skaits paralelogramu, ko var izgriezt, ir 10.

Risinājums. Izkrāsosim mazos trijstūrīšus baltā un melnā krāsā (skat. A3.38. zīm.) Var ievērot, ka katrs paralelograms satur divus baltos trijstūrīšus; tā kā pavisam lielajā trijstūrī ir 21 balts trijstūrītis, tad paralelogramu skaits nepārsniedz 10. Tas, ka 10 paralelogramus izgriezt ir iespējams, redzams A3.39. zīm.



A3.38. zīm.



A3.39. zīm.

3.6.9. ***Rūķu aptauja***

Atbilde. Uz salas dzīvo vai nu 3, vai 5 papadumi cilts rūķi.

Risinājums. Apzīmēsim ar *x* kopējo salas iedzīvotāju skaitu. Katrs no viņiem sniedza $x-1$ atbildi, tāpēc kopējais atbilžu skaits ir $x(x-1)=26+30$, tātad $x=8$.

Ar *y* apzīmēsim papadumi cilts rūķu skaitu, tad čapati rūķu skaits ir $8-y$. Katrs no papadumi cilts rūķiem atbildēja „papadumi" $y-1$ reizi, bet katrs no čapati cilts rūķiem atbildi „papadumi" sniedza $7-y$ reizes. Iegūstam vienādojumu $y(y-1)+(8-y)(7-y)=26$. Atverot iekavas un vienkāršojot vienādību, iegūstam kvadrātvienādojumu $y^2-8y+15=0$, kuram ir divas saknes: $y=3$ un $y=5$.

Pārbaudot secinām, ka tās abas apmierina uzdevuma nosacījumus (abos gadījumos 30 reizes iegūst atbildi „čapati”).
Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī veicot pilno pārlasi. Lai pārlasi vienkāršotu, var ievērot, ka skaitlim 30 jādalās gan ar divkāršotu čapati cilts, gan divkāršotu papadumi cilts rūķu skaitu. Tiešām, ja ir y papadumi cilts rūķu un z čapati cilts rūķu, tad $yz + zy = 30$ jeb $2zy = 30$.

3.6.10. ***Kā atrast tukšāko lādi?***

Risinājums. Lai izdarītu prasīto, pietiek pārbaudīt, cik ir kopā monētu lādēs, kuras atrodas pāra pozīcijās, t.i., cik ir kopā monētu otrajā, ceturtajā, sestajā, astotajā un desmitajā lādē.
Pārliecināsimies, ka ar šo pārbaudi patiešām pietiek, lai noskaidrotu, no kuras lādes paņemtas monētas. Apskatīsim atsevišķi divus gadījumus – monētas paņemtas no lādes, kuras numurs ir pāra skaitlis, vai arī no lādes, kuras numurs ir nepāra skaitlis.
a) Pieņemsim, ka lāde, no kuras izņemtas monētas, atrodas pāra vietā; apzīmēsim lādes atrašanās vietu ar naturālu skaitli n, kur $n \leq 10$ un ir pāra skaitlis. Lai pārliktu tieši pa vienai monētai katrā no lādēm, kas atrodas pa labi no izvēlētās lādes, nepieciešams no n-tās lādes izņemt $(11-n)$ monētas; savukārt visās lādēs, kas no n-tās lādes atrodas pa labi, pēc monētu pārlikšanas atrodas par vienu monētu vairāk nekā sākumā.
Monētu kopējo daudzumu 2., 4., 6., 8. un 10. lādēs var uzrakstīt kā sākotnējo monētu daudzumu summu katrā no lādēm, no kuras atņemts *izņemto* monētu skaits, bet pieskaitīts *papildināto* pāra lāžu skaits. Var pamanīt, ka, ja izņem monētas no n-tās lādes un n ir pāra skaitlis, tad pārējās lādēs, kuru numuri ir pāra skaitļi, monētu skaits palielinājies kopā par $\left(5-\frac{1}{2}n\right)$ monētām.
Tātad, veicot pārbaudi, tiks iegūts skaitlis, kuru var uzrakstīt kā izteiksmi $5\cdot 100-(11-n)+\left(5-\frac{1}{2}n\right)$, kuru vienkāršojot iegūstam $494+0{,}5n$. Tā kā $n \leq 10$, tad arī $494+0{,}5n \leq 494+0{,}5\cdot 10 = 499$, un iegūtā summa būs mazāka nekā 500.
b) Pieņemsim, ka lāde, no kuras izņemtas monētas, atrodas nepāra vietā; apzīmēsim lādes atrašanās vietu ar naturālu skaitli n, kur $n \leq 11$ un ir nepāra skaitlis. Tāpat kā iepriekšējā gadījumā, lai pārliktu tieši pa vienai monētai katrā no lādēm, kas atrodas pa labi no izvēlētās lādes, atkal nepieciešams no n-tās lādes izņemt $(11-n)$ monētas; savukārt visās lādēs, kas no n-tās lādes atrodas pa labi, pēc monētu pārlikšanas atrodas par vienu monētu vairāk nekā sākumā.
Skaidrs, ka šoreiz, noskaidrojot kopējo monētu daudzumu 2., 4., 6., 8. un 10. lādēs, šajā summā neietilps monētu skaits lādē, no kuras monētas tika paņemtas. Tātad pārbaudē iegūtais skaitlis var tikt izteikts kā sākotnējo monētu daudzumu summa katrā no lādēm, pie kura pieskaitīts *papildināto* pāra lāžu skaits. Var ievērot, ka, ja izņem monētas no n-tās lādes un n ir nepāra skaitlis, tad pārējās lādēs, kuru numuri ir pāra skaitļi, monētu skaits palielinājies kopā par $\left(5-\frac{n-1}{2}\right)$ monētām.

Tātad, veicot pārbaudi, tiks iegūts skaitlis, kuru var uzrakstīt kā izteiksmi $5 \cdot 100 + \left(5 - \frac{n-1}{2}\right)$, kuru vienkāršojot iegūstam $505{,}5 - 0{,}5n$. Tā kā $n \leq 11$, tad arī $505{,}5 - 0{,}5n \geq 505{,}5 - 0{,}5 \cdot 11 = 500$, tātad iegūtā summa būs vismaz 500.

Lai noskaidrotu, no kuras lādes monētas tika paņemtas, jāveic iepriekš aprakstītā pārbaude un, ja iegūtais skaitlis ir mazāks nekā 500, tad skaidrs, ka monētas izņemtas no pāra lādes un n var aprēķināt no a) gadījumā iegūtās sakarības, savukārt, ja iegūtā summa ir 500 vai lielāka, tad monētas izņemtas no nepāra lādes un, lai aprēķinātu n vērtību, jāizmanto b) gadījumā iegūtā sakarība.

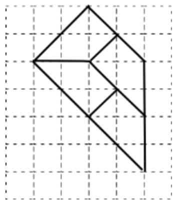
4. LATVIJAS 26. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. Piektā klase

4.5.1. Atbilde. Vilkam pienākas 840 lati.

Risinājums. Pieņemsim, ka par grāmatu „*Izturīgās būves*” katram autoram pienākas a latu liels honorārs (kopējais honorārs par grāmatu ir $4a$ Ls), bet par grāmatu „*Visvisādi pīrādziņi*” katram autoram ir b latu liels honorārs (kopējais honorārs par šo grāmatu ir $3b$ Ls). Pēc tam, kad Naf-Nafs saņēma savu daļu, t.i., a latus, neizņemti ir $3a+3b=3(a+b)=2520$ lati. Vilkam pienākas $a+b$ lati, kas ir trešā daļa no atlikušās summas jeb 840 lati.

4.5.2. Atbilde. Skat., piemēram, A4.1. zīm.



A4.1. zīm.

4.5.3. Atbilde. Robinsons aprēķinus veica piektdienā.

Risinājums. Tā kā nedēļā ir septiņas dienas un $1000=7\cdot 142+6$, tad visās pilnajās nedēļās ir vienāds ceturtdienu un piektdienu skaits, bet nepilnajā nedēļā pietrūkst viena diena (visas pārējās ir vienādā skaitā). Tātad trūkstošā diena ir piektdiena, tāpēc tā arī ir diena, kad Robinsons veica aprēķinus.

4.5.4. Atbilde. Skaitlis C ir 9.

Risinājums

Aprēķinām visu ciparu no 0 līdz 9 ciparu summu:

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Ievērojam, ka skaitļa A ciparu summu var iegūt no 45 atņemot skaitli C un skaitļa B ciparu summu.

Apskatām visas iespējamās C vērtības.

Skaitlis C (B ciparu summa)	**Skaitlis B**	**Pārbaude, vai izpildās uzdevuma nosacījumi**
0	--	Nav tāda divciparu skaitļa, kura ciparu summa ir 0
1	10	Neder, jo cipars 1 atkārtojas divas reizes
2	20	Neder, jo cipars 2 atkārtojas divas reizes
	11	Neder, jo cipars 1 atkārtojas divas reizes
3	30	Neder, jo cipars 3 atkārtojas divas reizes
	12, 21	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-3-3=39$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām
4	40	Neder, jo cipars 4 atkārtojas divas reizes
	13, 31	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-4-4=37$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām
	22	Neder, jo cipars 2 atkārtojas divas reizes
5	50	50 – neder, jo cipars 5 atkārtojas divas reizes
	14, 41, 23, 32	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-5-5=35$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām

6	60	Neder, jo cipars 6 atkārtojas divas reizes
	33	Neder, jo cipars 3 atkārtojas divas reizes
	15, 51, 24, 42	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-6-6=33$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām
7	70	Neder, jo cipars 7 atkārtojas divas reizes
	16, 61, 25, 52, 34, 43	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-7-7=31$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām
8	80	Neder, jo cipars 8 atkārtojas divas reizes
	44	Neder, jo cipars 4 atkārtojas divas reizes
	17, 71, 26, 62, 35, 53	Neder, jo skaitļa A ciparu summa $45-8-8=29$, kas nesakrīt ne ar vienu no skaitļa B vērtībām
9	90	Neder, jo cipars 9 atkārtojas divas reizes
	18, 81, **27**, 72, 36, 63, 45, 54	Der, jo skaitļa A ciparu summa $45-9-9=27$, kas sakrīt ar $B=27$

Tātad vienīgā iespēja, ka $C=9$.

4.5.5. Atbilde. No A līdz B var nokļūt 20 dažādos veidos.

Risinājums. Katrā rūtiņā ierakstīsim, cik dažādos veidos tajā var nonākt. Sākotnējā (A) rūtiņā ierakstīsim 1 (sākuma rūtiņā „var nonākt" vienā veidā). Katrā no pārējām rūtiņām var nonākt tikai no blakus rūtiņas pa kreisi vai blakus rūtiņas apakšā, tad kopējais veidu skaits, kā var tajā nonākt, ir vienāds ar šajās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summu. Šādā veidā aizpildot visu tabulu, iegūstam, ka rūtiņā B var nonākt 20 dažādos veidos (skat. A4.2. zīm.).

1	**1**	**4**	**4**	**10**	**10**	**20**
1		**3**		**6**		**10**
1	**1**	**3**	**3**	**6**	**6**	**10**
1		**2**		**3**		**4**
1	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
1		**1**		**1**		**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

A4.2.zīm.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Atbilde: a) 35, **b)** 3675.

Risinājums. Vispirms sadalīsim skaitli 315 pirmreizinātājos: $315=3\cdot3\cdot5\cdot7$.

a) Ja skaitlis ir naturāla skaitļa reizinājums pašam ar sevi, tad visi tajā ietilpstošie pirmreizinātāji sastopami pāra skaita reižu. Tātad skaitlis 315 vēl jāreizina vismaz ar vienu skaitli 5 un vismaz vienu skaitli 7; tātad mazākais skaitlis, ar kuru reizinot skaitli 315, iegūsim naturāla skaitļa reizinājumu pašam ar sevi, ir $5\cdot7=35$, un iegūtais reizinājums ir $11025=105\cdot105$.

b) Ja skaitlis ir naturāla skaitļa reizinājums pašam ar sevi trīs reizes, tad visi tajā ietilpstošie pirmreizinātāji sastopami 3, 6, 9… reizes. Tātad mazākais skaitlis, ar kuru reizinot 315, iegūsim šādu situāciju, ir $3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7=3675$, un iegūtais reizinājums ir $1157625=105\cdot105\cdot105$.

4.6.2. Atbilde. Sākumā Vinnijam Pūkam bija $\frac{24}{25}$ tortes un Sivēntiņam $\frac{1}{25}$ tortes.

Risinājums. Ja Sivēntiņa daļa palielinājās septiņas reizes, tad tas nozīmē, ka no Vinnija Pūka viņš saņēma sešas reizes lielāku tortes daļu nekā viņam jau bija. Tā kā šis saņemtais gabals bija ceturtā daļa no Vinnija Pūka sākotnējā gabala, tad sākumā Vinnijam Pūkam bija 24 reizes lielāks gabals nekā Sivēntiņam. Tātad sākumā Vinnijam Pūkam bija $\frac{24}{25}$ tortes un Sivēntiņam $\frac{1}{25}$ tortes.

4.6.3. Atbilde. Zemes gabala perimetrs ir 2678 metri.

Risinājums. Taisnstūra garākās malas garumu metros apzīmēsim ar a, tad otras malas garums ir $a-7$ metri.

Tā kā nav zināms tieši kuru trīs malu summa ir 2012 metri, tad ir iespējami divi gadījumi.

1) Ja divu īsāko malu un vienas garākās malas garumu summa ir 2012, tad

$$a+(a-7)+(a-7)=2012;$$
$$3a-14=2012;$$
$$3a=2026.$$

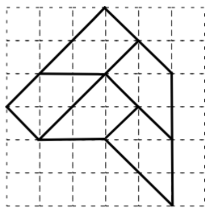
Skaitlis 2026 nedalās ar 3 (jo ciparu summa nedalās ar 3), tāpēc a nav vesels skaitlis un šis gadījums neder.

2) Ja divu garāko malu un vienas īsākās malas garumu summa ir 2012, tad

$$a+a+(a-7)=2012;$$
$$3a-7=2012;$$
$$3a=2019;$$
$$a=673 \text{ un } a-7=666.$$

Tātad dotā zemes gabala perimetrs ir $2\cdot(673+666)=2678$ metri.

4.6.4. Atbilde. Skat., piemēram, A4.3. zīm.



A4.3. zīm.

4.6.5. Atbilde. Skaitli 20 kā piecu dažādu saskaitāmo summu var izteikt 7 veidos.

Risinājums. Ievērojam, ka lielākais saskaitāmais šajās summās nepārsniedz 10, jo pārējo četru skaitļu summa nevar būt mazāka kā četru mazāko naturālo skaitļu summa $1+2+3+4=10$, un lielākais saskaitāmais nav mazāks kā 6, jo, ja tas ir lielākais skaitlis, tad pārējo četru skaitļu summa nepārsniedz $5+4+3+2=14$.

Tālāk aplūkojam visus iespējamos variantus:

$$20=10+4+3+2+1;$$
$$20=9+5+3+2+1;$$
$$20=8+6+3+2+1;$$
$$20=8+5+4+2+1;$$
$$20=7+6+4+2+1;$$
$$20=7+5+4+3+1;$$
$$20=6+5+4+3+2.$$

Tātad skaitli 20 kā piecu dažādu saskaitāmo summu var izteikt 7 veidos.

4.7. Septītā klase

4.7.1. Atbilde. Lielākā daļskaitļa vērtība ir $\frac{251}{1761}$.

Risinājums. Tā kā skaitītāja un saucēja summa ir nemainīga, tad lielāka vērtība ir daļai, kurai ir pēc iespējas lielāks skaitītājs. Tātad ir jāatrod pēc iespējas lielāka n vērtība, kurai

$$\frac{n}{2012-n} \leq \frac{1}{7};$$

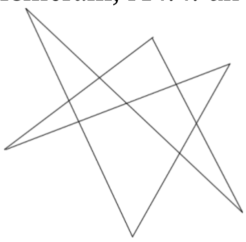
$$7n \leq 2012-n;$$

$$8n \leq 2012;$$

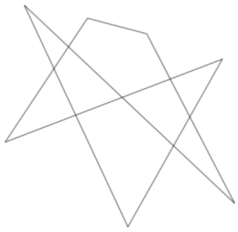
$$n \leq 251.$$

Tātad lielākā iespējamā šāda daļskaitļa vērtība ir $\frac{251}{1761}$.

4.7.2. Atbilde. Skat., piemēram, A4.4. un A4.5. zīm.



A4.4. zīm.



A4.5. zīm.

4.7.3. Atbilde. Minimālā taisnstūra izmēri ir 3 × 4 rūtiņas (skat., piemēram, A4.6. zīm.).

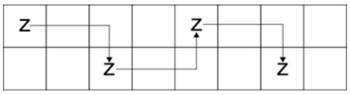
3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

A4.6. zīm.

Risinājums

Lai zirdziņš vispār varētu izdarīt gājienu, taisnstūra malu garumiem jābūt vismaz 2 rūtiņas.

Ja taisnstūra vienas malas garums ir 2 rūtiņas, tad zirdziņš var nokļūt tikai katras rindas katrā ceturtajā rūtiņā (skat. A4.7. zīm.). Tātad šis gadījums neder un vienas malas garums ir vismaz 3 rūtiņas.



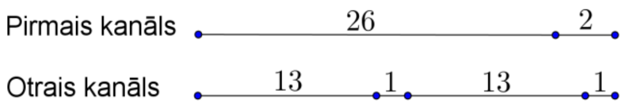
A4.7. zīm.

Ja taisnstūra vienas malas garums ir 3 rūtiņas, tad jāapskata vairāki gadījumi:

- tas, ka neder taisnstūris ar izmēriem 3×2 apskatīts jau 1) gadījumā;
- neder arī taisnstūris ar izmēriem 3×3, jo tajā ne no vienas citas rūtiņas zirdziņš nevar nonākt centrālajā rūtiņā;
- tas, ka taisnstūris ar izmēriem 3×4 rūtiņas der, ir parādīts A4.6. zīm., kur skaitļi norāda secību, kā zirdziņš var apstaigāt taisnstūri.

4.7.4. Atbilde. Filma ātrāk beigsies pirmajā kanālā.

Risinājums. Pēc katrām 28 minūtēm abos kanālos vienlaicīgi sāksies jauns filmas fragments (skat. A4.8. zīm.) No brīža, kad pirmais kanāls sāks rādīt pēdējo fragmentu, paies 26 minūtes. Savukārt, otrajā kanālā filma beigsies pēc $13+1+13=27$ minūtēm. Tātad pirmajā kanālā filma beigsies par vienu minūti ātrāk.



A4.8. zīm.

4.7.5. Atbilde: a) jā, **b)** nē.

Risinājums

a) Tā kā $\overline{AABB}=1100A+11B=11\cdot(100A+B)$, tad skaitlis $\overline{AABB}$ dalās ar 11. Tas nozīmē, ka $(100A+B)$ jābūt naturāla skaitļa kvadrāta reizinājumam ar 11, t. i., $100A+B=11\cdot x^2$, jo tikai tādā gadījumā $\overline{AABB}$ būs naturāla skaitļa kvadrāts: $\overline{AABB}=11^2\cdot x^2=(11x)^2$. Skaitlim $(100A+B)=99A+(A+B)$ jādalās ar 11. Saskaitāmais $99A$ dalās ar 11, tātad arī saskaitāmajam $(A+B)$ jādalās ar 11. Tā kā A un B ir cipari, tad ir jāpārbauda divas iespējas, kāda var būt summa $(A+B)$, lai tā dalītos ar 11:

1) ja $A+B=0$, tad jābūt, ka $A=0$ un $B=0$, bet šis gadījums neder, jo A un B jābūt dažādiem cipariem;

2) ja $A+B=11$, tad $(100A+B)=99A+(A+B)=99A+11=11\cdot(9A+1)$ un $(9A+1)$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Pārbaudot visas iespējamās A vērtības, der tikai $A=7$. Tā kā $A+B=11$, tad $B=11-7=4$. Esam ieguvuši, ka $\overline{AABB}=11\cdot(100A+B)=11\cdot11\cdot(9A+1)=11^2\cdot64=11^2\cdot8^2=(11\cdot8)^2=88^2$.

Tātad uzdevuma prasības apmierina skaitlis $7744=88^2$.

Piezīme. Ja uzdevumā uzdots jautājums „Vai var būt…?" un atbilde ir „jā", tad risinājumā pietiek tikai parādīt piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas. Šeit tika dots izvērstāks risinājums, kurā parādīts, kā meklēto skaitli var atrast.

b) Ievērojam, ka

$$\overline{ABAB}=1000A+100B+10A+B=100(10A+B)+(10A+B)=$$
$$=100\cdot\overline{AB}+\overline{AB}=101\cdot\overline{AB}$$

Skaitlis 101 ir pirmskaitlis. Tā kā divciparu skaitlis $\overline{AB}$ nevar dalīties ar 101, tad $\overline{ABAB}$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Atbilde: 1380.

Risinājums. No 1 līdz 2012 pavisam ir $2010:5=402$ skaitļi, kas dalās ar 5, un $2009:7=287$ skaitļi, kas dalās ar 7. Taču summā $402+287=689$ skaitļi, kas dalās gan ar 5, gan ar 7 ir ieskaitīti divas reizes, tāpēc jāaprēķina, cik no 1 līdz 2012 ir tādu skaitļu, kas dalās ar abiem šiem skaitļiem. No 1 līdz 2012 pavisam ir $1995:35=57$ skaitļi, kas dalās gan ar 5, gan ar 7. Esam ieguvuši, ka no 1 līdz 2012 pavisam ir $689-57=632$ skaitļi, kas dalās ar 5 vai 7

Tātad tādu skaitļu, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7, skaits ir $2012-632=1380$.

4.8.2. Atbilde. Lielākā *n* vērtība ir 7.

Uz tāfeles var būt uzrakstīti, piemēram, skaitļi 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11.

Risinājums

Visu uzrakstīto skaitļu summu apzīmēsim ar *S*, uzrakstīto skaitļu vidējo aritmētisko apzīmēsim ar k_1. Tad $k_1 = \frac{S}{n}$ jeb

$$S = n \cdot k_1. \qquad (1)$$

Pēc skaitļa 11 nodzēšanas, atlikušo skaitļu vidējo aritmētisko apzīmēsim ar k_2. Tad $k_2 = \frac{S-11}{n-1}$ un, no šīs izteiksmes izsakot *S*, iegūst

$$S = (n-1) \cdot k_2 + 11. \qquad (2)$$

Tā kā vienādību (1) un (2) kreisās puses ir vienādas, tad arī to labajām pusēm ir jābūt vienādām: $n \cdot k_1 = (n-1) \cdot k_2 + 11$.

Pārveidosim šo izteiksmi:

$$n \cdot k_1 = n \cdot k_2 - k_2 + 11;$$
$$n \cdot k_1 - n \cdot k_2 = 11 - k_2;$$
$$n \cdot (k_1 - k_2) = 11 - k_2.$$

Pēdējās vienādības kreisās puses izteiksme vienmēr dalās ar *n*. Lai pastāvētu vienādība, arī labās puses izteiksmei jādalās ar *n*. Apskatām *n* vērtības, sākot ar lielāko iespējamo.

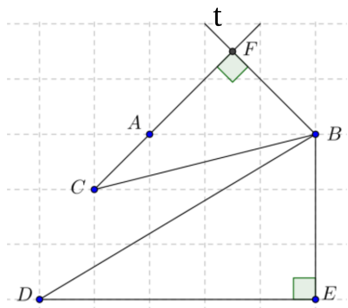
- Ja $n = 11$ (sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 11 skaitļi), tad izteiksme $11 - k_2$ dalās ar 11 tikai tad, ja
    - $k_2 = 0$ – tā nevar būt, jo naturālu skaitļu no 1 līdz 10 vidējais aritmētiskais nevar būt 0;
    - $k_2 = 11$ – tā nevar būt, jo naturālu skaitļu no 1 līdz 10 vidējais aritmētiskais nevar būt 11.
- Ja $n = 10$ (sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 10 skaitļi), tad izteiksme $11 - k_2$ dalās ar 10 tikai tad, ja
    - $k_2 = 1$ – tā nevar būt, jo deviņu dažādu naturālu skaitļu, kas lielāki vai vienādi ar 1, vidējais aritmētiskais nevar būt 1;
    - $k_2 = 11$ – tā nevar būt, jo deviņu dažādu naturālu skaitļu, kas visi mazāki nekā 11, vidējais aritmētiskais nevar būt 11.
- Ja $n = 9$ (sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 9 skaitļi), tad izteiksme $11 - k_2$ dalās ar 9 tikai tad, ja
    - $k_2 = 2$ – tā nevar būt, jo pat astoņu vismazāko dažādo naturālo skaitļu vidējais aritmētiskais ir
    $$(1+2+3+4+5+6+7+8) : 8 = 36 : 8 = 4.5 > 2;$$
    - $k_2 = 11$ – tā nevar būt, jo astoņu dažādu naturālu skaitļu, kas visi mazāki nekā 11, vidējais aritmētiskais nevar būt 11.
- Ja $n = 8$ (sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 8 skaitļi), tad izteiksme $11 - k_2$ dalās ar 8 tikai tad, ja
    - $k_2 = 3$ – tā nevar būt, jo pat septiņu vismazāko dažādo naturālo skaitļu vidējais aritmētiskais ir $28 : 7 = 4 > 3$;
    - $k_2 = 11$ – tā nevar būt, jo septiņu dažādu naturālu skaitļu, kas visi mazāki nekā 11, vidējais aritmētiskais nevar būt 11.

- Ja $n=7$ (sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 7 skaitļi), tad izteiksme $11-k_2$ dalās ar 7 tikai tad, ja
  - $k_2=4$ – tā var būt un uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir
    1, 2, 3, 5, 6, 7, 11 vai 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, vai 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11.

Tāpēc $n=7$ ir lielākā iespējamā vērtība.

4.8.3. Atbilde: $\angle ACB = \angle BDE$.

Risinājums. Pagarinām *CA* un no virsotnes *B* novelkam taisni *t*, kas iet pa rūtiņu diagonālēm. Taisnes *CA* un *t* krustpunktu apzīmējam ar *F* (skat. A4.9. zīm.). Ievērojam, ka *CF* un *BF* tiek vilkti pa rūtiņu diagonālēm, tāpēc ΔCFB ir taisnleņķa trijstūris. Trijstūri ΔCFB un ΔCFB ir līdzīgi (pēc pazīmes „$m\ell m$”), jo $\frac{CF}{BF}=\frac{DE}{BE}=\frac{5}{3}$ un $\angle CFB = \angle DEB = 90°$. Tātad $\angle ACB = \angle BDE$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.



A4.9. zīm.

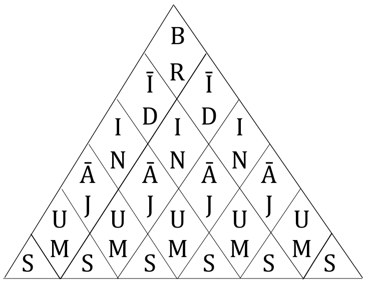
4.8.4. Atbilde. Ne obligāti vidējais ātrums visā pārgājienā bija 4 km/h. Mazākais iespējamais tūrista vidējais ātrums ir $3\frac{5}{9}$ km/h un lielākais – $4\frac{4}{9}$ km/h.

Risinājums. Pēc četrām stundām tūrists noteikti ir veicis 16 km (jo katrā 1 stundu garā laika sprīdī ir veikti tieši 4 km). Pēdējā pusstundā tūrists var veikt jebkuru attālumu no 0 km līdz 4 km (vairāk nevar, jo tad pēdējās stundas laikā būtu veikts vairāk nekā 4 km). Līdz ar to kopējais pārgājienā veiktais attālums var būt jebkurš attālums no 16 km līdz 20 km, tātad vidējais ātrums var būt jebkurš no $\frac{16}{4{,}5}=\frac{32}{9}=3\frac{5}{9}$ km/h līdz $\frac{20}{4{,}5}=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$ km/h. Mazāko no šīm vērtībām var sasniegt, ja, piemēram, pirmajā, trešajā, piektajā, septītajā un devītajā pusstundā nepārvietojas (veic 0 km), bet otrajā, ceturtajā, sestajā un astotajā pusstundā veic 4 km. Lielāko vidējā ātruma vērtību var sasniegt, ja, piemēram, pirmajā, trešajā, piektajā, septītajā un devītajā pusstundā veic 4 km, bet otrajā, ceturtajā, sestajā un astotajā pusstundā nepārvietojas.

4.8.5. Atbilde. Vārdu BRĪDINĀJUMS var izlasīt 32 dažādos veidos.

Risinājums

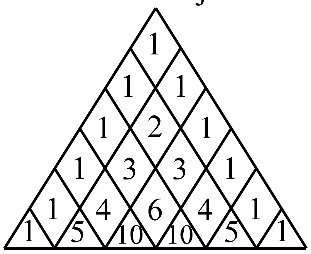
1. risinājums. Ievērosim, ka dažos gadījumos ir iespējama tikai viena pāreja (B-R, Ī-D, I-N, Ā-J, U-M), bet visos citos gadījumos – divas. Ja nodzēsīsim viennozīmīgās robežas, tad iegūsim A4.10. zīm.



A4.10. zīm.

Tagad no katra rombiņa ir divi iespējami gājieni. Tā kā pilna vārda izveidošanai nepieciešami pieci gājieni, tad kopējais variantu skaits ir $2^5 = 32$.

2. risinājums. Ievērosim, ka dažos gadījumos ir iespējama tikai viena pāreja (B-R, Ī-D, I-N, Ā-J, U-M), tāpēc tās trijstūrīšu malas nodzēsīsim. Katrā palikušajā laukumiņā ierakstīsim, cik dažādos veidos tajā var nonākt (skat. A4.11. zīm.).



A4.11. zīm.

Katrā no laukumiņiem var nonākt tikai no augšējiem blakus laukumiņiem, tad kopējais dažādo veidu skaits, kā var tajā nonākt, ir vienāds ar šajos blakus laukumiņos ierakstīto skaitļu summu (saskaitīšanas likums). Šādā veidā aizpildām visus laukumiņus. Tā kā vārds BRĪDINĀJUMS var beigties vai nu ar pirmo S burtu no kreisās puses, vai ar otro, …, vai ar pēdējo, tad iegūstam, ka vārdu BRĪDINĀJUMS pavisam kopā var izlasīt $1+5+10+10+5+1=32$ (saskaitīšanas likums) dažādos veidos.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Atbilde: $a=-2, b=-1, c=0, d=1$ un $e=2$, vai $a=2, b=1, c=0, d=-1$ un $e=-2$.

Risinājums

No aritmētiskās progresijas definīcijas izteiksim *b*, *c*, *d* un *e*, izmantojot *a* un aritmētiskās progresijas diferenci f: $b=a+f$, $c=a+2f$, $d=a+3f$ un $e=a+4f$. Tātad dotais kvadrātvienādojums ir $ax^2+(a+2f)x+a+4f=0$ un pēc dotā tā saknes ir $x_1=a+f$ un $x_2=a+3f$.

Vienādojuma sakne ir tāda *x* vērtība, kuru ievietojot vienādojumā *x* vietā, iegūst identitāti. Tātad

$$a(a+f)^2+(a+2f)(a+f)+a+4f=0; \qquad (*)$$

$$a(a+3f)^2+(a+2f)(a+3f)+a+4f=0.$$

No otrās vienādības atņemot pirmo, iegūstam

$$a((a+3f)^2-(a+f)^2)+(a+2f)(a+3f-a-f)=0;$$

$$a(2a+4f)\cdot 2f+(a+2f)\cdot 2f=0;$$

$$2f(a+2f)(2a+1)=0.$$

Lai reizinājuma vērtība būtu 0, kādam no reizinātājiem jābūt 0.

Iespējami trīs gadījumi:

1) $f = 0$. Tad no (*) iegūst, ka $a(a^2 + a + 1) = 0$. Tā kā izteiksmes $a^2 + a + 1$ vērtība vienmēr ir pozitīva, tad $a = 0$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka a nav 0. Tātad vērtība $f = 0$ neder.

2) $2a + 1 = 0$ jeb $a = -\frac{1}{2}$, kas ir pretrunā ar doto, ka a ir vesels skaitlis.

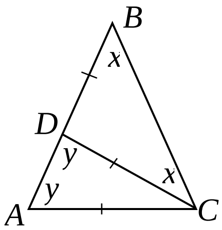
3) $a + 2f = 0$ jeb $a = -2f$. Ievietojot šo vērtību vienādībā (*), iegūstam $(-2f)f^2 + 2f = 0$ jeb $2f(1 - f^2) = 0$. Skaitļa f vērtība nevar būt 0 (skat. 1) gadījumu), tāpēc ir divi atrisinājumi: $f_1 = 1$ un $f_2 = -1$.

Atrodam katrai f vērtībai atbilstošās doto piecu skaitļu vērtības:

- ja $f = 1$, tad $a = -2, b = -1, c = 0, d = 1$ un $e = 2$,
- ja $f = -1$, tad $a = 2, b = 1, c = 0, d = -1$ un $e = -2$.

4.9.2. Atbilde: $\angle ABC = 36°$.

Risinājums. Apzīmēsim $\angle ABC = x$ un $\angle BAC = y$ (skat. A4.12. zīm.).



A4.12. zīm.

Tā kā ΔABC, ΔACD un ΔBCD ir vienādsānu, tad attiecīgi $\angle BCA = \angle BAC = y$, $\angle CDA = \angle BAC = y$ un $\angle BCD = \angle ABC = x$. Leņķis CDA ir ΔBDC ārējais leņķis, tātad $\angle CDA = \angle BCD + \angle DBC$ jeb $y = x + x = 2x$. Trijstūra ABC iekšējo leņķu summa ir $180°$, tātad

$$180° = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC;$$
$$180° = y + y + x;$$
$$180° = 2x + 2x + x \quad \Rightarrow \quad 180° = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 36°.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\angle ABC = x = 36°$.

4.9.3. Atbilde. Skaitļa 2013 lielākā pakāpe, ar kuru dalās 2012!, ir 32.

Risinājums. Sadalīsim skaitli 2013 pirmreizinātājos: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Lai noteiktu, ar kādu lielāko 2013 pakāpi dalās skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2012 = 2012!$, pietiek noteikt, ar kādu lielāko skaitļa 61 pakāpi dalās 2012! (jo šajā reizinājumā gan skaitļa 3, gan skaitļa 11 pakāpes nebūs mazākas kā skaitļa 61 pakāpe). No pirmajiem 2012 naturālajiem skaitļiem, kas ietilpst reizinājumā 2012!, ar 61 dalās 32 skaitļi: 61, 122, ..., 1952. Neviens no šiem skaitļiem nedalās ar $61^2 = 3721$ vai augstāku skaitļa 61 pakāpi. Tātad skaitļa 2013 lielākā pakāpe, ar kuru dalās 2012!, ir 32.

4.9.4. Risinājums. Nokrāsosim visas tabulas rūtiņas piecās krāsās tā, lai katrā krāsā būtu nokrāsotas tieši 5 rūtiņas un nekādas divas vienā krāsā nokrāsotās rūtiņas neatrastos ne vienā rindiņā, ne vienā kolonnā (skat., piemēram, A4.13. zīm.; katra krāsa ir apzīmēta ar citu burtu).

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

A4.13. zīm.

Ar a apzīmēsim visu piecu A krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar b – B krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar c – C krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, ar d – D krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu un ar e – E krāsas rūtiņās ierakstīto skaitļu summu. Pieņemsim, ka $a \le 0$, $b \le 0$, $c \le 0$, $d \le 0$ un $e \le 0$, tad $a+b+c+d+e \le 0$.

Bet pēc dotā $a+b+c+d+e > 0$, jo tā ir visu tabulā ierakstīto skaitļu summa. Tātad pieņēmums ir aplams un vismaz viens no skaitļiem *a, b, c, d* vai *e* ir pozitīvs. Atbilstošās krāsas rūtiņas būs meklētās piecas rūtiņas.

4.9.5. Atbilde: a) jā, **b)** nē.

Risinājums

a) Ja pieņemam, ka visos mēnešos ir lielākais iespējamais dienu skaits, tas ir, 31 diena, tad 11 šādos mēnešos kopējais dienu skaits būtu $11 \cdot 31 = 341 < 365$. Tātad mēnešu skaits ir lielāks nekā 11.

Ar a apzīmējam to mēnešu skaitu, kuros ir 28 dienas, ar b – to, kuros ir 30 dienas, un ar c – to, kuros ir 31 diena. Aprēķinām, cik dienu ir 13 mēnešos: $28a + 30b + 31c = 28(a+b+c) + 2b + 3c$. Tā kā $a+b+c = 13$, tad iegūstam:

$$28(a+b+c) + 2b + 3c = 28 \cdot 13 + 2b + 3c \ge 364 + 2 + 3 = 369 > 365.$$

Tātad gadā ir tieši 12 mēneši.

b) Izmantosim a) gadījumā ieviestos apzīmējumus. Šajā gadījumā iegūstam

$$28a + 30b + 31c = 31(a+b+c) - 3a - b = 365 \text{ jeb } 3a + b = 31 \cdot 13 - 365 = 7.$$

Iespējami divi atrisinājumi: $a=1$, $b=4$, $c=7$ un $a=2$, $b=1$, $c=9$. Tātad viennozīmīgi katra veida mēnešu skaitu noteikt nav iespējams.

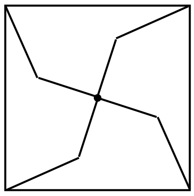
5. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

5.5. Piektā klase

5.5.1. Atbilde: Jā, piemēram, skaitļu 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4 summa un reizinājums ir 12.

Piezīme. Uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

5.5.2. Atbilde. Skat., piemēram, A5.1. zīm.



A5.1. zīm.

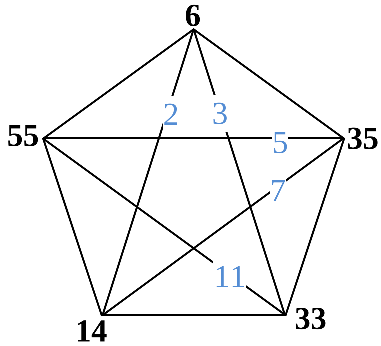
5.5.3. Atbilde. Der, piemēram, skaitlis 142835.

Risinājums. Ievērosim, ka 14 dalās ar 7, tātad arī 140000 dalās ar 7; 28 un 2800 dalās ar 7; 35 dalās ar 7. Tātad $140000+2800+35=142835$ dalās ar 7. Uzdevuma prasības apmierina arī citi skaitļi.

5.5.4. Atbilde. Skat., piemēram, A5.2. zīm.

Risinājums. Uzdevuma atrisinājumu var iegūt, piemēram, šādi. Vispirms uz katras no diagonālēm uzraksta dažādus pirmskaitļus, un pēc tam katrā virsotnē ieraksta skaitļus, kas vienādi ar to pirmskaitļu reizinājumu, kas uzrakstīti uz no šīs virsotnes izejošajām diagonālēm. Tādējādi katras diagonāles galapunktos ierakstītajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs vienāds ar uz šīs diagonāles uzrakstīto pirmskaitli, tātad lielāks nekā 1. Savukārt no virsotnēm, kas atrodas vienas malas galapunktos, iziet dažādas diagonāles, tāpēc tajās ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Piezīme. Uzdevuma atrisinājumam pietiek parādīt vienu pareizu piemēru.



A5.2. zīm.

5.5.5. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka to var izdarīt. Tad no katra no 13 punktiem iziet nepāra skaits nogriežņu. Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits ir nepāra skaitlis, bet tas ir pretrunā ar to, ka nogrieznim ir tieši divi galapunkti (galapunktu skaits ir pāra skaitlis).

5.6. Sestā klase

5.6.1. Atbilde. Der, piemēram, skaitļi 2, 3, 9, 18.

Risinājums. Ievērojam, ka skaitļi 2, 3, 9, 18 apmierina uzdevuma prasības:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{9+6+2+1}{18}=\frac{18}{18}=1.$$

Piezīme. Uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

5.6.2. Atbilde. a) Jā, ir iespējams. **b)** Nē, tas nav iespējams.

Risinājums

a) Prasīto iespējams iegūt. Viens no veidiem aprakstīts tālāk.

Vispirms piecos gājienos iegūst

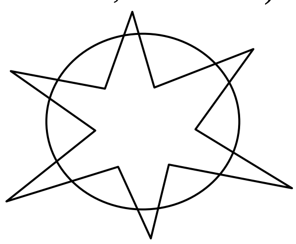
$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9,10) \to 1, 1, 1, 1, 1.$$

Tad četros gājienos iegūst prasīto:

$$1, 1, 1, 1, 1 \to 0, 0, 1 \to 0, 1 \to 1.$$

b) Ievērosim, ka, veicot doto pārveidojumu, uz tāfeles palikušo skaitļu summas paritāte nemainās (jo $(a+b)$ un $(a-b)$ ir vienas paritātes skaitļi). Sākotnējo skaitļu summa 55 ir nepāra skaitlis; tātad rezultātā nevar iegūt pāra skaitli 0.

5.6.3. Atbilde a) Jā, var (skat., piemēram, A5.3. zīm.). **b)** Nē, nevar.



A5.3. zīm.

Risinājums

b) Lai 13-stūra malas krustotu riņķa līniju, jābūt virsotnēm, kas atrodas riņķa iekšpusē, un virsotnēm, kas atrodas riņķa ārpusē. Ar A_1 apzīmēsim 13-stūra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}$ virsotni, kas atrodas riņķa iekšpusē. Lai mala A_1A_2 krustotu riņķa līniju, virsotnei A_2 jāatrodas riņķa ārpusē. Līdzīgi virsotnei A_3 jāatrodas riņķa iekšpusē, virsotnei A_4 – riņķa ārpusē, virsotnei A_5 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_6 – riņķa ārpusē, virsotnei A_7 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_8 – riņķa ārpusē, virsotnei A_9 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{10} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{11} – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{12} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{13} – riņķa iekšpusē. Bet tādā gadījumā 13-stūra malu A_1A_{13} riņķa līnija krusto pāra skaitu reižu vai nekrusto vispār.

5.6.4. Atbilde. Der, piemēram, skaitļi **a)** 125; **b)** 1125; **c)** 91125.

Risinājums

a) Ja pirmais cipars ir 1, tad, pierakstot klāt divciparu skaitli, ar ko dalās 100, piemēram, 25, iegūstam meklēto skaitli 125.

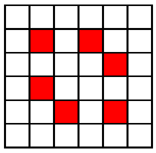
b) Spriežot līdzīgi un izmantojot jau a) gadījumā atrasto trīsciparu skaitli, var iegūt skaitli 1125, kas apmierina uzdevuma prasības.

c) Var pamanīt, ka 90000 dalās ar 1125, tāpēc der skaitlis 91125.

Piezīme. Uzdevumam katrā apakšpunktā ir arī citi atrisinājumi.

5.6.5. Atbilde. Var iekrāsot gan 7, gan 6 rūtiņas tā, lai uzdevuma prasības būtu izpildītas.

Risinājums. A5.4. zīm. parādīts, kā var iekrāsot 6 rūtiņas; šajā zīmējumā iekrāsojot vēl vienu jebkuru rūtiņu, uzdevuma prasības tiks apmierinātas. Ir arī citi veidi, kā var iekrāsot 7 rūtiņas.



A5.4. zīm.

5.7. Septītā klase

5.7.1. Atbilde. Skaitlis 1 ir apvienots pārī ar 15.

Risinājums. Izveidosim tabulu, kurā uzrakstīsim, ar ko pārī var būt apvienots katrs no dotajiem skaitļiem.

1	3, 8, 15
2	7, 14
3	1, 6, 13
4	5, 12
5	4, 11
6	3, 10
7	2, 9, 18
8	1, 17
9	7, 16

10	6, 15
11	5, 14
12	4, 13
13	3, 12
14	2, 11
15	1, 10
16	9
17	8
18	7

Ievērosim, ka 18 var būt apvienots pārī tikai ar 7, 17 – tikai ar 8 un 16 – tikai ar 9. Tālāk pakāpeniski secinām, ka 2 ir apvienots ar 14, 11 ar 5, 4 ar 12, 13 ar 3, 6 ar 10 un 1 ar 15.

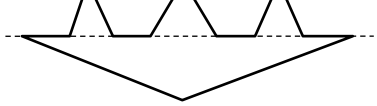
5.7.2. Atbilde. Starp pirmajiem 2013 naturālajiem skaitļiem ir 162 skaitļi, kas apmierina uzdevuma prasības.

Risinājums. Ievērojam, ka $111 = 3 \cdot 37$, tāpēc vienam no skaitļiem *x*, $x+1$ vai $x+2$ jādalās ar 37. (Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.)

No 1 līdz 2013 ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais 1998).

Tātad 54 veidos var izvēlēties tādu *x*, kas dalās ar 37, 54 veidos – tādu *x*, ka $x+1$ dalās ar 37 un 54 veidos – tādu *x*, ka $x+2$ dalās ar 37, t.i., pavisam ir $54+54+54=162$ tādi skaitļi *x*, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111.

5.7.3. Atbilde. a) Nē, neeksistē. **b)** Jā, eksistē (skat. piemēram, A5.5. zīm.).



A5.5. zīm.

Risinājums

a) Ja 11-stūra astoņas virsotnes atrodas uz vienas taisnes, tad 3 virsotnes uz tās neatrodas. Apzīmēsim tās ar A, B un C. Tad no pārējām 8 virsotnēm daļa atrodas starp A un B, daļa – starp B un C un daļa – starp C un A. Pēc Dirihlē principa kādā no šīm daļām ir vismaz 3 virsotnes un tās visas atrodas uz vienas taisnes, kas nozīmē to, ka vidējā vai vidējās virsotnes nemaz nav daudzstūra virsotnes – pretruna.

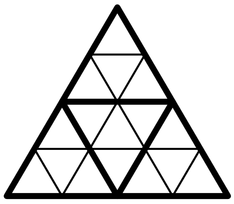
5.7.4. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka prasīto var izdarīt. Ievērosim, ka tādā gadījumā visu skaitļu paritātes ir vienādas. Ja visi skaitļi ir nepāra, tad tiem visiem pieskaitīsim 1, uzdevumā dotā īpašība joprojām izpildīsies (blakus esošo skaitļu starpība nemainīsies). Ja visi skaitļi ir pāra skaitļi (sākumā dotie vai iepriekš aprakstītās darbības rezultātā iegūtie), izdalīsim tos visus ar 2.

Tagad blakus esošo skaitļu starpība būs 3, 5, 7 vai 9. Tātad tagad blakus esošo skaitļu paritātēm jābūt dažādām, bet 13 skaitļu gadījumā tas nav iespējams.

Līdz ar to pa riņķi nevar uzrakstīt 13 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu starpība būtu 6, 10, 14 vai 18.

5.7.5. Risinājums. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2 (skat. A5.6. zīm.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki (pēc Dirihlē principa), tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5+5+5+3=18$, kas arī bija jāpierāda.



A5.6. zīm.

5.8. Astotā klase

5.8.1. Risinājums. Pārveidosim doto skaitli, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas:

$$8999999 = 9000000 - 1 = 3000^2 - 1^2 = (3000-1)\cdot(3000+1) = 2999\cdot 3001.$$

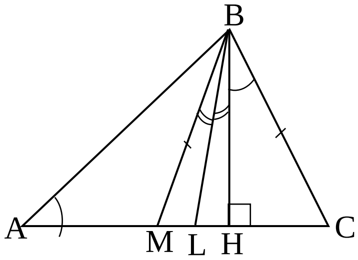
5.8.2. Atbilde. $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$ un $\angle C = 60°$.

Risinājums. Tā kā $\angle MBL = \angle LBH$ un BL ir bisektrise, tad $\angle CBH = \angle ABM = \angle BAC$ un ΔAMB ir vienādsānu un $BM = AM$ (skat. A5.7. zīm.).

Tā kā $MC = AM = BM = BC$, tad ΔMBC ir vienādmalu un $\angle MBC = \angle BCM = \angle CMB = 60°$.

Nogrieznis BH ir vienādmalu trijstūra MBC augstums, tātad arī bisektrise, tāpēc $\angle BAC = \angle CBH = 60° : 2 = 30°$.

Līdz ar to $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (30° + 60°) = 90°$.



A5.7. zīm.

5.8.3. Atbilde. Meklēto skaitļu skaits ir 8375.

Risinājums. Pavisam ir 9000 četrciparu skaitļi. Ir pieci nepāra cipari – 1, 3, 5, 7 un 9. Tātad $5^4 = 625$ skaitļi satur tikai nepāra ciparus. Tātad 9000 – 625 = 8375 četrciparu skaitļu pierakstā ir vismaz viens pāra cipars.

5.8.4. Atbilde. To var izdarīt, piemēram, kā parādīts A5.8. zīm.

2^6	2^7	2^2
2^1	2^5	2^9
2^8	2^3	2^4

A5.8. zīm.

Risinājums. Izmantojot pakāpju īpašību $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, atrisinājumu var iegūt, tabulā ierakstot pakāpes ar vienādām bāzēm tā, lai kāpinātāju summa katrā rindiņā un katrā kolonnā būtu viena un tā pati 2^{15}.

5.8.5. Risinājums

a) Sanumurēsim pozīcijas no 1 līdz 20. Mums jāpanāk, ka pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni, bet no 11 līdz 20 – meitenes.

Aplūkosim pirmo pozīciju.

- Ja tur stāv zēns, tad pirmajā pozīcijā viss jau ir kārtībā.
- Ja tur stāv meitene, tad kādā no pozīcijām 2 līdz 11 noteikti stāv kāds zēns (jo vēl ir tikai 9 meitenes), tātad to var samainīt vietām ar 1. pozīcijā stāvošo meiteni. Šādā veidā pirmajā solī ar vienu vai nevienu maiņu var panākt, ka pirmajā pozīcijā stāv zēns.

Tālāk otrajā solī tieši tādā pašā veidā panāk, ka otrajā pozīcijā stāv zēns – vai nu nemainot neko, ja tur jau stāv zēns, vai samainot meiteni ar zēnu, kas stāv kādā no pozīcijām 3 līdz 12, trešajā solī panāk to, ka trešajā pozīcijā stāv zēns utt.

Ar 10 soļiem, t.i., ar ne vairāk kā 10 maiņām var panākt, ka visās pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni.

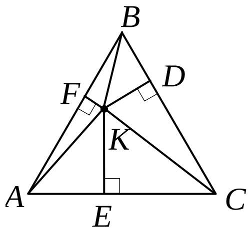
b) Aplūkosim sākuma situāciju, kad meitenes stāv pozīcijās no 1 līdz 10, bet zēni – pozīcijās no 11 līdz 20. Katrā maiņā piedalās tikai viens zēns (2 zēnu mainīšana vietām neko nemaina), tāpēc pēc 9 maiņām noteikti būs vismaz viens zēns, kas savu vietu nebūs mainījis, tātad joprojām atradīsies kādā no pozīcijām no 11 līdz 20.

5.9. Devītā klase

5.9.1. Atbilde. Jā, šāds skaitlis eksistē, piemēram, 111111111:

```
                111111111
              · 111111111
              -----------
                111111111
               111111111
              111111111
             111111111
            111111111
           111111111
          111111111
         111111111
        111111111
        -----------------
        12345678987654321
```

5.9.2. Risinājums. Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra ABC malas garumu ar a un augstumu ar h (skat. A5.11. zīm.).



A5.11. zīm.

Aprēķinām ΔABC laukumu divos veidos:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot KD + \frac{1}{2}a \cdot KE + \frac{1}{2}a \cdot KF = \frac{1}{2}a \cdot (KD + KE + KF)$.
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$.

Tā kā abas iegūtās izteiksmes izsaka ΔABC laukumu, tad $\frac{1}{2}a(KD + KE + KF) = \frac{1}{2}ah$ jeb $KD + KE + KF = h$ neatkarīgi no punkta K izvēles.

5.9.3. Atbilde. Taisnstūra izmēri ir 4×4 vai 6×3.

Risinājums. Ja a un b (pieņemsim, ka $a \geq b$) ir taisnstūra malu garumi, tad no uzdevuma nosacījumiem seko, ka $ab = 2a + 2b$. Pārveidojot vienādību, iegūstam $ab - 2a - 2b + 4 = 4$ jeb $(a-2)(b-2) = 4$. Skaitli 4 kā divu naturālu skaitļu reizinājumu var izteikt divos veidos $2 \cdot 2$ un $1 \cdot 4$. Iegūtajam vienādojumam naturālos skaitļos ir divi atrisinājumi:

- $a - 2 = b - 2 = 2$ jeb $a = b = 4$;
- $a - 2 = 4$ un $b - 2 = 1$ jeb $a = 6$ un $b = 3$.

Esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst taisnstūri 4×4 un 6×3 .

5.9.4. Atbilde. Summas mazākā vērtība ir 4026.

Risinājums. Tā kā visi a_i , $i = 1, 2, ..., 2013$, ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1} . Tātad mazākā iespējamā skaitļa a_i , $i = 1, 2, ..., 2013$, vērtība ir 2. Vērtības $a_1 = a_2 = ... = a_{2013} = 2$ apmierina dotās nevienādības, jo $2 > \sqrt{2} \approx 1{,}4$. Līdz ar to summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ mazākā iespējamā vērtība ir $2 + 2 + ... + 2 = 2 \cdot 2013 = 4026$.

5.9.5. Risinājums. No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus (skat. A5.12. zīm., kur ar "+" atzīmēti atrisinātie uzdevumi, ar "-" – neatrisinātie) atrisināto uzdevumu „komplektus" (t.sk., neviens atrisināts uzdevums). Ja katru „komplektu" būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Pēc Dirihlē principa seko, ka ir vismaz 13 skolēni, kas izrēķinājuši vienus un tos pašus uzdevumus, kas arī bija jāpierāda.

uzd. nr.							
1.	+	+	+	+	-	-	-
2.	+	+	-	-	+	+	-
3.	+	-	+	-	+	-	+

A5.12. zīm.

6. LATVIJAS 63. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. Devītā klase

6.9.1. Atbilde: $a=1$, $b=8$, $c=1$, $d=3$.

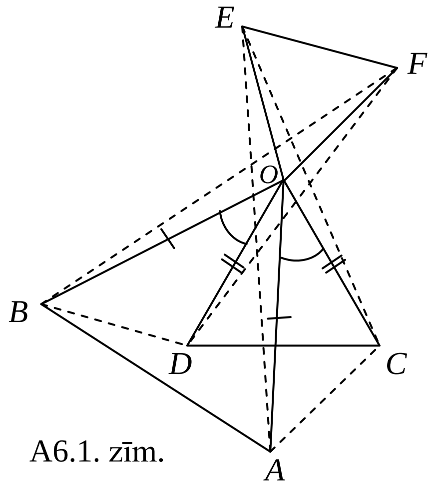
Risinājums. Ja $a=2$, tad $\overline{2bcd}+\overline{2bc}+\overline{2b}+2>2200>2013$. Tātad $a=1$. Lai summas simtu cipars būtu 0, tad $b=9$ vai $b=8$, jo lielākais pārnesums no desmitu pozīcijas ir 1. Vērtība $b=9$ neder, jo tad summā veidotos pārnesums no desmitu pozīcijas un simtu pozīcijā būtu cipars, kas ir lielāks nekā 0. Tātad $b=8$. Ievietojam iegūtās *a* un *b* vērtības dotajā vienādībā:

$$\overline{18cd}+\overline{18c}+18+1=2013;$$
$$1800+10c+d+180+c+18+1=2013;$$
$$1999+11c+d=2013;$$
$$11c+d=14.$$

Tātad $c=1$, $d=3$ un $\overline{abcd}=1813$.

6.9.2. Risinājums

Ievērojam, ka $\angle BOC=\angle BOD+\angle DOC=\angle BOD+60°=60°+\angle AOC$ (skat. A6.1. zīm.). Tāpēc $\angle BOD=\angle AOC$. Līdz ar to $\Delta BOD=\Delta AOC$ (pēc pazīmes "$m\ell m$"), jo $BO=AO$, $\angle BOD=\angle AOC$ un $DO=CO$. Tad $BD=AC$, jo vienādos trijstūros pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas. Līdzīgi no $\Delta DOF=\Delta COE$ un $\Delta BOF=\Delta AOE$ secinām, ka arī $DF=CE$ un $FB=EA$, tāpēc $\Delta ACE=\Delta BDF$ (pēc pazīmes "mmm").



A6.1. zīm.

6.9.3. Atbilde: $a_{2013} = 6034$.

Risinājums. Aplūkojam virknes pirmos locekļus:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \left[\frac{2\cdot 1+1}{3}\right] + 4 = 5,\ a_4 = \left[\frac{2\cdot 5+1}{3}\right] + 4 = 7,$$

$$a_5 = \left[\frac{2\cdot 7+5}{3}\right] + 4 = 10,\ a_6 = \left[\frac{2\cdot 10+7}{3}\right] + 4 = 13,\ a_7 = \left[\frac{2\cdot 13+10}{3}\right] + 4 = 16.$$

Ievērojam, ka visiem $i \geq 4$ izpildās vienādība $a_i = 3i - 5$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Indukcijas bāze. Ja $i = 4$, tad $a_4 = 3\cdot 4 - 5 = 7$, un ja $i = 5$, tad $a_5 = 3\cdot 5 - 5 = 10$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem $k < n$ ir spēkā $a_k = 3k - 5$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka arī $a_n = 3n - 5$.

$$a_n = \left[\frac{2\cdot a_{n-1} + a_{n-2}}{3}\right] + 4 = \left[\frac{2\cdot(3(n-1)-5) + 3(n-2) - 5}{3}\right] + 4 =$$

$$= \left[\frac{2\cdot(3n-8) + 3n - 11}{3}\right] + 4 = \left[\frac{9n-27}{3}\right] + 4 = 3n - 9 + 4 = 3n - 5.$$

No matemātiskās indukcijas metodes seko, ka apgalvojums pierādīts visiem $n \geq 4$.

Tātad $a_{2013} = 3\cdot 2013 - 5 = 6034$.

6.9.4. Atbilde. Otra komanda ieguva 95 punktus.

Risinājums. Ja pieņemam, ka komanda-zaudētāja izcīnījusi a uzvaras, tad komanda-uzvarētāja izcīnījusi $a+1$ uzvaru. Kopējais punktu skaits:

- komandai-zaudētājai ir $a(n+3) + (a+1)n = 2an + 3a + n$;
- komandai-uzvarētājai $(a+1)(n+3) + an = 2an + 3a + n + 3$.

Pierādīsim, ka komanda-uzvarētāja nevarēja izcīnīt 92 punktus. Ja tā tomēr būtu bijis, tad $2an + 3a + n + 3 = 92$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis *a*, ka $n = \dfrac{89-3a}{2a+1}$ ir naturāls skaitlis. Tā kā $a \geq 1$ un $n \geq 1$, tad

$$89 - 3a \geq 2a + 1 \ \Rightarrow\ 5a \leq 88 \ \Rightarrow\ a \leq 17\frac{3}{5}.$$

Līdz ar to pieļaujamās *a* vērības ir $1 \leq a \leq 17$. Aplūkosim skaitītāja un saucēja vērtību katrai no šīm vērtībām:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
89-3*a*	86	83	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38
2*a*+1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

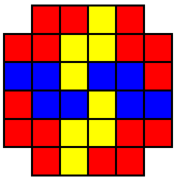
Kā redzams, nevienai no pieļaujamajām *a* vērtībām daļas vērtība nav naturāls skaitlis. Tātad komanda-uzvarētāja nevar būt ieguvusi 92 punktus.

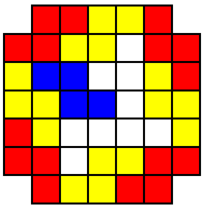
Pārbaudīsim, vai komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus. Tad $2an + 3a + n = 92$ un $n = \dfrac{92-3a}{2a+1}$. Ja $a = 5$, tad $n = 7$, vai ja $a = 8$, tad $n = 4$, tātad komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus.

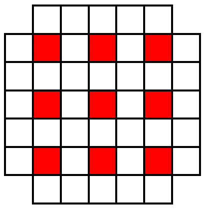
Tā kā komanda-uzvarētāja ieguva par 3 punktiem nekā komanda-zaudētāja, tad otra komanda (uzvarētāja) ieguva 95 punktus.

6.9.5. Atbilde. a) Lielākais figūru skaits ko var izgriezt, ir 8 (skat., piemēram, A6.2. zīm.).

b) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9 (skat., piemēram, A6.3. zīm.).


A6.2. zīm.


A6.3. zīm.


A6.4. zīm.

Risinājums. b) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9 (skat., piemēram, A6.3. zīm.). Pierādīsim, ka nav iespējams izgriezt 10 figūriņas. Izkrāsosim pārklājamo figūru kā parādīts A6.4. zīm. Tad, lai arī kā tiktu ievietota figūriņa, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tātad, ja varētu izgriezt 10 figūriņas, tās pārklātu 10 iekrāsotās rūtiņas, bet ir tikai 9 – pretruna.

7. LATVIJAS 40. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. Piektā klase

7.5.1. Atbilde: 22 reizes.

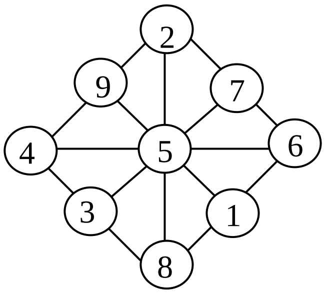
Risinājums. Laika posmos no plkst. 1:00 – 11:00 un no plkst. 13:00 – 23:00 pulksteņa rādītāji katrā stundā sakrīt tieši vienu reizi (minūšu rādītājs stundas laikā veic 1 pilnu apgriezienu, kura laikā vienreiz „apdzen" stundu rādītāju, tātad tieši vienu reizi ar to sakrīt). Savukārt laika posmos no plkst. 11:00 – 13:00 un no plkst. 23:00 – 1:00 pulksteņa rādītāji sakrīt tikai vienu reizi katrā: plkst. 12:00 un plkst. 0:00. Tātad diennakts laikā pulksteņa rādītāji sakrīt $10+10+1+1=22$ reizes.

7.5.2. Atbilde. No 17. stāva.

Risinājums. Ievērosim, ka šajā mājā ar doto liftu ne no viena stāva nav iespējams nokļūt uz 17. stāvu (zemākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz augšu, ir $1+17=18$. stāvs, bet augstākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz leju ir $24-8=16$. stāvs). No 17. stāva uz citiem stāviem var nokļūt, piemēram, šādā veidā:

17. → 9. → 1. → 18. → 10. → 2. →19. → 11. → 3. → 20. →12. → 4. → 21. → 13. → → 5. → 22. → 14. →6. → 23. → 15. → 7. → 24. →16. → 8.

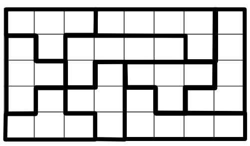
7.5.3. Atbilde. Skat., piemēram, A7.1. zīm.



A7.1. zīm.

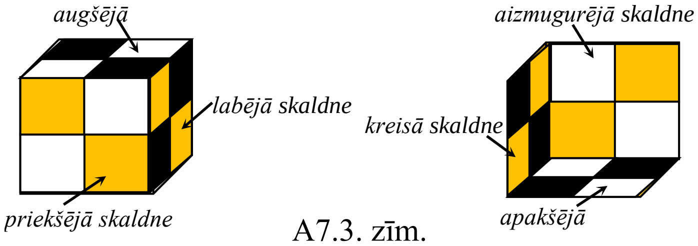
Risinājums. Ievērosim, ka ciparu summām jābūt vienādām uz astoņām taisnēm, pie tam vidējais aplītis atrodas uz četrām no tām. Pārējie astoņi cipari sadalās pa pāriem, kas kopā ar vidējā aplītī ierakstīto ciparu veido vienādas summas, tātad tos astoņus ciparus, kas nav ierakstīti vidējā aplītī, ir jāsadala pāros ar vienādām summām. To var izdarīt, ja tiek izmantoti cipari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (skat. A7.1. zīm.) vai arī cipari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Visas summas ir vienādas ar 15.

7.5.4. Atbilde. Skat., piemēram, A7.2. zīm.



A7.2. zīm.

7.5.5. Atbilde. a) nevar; **b)** var (skat., piemēram, A7.3. zīm.).



A7.3. zīm.

Risinājums. a) Pie kuba virsotnes „satiekas" trīs mazie kvadrātiņi, katram no tiem ir kopīga mala ar abiem pārējiem. Tāpēc šos kvadrātiņus nevar izkrāsot divās krāsās atbilstoši uzdevuma prasībām.

7.6. Sestā klase

7.6.1. Atbilde. Uz tāfeles vienmēr paliek skaitlis 73.

Risinājums. Pēc katras darbības visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa palielinās par 2 (divu nodzēsto skaitļu vietā tiek rakstīta to summa, palielināta par 2, bet pārējie skaitļi netiek mainīti, tātad arī to summa nemainās). Tātad beigās palikušais vienīgais skaitlis ir vienāds ar $S+2\cdot n$, kur S ir visu sākumā uzrakstīto skaitļu summa, bet n ir izpildīto darbību skaits. Tā kā sākumā uz tāfeles bija 10 skaitļi, bet pēc vienas darbības izpildes skaitļu skaits samazinās par vienu, tad Alfons pavisam izpildīja 9 darbības (t.i., $n = 9$). Pakāpeniski iegūstam beigās palikušo skaitli:

$$S+2\cdot n=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+2\cdot 9=$$
$$=\frac{(1+10)\cdot 10}{2}+18=55+18=73.$$

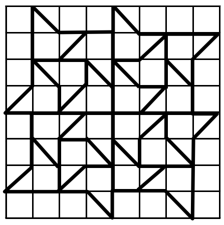
7.6.2. Atbilde: a) nevar, **b)** var.

Risinājums

a) Ja skaitlis dalās ar 3, tad tā ciparu summa dalās ar 3. Ja šī skaitļa un tam blakusesošā skaitļa ciparu summas atšķiras par 3, tad arī blakusesošā skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tāpēc pats skaitlis dalās ar 3. Taču no diviem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem ne vairāk kā viens dalās ar 3. Tātad divu blakusesošu skaitļu ciparu summas nevar atšķirties tieši par 3.

b) Jā, var atrast, piemēram, skaitļi 30 un 31.

7.6.3. Atbilde. Skat., piemēram, A7.4. zīm.


A7.4. zīm.

7.6.4. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Lai abu grupu skaitļu reizinājumi būtu vienādi, abās grupās kā skaitļu pirmreizinātājiem jābūt pārstāvētiem vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem vienādā skaitā. Taču visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 100 un mazāki nekā 200 pavisam tiek pārstāvēti tikai vienu reizi katrs, tātad tos nevar sadalīt pa divām grupām. Šie pirmskaitļi ir 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

7.6.5. Atbilde. Una vienmēr var panākt savu uzvaru.

Risinājums. Savā pirmajā gājienā Una ieraksta savu vārdu tā, lai burts N būtu ierakstīts kvadrāta centrālajā rūtiņā. Tad uz katru Ivo gājienu Una atbild ar centrāli simetrisku gājienu, t.i., Una raksta savu vārdu rūtiņās, kas ir simetriskas rūtiņām, kurās pēdējā gājienā Ivo ierakstīja savu vārdu, attiecībā pret kvadrāta centru (skat. A7.5.zīm.). Ja vēl bija brīvas rūtiņas, kur savu vārdu varēja ierakstīt Ivo, tad noteikti brīvas ir arī tām centrāli simetriskās rūtiņas.

U	N	A		
	U	N	A	
		I	V	O

A7.5. zīm.

7.7. Septītā klase

7.7.1. Risinājums. Ja divciparu skaitļa desmitu cipars ir *a*, bet vienu cipars ir *b*, tad divciparu skaitlis ir $10a+b$, tā ciparu reizinājums ir $a \cdot b$ un meklētais dalījums ir $\frac{10a+b}{ab}=\frac{10a}{ab}+\frac{b}{ab}=\frac{10}{b}+\frac{1}{a}$. Dalījuma vērtība būs mazāka, ja dalītāji būs lielāki. Lielākā iespējamā *a* un *b* vērtība ir 9, tātad apskatāmā dalījuma vērtība ir $\frac{10}{b}+\frac{1}{a} \geq \frac{10}{9}+\frac{1}{9}=\frac{11}{9}$. Vēl jāparāda, ka var iegūt vērtību $\frac{11}{9}$. Skaitļa 99 dalījums ar tā ciparu reizinājumu ir $\frac{99}{9 \cdot 9}=\frac{11}{9}$.

7.7.2. Atbilde. Trijstūri var izveidot 7 dažādos veidos.

Risinājums. No trijstūra nevienādības (katru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala) seko, ka 1 cm garais nogrieznis nav izmantojams neviena trijstūra izveidošanai. No pārējiem nogriežņiem trijstūrus var izveidot 7 veidos: (3 cm, 5 cm, 7 cm), (3 cm, 7 cm, 9 cm), (3 cm, 9 cm, 11 cm), (5 cm, 7 cm, 9 cm), (5 cm, 7 cm, 11 cm), (5 cm, 9 cm, 11 cm), (7 cm, 9 cm, 11 cm).

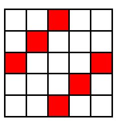
7.7.3. Risinājums. Pēc dalāmības pazīmēm viegli pārbaudīt, ka dotais skaitlis dalās ar 8, bet nedalās ar 16. Skaitlis dalās ar 8, ja ar 8 dalās skaitļa pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis, šajā gadījumā 176 dalās ar 8.

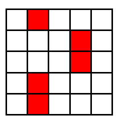
Skaitlis dalās ar 16, ja ar 16 dalās skaitļa pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis, šajā gadījumā 5176 nedalās ar 16.

Tātad dotā skaitļa sadalījumā pirmreizinātājos pirmskaitlis 2 ietilpst ar nepāra pakāpi 3.

Taču, ja skaitlis ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad katrs pirmskaitlis tā sadalījumā pirmreizinātājos ietilpst ar pāra pakāpi. Tātad dotais skaitlis nav naturāla skaitļa kvadrāts.

7.7.4. Atbilde. a) ir iespējams, skat., piem., A7.6. zīm.; **b)** ir iespējams, skat., piemēram, A7.7. zīm.

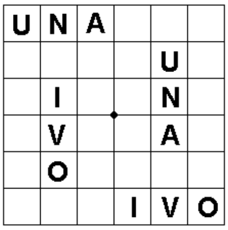




A7.6. zīm.   A7.7. zīm.

7.7.5. Atbilde. Ivo vienmēr var panākt savu uzvaru.

Risinājums. Uz katru Unas gājienu Ivo atbild ar centrāli simetrisku gājienu, t.i., Ivo rakstu savu vārdu rūtiņās, kas ir simetriskas rūtiņām, kurās pēdējā gājienā Una ierakstīja savu vārdu, attiecībā pret kvadrāta centru (skat. A7.8. zīm.). Ja vēl bija brīvas rūtiņas, kur savu vārdu varēja ierakstīt Una, tad noteikti brīvas ir arī tām centrāli simetriskās rūtiņas.



A7.8. zīm.

7.8. Astotā klase

7.8.1. Atbilde. Meklētie skaitļi ir 72, 720, 7200, 72000, 720000.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $a \cdot 10^k + B$, kur a ir pirmais cipars (kas tiek nosvītrots), bet B ir k ciparu skaitlis, kas paliek pēc a nosvītrošanas ($1 \le k \le 5$).

Tad $a \cdot 10^k + B = 36 \cdot B \Rightarrow a \cdot 10^k = 35 \cdot B \Rightarrow a \cdot 2^k \cdot 5^k = 5 \cdot 7 \cdot B$.

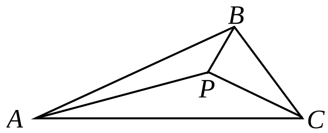
Tātad a jādalās 7. Tā kā a ir cipars, tad $a = 7$ un $B = 2^k \cdot 5^{k-1} = 2 \cdot 10^{k-1}$, $1 \le k \le 5$.

Pavisam ir pieci skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus: 72, 720, 7200, 72000, 720000.

7.8.2. Risinājums. No trijstūra nevienādības seko $PA + PB > AB$, $PA + PC > AC$ un $PB + PC > BC$ (skat. A7.9. zīm.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam:

$$2(PA + PB + PC) > AB + AC + BC = P_{ABC},$$

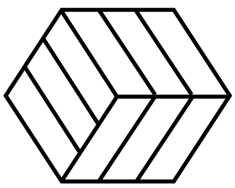
$$PA + PB + PC > \frac{1}{2} P_{ABC}.$$



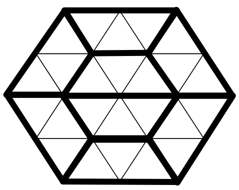
A7.9. zīm.

7.8.3. Risinājums. Aplūkosim kvadrātvienādojumu $x^2 - \sqrt{t} \cdot x + a = 0$. No uzdevumā dotās vienādības seko, ka t ir šī vienādojuma sakne. Tā kā kvadrātvienādojumam ir vismaz viena sakne, tā diskriminants ir nenegatīvs, t.i., $D = \left(\sqrt{t}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = t - 4a \ge 0$ jeb $t \ge 4a$, kas arī bija jāpierāda.

7.8.4. Atbilde: **a)** var (skat., piemēram, A7.10. zīm.),
b) var (skat., piemēram, A7.11. zīm.).



A7.10. zīm.



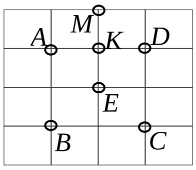
A7.11. zīm.

7.8.5. Risinājums. Vispirms pajautāsim par x_1, tad par x_3. Ja $x_1 = x_3$, jautāsim par x_2, ja $x_1 \neq x_3$, jautāsim par x_4. Ja $x_1 = x_3 = x_2$, tad neatkarīgi no x_4 vērtības, virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, savukārt, ja $x_1 = x_3 \neq x_2$ dotā virkne nav monotona.
Ja $x_1 \neq x_3$, bet $x_3 = x_4$, tad, neatkarīgi no x_2 vērtības, virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, savukārt, ja $x_1 \neq x_3$ un $x_3 \neq x_4$ (t. i., $x_1 = x_4$), virkne nav monotona.

7.9. Devītā klase

7.9.1. Risinājums. Ja trapeces augstums ir *h*, tad tās laukums ir $S = \frac{(3+13)}{2} \cdot h = 8h$.
Tātad vienlielo trijstūru laukumi ir $S_\Delta = \frac{8h}{5} = 1{,}6h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Šī trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h = 1{,}5h < 1{,}6h$. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros, jo ir viens trijstūris, kura laukums ir mazāks nekā $1{,}6h$.

7.9.2. Risinājums. Vispirms aplūkosim virsotnes *A*, *B*, *C*, *D* un *E* (skat. A7.12. zīm.). Vismaz trīs no tām ir nokrāsotas vienā krāsā. Ja vienā krāsā nokrāsotas trīs no virsotnēm *A*, *B*, *C* un *D*, tās veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Ja vienā krāsā nokrāsotas virsotnes (*E*, *A*, *B*) vai (*E*, *B*, *C*), vai (*E*, *C*, *D*), vai (*E*, *A*, *D*), arī veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris ar vienādas krāsas virsotnēm.



A7.12. zīm.

Gadījumā, ja virsotnes *A*, *E* un *C* nokrāsotas vienā krāsā, bet virsotnes *B* un *D* – otrā krāsā, aplūkosim vēl virsotnes *K* un *M*. Ja vismaz viena no tām ir nokrāsota tāpat kā *A* un *E*, tad tā kopā ar *A* un *E* veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Savukārt, ja *M* un *K* abas nokrāsotas tāpat kā virsotne *D*, veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris *MKD*. Tātad noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.

7.9.3. Atbilde. Meklētie cipari ir 1, 2, 3 un 5.
Risinājums. Dotos ciparus apzīmēsim ar *a*, *b*, *c*, *d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

$$4 \cdot 10 \cdot (a+b+c+d) + 4 \cdot (a+b+c+d) = 44(a+b+c+d) = 484.$$

Tātad $a+b+c+d = 484 : 44 = 11$. Vienīgā iespēja, ka četru dažādu nenulles ciparu summa ir 11, ir tad, ja šie cipari ir 1, 2, 3 un 5, kas arī ir četri meklētie skaitļi.

7.9.4. Risinājums. Tā kā $x_0 > 0$ un $x_{n+1} = x_n + \dfrac{2}{x_n}$ katram $n \geq 0$, tad $x_n > 0$ visiem $n \geq 0$.

Aplūkosim skaitļu virkni $y_n = x_n^2$ katram $n \geq 0$.

Tad $y_{n+1} = x_{n+1}^2 = \left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 4 + \dfrac{4}{x_n{}^2} > x_n^2 + 4 = y_n + 4$.

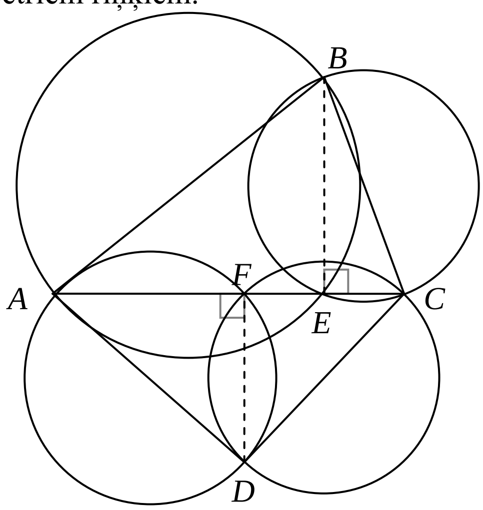
Tātad

$$y_{100} > y_{99} + 4 > y_{98} + 4 + 4 > ... > y_0 + 4 \cdot 100 = y_0 + 400 \text{ jeb}$$

$$x_{100}^2 > x_0^2 + 400 > 0 + 400 = 400.$$

Tā kā $x_{100} > 0$ un $x_{100}^2 > 400$, tad $x_{100} > 20$, kas arī bija jāpierāda.

7.9.5. Risinājums. Apzīmēsim doto četrstūri ar *ABCD*. Novelkam perpendikulus *BE* un *DF* pret diagonāli *AC*. Riņķis ar diametru *AB* pilnībā satur sevī ΔABE, jo $\angle AEB$ ir taisns leņķis. Līdzīgi arī ΔBEC pilnībā atrodas riņķī ar diametru *BC* (skat. A7.13. zīm.). Trijstūri ΔABE un ΔBEC kopā veido trijstūri ΔABC, tāpēc tas arī tiek pārklāts ar diviem dotajiem riņķiem. Līdzīgi pamato, ka arī ΔADC tiek pārklāts ar diviem citiem dotajiem riņķiem, līdz ar to arī viss četrstūris *ABCD* tiek pārklāts ar dotajiem četriem riņķiem.



A7.13. zīm.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.
Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.
Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Algebriski pārveidojumi – 1.1.1, 1.1.4, 1.2.1., 3.1.7., 3.3.4., 5.8.1.

Darbības ar mērvienībām – 1.3.1.

Vienādojumi – 3.1.4., 3.4.7., 7.8.3.

Vienādojumu sistēmas – 3.1.1.

Skaitļu virknes – 2.3.3., 3.3.5., 4.9.1., 5.9.4., 6.9.3., 7.8.5., 7.9.4.

Funkcijas un diagrammas – 1.1.10., 1.4.10.

Attiecības, daļas, daļskaitļi – 1.4.5., 1.4.8., 1.4.9., 2.4.1., 3.5.3., 4.6.2., 4.7.1., 5.6.1., 7.7.1.

Teksta uzdevumi par kustību – 2.4.4., 3.2.4., 3.6.3.

Dažādi teksta uzdevumi – 1.2.2., 4.5.1.

Skaitļu teorija

Aritmētika – 1.1.7., 1.2.4., 1.2.5., 1.2.6., 1.4.1.

Naturālu skaitļu dalāmība, dalāmības pazīmes – 2.5.1., 2.5.4., 3.2.1., 3.2.7., 3.6.2., 4.8.1., 5.7.2., 7.6.2., 7.7.3.

Pirmskaitļi, skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā – 3.4.3., 3.5.6., 7.6.4.

Skaitļa pieraksts – 1.4.2., 2.2.1., 2.3.1., 3.1.2., 3.4.8., 3.5.4., 4.5.4., 5.5.2., 5.8.3., 6.9.1.

Skaitļi un kombinatorika – 1.3.5., 2.4.2., 3.2.2, 4.8.2., 5.5.1., 5.6.4., 5.7.1., 5.9.1., 7.8.1.

Skaitļa sadalījums reizinātājos, pakāpju īpašības – 3.5.7.,4.6.1., 4.7.5., 4.9.3., 5.8.4.

Vienādojumi veselos skaitļos – 3.6.6.

Skaitļu rēbusi – 2.1.1., 3.3.1.

Ģeometrija

Figūru sagriešana un salikšana – 1.4.6., 3.3.6., 3.4.4., 3.5.8., 3.6.1., 4.5.2., 4.6.4., 5.5.2., 5.6.5., 7.5.4., 7.6.3., 7.8.4.

Invariantu metode, krāsošana – 5.6.3.

Figūru sistēmas, to savstarpējais novietojums – 2.4.5., 3.1.6., 3.4.5., 3.5.9., 3.6.8., 6.9.5., 7.7.4.

Kombinatorika

Algoritmika

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. Andžāns, I. Markusa. **Vai vari atrisināt?** Algebra. Rīga: Zvaigzne ABC, 1996.
2. A.Andžāns, M. Seile, Z. Zvirbule. **Profesora Cipariņa kluba uzdevumi un atrisinājumi.** Rīga: Zvaigzne ABC, 2000.
3. А. Савин. **Занимательные математические задачи.** Москва: АСТ, 1995.
4. **The UK Mathematics Trust Yearbook 1998-1999.** UKMT, 1999.
5. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2002-2003.** UKMT, 2003.
6. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2004-2005.** UKMT, 2005.
7. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2008-2009.** UKMT, 2009.
8. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2010-2011.** UKMT, 2011.
9. E.Riekstiņš, A.Andžāns. **Atrisini pats!** Rīga: Zvaigzne, 1984.
10. H.Djudenī. **520 atjautības, pacietības un domu spēles.** Rīga: Zvaigzne, 1979.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.

22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.

47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.

48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.

50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.

51. Z. Kaibe, D. Kūma, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.

52. M. Avotiņa, A.Ķerubiņa. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.

53. A. Locāns, I. Ošiņa. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2012./2013. mācību gadā.** Rīga: LU, 2014.