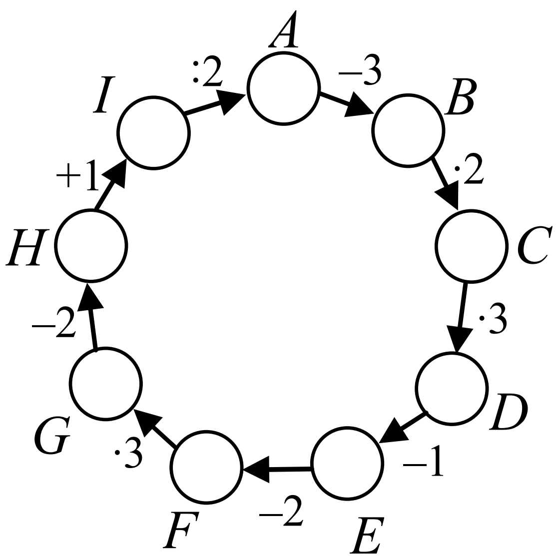
Zane KAIBE, Dace KŪMA,

Līga RAMĀNA

# Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā




Rīga 2013

**Z. Kaibe, Z. Kūma, L. Ramāna.** ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2013. – 128 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2011./2012. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi, ieteikumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Izsakām pateicību 2011./2012. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Andrim Ambainim, Aivaram Bērziņam, Andrejam Cibulim, Mārtiņam Kokainim, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Agnesei Šustei, Mārim Valdatam, Jevgēnijam Vihrovam.



ISBN 978-9984-45-709-3

# SATURS

# IEVADS

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas priekšstats par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, novada un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai... Cik?”, Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes nodarbības vidusskolēniem, Mazā matemātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tie rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes un konkursi ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Kā piemēru varam minēt Atklāto matemātikas olimpiādi, kurā 2011./2012. m. g. piedalījās gandrīz 3000 skolēnu.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs un konkursos, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šajā procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus. Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Tā kā lielā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas matemātikas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības uzdevumu risināšanu. Tāpēc liela nozīme ir šai un citām LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdotajām grāmatām ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem tiek sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji vai paši apdāvinātākie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un pūles. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Strādājot ar grāmatu, iesakām ar katru uzdevumu vispirms darboties patstāvīgi un, neielūkojoties mūsu piedāvātajos atrisinājumos, pēc iespējas pilnīgi un detalizēti pašam to atrisināt, kā arī rūpīgi pierakstīt atrisinājumu. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā.

Ja Jūs nezināt, kā var atrisināt attiecīgo uzdevumu, varat meklēt palīdzību otrajā grāmatas sadaļā „Ieteikumi", kur sniegtas norādes, kā nonākt pie mums zināmā atrisinājuma.

Pēc uzdevuma patstāvīgas atrisināšanas iesakām tomēr ieskatīties arī grāmatā piedāvātos risinājumos un tos rūpīgi izpētīt, jo, pat ja Jūs uzdevumu esat atrisinājis pareizi, bet atšķiras pielietotā metode, mūsu piedāvātās metodes var noderēt tālākai attīstībai un citu uzdevumu risināšanai.

Matemātikas sacensības, kuru uzdevumi ir apkopoti šajā grāmatā, tiek rīkotas ar LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas iniciatīvu vai līdzdalību. Visu matemātikas sacensību visi uzdevumi, īsi atrisinājumi, rezultāti un arhīvi ir atrodami arī LU A. Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv.

*Autori*

# UZDEVUMI

## 1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

### 1.1. PIRMĀ KĀRTA

**1.1.1.** Aprēķini $225 - 25 \cdot 2 + 25 - 25 : 5 =$

**a)** 400

**b)** 175

**c)** 420

**d)** 195

**e)** 80

**1.1.2.** Pagājušajā gadā Latvijas Nacionālais simfoniskais orķestris devās koncertturnejā pa Eiropu, sniedzot koncertu dažādās pilsētās. Vai, aplūkojot U1.1. zīmējumu, vari noteikt, kurā pilsētā bija orķestra pirmais koncerts?

**a)** Paris

**b)** Muenchen

**c)** Basel

**d)** Frankfurt

**e)** Baden Baden


U1.1.zīm.

**1.1.3.** Burkā ir 6 reizes vairāk sulas nekā krūzē, bet krūzē ir par 10 glāzēm sulas mazāk nekā burkā. Cik glāzes sulas ir burkā?

**a)** 2

**b)** 6

**c)** 10

**d)** 12

**e)** 14

**1.1.4.** Zane ir vecāka par Lauru. Kāda ir gadu starpība Marutai un Jānim, ja zināms, ka Maruta ir par gadu jaunāka nekā Zane, bet Jānis ir par gadu vecāks nekā Laura?

**a)** par 2 gadiem mazāka nekā Zanes un Lauras gadu starpība

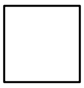
**b)** par 2 gadiem lielāka nekā Zanes un Lauras gadu starpība

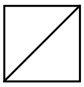
**c)** par gadu mazāka nekā Zanes un Lauras gadu starpība

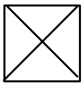
**d)** tāda pati, kā Zanes un Lauras gadu starpība

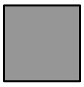
**e)** nevar noteikt

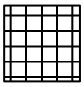
**1.1.5.** Rindā viens blakus otram novietoti seši vienādi klucīši (skat. U1.2. zīm.). Kā izskatās pirmā klucīša kreisais sāns?

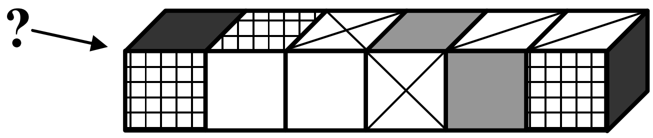
**a)** 

**b)** 

**c)** 

**d)** 

**e)** 



U1.2.zīm.

**1.1.6.** Kāda daļa no U1.3. zīm. attēlotā kvadrāta ir iekrāsota?

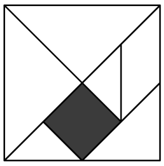
**a)** $\frac{1}{16}$

**b)** $\frac{2}{4}$

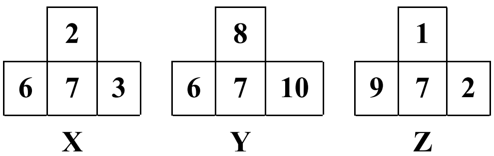
**c)** $\frac{1}{4}$

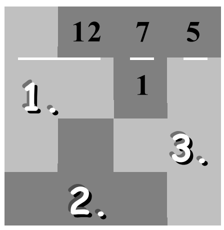
**d)** $\frac{2}{8}$

**e)** $\frac{1}{8}$


U1.3.zīm.

**1.1.7.** Kā jāsavieto figūriņas X, Y, Z kvadrātā, kas dots U1.4. zīm., tā, lai tur, kur saskaras rūtiņu malas, kas ir dažādās krāsās, lielākais skaitlis dalītos ar otru bez atlikuma?



U1.4.zīm.

**a)** 1. – X; 2. – Y; 3. – Z

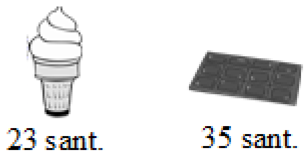
**b)** 1. – X; 2. – Z; 3. – Y

**c)** 1. – Y; 2. – Z; 3. – X

**d)** 1. – Y; 2. – X; 3. – Z

**e)** 1. – Z; 2. – X; 3. – Y

**1.1.8.** Viens saldējums maksā 23 santīmus, bet viena šokolāde – 35 santīmus. Cik saldējumus un cik šokolādes Kristaps var nopirkt, ja viņam ir viens lats un 51 santīms un viņš grib iztērēt visu savu naudu?




**a)** tikai 7 saldējumus

**b)** 3 saldējumus un 2 šokolādes

**c)** 2 saldējumus un 3 šokolādes

**d)** tikai 4 šokolādes

**e)** tas nav iespējams

**1.1.9.** Vienā mēnesī bija 5 sestdienas un 5 svētdienas, bet tikai 4 piektdienas un 4 pirmdienas. Tātad nākamajā mēnesī noteikti būs

**a)** 5 otrdienas

**b)** 5 ceturtdienas

**c)** 5 piektdienas

**d)** 5 sestdienas

**e)** 5 svētdienas

**1.1.10.** Diagrammā, kas redzama U1.5. zīm., attēlots rallijsprinta „Slātava 2011” grupā 4WD+ pieteikto automašīnu sadalījums pa modeļiem. No diagrammas nosaki, cik procentu no tām bija firmas Mitsubishi automašīnas!

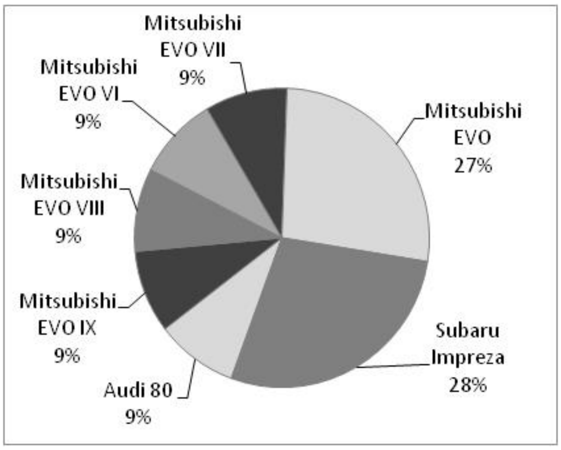
**a)** 45%

**b)** 37%

**c)** 72%

**d)** 36%

**e)** 63%




U1.5.zīm.

## 1.2. OTRĀ KĀRTA

**1.2.1.** Aprēķini! $2012-((2012-2010)\cdot 2+2):2+2=$

**a)** 2006

**b)** 2007

**c)** 2010

**d)** 2011

**e)** cits skaitlis

**1.2.2.** Slidotavas laukums ir 500 kvadrātmetri. Norlands vienā stundā no sniega var attīrīt $n$ kvadrātmetrus, Hardijs – $h$ kvadrātmetrus.

Ko izsaka izteiksme $500-(h+n)\cdot 2$?

**a)** tik stundās abi zēni var attīrīt no sniega visu slidotavu

**b)** tik stundās Hardijs var attīrīt no sniega visu slidotavu

**c)** tik kvadrātmetri būs attīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas

**d)** tik kvadrātmetri būs palikuši neattīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas

**e)** dotā izteiksme neko neizsaka

**1.2.3.** Zelma izcepa piparkūkas, un mēģināja tās sapakot maisiņos tā, lai visos maisiņos būtu vienāds skaits piparkūku.

Taču, liekot katrā maisiņā pa 2 piparkūkām, 1 piparkūka palika pāri.
Arī liekot katrā maisiņā pa 3 piparkūkām, 1 piparkūka palika pāri.
Tāpāt, mēģinot katrā maisiņā likt pa 5 piparkūkām, atkal 1 piparkūka palika pāri.
Cik piparkūkas bija izcepusi Zelma?

**a)** 26

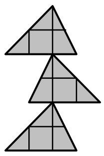
**b)** 29

**c)** 30

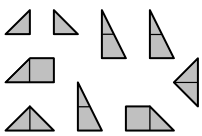
**d)** 31

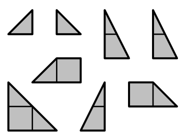
**e)** 36

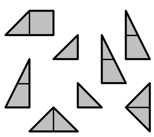
**1.2.4.** No kura gabaliņu komplekta var izveidot U1.6. attēlā redzamo eglīti, negrozot un neapmetot gabaliņus otrādi?

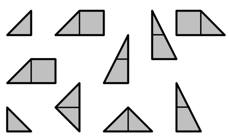


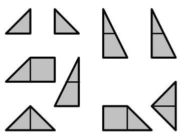
U1.6.zīm.

**a)** 

**d)** 

**b)** 

**e)** 

**c)** 

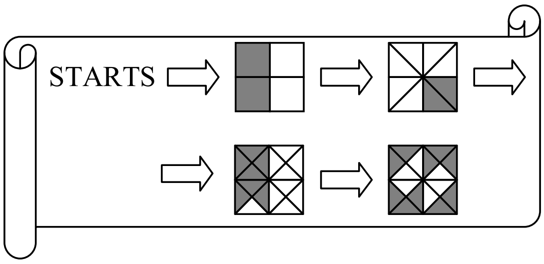
**1.2.5.** Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

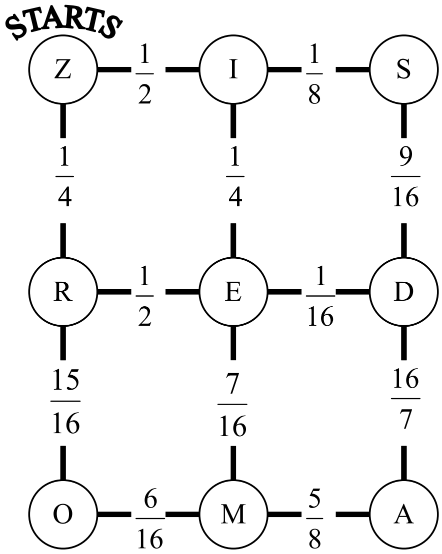
**1)** 201 *sant.* ◯ 4 *Ls* 20 *sant.* : 2

**2)** 100 *s* ◯ 2 *min.* – 20 *s*

**1.2.6.** Zīmējumā pa kreisi dotas norādes, kā izstaigāt labirintu U1.7. zīmējumā pa labi: labirintā secīgi jāpārvietojas pa to līniju, uz kuras uzrakstītais skaitlis atbilst attiecīgā kvadrāta iekrāsotajai daļai.

Iekrāso pareizo maršrutu! Kāds vārds veidojas?




U1.7.zīm.

**1.2.7.** Sētā bija divas sniega piku kaudzes. Abās kopā tajās bija 36 sniega pikas. No pirmās kaudzes 9 pikas pārlika otrajā kaudzē. Bet no otrās kaudzes 12 pikas aizsvieda prom. Tad abās kaudzēs atlika vienāds skaits sniega piku. Cik sniega piku bija sākumā katrā kaudzē?

**1.2.8.** Ziemassvētkos trīs māsas Anna, Baiba un Cilda saņēma katra pa vienai dāvanai: galda spēli, grāmatu vai krāsu zīmuļus, kas bija iesaiņotas kubveida, cilindriskā vai piramīdas formas kārbā. Noskaidro, kādu dāvanu saņēma katra meitene un kādā kārbā dāvana bija iesaiņota, ja zināms:

- Anna saņēma kubveida kārbu, bet tajā nebija galda spēle.
- Baiba nesaņēma piramīdas formas kārbu.
- Krāsu zīmuļi bija iesaiņoti piramīdas formas kārbā.

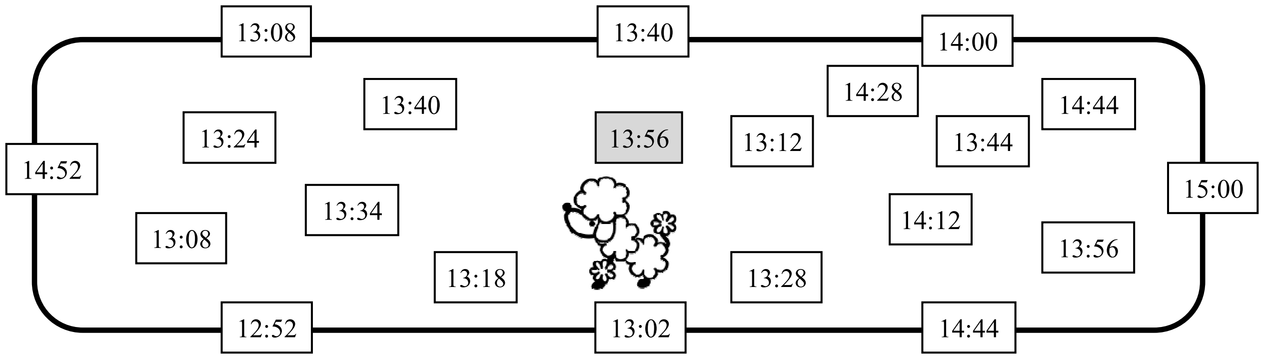
## 1.3. TREŠĀ KĀRTA

**1.3.1.** Aprēķini un atbildi izsaki sekundēs!

$$\left(\frac{1}{4} \text{ no } 1 \text{ stundas}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{6} \text{ no } 1 \text{ min.}\right) \cdot 12 - 22 \text{ min.}$$

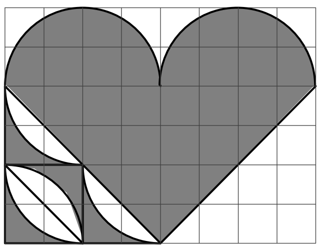
**1.3.2.** Viena no Latvijas bobsleja četrinieku ekipāžām ir Oskars Melbārdis, Helvijs Lūsis, Arvis Vilkaste un Jānis Strenga. Pirmais no tiem ir pilots, pārējie trīs ir stūmēji. Zināms, ka bobā pirmais sēž pilots.
Cik dažādos veidos treneris bobā varēja sasēdināt pārējos trīs stūmējus?
Uzraksti visus iespējamos variantus, stūmējus apzīmējot ar to vārdu pirmajiem burtiem: Helvijs Lūsis – *H*; Arvis Vilkaste – *A*; Jānis Strenga – *J*.

**1.3.3.** Pa vieniem no 8 vārtiem parkā ienāca sunītis (skat. U1.8. zīm.). Sākot ar ieeju, ik pēc 16 minūtēm sunīša atrašanās vietā tika fiksēts laiks. Kamēr sunītis tika līdz parka vidum (iekrāsotais laucinš), laiks tika uzņemts 5 reizes (ieskaitot sākumu un beigas).
Pa kuriem vārtiem sunītis ienāca parkā? Ar bultiņām norādi sunīša maršrutu!

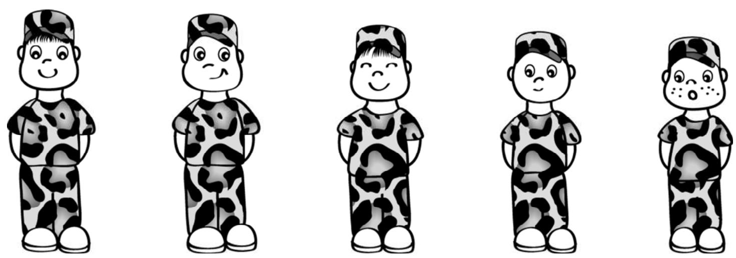


U1.8.zīm.

**1.3.4.** Cik rūtiņu liels ir U1.9. zīm. redzamās iekrāsotās figūras laukums? (*Padomā, kā figūras daļas varētu pārvietot, lai vieglāk noteiktu laukumu!*)


U1.9.zīm.

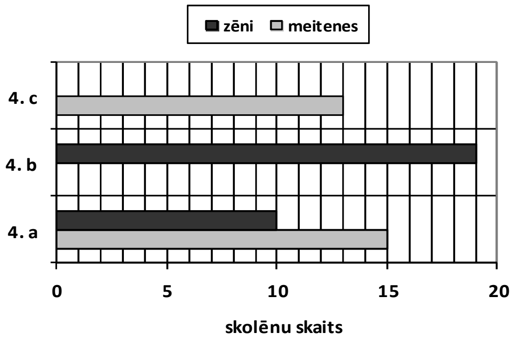
**1.3.5.** Pieci karavīri: Aigars, Māris, Juris, Sandris un Ivars, sastājās rindā pēc augumiem. Neviens no tiem nav vienādā garumā ar kādu no pārējiem. Zināms, ka Juris ir īsāks par Aigaru, Ivars ir garāks par Sandri, Aigars ir garāks par Ivaru, Juris ir īsāks par Ivaru, Aigars ir īsāks par Māri un Jurim nav vasaras raibumiņu. Zīmējumā zem katra karavīra pieraksti tā vārdu (skat. U1.10. zīm., karavīri attēloti pēc auguma dilstošā secībā)!


U1.10.zīm.

**1.3.6.** Nolasi no U1.11. zīm. diagrammas vajadzīgo informāciju un aizpildi tabulas tukšās rūtiņas!

Izmantojot tabulā doto informāciju, attēlo diagrammā trūkstošo zēnu un meiteņu skaitu!

Kurā no klasēm ir visvairāk zēnu? Un kurā visvairāk meiteņu? Kurā klasē ir vismazāk skolēnu?



U1.11.zīm.

| | 4. a | 4. b | 4. c |
|---|---|---|---|
| *Meitenes* | | 8 | |
| *Zēni* | | | |
| *Kopā* | | | 27 |

## 1.4. CETURTĀ KĀRTA

**1.4.1.** Vienu gadu augustā trīs svētdienas iekrita pāra datumos. Kādā nedēļas dienā bija šī gada 9. augusts?

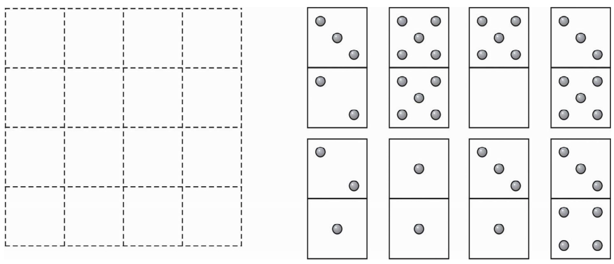
**1.4.2.** Pirmajā braucienā jātnieks nojāja 168 km, bet otrajā – 48 km. Pirmajā braucienā viņš jāja par 10 stundām ilgāk nekā otrajā. Cik stundas jātnieks jāja otrajā braucienā, ja visu laiku viņš jāja ar vienādu ātrumu?

**1.4.3.** Jūlija uzrakstīja trīsciparu skaitli, bet Igors – divciparu skaitli. Abos skaitļos visi cipari ir dažādi. Eva aprēķināja šo skaitļu starpību. Kādu vislielāko skaitli Eva varēja iegūt?

**1.4.4.** Vienā kannā ir 4 reizes vairāk piena nekā otrā. Ja no lielākās kannas nolies 48 *l* piena, tad abās kannās būs vienāds daudzums piena. Cik litri piena bija katrā kannā sākumā?

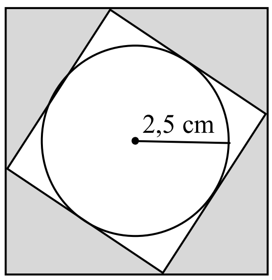
**1.4.5.** Igoram ir 8 domino kauliņi (skat. U1.12. zīm.). Viņš tos grib izvietot kvadrātā tā, lai punktu summas visās rindiņās būtu vienādas.

Parādi, kā Igoram ir jāizvieto šie kauliņi!


U1.12.zīm.

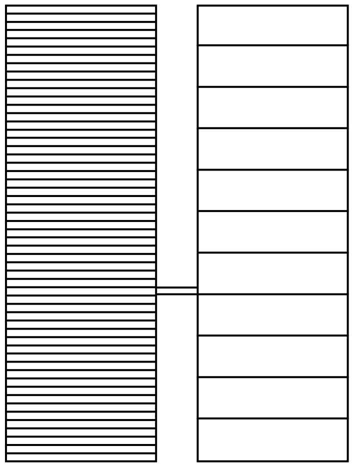
**1.4.6.** Janvārī Kuldīgā bija 10 saulainas dienas bez vēja, 15 vējainas dienas un 12 dienās sniga. Cik dienas janvārī Kuldīgā bija putenis (sniga un bija vējains)?

**1.4.7.** Pelēkā kvadrāta perimetrs ir par 8 *cm* lielāks, nekā baltā kvadrāta perimetrs (skat. U1.13. zīm.). Aprēķini pelēkās daļas laukumu!



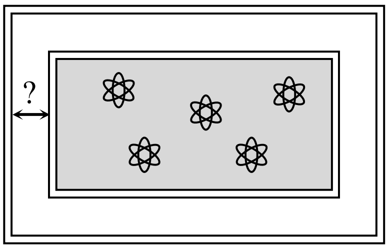
U1.13.zīm.

**1.4.8.** Vienā no U1.14. zīm. attēlotajām augstceltnēm dzīvo rūķīši, bet otrā – milži. No rūķīšu mājas 21. stāva pa tiltiņu var nokļūt milžu mājas 5. stāvā. Uz kuru stāvu rūķīšu mājā ved tiltiņš no milžu mājas 10. stāva?



U1.14.zīm.

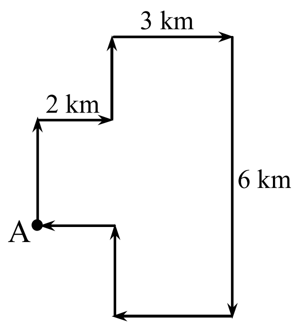
**1.4.9.** Apkārt taisnstūra puķu dobei ved celiņš, kuru no abām malām ierobežo apmale (skat. U1.15. zīm.). Ārējās apmales kopējais garums ir par 8 *m* lielāks nekā iekšējās apmales garums. Kāds ir celiņa platums?




U1.15.zīm.

**1.4.10.** Tūristi ar slēpēm veica U1.16. zīmējumā attēloto maršrutu. Punkts A ir ceļojuma sākuma un beigu punkts.

Aprēķini maršruta kopējo garumu!




U1.16.zīm.

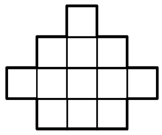
# 2. Jauno matemātiķu konkurss

## 2.1. Pirmā kārta

**2.1.1.** U2.1. zīmējumā tukšajās rūtiņās ieraksti pa **viencipara** skaitlim tā, lai, izpildot darbības pa rindiņām un kolonnām, iegūtu pareizas vienādības!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | · | | − | | = | 5 |
| : | | · | | : | | + |
| | + | 2 | − | 1 | = | |
| + | | − | | + | | − |
| | : | 3 | + | 5 | = | |
| = | | = | | = | | = |
| 8 | · | | : | | = | 1 |

U2.1. zīm.



U2.2. zīm.

**2.1.2.** Sagriez U2.2. zīmējumā attēloto figūru četrās vienādās daļās! (Iegūtajām daļām jābūt vienādām gan pēc formas, gan pēc lieluma.)

**2.1.3.** Rūķīšu mežā notika Meža parlamenta vēlēšanas, kurās piedalījās 5 partijas. Vietu sadalījums parlamentā ir sekojošs: Votivapas ieguva 30% vietu, Šilišallas – 25%, Lubilelli – 20%, Rumpelli – 15% un Zimzapi – 10% vietu. Tagad visām partijām jāvienojas par koalīciju, kas veidos valdību. Cik dažādas koalīcijas var izveidot, ja koalīcijā jāapvienojas vismaz divām partijām, pie tam Zimzapi ir paziņojuši, ka nekādā gadījumā nedarbosies vienā koalīcijā ar Votivapām, bet Šilišallas uzsvēra, ka viņi nespēs sadarboties ar Rumpelliem.

Cik dažādas koalīcijas šajā parlamentā var izveidot? Bet cik ir tādu koalīciju, kurās apvienojusies vairāk nekā puse visu parlamentāriešu?

**2.1.4.** Trīs draugi – Maksis, Leo un Ričs – apsprieda, cik tālu viens no otra viņi dzīvo. Maksis teica: „*No manas mājas līdz Leo mājai ir tieši divas reizes tālāk nekā līdz Riča mājai.*”

Leo apgalvoja: „*No manas mājas līdz Riča mājai ir tieši divas reizes tālāk nekā līdz Makša mājai.*”

Savukārt Ričs paziņoja: „*No manas mājas līdz Leo mājai ir tieši divas reizes tālāk nekā līdz Makša mājai.*”

**a)** Vai iespējams, ka visi zēni runāja patiesību? *Atbildi pamato!*

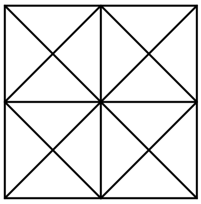
**b)** Noskaidro cik tālu ir viena māja no otras, ja zināms, ka attālums starp Makša un Riča mājām ir 100 m, kā arī zināms, ka vismaz divi zēni ir teikuši patiesību.

**2.1.5.** Skolotājai groziņā ir 50 kartiņas, uz kurām uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 50, uz katras kartiņas uzrakstīts viens skaitlis. Zigis no groziņa **uz labu laimi** paņēma 11 kartiņas. Pierādi, ka viņam noteikti izdosies starp savām 11 kartiņām atrast 6 tādas, no kurām var izveidot pareizu vienādību $\square+\square+\square=\square+\square+\square$.

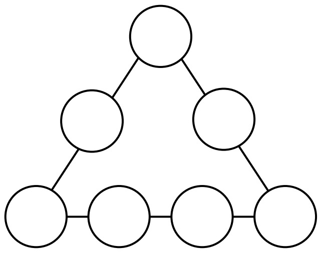
## 2.2. Otrā kārta

**2.2.1.** Vectēvam ir kārba ar monētām. Starp tām ir sastopamas visas Latvijas naudas monētas (1 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant., 1 Ls, 2 Ls) pietiekamā daudzumā. Kad Mārtiņš viesojās pie vectēva, tas viņam ļāva izvēlēties no savas kārbas 20 monētas ar sekojošu nosacījumu: no dažām vai visām izvēlētajām monētām vienlaicīgi jāvar izveidot trīs kaudzes, kurās kopā sastopamas visas 8 monētas un kuru vērtības ir attiecīgi 1,32 Ls, 2,13 Ls, 3,21 Ls. Pārējās monētas var izvēlēties pēc savas izvēles. Kādu lielāko naudas summu Mārtiņš var iegūt?

**2.2.2** Cik septiņstūrus vari saskatīt U2.3. zīmējumā? Parādi dažādos septiņstūrus zīmējumos, katram septiņstūrim uzzīmējot citu zīmējumu un saskaiti, cik katra veida septiņstūri ir atrodami šajā zīmējumā!



U2.3. zīm.



U2.4. zīm.

**2.2.3.** U2.4. zīm. aplīšos ierakstiet skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Aplūkojiet visas iespējas, kādas var būt šīs summas.

**2.2.4.** Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa *garumu* sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piem., skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ *garums* ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ *garums* ir 2 u.tml.). Kāds lielākais *garums* var būt četrciparu skaitlim? Atrodiet visus četrciparu skaitļus ar lielāko *garumu*! (Pirmskaitlis ir skaitlis, kas dalās ar diviem skaitļiem – ar 1 un pats ar sevi.)

**2.2.5.** Maisā atrodas 100 bumbiņas: 30 zilas, 30 sarkanas, 30 dzeltenas, bet par pārējām 10 zināms, ka starp tām ir baltas un melnas bumbiņas, pie tam ir vismaz viena melna bumbiņa. Cik bumbiņas uz labu laimi jāizņem no maisa, lai starp tām būtu

**a)** vismaz 8 sarkanas bumbiņas;

**b)** vismaz 14 bumbiņas vienā krāsā;

**c)** vismaz viena melna bumbiņas?

Atbildi pamato!

## 2.3. TREŠĀ KĀRTA

**2.3.1.** Atrisini skaitļu rēbusu AH + A = HEE, ja zināms, ka katrs burts apzīmē vienu ciparu, turklāt vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, dažādiem – dažādi.

**2.3.2.** Liepiņu ģimenē ir pieci cilvēki: Anna, Beāte, Centis, Didzis un Edgars. Visu ģimenes locekļu vecumu summa ir 88 gadi. Savukārt Annas un Beātes vecumu summa ir 39 gadi, Beātes un Centa vecumu summa ir 19 gadi, Centa un Didža vecumu summa ir 44 gadi, bet Didža un Edgara vecumu summa ir 38 gadi. Noskaidro, cik vecs ir katrs šīs ģimenes loceklis. (Visi vecumi izteikti veselos gados.)

**2.3.3.** Doti piecu veidu stienīši ar garumiem 1 *dm*, 2 *dm*, 3 *dm*, 5 *dm* un 7 *dm*; pa 100 no katra veida stienīšiem. Cik un kādus dažādus daudzstūrus, kam visas malas ir dažādas, var izveidot, izmantojot tikai šos stienīšus? Apskati visas iespējas. Pamato, kāpēc citu iespēju nav. (Stienīši var saskarties tikai daudzstūra virsotnēs, t.i., daudzstūra katru malu veido viens vesels stienītis, viena mala nevar sastāvēt no vairākiem stienīšiem.)

**2.3.4.** Vilciena maršrutā no Rīgas līdz Carnikavai, ieskaitot galapunktus, ir 12 pieturas:

Rīga – Zemitāni – Brasa – Sarkandaugava –

– Mangaļi – Ziemeļblāzma – Vecdaugava – Vecāķi –

– Kalngale – Garciems – Garupe – Carnikava

**a)** Cik daudz dažādas biļetes šajā maršrutā abos virzienos var tikt pārdotas?

(Par dažādām uzskatām biļetes, kurām atšķiras izbraukšanas stacija un/vai pienākšanas stacija, piem., „Rīga – Zemitāni”, „Rīga – Brasa” un „Brasa – Rīga” ir dažādas biļetes.)

**b)** Vilcienā, kas no Rīgas uz Carnikavu izbrauca plkst. 11:20, kādu brīdi vienā vagonā atradās 35 pasažieri. Vai noteikti var apgalvot, ka starp tiem ir vismaz divi pasažieri ar vienādām biļetēm, t.i., viņi iekāpa vienā stacijā un izkāps arī vienā stacijā. (Visi pasažieri ir nopirkuši biļetes, un katrs brauc tieši tajā maršrutā, kas norādīts biļetē.)

**2.3.5.** Izdomā vismaz divus dažādus veidus, kā papīra lapu ar izmēriem 20 *cm* × 20 *cm* var noklāt ar kvadrātiem un vienādmalu trijstūriem, kuru malu garumi 1 *cm*. Jāizmanto abu veidu figūras. (Figūras nedrīkst pārklāties un lapai nedrīkst palikt nenoklātas vietas, bet figūras drīkst pāriet pāri lapas malai.)

## 2.4. CETURTĀ KĀRTA

**2.4.1. a)** Atrodi trīs tādus naturālus skaitļus, kuriem nosvītrojot to pirmo ciparu, tie katrs samazinās 51 reizi!

**b)** Atrodi divus tādus naturālus skaitļus, kuriem nosvītrojot to pirmo ciparu, tie katrs samazinās 25 reizes!

**2.4.2.** Vai rūtiņu lapā var nokrāsot 23 rūtiņas tā, lai katrai no tām būtu

**a)** pāra skaits,

**b)** nepāra skaits nokrāsotu kaimiņu rūtiņu?

(Par kaimiņu rūtiņām sauc rūtiņas, kurām ir kopīga mala.)

**2.4.3.** Doti 100 naturāli skaitļi (vienalga kādi).

**a)** Pierādi, ka no tiem noteikti var izvēlēties tādus 15 skaitļus, kam katru divu skaitļu starpība dalās ar 7.

**b)** Vai noteikti var izvēlēties arī 16 šādus skaitļus?

**2.4.4.** Rūķīšu mežā tiek rīkotas skriešanas sacensības – stafete. Sacensības notiek apļveida stadionā, starta un finiša līnija sakrīt. Stadiona viena apļa garums ir 330 metri, stafetes kociņš tiek nodots ik pēc 75 metriem, visi skrien vienā virzienā. Stafete beidzas, kad pirmo reizi kāds skrējējs, noskrienot 75 metrus, nonāk precīzi finiša līnijā (t.i., starta/finiša līnija var tikt šķērsota vairākas reizes).

Cik pavisam ir punktu, kuros tiek nodots stafetes kociņš?

Cik dalībnieku ir komandā, ja katrs dalībnieks skrien tieši vienu stafetes posmu?

Kāds ir stafetes distances kopējais garums?

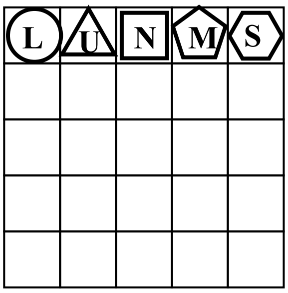
**2.4.5.** Kvadrāta ar izmēriem 5 × 5 rūtiņas katrā rūtiņā jāieraksta viens no pieciem burtiem L, U, N, M, S, katra rūtiņa jāizkrāso vienā no piecām krāsām (dzeltena, zila, zaļa, sarkana, oranža) un katrs burts jāapvelk ar vienu no piecām figūrām – apli, trijstūri, kvadrātu, piecstūri, sešstūri – tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādi nosacījumi:

1) katrā rindā un katrā kolonnā ir sastopami visi 5 burti, visas krāsas un visas figūras,

2) katrs burts katrā krāsā ir nokrāsots tieši vienu reizi,

3) katra veida figūra pa vienai reizei satur katru burtu un ir nokrāsota katrā no krāsām.

U2.5. zīm. parādīts, kā ir aizpildīta tabulas pirmā rinda (pirmajā rindā rūtiņu krāsas no kreisās puses ir dzeltena, zila, zaļa, sarkana, oranža).



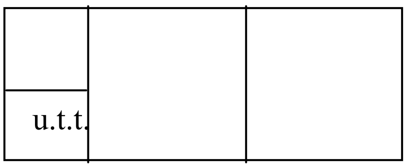

U2.5. zīm.

## 2.5. PIEKTĀ KĀRTA

**2.5.1.** Brunim vecāki ļauj spēlēt datorspēles otrdienās, sestdienās un nepāra datumos. Kāds var būt lielākais secīgu dienu skaits, kurās Brunim ir atļauts spēlēt datorspēles?

**2.5.2.** Dots taisnstūris ar izmēriem 141 *cm* × 324 *cm*. No tā nogrieza kvadrātu ar malas garumu 141 *cm*, pēc tam vēl vienu tādu pašu kvadrātu u.t.t., līdz palika taisnstūris, kuram vienas malas garums mazāks nekā 141 *cm*. No šī taisnstūra nogrieza kvadrātus, kuru malas garums vienāds ar taisnstūra īsākās malas garumu. Tādā veidā turpināja griezt taisnstūri, līdz tas viss taisnstūris bija sadalīts kvadrātos (skat. U2.6. zīm.).

Kāds ir mazākā iegūtā kvadrāta malas garums? Cik kvadrāti tika iegūti?

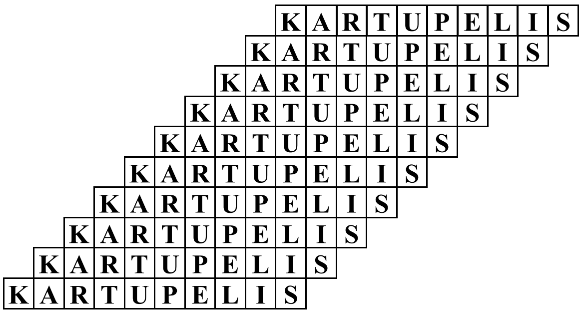



U2.6. zīm.

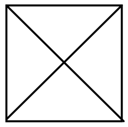
**2.5.3.** Vectēvs un mazdēls devās slēpot pa vienu un to pašu maršrutu. Zināms, ka pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu 7 *km/h*, no kalna lejā mazdēls brauc ar ātrumu 20 *km/h*, bet vectēvs – ar ātrumu 8 *km/h*, savukārt pret kalnu mazdēls – ar ātrumu 4 *km/h*, bet vectēvs – ar ātrumu 6 *km/h*.

Pirmais maršrutu veica mazdēls. Vai var viennozīmīgi noteikt, kas kopumā bija vairāk – nobraucieni no kalna vai augšup kalnā? Vai ir viennozīmīga atbilde uz šo jautājumu, ja pirmais finišē vectēvs?

**2.5.4.** Cik dažādos veidos U2.7. zīmējumā var izlasīt vārdu KARTUPELIS, ja var sākt lasīt no jebkuras rūtiņas, kurā ierakstīts burts K un lasot jāpārvietojas uz blakus rūtiņu pa labi vai uz leju? (Par blakus rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.)




U2.7. zīm.



U2.8. zīm.

**2.5.5.** Par *trīskrāsu kvadrātdomino* sauksim kvadrātveida spēles kauliņu, kas sadalīts 4 daļās, kā parādīts U2.8. zīm., un katra daļa ir nokrāsota vienā no trīs dotajām krāsām – balta, sarkana vai dzeltena (viena kauliņa krāsošanai var būt izmantota viena, divas vai visas trīs krāsas). Cik dažādus *trīskrāsu kvadrātdomino* kauliņus var izveidot?

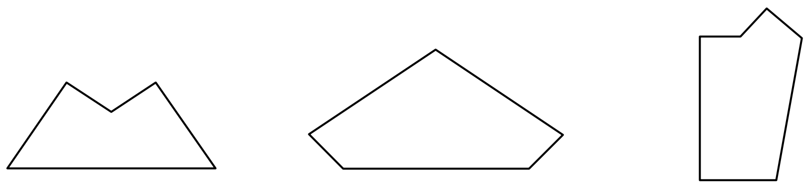
(Kauliņus sauc par vienādiem, ja tos var iegūt vienu no otra pagriežot; divi kauliņi, kas ir viens otra spoguļattēls, ir dažādi.)

Uzzīmē tos visus! Saliec no visiem atrastajiem kauliņiem vienu taisnstūri tā, lai divi kauliņi saskartos ar vienādas krāsas malām

# 3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

## 3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

**3.1.1.** A4 formāta ( $297\ mm \times 210\ mm$ ) papīra lapu pārlocīja vienu reizi. Pēc tam iegūto figūru uzlika uz lielāka papīra un ar zīmuli apvilka tās kontūru. Kuras no U3.1. zīmējumā redzamajām figūrām tādā veidā varēja tikt iegūtas un kā?



U3.1.zīm.

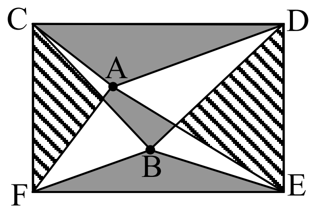
**3.1.2.** Atrast mazāko naturālo skaitli $n$ tādu, kuram eksistē naturāls skaitlis $m$, ka ir spēkā nevienādība $0{,}33 < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$.

**3.1.3.** Līgai ir četri bērni. Katram no viņiem gadu skaits ir vesels skaitlis no 2 līdz 16, turklāt visi bērni ir dažāda vecuma. Pirms gada vecākā bērna vecuma kvadrāts bija vienāds ar pārējo bērnu vecumu kvadrātu summu. Bet pēc gada vecākā un jaunākā bērna vecumu kvadrātu summa būs vienāda ar vidējo bērnu vecumu kvadrātu summu.

Vai ar šo informāciju pietiek, lai viennozīmīgi noteiktu Līgas bērnu vecumus? Atrast visas iespējamās bērnu vecumu vērtības.

**3.1.4.** Sadali skaitli 22 kā trīs saskaitāmo summu tā, lai vienam no saskaitāmajiem pieskaitot 0,5, no otra atņemot 1,5, bet trešo skaitli palielinot 2,5 reizes, iegūtu vienādus skaitļus.

**3.1.5.** Taisnstūra *CDEF* iekšpusē patvaļīgi izvēlēti punkti *A* un *B*. Katrs no tiem ar taisnes nogriežņiem savienoti ar katru no taisnstūra virsotnēm. Pierādi, ka iekrāsoto figūru kopējais laukums vienāds ar iesvītroto figūru kopējo laukumu (skat. U3.2. zīm.).




U3.2.zīm.

**3.1.6.** Punkts *A* atrodas uz funkcijas $y = 2x + 3$ grafika. Punkts *B* atrodas uz funkcijas $y = x + 2$ grafika. Ja punkts $M(4; 9)$ ir nogriežņa *AB* viduspunkts, atrast vienādojumu funkcijai, kuras grafiks iet caur punktiem *A* un *B*.

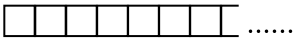
**3.1.7.** Mārtiņam bija jānovāc kartupeļi no sava 10800 $m^2$ lielā lauka. Tā kā viņam nebija traktora, viņš nolēma lūgt palīdzību saviem kaimiņiem – Ansim, Jānim un Kristapam. Ansis ar savu traktoru visu lauku noraktu trīs stundās, Jānis – 4 stundās, bet Kristaps – 6 stundās. Kaimiņi norunāja, ka visi trīs strādās kopīgi, lai ātrāk paveiktu visu darbu.

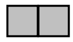
Kad puse no visa lauka bija jau novākta, Jāņa traktors salūza, tāpēc viņš vairs nevarēja turpināt strādāt. Tomēr Ansis un Kristaps darbu turpināja, līdz visi kartupeļi bija novākti.

Aprēķini, cik ilga bija kartupeļu talka!

**3.1.8.** Šaurleņķu trijstūra $ABC$ malas $AB$ un $AC$ ir attiecīgi 15 *cm* un 13 *cm* garas. Zināms, ka $AD$ ir augstums, kas vilkts pret malu $BC$, un trijstūra $ADC$ laukums ir 30 $cm^2$. Kāds ir trijstūra $ABC$ laukums, ja tas ir vesels skaitlis?

**3.1.9.** Dace un Andis spēlē spēli, liekot kauliņus uz vienu rūtiņu plata un $n$ rūtiņas gara spēles galda (skat. U3.3.a zīm.). Kauliņu izmēri ir $1 \times 2$ rūtiņas (skat. U3.3.b zīm.). Dace un Andis pēc kārtas liek kauliņus uz brīvajiem spēles galda lauciņiem tā, ka spēles kauliņš pilnībā pārklāj divas spēles galda rūtiņas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē.


U3.3.a zīm.


U3.3.b zīm.

Kurš spēlētājs uzvar, ja Dace vienmēr sāk spēli un abi spēlētāji savā gājienā veic visizdevīgāko no iespējamajiem soļiem, un ja

**a)** $n = 6$;

**b)** $n = 9$;

**c)** $n = 10$;

**d)** $n$ ir patvaļīgs pāra skaitlis?

**3.1.10.** Kādā valstī katri divi iedzīvotāji ir vai nu draugi, vai ienaidnieki. Katrs cilvēks uz kādu brīdi var sastrīdēties ar visiem saviem draugiem un salabt (sadraudzēties) ar visiem saviem ienaidniekiem. Izrādījās, ka šādā veidā katri trīs iedzīvotāji var kļūt par draugiem. Pierādiet, ka tādā gadījumā visi valsts iedzīvotāji var kļūt par draugiem.

## 3.2. OTRĀ NODARBĪBA

**3.2.1.** Var ievērot, ka $18 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$. Cik no pirmajiem piecpadsmit naturālajiem skaitļiem ir izsakāmi kā četru veselu skaitļu kvadrātu summa?

**3.2.2.** Matemātikas nedēļā Paskāls, Ņūtons, Galilejs un Fermā visi pildīja vienu un to pašu testu. Vidējais punktu skaits visiem dalībniekiem bija 16 punkti. Paskālam un Ņūtonam vidējais punktu skaits bija 16, Paskālam un Fermā vidējais punktu skaits bija 13, bet Ņūtonam un Fermā vidējais punktu skaits bija 18. Cik punktus ieguva Galilejs?

**3.2.3.** Aizpildi krustskaitļu mīklas neaizpildītās rūtiņas (skat. U3.4. zīm.) ar cipariem no 0 līdz 9, katru ciparu izmantojot tieši divas reizes. Zināms, ka skaitlis *4-horizontāli* ir 23705, turklāt skaitļos *4-horizontāli* un *8-horizontāli* kopā katrs cipars ir izmantots tieši vienu reizi.

Vēl zināms:

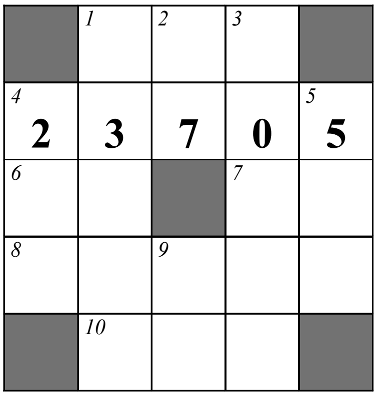
**1)** *10-horizontāli* ir skaitļa *4-horizontāli* dalītājs;

**2)** 4 · (*4-horizontāli* – *4-vertikāli* + 5) = *1-vertikāli*;

**3)** gan *1-horizontāli*, gan *5-vertikāli* dalās ar 36;

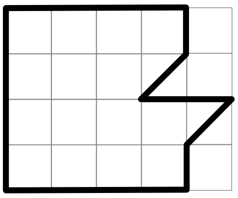
**4)** *9-vertikāli* ir skaitļa *5-vertikāli* dalītājs.

Pamato arī, kāpēc šai krustskaitļu mīklai ir viens vienīgs atrisinājums!




U3.4. zīm.

**3.2.4.** Sagriez U3.5. zīm. attēloto figūru četrās pēc formas un lieluma vienādās daļās, no kurām var salikt kvadrātu!



U3.5. zīm.

**3.2.5.** Profesors Cipariņš pētīja latīņu alfabēta drukātos lielos burtus un sadalīja tos 4 grupās:

**1.** grupa: A M T U V W Y

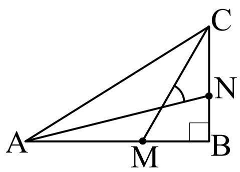
**2.** grupa: B C D E K

**3.** grupa: H I N O S X Z

**4.** grupa: F G J L P Q R

Pēc kāda principa tika veidots šis sadalījums? Pēc šī paša principa sadali visus latviešu alfabēta drukātos lielos burtus 4 grupās!

**3.2.6.** Uz taisnleņķa trijstūra $ABC$ katetēm $AB$ un $BC$ atlikti punkti $M$ un $N$ tā, ka $AM = CB$ un $MB = CN$. Pierādiet, ka leņķis starp $AN$ un $CM$ ir 45° (skat. U3.6. zīm.).




U3.6. zīm.

**3.2.7.** Mācību gada vidū Sandrai nomainījās matemātikas skolotājs. Attapīgā Sandra izrēķināja, ka iepriekšējās skolotājas dzimšanas gads bija vienāds ar līdz skolotāja nomaiņai jau izņemto mācību grāmatas lappušu numuru summu. Bet jaunā skolotāja dzimšanas gads vienāds ar atlikušo lappušu numuru summu. Par cik gadiem viens skolotājs ir vecāks nekā otrs?

**3.2.8.** Ar kādiem regulāriem daudzstūriem var pilnībā pārklāt plakni, izmantojot tikai viena veida vienādus daudzstūrus? (Piezīme: *regulārs daudzstūris* – daudzstūris, kura visu malu garumi ir vienādi un visi leņķi ir vienādi.)

**3.2.9.** Skolas daiļslidošanas sacensībās dalībniekus vērtē 7 tiesneši. Katra dalībnieka priekšnesumu katrs tiesnesis vērtē ar veselu skaitli no 1 līdz 10 (1 – zemākais vērtējums, 10 – augstākās vērtējums). Katra dalībnieka kopējais vērtējums par priekšnesumu tiek aprēķināts pēc šāda algoritma:

- viens augstākais un viens zemākais vērtējums tiek „atmests”;
- atlikušie pieci vērtējumi tiek saskaitīti kopā.

(Piemēram, ja par dalībnieka priekšnesumu tiesneši ielikuši 7; 10; 9; 10; 9; 8; 8, tad kopvērtējums ir $10+9+9+8+8=44$.)

**a)** Zināms, ka Annas priekšnesumu pirmie seši tiesneši novērtēja ar šādiem punktiem: 10; 9; 9; 10; 8; 9. Annas kopējais vērtējums bija 45 punkti. Ko var pateikt par septītā tiesneša vērtējumu?

**b)** Kates priekšnesumu pirmie pieci tiesneši novērtēja ar 7; 9; 7; 8; 8 punktiem. Kates kopējais vērtējums bija 40 punkti. Ko var pateikt par pārējo divu tiesnešu piešķirtajiem punktiem?

**c)** Pēc Zaigas priekšnesuma visu tiesnešu vērtējumi bija dažādi. Zaigas kopējais priekšnesuma vērtējums ir 27 punkti, turklāt četri no punktiem ir 9; 2; 5; 8. Kādi varēja būt pārējo trīs tiesnešu vērtējumi?

**3.2.10.** Vilcienam braucot garām ogļu pārkraušanas vietai, melnie putekļi iekļuva vagonā, un dažu pasažieru sejas kļuva netīras. Konduktors, iedams garām, noteica: „Dažiem no jums ir netīra seja. Nomazgāties var pie izlietnes, taču to var darīt tikai vilciena stāvēšanas laikā.” Tieši pēc četrām vilciena pieturām visi pasažieri atkal bija tīri.

Cik pasažieri bija nosmērējušies, ja zināms:

1. Vagonā nav spoguļu.
2. Pasažieris iet mazgāties tikai tad, kad viņš ir pārliecināts, ka tiešām ir netīrs.
3. Vienas pieturas laikā pie izlietnes var nomazgāties jebkurš skaits pasažieru.
4. Visi pasažieri ir attapīgi un prot no saviem novērojumiem izdarīt pareizus secinājumus.

## 3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

**3.3.1.** Kādiem naturāliem skaitļiem $n$ izteiksmes $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vērtība ir vesels skaitlis?

**3.3.2.** Taisnstūris sadalīts deviņos mazākos taisnstūros kā parādīts U3.7. zīm. Pieciem no šiem taisnstūriem laukumi ir 42, 15, 7, 8 un 5 cm$^2$ (sk. U3.7. zīm.). Kādi var būt pārējo taisnstūru laukumi?

| | | |
|---|---|---|
| 42 | | 15 |
| 7 | | |
| | 8 | 5 |

U3.7.zīm.

**3.3.3.** Par četriem naturāliem skaitļiem $a$, $b$, $c$, $d$ zināms, ka:

- $a$ un $b$ summa ir puse no $c$ un $d$ summas;

- $a$ un $c$ summa ir divreiz lielāka nekā $b$ un $d$ summa;
- $a$ un $d$ summa ir pusotru reizi lielāka nekā $b$ un $c$ summa.

Kāda ir mazākā iespējamā summas $a + b + c + d$ vērtība?

**3.3.4.** Atrast visas iespējamās ciparu $A$ un $C$ vērtības, ar kurām U3.8. zīm. attēlotais reizinājums ir nepāra skaitlis (zvaigznīte apzīmē vienu ciparu; starp tiem var būt gan vienādi, gan dažādi cipari).

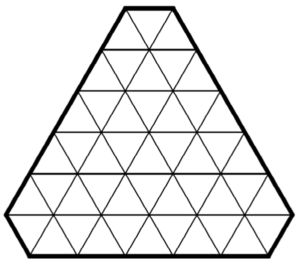
$$\begin{array}{rrr} & A & C \\ \cdot & C & A \\ \hline \ast & \ast & \ast \\ \ast & C & \\ \hline \ast & \ast & \ast \end{array}$$

U3.8.zīm.

**3.3.5.** Trijstūra $ABC$ iekšpusē izvēlēts punkts $D$. Punkta $D$ attālumi līdz trijstūra virsotnēm ir attiecīgi $DA = x$, $DB = y$, $DC = z$; $P$ ir trijstūra $ABC$ perimetrs. Pierādi, ka ir patiesa nevienādība:

$$\frac{1}{2}P < x + y + z < P.$$

**3.3.6.** Vai U3.9. zīm. attēloto torti var sagriezt 23 vienādos gabalos, ja griezt drīkst tikai pa iezīmētajām līnijām?



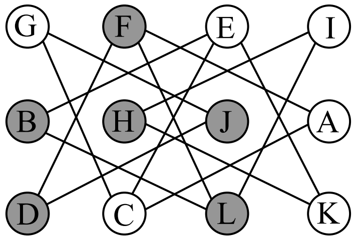
U3.9.zīm.

**3.3.7.** Kādiem naturāliem skaitļiem $a$ un $b$ gan izteiksmes $\frac{a^2+b}{b^2-a}$, gan $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ vērtības ir veseli skaitļi?

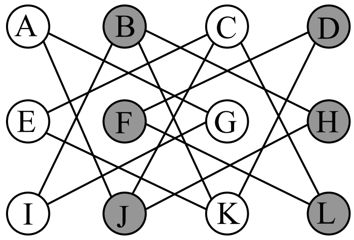
**3.3.8.** Doti pieci dažādi veseli skaitļi $a, b, c, d, e,$ kas ir atrisinājumi vienādojumam $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$.

Nosaki visas iespējamās summas $S = a + b + c + d + e$ vērtības.

**3.3.9.** Sešas sudraba monētas $A$, $C$, $E$, $G$, $I$, $K$ un sešas zelta monētas $B$, $D$, $F$, $H$, $J$, $L$ ar nogriežņiem savienotas savā starpā tā, kā parādīts U3.10. zīm. Katrā gājienā atļauts samainīt vietām vienu sudraba monētu ar vienu zelta monētu, ja tās ir savienotas ar nogriezni. Kā ar 17 gājieniem no U3.10. zīm. redzamā izkārtojuma var iegūt U3.11. zīm. parādīto monētu izkārtojumu?



U3.10.zīm.



U3.11.zīm.

**3.3.10.** Rūķu ciemati *A* un *B* atrodas blakus, turklāt abu ciematu iedzīvotāji bieži ciemojas viens pie otra. Zināms, ka visi ciemata *A* iedzīvotāji vienmēr saka tikai patiesību, bet visi ciemata *B* iedzīvotāji vienmēr melo.

Sniegbaltīte ieradās vienā no šiem ciematiem, bet viņa nezina, kurā tieši. Šajā ciematā viņa satika vienu rūķīti (viņa nezina, kura ciemata pamatiedzīvotājs viņš ir). Lai uzzinātu, kurā ciematā – *A* vai *B* – Sniegbaltīte atrodas, viņa drīkst uzdot rūķītim vienu jautājumu, turklāt tādu, uz kuru var atbildēt ar „jā” vai „nē”. Kāds varētu būt šis jautājumu, lai pēc sniegtās atbildes varētu nekļūdīgi noteikt, kurā ciematā Sniegbaltīte atrodas?

## 3.4. Ceturtā nodarbība

**3.4.1.** Cik daudz atrisinājumu ir vienādojumam $a^2b+12=2012$, ja *a* un *b* ir naturāli skaitļi?

**3.4.2.** Uz galda rindā saliktas 9 kartiņas ar cipariem tā, kā parādīts U3.12. zīmējumā.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 2 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 |

U3.12.zīm.

Šīs kartiņas jāpārkārto tā, lai cipari būtu sakārtoti augošā secībā no 1 līdz 9. Ar kādu mazāko gājienu skaitu to var izdarīt, ja vienā gājienā var pārvietot divas blakus esošas kartiņas, nemainot to secību (skat., piem., U3.13. zīm.)?

$$1\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 7\ \ 3\ \ 6\ \boxed{8\ \ 4} \longrightarrow 1\ \boxed{8\ \ 4}\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 7\ \ 3\ \ 6$$

U3.13.zīm.

**3.4.3.** Paulis atklāja metodi, kā divciparu skaitli var kāpināt kvadrātā (skat. U3.14. zīm.).

$$\begin{array}{c} 67^2 \\ \hline 42 \\ 3649 \\ 42 \\ \hline 4489 \end{array}$$

U3.14.zīm.

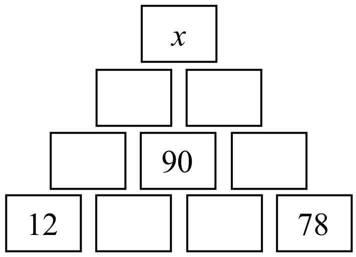
**a)** Izmantojot šo metodi, aprēķini skaitļu 59, 82 un 19 kvadrātus.

**b)** Pamato, kāpēc šī metode ir korekta, aprēķinot jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

**3.4.4.** Taisnstūra *ABCD* iekšpusē atrodas taisnstūris $A_1B_1C_1D_1$ tā, ka virsotne $A_1$ sakrīt ar virsotni *A*, virsotne $B_1$ atrodas nogriežņa *AB* iekšējā punktā, virsotne $D_1$ atrodas nogriežņa *AD* iekšējā punktā. Pierādi, ka eksistē tāda taisne, kas gan taisnstūri *ABCD*, gan taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$, gan sešstūri $B_1BCDD_1C_1$ dala divās vienlielās daļās.

**3.4.5.** Kvadrāta ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā ir novietota figūriņa. Figūriņas noņēma no rūtiņām un salika atpakaļ uz kvadrāta citās vietās (uz katras rūtiņas tieši vienu figūriņu). Vai var gadīties, ka ikkatra figūriņa nonāca blakus tai rūtiņai, kurā tā atradās sākumā? (Par blakus rūtiņām sauc rūtiņas, kurām ir kopīga mala.)

**3.4.6.** Kāds skaitlis jāraksta $x$ vietā, ja U3.15. zīmējumā attēlotās *piramīdas* katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti tieši zem tās?




U3.15.zīm.

**3.4.7.** Kad kādam vīram pajautāja, cik viņam ir gadu, viņš uz šo jautājumu atbildēja šādi: „Man tagad ir divreiz vairāk gadu, nekā jums bija tad, kad man bija tikpat gadu, cik jums ir tagad. Kad jums būs tikpat gadu, cik man ir tagad, tad mums kopā būs 63 gadu.” Cik gadi ir šim vīram?

**3.4.8.** Anna, Baiba, Centis, Dainis, Emma, Fredis un Gatis piedalījās skriešanas sacensībās. Viņu sporta skolotāji mēģināja uzminēt, kādā secībā bērni finišēja.

Skolotājs Bērziņš teica: „1. Emma, 2. Dainis, 3. Anna, 4. Fredis, 5. Gatis, 6. Centis, 7. Baiba.”

Skolotājs Kārkliņš teica: „1. Centis, 2. Emma, 3. Baiba, 4. Fredis, 5. Gatis, 6. Dainis, 7. Anna.”

Tad viens skolēns teica, ka skolotājs Bērziņš pareizi nosaucis četras vietas, bet skolotājs Kārkliņš – 5 vietas.

Noskaidro, kādā secībā skolēni finišēja.

**3.4.9.** Vai eksistē tāds izliekts daudzskaldnis, kuram ir deviņas skaldnes un katra skaldne ir trijstūris? Atbildi pamato!

**3.4.10.** Teikums „Četrstūrim ir četras virsotnes” izsaka patiesu apgalvojumu. Teikums „Nav taisnība, ka četrstūrim ir četras virsotnes”, kura jēga ir tieši pretēja pirmā teikuma jēgai, izsaka aplamu apgalvojumu.

Izdomā divus teikumus, kuru jēga būtu pretēja, bet kuri tomēr abi izsaka patiesus apgalvojumus!

## 3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

**3.5.1.** Kuba, kura šķautnes garums ir 10 *cm*, visas skaldnes ir nokrāsotas. Kubu sagrieza mazākos kubos, kuru šķautnes garums ir 1 *cm*. Cik no iegūtajiem kubiem būs ar vienu nokrāsotu skaldni un cik ar divām nokrāsotām skaldnēm?

**3.5.2.** Ar skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

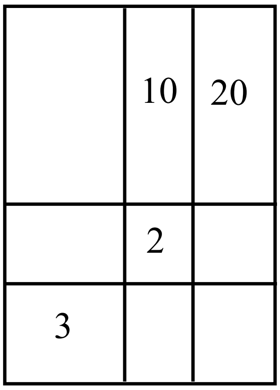
**a)** reizināt ar 2;

**b)** dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;

**c)** pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2012 var iegūt 20122012).

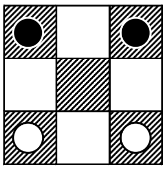
Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2012?

**3.5.3.** Taisnstūris, kura laukums ir $63\,cm^2$ sadalīts 9 mazākos taisnstūros kā parādīts U3.16. zīm. Četriem no šiem taisnstūriem ir zināmi laukumi 10, 20, 2, un 3 $cm^2$ (skat. zīmējumu). Kādi var būt pārējo taisnstūru laukumi?

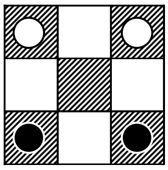



U3.16. zīm.

**3.5.4.** Šaha galdiņa izmēri ir $3\times 3$ lauciņi. Tā stūros atrodas 2 baltie un 2 melnie šaha zirdziņi (skat. U3.17. zīm.), kas, izdarot pēc kārtas pa vienam gājienam ar baltajām un melnajām figūrām, jāsamaina vietām, iegūstot U3.18. zīm. redzamo situāciju. Turklāt nedrīkst izveidoties pozīcija, kurā dažādu krāsu zirdziņi apdraud cits citu. (Zirdziņi gājienus izdara atbilstoši šaha spēles noteikumiem.)



U3.17.zīm.



U3.18.zīm.

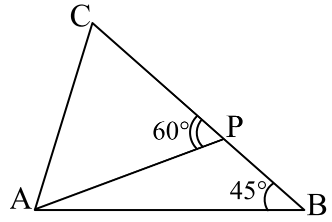
**3.5.5.** Dots neierobežots skaits 1 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant. un 1 lata monētu. Zināms, ka par pirkumu var samaksāt *A* santīmus, izmantojot monētas, kuru kopējais skaits ir *B*. Pierādiet, ka var samaksāt par pirkumu *B* latu, izmantojot monētas, kuru kopējais skaits ir *A*.

**3.5.6.** Burtu vietā ieraksti ciparus tā, lai U3.19. zīm. attēlotā summa būtu patiesa. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari. Atrodi visas iespējamās atbildes!

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & & & S \\
 & & & & & G & S \\
 & & & & E & G & S \\
 & & & I & E & G & S \\
 & & N & I & E & G & S \\
+ & S & N & I & E & G & S \\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}
$$

U3.19.zīm.

**3.5.7.** Dots trijstūris *ABC* (skat. U3.20. zīm.). Zināms, ka $PB = \frac{1}{2}CP$, $\angle CBA = 45°$, $\angle CPA = 60°$. Aprēķināt leņķa *ACB* lielumu.




U3.20.zīm.

**3.5.8.** Zāle visā pļavā aug vienādi bieza un vienādi ātri. Ir zināms, ka 70 govis to noēstu 24 dienās, bet 30 govis – 60 dienās. Cik govis visu zāli noēstu 96 dienās? (Pieņemam, ka govis zāli ēd vienmērīgi).

**3.5.9.** Veidosim vairākas nuļļu un vieninieku virknītes pēc šāda likuma: pirmā virknīte ir 01; katru nākamo virknīti iegūst, iepriekšējai virknītei labajā pusē pierakstot tās „*pretēju kopiju*”: nuļļu vietā rakstām vieniniekus, bet vieninieku vietā – nulles.

Tātad otrā virknīte ir 0110, trešā virknīte ir 01101001, ceturtā virknīte ir 0110100110010110 u.t.t.

**a)** Kurā virknītē pirmajā būs vismaz 2012 cipari?

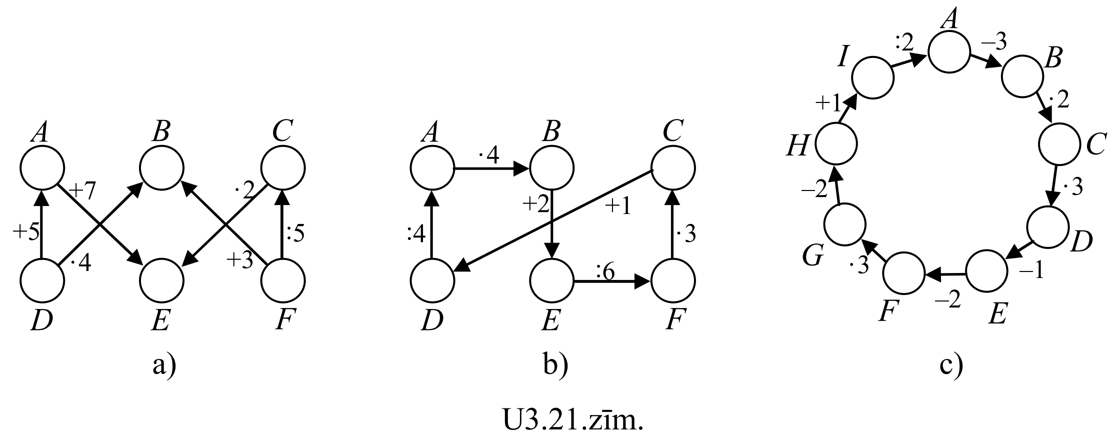
**b)** Kāds šajā virknītē būs 2012. cipars: nulle vai vieninieks?

**3.5.10.** Doti 10 maisi ar 100 monētām katrā maisā. Deviņos maisos katra monēta sver 10 *g*, bet vienā maisā katra monēta sver 11 *g*. Kāds ir mazākais svēršanu skaits uz sviras svariem **ar atsvariem**, lai noskaidrotu, kurā maisā ir smagākās monētas?

## 3.6. SESTĀ NODARBĪBA

**3.6.1.** Cik reižu palielināsies divciparu skaitlis, ja tam galā pierakstīs šo pašu skaitli?

**3.6.2.** U3.21. zīmējumā aplīšos ierakstīt skaitļus tā, lai katrs skaitlis aplītī, kurā ieiet bultiņa, tiktu iegūts no tā skaitļa aplītī, no kura iziet šī bultiņa, ja izpilda pie bultiņas norādīto darbību.




U3.21.zīm.

**3.6.3.** Ernestam pieder monētu kolekcija, kurā ir vismaz 24 monētas. Kad viņš monētas sakārto kaudzītēs pa 6 monētām katrā, viņam pāri paliek 3 monētas. Kad viņš monētas sakārto kaudzītēs pa 8 monētām katrā, viņam pāri paliek 7 monētas. Cik monētas Ernestam paliks pāri, ja viņš tās sakārtos kaudzītēs pa 24 monētām katrā?

**3.6.4.** Viegli pārliecināties, ka ir patiesas šādas trīs vienādības:

$$11-2=3^2$$

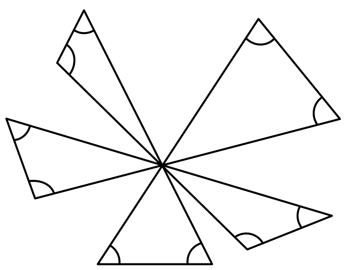
$$1111-22=33^2$$

$$111111 - 222 = 333^2$$

Pierādi, ka visas šāda veida vienādības ir patiesas.

**3.6.5.** Vai eksistē tāds desmitstūris, kuru var pilnībā pārklāt ar diviem trijstūriem tā, ka neviens trijstūris neiziet ārpus desmitstūra? Vai eksistē izliekts desmitstūris ar norādīto īpašību?

**3.6.6.** Piecas taisnes krustojas vienā punktā un veido piecus trijstūrus, kā parādīts U3.22. zīm. Aprēķini desmit iezīmēto leņķu summu (iezīmētie leņķi var nebūt savā starpā vienādi)!



U3.22.zīm.

**3.6.7.** Atjauno U3.23. zīm. redzamo dalīšanas stabiņā piemēru, ja zināms, ka dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, bet vienādiem burtiem – vienādi cipari.

$$\begin{array}{rl} \text{s e j a : e j a = j a} & \\ -\underline{\text{j a u}}\phantom{\text{ a}} & \\ \text{i j a} & \\ -\underline{\text{i j a}} & \\ 0 & \end{array}$$

U3.23.zīm.

**3.6.8.** Kāds ir vislielākais $n$, pie kura plaknē var izvietot $n$ punktus tā, lai katri trīs no tiem būt taisnleņķa trijstūra virsotnes?

**3.6.9.** Apaļa galda vidū stāv kubisks metamais kauliņš. Uz tā skaldnēm uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6 (nav zināms, kādā secībā). Pie galda viens otram pretī sēž divi cilvēki. Viens no tiem redz trīs skaldnes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 7, bet otrs redz trīs skaldnes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 15. Kāds skaitlis uzrakstīts uz kubiņa apakšējās skaldnes?

**3.6.10.** Doti 15 akmeņi. Zināms, ka divi no tiem ir radioaktīvi. Dots arī Geigera skaitītājs, ar kura palīdzību par katru akmeņu kaudzi (tajā skaitā arī par kaudzi, kura sastāv tikai no viena akmens) var noskaidrot, vai šajā kaudzē ir vai nav radioaktīvi akmeņi. Taču ar Geigera skaitītāju nevar uzzināt, cik radioaktīvo akmeņi ir kaudzē (ja tādi vispār ir). Pierādīt, ka abus radioaktīvos akmeņus var atrast, izmantojot Geigera skaitītāju 7 reizes.

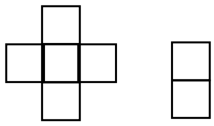
# 4. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

## 4.5. PIEKTĀ KLASE

**4.5.1.** Atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir lielāks vai vienāds ar 2012 un kura visi cipari ir dažādi.

**4.5.2.** Mūzikas akadēmijas absolventi katrs māk spēlēt vismaz vienu mūzikas instrumentu – klavieres, vijoli vai bungas. Zināms, ka klavieres māk spēlēt 37, vijoli – 30, bet bungas – 43 absolventi. Tikai vienu mūzikas instrumentu māk spēlēt 32 absolventi. Tieši divus mūzikas instrumentus māk spēlēt 33 absolventi. Cik absolventi māk spēlēt visus trīs mūzikas instrumentus?

**4.5.3.** Atrast kvadrātu, ko var salikt no U4.1. zīmējumā parādītajām figūriņām. Jāizmanto vismaz viena katra veida figūriņa. Kvadrātam jābūt noklātam pilnībā un figūriņas nedrīkst pārklāties. Parādīt zīmējumā, kā to var izdarīt.



U4.1.zīm.

**4.5.4.** Vienā gadā bija tikpat trešdienu, cik piektdienu. Vai noteikti šajā gadā bija arī tikpat ceturtdienu? Vai atbilde ir atkarīga no tā, vai gads ir īsais vai garais?

**4.5.5.** Aizmežu tirgū tirdzniecība notiek izmantojot 1, 2, 5, 10 un 20 santīmu monētas, pie tam katras preces pirkšanas/pārdošanas laikā ir jāizmanto tieši trīs monētas, starp kurām nav divu vienādu. (Piemēram, ja prece maksā 17 santīmus, tad to var nopirkt vai nu samaksājot ar 10, 5 un 2 santīmu monētām, vai arī maksājot ar 20 santīmu monētu, atlikumā saņemot 1 un 2 santīmu monētas, vai arī maksājot ar 20 un 2 santīmu monētām, atlikumā saņemot 5 santīmu monētu.) Katra prece maksā veselu skaitu santīmu, ko ir iespējams samaksāt iepriekš aprakstītajā veidā. Piemēram, neviena prece nemaksā 1 santīmu (jo tās pirkšanas procesā nevar izmantot tieši trīs dažādas vērtības monētas). Kāda ir nākamā mazākā cena, ko nav iespējams samaksāt pēc Aizmežu tirgus likumiem?

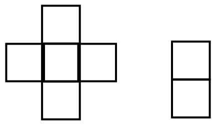
## 4.6. SESTĀ KLASE

**4.6.1.** Cik ir tādu naturālu skaitļu, kuru decimālā pieraksta ciparu reizinājums ir 20, bet summa 11?

**4.6.2.** Par *palindromu* sauc naturālu skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Piemēram, 5, 313 un 4482844 ir *palindromi*, bet 17, 3313 – nav.

Visi septiņciparu *palindromi* sakārtoti augošā secībā. Noteikt, kurš *palindroms* šajā rindā pēc kārtas ir 2011-ais?

**4.6.3.** Atrast taisnstūri, ko var salikt no U4.2. zīmējumā parādītajām figūriņām. Jāizmanto vismaz viena katra veida figūriņa. Taisnstūrim jābūt noklātam pilnībā un figūriņas nedrīkst pārklāties. Parādīt zīmējumā, kā to var izdarīt.



U4.2.zīm.

**4.6.4.** Piecstūra un sešstūra malu garumi centimetros ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Zināms, ka abu daudzstūru perimetri ir vienādi un piecstūra īsākās malas garums ir vienāds ar sešstūra garākās malas garumu. Kāds ir sešstūra īsākās malas garums?

**4.6.5.** Dotas četras dārglietu lādītes, kas katra nokrāsota citā krāsā. Zināms, ka vienā no lādītēm atrodas dimants. Uz katras no lādītēm ir uzrakstīts viens apgalvojums:

- uz sarkanās lādītes: „Dimants atrodas šajā lādītē";
- uz dzeltenās: „Dimants atrodas vai nu sarkanajā vai brūnajā lādītē";
- uz zaļās: „Dimants neatrodas šajā lādītē";
- uz brūnās: „Dimants neatrodas sarkanajā lādītē".

Noteikt, kurā no lādītēm atrodas dimants, ja tikai viens no šiem apgalvojumiem ir patiess.

## 4.7. SEPTĪTĀ KLASE

**4.7.1.** Apskatām vienādojumu $ax+b=cx+d$, kur $a$, $b$, $c$, $d$ katrs ir ar vērtību 1, 2 vai 3.

**a)** Uzrādīt vienu no šādiem vienādojumiem, kuram ir sakne 0.

**b)** Uzrādīt vienu no šādiem vienādojumiem, kuram nav sakņu.

**c)** Cik starp šiem vienādojumiem ir tādu, kuriem nav sakņu?

**4.7.2.** Zināms, ka nekādas trīs no dotajam taisnēm nekrustojas viena punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas:

**a)** 5 taisnes;

**b)** 2011 taisnes?

**4.7.3.** Dota virkne $u_1, u_2, \ldots$, kur $u_1 = u_2 = 1$ un katrs nākamais virknes loceklis, sākot ar trešo, ir visu iepriekšējo virknes locekļu kvadrātu summa. Vai $u_{2011}$ dalās ar 7?

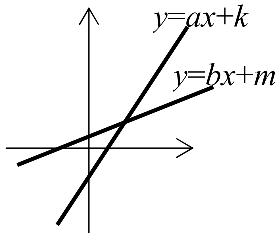
**4.7.4.** Vienādmalu trijstūra, kura malas garums ir 2 *cm*, iekšpusē atzīmēti pieci sarkani punkti. Pierādīt, ka var izvēlēties divus tādus sarkanos punktus, attālums starp kuriem nepārsniedz 1 *cm*.

**4.7.5.** Dotas sešas pēc kārtas novietotas rūtiņas. Jānis un Pēteris spēlē šādu spēli. Viena gājiena laikā vienā no tukšajām rūtiņām jāieraksta viens cipars. Gājienus spēlētāji izdara pēc kārtas, Jānis sāk.

Pēteris uzvar, ja sešciparu skaitlis, kas izveidojas beigās, dalās ar 13. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kā spēlē Jānis?

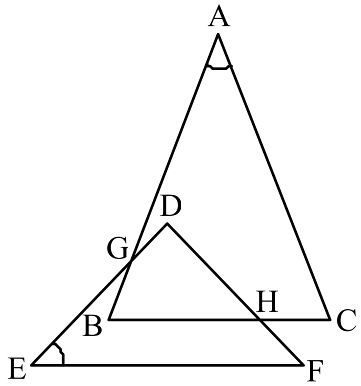
## 4.8. ASTOTĀ KLASE

**4.8.1.** Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y = ax + k$ un $y = bx + m$ grafiki (skat. U4.3. zīm.). Pierādīt, ka $(b - a)(k - m) > 0$ .




U4.3.zīm.

**4.8.2.** Divi vienādsānu trīsstūri $ABC$ ($AB = AC$) un $DEF$ ($DE = DF$) savstarpēji novietoti tā, kā redzams U4.4. zīmējumā. Zināms, ka $BC \| EF$ un $\angle BAC = \angle DEF = 32°$ . Aprēķināt leņķa $AGE$ lielumu!




U4.4. zīm.

**4.8.3.** Skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz $n$ kaut kādā secībā. Pierādīt: ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad reizinājums $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$ vienmēr ir pāra skaitlis.

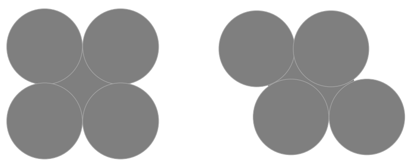
**4.8.4.** Augošas naturālu skaitļu virknes 1, 7, 11, 13,... locekļi ir visi tie skaitļi, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5. Atrodi, kāds skaitlis atrodas šīs virknes 2011. vietā.

**4.8.5.** Draugu portālā ir reģistrējušies $N$ zēni un $M$ meitenes. Katrs zēns draudzējas ar trīs citiem zēniem un septiņām meitenēm, bet katra meitene – ar četrām citām meitenēm un pieciem zēniem. Kādas ir mazākās iespējamās $N$ un $M$ vērtības?

## 4.9. DEVĪTĀ KLASE

**4.9.1.** Pierādi, ka skaitlis $2^{15} + 3^{12}$ nav pirmskaitlis.

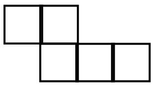
**4.9.2.** Aprēķināt U4.5. zīmējumā doto figūru laukumus. Visi zīmējumos attēlotie riņķi ir vienādi un to rādiuss ir 1 vienība, turklāt zināms, ka a) gadījumā riņķu centri veido kvadrātu.



a) b)

U4.5. zīm.

**4.9.3.** Kādu lielāko daudzumu U4.6. zīmējumā attēloto figūriņu var izgriezt no kvadrāta ar izmēriem 9 × 9 rūtiņas? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām. Figūriņas drīkst pagriezt vai apgāzt „uz mutes”.



U4.6. zīm.

**4.9.4.** Naturālu skaitļu virknes 7, 14, 17, ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts, iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot skaitli 1. Kāds ir šīs virknes 2011. loceklis?

**4.9.5.** Kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrā rūtiņā ierakstīto skaitli *a* salīdzina ar tās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, un nosaka, par cik no tiem *a* ir lielāks, šo skaitu sauksim par rūtiņas *svaru*. Rūtiņu sauksim par labu, ja tās svars ir nepāra skaitlis. Kāds ir lielākais iespējamais labo rūtiņu skaits?

(Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

# 5. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

## 5.5. PIEKTĀ KLASE

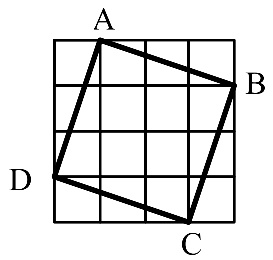
**5.5.1.** Ar naturālu skaitli var veikt divu veidu darbības:

1) reizināt ar 3,

2) nodzēst pēdējo ciparu.

Parādīt, kā no skaitļa 5 var iegūt skaitli 21, vairakkārt pielietojot tikai šīs darbības.

**5.5.2.** Cik rūtiņas liels ir kvadrāta *ABCD* laukums (skat. U5.1. zīm.)?




U5.1.zīm.

**5.5.3.** Izveido septiņciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 izmantots tieši vienu reizi.

**5.5.4.** Maijai dārzā ir kvadrātveida puķu dobe, kura sastāv no 10×10 vienādiem kvadrātveida lauciņiem. Viņa ir iegādājusies dzeltenu, sarkanu un baltu tulpju sīpoliņus. Maija vēlas katrā lauciņā iestādīt tieši vienu tulpi.

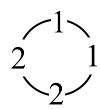
**a)** Vai Maija var trīs krāsu tulpes iestādīt tā, lai katrā rindā būtu nepāra skaits katras krāsas ziedu?

**b)** Vai Maija var tulpes iestādīt tā, lai lauciņos, kam ir kopīga mala, uzziedētu atšķirīgas krāsas tulpes un lai katrā rindā jebkuras trīs pēc kārtas ņemtas tulpes, būtu atšķirīgās krāsās?

**5.5.5. a)** Pa apli izvietot ciparus 1 un 2 (pavisam astoņus ciparus) tā, lai, lasot pa trīs cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami **visi** trīsciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 un/vai 2.

**b)** Vai pa apli var izvietot 16 ciparus 1 un 2 tā, lai, lasot pa četriem cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami **visi** četrciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 un/vai 2?

(*Piemēram, U5.2. zīm. parādīts, ka četrus ciparus var izvietot tā, lai būtu sastopami visi divciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari* 1 *un/vai* 2*:* 11*,* 12*,* 22*,* 21.)




U5.2. zīm.

## 5.6. SESTĀ KLASE

**5.6.1.** Atrast divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus, kuriem abiem ciparu summa dalās ar 5.

**5.6.2.** Visi piecciparu naturālie skaitļi, kuru pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5 izmantots tieši vienu reizi, ir uzrakstīti virknē augošā secībā: 12345, 12354, 12435, ... . Kurš pēc kārtas šajā virknē ir skaitlis 53421?

**5.6.3.** Vai plaknē var uzzīmēt

**a)** sešstūri,

**b)** septiņstūri

un riņķa līniju, kas krusto uzzīmētā daudzstūra katru malu tieši vienā punktā? (Riņķa līnija nepieskaras daudzstūra malām un neiet caur tā virsotnēm.)

**5.6.4.** Vai piecstūra virsotnēs var ierakstīt piecus dažādus naturālus skaitļus, lai jebkuru divu blakus stāvošu skaitļu summa būtu pirmskaitlis?

**5.6.5.** Katrs no trīs rūķīšiem ir iedomājies vienu no skaitļiem 1, 2 vai 3, katrs – citu skaitli. Katrs rūķītis zina, kādus skaitļus ir iedomājušies pārējie rūķīši.

Kā var noskaidrot, kuru skaitli katrs rūķītis ir iedomājies, ja katram rūķītim var uzdot tieši vienu jautājumu, uz kuru viņš var atbildēt tikai ar “jā” vai “nē”? Katram rūķītim drīkst jautāt arī par citu rūķīšu iedomātajiem skaitļiem.

## 5.7. SEPTĪTĀ KLASE

**5.7.1.** Ar naturālu skaitli var veikt divu veidu operācijas:

1) reizināt ar 7,

2) nodzēst skaitļa lielāko (vienu no lielākajiem, ja tādi ir vairāki) ciparu.

Vai ar šādām operācijām no skaitļa 9 var iegūt skaitli 27, atkārtojot tās vairākas reizes jebkādā secībā?

**5.7.2.** Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju ar 7 posmiem, kura sadala plakni daudzstūros, starp kuriem ir astoņstūris.

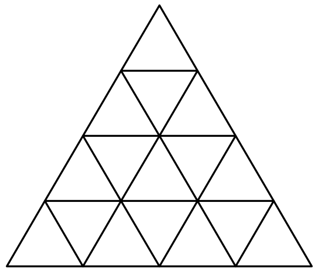
**5.7.3.** Pa apli uzrakstīti septiņi dažādi skaitļi, nekādu divu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājums nav pozitīvs. Aplūkojam visus triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu reizinājumus. Cik no šiem septiņiem reizinājumiem ir pozitīvi?

**5.7.4.** Pierādīt, ka 1004041 nav pirmskaitlis.

**5.7.5.** Vienādmalu trijstūris ar malas garumu 4 sadalīts 16 vienādos trijstūros (skat. U5.3. zīm.).

Katrā mazajā trijstūrī ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki.

Pierādīt, ka var izvēlēties četrus trijstūrus, kas veido vienādmalu trijstūri ar malas garumu 2 un kuros ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



U5.3. zīm.

## 5.8. ASTOTĀ KLASE

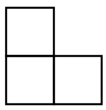
**5.8.1.** Skaitli 3999991 uzrakstīt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1.

**5.8.2.** Trijstūrī $ABC$ leņķis $ABC$ ir 30° liels. Uz malas $AB$ izvēlēts punkts $E$, bet uz malas $BC$ punkts $F$ tā, ka trijstūris $CEF$ ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts $F$ ir malas $BC$ viduspunkts.

**5.8.3.** Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt skaitlis $\overline{aabbcc}$? (Pieraksts $\overline{kmn}$ nozīmē, ka skaitlī ir $k$ simti, $m$ desmiti un $n$ vieni.)

**5.8.4.** Uzzīmēt plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 *cm* attālumā.

**5.8.5.** Uzzīmēt figūru, kuru var sadalīt vienādos *stūrīšos* (skat. U5.4. zīm.) tieši divos dažādos veidos. *Stūrīši* var būt pagriezti arī citādāk. (Divi sadalījumi, kas iegūstami viens no otra pagrieziena rezultātā vai ir viens otra spoguļattēls, uzskatāmi par vienādiem.)



U5.4. zīm.

## 5.9. DEVĪTĀ KLASE

**5.9.1.** Apskatām visas funkcijas $y = ax^2 - 2x + b$, kur $a$ un $b$ – reāli skaitļi un $a + b = 2012$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

**5.9.2.** Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts $P$. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta $P$ līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta $P$ izvēles.

**5.9.3.** Kādām $n$ vērtībām $n$ cilvēkus var sadalīt grupās (varbūt tikai vienā) tā, lai katrā grupā būtu tieši 5, 6 vai 7 cilvēki?

**5.9.4.** Dota skaitļu virkne 1, 1, 2, 5, 9, 6, ... . Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.

**a)** Noteikt, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis.

**b)** Aprēķināt virknes 2012. locekli.

**5.9.5.** Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz $n-1$ ieskaitot, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli $n$. Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar $n$.

# 6. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

## 6.9. DEVĪTĀ KLASE

**6.9.1.** **a)** Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?

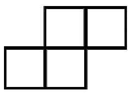
**b)** Vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?

**6.9.2.** Pierādīt, ka nav iespējams izveidot trijstūri, kura augstumu garumi ir 4 *cm*, 7 *cm* un 10 *cm*.

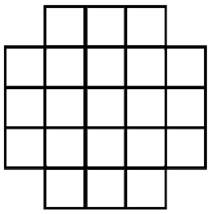
**6.9.3.** Kvadrātvienādojuma $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ saknes ir $a$ un $b$, kvadrātvienādojuma $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ saknes ir $b$ un $c$, bet kvadrātvienādojuma $x^2 + p_3x + q_3 = 0$ saknes ir $a$ un $c$. Zināms, ka $q_1 \le q_2 \le q_3 \le 0$. Kādas ir iespējamās $q_2$ vērtības?

**6.9.4.** Trijstūra $ABC$ iekšpusē izvēlēts punkts $E$ tā, ka $AB^2 - BE^2 + EC^2 = AC^2$. Pierādīt, ka $AE \perp BC$!

**6.9.5.** Kādu lielāko skaitu U6.1. zīm. attēloto figūru var izgriezt no U6.2. zīm. attēlotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



U6.1. zīm.



U6.2. zīm.

# 7. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

## 7.5. PIEKTĀ KLASE

**7.5.1.** Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 4, 6 un 9. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši septiņas reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

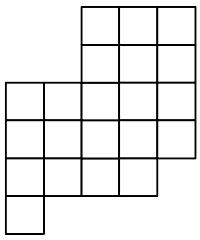
**7.5.2.** Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros. (Trijstūri sauc par platleņķa trijstūri, ja tam ir viens plats leņķis un divi šauri leņķi.)

**7.5.3.** Maisā ir baltas, zaļas un sarkanas pogas (citu krāsu pogu maisā nav). Kādu mazāko skaitu pogu uz labu laimi (tās neredzot) ir jāizņem, lai noteikti būtu paņemtas vai nu 2 baltas, vai 3 zaļas, vai 4 sarkanas pogas.

**7.5.4.** 24-stāvu mājā ir lifts, kuram ir divas pogas. Nospiežot vienu pogu, tas paceļas (ja iespējams) 17 stāvus uz augšu, nospiežot otru – nolaižas 8 stāvus uz leju (ja iespējams). Noskaidro, no kura stāva ar šo liftu var nokļūt uz jebkuru citu stāvu šajā mājā. (Lifts nevar uzbraukt augstāk par 24. stāvu un zemāk par 1. stāvu.)

**7.5.5.** Sadali U7.1. zīmējumā attēloto figūru trīs vienādās figūrās.

(Figūru un tās spoguļattēlu saucam par vienādām figūrām.)



U7.1. zīm.

## 7.6. SESTĀ KLASE

**7.6.1.** Uz tāfeles uzrakstīti desmit skaitļi

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alfons nodzēš jebkurus divus no tiem (apzīmēsim tos ar $a$ un $b$) un to vietā uzraksta skaitli, kas vienāds ar $a+b+2$. Šo operāciju viņš atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.

Pamato, ka neatkarīgi no secības, kādā Alfons izpilda darbības, beigās tiek iegūts viens un tas pats skaitlis. Kāds tas ir?

**7.6.2.** Sadali kvadrātu divos vienādos **a)** sešstūros, **b)** septiņstūros.

**7.6.3.** Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas sākumā visas rūtiņas ir baltas. Kāds mazākais skaits rūtiņu šajā kvadrātā jānokrāso zaļas, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem 1×3 rūtiņas, ko varētu iezīmēt dotajā kvadrātā (horizontāli vai vertikāli), būtu vismaz viena zaļa rūtiņa?

**7.6.4.** Vai pa apli var uzrakstīt **a)** sešus; **b)** septiņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu summa būtu pirmskaitlis un visi summās iegūtie pirmskaitļi būtu dažādi?

**7.6.5.** Zīmuļi tiek pakoti divu veidu kastītes: pa 7 zīmuļiem kastītē un pa 10 zīmuļiem kastītē. Kāds ir vislielākais zīmuļu skaits, ko nevar **precīzi** sapakot minēto veidu kastītēs (t.i., visām izmantotajām kastītēm jābūt pilnām un neviens zīmulis nedrīkst palikt pāri)?

## 7.7. SEPTĪTĀ KLASE

**7.7.1.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus $a$ un $b$, kuriem izpildās vienādība

$$ab(3a+5b)=1234567\,?$$

**7.7.2.** Doti seši nogriežņi ar garumiem 1 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm*, 7 *cm*, 9 *cm*, 11 *cm*. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

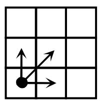
**7.7.3.** No pilsētas A uz pilsētu B vienlaicīgi izbrauca zaļa un sarkana automašīna. Sarkanā automašīna **visu** ceļu veica ar pastāvīgu ātrumu. Zaļā automašīna **tieši pusi** ceļa veica ar pastāvīgu ātrumu 30 *km/h*. Vai, otro ceļa pusi veicot ar lielāku ātrumu, zaļā automašīna var panākt sarkano automašīnu un pilsētā B ierasties vienlaicīgi ar to, ja sarkanās automašīnas ātrums bija

**a)** 40 *km/h*; **b)** 60 *km/h*?

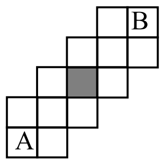
**7.7.4.** Vai kubu var sagriezt 20 mazākos kubiņos (daži no tiem var būt vienādi, daži atšķirīgi)?

**7.7.5.** Figūriņa *zilonis* var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu, vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu pa diagonāli (skat. U7.2. zīm.). Cik dažādos veidos *zilonis* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. U7.3. zīm.)?

Iekrāsotajā rūtiņā ir šķērslis, tajā *zilonis* nedrīkst iet.



U7.2. zīm.




U7.3. zīm.

## 7.8. ASTOTĀ KLASE

**7.8.1.** Starp skaitļiem 4 1 5 7, nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+", „–", „·", „:") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu

**a)** 13;

**b)** 14.

**7.8.2.** Dots trijstūris $ABC$ un punkts $P$ tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta $P$ līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra.

**7.8.3.** Skolas matemātikas olimpiādē piedalījās ne vairāk kā 60 skolēnu. Vidējais punktu skaits, ko ieguva zēni, bija 21,6. Vidējais punktu skaits, ko ieguva meitenes, bija 15. Vidējais punktu skaits, ko ieguva visi skolēni, bija 20. Cik skolēnu piedalījās olimpiādē?

**7.8.4.** Pa apli uzrakstīti 11 veseli skaitļi. Jebkuru trīs pēc kārtas ņemtu skaitļu summa dalās ar 5. Pierādi, ka visi uzrakstītie skaitļi dalās ar 5.

**7.8.5.** Kvadrātveida tabula ar izmēriem $7\times 7$ rūtiņas aizpildīta ar skaitļiem no 1 līdz 7 tā, ka katrā rindā ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7. Tabula ir simetriska attiecībā pret vienu no diagonālēm. Pierādi, ka šajā diagonālē ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7.

(Tabulu sauc par simetrisku attiecībā pret diagonāli, ja rūtiņās, kas ir simetriskas pret šo diagonāli ierakstīti vienādi skaitļi.)

## 7.9. DEVĪTĀ KLASE

**7.9.1.** Atrodi vienu skaitli, kuram ir tieši 12 veseli pozitīvi dalītāji.

**7.9.2.** Trijstūrī $ABC$ zināms, ka $\angle ABC = 90°$, bet punkts $P$ atrodas uz malas $AB$. Punkti $M$ un $N$ ir attiecīgi nogriežņu $AC$ un $PC$ viduspunkti. Pierādi, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

**7.9.3.** Kvadrātvienādojuma $x^2 - 507x + a = 0$ saknes ir $p^2$ un $q$, kur $p$ un $q$ ir pirmskaitļi. Aprēķini $a$ skaitlisko vērtību.

**7.9.4.** Uz tāfeles uzrakstītas deviņas zvaigznītes * * * * * * * * *. Jānis ieraksta kādas zvaigznītes vietā jebkuru ciparu no 1 līdz 9. Pēc tam Pēteris jebkuru divu citu zvaigznīšu vietā ieraksta divus ciparus (tie var arī atkārtoties). Pēc tam vēl divas reizes viņi atkārto šo darbību.

Pēteris uzvar, ja iegūtais deviņciparu skaitlis dalās ar 37. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt?

**7.9.5.** Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādi, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros. (Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

# IETEIKUMI

## 1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

### 1.1. PIRMĀ KĀRTA

**1.1.1.** Ievēro darbību secību – pirmās jāveic reizināšana un dalīšana.

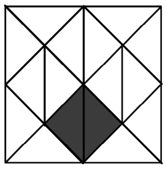
**1.1.2.** Apskati, kuras pilsētas uzlīme atrodas zem pārējām uzlīmēm.

**1.1.3.** Nosaki, par cik krūzēm burka ir ietilpīgāka nekā viena krūze un izmanto, ka tam atbilst 10 glāzes.

**1.1.4.** Izsaki Marutas un Jāņa vecumu, izmantojot Zanes un Lauras vecumus.

**1.1.5.** Apskati pēdējo klucīti labajā rindā.

**1.1.6.** Sadali kvadrātu, kā parādīts I1. zīm.



I1.zīm.

**1.1.7.** Apskati, kurš no figūriņās dotajiem skaitļiem var būt skaitļa 5 *kaimiņš*.

**1.1.8.** Pārbaudi katru no dotajām atbildēm.

**1.1.9.** Cik dienu varēja būt šajā mēnesī? Cik dienu ir nākamajā mēnesī?

**1.1.10.** Saskaiti visu Mitsubishi automašīnu procentuālos biežumus kopā.

### 1.2. OTRĀ KĀRTA

**1.2.1.** Aprēķini izteiksmes vērtību, ievērojot darbību secību.

**1.2.2.** Apskati, ko izsaka atsevišķas dotās izteiksmes daļas.

**1.2.3.** Ja Zelmai būtu par 1 piparkūku mazāk, viņas tās varētu sadalīt paciņās gan pa 2, gan pa 3, gan pa 5.

**1.2.4.** Eglītes laukums ir 9 rūtiņas; kuros no piedāvātajiem variantiem arī kopējais figūriņu laukums ir 9 rūtiņas?

**1.2.5.** Pārveido katra piemēra abas puses vienotās mērvienībā; atceries, ka 1 *Ls* = 100 *sant.* Un 1 *min.* = 60 *s*.

**1.2.6.** Nosaki, kādu daļu no katra kvadrāta aizņem iekrāsotās daļas un sameklē tās arī labirintā.

**1.2.7.** Cik sniega pikas bija kopā tad, kad abās kaudzēs bija vienāds skaits sniega piku?

**1.2.8.** Nosaki, kāda veida kārbu saņēma Baiba, ja zināms, ka viņa nesaņēma piramīdas formas kārbu un kubveida kārbu saņēma Anna. Tad kādu kārbu saņēma Cilda?

## 1.3. TREŠĀ KĀRTA

**1.3.1.** Atceries: 1 *stunda* = 60 *min* un 1 *min.* = 60 *s*.

**1.3.2.** Cik dažādos veidos var sasēdināt bobslejistus, ja pieņemam, ka otrais sēž Helvijs Lūsis; līdzīgi apskati gadījumus, kad otrais ir Arvis Vilkaste vai Jānis Strenga.

**1.3.3.** No pirmā laika uzņemšanas brīža līdz pēdējam laika uzņemšanas brīdim pagāja $4 \cdot 16$ *min*.

**1.3.4.** Iekrāsoto sirdi sadali divās daļās – augšējā daļā (divi pusriņķi) un apakšējā (trijstūris); apskati šo daļu laukumus atsevišķi.

**1.3.5.** Izmanto otro un trešo apgalvojumu, lai noteiktu triju karavīru secību.

**1.3.6.** No diagrammas nolasi un ieraksti tabulā trūkstošos datus – 4.a un 4.c klases meiteņu skaitu un 4.a un 4.b klases zēnu skaitu. 4.c klases meiteņu skaitu aprēķini, izmantojot, ka tajā kopā mācās 27 skolēni.

## 1.4. CETURTĀ KĀRTA

**1.4.1.** Apskati, kurā mēneša datumā varēja būt pirmā svētdiena.

**1.4.2.** Dotajās 10 stundās viņš nojāja tik kilometrus, par cik kilometriem pirmajā dienā nojāja vairāk nekā otrajā.

**1.4.3.** Lai starpība būtu pēc iespējas lielāka, no pēc iespējas lielāka skaitļa jāatņem pēc iespējas mazāks skaitlis.

**1.4.4.** Cik vienībām piena atbilst dotie 48 *l* piena?

**1.4.5.** Saskaiti, cik punktu ir visos dotajos kauliņos kopā, un nosaki, cik punktiem jābūt katrā rindiņā un kolonnā.

**1.4.6.** Putenis varēja būt ne vairāk kā 6 dienas.

**1.4.7.** Pelēkās daļa laukumu var aprēķināt, no lielākā kvadrāta laukuma atņemot mazākā kvadrāta laukumu.

**1.4.8.** Milžu mājas viena stāva augstums vienāds ar rūķīšu mājas piecu stāvu augstumu.

**1.4.9.** Pēc attēla nosaki ārējās un iekšējās apmales kopīgos posmus un nosaki atlikušo daļu.

**1.4.10.** Slēpotāji noslēpoja kartē tik pa daudz pa labi, cik pa kreisi, kā arī tik pat daudz vertikāli uz augšu, cik uz leju.

# 2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

## 2.1. PIRMĀ KĀRTA

**2.1.1.** Pirmās kolonnas otrajam skaitlim jābūt skaitļa 4 dalītājam, bet trešajam skaitlim – tādam, kas dalās ar 3.

**2.1.2.** Katrai no iegūtajām daļām jāsastāv no 3 rūtiņām.

**2.1.3.** Uzraksti visas iespējamās koalīcijas.

**2.1.4.** Vai Maksis un Leo abi vienlaicīgi var būt teikuši patiesību?

**2.1.5.** Aprēķini, cik dažādus kartiņu trijniekus var izveidot no 11 kartiņām un kādas ir visas iespējamās dažādās triju izvēlēto skaitļu summas?

## 2.2. OTRĀ KĀRTA

**2.2.1.** Apskaties, kādas monētas var izmantot, lai izveidotu prasītās kaudzītes.

**2.2.2.** Centies uzzīmēt šos septiņstūrus.

**2.2.3.** Saskaiti skaitļus, kas atrodas uz visām trim taisnēm un apskati visas iespējamās šīs summas vērtības.

**2.2.4.** Lai iegūtu skaitli ar pēc iespējas lielāku garumu, nepieciešams izmantot pēc iespējas mazākus pirmreizinātājus; mazākais pirmskaitlis ir 2.

**2.2.5.** **a)** Vai pietiek, ja izņems 77 bumbiņas? **b)** Vai pietiek, ja izņems 49 bumbiņas? **c)** Apskati gadījumu, ja maisā vispār ir tikai viena melna bumbiņa.

## 2.3. TREŠĀ KĀRTA

**2.3.1.** Ja divciparu skaitlim pieskaitot viencipara skaitli tiek iegūts trīsciparu skaitlis, kāds ir šī trīsciparu skaitļa pirmais cipars?

**2.3.2.** Viegli aprēķināt Edgara vecumu, izmantojot visu ģimenes locekļu kopējo vecumu, kā arī sakarības par Annas un Beātes, kā arī Centa un Didža vecumu.

**2.3.3.** Var izveidot gan trijstūrus, gan četrstūrus, gan piecstūrus.

**2.3.4.** **a)** Apskati, cik daudz dažādas biļetes var nopirkt no katras pieturas; **b)** nē, tā nevar apgalvot.

**2.3.5.** Centies prasīto paveikt patstāvīgi.

## 2.4. CETURTĀ KĀRTA

**2.4.1.** Centies izpildīt prasīto patstāvīgi.

**2.4.2.** **a)** To var izdarīt; **b)** nē, to nevar izdarīt.

**2.4.3.** **a)** Sadali visus skaitļus septiņās grupās – atkarībā no tā, kādus atlikumos dod skaitļi, tos dalot ar 7; **b)** tā var arī nebūt – centies atrast piemēru, kurā šādus skaitļus izvēlēties nevar.

**2.4.4.** Apzīmē ar nezināmajiem komandas dalībnieku skaitu un to, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, līdz stafete beidzās, un izveido vienādojumu, kuru atrisinot jau iegūsi daļu no prasītajiem lielumiem.

**2.4.5.** Centies prasīto paveikt patstāvīgi.

## 2.5. PIEKTĀ KĀRTA

**2.5.1.** Lielākais secīgu dienu skaits ir sešas; centies pierādīt, ka vairāk dienas nav iespējamas, kā arī parādīt atbilstošu piemēru.

**2.5.2.** Mazākā iegūta kvadrāta malas garums būs vienāds ar sākotnējā taisnstūra malu garumu lielāko kopīgo dalītāju.

**2.5.3.** Līdzeno posmu garums neietekmē to, kurš finišēs pirmais, tāpēc to var neņemt vērā; apzīmē ar mainīgajiem, cik kilometrus slēpotāji brauc no kalna lejā un cik kalnā augšā, izveido nevienādības un apskati iegūtās sakarības.

**2.5.4.** Aizpildi doto tabulu, katrā rūtiņā pakāpeniski ierakstot, cik veidos uz katru no rūtiņām var nokļūt.

**2.5.5.** Iespējami 24 dažādi spēles kauliņi; attēlo tos visus un saliec prasīto taisnstūri.

# 3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

## 3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

**3.1.1.** Var iegūt visas dotās figūras.

**3.1.2.** Atsevišķi apskati abas dotās nevienādības puses.

**3.1.3.** Uzdevumā gan jānosaka visas iespējamās bērnu vecumu vērtības, gan arī ar risinājumu jāpamato, ka citas vērtības nevar būt.

**3.1.4.** Uzdevuma nosacījumus var aprakstīt ar vienādojumu, kuru atrisinot iegūst vajadzīgo.

**3.1.5.** Centies divos veidos atrast vairākus trijstūrus, kuru laukumu summa vienāda ar dotā taisnstūra laukumu

**3.1.6.** Izmantojot doto funkciju vienādojumus, uzraksti viduspunkta koordinātu izteiksmes un no tām nosaki punktu $A$ un $B$ koordinātas.

**3.1.7.** Cik minūtēs visu lauku noraktu visi trīs kaimiņi kopā?

**3.1.8.** Izmanto doto trijstūra laukuma izteiksmi, kā arī Pitagora teorēmu, lai noteiktu trijstūra $ADC$ augstumu un tā pamatu.

**3.1.9.** **a), c), d)** uzvar Dace; **b)** uzvar Andis.

**3.1.10.** Ja $A$ un $B$ ir draugi, tad jebkurš no pārējiem valsts iedzīvotājiem ir vai nu viņu kopīgs draugs, vai arī kopīgs ienaidnieks.

## 3.2. OTRĀ NODARBĪBA

**3.2.1.** Dotajā veidā var izteikt jebkuru no naturālajiem skaitļiem.

**3.2.2.** Uzraksti katra dotā punktu vidējā aritmētiskā aprēķināšanas izteiksmi.

**3.2.3.** Izmantojot pirmo sakarību, var iegūt, ka 10-*horizontāli* ir 431.

**3.2.4.** Centies prasīto paveikt patstāvīgi.

**3.2.5.** Uzdevumā izmantota simetrija.

**3.2.6.** Viens no veidiem, kā uzdevumu atrisināt, ir atlikt punktu $D$ tā, lai izveidojas taisnstūris $ABCD$, un punktu $E$ uz iegūtā taisnstūra malas $DC$ tā, lai $AE \parallel CM$.

**3.2.7.** Ar $x$ apzīmējot mācību grāmatas lappušu skaitu, kas izņemtas līdz skolotājas nomaiņai, lappušu numuru summa vienāda ar $\frac{x(x+1)}{2}$.

**3.2.8.** Ja ar regulārajiem daudzstūriem plakne ir pilnībā pārklāta, tad to leņķu summai, kas atrodas ap kopīgo virsotni, jābūt $360°$.

**3.2.9.** **a)** Septītā tiesneša vērtējums var būt jebkurš naturāls skaitlis no 1 līdz 8; **b)** viens no pārējo divu tiesnešu vērtējumiem bija 9 vai 10, bet otrs – 8; **c)** pārējo trīs tiesnešu vērtējumi varēja būt 3, 4, un 7 vai 1, 3 un 10.

**3.2.10.** Pēc kārtas apskati un pārbaudi gadījumus, kad nosmērējušies ir viens, divi, trīs, četri u.t.t. pasažieri.

## 3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

**3.3.1.** Vienkāršo doto izteiksmi, līdz iegūsti daļu reizinājumu.

**3.3.2.** Ja taisnstūris ar divām taisnēm sadalīts divos taisnstūros, tad pa diagonāli esošo taisnstūru laukumu reizinājumi ir vienādi.

**3.3.3.** Uzdevumā ir 4 nezināmi skaitļi, bet dotas tikai trīs sakarības. Tātad viennozīmīgi noteikt skaitļu $a$, $b$, $c$ un $d$ vērtības nevar, tāpēc jācenšas atrast sakarības starp šiem skaitļiem un novērtēt to summas vērtību.

**3.3.4.** Reizinājums $C \cdot C$ ir skaitlis, kas beidzas ar ciparu $C$. Tas ir iespējams, ja $C = 1$, $C = 5$ vai $C = 6$.

**3.3.5.** Lai pierādītu prasīto nevienādību, jāizmanto trijstūru nevienādība.

**3.3.6.** Iekrāso torti pēc šaha galdiņa principa un pierādi, ka prasīto nevar izdarīt.

**3.3.7.** Par uzdevuma atrisinājumu der seši skaitļu pāri: $(2;2)$, $(3;3)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;3)$ un $(3;2)$.

**3.3.8.** Lai dalījums būtu vesels skaitlis, šiem reizinātājiem ir jābūt skaitļa 12 dalītājiem (daži no tiem var būt arī negatīvi skaitļi).

**3.3.9.** Centies prasīto izdarīt patstāvīgi.

**3.3.10.** Sniegbaltīte varētu uzdot, piemēram, šādu jautājumu: „Vai Jūs dzīvojat šajā ciematā?” Centies izdomāt arī citu uzdevuma atrisinājumu.

## 3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

**3.4.1.** Pārveido vienādojumu, pārnesot skaitli 12 uz vienādojuma labo pusi. Atrisinājumu skaits ir vienāds ar skaitļu kvadrātu skaitu, ar kuru skaitlis 2000 dalās bez atlikuma.

**3.4.2.** Mazākais nepieciešamais gājienu skaits ir 3. Centies to pierādīt, kā arī parādīt atbilstošu piemēru.

**3.4.3.** Uzmanīgi izpēti dotos piemērus un centies uzdevumā prasīto paveikt patstāvīgi.

**3.4.4.** Meklētā taisne ir tā, kas savieno taisnstūra $ABCD$ diagonāles $AC$ viduspunktu ar taisnstūra $A_1B_1C_1D_1$ diagonāles $A_1C_1$ viduspunktu.

**3.4.5.** Izkrāso kvadrātu šaha rūtiņu veidā; figūriņām no melnajām rūtiņām pēc pārlikšanas jāatrodas baltajās rūtiņās un otrādi.

**3.4.6.** Divu apakšējās rindas vidējās rūtiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt 90.

**3.4.7.** Ja apzīmē vecākā vīra vecumu gados ar $x$, bet jaunākā vīra vecumu gados – ar $y$, tad pirmo nosacījumu var aprakstīt ar vienādojumu $\frac{x}{2} = y - (x - y)$; līdzīgi ar vienādojumu aprakstot otro nosacījumu, iegūst vienādojumu sistēmu.

**3.4.8.** Tā kā abi skolotāji kopā ir pareizi nosaukuši deviņas vietas, tad noteikti divas no vietām abi ir nosaukuši pareizi vienlaicīgi.

**3.4.9.** Šāds daudzskaldnis neeksistē.

**3.4.10.** Apgalvojumi jāizvēlas tā, lai tie runātu par dažādiem objektiem.

## 3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

**3.5.1.** Apskati atsevišķi, cik pie katras no lielā kuba šķautnēm būs kubiņu ar divām nokrāsotām skaldnēm un cik uz katras no lielā kuba skaldnēm būs kubiņu ar vienu nokrāsotu skaldni.

**3.5.2.** Prasīto iegūt nevarēs; lai to pierādītu, izmanto invariantu metodi.

**3.5.3.** Ja taisnstūris ar divām taisnēm sadalīts divos taisnstūros, tad pa diagonāli esošo taisnstūru laukumu reizinājumi ir vienādi.

**3.5.4.** Centies prasīto izdarīt patstāvīgi.

**3.5.5.** Apzīmē ar nezināmajiem katra monētu veida skaitu un uzraksti vienādību kopējam monētas daudzumam.

**3.5.6.** Var izspriest, ka $S = 9$; pakāpeniski centies noskaidrot pārējo burtu vērtības.

**3.5.7.** Viens no veidiem, kā uzdevumu atrisināt, ir konstruēt perpendikulu pret $AP$ un pakāpeniski apskatīt iegūtos trijstūrus.

**3.5.8.** Ja zāles daudzumu, ko 1 govs apēd 1 dienā, apzīmējam ar 1 vienību, tad 70 govis 24 dienās apēd 1680 vienības, kurās ietilpst zāle, kas jau bija izaugusi, pirms govis bija izlaistas pļavā, un zāle, kas izauga 24 dienās. Līdzīgi 30 govis 60 dienās apēd 1800 zāles vienības.

**3.5.9.** **a)** Vienpadsmitā virknīte ir tā, kurā pirmajā būs vismaz 2012 cipari; **b)** Centies pakāpeniski noskaidrot meklēto ciparu.

**3.5.10.** Prasīto var izdarīt ar vienu svēršanu, paņemot noteiktu skaitu monētu no katra maisa (ne obligāti no visiem maisiem vienādu skaitu).

## 3.6. SESTĀ NODARBĪBA

**3.6.1.** Apskatot vairākus piemērus var noteikt prasīto, pēc tam to pierādot vispārīgā gadījumā.

**3.6.2.** Uzdevumos esošos piemērus var noskaidrot, piemēram, kādu no aplīšos esošajiem skaitļiem apzīmējot ar nezināmo un pārējos izsakot, ņemot vērā pie bultiņām uzrakstītās veicamās darbības.

**3.6.3.** Ernesta monētu skaits ir par 3 lielāks nekā skaitļa 6 daudzkārtnis, un par 7 lielāks nekā skaitļa 8 daudzkārtnis.

**3.6.4.** Atbilstoši piemēriem, jāpierāda sakarība $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = \left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2$.

**3.6.5.** Meklētais desmitstūris eksistē; centies tādu uzzīmēt patstāvīgi.

**3.6.6.** Katram no dotā zīmējuma trijstūru neiezīmētajiem leņķiem ir pretī ar to vienāds krustleņķis.

**3.6.7.** Viens no veidiem, kā atrisināt piemēru, ir pārrakstīt to par reizinājumu.

**3.6.8.** Lielākais šādu punktu skaits ir 4.

**3.6.9.** Viens cilvēks redz skaitli, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes un skaitļus, kas uzrakstīti uz divām blakus esošām kuba sānu skaldnēm; bet otrs cilvēks redz skaitli, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes, un skaitļus, kas uzrakstīti uz abām pārējām kuba sānu skaldnēm.

**3.6.10.** Akmeņus var sadalīt vairākās kaudzītēs un tās pakāpeniski pārbaudīt, izdarot secinājumus par to radioaktivitāti.

# 4. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

## 4.5. PIEKTĀ KLASE

**4.5.1.** Skaitlis ir mazāks, ja tajā ir mazāk ciparu un tie ir sakārtoti augošā secībā. Padomā, cik cipariem jābūt un cik lielam jābūt mazākajam no tiem, lai to reizinājums sasniegtu vai pārsniegtu 2012.

**4.5.2.** Saskaitot visu instrumentu spēlētājus, tie absolventi, kas prot spēlēt 2 mūzikas instrumentus, pieskaitīti 2 reizes, bet tie, kas prot spēlēt 3 instrumentus, 3 reizes.

**4.5.3.** Stūros noteikti būs taisnstūrveida figūriņas, un kvadrāts iznāks vismaz $6\times6$.

**4.5.4.** Padomā par dienu skaitu, ja gads sākas ceturtdienā!

**4.5.5.** Parādi, kā var samaksāt visas summas no 2 līdz 9 santīmiem ar trīs dažādu monētu palīdzību. Pamato, kāpēc 10 santīmus nevarēs.

## 4.6. SESTĀ KLASE

**4.6.1.** Kādus ciparus var saturēt prasītais skaitlis? Ievērojam, ka cipars 1 skaitļa ciparu summu palielina, bet reizinājumu nemaina.

**4.6.2.** Ja zinām palindroma pirmo ciparu, zinām arī tā pēdējo. Cik pirmos ciparus jāzina, lai būtu viennozīmīgi zināms, kāds būs 7 ciparu palindroms? Mazāki pirmie cipari nozīmē, ka mazāks būs arī viss skaitlis.

**4.6.3.** Stūros noteikti būs taisnstūrveida figūriņas, un taisnstūris iznāks vismaz $5\times6$.

**4.6.4.** Apzīmē īsākās sešstūra malas garumu ar $x$, pārējās malas būs $x+1$ u.t.t. Sastādi un atrisini vienādojumu.

**4.6.5.** Pārbaudi, kuri uzraksti ir patiesi, ja dimants atrodas katrā lādītē.

## 4.7. SEPTĪTĀ KLASE

**4.7.1.** Izsaki $x$ un novērtē, pie kādiem koeficientiem $x=0$, bet pie kādiem tas nav definēts.

**4.7.2.** Cik taisnes krusto katra taisne? Cik reizes tiek ieskaitīts katrs krustpunkts, ja sareizina taišņu skaitu ar krustpunktu skaitu uz katras taisnes?

**4.7.3.** Nākamais virknes loceklis iznāk iepriekšējā locekļa un tā kvadrāta summa. Ja pie skaitļa, kas dalās ar 7, pieskaita tā kvadrātu, iegūtā summa dalās ar 7.

**4.7.4.** Sadali katru trijstūra malu uz pusēm un dalījuma punktus savieno. Kādā no iegūtajiem 4 trijstūriem būs 2 punkti.

**4.7.5.** Pēterim jāraksta tādi paši cipari, kādus uzrakstījis Jānis, izmantojot, ka 1001 dalās ar 13.

## 4.8. ASTOTĀ KLASE

**4.8.1.** Nosaki no grafikiem, vai lielāka ir $a$, vai $b$ vērtība. Kur var redzēt $k$ un $m$ vērtības, un kurš no tiem lielāks?

**4.8.2.** Ievēro, kuri leņķi ir vienādi. Aprēķini trijstūru leņķus. Izmanto, ka četrstūra visu leņķu summa ir $360°$.

**4.8.3.** Lai reizinājums iznāktu nepāra, katrā iekavā būtu jābūt vienam pāra, bet otram – nepāra skaitlim. Cik ir pāra, cik nepāra skaitļu no 1 līdz $n$?

**4.8.4.** Ik pa 30 periodiski atkārtojas skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 2, 3 vai 5. Noskaidro, cik virknes locekļu ir starp 30 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem un cik šādu periodu ietilpst līdz 2011. virknes elementam.

**4.8.5.** Ņem vērā, ka $N \cdot 3$ ir pāra skaitlis, jo te katra zēnu savstarpējā draudzēšanās ir ieskaitīta 2 reizes. Savukārt visu zēnu draudzību ar meitenēm un visu meiteņu draudzību ar zēniem ir vienāds skaits: $N \cdot 7 = M \cdot 5$.

## 4.9. DEVĪTĀ KLASE

**4.9.1.** Noderēs formula $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

**4.9.2.** Aprēķini riņķu centru veidotās figūras laukumu un riņķu daļu laukumus.

**4.9.3.** Varēs izgriezt 15 figūriņas.

**4.9.4.** Parēķini vairākus virknes locekļus, līdz tie sāk atkārtoties. Tad atliek ņemt vērā periodu un izrēķināt 2011. locekli.

**4.9.5.** Kāds ir svars rūtiņai, kas satur mazāko skaitli? Var iegūt 8 labas rūtiņas.

# 5. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

## 5.5. PIEKTĀ KLASE

**5.5.1.** Padomā, no kādiem skaitļiem var iegūt 21. Iespējamo atrisinājumu ir daudz. Šoreiz nav nepieciešams pārveidojumos iegūt 3 un vairāk ciparu skaitļus, kaut gan pareizi ir arī tie risinājumi, kuros tādi parādās.

**5.5.2.** Cik liels laukums ir trijstūriem ārpus kvadrāta?

**5.5.3.** Pamēģini izveidot no cipariem 1, 2, 3, 4, 5 un 8 trīs divciparu skaitļus, kas dalās ar 7. Ievēro, ka $100000 \cdot a + 1000 \cdot b + 10 \cdot c + d$ dalās ar tādu skaitli, ar ko dalās gan $a$, gan $b$, gan $c$, gan $d$.

**5.5.4.** **a)** Padomā par ziedu skaitu vienā rindā – trīs nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

**b)** To var izdarīt.

**5.5.5.** Var abos gadījumos. Sāk ar vienu skaitli, tad liek klāt pa vienam ciparam, lai iegūtu arvien nebijušu skaitli.

## 5.6. SESTĀ KLASE

**5.6.1.** Ja nemainās desmiti, blakusesošu skaitļu ciparu summas atšķiras par 1. Apskati skaitļus, kas beidzas ar 9 un 0. Tajos jābūt diezgan daudziem cipariem, lai to summas atšķirtos par skaitli, kas dalās ar 5.

**5.6.2.** Aprēķini, cik pavisam ir skaitļu, ko var uzrakstīt pēc uzdevuma nosacījumiem un cik no tiem sākas ar 54. Prasītais skaitlis ir lielākais no tiem, kas nesākas ar 54.

**5.6.3.** Lai riņķa līnija krustotu malu, vienai virsotnei jāatrodas tās iekšpusē, bet blakusesošajai – ārpusē.

**5.6.4.** Tā kā 2 nevar uzrakstīt kā divu dažādu naturālu skaitļu summu, tad vienas malas abos galos pierakstīto skaitļu summai jābūt nepāra skaitlim. Kāda būs visu 5 malu abos galos pierakstīto skaitļu summa?

**5.6.5.** Būtiski izveidot tādu jautājumu sistēmu, kas uz atšķirīgām skaitļu izvēlēm dod atšķirīgas atbilžu kombinācijas. Jautājumus var veidot, interesējoties vai konkrētā rūķīša skaitlis ir lielāks par kāda konkrēta cita rūķīša iedomāto skaitli, kā arī jautājot, vai rūķītis izvēlējies konkrētu skaitli.

## 5.7. SEPTĪTĀ KLASE

**5.7.1.** Apskati visas iespējas, kā var pārveidot 9 un no tā iegūtos skaitļus. No kādiem skaitļiem var iegūt 27 ar atļautajām operācijām?

**5.7.2.** Astoņstūris nebūs izliekts, divas tā malas atradīsies uz viena lauztās līnijas posma.

**5.7.3.** Pamato, ka viens no skaitļiem ir 0, tad pēti reizinājumus.

**5.7.4.** Ievēro, ka 1004041 = 1014141 – 10100.

**5.7.5.** Doto trijstūri var sadalīt 4 tādos vienādmalu trijstūros ar malas garumu 1, kas nepārklājas.

## 5.8. ASTOTĀ KLASE

**5.8.1.** Izmanto formulu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

**5.8.2.** Aprēķinot leņķus, pamato, ka trijstūris *BFE* ir vienādsānu.

**5.8.3.** Nevar būt, jo dalās ar 11, kas nav cipars.

**5.8.4**. Var zīmēt kvadrātu, un tad pārējos 2 punktus novietot tā, lai starp tiem būtu 1 *cm* un katrs no tiem būtu 1 *cm* attālumā no tieši divām dažādām kvadrāta virsotnēm.

**5.8.5.** Pietiek ar 4 stūrīšu veidotu figūru.

## 5.9. DEVĪTĀ KLASE

**5.9.1.** Pamēģini $x$ vietā ielikt 1 un –1 un izmanto, ka $a+b=2012$.

**5.9.2.** Izmanto, ka trijstūra *ABC* laukums ir trijstūru *APB*, *APC* un *BPC* summa.

**5.9.3.** Var 5, 6, 7 un sākot ar 10. Risinājumā jāpamato, kāpēc.

**5.9.4.** **a)** pavēro virknes locekļu paritāti, kā atkārtojas pāra un nepāra skaitļi,

**b)** pamēģini atrast brīdi, no kura sākot visi virknes locekļi atkārtosies, un izmantojot virknes periodiskumu, aprēķināt prasīto.

**5.9.5.** Ievēro, ka, ja $n$ un $x$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad arī $n$ un $n-x$ nav lielāku kopīgu dalītāju kā 1.

# 6. LATVIJAS 62. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

## 6.9. DEVĪTĀ KLASE

**6.9.1.** **a)** Viens no pieciem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem noteikti dalās ar 5.

**b)** Starp četriem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem noteikti ir divi pāra skaitļi, no kuriem viens dalās ar 4.

**6.9.2.** Izsaki trijstūra malu garumus no laukuma formulas un pārbaudi trijstūra nevienādības izpildīšanos.

**6.9.3.** Lieto Vjeta teorēmu un atceries, ka, lai reizinājumā iegūtu negatīvu skaitli, vienam reizinātājam jābūt pozitīvam, bet otram – negatīvam.

**6.9.4.** Novelc taisni $AE$ un perpendikulus pret to $BF$ un $CG$. Lietojot Pitagora teorēmu dažādiem taisnleņķa trijstūriem un formulas, pamato, ka $AF$ un $AG$ ir vienādi.

**6.9.5.** Pamatojumam, ka nevar izgriezt vairāk kā 4 figūras, noderēs krāsojums šaha galdiņa veidā.

# 7. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

## 7.5. PIEKTĀ KLASE

**7.5.1.** Padomā, ar kādu ciparu beigsies skaitlis, kas ir 7 reizes lielāks nekā tāds skaitlis, kas beidzas ar katru no uzdevumā dotajiem cipariem.

**7.5.2.** Pie kvadrāta virsotnēm noteikti būs šaurie leņķi. Ja no punkta novelk nogriežņus trijos virzienos, var iegūt 3 platus leņķus.

**7.5.3.** Kāds ir lielākais pogu skaits, pie kura vēl var gadīties, ka visām krāsām ir mazāk pogu nekā prasīts uzdevumā?

**7.5.4.** Uz kuru stāvu nevar aizbraukt ar šīs mājas liftu? Ar šo stāvu būs jāsāk.

**7.5.5.** Cik kvadrātiņu būs katrā figūrā?

## 7.6. SESTĀ KLASE

**7.6.1.** Kas notiek ar visu uzrakstīto skaitļu summu?

**7.6.2.** Iegūtās figūras nebūs izliektas. Dalījuma līnijai jāiet caur pretējām malām vai pretējiem stūriem.

**7.6.3.** Cik taisnstūru ar izmēriem $1\times3$ var ievietot kvadrātā, lai tie nepārklātos? Katrā no tiem jābūt vienai zaļai rūtiņai. Jāparāda arī derīgs krāsojums.

**7.6.4.** Visi pirmskaitļi, ko var iegūt, saskaitot divus dažādus skaitļus, ir nepāra. Ar trīs pāra un trīs nepāra skaitļu palīdzību var izveidot a) gadījumā prasīto (jāizdomā derīgs piemērs), bet b) nav iespējams, ko jāpierāda.

**7.6.5.** Paskaties, kādu zīmuļu skaitu var salikt vairākās 7 zīmuļu kastītēs. 10 zīmuļu kastītēs var sapakot atlikušos pilnus desmitus zīmuļu, ja ar 7 zīmuļu kastītēm būs nodrošināta tāda zīmuļu skaita sapakošana, kas beidzas ar konkrētu ciparu.

## 7. 7. SEPTĪTĀ KLASE

**7.7.1.** Ja kaut viens reizinātājs būs pāra skaitlis, tad arī reizinājums būs pāra.

**7.7.2.** Lai 3 nogriežņi varētu būt trijstūra malas, tiem jāapmierina trijstūra nevienādība – katru divu summai jābūt lielākai par trešo.

**7.7.3.** Ja vienas mašīnas ātrums ir 2 reizes lielāks kā otras, tad tā nobrauc 2 reizes lielāku attālumu tajā pašā laikā.

**7.7.4.** Sagriez kubu daudzos mazos kubiņos, un tad daļu no tiem apvieno lielākā kubā.

**7.7.5.** Aprēķini, cik veidos var nokļūt katrā no laukuma rūtiņām.

## 7.8. ASTOTĀ KLASE

**7.8.1.** Dažreiz, dalot ar daļskaitli, var iegūt veselu skaitli.

**7.8.2.** Uzraksti trijstūra nevienādības visiem trijstūriem, kam virsotne ir punktā $P$ un saskaiti tās.

**7.8.3.** Aprēķini kopīgo punktu skaitu visiem zēniem, visām meitenēm un visiem skolēniem.

**7.8.4.** Ja katru 3 blakus esošu skaitļu summa dalās ar 5, tad katrs trešais skaitlis dod vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 5.

**7.8.5.** Tā kā dotā tabula ir simetriska, diagonāles abās pusēs katrs skaitlis ir ierakstīts vienādā skaitā rūtiņu, tātad ārpus diagonāles katrs skaitlis ir pāra skaitu reižu. Cik reizes katrs skaitlis ir sastopams tabulā pavisam?

## 7.9. DEVĪTĀ KLASE

**7.9.1.** Tādu skaitļu ir bezgala daudz, bet atbildē vajag vienu, kam jāparāda, ka ir tieši 12 prasītie dalītāji.

**7.9.2.** Izmantojot to, ka taisnleņķa trijstūrī apvilktās riņķa līnijas centrs ir hipotenūzas viduspunktā, pierādi trijstūru $MBN$ un $MCN$ vienādību. Tālāk jāskatās, kuri leņķi ir vienādi.

**7.9.3.** Lieto Vjeta teorēmu.

**7.9.4.** Pēteris var izmantot faktu, ka $\overline{aaabbbccc} = 111 \cdot \overline{a00b00c} = 37 \cdot 3 \cdot \overline{a00b00c}$.

**7.9.5.** Salīdzini laukumu trijstūrim, kura mala atrodas uz trapeces īsākā pamata, ar trapeces laukuma piektdaļu.

# ATRISINĀJUMI

## 1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

### 1.1. PIRMĀ KĀRTA

**1.1.1. Atbilde:** D.

**Risinājums**: Ievērojot darbību secību, pirmā jāveic reizināšana un dalīšana, pēc tam pārējās darbības pēc kārtas:

$$225-25\cdot 2+25-25:5=$$
$$=225-50+25-5=$$
$$=175+25-5=$$
$$=200-5=$$
$$=195$$

**1.1.2. Atbilde:** C.

**Risinājums**: Lai noteiktu, kurā pilsētā bija orķestra pirmais koncerts, nepieciešams atrast uzlīmi, kas tika uzlīmēta pirmā – tā atradīsies zem visām pārējām uzlīmēm. Rūpīgi apskatot dotajā attēlā redzamo koferi, var pamanīt, ka visu pilsētu uzlīmes, izņemot *Basel*, ir uzlīmētas virs kādas citas pilsētas uzlīmes (tātad tās tika uzlīmētas pēc kādas citas pilsētas). Tikai pilsētas *Basel* uzlīme atrodas zem pārējām uzlīmēm, tātad tā tika uzlīmēta pirmā.

**1.1.3. Atbilde:** D.

**Risinājums**: No uzdevuma nosacījumiem seko, ka burkā ietilpst tieši 6 krūzes sulas. Tātad starpība starp burkas un krūzes tilpumiem ir 5 krūzes, kas ir tikpat, cik 10 glāzes. Tāpēc 1 krūzē ir tikpat daudz sulas, cik 2 glāzēs, līdz ar to burkā ietilpst $6\cdot 2=12$ glāzes sulas.

**1.1.4. Atbilde:** A.

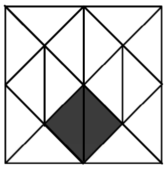
**Risinājums**: Apzīmēsim Zanes vecumu ar $Z$, Lauras – ar $L$, Marutas – ar $M$ un Jāņa – ar $J$. Ievērojam, ka uzdevumā jāsalīdzina Marutas un Jāņa gadu starpība ar Zanes un Lauras gadu starpību. Tāpēc izsakām Marutas un Jāņa vecumu gados: $M=Z-1$ un $J=L+1$. Ja no Marutas gadu skaita atņemsim Jāņa gadu skaitu, tad varam ievērot, ka iegūsim Zanes un Lauras vecumu starpību, no kuras atņemts skaitlis 2. Tātad Marutas un Jāņa gadu starpība ir par 2 gadiem mazāka nekā Zanes un Lauras gadu starpība.

**1.1.5. Atbilde:** B.

**Risinājums**: Aplūkojam pēdējo klucīti. Ja to novietotu tā, lai tā divu skaldņu novietojums būtu tāds pats, kā pirmā klucīša skaldņu novietojums, tad būtu skaidrs, ka pirmā klucīša kreisais sāns jeb skaldne ir tāda pati, kā pēdējā klucīša augšējā skaldne.

**1.1.6. Atbilde:** E.

**Risinājums**: Sadalīsim kvadrātu tā, kā parādīts A1.1. zīmējumā. Tagad varam ievērot, ka kvadrāts sastāv no 16 vienādiem trijstūrīšiem. Apvienojot tos pa diviem kopā, iegūstam, ka kvadrāts sastāv no 8 šādiem trijstūru pārīšiem. Iekrāsots viens šāds pāris, tātad viena astotdaļa jeb $\frac{1}{8}$ no visa kvadrāta.



A1.1.zīm.

**1.1.7. Atbilde:** B.

**Risinājums**: Aplūkojam jau ierakstītos skaitļus. Vienīgais skaitlis, kas dalās ar 5, ir skaitlis 10 figūriņā Y. Tātad 3. vietā būs jāievieto Y. Atliek vēl neievietotas figūriņas X un Z. Kvadrātā jau ierakstītais skaitlis 12 dalās ar skaitli 6 no figūriņas X un nedalās ar skaitli 9 no figūriņas Z. Tātad 1. vietā jāievieto X. Atliek figūriņa Z, kas jāievieto 2. vietā.

**1.1.8. Atbilde:** C.

**Risinājums**: Doto uzdevumu apmierina tikai šāda atbilde: 2 saldējumus un 3 šokolādes. Tāpēc patiess ir tikai apgalvojums C.

Uzdevumu var atrisināt arī pēc kārtas pārbaudot visus piedāvātos atbilžu variantus:

a) $7 \cdot 23$ sant. = 1 lats 61 sant. $\neq$ 1 lats 51 sant. (neder)

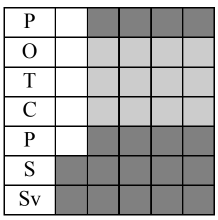
b) $3 \cdot 23$ sant. + $2 \cdot 35$ sant.= 1 lats 39 sant. $\neq$ 1 lats 51 sant. (neder)

c) $2 \cdot 23$ sant. + $3 \cdot 35$ sant.= 1 lats 51 sant. (der)

d) $4 \cdot 35$ sant. = 1 lats 40 sant. (neder)

**1.1.9. Atbilde:** A.

**Risinājums**: Ja šajā mēnesī bija četras piektdienas un pirmdienas, tad bija četras arī otrdienas, trešdienas un ceturtdienas (skat. A1.2. zīm.). Tātad mēnesī bija četras pilnas nedēļas un vēl divas dienas (piektā sestdiena un piektā svētdiena). Tātad kopā šajā mēnesī bija $4 \cdot 7 + 2 = 30$ dienas.




A1.2.zīm.

Var pārliecināties, ka pēc katra 30 dienas gara mēneša seko 31 dienu garš mēnesis. Dotā mēneša pēdējais datums var būt vienīgi svētdienā, tāpēc nākamais mēnesis sāksies pirmdienā. Līdz ar to tajā būs 5 pirmdienas, 5 otrdienas un 5 trešdienas. Tātad redzam, ka patiess ir tikai apgalvojums A.

**1.1.10. Atbilde:** E.

**Risinājums**: No diagrammā attēlotajām automašīnām piecas ir Mitsubishi: EVO, EVO VI, EVO VII, EVO VIII, EVO IX. Tāpēc saskaitām tām atbilstošos procentus: 9% + 9% + 9% + 9% + 27% = 63%.

## 1.2. OTRĀ KĀRTA

**1.2.1. Atbilde:** D.

**Risinājums**: Ievērojot darbību secību, pakāpeniski iegūstam:

$$2012-(2\cdot 2+2):2+2=$$

$$=2012-6:2+2=$$

$$=2012-3+2=$$

$$=2011$$

**1.2.2. Atbilde:** D.

**Risinājums**: Apskatām, no kā sastāv dotā izteiksme: $h + n$ izsaka, cik sniega Norlands un Harijs var kopā attīrīt vienas stundas laikā; tātad sareizinot to ar 2 iegūsim, cik sniega viņi kopā var attīrīt divās stundās. Skaitlis 500 izsaka sākotnējo sniega daudzumu; tātad, no tā atņemot $(h+n)\cdot 2$, iegūsim, cik kvadrātmetri sniega būs vēl netīrīti pēc tam, kad Harijs un Norlands būs tīrījuši sniegu divas stundas.

**1.2.3. Atbilde:** D.

**Risinājums**: Ja Zelmai būtu par 1 piparkūku mazāk, viņas tās varētu sadalīt paciņās gan pa 2, gan pa 3, gan pa 5, tātad piparkūku skaits dalītos gan ar 2, gan ar 3, gan ar 5. Tas nozīmē, ka piparkūku skaits dalītos ar 30, tāpēc Zelmas izcepto piparkūku skaits ir par 1 vairāk nekā skaitlis, kas dalās ar 30. No piedāvātajiem atbilžu variantiem tāds ir skaitlis 31.

*Piezīme.* Protams, uzdevumu var atrisināt, pēc kārtas pārbaudot, kura no piedāvātajām atbildēm apmierina uzdevuma nosacījumus.

**1.2.4. Atbilde:** C.

**Risinājums**: Dotās eglītes laukums ir 9 rūtiņas. No dotajiem variantiem tāds pats kopējais gabaliņu laukums ir tikai c) un d) variantos. Abus tos pārbaudot, redzam, ka pareizā atbilde ir c).

*Piezīme.* Lai atrisinātu uzdevumu, var vienkārši censties salikt doto eglīti, izmantojot pēc kārtas katru no variantiem.

**1.2.5. 1)** 201 *sant.* $<$ 4 *lati* 20 *sant.* : 2 = 2 *lati* 10 *sant.* = 210 *sant.*

**2)** 100 *s* $=$ 2 *min.* – 20 *s* = 120 *s* – 20 *s*

**1.2.6.** Pareizais maršruts: $\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{7}{16}\Rightarrow\frac{5}{8}$. Veidojas vārds ZIEMA.

**1.2.7. Atbilde:** Pirmajā kaudzē bija 21 sniega pika, otrajā – 15 sniega pikas.

**Risinājums:** Pēc tam, kad 12 pikas aizsvieda prom, kopā palika 36 – 12 = 24 sniega pikas. Tā kā abās kaudzēs tad bija vienāds skaits sniega piku, tad katrā no tām bija 24 : 2 = 12 pikas. Tātad pirmajā kaudzē sākumā bija 12 + 9 = 21 sniega pika, bet otrajā kaudzē bija 12 – 9 + 12 =15 pikas.

**1.2.8. Risinājums:** Baiba saņēma cilindrisko kārbu, jo viņa nesaņēma piramīdas formas kārbu un kubveida kārbu saņēma Anna. Tātad atliek, ka Cilda saņēma piramīdas formas kārbu. Tā kā piramīdas formas kārbā tika iesaiņoti krāsu zīmuļi, tātad tos saņēma Cilda. Anna nesaņēma galda spēli, tātad atliek, ka viņa saņēma grāmatu; tas nozīmē, ka Baiba saņēma galda spēli. Tādējādi iegūstam tabulā attēloto atbildi:

| | kārba | saņemtā dāvana |
|---|---|---|
| Anna | *kubveida* | *grāmata* |
| Baiba | *cilindriska* | *galda spēle* |
| Cilda | *piramīdas formā* | *krāsu zīmuļi* |

## 1.3. TREŠĀ KĀRTA

**1.3.1. Atbilde:** 600 *s*.

**Risinājums:** Atceramies, ka 1 *stunda* = 60 *min* un 1 *min.* = 60 *s*. Pakāpeniski aprēķinām izteiksmes vērtību, ievērojot darbību secību:

$$\left(\frac{1}{4}\ no\ 1\ stundas\right)\cdot 2+\left(\frac{1}{6}\ no\ 1\ min.\right)\cdot 12-22\ min.=$$

$$=\left(\frac{1}{4}\ no\ 60\ min.\right)\cdot 2+\left(\frac{1}{6}\ no\ 60\ s\right)\cdot 12-22\ min.=$$

= (60 *min.* : 4) · 2 + (60 *s* : 6) · 12 – 22 *min.* =

= 15 *min.* · 2 + 10 *s* · 12 – 22 *min.* =

= 30 *min.* + 120 *s* – 22 *min.* =

= 30 *min.* + 2 *min.* – 22 *min.* =

= 10 *min.* =

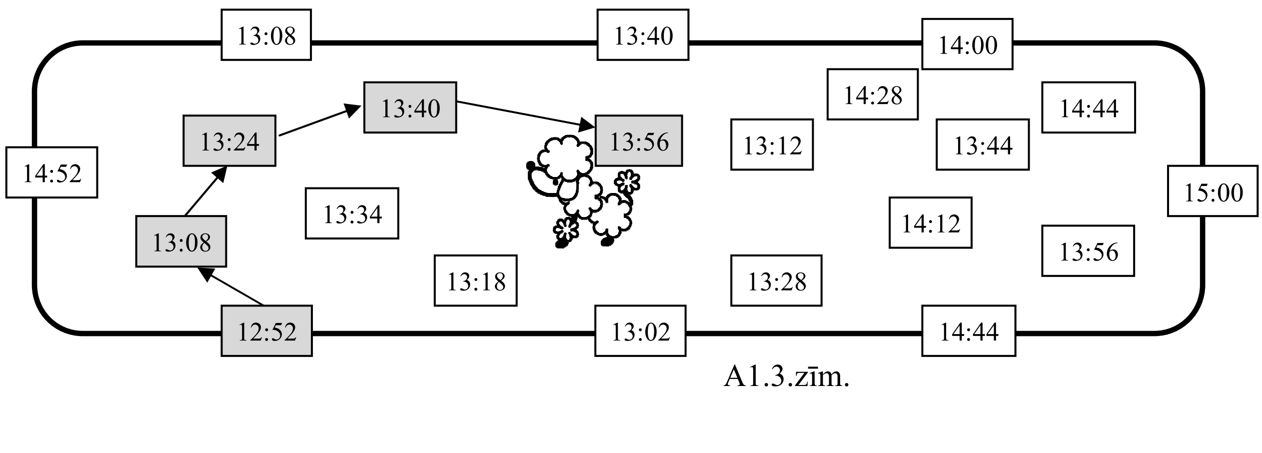
= 10 · 60 *s* =

= 600 *s*

**1.3.2. Risinājums:** Dots, ka pirmais bobā noteikti sēž Oskars Melbārdis. Ja otrais sēž Helvijs Lūsis, tad iespējami divi izkārtojumi: HAJ un HJA; ja otrais sēž Arvis Vilkaste, tad iespējami vēl divi izkārtojumi: AJH un AHJ; ja otrais sēž Jānis Strenga, tad atkal iespējami divi izkārtojumi: JAH un JHA.

Tātad trīs stūmējus treneris bobā varēja sasēdināt **6 dažādos veidos**: **HAJ; HJA; AJH; AHJ; JAH; JHA**.

**1.3.3. Risinājums:** Tā kā pavisam laiks tika fiksēts piecas reizes, tad no pirmā laika uzņemšanas brīža (pie vārtiem) līdz pēdējam laika uzņemšanas brīdim (centrā) ir pagājušas 4 · 16 *min.* = 64 *min.* = 1 *h* 4 *min.* Tātad sunītis parkā ienāca 1 *h* 4 *min.* pirms plkst. 13:56, t.i., plkst. 12:52. Zīmējumā ar bultiņām parādīts tālākais sunīša ceļš (skat. A1.3. zīm.).



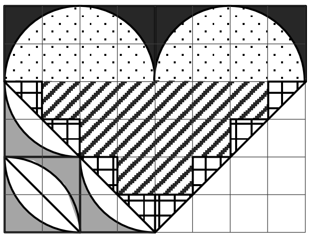

A1.3.zīm.

**1.3.4. Atbilde:** 32 rūtiņas.

**Risinājums:** Iepunktotie pusapļi kopā ar 4 tumši pelēki iekrāsotajiem laukumiem veido taisnstūri $2\times8$ rūtiņas (skat. A1.4. zīm.); tā kā šie četri tumši pelēkie laukumi kopā ir tik pat lieli kā četri gaiši pelēkie laukumi, tad pusapļi kopā ar sākumā iekrāsotajām daļām attēla apakšējā kreisajā daļā (A1.4. zīmējumā gaiši pelēki iekrāsotie laukumi) arī veido taisnstūri ar izmēriem $2\times8$ rūtiņas, kura laukums ir 16 rūtiņas.

Tālāk aplūkosim dotajā uzdevumā iekrāsotās sirds apakšējo daļu – A1.4. zīm. tas ir sadalīts divu veidu daļās – 12 veselās rūtiņās (iesvītrotas ar diagonālu svītrojumu) un 8 pusrūtiņās (rūtains krāsojums). Kopā astoņās pusēs no veselas rūtiņas ir $8:2=4$ rūtiņas, kas kopā ar veselajām rūtiņām ir 12 + 4 = 16 rūtiņas.

Tātad iekrāsotās figūras laukums ir $16+16=32$ rūtiņas.



A1.4.zīm.

**1.3.5. Atbilde:** No kreisās puses: Māris, Aigars, Ivars, Juris un Sandris.

**Risinājums:** Tā kā Ivars ir garāks par Sandri (apzīmējot zēnu garumus ar atbilstošo vārdu pirmajiem burtiem, iegūstam nevienādību I > S), bet Aigars ir garāks par Ivaru (A > I), tad Aigars ir garāks par abiem šiem puišiem (jeb A > I > S). Tā kā zināms, ka Aigars ir īsāks par Māri (jeb Māris ir garāks par Aigaru, t.i., M > A), tad iegūstam, ka Māris ir garāks gan par Aigaru, gan Ivaru, gan Sandri (M > A > I > S).

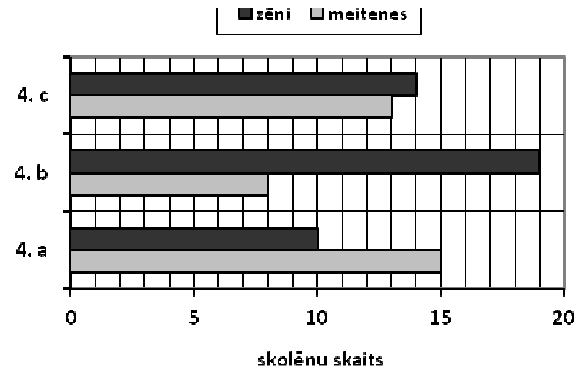
Zināms arī, ka Juris ir īsāks par Ivaru, tātad viņš stāv pa labi no Ivara; jānoskaidro tikai, vai viņš ir ceturtais vai piektais no kreisās puses. Tā kā Jurim nav vasaras raibumiņu, tad viņš noteikti nav pēdējais, bet ir pirmspēdējais. Tādējādi iegūstam, ka puiši no kreisās puses stāv šādā secībā: Māris, Aigars, Ivars, Juris un Sandris (jeb J > M > A > I > S).

**1.3.6.** No diagrammas var nolasīt, ka 4. a klasē mācās 15 meitenes, 4. c klasē – 13 meitenes, 4. a klasē – 10 zēni, bet 4. b klasē – 19 zēni. Tā kā 4. c klasē kopā mācās 27 skolēni, no kuriem 13 ir meitenes, tad zēnu tajā ir 27 – 13 = 14.

Saskaitot atbilstošos zēnu un meiteņu skaitus, iegūstam, ka 4. a klasē mācās 25 skolēni, bet 4. b klasē mācās 27 skolēni. Tādējādi aizpildīta tabula ir šāda:

| | *4. a* | *4. b* | *4. c* |
|---|---|---|---|
| *Meitenes* | **15** | *8* | **13** |
| *Zēni* | **10** | **19** | **14** |
| *Kopā* | **25** | **27** | *27* |

Tātad visvairāk zēnu ir 4. b klasē; visvairāk meiteņu ir 4. a klasē; vismazāk skolēnu ir 4. a klasē. Papildinātā diagramma redzama A1.5. zīmējumā.




A1.5.zīm.

## 1.4. CETURTĀ KĀRTA

**1.4.1. Atbilde:** svētdienā.

**Risinājums:** Pirmā šī augusta svētdiena, kas iekrita pāra datumā, bija 2. augustā, tad nākamā svētdiena – pāra datums – bija 16. augustā, bet trešā – 30. augustā. Ja pirmā augusta svētdiena būtu nevis 2. datumā, bet gan nākamajā mazākajā datumā, t.i., 4. augustā, tad trešā svētdiena būtu jau 32. datumā, bet tāda nav nevienā gada mēnesī. Tāpēc viegli izskaitīt, ka 9. augusts bija svētdienā.

**1.4.2. Atbilde:** 4 stundas.

**Risinājums:** Tā kā zināms, ka jātnieks pirmajā braucienā jāja par 10 stundām ilgāk, tad šajā laikā viņš nojāja tik kilometrus, par cik kilometriem pirmajā braucienā viņš nojāja vairāk nekā otrajā, t.i., 168 – 48 = 120 kilometrus. Ja jātnieks 120 kilometrus nojāja 10 stundās, tad viņa jāšanas ātrums ir 120 : 10 = 12 km/h. Tāpēc otrajā braucienā viņš jāja 48 : 12 = 4 stundas.

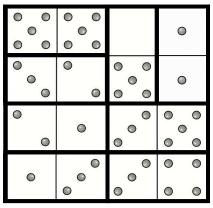
**1.4.3. Atbilde:** 977.

**Risinājums:** Lai iegūtu pēc iespējas lielāku starpību, mazināmajam nepieciešams būt pēc iespējas lielākam skaitlim, bet mazinātājam – pēc iespējas mazākam. Lielākais iespējamais trīsciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir 987; savukārt mazākais iespējamais divciparu skaitlis ir 10. Tāpēc vislielākais iegūstamais skaitlis ir 987 – 10 = 977.

**1.4.4. Atbilde:** 16 *l* un 64 *l*.

**Risinājums:** Ja zināms, ka lielākajā kannā ir 4 reizes vairāk piena nekā mazākajā, tad varam teikt, ka lielākajā kannā ir četras vienības piena, bet mazākajā kannā – viena vienība piena. Tātad lielākajā kannā ir par trīs vienībām vairāk piena nekā mazākajā; šīm 3 vienībām atbilst 48 *l* piena, kas jānolej, lai abās kannās būtu vienās piena daudzums. Tāpēc vienai vienībai atbilst 48 *l* : 3 = 16 *l* piena. Tātad mazākajā kannā ir šie 16 *l* piena, bet lielākajā – četras reizes vairāk jeb 16 *l* · 4 = 64 *l* piena.

**1.4.5.** Tā kā visos kauliņos kopā ir 44 punkti, tad katrā rindā un kolonnā jābūt kopā 44 : 4 = 11 punktiem. Vienu no iespējām, kā paveikt uzdevumu, skat. A1.6. zīm.



A1.6.zīm.

**1.4.6. Atbilde:** 0, 1, 2, 3, 4, 5 vai 6 dienas.

**Risinājums:** Ja būtu 10 saulainas dienas bez vēja, 15 vējainas, apmākušās dienas bez sniega un 12 bezvēja dienas, kad sniga, tad Kuldīgā janvārī būtu $10 + 15 + 12 = 37$ dienas. Taču janvārī ir 31 diena, tātad $37 – 31 = 6$ dienas bija vai nu putenis (sniga un bija vējains), vai bija saulains un vējains laiks. Tātad putenis varēja būt ne vairāk kā 6 dienas.

**1.4.7. Atbilde:** 24 $cm^2$.

**Risinājums:** Dotās riņķa līnijas rādiuss ir 2,5 *cm*, tāpēc iekšējā kvadrāta malas garums ir $2{,}5\ cm \cdot 2 = 5\ cm$. Tāpēc tā perimetrs ir $5\ cm \cdot 4 = 20\ cm$. Tā kā lielākā kvadrāta perimetrs ir par 8 *cm* lielāks, tad tā perimetrs ir $20\ cm + 8\ cm = 28\ cm$, bet katras malas garums ir $28\ cm : 4 = 7\ cm$.

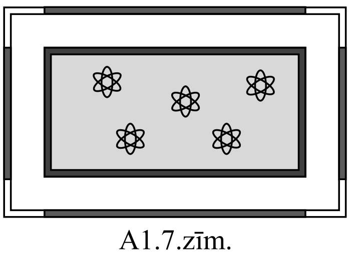
Pelēkās daļas laukumu var aprēķināt kā lielā kvadrāta laukuma un mazā kvadrāta laukuma starpību. Mazā kvadrāta laukums ir $5 \cdot 5 = 25\ cm^2$, bet lielā kvadrāta laukums ir $7 \cdot 7 = 49\ cm^2$. Tad pelēkās daļas laukums ir $49 – 25 = 24\ cm^2$.

**1.4.8. Atbilde:** uz 46. stāvu.

**Risinājums:** Tā kā no rūķīšu mājas 21. stāva var nokļūt milžu mājas 5. stāva apakšā, tad milžu mājas 4 stāvu augstums ir vienāds ar rūķīšu mājas 20 stāvu augstumu jeb milžu mājas viena stāva augstums vienāds ar rūķīšu mājas 5 stāvu augstumu. Zem tiltiņa, kas ved no milžu mājas 10. stāva, atrodas pilni 9 milžu mājas stāvi jeb $9 \cdot 5 = 45$ rūķīšu mājas stāvi. Tātad šis tiltiņš ved uz rūķīšu mājas 46. stāvu.

**1.4.9. Atbilde:** 1 *m*.

**Risinājums:** Iekrāsojot ārējā apmales posmus, kuru garumi vienādi ar iekšējās apmales malām (skat. A1.7. zīm.), redzam, ka atliek 8 vienādi posmi stūros, katrs no tiem ir vienāds ar celiņa platumu un to kopējais garums ir dotie 8 *m*. Tātad katrs no šiem posmiem ir 1 *m* garš, līdz ar to arī celiņa platums ir 1 *m*.



A1.7.zīm.

**1.4.10. Atbilde:** 22 *km*.

**Risinājums:** Attēlotajā maršruta kartē var redzēt, ka noslēpotie attālumi horizontāli abos virzienos ir vienādi, kā arī noslēpotie attālumi vertikāli abos virzienos ir vienādi. Horizontāli vienā virzienā noslēpoti $2\ km + 3\ km = 5\ km$, bet vertikāli katrā virzienā noslēpoti 6 *km*.

Tā kā šādi attālumi veikti divas reizes (pa vienai katrā no virzieniem), tad maršruta kopējais garums ir $(5\ km + 6\ km) \cdot 2 = 22\ km$.

# 2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

## 2.1. PIRMĀ KĀRTA

**2.1.1. Atbilde:** Skat. A2.1. zīm.

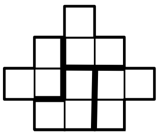
Ievērojam, ka, tā kā katrā rūtiņā jāieraksta viens cipars, apakšējo rindiņu var aizpildīt vienā vienīgā veidā: $8 \cdot 1 : 8 = 1$.

Pirmās kolonnas otrajam skaitlim jābūt skaitļa 4 dalītājam (tātad 1; 2; vai 4), bet trešajam skaitlim – tādam, kas dalās ar 3 (tātad 3; 6 vai 9). Pārbaudot iegūstam, ka vienīgā iespēja, kā aizpildīt kreiso stabiņu, ir $4 : 2 + 6 = 8$.

Tagad varam viennozīmīgi aizpildīt otro un trešo rindiņu, kā arī otro un trešo stabiņu, līdz ar to visas rūtiņas ir aizpildītas.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | · | **2** | − | **3** | = | 5 |
| **:** | | · | | **:** | | + |
| **2** | + | 2 | − | 1 | = | **3** |
| + | | − | | + | | − |
| **6** | **:** | 3 | + | 5 | = | **7** |
| = | | = | | = | | = |
| 8 | · | **1** | **:** | **8** | = | 1 |

A2.1. zīm.

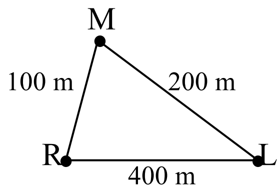


A2.2. zīm.

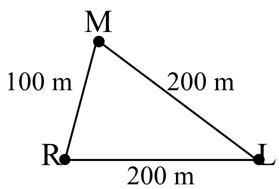
**2.1.2.** Dotā figūra sastāv no 12 rūtiņām. Tā kā visām daļām jābūt vienādām, tad katra no tām sastāv no $12 : 4 = 3$ rūtiņām. Viegli pārliecināties, ka vienīgais veids, kā šo figūru sagriezt 4 vienādās daļās, redzams A2.2. zīm.

**2.1.3.** Apzīmēsim Votivapas ar V, Šilišallas – ar S, Lubilellus – ar L, Rumpellus – ar R, Zimzapus – ar Z. Pēc uzdevuma nosacījumiem vienā koalīcijā kopā nevar darboties Z un V, kā arī S un R. Tātad koalīcijā var apvienoties ne vairāk kā 3 partijas. Iespējamās koalīcijas ir: <u>V+S+L</u> (75%), <u>V+L+R</u> (65%), <u>L+Z+S</u> (55%), L+Z+R (45%), <u>V+S</u> (55%), V+L (50%), V+R (45%), S+L (45%), S+Z (35%), L+R (35%), L+Z (30%), R+Z (25%). Četras no šīm koalīcijām (tās ir pasvītrotas) apvieno vairāk nekā pusi no visiem deputātiem.

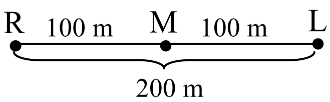
**2.1.4. a)** Ja Maksis un Leo abi būtu teikuši patiesību, tad būtu A2.3. zīm. attēlotā situācija. Taču tā būt nevar, jo trijstūra katru divu malu summai jābūt lielākai nekā trešā mala (*trijstūra nevienādība*). Tātad vai nu Maksis, vai Leo melo.




A2.3. zīm.




A2.4. zīm.




A2.5. zīm.

**b)** Ja patiesību teikuši Maksis un Ričs, iegūstam A2.4. zīm. attēloto situāciju, bet, ja patiesību teikuši Leo un Ričs – A2.5. zīm. attēloto situāciju.

**2.1.5.** Aprēķināsim, cik dažādus kartiņu trijniekus var izveidot no 11 kartiņām. Pirmo kartiņu Zigis var izvēlēties jebkuru no 11 kartiņām; neatkarīgi no tā, kuru kartiņu viņš izvēlējās kā pirmo, otro var izvēlēties jebkuru no atlikušajām 10 kartiņām, bet pēc tam trešo – jebkuru no atlikušajām 9 kartiņām. Tātad kopā ir $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ dažādi veidi, kā var izvēlēties 3 no 11 kartiņām, ja ir svarīga secība, kādā kartiņas ir izvēlētas. Bet, tā kā saskaitāmo secībai nav nozīmes, jānoskaidro, cik no šīm summām *atkārtojas*, t.i., saskaitīti tiek vieni un tie paši skaitļi, tikai citādā secībā.

Ja ir doti 3 dažādi skaitļi, piemēram, $A$, $B$, $C$, tad tos var sakārtot 6 dažādos veidos: $ABC$, $ACB$, $BAC$, $BCA$, $CAB$, $CBA$. Tātad patiesībā no 11 kartiņām var izveidot 165 dažādus kartiņu trijniekus.

Mazākā iespējamā triju kartiņu veidotā summa ir $1 + 2 + 3 = 6$, bet lielākā ir $50 + 49 + 48 = 147$. Tā kā var iegūt arī jebkuru citu summu, kas atrodas starp šiem skaitļiem, tad katra trijnieka summa var pieņemt 142 dažādas vērtības.

Esam ieguvuši, ka šie 165 dažādie kartiņu trijnieki var iegūt 142 dažādas summas vērtības. Tātad noteikti atradīsies tādi divi trijnieki, kas pieņem vienādas vērtības.

## 2.2. OTRĀ KĀRTA

**2.2.1.** Trīs *obligātajās* kaudzītēs kopā ir 6,66 Ls. Katras kaudzītes izveidošanai nepieciešamas vismaz četras monētas:

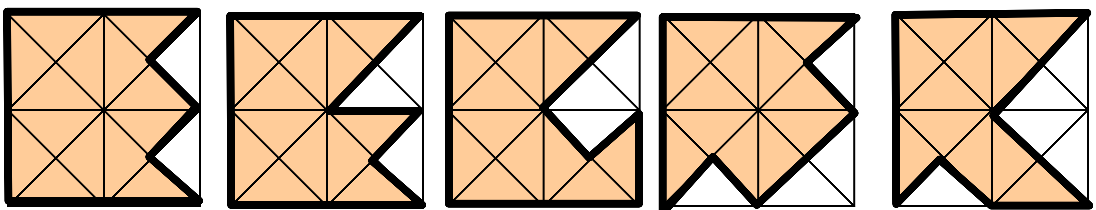
$1{,}32\ Ls = 1\ Ls + 20\ sant. + 10\ sant. + 2\ sant.,$

$2{,}13\ Ls = 2\ Ls + 10\ sant. + 2\ sant. + 1\ sant.,$

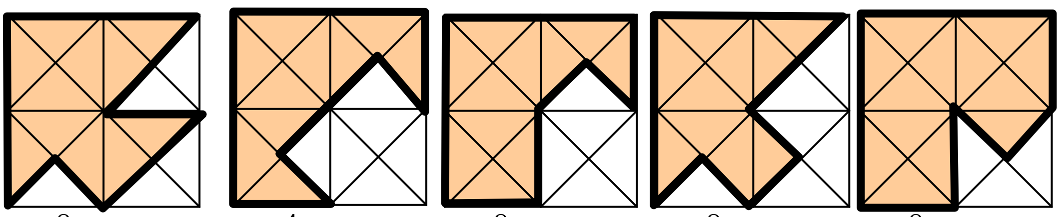
$3{,}21\ Ls = 2\ Ls + 1\ \mathrm{Ls} + 20\ sant. + 1\ sant.$

Taču šādā gadījumā netiek izmantotas monētas 50 *sant.* un 5 *sant.* Tāpēc, lai izveidotu *obligātās* kaudzītes, būs jāizmanto vismaz 14 monētas – vienu 1 *Ls* monētu var aizstāt ar divām 50 *sant.* monētām, un vienu 10 *sant.* monētu – ar divām 5 *sant.* monētām. Vēl sešas monētas Mārtiņš var izvēlēties patvaļīgi, tāpēc viņš ņemt visas 2 *Ls* monētas, tādējādi kopā iegūt 6,66 *Ls* + 6 · 2 *Ls* = **18,66 *Ls***.

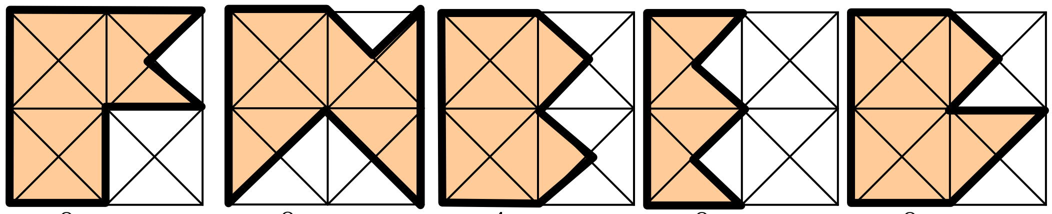
**2.2.2.** Pavisam dotajā režģī var uzzīmēt 56 dažādus septiņstūrus; skat. zīmējumus. Seši no tiem ir simetriski, tos var pagriezt 4 dažādos veidos, vienu septiņstūri dotajā režģī var uzzīmēt 16 veidos, bet pārējos septiņstūrus – 8 veidos. Skaitlis zem katra attēlos redzamā septiņstūra norāda, cik veidos to var uzzīmēt šajā režģī. Piemēram, 8 veidi tiek iegūti vispirms doto figūru attēlojot simetriski vienai no kvadrāta simetrijas asīm, un pēc tam abas iegūtās figūras pagriežot par 90°, 180°, 270°. Ja dotajai figūrai nav nevienas simetrijas ass, visi 8 iegūtie attēli būs dažādi.



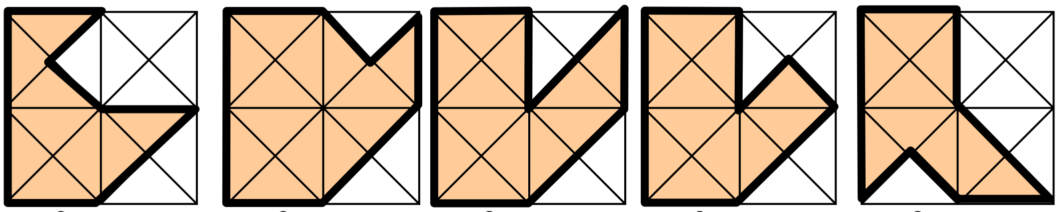
4 8 8 4 8



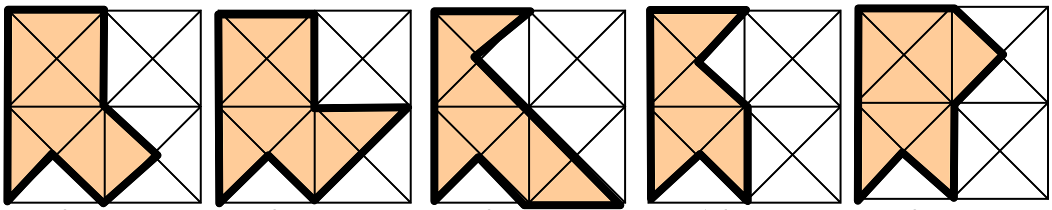
8 4 8 8 8



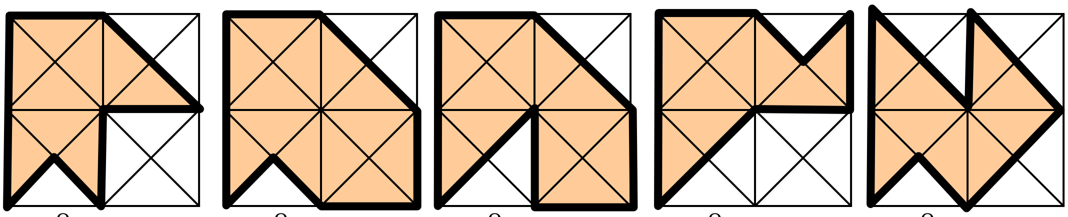
8 8 4 8 8



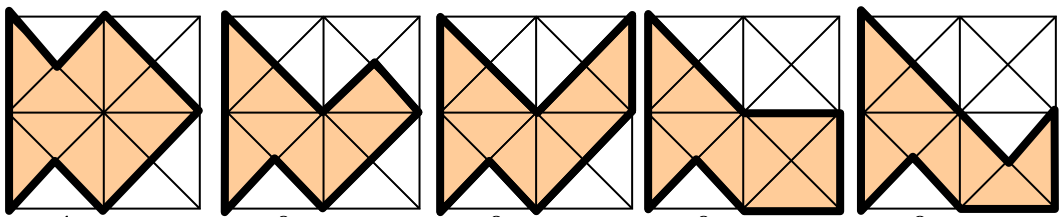
8 8 8 8 8



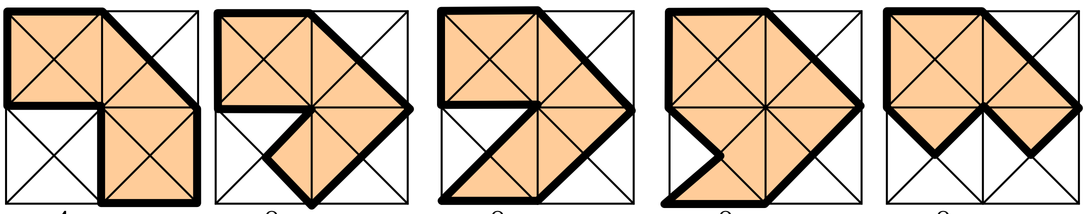
8 8 8 16 8



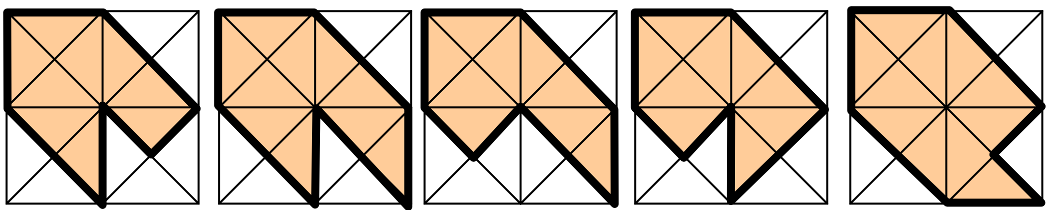
8 8 8 8 8



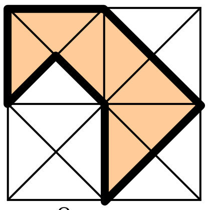
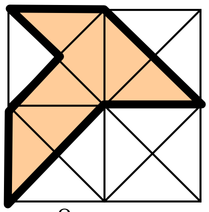
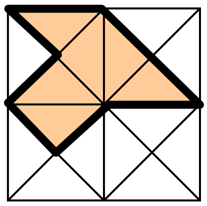
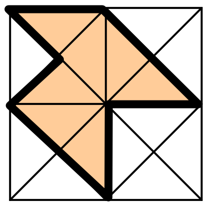
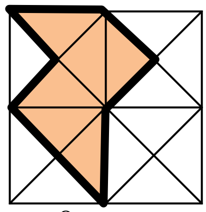
4 8 8 8 8

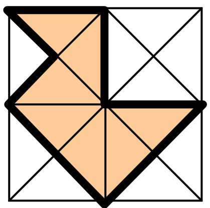
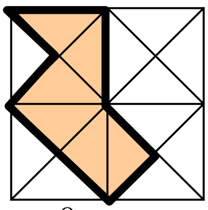
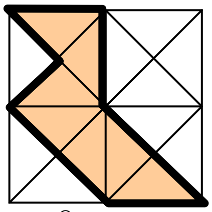


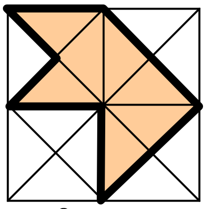
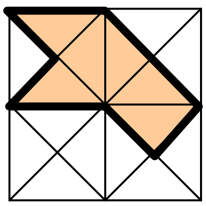
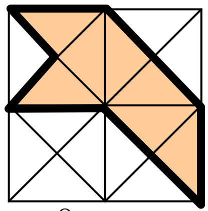
4 8 8 8 8



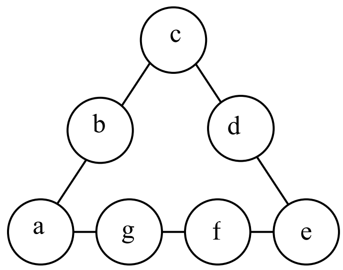
8 8 8 8 8


8

8

8

8

8


8

8

8


8

8

8

**2.2.3.** Apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts A2.6. zīmējumā.



A2.6. zīm.

Ja ar $S$ apzīmējam uz trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summu, tad

$$S = a + b + c = c + d + e = a + g + f + e,$$

$$a + b + c + d + e + f + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

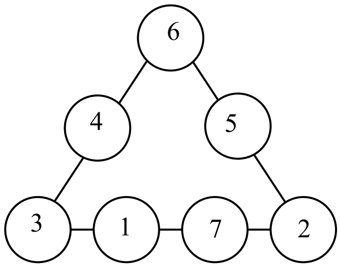
savukārt $3S = (a + b + c + d + e + f + g) + (a + c + e) = 28 + (a + c + e)$.

Tā kā $3S$ dalās ar 3, tad arī $28 + (a + c + e)$ jādalās ar 3. Summas $a + c + e$ mazākā vērtība var būt 6 = 1 + 2 + 3, bet lielākā var būt 18 = 5 + 6 + 7.

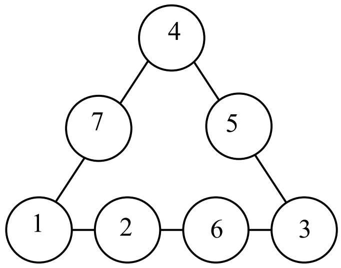
Balstoties uz šiem secinājumiem, tabulā apkoposim iespējamās $S$ vērtības:

| **3*S* = 28 + *a* + *c* + *e*** | ***S*** | ***a* + *c* + *e*** |
|---|---|---|
| 36 | 12 | 8 |
| 39 | 13 | 11 |
| 42 | 14 | 14 |
| 45 | 15 | 17 |

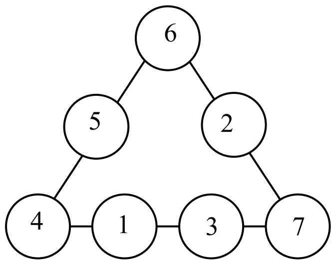
Vērtībām $S = 12$, $S = 13$ un $S = 15$ piemēri doti attiecīgi A2.7., A2.8. un A2.9. zīmējumā. Gadījumā $S = 14$ gan $a + b + c = 14$, gan $a + c + e = 14$, tātad jābūt $b = e$, kas nevar būt.



A2.8. zīm.



A2.7. zīm.



A2.9. zīm.

Tātad uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas var būt **12, 13** vai **15**.

**2.2.4.** Lai iegūtu skaitli ar pēc iespējas lielāku garumu, nepieciešams izmantot pēc iespējas mazākus pirmreizinātājus. Mazākais pirmskaitlis ir 2, tāpēc meklēsim pēc iespējas lielāku skaitli, kura visi pirmreizinātāji ir pirmskaitlis 2.

Skaitlim $8192 = 2^{13}$ *garums* ir 13 (palielinot pirmreizinātāju skaitu, iegūsim skaitli kas jau ir piecciparu skaitlis, t.i., $2^{14} > 9999$). Ja kādu no šiem pirmreizinājiem aizstāsim ar 3 vai lielāku pirmskaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12} \cdot 3 = 12288$ – vismaz piecciparu skaitlis. Tātad četrciparu skaitlim **lielākais *garums* ir 13**, un ir tikai **viens tāds skaitlis**.

**2.2.5. Atbilde: a)** 78; **b)** 50; **c)** 100 bumbiņas.

**Risinājums: a)** Paņemot 77 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas visas 30 zilās, visas 30 dzeltenās, visas 10 baltās un melnās bumbiņas un tikai 7 sarkanās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 8 sarkanās bumbiņas, no maisa jāizvelk 78 bumbiņas.

**b)** Ja tiks izvilktas 49 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas 13 zilās, 13 sarkanās, 13 dzeltenās un visas 10 baltās un melnās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 14 bumbiņas vienā krāsā, no maisa jāpaņem 50 bumbiņas.

**c)** Nav zināms, cik tieši melnās bumbiņas ir maisā: varbūt ir tikai viena. Tāpēc paņemot mazāk nekā 100 bumbiņas, var gadīties, ka vienīgā melnā bumbiņa palikusi maisā. Tāpēc, lai noteikti būtu izvilkta arī melnā bumbiņa, no maisa jāizņem visas 100 bumbiņas.

## 2.3. TREŠĀ KĀRTA

**2.3.1.** Ja divciparu skaitlim pieskaitot viencipara skaitli tiek iegūts trīsciparu skaitlis, tad summas simtu skaits ir H = 1, bet divciparu saskaitāmajam jābūt vismaz 91, tātad A = 9. Līdz ar to vienīgais atrisinājums ir 91 + 9 = 100.

**2.3.2.** Apzīmēsim ģimenes locekļu vecumus attiecīgi ar A, B, C, D un E. Zināms, ka $A + B + C + D + E = 88$, $A + B = 39$, $B + C = 19$, $C + D = 44$, $D + E = 38$.

Tad $E = (A + B + C + D + E) - (A + B) - (C + D) = 88 - 39 - 44 = 5$;

$D = (D + E) - E = 33$;

$C = (C + D) - D = 11$;

$B = (B + C) - C = 8$;

$A = (A + B) - B = 31$.

Tātad Annai ir 31 gads, Beātei – 8 gadi, Centim – 11 gadi, Didzim – 33 gadi un Edgaram – 5 gadi.

**2.3.3.** No dotajiem stienīšiem var izveidot tikai viena veida trijstūri – izmantojot stienīšus 3 *dm*, 5 *dm* un 7 *dm*. Citos gadījumos neizpildās trijstūra nevienādība – garākā mala ir garāka vai vienāda ar īsāko malu summu.

Četrstūrus var izveidot no četriem stienīšu komplektiem: 1 *dm*, 2 *dm*, 3 *dm*, 5 *dm*; 1 *dm*, 2 *dm*, 5 *dm*, 7 *dm*; 1 *dm*, 3 *dm*, 5 *dm*, 7 *dm*; 2 *dm*, 3 *dm*, 5 *dm*, 7 *dm* (tā kā 1 *dm* + 2 *dm* + 3 *dm* < 7 *dm*, no šiem stienīšiem izveidot četrstūri nevar).

Katra komplekta stienīšus var sakārtot 3 dažādos veidos (piem., 1 2 3 5; 1 3 2 5; 1 3 5 2), bet no katra sakārtojuma, mainot leņķus, var iegūt bezgalīgi daudz dažādus četrstūrus (piem., savienojot šos stienīšus galapunktos ar kustīgu savienojumu vai uzverot uz aukliņas četrus attiecīgā garuma salmiņus un aukliņas galus sasienot kopā, iegūstam kustīgu četrstūri, kuram brīvi varam mainīt leņķus; savukārt līdzīgā veidā savienojot trīs stienīšus, iegūstam vienu noteiktu trijstūri).

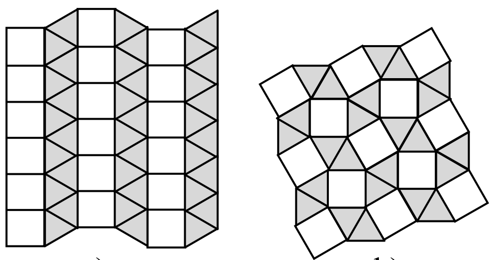
Izmantojot visu piecu garumu stienīšus varam izveidot piecstūri. Pavisam šos stienīšus var sakārtot 12 dažādos veidos. (Piecus stienīšus rindā var sakārtot $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ veidos, taču, izveidojot slēgtu lauztu līniju, ir vienalga, ar kuru stienīti sāk skaitīt, tāpēc no piecām virknēm var iegūt vienu un to pašu piecstūri, piem., no virknēm 1 2 3 4 5; 2 3 4 5 1; 3 4 5 1 2; 4 5 1 2 3; 5 1 2 3 4, savienojot to galapunktus, tiek iegūts viens un tas pats daudzstūris. Arī uzskaitot daudzstūra malas pretējā virzienā netiek iegūts jauns daudzstūris, t.i., piem., piecstūri, kuru malas ir izvietotas secībā 1 2 3 4 5 un 1 5 4 3 2, ir vienādi, ja atbilstošie leņķi ir vienādi. Tātad piecus stienīšus var sakārtot $120 : 5 : 2 = 12$ dažādos veidos.). Līdzīgi kā četrstūru gadījumā, arī no katra piecu stienīšu sakārtojuma, mainot leņķus, var iegūt bezgalīgi daudz piecstūrus.

**2.3.4. Atbildes: a)** 132 biļetes; **b)** nē, tā nevar apgalvot.

**a)** Virzienā Rīga – Carnikava no Rīgas var nopirkt 11 dažādas biļetes, no Zemitāniem – 10 dažādas biļetes, …, no Garupes – 1 biļeti, tātad pavisam kopā vienā virzienā ir $11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66$ dažādas biļetes, bet abos virzienos kopā ir $2 \cdot 66 = 132$ dažādas biļetes.

**b)** Tā nevar apgalvot. Piemēram, posmā Ziemeļblāzma – Vecdaugava vilcienā var atrasties pasažieri, kas iekāpuši kādā no iepriekšējām sešām pieturām un brauc līdz kādai no nākamajām sešām pieturām, tātad tiem var būt pavisam $6 \cdot 6 = 36$ dažādas biļetes. Ja šajā posmā vilcienā ir 35 pasažieri, var gadīties, ka viņiem visiem ir dažādas biļetes.

**2.3.5.** Skat., piem., A2.10. a) un b) zīmējumus. Katru no šiem rakstiem var turpināt, noklājot visu kvadrātu 20 *cm* × 20 *cm*.



a) b)

A2.10. zīm.

## 2.4. CETURTĀ KĀRTA

**2.4.1. Atbildes: a)** piemēram, 102; 204; 306; 816; 1020 u.c.

**b)** piemēram, 625; 3125; 9375; 6250 u.c.

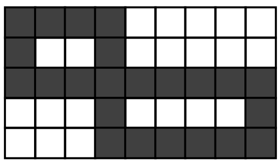
**Risinājums.** Meklējamo skaitli apzīmēsim ar $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \quad nulles} + B$, kur $a$ ir skaitļa pirmais cipars, bet $B$ ir skaitlis, kas paliek, nosvītrojot pirmo ciparu $a$ (pieņemsim, ka tam ir $k$ cipari).

Tad **a)** gadījumā ir spēkā vienādība $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \quad nulles} + B = 51 \cdot B$ jeb $a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \quad nulles} = 50 \cdot B$.

Tātad $B$ ir jābūt pāra skaitlim, bet $a$ var būt jebkurš cipars no 1 līdz 9. Piemēram, ja $B$ vērtības 2 (tad meklētais skaitlis ir 102), 4 (204), 6 (306), 8 (408), 10 (510), 12 (612), 14 (714), 16 (816), 18 (918), kā arī visi šie skaitļi, pareizināti ar 10, 100, 1000 u.t.t.

**b)** gadījumā jāizpildās vienādībai $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \quad nulles} + B = 25 \cdot B$ jeb $a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \quad nulles} = 24 \cdot B = 3 \cdot 8 \cdot B$. Tā kā skaitlis 10…0 nedalās ar 3, tad $a$ jādalās ar 3 (tātad $a$ var būt 3, 6 vai 9), bet $B$ jādalās ar 5). Ja $a = 3$, tad $B = 125$ un meklējamais skaitlis ir 3125 (kā arī 31250, 312500 u.t.t.), ja $a = 6$, tad $B = 25$ un meklējamais skaitlis ir 625 (kā arī 6250, 62500 u.t.t.), ja $a = 9$, tad $B = 375$ un meklējamais skaitlis ir 9375 (kā arī 93750, 937500 u.t.t.).

**2.4.2. a)** Jā, var, skat., piem., A2.11. zīm.



A2.11. zīm.

**b)** Nē, nevar. Pieņemsi, ka izdevies nokrāsot 23 rūtiņas, lai katrai būtu nepāra skaits kaimiņu. Saskaitīsim **visas rūtiņu malas, kas kopīgas divām rūtiņām**, ieskaitot katru malu tik reizes, cik rūtiņām tā pieder. Tā kā ir 23 (nepāra skaits) rūtiņu, un katrai ir nepāra skaits kaimiņu (tātad no katras rūtiņas tiek ieskaitīts nepāra skaits malu), tad kopā iegūstam nepāra skaitu. Taču katra skaitāmā mala ir kopīga tieši divām kaimiņu rūtiņām, tātad ir ieskaitīta tieši divas reizes. Tāpēc to kopējam skaitam jābūt pāra skaitlim. Bet viens un tas skaits nevar būt reizē pāra un nepāra skaitlis, tātad tāda situācija nav iespējama.

**2.4.3. a)** Sadalīsim visus izvēlētos skaitļus septiņās grupās:

1. grupā – skaitļi, kas dalās ar 7;
2. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 1, dalot ar 7;
3. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 2, dalot ar 7;
4. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 3, dalot ar 7;
5. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 4, dalot ar 7;
6. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 5, dalot ar 7;
7. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 6, dalot ar 7.

Ja pieņemsim, ka no dotajiem skaitļiem katrā grupā ir ne vairāk kā 14 skaitļi, tad kopā būtu ne vairāk kā $7 \cdot 14 = 98 < 100$ skaitļi; tātad kādā no grupā būs vismaz 15 skaitļi. Tie tad arī der par meklētajiem: ja divi skaitļi dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tad to starpība dalās ar 7.

**b)** Var gadīties, ka šādus skaitļus izvēlēties nevar; piemēram, ja doti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100. Starp šiem skaitļiem nav 16 tādu, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tātad nevarēs arī atrast 16 tādus, kam katru divu skaitļu starpība dalītos ar 7.

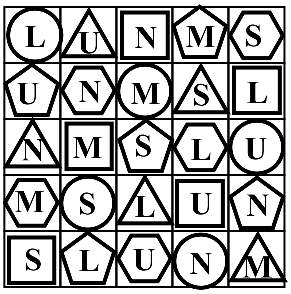
**2.4.4.** Apzīmēsim komandas dalībnieku skaitu ar $n$, savukārt ar $x$ apzīmēsim, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, līdz stafete beidzās.

Tad $75 \cdot n = 330 \cdot x$ jeb, vienādības abas puses izdalot ar 25, iegūstam $5 \cdot n = 22 \cdot x$, turklāt $x$ ir mazākais no skaitļiem, ar kuru šī vienādība ir patiesa, tāpēc $x = 5$ un $n = 22$. Tātad komandā ir 22 dalībnieki, pavisam kopā viņi noskrēja 330 m · 5= 1650 m = 1 km 650 m.

Visi stafetes kociņa nodošanas punkti ir dažādi, jo pretējā gadījumā finišs tiktu sasniegts jau ātrāk, tātad pavisam ir 22 šādi punkti (ieskaitot startu/finišu), pie tam tie ir izvietoti pa stadionu vienādos attālumos ik pēc 330 m : 22 = 15 m.

**2.4.5.** Skat., piem., A2.12. zīm.

Pirmajā rindā rūtiņu krāsas no kreisās puses ir: dzeltena (*dz*), zila (*zi*), zaļa (*za*), sarkana (*s*), oranža (*o*); otrajā rindā: *o*, *dz*, *zi*, *za*, *s*; trešajā rindā: *s*, *o*, *dz*, *zi*, *za*; ceturtajā rindā: *za*, *s*, *o*, *dz*, *zi*; piektajā rindā: *zi*, *za*, *s*, *o*, *dz*.




A2.12. zīm.

## 2.5. PIEKTĀ KĀRTA

**2.5.1. Atbilde:** 6 dienas.

No sestdienas līdz otrdienai pa vidu ir divas dienas (svētdiena un pirmdiena), bet no otrdienas līdz sestdienai – trīs dienas (trešdiena, ceturtdiena un piektdiena). Lai iespējami daudz dienas pēc kārtas Brunis drīkstētu spēlēt datorspēles, dienās, kas nav otrdiena vai sestdiena, jābūt nepāra datumiem.

Tā kā viena mēneša ietvaros datumi mainās pamīšus nepāra – pāra – pāra…, tad divas dienas pēc kārtas nepāra datumi var būt tikai tad, kad mainās mēneši (piem., viena mēneša 31. datums un nākamā mēneša 1. datums); trīs dienas pēc kārtas nepāra datumi nevar būt. Tātad lielākais secīgu *labo* dienu skaits būs sešas.

Viens no iespējamiem piemēriem ir šāds: **29**. datums, **sestdiena**, 30. datums, svētdiena, **31**. datums, pirmdiena, **1**. datums, **otrdiena,** 2. datums, trešdiena, **3**. datums. (Iepriekšējā diena ir ceturtdiena, 28. datums un nākamā diena ir ceturtdiena, 4. datums – nav *labās* dienas.)

**2.5.2.** Uzdevumā aprakstītajā veidā sadalot taisnstūri, mazākā iegūta kvadrāta malas garums būs vienāds ar sākotnējā taisnstūra malu garumu lielāko kopīgo dalītāju (dotais process ilustrē Eiklīda algoritmu lielākā kopīgā dalītāja atrašanu; ar to vari iepazīties patstāvīgi mācību vai uzziņu grāmatās, internetā u.c.). Tātad mazākā iegūtā kvadrāta malas garums ir $LKD(141;\,324) = 3\ cm$.

No taisnstūra 141 $cm \times$ 324 $cm$ var nogriezt **2 kvadrātus** 141 $cm \times$ 141 $cm$, paliek taisnstūris 141 $cm \times$ 42 $cm$. No tā var nogriezt **3 kvadrātus** 42 $cm \times$ 42 $cm$, paliek taisnstūris 42 $cm \times$ 15 $cm$. No tā savukārt var nogriezt **2 kvadrātus** 15 $cm \times$ 15 $cm$, paliek taisnstūris 15 $cm \times$ 12 $cm$. No nogriežot **1 kvadrātu** 12 $cm \times$ 12 $cm$, paliek taisnstūris 12 $cm \times$ 3 $cm$, ko var sadalīt **4 kvadrātos** 3 $cm \times$ 3 $cm$. Tātad pavisam dalījumā ir iegūti **12 kvadrāti**.

**2.5.3.** Tā kā pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu, tad līdzenu posmu garums neietekmē to, kurš finišēs pirmais, tāpēc to var neņemt vērā. Pieņemsim, ka noslēpotajā maršrutā $a$ km ved kalnā augšup, bet $b$ km – no kalna lejā.

Izmantojot formulu *ceļš* = *ātrums* · *laiks*, izteiksim, cik ilgā laikā maršruta *slīpos* posmus veica mazdēls: $t_m = \frac{a}{4} + \frac{b}{20}$ un vectēvs: $t_v = \frac{a}{6} + \frac{b}{8}$.

Ja pirmais finišēja mazdēls, tad $t_m < t_v$, no kurienes iegūstam nevienādību $\frac{a}{4} + \frac{b}{20} < \frac{a}{6} + \frac{b}{8}$ un pakāpeniski to vienkāršojam:

$$\frac{1}{4}a - \frac{1}{6}a < \frac{1}{8}b - \frac{1}{20}b \Rightarrow$$

$$\frac{1}{12}a < \frac{3}{40}b \Rightarrow$$

$$a < \frac{36}{40}b < b$$, tātad nobraucieni no kalna bija vairāk nekā augšup kalnā.

Ja pirmais finišēja vectēvs, tad $t_m > t_v$ jeb $\frac{a}{4} + \frac{b}{20} > \frac{a}{6} + \frac{b}{8}$; atkal vienkāršojam iegūto nevienādību:

$$\frac{1}{12}a > \frac{3}{40}b$$

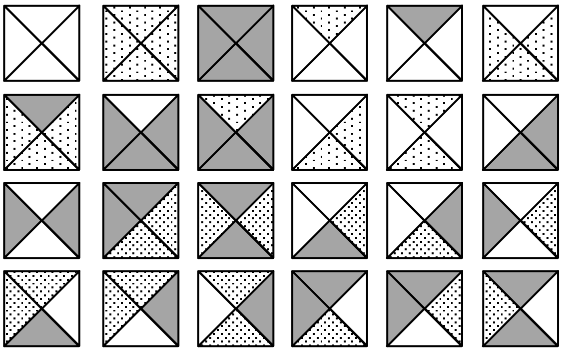
$$a > \frac{36}{40}b = \frac{9}{10}b.$$

Šajā gadījumā nevar viennozīmīgi pateikt, vai $a > b$, $a = b$ vai arī $a < b$, jo iegūtā nevienādība ir patiesa ar dažādām $a$ un $b$ vērtībām, piem., $a = 11$ km **>** $b = 10$ km, $a = 10$ km **=** $b = 10$ km, kā arī $a = 9{,}5$ km **<** $b = 10$ km.

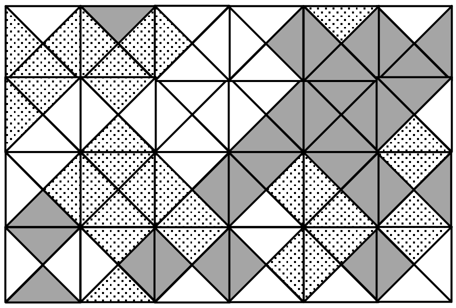
**2.5.4.** Noteiksim, cik veidos, lasot atbilstoši dotajam principam, var nonākt katrā rūtiņā (skat., A2.13. zīm.).

Lai aizpildītu tabulu, pieņemam, ka katrā rūtiņā ar burtu K varam nonākt vienā veidā, bet pārējās rūtiņās var nonākt tikai no rūtiņas pa kreisi vai no rūtiņas augšā, tātad ir jāsaskaita abās šajās rūtiņas ierakstītos skaitļus. Tā kā vārds KARTUPELIS var beigties jebkurā rūtiņā ar burtu S, lai noteiktu, cik veidos to var izlasīt, jāsaskaita, cik veidos var nonākt katrā rūtiņā ar burtu S, t.i., 1 + 10 + 46 + 130 + 256 + 382 + 466 + 502 + 511 + 512 = 2816 veidos.

**2.5.5.** Pavisam ir 24 dažādi *trīskrāsu kvadrātdomino*, skat. A2.14. zīm. Piemēru, kā no tiem var salikt taisnstūri, skat. A2.15. zīm.; tā kā grāmata tiek drukāta melnbalta, zīmējumos dzeltenā krāsa aizstāta ar punktējumu, bet sarkanā krāsa – ar pelēku krāsu.



A2.14. zīm.

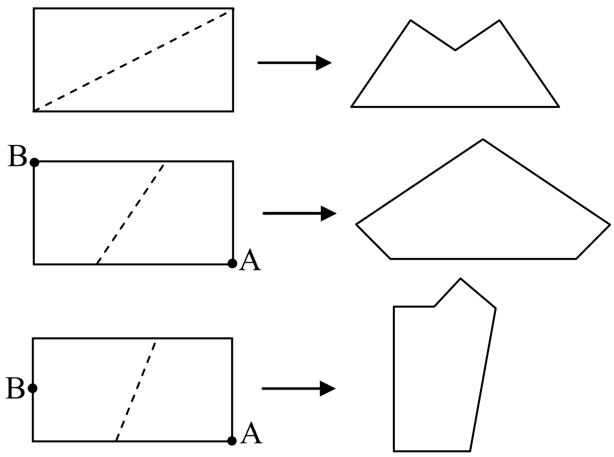


A2.15. zīm.

# 3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

## 3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

**3.1.1.** Uzdevumā aprakstītajā veidā var iegūt visas zīmējumā redzamās figūras (skat. A3.1. zīm.; punkts *A* tiek savienots ar punktu *B*).




A3.1.zīm.

**3.1.2.** Tā kā $0{,}33 = \frac{33}{100} < \frac{m}{n}$, tad $100m > 33n$. Tā kā $n$ – naturāls skaitlis, $100m \geq 33n + 1$.

Līdzīgi arī no $\frac{m}{n} < \frac{1}{3}$ iegūstam, ka $n > 3m$ un $n \geq 3m + 1$. Ievietojam šo $n$ novērtējumu pirmās rindiņas nevienādībā:

$$100m \geq 33(3m + 1) + 1 = 99m + 33 + 1 = 99m + 34.$$

No šejienes $m \geq 34$. Tāpēc $n \geq 3 \cdot 34 + 1 = 103$.

Tā kā $\frac{33}{100} < \frac{34}{103} < \frac{1}{3}$. Tātad uzdevumā prasītais mazākais naturālais $n$ ir 103, kam atbilstošais ***m* = 34**.

**3.1.3.** Apzīmēsim Līgas bērnu vecumus ar $a+1$, $b+1$, $c+1$ un $d+1$. Tā kā viņu vecumi ir dažādi veseli skaitļi no 2 līdz 16, tad varam pieņemt, ka

$$1 \leq a < b < c < d \leq 15.$$

Ievērojam, ka $b \leq 13$, tātad $b - a \leq 12$.

Informāciju par bērnu vecumiem pirms gada var pierakstīt ar vienādojumu $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Savukārt informāciju par bērnu vecumiem pēc gada var pierakstīt kā vienādojumu $(d+2)^2 + (a+2)^2 = (b+2)^2 + (c+2)^2$, kuram atverot iekavas iegūstam $d^2 + 4d + 4 + a^2 + 4a + 4 = b^2 + 4b + 4 + c^2 + 4c + 4$. Atņemot no šī vienādojuma pirmo vienādojumu, kas apraksta bērnu vecumus pirms gada, iegūstam $4d + 4a + \cancel{8} + a^2 = 4b + 4c + \cancel{8} - a^2$.

Izsakām no šīs vienādības $a^2$: $2a^2 = 4(b + c - a - d)$, tātad $a^2 = 2(b + c - a - d)$. Iegūstam, ka skaitļa $a$ kvadrāts ir pāra skaitlis, tātad arī pašam skaitlim $a$ jābūt pāra skaitlim. Turklāt tā kā $d > c$, tad $c - d < 0$. Tāpēc iegūto izteiksmi varam uzrakstīt $a^2 = 2(b - a + (c - d)) < 2(b - a) < 24$.

Tātad ir tikai divas iespējamās *a* vērtības, t.i., vai nu $a = 2$ vai $a = 4$.

Pārbaudīsim katru no šīm vērtībām:

- Ja $a = 4$, tad no tā, ka $a^2 < 2(b - a)$ iegūstam, ka $2b > a^2 + 2a = 24$, tātad $b > 12$. Tad noteikti $b = 13$, $c = 14$, $d = 15$. Bet šādas bērnu vecumu vērtības neapmierina nevienu no dotajām vecumu sakarībām, tātad $a \neq 4$.
- Ja $a = 2$, tad $b + c - d = 4$. Izsakām $d = b + c - 4$; šo un *a* vērtību ievietojam pirmajā vienādojumā, kas izsaka bērnu vecumu sakarību pirms gada un pakāpeniski iegūstam:

  $$\cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 16 + 2bc - 8b - 8c = 4 + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}$$

  $$2bc - 8b - 8c + 12 = 0 \quad |:2$$

  $$bc - 4b - 4c + 6 + 10 - 10 = 0$$

  $$b(c - 4) - 4(c - 4) = 10$$

  $$(b - 4)(c - 4) = 10$$

  Tā kā $b - 4$ un $c - 4$ ir veseli skaitļi no $-2$ līdz 10, tad skaitli 10 var izteikt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tikai divos veidos: $10 = 10 \cdot 1$ un $10 = 5 \cdot 2$. Tā kā $c > b$ un $d = b + c - 4$, ir divas iespējas:

  $c = 14$, $b = 5$ un $d = 15$ vai

  $c = 9$, $b = 6$, $d = 11$.

Abas šīs iespējas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad ir divi iespējamie gadījumi, kādi var būt Līgas bērnu vecumi: $(3, 6, 15, 16)$ un $(3, 7, 10, 12)$.

**3.1.4.** Visu trīs nezināmo skaitļu summa ir 22. Ja mēs pie pirmā skaitļa pieskaitītu 0,5, tad kopējā visu skaitļu summa arī palielinātos par 0,5. Savukārt, ja no otrā skaitļa atņemtu 1,5, tad summa arī samazinātos par 1,5. Tātad, izdarot minētās darbības ar skaitļiem, visu trīs skaitļu summa būtu $22 + 0{,}5 - 1{,}5 =$ **21**.

Tagad uzdevuma noteikumus varētu formulēt šādi: „Trīs skaitļu summa vienāda ar 21, pirmie divi skaitļi ir vienādi, trešais ir 2,5 reizes mazāks nekā pārējie skaitļi."

No šejienes seko, ka trešais skaitlis ir $2 \cdot 2{,}5 = 5$ reizes mazāks nekā pirmā un otrā skaitļa summa (t.i., pirmā un otrā skaitļa summas un trešā skaitļa attiecība ir 5:1), tātad trešais skaitlis ir $21 : 6 = 3{,}5$. Tad pirmais un otrais izmainītais skaitlis ir $3{,}5 \cdot 2{,}5 = 8{,}75$.

Tātad sākotnējie skaitļi ir šādi:

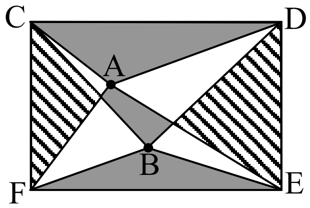
- pirmais skaitlis: $8{,}75 - 0{,}5 =$ **8,25**;
- otrais skaitlis ir $8{,}75 + 1{,}5 =$ **10,25**;
- trešais skaitlis ir **3,5**.

*Piezīme.* Uzdevuma formulējumu varētu pierakstīt arī kā vienādojumu $(x - 0{,}5) + (x + 1{,}5) + x : 2{,}5 = 22$, kuru atrisinot iegūst prasītos skaitļus.

**3.1.5.** Ievērojam, ka trijstūru *CAF*, *DAE*, *CBF* un *DBE* (skat. A3.2.zīm.) laukumu summa vienāda ar taisnstūra *CDEF* laukumu, jo gan pirmo divu trijstūru, gan otro divu trijstūru laukumu summas vienādas ar pusi no taisnstūra laukuma.

No otras puses, visu augšminēto trijstūru laukumu summa vienāda ar balto figūru un divkāršotu iesvītroto figūru laukumu summu.

Analoģiski trijstūru *CAD*, *FAE*, *CBD* un *FBE* laukumu summa vienāda gan ar visa taisnstūra laukumu, gan arī ar balto figūru un divkāršotu iekrāsoto figūru laukumu summu. No šiem apgalvojumiem arī izriet uzdevumā prasītais.



A3.2.zīm.

**3.1.6.** Punkta *A* koordinātas var pierakstīt kā $(a; 2a+3)$ un punkta *B* koordinātas var pierakstīt kā $(b; b+2)$. Tad nogriežņa *AB* viduspunkta *M* koordinātas var pierakstīt kā $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(2a+3)+(b+2)}{2}\right)$. Tā kā punkta *M* atbilstošās koordinātas ir zināmas, varam sastādīt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a+3)+(b+2)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}.$$

Tātad punktu *A* un *B* koordinātas ir attiecīgi $A(5; 13)$ un $B(3; 5)$.

Taisnes, kas iet caur šiem punktiem, vienādojums vispārīgā formā ir $y = kx + m$, ievietojot attiecīgās punktu *A* un *B* koordinātas, atkal iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 13 = 5k + m \\ 5 = 3k + m \end{cases},$$

kuras atrisinājums ir $\begin{cases} k = 4 \\ m = -7 \end{cases}$.

Tātad meklētās funkcijas vienādojums ir $y = 4x - 7$.

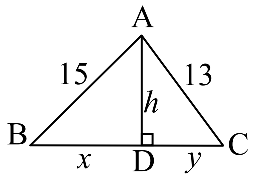
**3.1.7.** Tā kā kartupeļu lauka platība ir 10 800 $m^2$, tad Ansis vienā stundā norok 3600 $m^2$, Jānis – 2700 $m^2$, Kristaps – 1800 $m^2$.

Apzīmēsim ar $t$ laiku stundās, kādā visu lauku noraktu visi 3 kaimiņi kopā. Tad $3600t + 2700t + 1800t = 10800$, no kurienes iegūstam $t = \frac{4}{3}$. Tātad visu lauku kaimiņi noraktu 80 minūtēs. Tātad puse lauka jeb 5400 $m^2$ būs norakta 40 minūtēs.

Ar $z$ apzīmējam laiku stundās, kas nepieciešams Ansim un Kristapam, lai kopā noraktu atlikušos 5400 $m^2$ lauka. Tad $3600z + 1800z = 5400$, no kurienes $z = 1$.

Tātad kopējais laiks, kas nepieciešams visu kartupeļu novākšanai, ir $40 + 60 = 100$ minūtes.

**3.1.8.** Apzīmējam $AD = h$, $BD = x$, $CD = y$ (skat. A3.3. zīm.).



A3.3.zīm.

Tā kā dots, ka $S_{\Delta ADC} = 30$, tad $30 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot y$ un

$$h \cdot y = 60 \qquad (1)$$

No Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim $ADC$ seko

$$h^2 + y^2 = 169 \qquad (2)$$

Saskaitot divkāršotu vienādojumu (1) ar vienādojumu (2), pakāpeniski iegūstam

$$2hy + h^2 + y^2 = 120 + 169$$

$$h^2 + y^2 + 2hy = 289$$

$$(h + y)^2 = 289$$

$$|h + y| = 17$$

Tā kā $h$ un $y$ ir malu garumi, tad $h + y = 17$.

Līdzīgā veidā no vienādojuma (2) atņemot divkāršotu vienādojumu (1), iegūstam

$$h^2 + y^2 - 2hy = 169 - 120$$

$$h^2 + y^2 - 2hy = 49$$

$$(h - y)^2 = 49$$

$$|h - y| = 7$$

Iegūstam divas nevienādību sistēmas: $\begin{cases} h + y = 17 \\ h - y = -7 \end{cases}$ un $\begin{cases} h + y = 17 \\ h - y = 7 \end{cases}$.

Atrisinot pirmo sistēmu, iegūstam $h = 5$ un $y = 12$. Ja $h = 5$, tad no Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim $ABD$ seko, ka $x^2 = 225 - 25 = 200$, tātad $x$ ir iracionāls skaitlis un tāpēc arī laukums trijstūrim $ABC$ arī ir iracionāls skaitlis. Tātad šī $h$ vērtība neder par dotā uzdevuma atrisinājumu.

Atrisinot otro sistēmu, iegūstam $h = 12$ un $y = 5$. Ja $h = 12$, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka $x^2 = 225 - 144 = 81$. Tā kā $x$ ir trijstūra malas garums, tad tas ir pozitīvs skaitlis, tāpēc $x = 9$. Tātad $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (9 + 5) \cdot 12 = 84$ cm$^2$.

**3.1.9.** Sākumā pierādīsim, ka tad, ja $n$ ir patvaļīgs pāra skaitlis, vienmēr uzvar pirmais spēlētājs, t.i., Dace. Patiešām, ar pirmo gājienu viņa uzliek savu kauliņu uz divām vidējām spēles galda rūtiņām, tādējādi sadalot spēles galdus divās „pusēs”. Tālāk savus gājienus Dace veic simetriski Anda gājieniem attiecībā pret spēles galda centru. Tādā veidā, ja Andis var veikt gājienu, tad otrā galdiņa „pusē” Dace arī var uzlikt savu spēles kauliņu.

Tāpēc **a)**, **c)** un **d)** gadījumā uzvar Dace.

Apskatīsim **b)** gadījumu, t.i., ja $n = 9$. Pierādīsim, ka šajā gadījumā uzvar Andis.

Apzīmēsim spēles galda rūtiņas sākot no kreisās puses ar $x_1$, $x_2$, ..., $x_9$ (skat. A3.4. zīm.).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |

A3.4.zīm.

Apskatīsim vairākus gadījumus:

- Pieņemsim, ka Dace ar savu pirmo gājienu uzlikusi kauliņu uz $x_1$ un $x_2$. Tad atliek spēles laukums ar izmēru $7\times1$, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis. Ja viņš savu kauliņu novieto uz $x_3$ un $x_4$ (vai arī uz $x_8$ un $x_9$ – šis gadījums apskatāms analoģiski), tad atliek spēles laukums ar izmēru $5\times1$, turklāt nākamā gājienu veic Dace. Viegli pamatot, ka uz šāda izmēra laukuma vienmēr uzvar spēlētājs, kas savu gājienu izdara otrais. Tātad uzvar Andis.
- Pieņemsim, ka Dace savu kauliņu sākumā novieto uz $x_2$ un $x_3$. Pa kreisi no šī kauliņa nevar novietot nevienu kauliņu, bet pa labi ir spēles laukums ar izmēru $6\times1$, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis; kā jau mēs iepriekš apskatījām, tad, ja galdiņa garums ir pāra skaitlis, vienmēr uzvar spēlētājs, kas pirmais veic gājienu, šajā gadījumā – Andis.
- Pieņemsim, ka Dace savu pirmo spēles kauliņu novieto uz $x_3$ un $x_4$. Pa kreisi paliek vieta, kur uzlikt tieši vienu kauliņu, bet pa labi – spēles galdiņš ar izmēru $5\times1$, bet uz šāda laukuma uzvar spēlētājs, kas otrais veic gājienu. Tātad, ja Andis savu kauliņu novieto, piemēram, uz $x_1$ un $x_2$, tad Dace pirmā izdara gājienu uz atlikušā $5\times1$ lauka, tātad atkal uzvar Andis.
- Visbeidzot pieņemsim, ka Dace pirmo kauliņu novieto uz $x_4$ un $x_5$ (pārējie Daces sākuma gājieni ir simetriski šim un iepriekš apskatītajiem gadījumiem). Tad pa kreisi atliek trīs rūtiņas, bet uz tām var nolikt tikai vienu spēles kauliņu. Pa labi no Daces novietotā kauliņa ir spēles laukums ar izmēru $4\times1$. Ja Andis novieto savu spēles kauliņu uz $x_6$ un $x_7$ vai $x_8$ un $x_9$, tad uz spēles galda vēl var novietot tieši divus kauliņus. Tā kā Dace veic nākamo gājienu, tad pēc tam paliks vieta, kur novietot tikai vienu – Anda – kauliņu.

Esam apskatījuši visus iespējamos variantus, kā Dace var sākt spēli, ja $n = 9$; tātad varam secināt, ka jebkurā gadījumā uzvar Andis.

**3.1.10.** No uzdevuma nosacījumiem izriet: ja $A$ un $B$ ir draugi, tad jebkurš no pārējiem valsts iedzīvotājiem ir vai nu viņu kopīgs draugs, vai arī kopīgs ienaidnieks; pretējā gadījumā viņi visi trīs nevarētu salabt.

Apskatīsim visus $A$ draugus. No iepriekšminētā apgalvojuma secinām, ka viņi visi draudzējas arī savā starpā un ir ienaidnieki ar visiem pārējiem valsts iedzīvotājiem.

Pieņemsim, ka $A$ un visi viņa draugi pēc kārtas sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar visiem saviem ienaidniekiem. Šo darbību rezultātā izrādīsies, ka visi valsts iedzīvotāji savā starpā draudzējas.

Patiešām, ja $A$ pirmais sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar ienaidniekiem, bet pēc tam visi viņa bijušie draugi ar viņu atkal ir salabst, bet bijušie ienaidnieki ir kļuvuši $A$ draugi un tātad arī draugi savā starpā.

## 3.2. OTRĀ NODARBĪBA

**3.2.1.** Prasītajā veidā var izteikt visus piecpadsmit pirmos naturālos skaitļus.

Skaitļus no 1 līdz 4 var izteikt šādi (ja ir mazāk nekā četri saskaitāmie, trūkstošo vietā raksta $0^2$):

$$1 = 1^2;$$

$$2 = 1^2 + 1^2;$$

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2;$$

$$4 = 2^2.$$

Skaitļus no 5 līdz 8 var viegli iegūt, pieskaitot $2^2$ pie šiem jau iegūtajiem skaitļiem:

$$5 = 1^2 + 2^2;$$

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2;$$

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2;$$

$$8 = 2^2 + 2^2.$$

Skaitli 9 izsakām kā $9^2 = 3^2$. Savukārt skaitļus no 10 līdz 15 iegūst, skaitļa 9 izteiksmei pieskaitot attiecīgi skaitļu 1, 2, 3, 4, 5 un 6 izteiksmes:

$$10 = 1^2 + 3^2;$$

$$11 = 1^2 + 1^2 + 3^2;$$

$$12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2;$$

$$13 = 2^2 + 3^2;$$

$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2;$$

$$15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2.$$

*Piezīme.* Franču matemātiķis Lagranžs jau 1770. gadā pierādīja, ka jebkurš naturāls skaitlis var tikt uzrakstīts kā četru veselu skaitļu kvadrātu summa.

**3.2.2.** Apzīmēsim ar $P$, $N$, $G$ un $F$ attiecīgi Paskāla, Ņūtona, Galileja un Fermā iegūto punktu skaitu. Tad uzdevumā dotās sakarības var pierakstīt vienādojumu veidā:

$$\frac{P+N}{2} = 16;$$

$$\frac{P+F}{2} = 13;$$

$$\frac{N+F}{2} = 18.$$

Pareizinot vienādojumu abas puses ar 2, iegūstam vienādojumus

$$P + N = 32$$

$$P + F = 26$$

$$N + F = 36$$

Saskaitot šos vienādojumus, iegūstam:

$$2P + 2N + 2F = 94,$$

tātad $P + N + F = 47$.

Tā kā $\dfrac{P + N + F + G}{4} = 16$, tad $P + N + F + G = 64$. Ievietojot $P + N + F = 47$ iegūtajā vienādojumā, iegūstam $47 + G = 64$. No šejienes $G = 17$.

**3.2.3.** Sākumā izmantosim to, ka *10-horizontāli* ir skaitļa *4-horizontāli* dalītājs. Tā kā $23705 = 5 \cdot 11 \cdot 431$, tad skaitļa 23705 dalītāji ir 1, 5, 11, 55, 431, 2155, 4741 un 23705. No šiem tikai skaitlim 431 ir 3 cipari, tātad **10-*horizontāli* ir 431**.

Zinām, ka 5-*vertikāli* dalās ar 36 un sākas ar 5. Šis skaitlis var būt 504, 540 vai 576. Bet 8-*horizontāli* sastāv no 1, 4, 6, 8 un 9 (jo skaitļos *4-horizontāli* un *8-horizontāli* kopā katrs cipars ir izmantots tieši vienu reizi), tātad 540 neder. Lai noskaidrotu 5-*vertikāli* vērtību, izmantosim to, ka 9-*vertikāli* ir skaitļa 5-*vertikāli* dalītājs. Skaitlis 9-*vertikāli* sastāv no 2 cipariem un beidzas ar 3. Pārbaudīsim, vai kādam no skaitļiem 504 un 576 ir dalītājs, kas atbilst skaitlim 9-*vertikāli*:

$$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Redzam, ka skaitlim 576 nav divciparu dalītāja, kas beigtos ar 3, bet skaitlim 504 šāds dalītājs ir 63. Tātad **5-*vertikāli* ir 504** un **9-*vertikāli* ir 63**.

Tagad izmantosim 2) nosacījumu: 4 · (23705 – *4-vertikāli* + 5) = *1-vertikāli*. Tātad 4 ·4-*vertikāli* = 94840 – 1-*vertikāli*. No šīs izteiksmes secinām, ka skaitļa 4 ·4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 6, tātad skaitļa 4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 4 vai 9. Tā kā katru ciparu drīkst izmantot tieši divas reizes, bet abi četrinieki jau ierakstīti krustskaitļu mīklas rūtiņās, tad 4-*vertikāli* pēdējais cipars noteikti ir 9.

4-*vertikāli* vidējais cipars var būt 1, 2, 5, 6, 7, 8 vai 9 (cipars 0 jau ir izmantots divas reizes). Pakāpeniski pārbaudot šīs vērtības, ievietojot katru reizi iegūto skaitli 4-*vertikāli* izteiksmē 1-*vertikāli* = 4 · (23705 – *4-vertikāli*) + 5, redzam, ka vienīgais derīgais cipars ir 8. Tātad **4-*vertikāli* ir 289**.

Atlikušajās rūtiņās var ievietot ciparus 1, 2, 5 un 7. Skaitlis 1-*horizontāli* ir trīsciparu skaitlis, kas dalās ar 36 un sākas ar 9. Vienīgā iespēja no atlikušajiem cipariem izveidot šādu skaitli, ir, ja izmanto ciparus 7 un 2, t.i., **1-*horizontāli* = 972**.

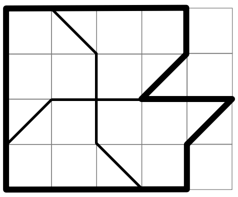
Skaitļa 8-*horizontāli* trūkstošais cipars ir 1, jo visi pārējie cipari jau ir izmantoti 4-*horizontāli* un 8-*horizontāli.* Tāpēc atlikušais skaitlis **7-*horizontāli* ir 50**.

Atrisināto krustskaitļu mīklu skat. A3.5.zīm.

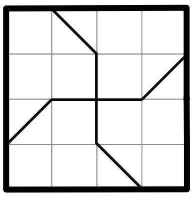
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (1) **9** | (2) **7** | (3) **2** | |
| (4) **2** | **3** | **7** | **0** | (5) **5** |
| (6) **8** | **6** | | (7) **5** | **0** |
| (8) **9** | **8** | (9) **6** | **1** | **4** |
| | (10) **4** | **3** | **1** | |

A3.5. zīm.

**3.2.4.** Attēloto figūru var sagriezt, piemēram, tādās daļās, kā parādīts A3.6. zīm., no kurām var salikt kvadrātu (skat. A3.7. zīm.).



A3.6. zīm.



A3.7. zīm.

**3.2.5.** Var ievērot, ka burti sadalīti grupās pēc tā, vai to pieraksts veido simetrisku (aksiāli vai centrāli) figūru vai nē. Simetriskās figūras sadalītas 1., 2. un 3.grupā, bet nesimetriskās – 4.grupā.

Figūras, kurām ir **tikai** vertikālā simetrijas ass, atrodas 1.grupā; figūras, kurām ir **tikai** horizontālā simetrijas ass, atrodas 2.grupā. Centrāli simetriskas figūras (tātad arī tās, kurām ir gan horizontālā, gan vertikālā simetrijas ass) atrodas 3.grupā.

Pēc šī paša principa sadalot latviešu alfabēta burtus, iegūstam šādu sadalījumu:

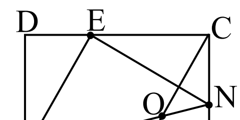
**1.** grupa: A Ā Ī M T U Ū V

**2.** grupa: B C D E K

**3.** grupa: H I N O S Z

**4.** grupa: Č Ē F G Ģ J Ķ L Ļ Ņ P R Š Ž

**3.2.6.** Atliksim punktu $D$ tā, lai izveidojas taisnstūris $ABCD$ (skat. A3.8. zīm.), un punktu $E$ uz taisnstūra malas $DC$ tā, lai $AE \parallel CM$ .




A3.8. zīm.

Savienojot ar taisnes nogriezni punktus $E$ un $N$, iegūst taisnleņķa trijstūri $ECN$.

Tā kā $ABCD$ – taisnstūris un pēc dotā $AM = CB$, tad $AM = AD$. Un tā kā $AECM$ – paralelograms (tā pretējās malas pa pāriem paralēlas), tad $EC = AM = AD$.

Savukārt $DE = DC - EC = AB - AM = MB = CN$ . Tā kā $EC = AD$ un $DE = CN$, tad taisnleņķa trijstūri $ECN$ un $ADE$ vienādi pēc pazīmes *kk*. Tātad arī to hipotenūzas ir vienādas, t.i., $AE = EN$ un trijstūris $AEN$ - vienādsānu.

Leņķu $DEA$ un $CEN$ summa ir $90°$, tātad $\angle AEN = 90°$ un $\angle EAN = 45°$. Tā kā $\angle EAN$ un $\angle CON$ – kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm, tad tie ir vienādi, t.i., $\angle CON = 45°$, k.b.j.

**3.2.7.** Varam pieņemt, ka skaitlis, kas atbilst abu skolotāju dzimšanas gadam, nav mazāks nekā 1911 un nav lielāks par 1993 (pretējā gadījumā skolotājām būtu vai nu vairāk nekā 100 gadi, vai arī viņas būtu nepilngadīgas).

Ar $x$ apzīmēsim mācību grāmatas lappušu skaitu, kas izņemtas līdz skolotājas nomaiņai. Šo lappušu numuru summa vienāda ar $\frac{x(x+1)}{2}$.

Tātad varam sastādīt nevienādību sistēmu: $\begin{cases} \frac{x(x+1)}{2} \geq 1911 \\ \frac{x(x+1)}{2} \leq 1993 \end{cases}$. Vienīgā naturālā $x$ vērtība, kas apmierina šīs abas nevienādības, ir 62. Tātad Sandras iepriekšējā skolotāja dzimusi 1953. gadā.

Ja ar $y$ apzīmējam grāmatas visu lappušu skaitu, tad jaunās skolotājas dzimšanas gads vienāds ar $\frac{y(y+1)}{2} - 1953$. Atkal sastādām nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{y(y+1)}{2} - 1953 \geq 1911 \\ \frac{y(y+1)}{2} - 1953 \leq 1993 \end{cases}$$

Par tās vienīgo atrisinājumu naturālos skaitļos der $y = 88$. Tātad jaunā skolotāja dzimusi 1963.gadā, un viņa ir par 10 gadiem jaunāka nekā iepriekšējā skolotāja.

**3.2.8.** Ja ar regulārajiem daudzstūriem plakne ir pilnībā pārklāta, tad to leņķu summai, kas atrodas ap kopīgo virsotni, jābūt $360°$. Regulāra daudzstūra visu leņķu lielumi ir vienādi, tātad tiem jābūt skaitļa 360 veseliem dalītājiem.

Varam sastādīt tabulu, kur attēloti regulāru $n$-stūru leņķu lielumi:

| $n$ | Leņķa lielums |
|---|---|
| 3 | 60° |
| 4 | 90° |
| 5 | 108° |
| 6 | 120° |
| 8 | 135° |
| 9 | 140° |
| 10 | 144° |
| ... | |

Redzam, ka no dotajiem skaitļiem 360 dalās tikai ar 60, 90 un 120. Tātad plakni var pārklāt ar regulāriem trijstūriem, četrstūriem vai sešstūriem.

**3.2.9. a)** Kopējā zināmā sešu vērtējumu summa bija 55. Tā kā jānoņem viens augstākais vērtējums, tad noteikti jāatmet 10. Ja septītais tiesnesis būtu ielicis Annai vērtējumu 10, tad Annas kopējais vērtējums (ņemot vērā arī „atmesto” zemāko vērtējumu) būtu 47, kas ir pretrunā ar doto. Atņemot no zināmo sešu punktu kopsummas augstāko jau zināmo vērtējumu – 10, iegūst kopsummā 45, kas ir dotais Annas kopējais vērtējums. Tātad septītā tiesneša vērtējums ir zemākais; tas var būt jebkurš naturāls skaitlis no 1 līdz 8.

**b)** Zināmo punktu kopsumma ir 39. Ja pārējie divi vērtējumi nav lielāki par 8, tad augstākais vērtējums – 9 – tiek „atmests”, un Kates kopējais vērtējums ir ne lielāks kā $4 \cdot 8 + 7 = 39$. Tātad no viena no tiesnešiem Kate ieguva 9 vai 10, kas tika „atmests”. Tā kā tagad Katei ir 39 punkti, viņai jāiegūst vēl viens punkts no pēdējā tiesneša. To var izdarīt, ja zemākais vērtējums – 7 – tiek atmests, bet tā vietā viņa iegūst 8 no pēdējā tiesneša. Tātad viens no pārējo divu tiesnešu vērtējumiem bija 9 vai 10, bet otrs – 8.

**c)** Šķirosim gadījumus, atkarībā no tā, vai Zaiga ieguva 10 punktus vai nē:

- Pieņemsim, ka Zaiga neieguva nevienu vērtējumu 10. Tad 9 ir augstākais vērtējums, kas tika „atmests. Tā kā visu tiesnešu vērtējumi bija dažādi, Zaiga kopsummā iegūt 27 punktus varēja vienā no diviem gadījumiem:
  - Ja vērtējums 2 nav zemākais, tad $2+5+8+*+*=27$ (ar * apzīmējam nezināmos vērtējumus); tātad divu nezināmo vērtējumu summai jābūt 12, bet šie vērtējumi nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Bet nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 12.
  - Ja vērtējums 2 ir zemākais, tad $5+8+*+*+*=27$; tātad trīs nezināmo vērtējumu summai jābūt 14, bet nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Vienīgā iespēja ir $3+4+7=14$ .
- Pieņemsim, ka Zaiga ieguva 10 punktus. Tā kā visi vērtējumi bija dažādi, tad 10 tika „atmests”. Kopējais vērtējums 27 varēja tikt iegūts vienā no šiem veidiem:
  - Ja 2 nav zemākais vērtējums, tad $2+5+8+9+*=27$; tātad $*=3$, kas ir atļauta vērtība.
  - Ja 2 ir zemākais vērtējums, tad $5+8+9+*+*=27$; tad diviem nezināmajiem vērtējumiem summā jābūt 5, bet tie nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Tas nav iespējams, jo nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 5.

Tātad Zaigas priekšnesuma pārējo trīs tiesnešu vērtējumi varēja būt 3, 4, un 7 vai 1, 3 un 10.

**3.2.10.** 1) Pieņemsim, ka nosmērējies ir viens pasažieris. Viņš redz, ka pārējo pasažieru sejas ir tīras. Bet, tā kā vagonā kāds ir nosmērējies, tad tas ir viņš. Tāpēc viņš jau pirmās stāvēšanas laikā iet mazgāties. Bet uzdevumā teikts, ka visi pasažieri bija tīri tikai pēc 4 vilciena pieturām.

2) Pieņemsim, ka vagonā ir divi nosmērējušies pasažieri. Katrs no viņiem spriež tā: „Es redzu vienu pasažieri ar netīru seju. Ja es esmu tīrs, tad viņš pirmajā pieturā dosies mazgāties”. Bet pieturā neviens pasažieris neiet mazgāties. Tad abi nosmērējušies pasažieri turpina spriest tā: „Tātad netīrais pasažieris, kuru es redzu, nebija pārliecināts, ka ir nosmērējies; bet tad viņš noteikti domā, ka netīrs esmu es, jo arī viņš redz, ka visi pārējie ir tīri.” Otrajā pieturvietā abi netīrie pasažieri dodas mazgāties. Tātad jau pēc divām pieturām visi vagona pasažieri bija tīri, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

3) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir trīs pasažieri. Katrs no viņiem domā: „Es redzu divus netīrus pasažierus. Ja es esmu tīrs, tad pārējie divi aizies mazgāties otrajā apstāšanās reizē” (sk. 2. gadījumu). Bet otrajā pieturā neviens negāja mazgāties, tāpēc visi netīrie

pasažieri bija pārliecināti, ka arī ir netīri, un trešajā pieturā aizgāja mazgāties. Tātad pēc trim pieturām visi pasažieri bija tīri, bet tas atkal ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

4) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir četri pasažieri. Katrs no viņiem redz trīs netīrus pasažierus un veic tādus pašus spriedumus kā iepriekšējā gadījumā. Viņi gaida trešo pieturvietu, bet, kad tajā neviens pasažieris neiet mazgāties, visi četri netīrie pasažieri saprot, ka ir netīri un dodas mazgāties. Tādā veidā pēc 4 pieturām visi pasažieri ir tīri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

Gadījumā, ja nosmērējušies vairāk nekā četri pasažieri, veicot analoģiskus spriedumus, var pārliecināties, ka būs nepieciešamas vairāk nekā 4 pieturas, lai visi atkal būtu tīri.

## 3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

**3.3.1.** Vienkāršojot izteiksmi $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$, iegūstam $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$. Redzam, ka katru divu daļu reizinājumā *saīsinās* vienas daļas saucējs un otras daļas skaitītājs. Pēc visām saīsināšanām, skaitītājā paliek tikai $n+1$, bet saucējā 2. Tātad iegūstam, ka dotās izteiksmes vērtība vienāda ar $\frac{n+1}{2}$. No šejienes redzam, ka daļa ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis.

**3.3.2.** Izmantosim šādu sakarību: ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir *J*, *K*, *L*, *M* (sk. A3.9. zīm.), tad $J\cdot M = K\cdot L$, jo $J\cdot M = ac\cdot bd = abcd = bc\cdot ad = K\cdot L$.

| | *a* | *b* |
|---|---|---|
| *c* | *J* | *K* |
| *d* | *L* | *M* |

A3.9.zīm.

Dotajā taisnstūrī nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D* un malu garumus ar *p*, *q*, *r*, *x*, *y*, *z*, kā parādīts A3.10. zīm.

| | *p* | *q* | *r* |
|---|---|---|---|
| *x* | 42 | *A* | 15 |
| *y* | 7 | *B* | *C* |
| *z* | *D* | 8 | 5 |

A3.10.zīm.

No iepriekš pierādītās sakarības varam seko, ka $A\cdot 5 = 8\cdot 15$, tātad $A = 8\cdot 3 = 24$. Līdzīgi

$C\cdot 42 = 7\cdot 15$, no kurienes $C = 2{,}5$;

$D\cdot 15 = 42\cdot 5$, tāpēc $D = 14$;

$B\cdot 42 = 7\cdot A = 7\cdot 24$, tātad $B = 4$.

Tātad pārējo taisnstūru laukumi ir šādi: $A = 24$ cm$^2$, $B = 4$ cm$^2$, $C = 2{,}5$ cm$^2$, $D = 14$ cm$^2$.

**3.3.3.** Dotās sakarības varam uzrakstīt vienādojumu veidā:

$$a+b=\frac{1}{2}(c+d) \qquad (1)$$

$$a+c=2(b+d) \qquad (2)$$

$$a+d=\frac{3}{2}(b+c) \qquad (3)$$

Redzam, ka uzdevumā ir 4 nezināmi skaitļi, bet no dotajiem nosacījumiem varam izveidot tikai trīs vienādojumus. Tātad, atrisinot šo trīs vienādojumu sistēmu, nevarēsim viennozīmīgi noteikt skaitļu *a*, *b*, *c* un *d* vērtības. Tāpēc jācenšas atrast sakarības starp šiem skaitļiem un novērtēt to summas vērtību.

No vienādojuma (1) varam iegūt sakarību

$$a=-b+\frac{1}{2}(c+d). \qquad (4)$$

Ievietojot šo *a* izteiksmi vienādojumā (2), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+c=2b+2d$, kuru vienkāršojot iegūstam $\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}d=3b$. Reizinot iegūtā vienādojuma abas puses ar $\frac{2}{3}$ (jeb dalot ar $\frac{3}{2}$), iegūstam

$$c-d=2b. \qquad (5)$$

Līdzīgi, ievietojot (4) vienādojumā (3), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+d=\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c$, tātad

$$-c+\frac{3}{2}d=\frac{5}{2}b. \qquad (6)$$

Saskaitot vienādojumus (5) un (6), iegūstam $\frac{1}{2}d=\frac{9}{2}b$, tātad $d=9b$.

Ja varēsim noteikt summas $b+d$ mazāko vērtību, tad no sakarības (2) atradīsim arī $a+c$ mazāko vērtību, un tad būs viegli noteikt summas $a+b+c+d$ mazāko vērtību.

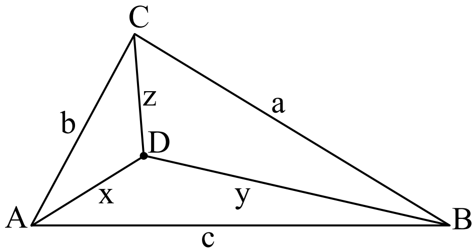
Tā kā *b* un *d* ir naturāli skaitļi, tad to mazākās iespējamās vērtības, lai $d=9b$, ir $b=1$ un $d=9$. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (5), iegūstam $c=11$, bet tad no sakarības (4) varam aprēķināt, ka $a=9$. Pārbaudot iegūtās skaitļu vērtības, ievietojot vienādojumos (1), (2) un (3), secinām, ka tās apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad mazākā summas $a+b+c+d$ vērtība ir 30.

**3.3.4.** Redzam, ka reizinājums $C\cdot C$ ir skaitlis, kas beidzas ar ciparu *C*. Tas ir iespējams, ja $C=1$, $C=5$ vai $C=6$. Reizinājums ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja visi reizinātāji ir nepāra skaitļi, tāpēc gan $\overline{AC}$, gan $\overline{CA}$ jābūt nepāra skaitļiem, tātad gan *A*, gan *C* ir nepāra cipari. Tātad $C=1$ vai $C=5$ un $C\neq 6$.

Tā kā $\overline{CA}$ arī ir nepāra skaitlis, tad *A* var būt 1, 3, 5, 7 vai 9. Apskatīsim gadījumu, kad $C=5$. Ja $A=1$, tad $15\cdot 1=15$, bet pēc uzdevumā dotā šim reizinājumam ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja *A* ir 3, 5, 7 vai 9, tad pirmā reizinātāja reizinājumam ar otrā reizinātāja pirmo ciparu jābūt divciparu skaitlim, bet visi šie reizinājumi (attiecīgi $35\cdot 5$, $55\cdot 5$, $75\cdot 5$ un $95\cdot 5$) ir trīsciparu skaitļi. Tātad vērtība $C=5$ neapmierina uzdevuma nosacījumus; no šejienes seko, ka $C$ var būt tikai 1. Tad iespējamās $A$ vērtības var būt 1, 3, 5, 7 un 9. Ja $A$ ir 1, tad $11\cdot 1=11$ nav trīsciparu skaitlis, tāpēc $A\neq 1$. Ja $A=3$, tad $\overline{AC}\cdot C=31\cdot 3=93$, kas ir divciparu skaitlis, bet $\overline{AC}\cdot C$ ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja $A=7$ vai $A=9$, tad $\overline{AC}\cdot\overline{CA}$ ($71\cdot 17$ vai $91\cdot 19$) – četrciparu skaitlis, bet ir nepieciešams trīsciparu skaitlis. Tātad, vienīgā iespējamā $A$ vērtība ir 5, un uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums:

$$\begin{array}{r} 5\ 1 \\ \cdot\ 1\ 5 \\ \hline 2\ 5\ 5 \\ 5\ 1\phantom{\ 5} \\ \hline 7\ 6\ 5 \end{array}$$

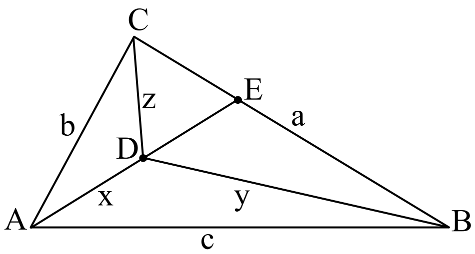
**3.3.5.** Apzīmēsim $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ (sk. A3.11. zīm.).




A3.11.zīm.

Tad perimetrs $P=a+b+c$. No trijstūra nevienādības seko, ka $a<y+z$, $b<x+z$, $c<x+y$. Saskaitot visas šīs nevienādības, iegūstam $a+b+c<2x+2y+2z$ jeb $P<2(x+y+z)$. Dalot iegūtās nevienādības abas puses ar 2, iegūstam $\frac{P}{2}<x+y+z$, kas ir pierādāmās nevienādības kreisā puse.

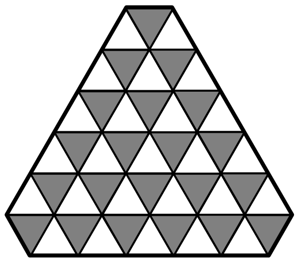
Pierādīsim tagad prasītās nevienādības labo pusi, t.i., ka $x+y+z<P$. Sākumā pierādīsim, ka $x+y<a+b$. Apzīmēsim ar $E$ taisnes $AD$ krustpunktu ar trijstūra malu $BC$ (sk. A3.12. zīm.).




A3.12.zīm.

Pēc trijstūra nevienādības $x+DE<b+CE$. Pieskaitām nevienādības abām pusēm $BE$, tad $x+DE+BE<b+CE+BE=a+b$. Tā kā $y<DE+BE$ (trijstūra nevienādība), tad $x+y<a+b$. Līdzīgi varam pierādīt, ka $x+z<a+c$ un $y+z<b+c$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam $2x+2y+2z<2P$, tātad $x+y+z<P$, k.b.j.

**3.3.6.** Izkrāsosim figūru tā, kā parādīts A3.13. zīmējumā. Ja torti ir iespējams sagriezt kā prasīts uzdevumā, tad katrs gabaliņš sastāvēs no diviem trijstūriem – viena pelēka un viena balta trijstūra. Tāpēc pelēkajiem un baltajiem trijstūriem ir jābūt vienādā skaitā. Bet ir redzams, ka ir 21 pelēks trijstūris un 25 balti trijstūri. Tātad torti nevar sagriezt 23 vienādos gabalos.



A3.13.zīm.

**3.3.7.** Tā kā abas izteiksmes ir simetriskas, varam pieņemt, ka $b \geq a$ (simetrijas dēļ jāatceras: ja skaitļu pāris $(x; y)$ ir uzdevuma atrisinājums, tad arī $(y; x)$ ir atrisinājums).

Tā kā $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}$ jābūt veselam skaitlim, tad $a^2+b \geq b^2-a$.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam

$$a+b \geq b^2-a^2$$

$$a+b \geq (b-a)(b+a)$$

Tā kā $a$ un $b$ ir naturāli skaitļi, tad abas nevienādības puses varam dalīt ar $a+b \geq 0$, iegūstot $1 \geq b-a$ jeb $b \leq a+1$.

Tā kā $b \geq a$ un $b \leq a+1$, varam secināt, ka $b=a$ vai $b=a+1$. Apskatīsim katru no šiem gadījumiem.

**I.** Ja $b=a$. Tad $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}=\dfrac{b^2+a}{a^2-b}=\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$.

Pārveidojam $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}=\dfrac{a^2+a+(-a+a)}{a^2-a}=\dfrac{a^2-a+2a}{a^2-a}=\dfrac{a^2-a}{a^2-a}+\dfrac{2a}{a^2-a}=1+\dfrac{2a}{a^2-a}$.

Tā kā $a$ ir naturāls skaitlis, tad $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}=1+\dfrac{2a}{a^2-a}>1$. Turklāt no tā, ka $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$ ir vesels skaitlis, seko, ka $\dfrac{a^2+a}{a^2-a} \geq 2$, no kurienes iegūstam $a^2+a \geq 2a^2-2a$ un tālāk $3a \geq a^2$. Dalot nevienādības abas puses ar $a \neq 0$, iegūstam, ka $a \leq 3$. Ievērojam, ka gadījumā, ja $a=1$, izteiksme $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$ nav definēta. Ja $a=2$ vai $a=3$, tad izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis. Tātad gadījumā, ja $b=a$, par atrisinājumu der divi skaitļu pāri: ($a$; $b$) = (2; 2) un ($a$; $b$) = (3; 3).

**II.** Ja $b=a+1$. Tad $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}=\dfrac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$ vienmēr ir vesels skaitlis. Tātad mums jāapskata otra izteiksme: $\dfrac{b^2+a}{a^2-b}=\dfrac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$. Varam šo izteiksmi pārveidot:

$$\frac{a^2+3a+1-a+a-1+1}{a^2-a-1}=\frac{a^2-a-1+4a+2}{a^2-a-1}=\frac{a^2-a-1}{a^2-a-1}+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$$

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, $4a+2$ jādalās ar $a^2-a-1$. Tā kā $a^2-a-1$ vērtība visiem naturāliem skaitļiem $a$ vienmēr ir nepāra skaitlis (trīs nepāra skaitļu algebriskā summa ir nepāra skaitlis; arī divu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa algebriskā summa ir nepāra skaitlis), bet $4a+2$ visiem naturāliem skaitļiem $a$

ir pāra skaitlis, tad $2a+1$ jādalās ar $a^2-a-1$. Tātad $a^2-a-1\le 2a+1$, ko varam pārveidot par $a^2-3a-2\le 0$.

Pieņemsim, ka $a\ge 4$.

Tad $a^2-3a-2=a\cdot a-3a-2\ge 4a-3a-2=a-2\ge 4-2=2>0$. Esam ieguvuši pretrunu, jo $a^2-3a-2\le 0$. Tātad $a<4$.

Pārbaudām atlikušās $a$ vērtības. Ja $a=3$, tad $b=4$ un otrās izteiksmes vērtība nav vesels skaitlis.

Savukārt gan vērtības $a=2$ un $b=3$, gan $a=1$ un $b=2$ apmierina uzdevuma nosacījumus (otrās izteiksmes vērtības tad ir attiecīgi 11 un $-5$).

Tātad par uzdevuma atrisinājumu der seši skaitļu pāri: $(2;2)$, $(3;3)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;3)$ un $(3;2)$.

**3.3.8.** Ja *a*, *b*, *c*, *d* un *e* ir dažādi veseli skaitļi, tad arī reizinātāji $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir dažādi veseli skaitļi.

Lai dalījums būtu vesels skaitlis, šiem reizinātājiem ir jābūt skaitļa 12 dalītājiem: $-12$; $-6$; $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; 1; 2; 3; 4; 6; 12.

Ja viens no reizinātājiem ir $-12$; $-6$; $-4$; 4; 6 vai 12, tad trīs no atlikušajiem ir 1 vai $-1$; tātad divi no trīs atlikušajiem reizinātājiem ir vienādi, kas ir pretrunā uzdevuma nosacījumiem.

Tātad reizinātāji var būt tikai skaitļi $-3$; $-2$; $-1$; 1; 2 un 3.

Tā kā skaitļu $-3$ un 3 reizinājums ir $-9$, bet nav tāda vesela skaitļa, kuru reizinot ar $-9$ iegūtu 12, tad par reizinātājiem vienlaicīgi nevar būt skaitļi $-3$ un 3. No tā var secināt, ka pārējie četri reizinātāji noteikti ir $-2$; $-1$; 1 un 2. Tad piektais reizinātājs ir vai nu $-3$, vai 3. Ja tas ir $-3$, tad visu piecu skaitļu reizinājums ir $-12$ (pretruna). Tātad piektais reizinātājs ir 3.

Tā kā gan reizināšana, gan saskaitīšana ir komutatīvas operācijas (mainot reizinātāju vai saskaitāmo secību, reizinājums vai summa nemainās), tad nav būtiski, kurš no reizinātājiem $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir $-2$; $-1$; 1; 2 vai 3.

Tāpēc varam pieņemt, ka $a<b<c<d<e$, no kā seko, ka $4-a>4-b>4-c>4-d>4-e$. Tagad varam aprēķināt atbilstošās *a*, *b*, *c*, *d* un *e* vērtības:

$4-a=3$, tātad $a=1$;

$4-b=2$, tātad $b=2$;

$4-c=1$, tātad $c=3$;

$4-d=-1$, tātad $d=5$;

$4-e=-2$, tātad $e=6$.

Prasītā skaitļu summa ir $1+2+3+5+6=17$, kas ir vienīgā iespējamā uzdevuma atbilde.

**3.3.9.** Viens atrisinājums ir samainīt vietām šādus monētu pārus: *HK*, *HE*, *HC*, *HA*, *IL*, *IF*, *ID*, *KL*, *GJ*, *JA*, *FK*, *LE*, *DK*, *EF*, *ED*, *EB* un *BK*. Šim uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

**3.3.10.** Sniegbaltīte sastaptajam rūķītim varētu uzdot šādu jautājumu: „Vai Jūs dzīvojat šajā ciematā?” Pieņemsim, ka rūķītis pateica „Jā”. Ja šis rūķītis ir ciemata *A* iedzīvotājs, tad viņš pateica taisnību un Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Ja rūķītis ir ciemata *B* iedzīvotājs, tad viņš sameloja un uz Sniegbaltītes jautājumu arī atbildēja „Jā”. Un tas nozīmē, ka Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Analoģiski var spriest, ja atbilde ir „Nē”. Tikai tad Sniegbaltīte atradīsies ciematā *B*.

## 3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

**3.4.1.** Pārveidojam doto vienādojumu: $a^2b + 12 = 2012$;

$$a^2b = 2012 - 12;$$

$$a^2b = 2000.$$

Atrisinājumu skaits ir vienāds ar skaitļu kvadrātu skaitu, ar kuru skaitlis 2000 dalās bez atlikuma:

$$1^2 \cdot 2000 = 2000;$$

$$2^2 \cdot 500 = 2000;$$

$$4^2 \cdot 125 = 2000;$$

$$5^2 \cdot 80 = 2000;$$

$$10^2 \cdot 20 = 2000;$$

$$20^2 \cdot 5 = 2000.$$

Redzam, ka dotajam vienādojumam ir tieši 6 atrisinājumi.

**3.4.2.** Mazākais nepieciešamais gājienu skaits ir 3. Piemēru, kā ar trim gājieniem kartiņas var sakārtot augošā secībā, skat., A3.14. zīm.

*1. solis:* $1\ 5\ 9\ 2\ 7\ \boxed{3\ 6}\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 5\ 9\ 2\ \boxed{3\ 6}\ 7\ 8\ 4$

*2. solis:* $1\ \boxed{5\ 9}\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4\ \boxed{5\ 9}$

*3. solis:* $1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ \boxed{4\ 5}\ 9 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ \boxed{4\ 5}\ 6\ 7\ 8\ 9$

A3.14.zīm.

Tā kā nepieciešams vismaz pa vienam gājienam gan lai kartiņu ar ciparu 9 novietotu kā pēdējo, gan lai *izšķirtu* kartiņas ar cipariem 5 un 9, gan arī lai kartiņas ar cipariem 2, 7, 3 un 6 sakārtotu pareizā secībā (turklāt ar vienu gājienu nevar izdarīt vienlaicīgi divas no minētajām darbībām), tad nepieciešami vismaz trīs gājieni.

**3.4.3. a)** Skaitļu 59, 82 un 19 ar Pauļa metodi aprēķinātie kvadrāti attēloti A3.15. zīm.

| $59^2$ | $82^2$ | $19^2$ |
|---|---|---|
| 45 | 16 | 09 |
| 2581 | 6404 | 0181 |
| 45 | 16 | 09 |
| 3481 | 6724 | 361 |

A3.15.zīm.

*Īss metodes apraksts:*

1) Tabulas otrajā un ceturtajā rindā ieraksta dotā skaitļa abu ciparu reizinājumu (ja reizinājums ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Iegūtā reizinājuma pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta simtu šķiras (t.i., tieši zem dotā skaitļa).

2) Trešajā rindā jāraksta četrciparu skaitlis, kura pirmie divi cipari ir dotā skaitļa pirmā cipara kvadrāts, bet otrie divi cipari ir dotā skaitļa otrā cipara kvadrāts (ja kāds no kvadrātiem ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Šī četrciparu skaitļa pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta tūkstošu šķiras (t.i., divi vidējie cipari jāraksta tieši zem dotā skaitļa).

3) Jāsaskaita iegūtie trīs skaitļi pa vertikālēm. Aprēķinātā summa ir dotā skaitļa kvadrāts.

**b)** Lai metodes pierādījums būtu uzskatāmāks, pierakstīsim uzdevuma formulējumā dotajā piemērā pirmajam un trešajam saskaitāmajam labajā pusē katram vienu nulli (tātad skaitli 42, kas ir skaitļu 6 un 7 reizinājums, pareizinām ar 10; skat. A3.16.zīm.). Viegli saprast, ka, veicot saskaitīšanu stabiņā, šī nulle rezultātu neietekmē.

$$\begin{array}{r} 67^2 \\ \hline 420\phantom{0} \\ 3649\phantom{0} \\ 420\phantom{0} \\ \hline 4489\phantom{0} \end{array}$$

3.16.zīm.

Pierādīsim, ka šī metode ir korekta, lai aprēķinātu jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

Jebkuru divciparu skaitli $x = \overline{ab}$ (pieraksts $\overline{ab}$ nozīmē, ka $a$ ir šī skaitļa desmitu cipars, $b$ – skaitļa vienu cipars) var pierakstīt kā summu $x = 10a + b$.

Skaitļa $x$ kvadrātu tad varam uzrakstīt:

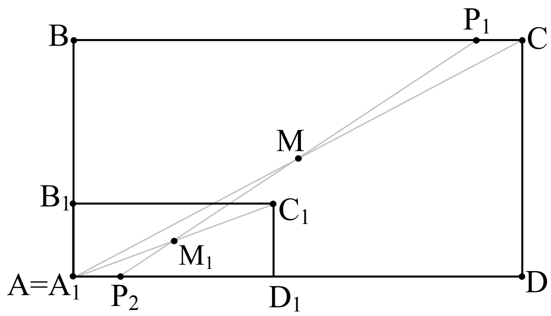
$$x^2 = (10a+b)^2 =$$
$$= 100a^2 + 20ab + b^2 =$$
$$= 10ab + \left(100a^2 + b^2\right) + 10ab$$

Apskatīsim pirmo un trešo saskaitāmo. Redzam, ka tas izsaka skaitļa $x$ abu ciparu un skaitļa 10 reizinājumu. Tā kā divu viencipara skaitļu reizinājums satur ne vairāk kā divus ciparus, tad šī reizinājuma reizinājums ar 10 saturēs ne vairāk kā 3 ciparus, turklāt pēdējais cipars būs 0, kuru Paulis neraksta.

Apskatīsim vidējo saskaitāmo. Tas sastāv no diviem saskaitāmajiem: $100a^2$ un $b^2$. Tā kā gan $a$, gan $b$ ir viencipara skaitļi, tad to kvadrāti satur katrs ne vairāk kā 2 ciparus. Skaitļa $a^2$ reizinājums ar 100 ir vai nu četrciparu skaitlis (ja $a^2$ ir divciparu), vai arī trīsciparu skaitlis (ja $a^2$ ir viencipara), turklāt pēdēji divi šī skaitļa cipari ir nulles. Tātad pieskaitot tam skaitli $b^2$ (kurš, kā jau iepriekš nospriedām, satur ne vairāk kā divus ciparus), iegūtās summas $100a^2 + b^2$ pirmie divi cipari veidos skaitli $a^2$, bet pēdējie divi – skaitli $b^2$ (ja $b^2$ ir viencipara skaitlis, tad tas tiek pierakstīts kā divciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 0), kas atbilst Pauļa metodes vidējam saskaitāmajam.

Tātad esam pierādījuši, ka Pauļa atrastā metode ir korekta, aprēķinot jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

**3.4.4.** Apzīmējam taisnstūra $ABCD$ diagonāles $AC$ viduspunktu ar $M$, bet taisnstūra $A_1B_1C_1D_1$ diagonāles $A_1C_1$ viduspunktu ar $M_1$ (skat. A3.17. zīm.).




A3.17.zīm.

Sākumā pierādīsim, ka taisne $MM_1$ krusto taisnstūrī $ABCD$ vai nu malas $AD$ un $BC$, vai arī malas $AB$ un $CD$ (acīmredzams, ka $MM_1$ jākrusto vismaz viena taisnstūra mala) vai arī sakrīt ar $AC$, ja $C_1 \in AC$.

Pieņemsim, ka $MM_1$ krusto malu $BC$. Apzīmēsim šo krustpunktu ar $P_1$. Apskatīsim punktu $P_2$, kas ir centrāli simetrisks punktam $P_1$ ar simetrijas centru punktā $M$. Punkts $M$ ir gan diagonāles $AC$ viduspunkts, gan arī taisnstūra simetrijas centrs – katrs taisnstūra punkts attēlojas caur $M$ par kādu citu atbilstošu taisnstūra punktu. Tādējādi mala $BC$ attēlojas par malu $AD$. Arī taisne $MM_1$ ir simetriska pret punktu $M$, attēlojoties pati par sevi. Tātad, tā kā punkts $P_1$ pieder taisnei $MM_1$ un atrodas uz taisnstūra $ABCD$ malas $BC$, tad simetriskais punkts $P_2$ arī pieder taisnei $MM_1$ un atrodas uz taisnstūra pretējās malas $AD$. Tātad $MM_1$ krusto arī malu $AD$.

Līdzīgi arī gadījumos, kad pieņemam, ka $MM_1$ krusto kādu no malām $AB$, $AD$ vai $CD$, izmantojot simetriju pret punktu $M$, mēs iegūtu, ka $MM_1$ krusto arī attiecīgi malu $CD$, $BC$ vai $AB$.

Tālāk varam pieņemt, ka $MM_1$ krusto malas $BC$ un $AD$. Otrs gadījums ($MM_1$ krusto malas $AB$ un $CD$) simetrijas dēļ var tikt apskatīts analoģiski.

Taisnes $MM_1$ krustpunktu ar malu $BC$ apzīmējam ar $P_1$, bet krustpunktu ar malu $AD$ – ar $P_2$.

Diagonāle $AC$ sadala taisnstūri $ABCD$ divos vienlielos trijstūros $ABC$ un $CDA$, kuru laukums ir $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

Ja $P_1 = C$ un $P_2 = A$, tad diagonāle $AC$ atrodas uz taisnes $MM_1$, tātad $MM_1$ sadala taisnstūri $ABCD$ divos vienlielos trijstūros.

Tāpēc apskatīsim vispārīgāku gadījumu: punkts $P_1$ nesakrīt ar $C$ un punkts $P_2$ nesakrīt ar $A$.

Pierādīsim, ka arī tad taisne $MM_1$ gan abus taisnstūrus, gan sešstūri sadala divās vienlielās daļās.

**1. pierādījums.**

Jebkurš taisnstūris ir centrāli simetriska figūra attiecībā pret tā diagonāļu krustpunktu (tas ir arī diagonāļu viduspunkts) $M$. Tā kā $P_1$ un $P_2$ atrodas uz taisnes, kas vilkta caur simetrijas centru $M$, un punkti pieder attiecīgi $BC$ un $AD$, tad tie arī ir novietoti simetriski pret punktu $M$. Tātad arī četrstūri $ABP_1P_2$ un $P_2P_1CD$ ir simetriski pret punktu $M$, tāpēc to laukumi ir vienādi. Tātad $MM_1$ sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās.

Analoģiski pierāda, ka $MM_1$ sadala taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$divās vienlielās daļās.

Tā kā sešstūra $B_1BCDD_1C_1$ laukums ir abu taisnstūru laukumu starpība, arī tas ar taisni $MM_1$ ir sadalīts divās vienlielās daļās.

**2. pierādījums.**

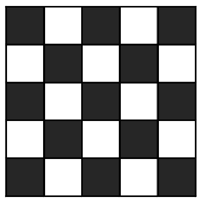
Diagonāle $AC$ sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās.

Tā kā $BC \parallel AD$, tad $\angle MAP_2 = \angle MCP_1$ (iekšējie šķērsleņķi); savukārt $\angle P_2MA = \angle CMP_1$ kā krustleņķi. Tā kā $M$ ir $AC$ viduspunkts, tad $AM = MC$. Tātad $\Delta AMP_2 = \Delta MP_1C$ ($\ell m \ell$). Tātad $MM_1$ sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās. Līdzīgi pierāda, ka $MM_1$ sadala divās vienlielās daļās arī taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$.

Tā kā sešstūris $B_1BCDD_1C_1$ ir abu taisnstūru laukumu starpība, kuri ar taisni $MM_1$ ir sadalīti divās vienlielās daļās, tad arī šis sešstūris ar taisni $MM_1$ ir sadalīts divās vienlielās daļās.

**3.4.5. Atbilde:** nē, tā nevar gadīties.

**Pierādījums.** Izkrāsosim kvadrātu šaha galdiņa veidā (skat. A3.18. zīm.), kreiso augšējo stūra rūtiņu iekrāsojot melnu. Redzam, ka kvadrātā ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas.

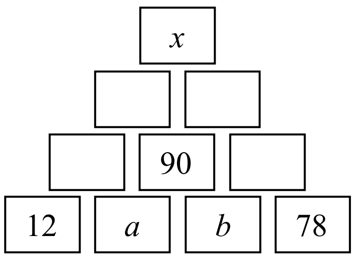


A3.18.zīm.

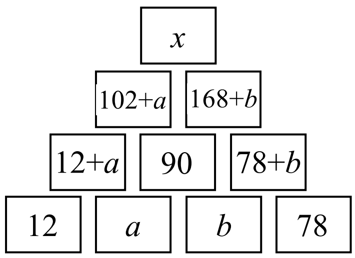
Apskatīsim visas tās figūriņas, kas sākumā atradās uz melnajām rūtiņām – tādu kopskaitā ir 13. Rūtiņas, kas atrodas blakus melnajām rūtiņām, ir baltās rūtiņas. Tātad pēc pārvietošanas figūriņām no melnajām rūtiņām jāatrodas baltajās rūtiņās. Tā kā figūriņu, kas jāpārvieto, ir 13, bet balto rūtiņu, uz kurām tās var likt, ir tikai 12, tad to nevar izdarīt.

**3.4.6. Atbilde:** $x = 360$.

**1. risinājums.** Apakšējā rindā tukšajās rūtiņās ierakstītos skaitļus apzīmējam ar $a$ un $b$ (skat. A3.19. zīm.). Tad varam ievērot, ka $a + b = 90$.



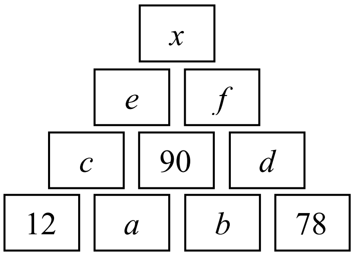

A3.19.zīm.




A3.20.zīm.

Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, aizpildām pārējās *piramīdas* rūtiņas (skat. A3.20. zīm.). Iegūstam, ka $x = 102 + a + 168 + b = 270 + (a + b) = 270 + 90 = 360$.

**2. risinājums.** Apzīmējam tukšajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f*, kā parādīts A3.21. zīm.



A3.21.zīm.

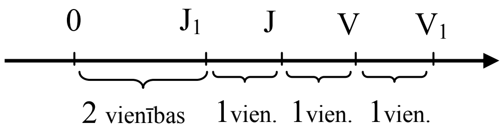
Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem $a+b=90$, tad $b=90-a$. Savukārt $d=b+78=(90-a)+78=168-a$. Un tālāk $f=90+d=90+(168-a)=258-a$.

Līdzīgi apskatīsim arī piramīdas kreiso pusi. Redzam, ka $c=12+a$. Bet $e=c+90=(12+a)+90=102+a$.

Tā kā $x=e+f$, tad, ievietojot iegūtās izteiksmes skaitļiem *e* un *f*, iegūstam, ka $x=e+f=(102+a)+(258-a)=360$.

**3.4.7.** Sniegsim divus uzdevuma risināšanas variantus – gan ar vienādojumu sistēmas palīdzību, gan arī interpretējot uzdevuma nosacījumus uz skaitļu ass.

**1. risinājums.** Uzdevumu atrisināsim grafiski ar skaitļu ass palīdzību (skat. A3.22. zīm.).



A3.22.zīm.

Nogrieznis $OJ$ ir jaunākā vīra vecums un nogrieznis $OV$ vecākā vīra vecums. Nogrieznis $JV$ izsaka abu vīru vecuma starpību un to pieņem kā vienu vienību.

*Pirmais nosacījums:* Kad vecākā vīra vecums bija vienāds ar jaunākā vīra vecumu (nogrieznis $OJ$), tad jaunākā vīra vecums bija izsakāms ar nogriezni $OJ_1$. Tā kā divu cilvēku vecumu starpība ir nemainīgs lielums, tad $J_1J=JV=1$ vienība. Tā kā vecākā vīra vecums ir divreiz lielāks nekā jaunākā vīra vecums iepriekš, tad nogrieznis $OV$ ir divreiz garāks par nogriezni $OJ_1$. Tātad, $OJ_1=J_1V=2$ vienības.

*Otrais nosacījums:* Kad jaunākā vīra vecums būs vienāds ar vecākā vīra tagadējo vecumu tagad (nogrieznis $OV$), tad vecākā vīra vecums būs nogrieznis $OV_1$ un abu vīru vecumu starpība būs nogrieznis $VV_1$, kas ir 1 vienību garš.

Tātad, vecākā vīra vecums būs nogrieznis $OV_1$, kas ir 5 vienības garš, bet jaunākā vīra vecums būs nogrieznis $OV$, kas ir 4 vienības garš. Pēc dotā abu vīru kopējais vecums būs 63 gadi, kam atbilst 9 vienības uz ass. Varam aprēķināt, ka vienai vienībai atbilst $63:9=7$ gadi.

Tātad jaunākajam vīram ir $3\cdot 7=21$ gads un vecākajam vīram ir $4\cdot 7=28$ gadi.

**2. risinājums.** Apzīmēsim vecākā vīra vecumu gados ar *x*, bet jaunākā vīra vecumu gados – ar *y*. Tad vecākais vīrs šobrīd ir par $x-y$ gadiem vecāks nekā jaunākais vīrs.

Pirmo apgalvojumu – *man tagad ir divreiz vairāk gadu, nekā jums bija tad, kad man bija tikpat gadu, cik jums ir tagad* – varam pierakstīt ar vienādību $\frac{x}{2}=y-(x-y)$, jo vecākajam vīram tikpat gadu, cik jaunākajam ir tagad, bija pirms tik gadiem, par cik viņš tagad ir vecāks nekā jaunākais vīrs.

Otro apgalvojumu – *kad jums būs tikpat gadu, cik man ir tagad, tad mums kopā būs 63 gadu* – varam pierakstīt ar vienādību $(y+(x-y))+(x+(x-y))=63$, jo jaunākajam būs tikpat gadu, cik pašlaik ir vecākajam, pēc tik gadiem, kāda šobrīd ir abu vīriešu gadu skaitu starpība.

Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = y-(x-y) \\ x+(x+(x-y))=63 \end{cases}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\begin{cases} x = 4y-2x \\ x+2x-y=63 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x = 4y \\ 3x-y=63 \end{cases}.$$

Otrajā vienādojumā ievietojot pirmajā vienādojumā iegūto sakarību, iegūstam, ka $4y-y=63$, no kurienes $3y=63$ un $y=21$. Tad no pirmā vienādojuma $x=\dfrac{4}{3}y=\dfrac{4\cdot 21}{3}=28$. Tātad vecākā vīra vecums ir 28 gadi, bet jaunākā – 21 gadi.

**3.4.8.** Attēlosim skolotāju atbildes tabulā:

| | *1. vieta* | *2. vieta* | *3. vieta* | *4. vieta* | *5. vieta* | *6. vieta* | *7. vieta* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sk. Bērziņš | Emma | Dainis | Anna | Fredis | Gatis | Centis | Baiba |
| Sk. Kārkliņš | Centis | Emma | Baiba | Fredis | Gatis | Dainis | Anna |

Tā kā abi skolotāji kopā ir pareizi nosaukuši deviņas vietas, tad noteikti divas no vietām abi ir nosaukuši pareizi vienlaicīgi. Šādas divas vietas, kurām abi skolotāji ir nosaukuši vienus un tos pašus bērnus, ir 4. un 5. vieta, kuras ieņēmuši attiecīgi Fredis un Gatis.

Tātad skolotājs Bērziņš pareizi ir atminējis vēl divas vietas, bet skolotājs Kārkliņš – vēl trīs vietas. Iegūstam, ka kopā skolotāji pareizi atminējuši vēl 5 vietas, kas atbilst arī vēl nenoskaidrotajām pareizajām vietām. Tas nozīmē, ka katrā no nenoskaidrotajām vietām kāds no diviem skolotāju minētajiem skolēniem ir pareizs.

Pieņemsim, ka skolotājs Bērziņš ir pareizi atminējis, ka 1. vietu ieguva Emma, bet šajā gadījumā viņš pareizi uzminējis, ka 2. vietu ieguvis Dainis (jo Emma to nav ieguvusi, tātad ieguvis ir otra skolotāja minētais skolēns), savukārt tad 6. vietu ieguvis Centis. Bet tad skolotājs Bērziņš pareizi atminējis vēl trīs vietas, tātad kopā pavisam piecas, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

Tātad skolotājs Bērziņš kļūdījās par 1. vietas ieguvēju, kas nozīmē, ka skolotājam Kārkliņam bija taisnība – 1. vietu ieguva Centis; tad 6. vietu ieguva Dainis un 2. vietu – Emma. Tā kā skolotājs Kārkliņš vairāk pareizu atbilžu nepateica, tad par 3. vietas un 7. vietas ieguvēju viņš kļūdījās (un tātad pareizi uzminēja skolotājs Bērziņš), un tās ieguva attiecīgi Anna un Baiba.

Esam ieguvuši, ka skolēni finišēja šādā secībā:

| 1. vieta | 2. vieta | 3. vieta | 4. vieta | 5. vieta | 6. vieta | 7. vieta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Centis | Emma | Anna | Fredis | Gatis | Dainis | Baiba |

**3.4.9. Atbilde:** Nē, šāds daudzskaldnis neeksistē.

**Risinājums.** Pieņemsim, ka šāds daudzskaldnis eksistē. Deviņiem trijstūriem kopā ir 27 malas. Tā kā daudzskaldnī *blakus esošām* skaldnēm ir kopīga šķautne, tad daudzskaldņa kopējais šķautņu skaits ir divas reizes mazāks nekā kopējais skaldņu veidojošo daudzstūru malu skaits. Bet 27 nedalās ar 2. Tātad šādu daudzskaldni izveidot nav iespējams.

**3.4.10.** Ja šie abi izveidotie apgalvojumi ir par vienu un to pašu objektu, tad skaidrs, ka tie abi nevar būt patiesi. Tātad apgalvojumi jāizvēlas tā, lai tie runātu par dažādiem objektiem.

Par uzdevumā prasītajiem apgalvojumiem der, piemēram, šādi divi teikumi:

„Taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi."

„Nav taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi."

Skaidrs, ka tie abi ir patiesi, turklāt katrs no tiem ir par citu objektu.

*Piezīme.* Šādi (un līdzīgi) apgalvojumi „Jānis ir labs skolnieks" un „Nav taisnība, ka Jānis ir labs skolnieks" nav uzskatāmi par korektu uzdevuma atrisinājumu. Nav pareizi spriest, ka šajos apgalvojumos nav zināms, par kādu Jāni ir runa, un tāpēc, ja runā par vienu Jāni, pareizs ir pirmais apgalvojums, bet, ja runā par otru Jāni – otrais. Kļūda ir tieši tā, ka, kamēr nav noteikts, par kādu Jāni tiek runāts, ne par vienu no šiem apgalvojumiem vispār nevar pateikt ne to, ka tas ir aplams, ne to, ka tas ir pareizs – abi apgalvojumi ir nenoteikti. Bet, tikko izvēlēts kāds noteikts Jānis, viens no apgalvojumiem būs patiess, otrs – aplams.

## 3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

**3.5.1.** Pie katras no 12 kuba šķautnēm veidojas 8 kubi ar izmēriem $1\times1\,cm$, kuriem ir tieši divas nokrāsotas skaldnes. Kopā ir $8\cdot12=\mathbf{96}$ šādi kubi. Katras skaldnes iekšējais kvadrāts ar izmēriem $8\times8$ *cm* veidojas no 64 kubiem, kuriem ir tieši viena nokrāsota skaldne. Tātad, kopā ir $64\cdot6=\mathbf{384}$ kubi, kuram ir tieši viena nokrāsota skaldne.

**3.5.2.** Ievērosim, ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad arī skaitlis, kas no tā iegūstams ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, dalās ar 3. Attiecībā uz pirmo operāciju tas ir acīmredzams. Pierādīsim šo apgalvojumu pārējām divām operācijām:

b) Ja pāra skaitlis $2n$ dalās ar 3, tad vai nu 2, vai $n$ dalās ar 3. Bet 2 ar 3 nedalās, tātad $n$ dalās ar 3.

c) Trešajai operācijai apgalvojums izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja dotā skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad jauniegūtā skaitļa ciparu summa, kas ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa ciparu summa, arī dalās ar 3; tātad arī pats jauniegūtais skaitlis dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļiem, kurus var iegūt no 24, jādalās ar 3. Bet 2012 ar 3 nedalās. Tātad skaitli 2012 nevar iegūt.

**3.5.3.** Līdzīgi kā risinot Profesora Cipariņa kluba 3.kārtas 2.uzdevumu, izmantosim šādu sakarību:

- Ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir *J*, *K*, *L*, *M* (sk. A3.23. zīm.), tad $\boldsymbol{J \cdot M = K \cdot L}$, jo $J \cdot M = ac \cdot bd = abcd = bc \cdot ad = K \cdot L$.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $c$ | $J$ | $K$ |
| $d$ | $L$ | $M$ |

A3.23.zīm.

Nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D* un *E* (skat. A3.24. zīm.).

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | 10 | 20 |
| $B$ | 2 | $C$ |
| 3 | $D$ | $E$ |

A3.24. zīm.

Izmantojot augšminēto sakarību, viegli aprēķināt taisnstūra *C* laukumu:

$$10 \cdot C = 2 \cdot 20$$

$$10C = 40$$

$$C = 4\ cm^2$$

No zīmējuma ir redzams, ka $A = 5B$, $E = 2D$ un $BD = 2 \cdot 3$.

Zināms, ka *B* un *D* ir veseli skaitļi, tātad to reizinājums var būt 6 tikai pie šādām *B* un *D* vērtībām:

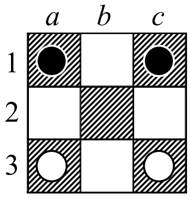
$B = 1,\ D = 6$ vai $B = 2,\ D = 3$, vai $B = 3,\ D = 2$, vai $B = 6,\ D = 1$.

Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $B = 1, D = 6$, tad $A = 5$ un $E = 12$. Tad taisnstūra laukums ir $5 + 10 + 20 + 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 12 = 63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $B = 2, D = 3$, tad $A = 10$ un $E = 6$. Tad taisnstūra laukums ir $10 + 10 + 20 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 6 = 60 \neq 63\ cm^2$. Tātad šis gadījums neder.
- Ja $B = 3, D = 2$, tad $A = 15$ un $E = 4$. Tad taisnstūra laukums ir $15 + 10 + 20 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 4 = 63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $B = 6, D = 1$, tad $A = 30$ un $E = 2$. Tad taisnstūra laukums ir $30 + 10 + 20 + 6 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2 = 78 \neq 63\ cm^2$, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

Tātad šim uzdevumam ir divi atrisinājumi: $A = 5$, $B = 1$, $C = 4$, $D = 6$, $E = 12$ cm$^2$ vai $A = 15$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 2$, $E = 4$ cm$^2$.

**3.5.4.** Gar vienu šaha galdiņa malu uzrakstam burtus, gar otru – ciparus (skat. A3.25. zīm.).



A3.25.zīm.

Sāksim gājienu ar melno šaha zirdziņu, kas atrodas augšējā rindā, labajā stūrī (laucinš $c1$). No šī lauciņa zirdziņu pārvietosim uz lauciņu $b3$ un turpmāk to pierakstīsim šādi: $c1-b3$.

Lai samainītu vietām melnos un baltos šaha zirdziņus, secīgi jāizdara šādi gājieni:

$a3-b1$, $a1-c2$, $c1-b3$, $c3-a2$, $b3-a1$,

$b1-c3$, $c2-a3$, $a2-c1$, $a1-c2$, $c3-a2$,

$a3-b1$, $c1-b3$, $c2-a3$, $a2-c1$, $b1-c3$, $b3-a1$.

**3.5.5.** Pieņemsim, ka mums doti $A$ santīmi $B$ monētās, turklāt 1 sant. monētu skaits ir $x_1$, 2 sant. monētu skaits ir $x_2$, 5 sant. monētu skaits ir $x_3$, 10 sant. monētu skaits ir $x_4$, 20 sant. monētu skaits ir $x_5$, 50 sant. monētu skaits ir $x_6$, bet 1 lata monētu skaits ir $x_7$. Iegūstam kopējo naudas daudzumu santīmos $A$ varam izteikt $A=x_1+2x_2+5x_3+10x_4+20x_5+50x_6+100x_7$. Ar $B$ apzīmējot kopējo monētu skaitu, iegūstam $B=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$.

Tagad ņemsim nākamo monētu komplektu: 1 sant. monētas $100x_7$, 2 sant. monētas $50x_6$, 5 sant. monētas $20x_5$, 10 sant. monētas $10x_4$, 20 sant. monētas $5x_3$, 50 sant. monētas $2x_2$, 1 lata monētas $x_1$. Redzam, ka kopējais naudas daudzums ir

$$100x_1+50x_2\cdot 2+20x_3\cdot 5+10x_4\cdot 10+5x_5\cdot 20+2x_6\cdot 50+x_7\cdot 100=$$

$$=100(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=100B \text{ santīmi jeb } B \text{ lati.}$$

Viegli ievērot, ka kopējais monētu skaits ir vienāds ar $A$. Tātad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

**3.5.6.** Tā kā sešu vienādu pēdējo ciparu summa, t.i., $6\cdot S$ beidzas ar ciparu 4, tad $S$ var būt vai nu 4, vai 9. Ja $S$ būtu 4, tad $6\cdot 4=24$, tātad veidojas *pārnesums* 2 nākamajai summai. Bet piecu vienādu ciparu $G$ summa kopā ar pieskaitīto *pārnesumu* (t.i., $5\cdot G+2$) nevar beigties ar ciparu 5. Tātad $\boldsymbol{S=9}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {}^{5} & 9\\
 & & & & {}^{x} & G & 9\\
 & & & {}^{y} & E & G & 9\\
 & & {}^{z} & I & E & G & 9\\
 & & N & I & E & G & 9\\
+ & 9 & N & I & E & G & 9\\ \hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

A3.26.zīm.

Ar $x$, $y$, $z$ apzīmēsim pārnesumus, kas rodas no iepriekšējās šķiras (skat. A3.26. zīm.). Lielākā iespējamā $x$ vērtība ir 4 (gadījumā, ja $G$ ir 7 vai 8); lielākā $y$ vērtība ir 3 (ja $E$ ir 7 vai 8); lielākā iespējamā $z$ vērtība ir 2 (ja $I\geq 6$ un $y\geq 2$).

Tagad apskatīsim, kādas ir iespējamās $N$ vērtības. Tā kā $S = 9$ un summas pirmais cipars arī ir 9, tad saskaitot $N + N + z$ pārnesumi nerodas (t.i., summa ir viencipara skaitlis). Turklāt no tā, ka $z \le 2$, secinām, ka $N$ ir vai nu 3, vai 4.

Pieņemsim, ka $N = 3$. Tad no vienādojuma $z + N + N = 8$ iegūstam, ka $z = 2$, t.i., $I$ ir 6, 7 vai 8 (atceramies, ka 9 ir jau izmantots). Tā kā $y \le 3$, tad summas $I + I + I$ pēdējam ciparam jābūt 4, 5, 6 vai 7. Vienīgā no minētājām $I$ vērtībām, kura apmierina šo nosacījumu, ir 8.

Tādā gadījumā $y = 3$. Tas iespējams tikai tad, ja $E$ ir 7 (gan 8, gan 9 jau izmantojām), bet tā kā skaitlis $E \cdot 4 = 7 \cdot 4$ beidzas ar 8, bet summai $x + E + E + E + E$ jābeidzas ar ciparu 6 un $x \le 4$, tad tas nav iespējams. Esam ieguvuši, ka $N \ne 3$.

Atliek tikai, ka $N = 4$ un $z = 0$. Tad $I = 2$ ($I$ nevar būt 1, jo tad $y$ jābūt 4, bet zināms, ka $y \le 3$; $I$ nevar būt arī 3 vai lielāks skaitlis, jo tad noteikti veidosies pārnesums) un $y = 1$ (skat. A3.27. zīm.).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 5} & 9 \\
 & & & & {\scriptstyle x} & G & 9 \\
 & & & {\scriptstyle y=1} & E & G & 9 \\
 & & {\scriptstyle z=0} & 2 & E & G & 9 \\
 & & 4 & 2 & E & G & 9 \\
+ & 9 & 4 & 2 & E & G & 9 \\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}
$$

A3.27.zīm.

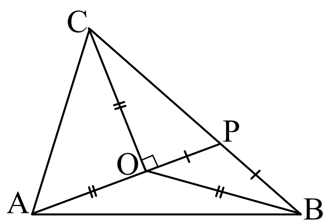
Tā kā $y = 1$ un skaitļi 2 un 4 jau ir izmantoti, tad atliek, ka $E = 3$; tad $x = 4$. Tātad $G$ ir vismaz 7. Tomēr, tā kā summas $G + G + G + G + G + 5$ pēdējam ciparam jābūt 5, tad skaidrs, ka $G$ jābūt pāra skaitlim, tātad $G = 8$.

Esam ieguvuši, ka uzdevumam ir tieši viena atbilde (skat. A3.28. zīm.).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 9 \\
 & & & & & 8 & 9 \\
 & & & & 3 & 8 & 9 \\
 & & & 2 & 3 & 8 & 9 \\
 & & 4 & 2 & 3 & 8 & 9 \\
+ & 9 & 4 & 2 & 3 & 8 & 9 \\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}
$$

A3.28.zīm.

**3.5.7.** Konstruēsim perpendikulu $CO$ pret taisni $AP$ (skat. A3.29. zīm.).




A3.29.zīm.

Tā kā $\Delta COP$ ir taisnleņķa trijstūris ar šauro leņķi $\angle CPO = 60°$ (tātad $\angle OCP = 90° - 60° = 30°$), tad tā katetes $OP$ garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas $CP$ garuma.

Tā kā gan $OP=\frac{1}{2}CP$, gan pēc dotā arī $PB=\frac{1}{2}CP$, tad $OP=PB$. Tāpēc trijstūris $OPB$ ir vienādsānu trijstūris.

Tad $\angle OPB=180°-\angle OPC=180°-60°=120°$ un

$$\angle POB=\angle PBO=\frac{180°-120°}{2}=30°.$$

Savukārt $\angle OBA=\angle CBA-\angle PBO=45°-30°=15°$ un

$$\angle AOB=360°-\angle COP-\angle COA-\angle POB=360°-90°-90°-30°=150°$$

Tad $\angle OAB=180°-\angle AOB-\angle OBA=180°-150°-15°=15°$. Tā kā $\angle OAB=\angle OBA$ un trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $OB=OA$ un trijstūris $AOB$ ir vienādsānu.

Tagad apskatīsim trijstūri *BOC*. Tā $\angle OCB=\angle OCP=30°$. Tā kā $\angle OCB=\angle PBO$, tad trijstūris *BOC* arī ir vienādsānu un $OC=OB$.

Tā kā $OC=OB$ un $OB=OA$, tad arī $OA=OC$ un trijstūris *AOC* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tāpēc $\angle ACO=45°$.

Vajadzīgais leņķis $\angle ACB=\angle ACO+\angle OCP=45°+30°=75°$.

**3.5.8.** Zāles daudzumu, ko 1 govs apēd 1 dienā, nosauksim par 1 vienību.

Aprēķināsim, cik vienību zāles apēd 70 govis 24 dienās: $24\cdot70=1680$ zāles vienības. Šajās 1680 vienībās ietilpst zāle, kas jau bija izaugusi, pirms govis bija izlaistas pļavā, un zāle, kas izauga 24 dienās.

Savukārt 30 govis 60 dienās apēd: $30\cdot60=1800$ zāles vienības.

Tā kā abos gadījumos tika apēsta visa zāle, tad varam aprēķināt, cik daudz zāles izaug 60 – 24 = 36 dienās: 1800 – 1680 = 120 vienības. Tad 24 dienās izaug 80 vienības zāles, un sākotnējais zāles daudzums pļavā ir $1680-80=1600$ vienības.

Prasītajās 96 dienās sākotnējam zāles daudzumam pļavā klāt izaugs $80\cdot4=320$ vienības zāles, tādējādi kopējais zāles apjoms, ko govis ēdīs 96 dienas, būs 1600 + 320 = 1920 vienības. Katrā no šīm 96 dienām tiks apēstas $1920:96=20$ zāles vienības, tātad būs nepieciešamas 20 govis.

**3.5.9.** Ievērosim, ka pirmajā virknītē ir divi cipari, otrajā – $2\cdot2=4$ cipari, trešajā – $2\cdot4=8$, ceturtajā – $2\cdot8=16$, piektajā – $2\cdot16=32$, sestajā – $2\cdot32=64$, septītajā – $2\cdot64=128$, astotajā – $2\cdot128=256$, devītajā – $2\cdot256=512$, desmitajā – $2\cdot512=1024$, vienpadsmitajā – $2\cdot1024=2048$ cipari. Tātad, vienpadsmitā virknīte ir pirmā, kurā ir vismaz 2012 cipari.

Noskaidrosim, kāds ir šīs virknītes 2012-ais cipars: 0 vai 1? Apzīmēsim to ar *s*.

Teiksim, ka ciparam 0 inversais cipars ir 1, bet ciparam 1 inversais cipars ir 0. Ciparam $x$ inverso ciparu apzīmēsim ar $x^*$. Acīmredzot, $(x^*)^*=x$. Tiešām, $(0^*)^*=1^*=0$ un $(1^*)^*=0^*=1$.

Katram $n=1;2;3;...;10;11$ apskatāmo virknīti apzīmēsim ar $\alpha_n$, bet tās „otrādo kopiju” ar $\hat{\alpha}_n$. Virknīšu $\alpha_n$ un $\hat{\alpha}_n$ k-tos ciparus apzīmēsim attiecīgi ar $\alpha_n(k)$ un $\hat{\alpha}_n(k)$.

Pēc uzdevuma nosacījumiem, katram $n$

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n\hat{\alpha}_n.$$

Pie $n=10$ iegūstam šādu virknīti:

$$\alpha_{11} = \underbrace{\alpha_{10}}_{1024\ cipari}\ \underbrace{\hat{\alpha}_{10}}_{1024\ cipari}.$$

Redzam, ka meklējamais cipars $s$ (virknes $\alpha_{11}$ 2012-ais cipars) ir virknes $\hat{\alpha}_{10}$ $2012-1024=988$-ais cipars. Citiem vārdiem,

$$s=\alpha_{11}(2012)=\hat{\alpha}_{10}(988)=\alpha^*{}_{10}(988).$$

Tā kā $s=\alpha^*{}_{10}(988)$, tad $s^*=\alpha_{10}(988)$.

Pie $n=9$ iegūstam

$$\alpha_{10} = \underbrace{\alpha_{9}}_{512\ cipari}\ \underbrace{\hat{\alpha}_{9}}_{512\ cipari}.$$

Tāpēc $s^*=\alpha_{10}(988)=\hat{\alpha}_9(988-512)=\hat{\alpha}_9(476)$, un no vienādības $s^*=\hat{\alpha}_9(476)$ iegūstam $s=\alpha_9(476)$.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:

$$s=\alpha_9(476)=\alpha_9(256+220)=\hat{\alpha}_8(220);$$

$$s^*=\alpha_8(220)=\alpha_8(128+92)=\hat{\alpha}_7(92);$$

$$s=\alpha_7(92)=\alpha_7(64+28)=\hat{\alpha}_6(28);$$

$$s^*=\alpha_6(28)=\alpha_5(28)=\alpha_5(16+12)=\hat{\alpha}_4(12);$$

$$s=\alpha_4(12)=\alpha_4(8+4)=\hat{\alpha}_3(4);$$

$$s^*=\alpha_3(4)=\alpha_2(4)=\alpha_2(2+2)=\hat{\alpha}_1(2);$$

$$s=\alpha_1(2)=1.$$

Tātad dotajā virknītē 2012. cipars būs 1.

Piezīme. Iesakām patstāvīgi padomāt, kā varētu ātrāk noskaidrot, vai $\alpha_n(k)=0$ vai $\alpha_n(k)=1$, ja doti skaitļi $n$ un $k$.

**3.5.10. Atbilde:** pietiek ar vienu svēršanu.

Paņemsim no pirmā maisa 1 monētu, no otrā maisa – 2 monētas, no trešā maisa – 3 monētas, ..., no desmitā maisa – 10 monētas un nosvērsim visas šīs monētas kopā. Ja katra paņemtā monēta svērtu 10 gramus, tad svariem būtu jārāda $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 10=55\cdot 10=550\ g$. Svari rādīs vairāk, jo vienā maisā katra monēta sver 11 $g$. Tātad tas gramu skaits, par kuru svaru rādījums pārsniedz skaitli 550, sakrīt ar maisa numuru, kurā ir smagākās monētas.

## 3.6. SESTĀ NODARBĪBA

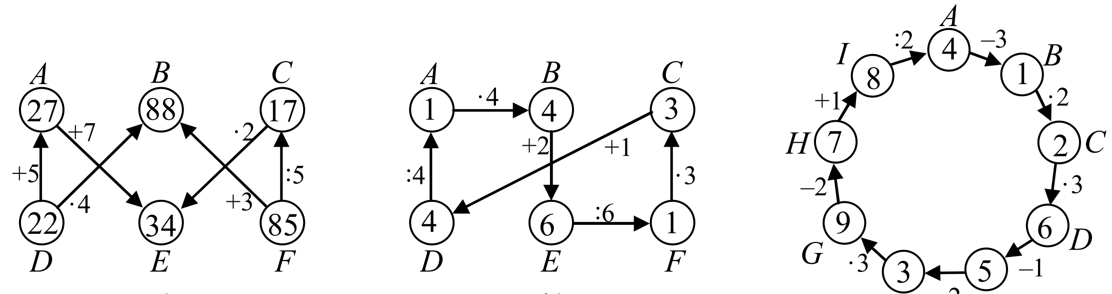
**3.6.1. Atbilde:** Ja divciparu skaitlim galā pierakstīs to pašu skaitli, tad skaitlis palielināsies 101 reizi.

**Pierādījums.** Apzīmēsim divciparu skaitļa vienu ciparu ar $a$, bet desmitu ciparu – ar $b$. Tad šo skaitli varam pierakstīt $x = \overline{ab} = 10a + b$. Šim skaitlim labajā pusē pierakstot šo pašu skaitli, iegūstam

$$\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 100(10a + b) + 10a + b = 101(10a + b).$$

Viegli redzēt, ka jauniegūtais skaitlis ir 101 reizi lielāks nekā sākotnējais skaitlis.

**3.6.2.** Atbildi skat. A3.30. zīm.




a) b) c)

A3.30.zīm.

**3.6.3.** Ernesta monētu skaits ir par 3 lielāks nekā skaitļa 6 daudzkārtnis, un par 7 lielāks nekā skaitļa 8 daudzkārtnis. Mazākais veselais skaitlis, kas apmierina šos nosacījumus, ir 15.

Mazākais kopīgais skaitļu 6 un 8 dalāmais ir 24, tātad uzdevuma nosacījumi izpildīsies, ja Ernesta monētu kolekcijas apjoms pārsniegs 15 par skaitļa 24 daudzkārtni, t.i., tie var būt skaitļi 39, 63, 87 u.t.t. Tātad, ja Ernests sakārtos monētas kaudzītēs pa 24 monētām katrā, viņam paliks pāri 15 monētas.

**3.6.4.** Vienādībās attēloto sakarību vispārīgi var pierakstīt šādi:

$$\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = \left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2. \qquad (*)$$

Sniegsim divus uzdevuma risinājumus.

**1. risinājums.** Ievērojam, ka $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} = \underbrace{999...99}_{2k\ cipari} : 9 = \left(10^{2k} - 1\right) : 9$.

Līdzīgi arī $\underbrace{222...22}_{k\ cipari} = 2 \cdot \underbrace{111...11}_{k\ cipari} = 2 \cdot \left(10^k - 1\right) : 9$ un

$$\underbrace{333...33}_{k\ cipari} = 3 \cdot \underbrace{111...11}_{k\ cipari} = 3 \cdot \left(10^k - 1\right) : 9 = \left(10^k - 1\right) : 3.$$

Aplūkosim tagad atsevišķi vienādības (*) kreiso un labo pusi:

- Vienādības (*) labā puse: $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = \dfrac{\left(10^{2k} - 1\right)}{9} - \dfrac{2 \cdot \left(10^k - 1\right)}{9} =$

$$= \frac{10^{2k} - 1 - 2 \cdot 10^k + 2}{9} =$$

$$= \frac{10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1}{9}$$

- Vienādības (*) kreisā puse: $\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2 = \left(\dfrac{10^k-1}{3}\right)^2 =$

$$= \frac{10^{2k}-2\cdot 10^k+1}{9}$$

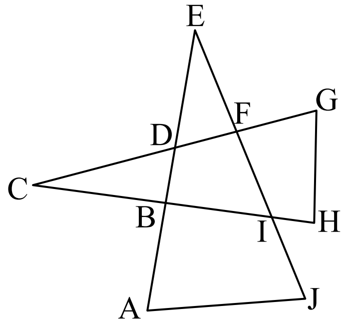
Tā kā vienādības (*) labās un kreisās puses izteiksmes ir vienādas, tātad arī dotā vienādība ir patiesa.

**2. risinājums.** Apzīmēsim $A=\underbrace{111...11}_{k\ cipari}$. Tad $\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=2A$, $\underbrace{333...33}_{k\ cipari}=3A$ un $\underbrace{999...99}_{k\ cipari}=9A$. Savukārt $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}=A\cdot\underbrace{100...01}_{k+1\ cipari}=A\left(10^k+1\right)$.

Tāpēc $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}-\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=A\left(10^k+1\right)-2A=A\cdot 10^k+A-2A=A\left(10^k-1\right)=A\cdot\underbrace{999...99}_{k\ cipari}=$

$=A\cdot 9A=9A^2=(3A)^2=\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2$, kas arī bija jāpierāda.

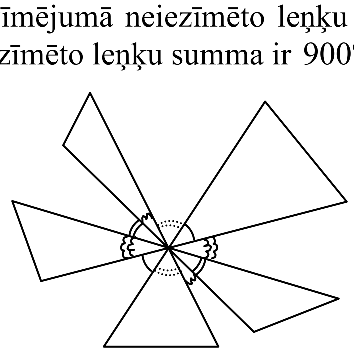
**3.6.5.** Tāds desmitstūris eksistē; A3.31. zīm. attēlots ieliekts desmitstūris *ABCDEFGHIJ*, kas pārklāts ar trijstūriem *AEJ* un *CGH*.




A3.31.zīm.

Izliekta desmitstūra gadījumā uzdevumam atrisinājums neeksistē. Tiešām, izliekta desmitstūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot 8$, bet viena trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$. Tā kā izliektā desmitstūrī, pārklājot to ar trijstūriem uzdevumā norādītajā veidā, katrs iekšējais leņķis ir vairāku trijstūru iekšējo leņķu summa, tad desmitstūra pārklāšanai nepieciešami vismaz 8 trijstūri.

**3.6.6.** Doto piecu trijstūru visu piecpadsmit iekšējo leņķu summa ir $5\cdot 180°=900°$. Savukārt A3.32. zīmējumā redzams, ka katram no dotajā uzdevumā neiezīmētajiem trijstūru leņķiem ir pretī ar to vienādais krustleņķis. Tā kā centra leņķa lielums ir $360°$, tad doto piecu trijstūru sākotnējā zīmējumā neiezīmēto leņķu kopējā summa ir $360°:2=180°$. Tātad uzdevumā desmit iezīmēto leņķu summa ir $900°-180°=720°$.



A3.32.zīm.

**3.6.7.** Doto dalīšanas piemēru varam pierakstīt arī kā reizinājumu (skat. A3.33. zīm.).

$$\begin{array}{cccc} & e & j & a \\ \cdot & & j & a \\ \hline & i & j & a \\ j & a & u & \\ \hline s & e & j & a \end{array}$$

A3.33.zīm.

1) Apskatām reizinājumu $\overline{eja} \cdot a = \overline{ija}$. Acīmredzams, ka $a$ nav 1. Tad $a$ var būt 5 vai 6. Neatkarīgi no tā, vai $a$ ir 5 vai 6, reizinājums ir trīsciparu skaitlis tikai tad, ja $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$.

2) Tā kā $\overline{sej} = \overline{jau} + \overline{ij}$ un tātad $j + u = j$, tad skaidrs, ka $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Ja tagad pieņemam, ka $a = 6$, tad $i + a = i + 6 = 11$ (jo iepriekš jau izspriedām, ka $e = 1$). Tātad $i = 5$. Bet tas nav iespējams, jo tādā gadījumā reizinājums $\overline{eja} \cdot a = \overline{1j6} \cdot 6$ nevar sākties ar ciparu $i = 5$, jo tas noteikti ir lielāks nekā $\overline{6**}$.

3) Tātad $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$; no $i + a = i + 5 = 11$ iegūstam, ka $\boldsymbol{i} = \mathbf{6}$.

4) Ciparam $j$ jābūt pāra, jo $\overline{eja} \cdot j = \overline{jau}$, tātad reizinājuma $a \cdot j$ jeb $5 \cdot j$ pēdējais cipars ir $u = 0$. Turklāt $j < 4$, pretējā gadījumā $\overline{eja} \cdot a = 145 \cdot 5 = 724 = \overline{ija}$, kas ir pretrunā ar to, ka $i = 6$. Vienīgais vēl neizmantotais pāra cipars, kas ir mazāks nekā 4, ir 2; tātad $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$.

5) Tā kā $\overline{jau} + \overline{ij} = \overline{sej}$ jeb $250 + 62 = 312$, tad $\boldsymbol{s} = \mathbf{3}$.

Uzdevuma atbildi skat. A3.34. zīm.

$$\begin{array}{rl} 3\,1\,2\,5 & : 1\,2\,5 = 2\,5 \\ -2\,5\,0\phantom{\,5} & \\ \hline 6\,2\,5 & \\ -6\,2\,5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

A3.34.zīm.

**3.6.8. Atbilde:** $n = 4$.

**Risinājums.** Četrus punktus saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvietot var; kā piemērs der jebkura taisnstūra virsotņu kopa. Pierādīsim, ka vairāk nekā 4 punktus tā izvietot nevar.

Pieņemsim, ka $n$ punkti izvietoti saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Apskatīsim visus nogriežņus, kam abi galapunkti atrodas divos no šiem $n$ punktiem; pieņemsim, ka $AB$ – garākais no šiem nogriežņiem (vai viens no nogriežņiem ar lielāko garumu, ja tādi ir vairāki).

Apzīmēsim ar $C$ jebkuru citu no izvietotajiem $n$ punktiem. Pēc uzdevuma nosacījumiem $\Delta ACB$ ir taisnleņķa trijstūris. Saskaņā ar punktu $A$ un $B$ izvēli, $AB \geq AC$ un $AB \geq BC$; tātad $AB$ ir trijstūra $ABC$ garākā mala. Tā kā taisnleņķa trijstūrī taisnais leņķis ir tikai viens un tas ir lielākais leņķis, bet katrā trijstūrī pret lielāko leņķi atrodas garākā mala, tad $\angle ACB = 90°$.

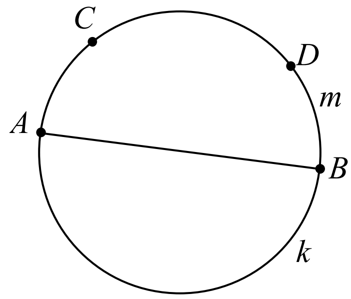
Aplūkosim riņķa līniju $\omega$ ar diametru $AB$. No skolas kursa zināms, ka to punktu kopa, no kuriem nogriezni $AB$ redz $90°$ leņķī, ir riņķa līnija $\omega$ bez punktiem $A$ un $B$. Tātad visi $n$ punkti pieder riņķa līnijai $\omega$.

Pierādīsim, ka uz katra no lokiem $AmB$ un $AkB$ var atrasties ne vairāk kā viens no apskatāmajiem $n$ punktiem, kas atšķiras no $A$ un $B$. Pieņemsim pretējo, ka divi loka

*AmB* punkti *C* un *D* pieder pie apskatāmās punktu kopas (skat. A3.35. zīm.). Tad pēc teorēmas par ievilkta leņķa mērīšanu $\angle ACD = \frac{1}{2} \cup AkD = \frac{1}{2}(\cup AkB + \cup BmD) = 90° + \frac{1}{2} \cup BmD > 90°$.

Tātad $\Delta ACD$ nav taisnleņķa trijstūris, un tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

Tā kā $\cup AmB$ un $\cup AkB$ katrs satur ne vairāk kā 1 no dotās kopas punktiem (bez *A* un *B*), tad šī kopa nevar saturēt vairāk kā 4 punktus.



A3.35.zīm.

**3.6.9.** Intuitīvi skaidrs, ka viens cilvēks (apzīmēsim to ar *X*) redz skaitli, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes (apzīmēsim šo skaitli ar *a*) un skaitļus, kas uzrakstīti uz divām blakus esošām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim šos skaitļus ar *b* un *c*). Bet otrs cilvēks (apzīmēsim to ar *Y*) redz skaitli *a*, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes, un skaitļus, kas uzrakstīti uz abām pārējām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim tos ar *d* un *e*). Pagaidām pieņemsim, ka šis fakts ir spēkā.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$a + b + c = 15 \qquad (1)$$

$$a + d + e = 7 \qquad (2)$$

Ievērosim, ka *a*, *b* un *c* vērtības var būt tikai 1; 2; 3; 4; 5; 6, pie tam *a*, *b* un *c* ir dažādi skaitļi. Tāpēc lielākā iespējamā $a+b+c$ vērtība ir $4+5+6=15$, un vienādība (1) izpildās **tikai** tādā gadījumā, ja *a*, *b* un *c* ir 4, 5 un 6 (pagaidām nav svarīgi, kurš skaitlis pieņem kādu no šīm vērtībām).

Kāda var būt *a* vērtība?

Ja $a = 6$, tad no (2) izriet, ka $d + e = 1$. Tas nav iespējams, jo $d \geq 1$ un $e \geq 1$.

Ja $a = 5$, tad no (2) izriet, ka $d + e = 2$. Tā kā $d \geq 1$ un $e \geq 1$, tad secinām, ka $d = 1$ un $e = 1$. Tas nav iespējams, jo *d* un *e* jābūt dažādiem.

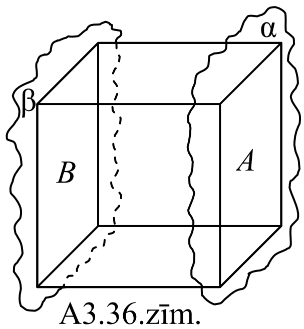
Tātad $a = 4$. No (2) izriet, ka $d + e = 3$, Tā kā $d \geq 1$, $e \geq 1$ un $d \neq e$, tad $d + e = 3$ iespējams tikai tādā gadījumā, ja viens no skaitļiem *d* un *e* ir 1, bet otrs ir 2. Tātad *X* redz skaitļus 4; 5; 6, bet *Y* – skaitļus 4; 1; 2. Vienīgais skaitlis, ko neredz ne *X*, ne *Y* – skaitlis 3 – tātad uzrakstīts uz apakšējās skaldnes.

Lai pierādījums būtu precīzs, vēl jāpamato sākumā izteiktais apgalvojums par to, kādas skaldnes redz *X* un *Y*.

Vispirms pierādīsim palīgrezultātu.

**Lemma.** Cilvēks nevar vienlaicīgi redzēt abus skaitļus, kas uzrakstīti uz kauliņa pretējām skaldnēm.

Caur kuba divām pretējām skaldnēm $A$ un $B$ novilksim plaknes α un β (skat. A3.36. zīm.).




A3.36.zīm.

Tā kā $A$ un $B$ ir paralēlas skaldnes, tad arī plaknes α un β ir paralēlas. Tātad tās nešķeļas. Lai cilvēks varētu redzēt skaitli uz skaldnes $B$, tam jāatrodas pa kreisi no β; lai varētu redzēt skaitli uz skaldnes $A$, jāatrodas pa labi no α. Tā kā α un β nešķeļas, tad nav tādu punktu, kas vienlaicīgi atrastos pa kreisi no β un pa labi no α. Lemma pierādīta.

Sadalām 4 kuba sānu skaldnes divos pāros tā, ka vienā pārī ietilpst pretējās skaldnes. No lemmas secinām, ka gan $X$, gan $Y$ no katra pāra redz tikai vienu skaldni, tātad gan $X$, gan $Y$ redz pa divām sānu skaldnēm, pie tam tām ir kopīga šķautne. Tā kā pēc dotā, ka gan $X$, gan $Y$ redz pa trim skaldnēm, tad tie abi noteikti redz augšējo skaldni.

**1. piezīme.** Lemmas pierādījumā pieņemts, ka cilvēks ir „punkts", kas nevar vienlaicīgi atrasties pa kreisi no β un pa labi no α. Ja ievērojam, ka cilvēkam ir divas acis, no kurām viena varbūt atrodas pa kreisi no β, bet otra – pa labi no α (tas ir iespējams, ja attālums starp acīm ir lielāks nekā kuba šķautnes garums), tad minētais spriedums nav spēkā, un varbūt iespējami arī citi atrisinājumi. Iesakām lasītājam patstāvīgi analizēt šādu situāciju.

**3.6.10.** Sanumurēsim akmeņus un apzīmēsim tos ar $a_1$, $a_2$, ..., $a_{14}$, $a_{15}$. Pārbaudām kaudzi $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Ja tajā radioaktīvu akmeņu nav, pārejam pie etapa Σ (skat. tālāk). Ja minētajā kaudzē ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām kaudzi $\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$. Ja šajā kaudzē radioaktīvu akmeņu nav, tad abi radioaktīvie akmeņi ir starp desmit akmeņiem $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{11}$, $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$; pārejam pie etapa Σ, ievērojot, ka starp $a_1, a_2, a_3, a_4$ ir vismaz viens radioaktīvs akmens. Ja starp $a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām akmeni $a_5$ (trešā pārbaude). Ja $a_5$ nav radioaktīvs, tad pa vienam radioaktīvam akmenim ir kaudzēs $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un $\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$; katru no šiem akmeņiem var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad $a_5$ ir radioaktīvs, starp atlikušajiem 14 akmeņiem viegli atrast vienu radioaktīvo akmeni ar 4 pārbaudēm.

**Etaps Σ**. Aplūkosim, kā ar 6 pārbaudēm var atrast 2 radioaktīvus akmeņus starp 10 akmeņiem. Apzīmēsim šos desmit akmeņus ar $b_1$, $b_2$, ..., $b_9$, $b_{10}$.

Pārbaudām kaudzi $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (šī pārbaude nav jāveic, ja zinām, ka starp $a_1, a_2, a_3, a_4$ (te $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$) ir vismaz viens radioaktīvs akmens). Ja tajā nav neviena radioaktīva akmens, tad atlikušās piecas pārbaudes izmantojam, lai noteiktu, kuri no atlikušajiem akmeņiem $b_5$, $b_6$, ..., $b_{10}$ ir radioaktīvi (pārbaudām katru akmeni atsevišķi). Aplūkosim gadījumu, kad kaudzē $A$ ir radioaktīvi akmeņi, un parādīsim, kā var pabeigt meklēšanu ar 5 pārbaudēm.

Vispirms pārbaudām kaudzi $B = \{b_4, b_5, b_6\}$. Ja tajā ir radioaktīvi akmeņi, tad otrajā pārbaudē apsekojam akmeņus $b_5$ un $b_6$. Ja starp tiem ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar vienu pārbaudi nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni ($b_5$ vai $b_6$), bet ar divām pārbaudēm nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni kaudzē $A$. Ja otrajā pārbaudē radioaktīvi akmeņi nav konstatēti, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir $b_4$, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var noteikt ar trim pārbaudēm.

Ja pirmajā pārbaudē konstatēts, ka kaudzē $B$ nav radioaktīvu akmeņu, tad abi radioaktīvie akmeņi ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$, turklāt vismaz viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3\}$. Otrajā pārbaudē apsekojam $b_3$ un $b_7$. Ja neviens no tiem nav radioaktīvs, pārbaudām $b_1$. Ja $b_1$ nav radioaktīvs, tad viens radioaktīvais akmens ir $b_2$, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad $b_1$ ir radioaktīvs, otrs radioaktīvais akmens ir kaudzē $\{b_2, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to atkal var noteikt ar divām pārbaudēm.

Atliek aplūkot gadījumu, kad radioaktīvie akmeņi ir starp $b_3$ un $b_7$. Tad ar trešo pārbaudi pārbaudām kaudzi $\{b_1, b_2\}$. Ja tajā ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar divām atlikušajām pārbaudēm abus radioaktīvos akmeņus var noteikt – viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2\}$, bet otrs – kaudzē $\{b_3, b_7\}$. Ja turpretī kaudzē $\{b_1, b_2\}$ radioaktīvu akmeņu nav, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir $b_3$, bet otrs ir meklējams kaudzē $\{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm.

# 4. LATVIJAS 24. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

## 4.5. PIEKTĀ KLASE

**4.5.1. Atbilde:** 4789.

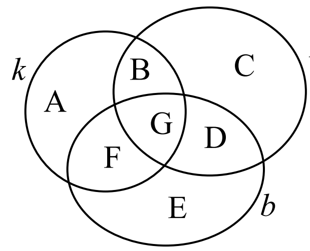
**Risinājums:** Meklētajam jābūt četrciparu skaitlim, jo lielākais reizinājums, ko var iegūt no 3 cipariem, ir $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 < 2012$. Šajā uzdevumā turklāt prasīts, lai cipari būtu dažādi, tāpēc lielākais trīs ciparu reizinājums nepārsniedz $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Noskaidrosim, kāds var būt mazākais cipars četrciparu skaitļa pierakstā. Ja tas ir mazāks nekā 4, tad visu četru ciparu reizinājums nepārsniedz $3 \cdot 504 = 1512 < 2011$. Skaitlis ir mazāks, ja tā cipari ir sakārtoti augošā secībā. Tātad tā pirmais cipars ir vismaz 4.

Ja otrais cipars ir mazāks nekā 7, tad visu četru ciparu reizinājums ir ne lielāks kā $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 1728 < 2012$. Vēl trūkst divi dažādi cipari, kas lielāki nekā 7, tātad trešais un ceturtais cipars ir attiecīgi 8 un 9. Tātad mazākais skaitlis, kura ciparu reizinājums ir vismaz 2012, ir 4789.

**4.5.2. Atbilde:** 4 absolventi.

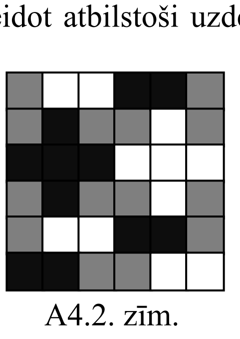
**Risinājums:** Apzīmēsim to absolventu skaitu, kas māk spēlēt klavieres, ar $k$, kas māk spēlēt vijoli – ar $v$, un tos, kas spēlē bungas – ar $b$. Apskatīsim zīmējumu, kur ar katru apli attēloti kādu instrumentu spēlējošie absolventi (skat. A4.1. zīm.). Apgabali A, C un E parāda tos absolventus, kuri prot spēlēt tikai vienu instrumentu, tāpēc $A + C + E = 32$. Apgabali B, D un F parāda tos absolventus, kas māk spēlēt tieši divus instrumentus; tāpēc $B + D + F = 33$.




A4.1. zīm.

Summā $37 + 30 + 43$ apgabali A, C un E ir ieskaitīti vienreiz, apgabali B, D un F (tajos kopā ir 33 absolventi, kas māk spēlēt tieši divus instrumentus) ieskaitīti divreiz, bet apgabals G (tie, kas māk spēlēt visus trīs instrumentus) tiek ieskaitīts trīs reizes. Tātad $37 + 30 + 43 - 32 - 2 \cdot 33 = 12 = 3 \cdot G$ un $G = 4$, t.i., visus trīs mūzikas instrumentus prot spēlēt četri absolventi.

**4.5.3.** Mazākais kvadrāts, ko var izveidot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 6×6 rūtiņas, skat., piem., A4.2. zīm.



A4.2. zīm.

**4.5.4. a) Atbilde:** ne obligāti.

**Risinājums:** Īsajā gadā ir 365 dienas jeb 52 pilnas nedēļas un viena diena. Ja 1. janvāris ir ceturtdiena, tad arī 31. decembris ir ceturtdiena un ceturtdienu skaits gada laikā būs par vienu lielāks nekā trešdienu un piektdienu skaits.

**b) Atbilde:** jā.

**Risinājums:** Garajā gadā ir 366 dienas – 52 pilnas nedēļas un vēl 2 dienas, tāpēc a) punktā aprakstītā situācija nav iespējama. Tāpēc, ja trešdienu un piektdienu skaits ir vienāds (t.i., 52), arī ceturtdienu skaits būs tāds pats.

**4.5.5. Atbilde:** 10 santīmi.

**Risinājums:** Visas naudas summas no 2 līdz 9 santīmiem var izteikt ar tieši trīs dažādu monētu palīdzību: $2 = 5 - 2 - 1$, $3 = 10 - 5 - 2$; $4 = 5 + 1 - 2$; $5 = 20 - 10 - 5$ ; $6 = 5 + 2 - 1$; $7 = 10 - 2 - 1$; $8 = 5 + 2 + 1$; $9 = 10 + 1 - 2$.
Pamatosim, ka 10 santīmus nevar samaksāt ar trīs dažādu monētu palīdzību. Vispirms ievērosim, ka summu 10 nevar iegūt ar vienas vai divu dažādu monētu palīdzību. Līdz ar to pircējs nevar izmantot 10 santīmu monētu. No divām vai trim monētām, kuru vērtība ir mazāka nekā 10, nevar izveidot summu, kas vienāda ar 10. Ja pircējs maksā ar 10 santīmu un vēl vienu monētu, tad pārdevējam jāizdod tāda pati monēta, bet tad tiek izmantotas tikai divas dažādas monētas. Ja pircējs maksā ar 20 santīmu monētu, tad pārdevējam jāizdod 10 santīmi, bet to nevar izdarīt ar tieši divu dažādu monētu palīdzību. Ja pircējs maksā ar 20 santīmu monētu un vēl vienu monētu, tad pārdevējam ar vienu monētu jāizdod vairāk nekā 10 santīmi, bet to nevar izdarīt.

## 4.6. Sestā klase

**4.6.1. Atbilde:** Ir 42 skaitļi, kuru ciparu reizinājums ir 20, bet summa ir 11.

**Risinājums:** Ja kāda skaitļa ciparu reizinājums ir 20, tad tas var saturēt tikai tādus ciparus, ar kādiem viencipara skaitļiem dalās skaitlis 20. Skaitlis 20 dalās ar 1, 2, 4 un 5. Tā kā cipars 1 skaitļa ciparu summu palielina, bet reizinājumu nemaina, tad mēs varam izvēlēties tādus ciparus, kas nav „1" un kuru reizinājums ir 20, un pievienot tik vieninieku, cik nepieciešams, lai ciparu summa būtu 11.

Skaitli 20 var sadalīt viencipara reizinātājos šādi: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Skaitlī jābūt diviem vieniniekiem, lai ciparu summa iznāktu 11. Šī veida skaitļi sastāv no 5 cipariem: 1, 1, 2, 2 un 5. Cipars „5" aizņems vienu no 5 vietām, divniekiem jāizvēlas divas no 4 atlikušajām un to varam izdarīt 6 veidos: **22**11 **2**1**2**1 **2**11**2** 1**22**1 1**2**1**2** 11**22**, bet pārējās divās vietās būs rakstāmi vieninieki. Tā kā no katra uzrakstītā četrciparu skaitļa varam iegūt 5 dažādus piecciparu skaitļus, ievietojot ciparu „5" kādā no 5 vietām – 3 starpām vai 2 galiem – pavisam iegūstam $6 \cdot 5 = 30$ dažādus piecciparu skaitļus, kam ciparu summa ir 11, bet reizinājums ir 20.

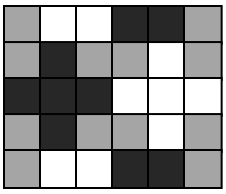
Otra iespēja, kā iegūt reizinājumu 20 ir $4 \cdot 5$. Tad meklējamie skaitļi sastāv no cipariem 4, 5, 1 un 1. Tie būs četrciparu skaitļi, kam cipars „5" var atrasties jebkurā no tā 4 šķirām, ciparam „4" tad atliek 3 iespējamās vietas, bet pārējās 2 vietās viennozīmīgi būs „1". Tāpēc tādu skaitļu ir $4 \cdot 3 = 12$.

Tā kā skaitli 20 nevar citādi sadalīt viencipara reizinātājos, tad šeit ir aplūkotas visas iespējas un ir $30 + 12 = 42$ skaitļi, kuru ciparu reizinājums ir 20, bet summa ir 11.

**4.6.2. Atbilde:** 2011-ais septiņciparu *palindroms* ir 3010103.

**Risinājums:** Septiņciparu *palindroms* uzrakstāms formā $\overline{abcdcba}$, kur $a$, $b$, $c$, $d$ ir cipari (varbūt vienādi; $a \neq 0$). Jo mazāks ir četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$, jo mazāks ir *palindroms* $\overline{abcdcba}$, tāpēc pietiek apskatīt visus četrciparu skaitļus un noskaidrot, kurš no tiem pēc kārtas ir 2011-ais. Pirmais četrciparu skaitlis ir 1000, 2001-ais – 3000, tātad 2011-ais četrciparu skaitlis ir 3010 un meklētais septiņciparu *palindroms* ir **3010103.**

**4.6.3.** Mazākais taisnstūris, ko var izveidot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 5×6 rūtiņas, skat. A4.3. zīm.



A4.3. zīm.

**4.6.4. Atbilde:** Sešstūra īsākās malas garums ir 20 *cm*.

**Risinājums:** Apzīmēsim piecstūra īsākās malas garumu ar *a*, tad sešstūra garākās malas garums arī ir *a*.

Tad piecstūra perimetrs ir $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10$, bet sešstūra perimetrs ir $a + (a - 1) + (a - 2) + (a - 3) + (a - 4) + (a - 5) = 6a - 15$.

Tātad $5a + 10 = 6a - 15$ un sešstūra garākā mala $a = 25$ *cm*, bet sešstūra īsākā mala ir $a - 5 = 20$ *cm*.

**4.6.5. Atbilde:** Dimants atrodas zaļajā lādītē.

**Risinājums:** Aplūkosim, kuri apgalvojumi ir patiesi, ja dimants atrodas noteiktas krāsas lādītē.

| ***Dimants/ Apgalvojums*** | *Uz sarkanās lādītes* | *Uz dzeltenās lādītes* | *Uz zaļās lādītes* | *Uz brūnās lādītes* |
|---|---|---|---|---|
| *Sarkanajā lādītē* | Patiess | Patiess | Patiess | Aplams |
| *Dzeltenajā lādītē* | Aplams | Aplams | Patiess | Patiess |
| *Zaļajā lādītē* | Aplams | Aplams | Aplams | Patiess |
| *Brūnajā lādītē* | Aplams | Patiess | Patiess | Patiess |

Kā redzam, tikai tad, ja dimants atrodas zaļajā lādītē, patiess ir tieši viens apgalvojums.

## 4.7. SEPTĪTĀ KLASE

**4.7.1. a)** Piemēram, $3x + 1 = 2x + 1$.

**b)** Piemēram, $3x + 1 = 3x + 2$.

**c)** Izsakām no vienādojuma $x = \dfrac{d - b}{a - c}$. Lai vienādojumam nebūtu sakņu, jābūt $a = c$ un $b \neq d$. Ja $a=c$, tad šādas vērtības var izvēlēties 3 veidos, katram no tiem *b* un *d* var izvēlēties 6 veidos. Tātad pavisam ir $3 \cdot 6 = 18$ vienādojumi, kuriem nav atrisinājuma.

**4.7.2. a) Atbilde:** 10.

**b) Atbilde:** 2021055.

**Risinājums:** Apskatīsim uzdevuma atrisinājumu vispārīgajā gadījumā, ja plaknē ir dotas *n* taisnes. Tad katra taisne krusto visas pārējās $n - 1$ taisnes, katru citā punktā. Tā kā katrs krustpunkts šādā veidā tiek ieskaitīts tieši divas reizes (uz katras no abām taisnēm, kas krustojas šajā punktā), tad pavisam dažādo krustpunktu skaits ir $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ja $n = 5$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Ja $n = 2011$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{2011 \cdot 2010}{2} = 2021055$.

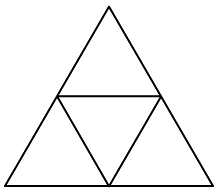
**4.7.3. Atbilde:** $u_{2011}$ dalās ar 7.

**Risinājums:** Saskaņā ar virknes veidošanas likumu, varam izteikt virknes $(n + 1)$-mo locekli

$$u_{n+1} = \underbrace{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_{n-1}^2}_{u_n} + u_n^2 = u_n + u_n^2 = u_n(1 + u_n).$$

Tātad, ja kāds virknes loceklis dalās ar 7, tad arī nākamais virknes loceklis dalīsies ar 7. Apskatīsim virknes pirmos locekļus: $u_1$=1, $u_2$=1, $u_3$=2, $u_4$=6, $u_5$=42. Redzam, ka $u_5$ dalās ar 7, tāpēc visi nākamie virknes locekļi dalās ar 7.

**4.7.4.** Sadalām doto trijstūri četros vienādos vienādmalu trijstūros kā parādīts A4.4. zīmējumā. Katra trijstūra visu malu garumi ir 1 *cm*, tāpēc attālums starp diviem punktiem, kas atrodas viena trijstūra iekšpusē vai uz tā kontūra, nepārsniedz malas garumu, t.i., 1 *cm*. Tā kā ir atzīmēti 5 sarkani punkti, tad vismaz divi sarkanie punkti būs atzīmēti viena trijstūra iekšpusē vai uz tā kontūra. Tie arī ir meklētie divi punkti.



A4.4. zīm.

**4.7.5. Atbilde:** Jā, Pēteris var uzvarēt.

**Risinājums:** Atbildot uz Jāņa gājieniem, Pēteris raksta ciparus tā, lai izveidotos skaitlis $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Šis skaitlis dalās ar 1001=13·11·7, tātad tas dalās arī ar 13.

## 4.8. ASTOTĀ KLASE

**4.8.1.** Skaitļi $k$ un $m$ norāda $y$ koordināti punktā, kur attiecīgā taisne krusto O$y$ asi, tātad $k < m$. Taišņu virziena koeficienti $a$ un $b$ norāda taišņu „slīpumu”: jo „stāvāka” taisne, jo lielāka koeficienta vērtība. Tā kā abas uzzīmētās funkcijas ir augošas, tad gan $a$, gan $b$ ir pozitīvi skaitļi. Tātad $a > b$. No tā seko, ka $b - a < 0$ un $k - m < 0$, tāpēc $(b-a)(k-m) > 0$.

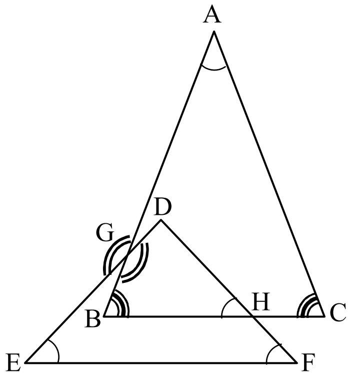
**4.8.2. Atbilde:** $\angle AGE = 138°$.

**Risinājums:** Dots, ka $\angle BAC = \angle DEF = 32°$ (skat. A4.5. zīm.). Tā kā trijstūris $DEF$ ir vienādsānu, tad arī $\angle DFE = 32°$. Tā kā taisnes $BC$ un $EF$ ir paralēlas, tad $\angle DHB = \angle DFE = 32°$ kā kāpšļu leņķi.

Tā kā vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi, tad trijstūrī $ABC$ iegūstam, ka $\angle GBC = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180° - 32°) = \frac{1}{2} \cdot 148° = 74°$, savukārt trijstūrī $EDF$ iegūstam, ka $\angle EDF = 180° - 2 \cdot \angle DEF = 116°$.

Četrstūra *BGDH* leņķu summa ir 360°, turklāt $\angle AGE = \angle BGD$ kā krustleņķi tāpēc

$$\angle \mathrm{AGE} = \angle BGD = 360° - \angle EDF - \angle DHB - \angle \mathrm{HBG} =$$
$$= 360° - 116° - 32° - 74° = \mathbf{138°}.$$




A4.5. zīm.

**4.8.3.** Lai reizinājums būtu nepāra skaitlis, visiem reizinātājiem jābūt nepāra skaitļiem. Divu skaitļu starpība ir nepāra skaitlis tikai tad, ja viens no skaitļiem ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra skaitlis. Ņemot pēc kārtas nepāra skaitu naturālu skaitļu, gan starp skaitļiem 1, 2, ..., $n$, gan starp skaitļiem $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ nepāra skaitļu būs par vienu vairāk nekā pāra skaitļu. Tātad nav iespējams sadalīt šos skaitļus $n$ pāros tā, ka katrā pārī viens skaitlis ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra. Tātad vismaz vienās iekavās būs divu nepāra skaitļu starpība, kas dod pāra skaitli, līdz ar to reizinājums arī būs pāra skaitlis.

**4.8.4. Atbilde:** 7541.

**Risinājums:** Tā kā $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, tad naturāla $k$ gadījumā $30 \cdot k + a$ dos tādus pašus atlikumus kā $a$ gan dalot ar 2, gan ar 3, gan ar 5. Tāpēc mums jāapskata skaitļi no 1 līdz 30 un jānoskaidro, cik starp tiem ir tādu, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5. Tādi ir astoņi: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 un 29.

Tā kā katrā intervālā $[30k; 30k + 29]$ ir astoņi skaitļi, kas nedalās ar 2, 3 vai 5, tad, lai noteiktu prasīto virknes locekļu vērtības, nepieciešams noteikt 1) kuram intervālam tas pieder – atrast attiecīgo $k$ vērtību ($k = 0$; 1; 2; ...), kā arī 2) kurš pēc kārtas elements intervālā tas ir. Izsakām $2011 = 8 \cdot 251 + 3$. Tātad $k = 251$ un tas ir trešais skaitlis savā intervālā. Tātad $a_{2011} = 251 \cdot 30 + 11 = 7541$.

**4.8.5. Atbilde:** $N = 10$ un $M = 14$.

**Risinājums:** Katrs zēns draudzējas ar 3 citiem, tāpēc zēnu savstarpējo draudzību skaits ir $\frac{3N}{2}$. Tātad $N$ ir pāra skaitlis.

Apskatīsim, kāds ir kopējais draudzības saišu skaits zēnu un meiteņu starpā: $7N = 5M$, tāpēc $N$ dalās ar 5, bet $M$ ar 7. Mazākās $N$ un $M$ vērtības, kas der par uzdevuma atrisinājumu, ir $N = 10$ un $M = 14$.

Atliek parādīt piemēru, kā uzdevuma nosacījumus var realizēt.

Zēnu draudzību tabula:

| z\z | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | + | | | | + | | | | + |
| 2 | + | | + | | | | + | | | |
| 3 | | + | | + | | | | + | | |
| 4 | | | + | | + | | | | + | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | + | | + | | | | + |
| 6 | + | | | | + | | + | | | |
| 7 | | + | | | | + | | + | | |
| 8 | | | + | | | | + | | + | |
| 9 | | | | + | | | | + | | + |
| 10 | + | | | | + | | | | + | |

Meiteņu draudzību tabula:

| m\m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | + | | | | + | | | | + | | | | + |
| 2 | + | | + | | | | + | | | | + | | | |
| 3 | | + | | + | | | | + | | | | + | | |
| 4 | | | + | | + | | | | + | | | | + | |
| 5 | | | | + | | + | | | | + | | | | + |
| 6 | + | | | | + | | + | | | | + | | | |
| 7 | | + | | | | + | | + | | | | + | | |
| 8 | | | + | | | | + | | + | | | | + | |
| 9 | | | | + | | | | + | | + | | | | + |
| 10 | + | | | | + | | | | + | | + | | | |
| 11 | | + | | | | + | | | | + | | + | | |
| 12 | | | + | | | | + | | | | + | | + | |
| 13 | | | | + | | | | + | | | | + | | + |
| 14 | + | | | | + | | | | + | | | | + | |

Tabulās var redzēt, ka 1. – 5. zēns draudzējas ar 1. – 7. meiteni, bet 6. – 10. zēns draudzējas ar 8. – 14. meiteni.

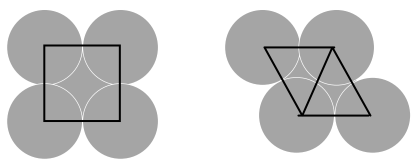
## 4.9. DEVĪTĀ KLASE

**4.9.1.** Izmantosim formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un pārveidosim doto skaitli:

$$2^{15}+3^{12}=\left(2^5\right)^3+\left(3^4\right)^3=\left(2^5+3^4\right)\left(2^{10}-2^5\cdot 3^4+3^8\right).$$

Tā kā abās iekavās izteiksmju vērtības ir naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1, dotais skaitlis nav pirmskaitlis.

**4.9.2. a)** Iekrāsoto figūru veido kvadrāts, kura virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2 vienības, un četri riņķi, no kuriem izgriezta ceturtdaļa (skat. A4.6. zīm. a)). Tātad kopējais laukums ir $2^2+4\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=4+3\pi$ laukuma vienības.



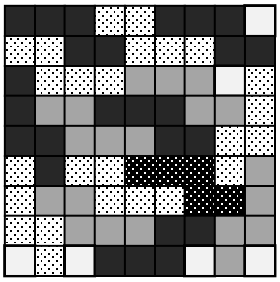
a) b)

A4.6. zīm.

**b)** Iekrāsoto figūru veido divi vienādmalu trijstūri, kuru virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2 vienības, divi riņķi, no kuriem izgriezta sestdaļa un divi riņķi, no kuriem izgriezta trešdaļa (skat. A4.6. zīm. b)). Tātad kopējais laukums ir $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2+\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}+3\pi$ laukuma vienības.

**4.9.3.** Ievērosim, ka, ar dotajām figūrām pārklājot kvadrāta pirmās rindas rūtiņas, vismaz viena rūtiņa paliks nepārklāta. Tas pats attiecas uz kvadrāta pēdējo rindu. Tātad vismaz divas rūtiņas paliks nepārklātas. No tā secinām, ka kvadrātā 9×9 varēs izvietot ne vairāk kā 15 figūras, jo 16 figūru kopējais laukums ir 80.

Tas, ka 15 figūras izvietot ir iespējams, parādīts A4.7. zīmējumā.



A4.7. zīm.

**4.9.4. Atbilde:** 11.

**Risinājums:** Aprēķināsim nākamos virknes locekļus: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ... . Tā kā katrs nākošais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš sastapts skaitlis, izveidojas periods. Kā redzams, sākot ar piekto virknes locekli, atkārtojas skaitļu grupa „5, 8, 11”. Tā kā 2011 – 4 = 2007 un 2007 dalās ar 3 bez atlikuma, tad virknes 2011. loceklis būs tāds pats kā perioda 3. loceklis, t.i., 11.

**4.9.5. Atbilde:** Lielākais labo rūtiņu skaits ir 8.

**Risinājums:** Vispirms pierādīsim, ka visas deviņas rūtiņas vienlaicīgi nevar būt labas. Tā kā visi skaitļi ir savā starpā atšķirīgi, tad kāds no tiem būs vismazākais, t.i., būs lielāks par 0 kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem.

To, ka astoņas rūtiņas var būt labas, var redzēt A4.8. zīmējumā (katrā rūtiņā iekavās ir norādīts šīs rūtiņas *svars*).

| | | |
|---|---|---|
| 8<br>(1) | 9<br>(3) | 7<br>(1) |
| 3<br>(1) | 1<br>(0) | 2<br>(1) |
| 5<br>(1) | 6<br>(3) | 4<br>(1) |

A4.8. zīm.

# 5. Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. (novada) kārta

## 5.5. Piektā klase

**5.5.1.** Piemēram, $5 \rightarrow 15 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 27 \rightarrow 81 \rightarrow 8 \rightarrow 24 \rightarrow 72 \rightarrow 7 \rightarrow 21$.

Šāda tipa uzdevumā pietiek norādīt vienu derīgu atbildi, kaut arī tādas iespējamas vairākas. Atrisinājums iegūstams mēģinājumu ceļā, tomēr paskatīsimies, kā domāt, lai pie tā tiktu.

Ja dots viencipara skaitlis, var veikt tikai vienu no atļautajām darbībām – reizināšanu ar 3. Ja ir divu vai vairāk ciparu skaitlis, ir divas iespējas. Sākumā pavērojam, kādus skaitļus var iegūt no 5:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & \nearrow & 36 & \\
 & 45 & \rightarrow & 4 & \rightarrow 12 & \rightarrow & 1 & \rightarrow \\
 & \uparrow & \searrow & 135 & \rightarrow 13 & & 39 & \\
5 \rightarrow & 15 & & & \searrow 405 & \rightarrow & 40 & \\
 & \downarrow & & & & \searrow & 1215 & \\
 & 1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow 9 & \rightarrow & 27 &
\end{array}$$

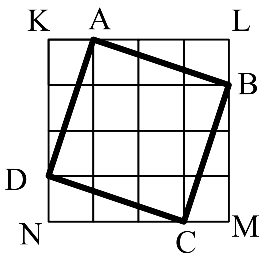
Redzams, ka variantu kļūst daudz, tāpēc tā vietā, lai analizētu tos visus, padomāsim, kā var iegūt prasīto skaitli.
Skaitli 21 var iegūt no 7 ar reizināšanu, vai no 210, 211, ..., 219 ar cipara svītrošanu. Tā kā skaitlis 7 nedalās ar 3, to var iegūt tikai, svītrojot pēdējo ciparu. Savukārt minētos trīsciparu skaitļus var iegūt no četrciparu, vai, tos, kas dalās ar 3, no divciparu skaitļiem. Tā kā $210 = 3 \cdot 70$, bet $219 = 3 \cdot 73$, tad redzams, ka patiesībā šajā solī iegūt trīsciparu skaitli nebija nepieciešams – varēja svītrot pēdējo ciparu, iegūt 7 un to reizināt ar 3.

Tā kā arī skaitļu 2100 līdz 2199 ieguvei ar reizināšanu ir vajadzīgi skaitļi, kas sākas ar 7, tad četrciparu skaitļu lietošanu aplūkotu tikai tad, ja atrisinājumu nevarētu dabūt, lietojot mazākus skaitļus.

Tātad jāmēģina iegūt skaitli ar 7 desmitiem. Reizināšanas ceļā var dabūt 72, 75 vai 78 attiecīgi no 24, 25 vai 26. Šeit nonākam līdz sākumā minētajam atrisinājumam, jo 24 var iegūt no 8, ko savukārt no 81, kas rodas no 27.

**5.5.2. Atbilde:** 10 rūtiņas.

**Risinājums:** Lai aprēķinātu kvadrāta *ABCD* laukumu, no kvadrāta *KLMN* laukuma jāatņem trijstūru *ALB*, *BMC*, *CND*, *DKA* laukumi (skat. A5.1. zīm.). Saliekot kopā trijstūrus *ALB* un *CND* ar vienādām malām *AB* un *DC*, iegūstam taisnstūri ar malu garumiem 1 un 3 rūtiņas. No trijstūriem *BMC* un *DKA* iegūstam otru tādu pašu taisnstūri. Tātad $S(ABCD) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 10$ rūtiņas.




A5.1. zīm.

**5.5.3. Atbilde:** Piemēram, 1428357.

**Risinājums:** Šajā uzdevumā pietiek atrast vienu skaitli, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un pamatot tikai to, ka tas der – satur prasītos ciparus un dalās ar 7. Parādīsim arī, kā vajadzīgo skaitli izdomāt.

No cipariem 1, 2, 3, 4, 5 un 8 var izveidot trīs divciparu skaitļus, kas dalās ar 7. Tie ir 14, 28 un 35. Ievērosim, ka, ja *a, b* un *c* dalās ar 7, tad arī $100000 \cdot a$, $1000 \cdot b$ un $10 \cdot c$ dalās ar 7, turklāt, saskaitot vairākus skaitļus, kas dalās ar 7, summa dalās ar 7. Tāpēc mēs *a, b* un *c* vietā varam ielikt dažādus tikko izveidotos divciparu skaitļus un iegūt atrisinājumus. Par atbildi der, piemēram, skaitlis $1428357 = 1400000 + 28000 + 350 + 7$, kas dalās ar 7. Uzdevuma prasības apmierina arī daudzi citi skaitļi. Mēs varam ne tikai vienalga kuru no trim minētajiem divciparu skaitļiem izvēlēties par *a* (piemēram, der 3528147), bet arī ciparu 7 novietot kā pirmo, trešo vai piekto (piemēram, 7352814, 2873514, 1435728 ir derīgas atbildes, tāpat kā vēl daudzas citas).

**5.5.4. a)** Nē, nevar gadīties. Tad katrā rindā kopējais ziedu skaits būtu trīs nepāra saskaitāmo summa, t.i., nepāra skaitlis, bet katrā rindā jābūt 10 (pāra skaitlis) ziediem.

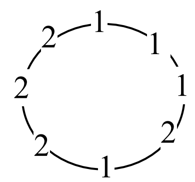
**b)** Jā, var. Skat., piem., A5.2. zīm. (Ar vienādiem cipariem apzīmētajos lauciņos jāstāda vienas krāsas tulpes, ar dažādiem – dažādu krāsu tulpes.)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |

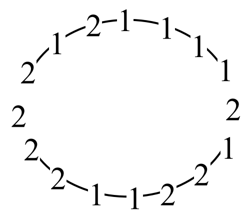
A5.2. zīm.

**5.5.5. a)** Skat., piem., A5.3. zīm.

**b)** Skat., piem., A5.4. zīm.




A5.3.zīm.




A5.4.zīm.

## 5.6. SESTĀ KLASE

**5.6.1. Atbilde:** Piemēram, 409999 un 410000.

**Risinājums:** Šajā uzdevumā pietiek atrast vienu skaitļu pāri, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un pamatot tikai to, ka tas der – tie ir pēc kārtas sekojoši un to abu ciparu summas dalās ar 5. Tomēr parādīsim arī, kā vajadzīgos skaitļus izdomāt.

Ja diviem blakusesošiem skaitļiem atšķiras tikai vieni, tad to ciparu summa atšķiras par 1, tāpēc tās abas nevar dalīties ar 5. Līdz ar to vienam no meklējamajiem skaitļiem pēdējais cipars ir 9, bet otram 0. Ja šiem skaitļiem ir vienāds skaits simtu, bet mainās desmiti, tad to ciparu summu starpība ir 8, tāpēc arī tādi skaitļi šoreiz nederēs.

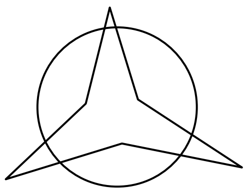
Gadījumā ar vienādiem tūkstošu cipariem ar $x$ apzīmēsim skaitli, ko iegūst, ja saskaita visus mazākā skaitļa ciparus, izņemot pēdējos divus. Tad mazākā skaitļa ciparu summa būs $x+9+9$, bet lielākā $x+1$, jo tam simtu cipars ir par 1 lielāks, bet pēdējās divas – nulles. Redzam, ka ciparu summa atšķiras par 17, kas nedalās ar 5. Tātad vismaz pēdējie 3 cipari vienam no skaitļiem ir „9”, bet otram „0”. Tad skaitļiem atšķiras pēdējie 4 cipari un iegūstam ciparu summas $y+9+9+9$ un $y+1$, kas atšķiras par 26.

Gadījums, kad mazākajam skaitlim pēdējie 4 cipari ir „9”, mums izrādās derīgs, jo $z+9+9+9+9$ un $z+1$ starpība ir 35, kas dalās ar 5. Atliek izvēlēties tādus skaitļu pirmos ciparus, lai $z+1$ dalītos ar 5. Tie var būt tikpat labi 49999 un 50000, kā 229999 un 230000, kā arī daudzi citi skaitļu pāri ar tikpat lielu vai lielāku ciparu skaitu.

**5.6.2. Atbilde:** Šajā virknē skaitlis 53421 atrodas 114. vietā

**Risinājums:** Pavisam šajā virknē ir $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ skaitļi. Interesējošais skaitlis ir pēdējais, kas sākas ar cipariem 53, un pēc šī skaitļa virknē vēl ir 6 skaitļi, kas sākas ar cipariem 54. Tātad šajā virknē skaitlis 53421 atrodas 114. vietā.

**5.6.3. a)** Var uzzīmēt; skat. piemēram, A5.5. zīm.



A5.5.zīm.

**b)** Nē, nevar. Lai septiņstūra malas krustotu riņķa līniju, jābūt virsotnēm, kas atrodas riņķa iekšpusē, un virsotnēm, kas atrodas riņķa ārpusē. Ar $A_1$ apzīmēsim septiņstūra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ virsotni, kas atrodas riņķa iekšpusē. Lai mala $A_1A_2$ krustotu riņķa līniju, virsotnei $A_2$ jāatrodas riņķa ārpusē. Līdzīgi virsotnei $A_3$ jāatrodas riņķa iekšpusē, virsotnei $A_4$ – riņķa ārpusē, virsotnei $A_5$ – riņķa iekšpusē, virsotnei $A_6$ – riņķa ārpusē, virsotnei $A_7$ – riņķa iekšpusē. Bet tādā gadījumā septiņstūra malu $A_1A_7$ riņķa līnija nekrusto.

**5.6.4.** Nē, nevar. Ievērosim, ka divu dažādu naturālu skaitļu summa ir lielāka nekā 2, un visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 2, ir nepāra skaitļi. Ja uzdevuma prasības būtu iespējams izpildīt, tad blakus stāvošajiem skaitļiem būtu jābūt ar dažādu paritāti. Tā kā pa apli uzrakstīto skaitļu skaits ir 5 (nepāra skaitlis), tad kādā vietā blakus atradīsies vienādas paritātes skaitļi, kuru summa būs pāra skaitlis, lielāks nekā 2, t.i., tas būs salikts skaitlis.

**5.6.5.** Uzdevumam iespējami dažādi risinājumi. Svarīgi pārliecināties, ka visu atbilžu variantu gadījumā beigās varēs noteikt viennozīmīgu atbildi.

Piedāvājam vienu no risinājumiem:

1) Pirmajam rūķītim jautā, vai viņa iedomātais skaitlis ir lielāks nekā otrā rūķīša iedomātais skaitlis.

2) Otrajam – vai viņa iedomātais skaitlis ir lielāks nekā trešā rūķīša iedomātais skaitlis.

3) Trešajam rūķītim jautā, vai viņš ir iedomājies skaitli 2.

Ja uz 1) un 2) jautājumu tika saņemtas atbildes “ jā”, tad pirmā, otrā un trešā rūķīšu iedomātie skaitļi ir attiecīgi 3, 2, 1. Ja abas atbildes bija „nē”, tad iedomātie skaitļi ir attiecīgi 1, 2, 3.

Ja uz 1) jautājumu atbilde ir „ nē”, bet uz otro – „jā”, tad otrā rūķīša iedomātais skaitlis ir 3. Pārējo rūķīšu iedomātos skaitļus nosaka pēc atbildes uz 3) jautājumu.

Ja uz 1) jautājumu atbilde ir „jā”, bet uz otro – „nē”, tad otrā rūķīša iedomātais skaitlis ir 1. Atkal pārējo rūķīšu iedomātos skaitļus var noteikt pēc atbildes uz 3) jautājumu.

## 5.7. SEPTĪTĀ KLASE

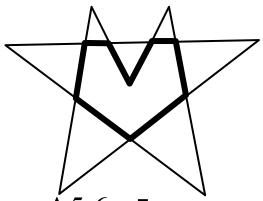
**5.7.1. Atbilde:** Jā, var; piemēram, 9 → 63 → 441 → 41 → 287 → 27.

**Risinājums:** Skaitlis 9 noteikti jāreizina ar 7, jo tam ir tikai 1 cipars. Tālāk ir 2 iespējas – var reizināt ar 7, iegūstot 441, vai svītrot 6, iegūstot 3.

Nākošajā solī var iegūt 41 vai 3087 no 441 vai 21 no 3. Tālāk iespēju kļūst vairāk, tāpēc paanalizēsim iegūstamo skaitli.

Tā kā 27 nedalās ar 7, tas ir iegūts svītrojot ciparu 7, 8 vai 9. Tātad 27 var būt iegūts no 727, 277, 827, 287, 278, 927, 297 vai 279. Protams, arī šie skaitļi var būt iegūti, svītrojot ciparu, bet paskatīsimies, kuri dalās ar 7 – tie var tikt iegūti reizināšanas ceļā. Viegli var konstatēt, ka tāds ir tikai viens – 287, un to var iegūt, reizinot 41 ar 7. Tas ir īsākais veids, kā var iegūt prasīto.

**5.7.2.** Viens no iespējamiem zīmējumiem ir šāds.



A5.6. zīm.

**5.7.3. Atbilde:** tieši divi no tiem.

**Risinājums:** Vispirms pierādīsim, ka kāds no skaitļiem ir 0. Ja neviens no skaitļiem nav nulle, tad visu blakus skaitļu reizinājumi ir negatīvi, tātad jebkuri divi blakus skaitļi ir ar pretējām zīmēm.

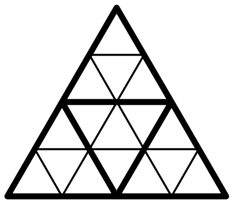
Ja mēs skaitļus apzīmējam ar $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, tad $a$ un $b$ ir ar pretējām zīmēm, $b$ un $c$ ir ar pretējām zīmēm, tātad $a$ un $c$ ir ar vienādām zīmēm. Tieši tāpat pamato, ka $c$ un $e$ un $e$ un $g$ arī ir ar vienādām zīmēm. Bet tad arī $a$ un $g$ ir ar vienādām zīmēm un reizinājums $ag$ ir pozitīvs – pretruna.

Tātad viens no skaitļiem ir 0, pieņemsim, ka $g = 0$. Tad zīmes skaitļiem $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ var būt vai nu “+ – + – + –” vai “– + – + – +”. Redzams, ka no reizinājumiem $abc$, $bcd$, $cde$, $def$ divi ir pozitīvi (“– + –”) un divi negatīvi (“+ – +”). Pārējie trīs triju blakusstāvošu skaitļu reizinājumi satur reizinātāju $g$, tātad to vērtība ir 0. Tātad tieši divi no šiem reizinājumiem ir pozitīvi.

**5.7.4.** Pakāpeniski pārveidosim doto skaitli:

$$
\begin{aligned}
&1004041 = \\
&= 1014141 - 10100 = \\
&= 101 \cdot 10000 + 101 \cdot 40 + 101 \cdot 1 - 101 \cdot 100 = \\
&= 101 \cdot (10000 + 40 + 1 - 100) = \\
&= 101 \cdot 9941, \text{ tātad tas nav pirmskaitlis.}
\end{aligned}
$$

**5.7.5.** Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2 (skat. A5.7. zīm.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5+5+5+3=18$, kas bija jāpierāda.



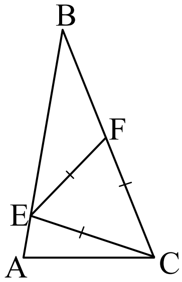
A5.7. zīm.

## 5.8. ASTOTĀ KLASE

**5.8.1.** Pārveidosim doto skaitli, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas:

$$3999991=4000000-9=2000^2-3^2=(2000-3)\cdot(2000+3)=1997\cdot 2003.$$

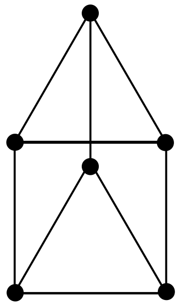
**5.8.2.** Tā kā trijstūris *CEF* ir vienādmalu, tad $\angle FCE = \angle CEF = \angle EFC = 60°$. Redzam, ka $\angle BFE$ un $\angle EFC$ ir blakusleņķi, tāpēc $\angle BFE = 180° - 60° = 120°$. No $\Delta BFE$ iekšējo leņķu summas iegūst $\angle BEF = 180° - 30° - 120° = 30°$, tātad $\Delta EBF$ – vienādsānu un $BF = EF$. Savukārt $EF = FC$ kā vienādmalu trijstūra malas. Seko, ka $BF = FC$. (skat. A5.8 zīm.)




A5.8. zīm.

**5.8.3.** Ievērosim, ka skaitlis $\overline{aabbcc}=11\cdot\overline{a0b0c}$ dalās ar 11, kas ir pirmskaitlis (to mazākos reizinātājos sadalīt nevar). Visi cipari ir mazāki par 11, tāpēc vienīgais cipars, kas dalās ar 11, ir 0. Ja skaitlī kāds cipars ir 0, tā ciparu reizinājums ir 0. Tātad $\overline{aabbcc}$ nevar būt neviena naturāla skaitļa ciparu reizinājums.

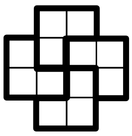
**5.8.4.** Skat., piem., A5.9. zīm.; katra novilktā nogriežņa garums ir 1 *cm*, bet pārējie attālumi starp šiem punktiem ir lielāki vai mazāki nekā 1 *cm*.



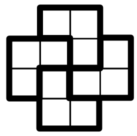
A5.9. zīm.

**5.8.5.** Skat., piem., A5.10. zīm. attēloto figūru. Dalot to „*stūrīšos*”, sākot no augšējās rindas, iegūst trīs sadalījumus (skat. A5.10. a), b) un c) zīm.). Taču A5.10. b) un A5.10. c) zīm.

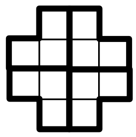
attēlotie sadalījumi ir viens otra spoguļattēls, tāpēc ir tikai divi dažādi veidi, kā šo figūru sadalīt „ *stūrīšos*".



A5.10. c) zīm.



A5.10. b) zīm.

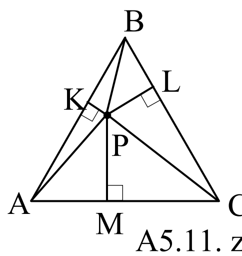


A5.10. a) zīm.

## 5.9. DEVĪTĀ KLASE

**5.9.1.** Ja $x = 1$, tad $y = a - 2 + b = 2012 - 2 = 2010$, savukārt, ja $x = -1$, tad $y = a + 2 + b = 2012 + 2 = 2014$. Tātad punkti (1; 2010) un (−1; 2014) pieder visu minēto funkciju grafikiem.

**5.9.2.** Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra *ABC* malas garumu ar *a* un augstumu ar *h* (skat. A5.11.zīm.). Tad aprēķināsim trijstūra *ABC* laukumu kā trijstūru *APB*, *APC* un *BPC* summu: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot PK + \frac{1}{2}a \cdot PL + \frac{1}{2}a \cdot PM = \frac{1}{2}a \cdot (PK + PL + PM)$. No otras puses $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$. Tātad $PK + PL + PM = h$ neatkarīgi no punkta *P* izvēles.




A5.11. zīm.

**5.9.3. Atbilde:** $n = 5, 6, 7$ un $n \geq 10$.

**Risinājums:** Ja $n \leq 4$ ir pārāk maz cilvēku, lai izveidotu kaut vienu grupu. Ja $n = 8$ vai $n = 9$ uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams, jo vienai grupai ir pārāk daudz cilvēku, bet divas mazākā veida jau pārsniedz 9.

Ja $n = 5$, 6 vai 7, tad var izveidot vienu atbilstošā lieluma grupu.

Ja $n \geq 10$: $n = 10 = 5 + 5$; $n = 11 = 5 + 6$, $n = 12 = 6 + 6$, $n = 13 = 6 + 7$, $n = 14 = 7 + 7$.

Ja $n \geq 15$, varam izteikt $n = 5k + i$, $k \geq 3$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Pārveidojot iegūstam $n = 5(k - 2) + 5 \cdot 2 + i = 5(k - 2) + (10 + i)$. Tā kā $n = 10 + i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) cilvēkus var sadalīt vajadzīgā lieluma grupās un $5k$ var sadalīt $k$ grupās pa 5 cilvēkiem katrā, tad visiem $n \geq 10$ uzdevuma prasības var izpildīt.

**5.9.4. a)** Tā kā divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējais cipars ir pāra, ja iepriekšējie virknes locekļi ir nepāra, bet nepāra, ja tie ir ar dažādu paritāti, tad, apzīmējot virknes pāra locekļus ar *p* un nepāra ar *n*, iegūsim virkni *n*, *n*, *p*, *n*, *n*, *p*, *n*, .... Viegli saprast, ka šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 3. Tāpēc tikai tie locekļi, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir pāra, tāpēc 2012. loceklis ir nepāra.

**b)** Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir

1, $\underline{1}$, $\underline{2}$, 5, 9, 6, 7, 5, 4, 1, 7, 0, 9, $\underline{1}$, $\underline{2}$, 5, ...

Katrs virknes loceklis ir viennozīmīgi noteikts ar diviem iepriekšējiem. Tā kā virknes otrais un trešais loceklis ir 1 un 2, un 14. un 15. loceklis arī ir 1 un 2, tad virkne, sākot ar 2. locekli, ir periodiska ar perioda garumu 12. Tāpēc pēdējais pilnais periods pirms 2012 beidzas pie $1 + 12 \cdot 167 = 2005$. Tā kā $2012 - 2005 = 7$, tad 2012. loceklis ir periodā septītais, tātad tas ir 5.

**5.9.5.** Ievērosim: ja skaitlis $x$ ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli $n$, tad arī skaitlis $n - x$ ir savstarpējs pirmskaitlis ar $n$. Tāpēc visus skaitļus no 1 līdz $n - 1$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar $n$, var sagrupēt pa pāriem $x$ un $n - x$. (Ja $n$ ir pāra skaitlis $2m$, tad $m$ un $n - m = m$ neveido divu dažādu skaitļu pāri, taču šo pāri neaplūkojam, jo $m$ un $2m$ nav savstarpēji pirmskaitļi).

Katrā pārī skaitļu summa ir $n$. Tātad visu aplūkojamo skaitļu summa dalās ar $n$.

# 6. Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta

## 6.9. Devītā klase

**6.9.1. a)** No pieciem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 5. Tātad arī to reizinājums dalās ar 5, bet 20112012 ar 5 nedalās, līdz ar to nevar būt piecu pēc kārtas ņemtu skaitļu reizinājums.

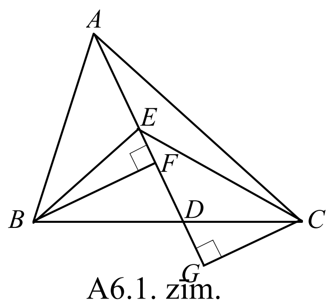
**b)** No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem divi ir pāra skaitļi, no kuriem viens dalās ar 4. To reizinājums dalās ar 8, bet 20112012 ar 8 nedalās, tātad nevar būt četru pēc kārtas ņemtu skaitļu reizinājums.

**6.9.2.** Pieņemsim, ka šādu trijstūri iespējams izveidot. Apzīmēsim šī trijstūra laukumu ar $S$. No trijstūra laukuma formulas mala ir $a=\frac{2S}{h}$, tāpēc uzdevumā minētā trijstūra malu garumi ir $\frac{2S}{4}$, $\frac{2S}{7}$ un $\frac{2S}{10}$. Divu īsāko malu garumu summai jābūt lielākai par trešās malas garumu. Bet $\frac{2S}{7}+\frac{2S}{10}=\frac{17}{70}2S=\frac{34}{140}2S<\frac{35}{140}2S=\frac{2S}{4}$ - pretruna. Tātad šādu trijstūri izveidot nav iespējams.

**6.9.3. Atbilde:** $q_2=0$.

**Risinājums:** Pēc Vjeta teorēmas $q_1=ab$, $q_2=bc$, $q_3=ac$. Tātad $ab\le bc\le ac\le 0$. Ja neviens no skaitļiem $a$, $b$, $c$ nav nulle, tad divi no tiem ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi, tāpēc to reizinājums ir lielāks nekā nulle. Tātad vismaz viens no skaitļiem $a$, $b$, $c$ ir 0. Tad $q_3=ac=0$, tātad $a$ vai $c$ ir 0. Ja $c=0$, tad $q_2=bc=0$. Ja $a=0$, $c\ne 0$, tad $q_1=ab=0$ un no nevienādības $0\le q_2\le 0$ seko, ka $q_2=0$.

**6.9.4.** Atradīsim $AE$ un $BC$ krustpunktu $D$ un pieņemsim, ka $\angle ADB=\alpha\le 90°$. Novilksim perpendikulus $BF$ un $CG$ pret $AD$ (skat. A6.1 . zīm.).



A6.1. zīm.

Pielietojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūros $ABF$ un $BEF$, iegūstam $AB^2=AF^2+BF^2$ un $BE^2=BF^2+EF^2$, tāpēc

$$AB^2-BE^2=\left(AF^2+BF^2\right)-\left(BF^2+EF^2\right)=$$
$$=AF^2-EF^2=$$
$$=\left(AF-EF\right)\left(AF+EF\right)=$$
$$=AE\left(AF+EF\right).$$

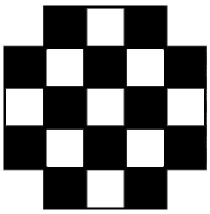
No Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūros $ACG$ un $ECG$ iegūstam

$$AC^2 = AG^2 + CG^2 \text{ un } EC^2 = EG^2 + CG^2 \text{, tāpēc}$$

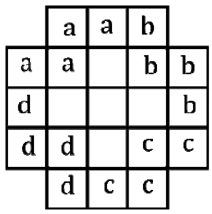
$$\begin{aligned} AC^2 - EC^2 &= \left(AG^2 + CG^2\right) - \left(EG^2 + CG^2\right) = \\ &= AG^2 - EG^2 = \\ &= (AG - EG)(AG + EG) = \\ &= AE(AG + EG). \end{aligned}$$

Tā kā dots, ka $AB^2 - BE^2 = AC^2 - EC^2$, tad tikko apskatītās izteiksmes ir vienādas un $AF + EF = AG + EG$. Pieskaitot abām pusēm $AE$, iegūstam $AE + AF + EF = AE + AG + EG$ jeb $2AF = 2AG$. Tātad punkti $F$ un $G$ sakrīt, līdz ar to $AD \perp BC$.

**6.9.5.** Izkrāsosim doto figūru šaha galdiņa veidā, skat. A6.2. zīm.



A6.2. zīm.




A6.3. zīm.

Katra izgriežamā figūriņa aizņem tieši divas baltas un divas melnas rūtiņas. Tā kā ir deviņas baltas rūtiņas, tad var izgriezt ne vairāk kā četras figūriņas. To, ka četras figūriņas var izgriezt, skat., piem., A6.3. zīm. (vienas figūriņas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem).

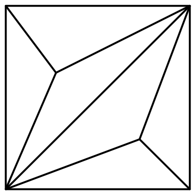
# 7. LATVIJAS 39. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

## 7.5. PIEKTĀ KLASE

**7.5.1. Atbilde:** Nevar gadīties.

**Risinājums:** Ja skaitļa pēdējais cipars ir 1, 4, 6 vai 9, tad septiņas reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 7, 8, 2 vai 3, bet nevienu no šiem cipariem minētie skaitļi nesatur.

**7.5.2.** Viens iespējams sadalījuma variants attēlots A7.1. zīmējumā.



A7.1. zīm.

**7.5.3. Atbilde:** Jāpaņem vismaz 7 pogas.

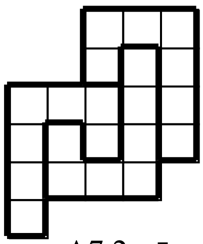
**Risinājums:** Ja paņems tikai 6 pogas, var gadīties, ka starp tām ir 1 balta, 2 zaļas un 3 sarkanas – nevienas krāsas pogas nav vajadzīgajā skaitā. Ar 7 pogām pietiek, jo, ja ir 7 pogas, starp kurām nav 2 baltu, ir vai nu vismaz 4 vienas krāsas pogas, vai arī 3 sarkanas un 3 zaļas.

**7.5.4. Atbilde:** No 17. stāva.
**Risinājums:** Ievērosim, ka šajā mājā ar doto liftu ne no viena stāva nav iespējams nokļūt uz 17. stāvu (zemākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz augšu, ir 1 + 17 = 18. stāvs, bet augstākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz leju ir 24 – 8 = 16. stāvs). No 17. stāva uz citiem stāviem var nokļūt, piem., šādā veidā:

17. → 9. → 1. → 18. → 10. → 2. →19. → 11. → 3. → 20. →12. → 4. →

→ 21. → 13. → 5. → 22. → 14. →6. → 23. → 15. → 7. → 24. →16. → 8.

**7.5.5.** Der A7.2. zīmējumā attēlotais dalījums.



A7.2. zīm.

## 7.6. SESTĀ KLASE

**7.6.1. Atbilde:** 73.

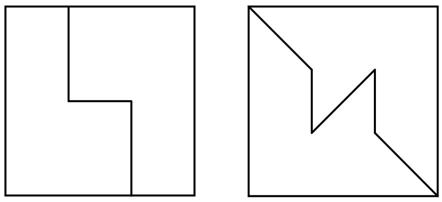
**Risinājums:** Pēc katras darbības visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa palielinās par 2 (divu nodzēsto skaitļu vietā tiek rakstīta to summa, palielināta par 2, bet pārējie skaitļi netiek mainīti, tātad arī to summa nemainās). Tātad beigās palikušais vienīgais skaitlis ir vienāds ar $S+2\cdot n$, kur $S$ ir visu sākumā uzrakstīto skaitļu summa, bet $n$ ir izpildīto darbību skaits. Tā kā sākumā uz tāfeles bija 10 skaitļi, bet pēc vienas darbības izpildes skaitļu skaits samazinās par vienu, tad Alfons pavisam izpildīja 9 darbības (t.i. $n = 9$). Pakāpeniski iegūstam beigās palikušo skaitli:

$$S + 2 \cdot n = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) + 2 \cdot 9 =$$

$$= \frac{(1+10) \cdot 10}{2} + 18 =$$

$$= 55 + 18 = 73.$$

**7.6.2.** Viena dalījuma iespēja redzama A7.3. a) un b) zīmējumos.

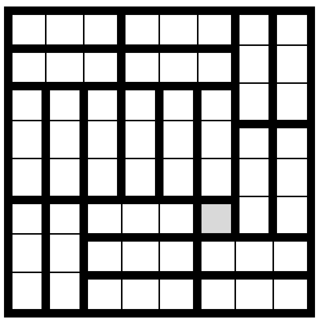


a) b)

A7.3. zīm.

**7.6.3.** Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas var izvietot 21 taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas (skat. A7.4. zīm.). Katrā no šiem taisnstūriem ir jābūt vismaz vienai zaļai rūtiņai. Tātad ir nepieciešams nokrāsot vismaz 21 rūtiņu.

Parādīsim, ka ar 21 rūtiņu pietiek. Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1, 2 vai 3 tā, ka katrā 1×3 rūtiņu grupā būtu ierakstīti visi skaitļi (skat. A7.5. zīm). Nokrāsojot zaļas visas rūtiņas, kurās ierakstīts 1 (tādu ir 21), iegūsim situāciju, ka nebūs iespējams izvēlēties neaizkrāsotu 1×3 rūtiņu grupu.

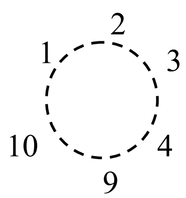


A7.4. zīm.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |

A7.5. zīm.

**7.6.4. a)** Jā, var; skat., piem., A7.6. zīm.




A7.6. zīm.

**b)** Nē, nevar. Divu dažādu naturālu skaitļu summa ir vismaz 1 + 2 = 3. Visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 2, ir nepāra skaitļi. Tātad jebkuru divu blakus uzrakstītos skaitļu summai jābūt nepāra skaitlim, t.i., jebkuru divu blakusstāvošu skaitļu paritātēm jābūt dažādām. Taču, lai arī kā 7 skaitļus izvietotu pa apli, vismaz vienā vietā blakus atradīsies divi vienas paritātes skaitļi, kas summā dod pāra skaitli. Bet pāra skaitļi, kas lielāki nekā 2, nav pirmskaitļi.

**7.6.5. Atbilde:** 53.

**Risinājums:** Ja zīmuļu skaits ir pilni desmiti, tad tos var sapakot kastītēs pa 10 zīmuļiem. Ja zīmuļu skaits nav izsakāms veselos desmitos, tad zīmuļu pakošanai jāizmanto arī 7 zīmuļu kastītes. Mazākie skaitļi, kas izsakāmi kā skaitļa 7 daudzkārtņi, ir 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63. Visus skaitļus, kas lielāki nekā 63, var izteikt kā atbilstošā 7 daudzkārtņa (kura vienu cipars sakrīt ar izsakāmā skaitļa vienu ciparu) un pilnu desmitu summu. Savukārt nevienu skaitli, kas mazāks nekā 63 un kura pēdējais cipars ir 3, nevar izteikt kā 7 daudzkārtņa un pilnu desmitu summu. Lielākais no tādiem skaitļiem ir 53. Visus skaitļus no 54 līdz 62 var izteikt, piem.,

$54 = 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4$, $55 = 7 \cdot 5 + 10 \cdot 2$, $56 = 7 \cdot 8$,

$57 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 5$, $58 = 7 \cdot 4 + 10 \cdot 3$, $59 = 7 \cdot 7 + 10 \cdot 1$,

$60 = 10 \cdot 6$, $61 = 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4$, $62 = 7 \cdot 6 + 10 \cdot 2$.

## 7.7. SEPTĪTĀ KLASE

**7.7.1. Atbilde:** Nē, nevar.

**Risinājums:** Reizinājums $ab(3a+5b)$ ir pāra skaitlis: ja kāds no reizinātājiem $a$ vai $b$ ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis, savukārt, ja $a$ un $b$ abi ir nepāra skaitļi, tad summa $3a + 5b$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitlis.

**7.7.2. Atbilde:** 7 veidos.

**Risinājums:** No trijstūra nevienādības (katru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala) seko, ka 1 cm garais nogrieznis nav izmantojams neviena trijstūra izveidošanai. No pārējiem nogriežņiem trijstūrus var izveidot 7 veidos: (3 cm, 5 cm, 7 cm), (3 cm, 7 cm, 9 cm), (3 cm, 9 cm, 11 cm), (5 cm, 7 cm, 9 cm), (5 cm, 7 cm, 11 cm), (5 cm, 9 cm, 11 cm), (7 cm, 9 cm, 11 cm).

**7.7.3. a)** Zaļā automašīna **var** panākt sarkano. Ar $2s$ apzīmēsim attālumu starp pilsētām, ar $t_1$ – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa pirmo pusi, ar $t_2$ – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa otro pusi.

Tad $\frac{s}{t_1} = 30$ km/h jeb $s = 30t_1$. Sarkanās automašīnas ātrums $\frac{2s}{t_1+t_2} = 40$ km/h, izsakām $2s = 40t_1 + 40t_2$, t.i., $s = 20t_1 + 20t_2$. Tātad $30t_1 = 20t_1 + 20t_2$ un $t_2 = \frac{1}{2}t_1$, tāpēc zaļajai automašīnai otro ceļa pusi jāveic ar ātrumu $\frac{s}{t_2} = 2 \cdot \frac{s}{t_1} = 2 \cdot 30 = 60$ km/h.

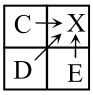
**b)** Zaļā automašīna **nevar** panākt sarkano. Brīdī, kad zaļā automašīna ir veikusi pusi ceļa, sarkanā automašīna jau ir veikusi visu ceļu un atrodas pilsētā B. Tātad zaļajai automašīnai ceļa otrā puse būtu jāveic momentāni (0 stundās), kas nav iespējams.

**7.7.4. Atbilde:** Jā, to var izdarīt.

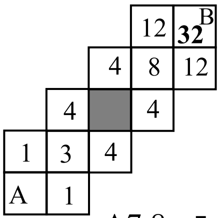
**Risinājums:** No sākuma kubu ar izmēriem $3 \times 3 \times 3$ sagriezīsim 27 kubiņos ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Pēc tam 8 mazos kubiņus, kas atrodas pie lielā kuba viena stūra, apvienosim vienā kubā ar izmēriem $2 \times 2 \times 2$. Kopējais kubu skaits samazināsies par 7 un kļūs vienāds ar 20.

**7.7.5. Atbilde:** 32 veidos.

**Risinājums:** Pakāpeniski aprēķināsim, cik veidos *zilonis* var nokļūt katrā rūtiņā. Ievērosim: ja rūtiņās C, D un E var nokļūt attiecīgi $c$, $d$ un $e$ veidos, tad rūtiņā X var nokļūt $x = c + d + e$ veidos (skat. A7.7. zīm.). Tātad no rūtiņas A rūtiņā B var nokļūt 32 veidos (skat. A7.8. zīm.).



A7.7. zīm.



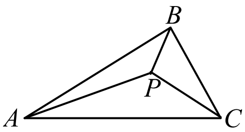
A7.8. zīm.

## 7.8. ASTOTĀ KLASE

**7.8.1. a)** Piemēram, $4 \cdot 1 \cdot 5 - 7 = 13$.

**b)** Piemēram, $4 : (1 - 5 : 7) = 14$.

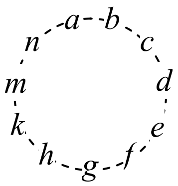
**7.8.2.** No trijstūra nevienādības seko $PA + PB > AB$, $PA + PC > AC$ un $PB + PC > BC$ (skat. A7.9. zīm.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $2(PA + PB + PC) > AB + AC + BC = P_{ABC}$ jeb $PA + PB + PC > \frac{1}{2} P_{ABC}$.



A7.9. zīm.

**7.8.3.** Apzīmēsim zēnu skaitu ar $z$, bet meiteņu skaitu – ar $m$. Tātad visi zēni kopā ieguva $21{,}6 \cdot z$ punktus, bet visas meitenes kopā ieguva $15 \cdot m$ punktus. Tad visu bērnu vidējais punktu skaits ir $\frac{21{,}6z + 15m}{z + m} = 20$. Pārveidojot iegūstam $21{,}6z + 15m = 20(z + m) \Rightarrow$ $1{,}6z = 5m \Rightarrow 8z = 25m \Rightarrow z = 25t,\ m = 8t$ un $z + m = 33t$. Tā kā kopējais skolnieku skaits nepārsniedz 60, tad $t = 1$ un kopējais skolēnu skaits ir 33.

**7.8.4.** Apzīmēsim pa apli uzrakstītos skaitļus kā parādīts A7.10. zīmējumā. Tā kā $a + b + c$ un $b + c + d$ dalās ar 5, tad $a$ un $d$, dalot ar 5, dod vienādu atlikumu (apzīmēsim to ar $r$, $0 \le r < 5$).



A7.10. zīm.

Līdzīgi no tā, ka $d + e + f$ un $e + f + g$ dalās ar 5, seko, ka arī $g$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $g + h + k$ un $h + k + m$ dalās ar 5, seko, ka arī $m$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $m + n + a$ un $n + a + b$ dalās ar 5, seko, ka arī $b$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $b + c + d$ un $c + d + e$ dalās ar 5, seko, ka arī $e$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $e + f + g$ un $f + g + h$ dalās ar 5, seko, ka arī $h$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $h + k + m$ un $k + m + n$ dalās ar 5, seko, ka arī $n$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka

$n+a+b$ un $a+b+c$ dalās ar 5, seko, ka arī $c$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5.No tā, ka $c+d+e$ un $d+e+f$ dalās ar 5, seko, ka arī $f$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5. No tā, ka $f+g+h$ un $g+h+k$ dalās ar 5, seko, ka arī $k$ dod atlikumu $r$, dalot ar 5.

Tātad visi 11 uzrakstītie skaitļi, dalot ar 5, dod atlikumu $r$. Tā kā summa $a+b+c$ dalās ar 5, tad šo skaitļu atlikumu summa $r+r+r=3r$ arī dalās ar 5. Skaitlis 3 nedalās ar 5, tātad $r$ dalās ar 5. Tā kā $r<5$, tad $r=0$, kas nozīmē, ka visi uzrakstītie skaitļi dalās ar 5.

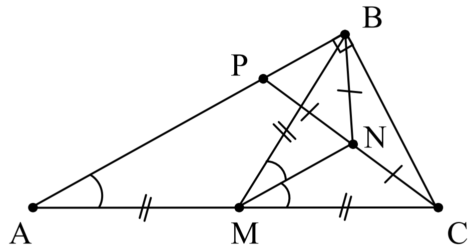
**7.8.5.** Izvēlamies jebkuru skaitli $k$ ($k = 1, 2, ... 7$). Tā kā dotā tabula ir simetriska, diagonāles abās pusēs skaitlis $k$ ir ierakstīts vienādā skaitā rūtiņu, tātad ārpus diagonāles ir uzrakstīti pāra skaits skaitļu $k$. Tā kā tabulā pavisam ir septiņi (nepāra skaits) skaitļi $k$, tad vismaz viens no tiem ir uz diagonāles. Šis spriedums ir spēkā visām septiņām iespējamām $k$ vērtībām, un diagonālē ir tieši 7 rūtiņas, tātad diagonālē ir ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs tieši vienu reizi.

## 7.9. DEVĪTĀ KLASE

**7.9.1.** Der jebkuru pirmskaitļu vienpadsmitās pakāpes, piemēram, skaitlis $2^{11}$; tā dalītāji ir skaitļi $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}$.

Tāpat der arī skaitļi, kas dalās ar viena pirmskaitļa kvadrātu un vēl 2 citiem pirmskaitļiem, piemēram $60=2^2\cdot3\cdot5$, kam dalītāji ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 un 60. Tādu skaitļu ir bezgala daudz, bet pietiek, ja atbildē sniedz vienu piemēru.

**7.9.2.** Tā kā $\Delta ABC$ un $\Delta PBC$ ir taisnleņķa, $AM = BM = CM$ un $PN = BN = CN$ kā apvilktās riņķa līnijas rādiusi (skat. A7.11. zīm.). Tāpēc $\Delta MBN = \Delta MCN$ (pazīme *mmm*) un $\angle BMN = \angle CMN$, jo vienādos trijstūros pret vienādām malām ir vienādi leņķi. Tā kā $M$ un $N$ ir trijstūra malu viduspunkti, tad $MN$ ir $\Delta APC$ viduslīnija, tāpēc $AP \| MN$ un $\angle CMN = \angle CAP$ kā kāpšļu leņķi. Tātad, $\angle BMN = \angle CMN = \angle CAP = \angle BAC$, k.b.j.




A7.11. zīm.

**7.9.3. Atbilde:** $a$=2012.

**Risinājums:** No Vjeta teorēmas seko $p^2+q=507$ – nepāra skaitlis, tātad viens no pirmskaitļiem $p$ vai $q$ ir 2. Ja $q = 2$, tad $p^2 = 505$, bet tad $p$ nav vesels skaitlis. Tātad $p=2$ un $q=503$, no kurienes iegūstam $a=p^2q=2012$.

**7.9.4. Atbilde:** Jā, var.

**Risinājums:** Ievērosim, ka $\overline{aaabbbccc}=111\cdot\overline{a00b00c}=37\cdot3\cdot\overline{a00b00c}$. Tātad Pēteris var uzvarēt, panākot, ka izveidojas skaitlis $\overline{aaabbbccc}$. Lai to panāktu, Pēteris domās sadala zvaigznītes pēc kārtas grupās pa trim. Kad Jānis ieraksta kādu ciparu, Pēteris tās pašas grupas abu pārējo zvaigznīšu vietā ieraksta tādus pašus ciparus, kā Jānis. Tātad pēc Pētera gājiena katrā grupā vai nu visas trīs zvaigznītes ir aizstātas ar cipariem, vai arī visas trīs ir neaizstātas. Tātad pēc kārtējā Jāņa gājiena Pēteris atkal varēs rīkoties tāpat un panākt savu uzvaru.

**7.9.5.** Ja trapeces augstums ir *h*, tad tās laukums ir $S=\frac{(3+13)}{2}\cdot h=8h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Tātad ir trijstūris, kura laukums $S_1\le\frac{1}{2}\cdot 3\cdot h=1{,}5h$. Taču $1{,}5h<\frac{8h}{5}=1{,}6h$, t.i., šī trijstūra laukums ir mazāks nekā piektā daļa no trapeces laukuma. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros.

# UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

## ALGEBRA

Algebriski pārveidojumi – 1.1.3., 1.1.4., 1.1.10., 1.2.2., 1.2.6., 1.2.7., 1.3.1., 2.1.3., 3.1.3., 3.2.1., 3.3.1., 3.3.7., 3.4.3., 3.5.8., 3.6.2., 3.6.4., 4.9.1., 5.7.4., 5.8.1., 7.8.3.

Darbības ar mērvienībām – 1.2.5., 1.3.1., 1.3.3.

Vienādojumi – 1.4.2., 1.4.4., 2.3.2., 2.4.4., 3.1.4., 3.1.7., 3.2.2., 3.3.3., 3.4.1., 3.4.6., 3.4.7., 3.5.5., 3.6.4., 3.6.9., 4.5.2., 4.7.1., 6.9.3., 7.7.1., 7.7.3., 7.9.3.

Vienādojumu sistēmas – 3.1.6., 3.2.2., 3.3.3., 3.4.7.

Nevienādības – 1.3.5., 2.5.3., 3.1.2., 3.1.3., 3.2.7., 3.3.5., 5.9.2., 7.9.5.

Ekstrēmu uzdevumi – 1.4.3., 4.5.1., 7.5.3.

Skaitļu virknes – 4.7.3., 4.8.4., 4.9.4., 5.6.2., 5.9.4.

Funkcijas un diagrammas – 1.3.6., 3.1.6., 4.8.1., 5.9.1.

## SKAITĻU TEORIJA

Aritmētika – 1.1.1., 1.1.8., 1.2.1., 1.4.3., 2.1.1., 2.2.1., 2.2.3., 2.3.1., 3.3.4., 3.5.6., 3.6.2., 3.6.7., 5.5.1., 7.8.1.

Naturālu skaitļu dalāmība – 1.1.7., 1.2.3., 2.4.3., 2.4.4., 2.5.2., 3.3.8., 3.4.1., 3.6.3., 5.9.5., 6.9.1., 7.6.5., 7.8.4., 7.9.1.

Pirmskaitļi, skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā – 2.2.4., 7.9.4.

Skaitļa pieraksts – 2.4.1., 3.2.3., 3.5.9., 3.6.1., 3.6.4., 4.5.1., 4.6.2., 5.5.3., 5.6.1., 5.8.3., 7.5.1.

Dirihlē princips – 5.6.2., 5.7.3.

Invariantu metode – 3.5.2.

Gadījumu pārlase – 3.3.4., 3.5.6., 3.6.2., 3.6.7., 4.6.1., 5.5.3., 5.5.5., 5.6.1., 5.9.3.

Skaitļi un kombinatorika – 2.4.2., 4.8.3., 7.6.4.

## ĢEOMETRIJA

Figūru sagriešana un salikšana – 1.1.5., 1.1.6., 1.2.4., 1.3.4., 2.1.2., 2.3.5., 2.5.2., 3.1.1., 3.2.4., 3.3.6., 3.4.4., 3.4.9., 3.5.1., 3.6.5., 4.5.3., 4.6.3., 4.9.3., 5.8.5., 6.9.5., 7.5.2., 7.5.5., 7.6.2., 7.7.4.

Invariantu metode, krāsošana – 7.6.3.

Figūru sistēmas, to savstarpējais novietojums – 1.4.7., 1.4.9., 4.7.2., 5.8.4.

Daudzstūri – 1.1.6., 1.3.4., 1.4.7., 1.4.10., 2.2.2., 2.3.3., 3.1.5., 3.1.8., 3.2.6., 3.2.8., 3.3.2., 3.3.5., 3.4.4., 3.5.3., 3.5.7., 3.6.5., 3.6.6., 3.6.8., 4.6.4., 4.7.4., 4.8.2., 4.9.2., 5.5.2., 5.6.3., 5.7.2., 5.7.5., 5.8.2., 5.9.2., 6.9.2., 6.9.4., 7.9.2., 7.9.5.

Trijstūru nevienādība – 2.1.4., 2.3.3., 3.3.5., 5.9.2., 6.9.2., 7.7.2., 7.8.2.

Riņķa līnija un riņķis – 1.4.7.

Ģeometriskie pārveidojumi – 2.2.2., 3.2.5., 5.8.5., 7.8.5.

## KOMBINATORIKA

Objektu skaitīšana – 1.3.2., 2.1.3., 2.1.5., 2.2.2., 2.3.4., 2.5.4., 2.5.5., 4.7.1., 4.8.5., 7.5.3., 7.7.5.

Grafi – 3.1.10.

Kombinatoriskās struktūras – 1.1.7., 1.4.5., 1.4.6., 2.4.5., 4.5.2.

Invariantu metode – 2.1.5., 5.5.4.

Vidējās vērtības metode – 1.1.9., 2.2.5., 3.4.5., 4.5.4.

## ALGORITMIKA

Matemātiskās spēles – 3.1.9.

Algoritma atšifrēšana – 3.4.3., 3.5.9.

Algoritmu un procesu analīze – 1.1.2., 7.6.1., 7.7.5.

Algoritma izstrāde – 3.4.2., 3.4.3., 3.5.10., 3.6.10., 4.7.5., 5.5.1., 5.7.1., 7.5.4., 7.9.4.

Loģiska rakstura uzdevumi – 1.1.9., 1.2.8., 1.3.5., 1.4.1., 1.4.8., 2.2.5., 2.5.1., 3.1.10., 3.2.3., 3.2.9., 3.2.10., 3.3.9., 3.3.10., 3.4.8., 3.4.10., 3.5.4., 3.6.9., 4.5.5., 4.6.5., 4.9.5., 5.6.5.

# IZMANTOTĀ LITERATŪRA


1. Andžāns, I. Markusa. **Vai vari atrisināt?** Algebra. Rīga: Zvaigzne ABC, 1996.
2. A. Andžāns, M. Seile, Z. Zvirbule. **Profesora Cipariņa kluba uzdevumi un atrisinājumi.** Rīga: Zvaigzne ABC, 2000.
3. А. Савин. **Занимательные математические задачи.** Москва: АСТ, 1995.
4. **The UK Mathematics Trust Yearbook 1998-1999.** UKMT, 1999.
5. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2002-2003.** UKMT, 2003.
6. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2004-2005.** UKMT, 2005.
7. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2008-2009.** UKMT, 2009.
8. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2010-2011.** UKMT, 2011.
9. E.Riekstiņš, A.Andžāns. **Atrisini pats!** Rīga: Zvaigzne, 1984.
10. H.Djudenī. **520 atjautības, pacietības un domu spēles.** Rīga: Zvaigzne, 1979.

# SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ



1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

# SĒRIJAS „LAIMA" GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.
48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
50. M. Avotiņa, M. Opmanis. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.
51. Z. Kaibe, D. Kūma, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2011./2012. mācību gadā.** Rīga: LU, 2013.