AGNIS ANDŽĀNS, DACE BONKA,
ZANE KAIBE, LAILA ZINBERGA

MATEMĀTIKAS SACENSĪBAS 4. – 9. KLASĒM
UZDEVUMI UN ATRISINĀJUMI
2010./2011. MĀCĪBU GADĀ

RĪGA 2012

A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2010./2011. mācību gadā.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2012. – 127 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2010./2011. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Izsakām pateicību 2010./2011. mācību gada Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu autoriem un komplektu veidotājiem: Andrim Ambainim, Aivaram Bērziņam, Andrejam Cibulim, Mārtiņam Opmanim, Rihardam Opmanim, Raitim Ozolam, Agnesei Šustei, Mārim Valdatam, Ingrīdai Veilandei, Jevgēnijam Vihrovam.

ISBN 978-9984-45-526-6

SATURS

IEVADS 4
UZDEVUMI 6
1. Konkurss 4. klasēm „Tik vai... Cik?” 6
2. Jauno matemātiķu konkurss 14
3. Profesora Cipariņa klubs 18
4. Latvijas 23. sagatavošanās olimpiāde matemātikā 27
5. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. (Novada) kārta 30
6. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta 34
7. Latvijas 38. atklātā matemātikas olimpiāde 35
IETEIKUMI 38
1. Konkurss 4. klasēm „Tik vai... Cik?” 38
2. Jauno matemātiķu konkurss 39
3. Profesora Cipariņa klubs 41
4. Latvijas 23. sagatavošanās olimpiāde matemātikā 44
5. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. (Novada) kārta 45
6. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta 47
7. Latvijas 38. atklātā matemātikas olimpiāde 47
ATRISINĀJUMI 49
1. Konkurss 4. klasēm „Tik vai... Cik?” 49
2. Jauno matemātiķu konkurss 56
3. Profesora Cipariņa klubs 64
4. Latvijas 23. sagatavošanās olimpiāde matemātikā 91
5. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. (Novada) kārta 100
6. Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta 109
7. Latvijas 38. atklātā matemātikas olimpiāde 112
UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM 122
IZMANTOTĀ LITERATŪRA 124
SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ 125
SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS 126

IEVADS

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas priekšstats par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, novada un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai... Cik?", Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes nodarbības vidusskolēniem, Mazā matemātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tie rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes un konkursi ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Kā piemēru varam minēt Atklāto matemātikas olimpiādi, kurā 2010./2011. m. g. piedalījās gandrīz 3000 skolēnu.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs un konkursos, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šajā procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus. Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Tā kā lielā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas matemātikas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības uzdevumu risināšanu. Tāpēc liela nozīme ir šai un citām LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdotajām grāmatām ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem tiek sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji vai paši apdāvinātākie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un pūles. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Strādājot ar grāmatu, iesakām ar katru uzdevumu vispirms darboties patstāvīgi un, neielūkojoties mūsu piedāvātajos atrisinājumos, pēc iespējas pilnīgi un detalizēti pašam to atrisināt, kā arī rūpīgi pierakstīt atrisinājumu. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā.

Ja Jūs nezināt, kā var atrisināt attiecīgo uzdevumu, varat meklēt palīdzību otrajā grāmatas sadaļā „Ieteikumi", kur sniegtas norādes, kā nonākt pie mums zināmā atrisinājuma.

Pēc uzdevuma patstāvīgas atrisināšanas iesakām tomēr ieskatīties arī grāmatā piedāvātos risinājumos un tos rūpīgi izpētīt, jo, pat ja Jūs uzdevumu esat atrisinājis pareizi, bet atšķiras pielietotā metode, mūsu piedāvātās metodes var noderēt tālākai attīstībai un citu uzdevumu risināšanai.

Matemātikas sacensības, kuru uzdevumi ir apkopoti šajā grāmatā, tiek rīkotas ar LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas iniciatīvu vai līdzdalību. Visu matemātikas sacensību visi uzdevumi, īsi atrisinājumi, rezultāti un arhīvi ir atrodami arī LU A. Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv.

Autori

UZDEVUMI

1. Konkurss 4. klasēm „Tik vai... Cik?”

1.1. Pirmā kārta

1.1.1. Aprēķini $115-15\cdot 4+4:2=$

a) 402

b) 57

c) 202

d) 55

e) 400

1.1.2. Lai zinātu, cik biezu jaku vilkt mugurā skolas pārgājienā, Kristaps no rīta paskatījās termometrā aiz loga. Cik grādu tas rāda (skat. U1.1. zīm.)?

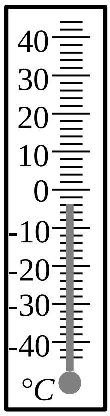
a) $-2°C$

b) $-4°C$

c) $-5°C$

d) $+2°C$

e) $+4°C$



U1.1.zīm.

1.1.3. Aprēķini (2 *h* 41 *min.* + 5 *h* 59 *min.*) : 2 – 28 *min.* =

a) 3 *h* 32 *min.*

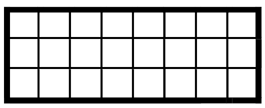
b) 3 *h* 52 *min.*

c) 3 *h* 72 *min.*

d) 4 *h* 52 *min.*

e) 4 *h* 72 *min.*

1.1.4. Taisnstūra vienas malas garums bija 3 rūtiņas, bet otras malas garums bija 8 rūtiņas (skat. U1.2. zīm.). Garāko taisnstūra malu samazināja par 2 rūtiņām. Kā jāizmaina taisnstūra otrās malas garums, lai jaunizveidotā taisnstūra laukums būtu tikpat rūtiņas, cik iepriekšējā taisnstūra laukums?


U1.2.zīm.

a) jāpalielina par 2 rūtiņām

b) jāpalielina 2 reizes

c) jāpalielina par 1 rūtiņu

d) jāsamazina par 1 rūtiņu

e) nav jāizmaina

1.1.5. Mazmeitiņa savai vecmāmiņai dzimšanas dienā uzdāvināja zīmējumu, kurā ir attēlota pati vecmāmiņa (skat. U1.3. zīm.). Pie tam, saskaitot **visus zīmējumā izmantotos ciparus,** var uzzināt, cik gadu viņai paliek. Cik tad gadu vecmāmiņai paliek?

a) 58

b) 60

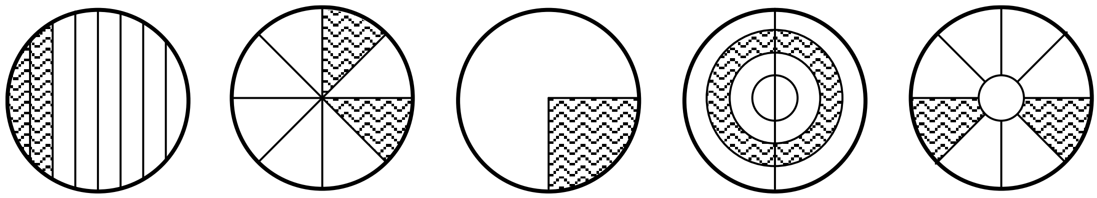
c) 62

d) 80

e) 161

U1.3.zīm.

1.1.6. Karlsonam ir piecas tortes (skat. U1.4. zīm.). Viņš Brālīti grib pacienāt ar $\frac{2}{8}$ no vienas tortes. Zīmējumos parādīts, kā Karlsons tortes sadalīja, un iekrāsoti tie gabaliņi, ko viņš iedeva Brālītim. Kuros zīmējumos ir iekrāsotas **tieši** $\frac{2}{8}$ no tortes?



1. **2.** **3.** **4.** **5.**

U1.4.zīm.

a) 1., 2.

b) 2., 5.

c) 2., 4.

d) 2., 3.

e) 2., 3., 5.

1.1.7. Skolotāja uz tāfeles bija uzrakstījusi pareizu matemātisku izteiksmi. Starpbrīdī palaidnīgais Helmuts nodzēsa divus dažādus skaitļus un to vietā uzrakstīja divus burtus – a un b (skat. U1.5. zīm.). Kurā atbilžu variantā dotie skaitļi varēja būt burtu vietā?

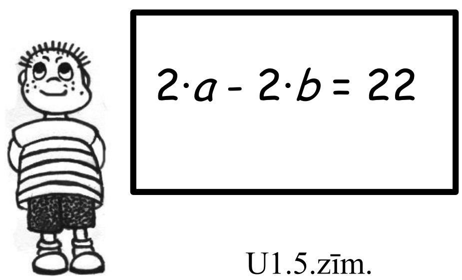
a) $a = 21$ un $b = 12$

b) $a = 10$ un $b = 1$

c) $a = 11$ un $b = 22$

d) $a = 1$ un $b = 10$

e) $b = 11$ un $a = 22$



U1.5.zīm.

1.1.8. Par trīs hokeja kluba RĪGAS DINAMO komandas spēlētājiem ir zināms, ka Jānis Sprukts ir par 10 kg smagāks nekā Guntis Galviņš, bet Mārtiņš Karsums ir par 7 kg vieglāks nekā Jānis Sprukts. Cik sver Mārtiņš Karsums, ja zināms, Guntis Galviņš kopā ar Jāni Spruktu sver 184 kg?

a) 87 kg

b) 90 kg

c) 97 kg

d) 100 kg

e) 107 kg

1.1.9. Gaisma 1 minūtē veic aptuveni 19 miljonus kilometru. No Saules līdz Zemei ir aptuveni 152 miljoni kilometru. Cik ilgi uz Zemes vēl būtu saules gaisma, ja krokodils Gena viendien apēstu Sauli?

a) 1 minūti

b) 8 minūtes

c) 8 dienas

d) Uzreiz iestāsies tumsa

e) Gaisma būs visu laiku

1.1.10. Istabā atrodas vairāki suņi un kaķi, pie tam kaķu kāju ir divreiz vairāk nekā suņu degunu. Tātad šajā istabā kaķu ir

a) divreiz vairāk nekā suņu

b) tikpat, cik suņu

c) divreiz mazāk nekā suņu

d) četrreiz mazāk nekā suņu

e) četrreiz vairāk nekā suņu

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Aprēķini $10 \cdot 11 + 10 - 11 \cdot 10$

a) 10

b) 11

c) 100

d) 1090

e) 1990

1.2.2. Anna un Zane 15. decembrī satikās slidotavā. Anna uz slidotavu nāk katru trešo dienu, bet Zane – katru piekto dienu. Kad nākamreiz atkal abas meitenes satiksies slidotavā, ja viņas slidotavā ierodas vienā un tajā pašā laikā?

a) 18. decembrī

b) 20. decembrī

c) 25. decembrī

d) 29. decembrī

e) 30. decembrī

1.2.3. Ar kādu ciparu var beigties divu viens otram sekojošu nepāra skaitļu reizinājums?

a) tikai 3

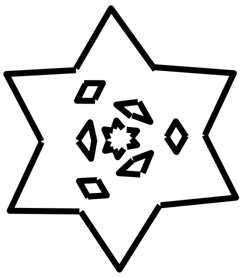
b) tikai 3, 5 vai 9

c) tikai 1, 3, 5, 7 vai 9

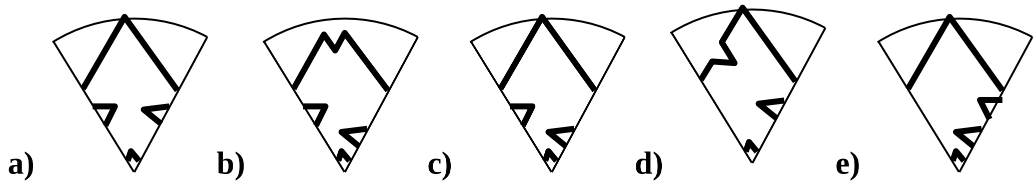
d) ar jebkuru ciparu

e) tikai 3, 5 vai 2

1.2.4. Gatavojoties Ziemassvētkiem, bērni no papīra izgrieza sniegpārsliņas – viņi salocīja papīra lapu 6 daļās, izgrieza rakstu un atlocīja papīra lapu (skat. U1.6. zīm.). Kurā zīmējumā parādīts raksts, kas jāizgriež, lai iegūtu attēlā redzamo sniegpārsliņu?



U1.6.zīm.

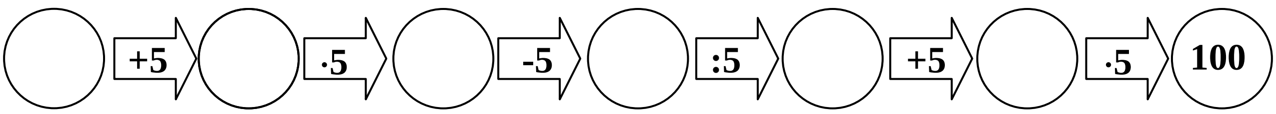


1.2.5. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

2010 *dm* ◯ 1 *km* : 5

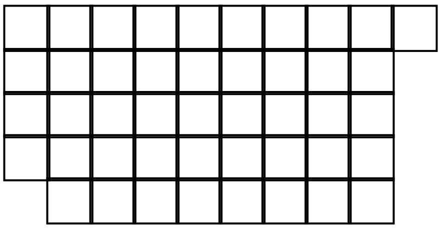
600 *s* ◯ 305 *min.* - 3 *h*

1.2.6. Aplīšos ieraksti skaitļus tā, lai secīgi izpildot bultiņās norādītās darbības, iegūtu skaitli 100!



1.2.7. No grāmatas izkritušas vairākas pēc kārtas ņemtas lapas. Izkritušā fragmenta pirmās lappuses numurs 415, bet pēdējās izkritušās lappuses numurs uzrakstāms tiem pašiem cipariem, bet citā secībā. Cik lapas ir izkritušajā fragmentā?

1.2.8. U1.7. zīmējumā redzamo figūru sadali trīs vienādās daļās (daļām jābūt vienādām pēc formas un laukuma). Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



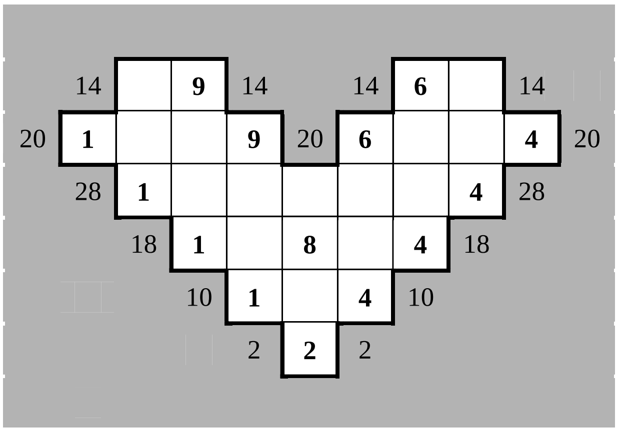
U1.7.zīm.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki kilogramos!

$$(500\ g + 25\ g) \cdot 3 - 1\ kg\ 25\ g + 2\ kg\ 900\ g : 2$$

1.3.2. Aizpildi tukšās rūtiņas ar cipariem tā, lai katras **rindiņas** summa būtu tāda, kā atbilstošajai rindiņai malā ir norādīts, turklāt visiem cipariem katrā kolonā un katrā rindiņā ir jābūt dažādiem.



1.3.3. Trīs bērni, runājot par vienu un to pašu skaitli, teica:

Aija: „Tas ir skaitļa 20 dalītājs."

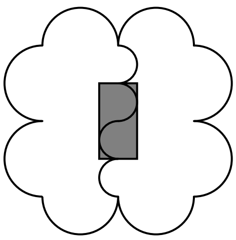
Maija: „Tas ir 5 reizes lielāks nekā viens no skaitļa 20 dalītājiem."

Paija: „Tas ir par 10 mazāks nekā viens no skaitļa 20 dalītājiem."

Par kuru skaitli ir runa? Pamato savu atbildi!

Piezīme. Skaitļa dalītājs ir skaitlis, ar kuru tas dalās; piemēram, skaitļa 4 dalītāji ir skaitļi 1, 2 un 4.

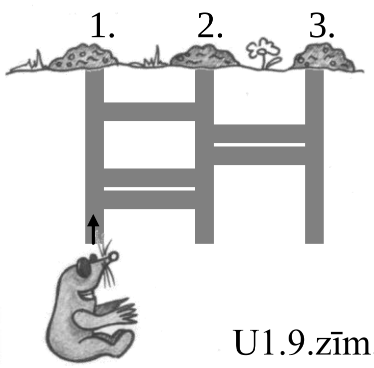
1.3.4. Noskaidro iekrāsotā taisnstūra perimetru, ja zīmējums sastāv no divu veidu pusriņķa līnijām un mazākās pusriņķa līnijas rādiuss ir 2 reizes mazāks nekā lielākās pusriņķa līnijas rādiuss (skat. U1.8. zīm.). Lielākās pusriņķa līnijas rādiuss ir 4 *cm*.



U1.8.zīm.

1.3.5. Kurmis Frīdis pārvietojas pa U1.9. zīmējumā attēloto pazemes alu labirintu un vēlas ātrāk izrāpties virszemē. Viņš sāk kustību bultiņas norādītajā virzienā. Frīdis maina kustības virzienu katru reizi, kad tas labirintā nonāk vietā, kur krustojas alas, pie tam vertikālajos posmos viņš rāpjas tikai uz augšu.

Uzzīmē kurmja kustības maršrutu! Kurā no izejām kurmis Frīdis izrāpsies virszemē?



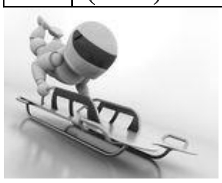
U1.9.zīm.

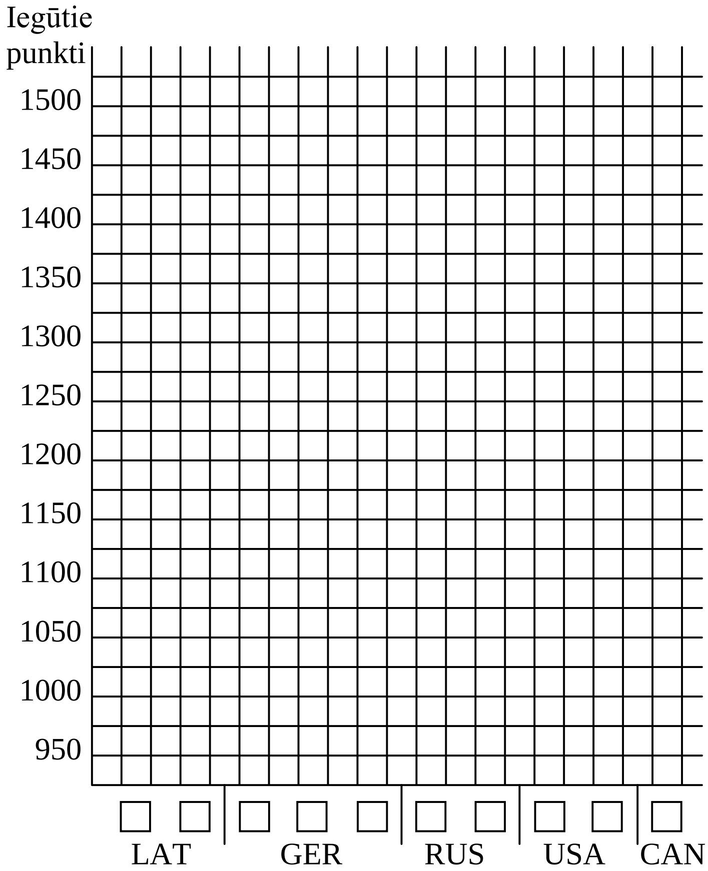
1.3.6. Latvijas skeletonists Martins Dukurs šogad otro gadu pēc kārtas triumfēja Pasaules kausa izcīņā. Tabulā doti 10 labāko skeletonistu Pasaules kausa septiņu posmu kopvērtējumā iegūtie punkti.

Cik punktus maksimāli varēja iegūt šajos septiņos posmos, ja zināms, ka Martins Dukurs ir zaudējis 81 punktu?

Attēlo skeletonistu iegūtos punktus stabiņu diagrammā tā, lai sportistu, kas ir no vienas valsts, punkti būtu attēloti blakus (tukšajos lodziņos zem diagrammas ieraksti sportista kārtas numuru tabulā, piemēram, Martinam Dukuram – „1.”, Sandro Stielicke – „2.”, utt.)!

Nr.	Vārds, uzvārds, valsts	Iegūtie punkti
1	Martins DUKURS (LAT)	1494
2	Sandro STIELICKE (GER)	1266
3	Frank ROMMEL (GER)	1218
4	Alexander TRETIAKOV (RUS)	1205
5	Sergei CHUDINOV (RUS)	1183
6	Michi HALILOVIC (GER)	1112
7	Matthew ANTOINE (USA)	1096
8	Jon MONTGOMERY (CAN)	1073
9	Tomass DUKURS (LAT)	1032
10	John DALY (USA)	978





1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. Katrai nevienādībai uzraksti pa četrām x vērtībām, ar kurām tā ir patiesa!

a) $x > 13 \cdot 5$ **b)** $x + 138 > 145$ **c)** $72 : 8 < x$

1.4.2. Žanetei katru nedēļu vecāki dod pa 5 Ls. Cik mēnešu laikā viņa sakrās 100 Ls, ja viņa šo naudu netērēs?

1.4.3. Cik minūšu ir trešdaļā stundas?

1.4.4. Cik sekunžu ir diennaktī?

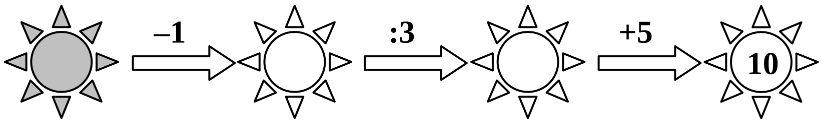
a) 8590

b) 9640

c) 1235

d) cits skaitlis

1.4.5. Gvido iekrāsotajā *saulītē* ierakstīja savu mīļāko skaitli un izpildīja darbību virkni, kas attēlota zīmējumā. Kādu skaitli Gvido bija uzrakstījis iekrāsotajā *saulītē*?



1.4.6. Elektroniskais pulkstenis šobrīd rāda **20:07**. Ātrākais pēc cik ilga laika pulksteņa rādījumā būs redzami tie paši četri cipari, tikai varbūt citā secībā?

Piezīme: pusnaktī pulkstenis rāda 00:00, plkst. vienos naktī – 01:00 utt.

1.4.7. Uzraksti dotos lielumus dilstošā secībā:

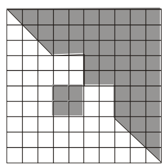
7000 *m* 77 *km* 70 000 *m* 700 000 *cm* 7,7 *km* 7 *m*

1.4.8. Noskaidro, kas ir vairāk un par cik vairāk:

a) $\frac{3}{5}\,kg$ vai $\frac{1}{2}\,kg$

b) $\frac{4}{5}\,h$ vai $\frac{3}{10}\,h$

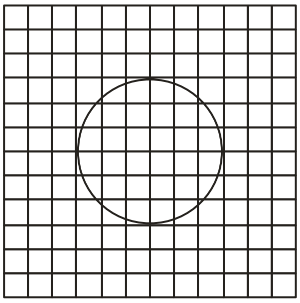
1.4.9. Kura daļa no U1.10. zīmējumā redzamā kvadrāta ir iekrāsota?



U1.10.zīm.

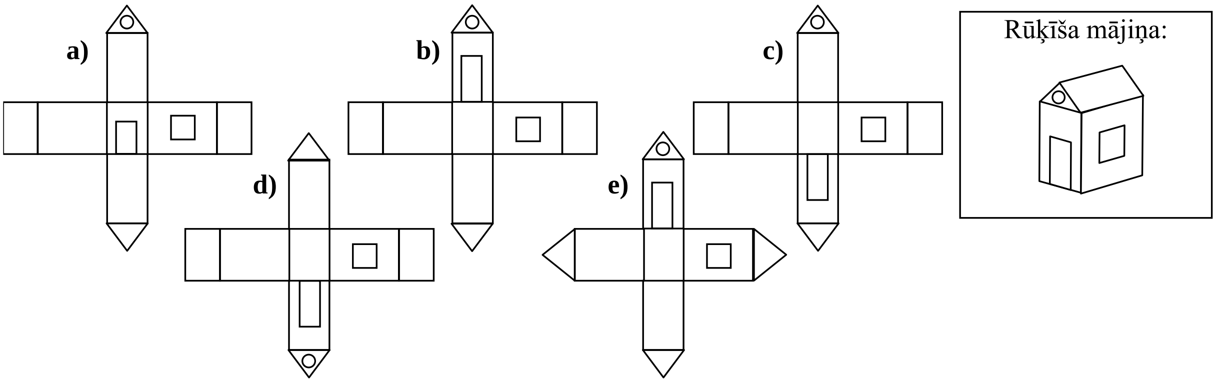
1.4.10. Ar vienkrāsainām tapetēm ir jānolīmē siena, kuras augstums ir 3 *m*, bet platums 9 *m*. Viena tapešu ruļļa platums ir 50 *cm*, bet garums 10 *m*. Cik tapešu ruļļi ir jānopērk, lai varētu nolīmēt visu sienu tā, lai nebūtu neviena horizontāla savienojuma (t.i., visas sienas augstumā jālīmē vesela loksne)?

1.4.11. U1.11. zīmējumā attēlotās riņķa līnijas diametrs ir 8 *cm*. Aprēķini kvadrāta perimetru!

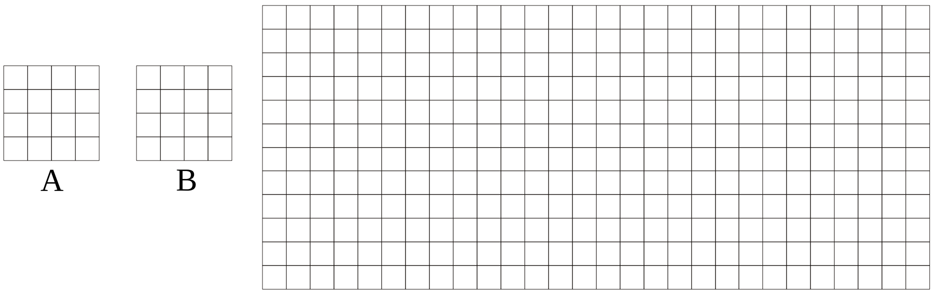


U1.11.zīm.

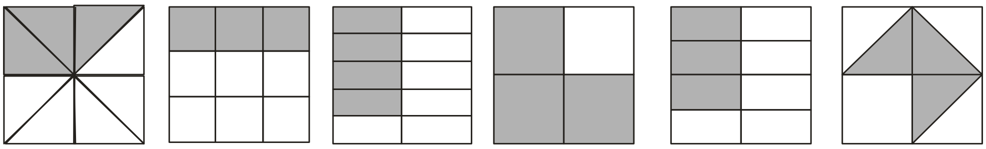
1.4.12. Bērni no kartona gatavo rūķīšu mājiņas. No kuras sagataves viņi var izveidot tieši tādu mājiņu, kāda parādīta ierāmētajā zīmējumā?



1.4.13. Parādi, kā divus vienādus kvadrātus (A un B) sagriezt daļās, no kurām var salikt vienu kvadrātu!



1.4.14. Kuros zīmējumos ir iekrāsoti vienādi laukumi?



a) **b)** **c)** **d)** **e)** **f)**

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Rindā pēc kārtas bez atstarpēm ir izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 10000, iegūstot ciparu virkni

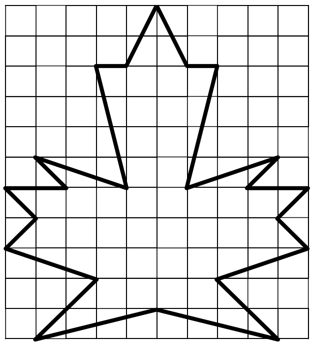
123456789101112.....

Kad šajā virknē pirmo reizi parādīsies ciparu virknīte 2010?

2.1.2. Rudens rūķītis mežā krāsoja kokiem lapas. Vispirms 30% no visām lapām viņš nokrāsoja dzeltenas. Pēc tam 30% vēl nenokrāsoto lapu rūķītis nokrāsoja sarkanas. Tad viņš ņēma brūnās krāsas spaini un nokrāsoja vēl 30% no līdz šim nenokrāsotajām lapām. Tad gan viņam visa krāsa beidzās un pārējas lapas palika nenokrāsotas. Kura daļa no visām lapām palika nenokrāsota?

2.1.3. Jānim pēc 2 gadiem būs divreiz vairāk gadu nekā viņam bija pirms 2 gadiem. Savukārt Anna pēc trīs gadiem būs trīs reizes vecāka nekā pirms 3 gadiem. Kurš ir vecāks – Jānis vai Anna?

2.1.4. Sagriez U2.1. zīmējumā redzamo figūru daļās, no kurām var salikt kvadrātu!



U2.1. zīm.

2.1.5. Andris un Baiba raksta 12-ciparu skaitli, izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4 un 5. Pirmo ciparu raksta Andris, otro – Baiba, trešo – Andris, ceturto – Baiba u.t.t.

Baiba vēlas, lai beigās iegūtais 12-ciparu skaitlis dalītos ar 9, bet Andris cenšas viņai traucēt. Vai Baiba noteikti var sasniegt savu mērķi? Kā viņai jārīkojas?

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Atrisini skaitļu rēbusu – aizstāj burtus ar cipariem, lai iegūtu pareizu vienādību!

Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem burtiem – dažādi cipari. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

$$\begin{array}{r} M\,A\,I\,Z\,E \\ +\,U\,D\,E\,N\,S \\ \hline D\,Z\,I\,V\,S \end{array}$$

2.2.2. No papīra bija izgriezts kaut kāds desmitstūris. Alise ar vienu taisnu griezienu sagrieza to divās daļās, no kurām viena daļa bija trijstūris. Cik malas var būt otrai iegūtajai daļai? Apskati visas iespējas!

2.2.3. Dotajā izteiksmē saliec iekavas tā, lai iegūtu pareizu vienādību!

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10:11:12=231$$

2.2.4. Uz riņķa līnijas atlikti 20 punkti. Viens no tiem nokrāsots sarkans, bet pārējie – balti. Apskatām visus daudzstūrus, kuru virsotnes ir kādi no dotajiem 20 punktiem. Kādu daudzstūru ir vairāk – to, kam viena virsotne ir sarkana vai to, kam visas virsotnes ir baltas?

2.2.5. Melnais burvis nozaga Baltajam burvim burvju dārgakmeni un paslēpa to grozā pie saviem 15 parastajiem dārgakmeņiem. Visi 16 dārgakmeņi izskatās pilnīgi vienādi. Baltā burvja sulainis uzzināja, ka burvju akmeni nozadzis Melnais burvis, un devās to atgūt. Melnais burvis sulainim teica: „Ja vienas stundas laikā atradīsi burvju akmeni, varēsi to paņemt un doties prom, bet ja nē – tad es tevi pārvērtīšu par statuju savā zālē." Sulainim ir ierīce, ar kuras palīdzību var noteikt, vai starp apskatāmajiem dārgakmeņiem ir vai nav burvju akmens (ar ierīci var pārbaudīt arī vairākus akmeņus reizē, bet ierīce nenorāda, kurš tieši ir burvju akmens). Vienas dārgakmeņu kaudzītes (vienalga, cik lielas) pārbaude ilgst 10 minūtes. Vai sulainis paspēs atrast burvju akmeni vienas stundas laikā? Pamato savu atbildi!

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Jānis uzrakstīja skaitļu virkni

7, 17, 37, 77, *, 317, ...

Visi virknes locekļi, sākot ar otro, iegūstami pēc viena un tā paša likuma. Kādam skaitlim jābūt „*" vietā? Apraksti, pēc kāda likuma tiek veidota šī virkne!

2.3.2. Slavens mūziķis Notiņš bieži devās koncerttūrēs uz dažādām pilsētām. Kāda mēneša pirmajā otrdienā Notiņš sniedza koncertu Daugavpilī, bet tā paša mēneša pirmajā otrdienā pēc pirmās pirmdienas – Stokholmā. Savukārt nākamā mēneša pirmajā otrdienā Notiņš bija Valmierā, bet pirmajā otrdienā pēc pirmās pirmdienas – Berlīnē. Kuros datumos Notiņš bija katrā no pilsētām?

2.3.3. Doti trīs kvadrāti – ar izmēriem 2×2 rūtiņas, 6×6 rūtiņas un 9×9 rūtiņas. Sagrieziet tos (visus vai dažus) daļās, no kurām var salikt vienu lielāku kvadrātu. Vai uzdevumu var izpildīt tā, lai jaunais kvadrāts būtu salikts no ne vairāk kā 5 daļām?

2.3.4. Mucā ir 18 *l* ūdens. Saimniecei ir divi spaiņi, kuru tilpums ir 7 *l*, un viņai katrā no tiem ir jāielej precīzi pa 6 *l* ūdens. Kā viņa to var izdarīt, ja drīkst izmantot tikai šos traukus un vēl 4 *l* ķipīti?

2.3.5. Kāds mazākais monētu daudzums jāizvēlas, lai ar tām (visām vai daļu no tām) varētu precīzi samaksāt jebkuru summu no 1 santīma līdz 1 latam? (Apskatām Latvijā pieejamās monētas: 1 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant., 1 Ls, 2 Ls; var ņemt arī vairākas viena veida monētas.)

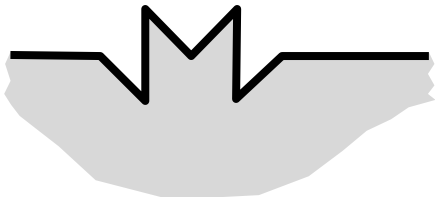
2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Atšifrē reizināšanas piemēru! Burti A un B apzīmē vienu ciparu (vienādi burti – vienādus ciparus, bet dažādi – dažādus), ar katru „*" arī aizstāts viens cipars, bet tie var būt dažādi, tikai atšķirīgi no A un B.

$$\begin{array}{r} \mathbf{A{*}{*}{*}{*}{*}{*}B} \\ \cdot \qquad\quad \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{AAAAAAAAA} \end{array}$$

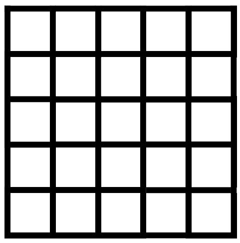
2.4.2. Žanis devās ceļojumā ar kuģi. Kad viņš uzkāpa uz kuģa, viņa elektroniskais pulkstenis rādīja *x* stundas un *y* minūtes. Kad Žanis galamērķī nokāpa no kuģa, viņa pulkstenis rādīja *y* stundas un *x* minūtes (mainoties laika joslām, pulkstenis **netika** pārgriezts). Pie tam Žanis ievēroja, ka ceļā viņš ir pavadījis *x* stundas un *y* minūtes. Cik ilgi Žanis atradās uz kuģa?

2.4.3. U2.2. zīmējumā parādīts pils mūra augšējās daļas fragments. Šajā daļā mūrnieks ir iemūrējis vienu tādu īpašu akmeni, kuru var izņemt un pagriežot ielikt atpakaļ tā, ka mūra augšējā mala kļūst taisna. Noskaidrojiet īpašā akmens formu un parādiet zīmējumā tā tagadējo atrašanās vietu un kā tas jāpārvieto!



U2.2.zīm.

2.4.4. Kādā pilsētā pavisam ir 12 ielas, kas savstarpēji krustojas tā, ka veidojas kvadrātisks režģis 5 × 5 rūtiņas, kā parādīts U2.3. zīmējumā**.** Pilsētas Domes Satiksmes departamentā tika nolemts vairākus ielu posmus pārvērst par gājēju ielām, pa tiem aizliedzot automašīnu satiksmi. Kāds ir mazākais posmu skaits, kuros jāaizliedz automašīnu kustība, lai pa atlikušajiem posmiem katrā krustojumā būtu iespējams aizbraukt ne vairāk kā 3 virzienos? (Ielas posms ir ielas daļa starp diviem tuvākajiem krustojumiem; katrā posmā, kur kustība atļauta, drīkst braukt abos virzienos.)



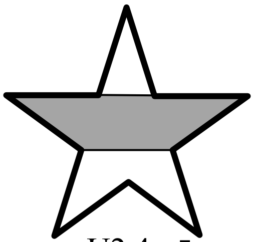
U2.3.zīm.

2.4.5. Sanāksmē ieradušies 20 cilvēki. Daži no tiem ir godīgi un vienmēr runā patiesību, bet citi vienmēr melo. Pirmais cilvēks teica, ka sanāksmē nav neviena godīga cilvēka. Otrais apgalvoja, ka sanāksmē ir ne vairāk kā 1 godīgs cilvēks. Trešais apgalvoja, ka sanāksmē ir ne vairāk kā divi godīgi cilvēki, ceturtais teica, ka starp klātesošajiem ir ne vairāk kā trīs godīgi cilvēki u.t.t., divdesmitais cilvēks apgalvoja, ka sanāksmē ir ne vairāk kā 19 godīgu cilvēku. Cik no šiem 20 cilvēkiem ir godīgi un cik – meļi?

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. Vai skaitli 123 var izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Un skaitli 2011? Mēģini noskaidrot, kādus skaitļus ir iespējams izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu. Pamato savus spriedumus!

2.5.2. Kura daļa no U2.4. zīmējumā attēlotās piecstaru zvaigznes ir iekrāsota? (Zvaigznes malas un leņķi ir vienādi.)

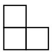


U2.4. zīm.

2.5.3. Daudzpunktu vietā ieraksti ciparus tā, lai iegūtais apgalvojums būtu patiess!

„Šajā teikumā cipars 0 sastopams ... reizes,
cipars 1 sastopams .... reizes,
cipars 2 sastopams .... reizes,
cipars 3 sastopams .... reizes,
cipars 4 sastopams .... reizes,
cipars 5 sastopams .... reizes,
cipars 6 sastopams .... reizes,
cipars 7 sastopams .... reizes,
cipars 8 sastopams .... reizes,
cipars 9 sastopams .... reizes.”

Vai uzdevumam ir tikai viens atrisinājums? Atbildi pamato!

2.5.4. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Kādu mazāko daudzumu figūriņu „stūrīšu”  tajā jāiekrāso, lai nevienu citu „stūrīti” šajā kvadrātā iekrāsot nevarētu? („Stūrītis” sastāv tieši no 3 rūtiņām, tie var būt novietoti arī citādi; ja kāda rūtiņa ir iekrāsota, tad tā ir nokrāsota pilnībā, t.i., „stūrīšu” malas iet pa rūtiņu malām.)

2.5.5. Valstī Šallindrijā ir vairākas pilsētas. Starp pilsētām ir izbūvēti vairāki ceļi tā, ka katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas, starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš un ārpus pilsētām ceļi nekrustojas. Zināms, ka no galvaspilsētas Šallijas iziet tieši 17 ceļi, no pilsētas Dallijas iziet tieši 3 ceļi, bet no visām pārējām valsts pilsētām iziet tieši 10 ceļi no katras. Pierādiet, ka noteikti iespējams aizbraukt no Dallijas un Šalliju, braucot tikai pa izbūvētajiem ceļiem (varbūt – caur citām pilsētām).

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ KĀRTA

3.1.1. Vai var aizstāt vienādus burtus ar vienādiem cipariem, bet dažādus – ar dažādiem tā, lai iegūtu pareizu saskaitīšanas piemēru (skat. U3.1. zīm.)?

$$\begin{array}{r} E\ S \\ E\ S \\ E\ S \\ +E\ S \\ \hline T\ E \end{array}$$

U3.1.zīm.

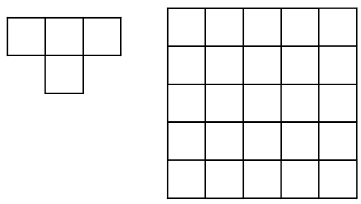
3.1.2. Maģiskais kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām (skat. U3.2. zīm.). Kādi skaitļi jāieraksta tukšajās rūtiņās, lai katrā rindā, katrā kolonnā un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas?

7		8
12		13

U3.2.zīm.

3.1.3. Uzskatīsim par „neveiksmīgu” tādu naturālu skaitli, kas ir 13 reizes lielāks nekā tā ciparu summa. Atrodi visus „neveiksmīgos” skaitļus!

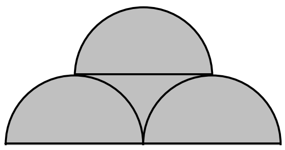
3.1.4. Kāds ir lielākais T-veida figūru skaits (skat. U3.3. zīm.), kuras var ievietot 5x5 rūtiņu kvadrātā? Figūras nedrīkst pārklāties; tās drīkst būt pagrieztas arī citādi, bet to malām jāiet pa kvadrāta rūtiņu malām.



U3.3.zīm.

3.1.5. Vai var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $x^2 + x = y^2$?

3.1.6. Dota figūra, kura izveidota, apvienojot trīs pusriņķus (skat. U3.4. zīm.). Katra pusriņķa rādiuss ir 1 cm; augšējā pusriņķa apakšējā mala atrodas uz apakšējo pusriņķu kopīgās pieskares. Aprēķini iekrāsotās figūras laukumu!

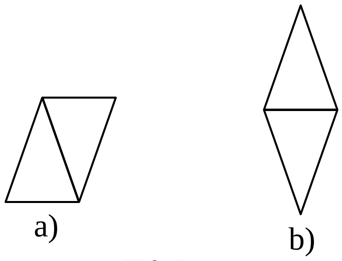


U3.4.zīm.

3.1.7. Doti divi vienādi vienādsānu trijstūri. Ja tos savieto kopā tā, lai tie veidotu paralelogramu tā kā parādīts U3.5.a zīm., šī paralelograma perimetrs ir par 3 cm garāks nekā viena dotā trijstūra perimetrs.

Kad trijstūrus savieto kopā tā, ka tie veido rombu (skat. U3.5.b zīm.), iegūtās figūras perimetrs ir par 7 cm garāks nekā viena dotā trijstūra perimetrs.

Kāds ir viena dotā trijstūra perimetrs?



U3.5.zīm.

3.1.8. Profesora Cipariņa draugam Skaitlītim sabojājās kalkulators – Skaitlītis nevar ievadīt ciparu 0; turklāt kalkulators arī uz ekrāna neattēlo ciparu 0, ja tāds rodas veikto darbību rezultātā. Tādējādi nav iespējams ievadīt un aprēķināt, piemēram, izteiksmi $10 \cdot 3$ (tāpēc Skaitlītis to nemaz nemēģina); kā arī skaitļu 37 un 13 summa tiek attēlota kā skaitlis 5 (nevis 50) un skaitļu 3 un 67 reizinājums tiek attēlots kā 21 (nevis 201).

Palīdzi Skaitlītim uzzināt, kādu divu skaitļu reizinājums ir attēlots uz viņa kalkulatora, ja tas rāda 15 un ir zināms, ka:

a) tika sareizināts viens viencipara skaitlis ar vienu divciparu skaitli;

b) tika sareizināti divi divciparu skaitļi!

3.1.9. Doti šādi skolēnu A, B, C un D apgalvojumi:

Skolēns A teica: B, C un D ir meitenes

Skolēns B teica: A, C un D ir puiši

Skolēns C teica: A un B vienmēr melo

Skolēns D teica: A, B un C vienmēr saka patiesību

Cik skolēni teica patiesību?

3.1.10. Apburtajā pilsētā dzīvo tikai suņi un kaķi. Turklāt 10% suņu domā, ka viņi ir kaķi, bet 10% kaķu domā, ka viņi ir suņi. Pārējie suņi un kaķi ir pilnīgi normāli ☺. Aptaujājot visus pilsētā dzīvojošos suņus un kaķus, noskaidroja, ka 20% no tiem uzskata sevi par kaķi. Cik procentu no visiem dzīvniekiem patiešām ir kaķi?

3.2. OTRĀ KĀRTA

3.2.1. Vai ir tādi veseli skaitļi *a* un *b*, ka pastāv vienādība $8a - 12b = 5$?

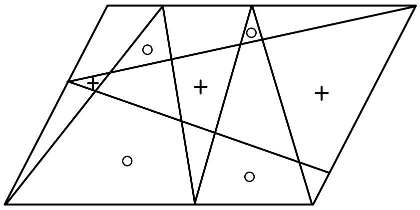
3.2.2. Andris daļā $\frac{16}{64}$ nepareizi „saīsināja” ciparu 6 skaitītājā un saucējā, tomēr rezultāts iznāca pareizs: $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$. Atrodi visas daļas, kurām saucējs un skaitītājs ir divciparu skaitļi un kam piemīt šāda „saīsināšanas īpašība”!

3.2.3. Vienādojumā

$$(x + \blacksquare)(x+4) - (x+1)(x+2) = 38$$

tintes traips aizsedzis kādu skaitli. Ir zināms, ka šī vienādojuma atrisinājums ir 7. Kādu skaitli aizsedzis traips?

3.2.4. Četrstūris *ABCD* ir paralelograms (skat. U3.6. zīm.); visas zīmējumā redzamās līnijas ir taisnas. Pierādīt, ka ar krustiņiem atzīmēto daļu laukumu summa ir mazāka nekā ar aplīšiem atzīmēto daļu laukumu summa.



U3.6.zīm.

3.2.5. No 20 pirmajiem naturālajiem skaitļiem jāizvēlas vairāki dažādi skaitļi tā, lai nekādu divu skaitļu starpība nebūtu 5.

a) Kāds ir lielākais iespējamais skaitļu skaits *n*, ko var izvēlēties atbilstoši uzdevuma nosacījumiem?

b) Cik dažādos veidos šādus *n* skaitļus var izvēlēties?

3.2.6. Dots kvadrāts *ABCD*. Ārpus tā atlikts punkts *E* tā, ka trijstūris *CDE* ir vienādmalu. Aprēķini leņķa *BED* lielumu!

3.2.7. Laura vienmēr atceras savu telefona PIN-kodu, kas sastāv no četriem cipariem, jo:

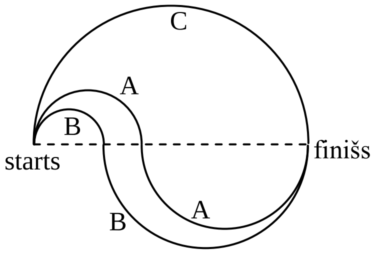
a) tas ir vesela skaitļa kvadrāts, un

b) ja to izdala ar jebkuru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9, atlikumā iegūst 1.

Kāds ir Lauras telefona PIN-kods?

3.2.8. Atpūtas parkā ir trīs skriešanas celiņi, kuriem visiem ir kopīgs starts un finišs. Tie ir izveidoti no viena vai diviem pusriņķiem ar centru uz vienas taisnes (skat. U3.7. zīm.)

Aivars (A), Baiba (B) un Centis (C) sāka reizē skriet no starta, un skrēja ar vienādu vienmērīgu ātrumu katrs pa savu celiņu. Kādā secībā viņi finišēja?



U3.7.zīm.

3.2.9. Viegli pārbaudīt, ka $121 = 11^2$, $10201 = 101^2$, $1002001 = 1001^2$. Pierādīt, ka, ierakstot starp skaitļa 121 cipariem jebkuru (vienu un to pašu) daudzumu nuļļu, vienmēr iegūst vesela skaitļa kvadrātu.

3.2.10. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli: viņi pēc kārtas sauc patvaļīgus naturālus skaitļus, kas nav lielāki par 10. Visus nosauktos skaitļus saskaita. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena visu līdz šim nosaukto skaitļu summa ir 100. Kā jāspēlē pirmajam spēlētājam, lai tas uzvarētu?

3.3. TREŠĀ KĀRTA

3.3.1. Kādi cipari jāievieto burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

3.3.2. Dota skaitļu virkne, kuras pirmie trīs locekļi ir $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Ceturtais virknes loceklis ir $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Katrs nākamais virknes loceklis tiek iegūts, no iepriekšējā atņemot pirms tā esošo un pieskaitot vēl iepriekšējo virknes locekli.

Atrodi desmito un 2010. virknes locekli!

3.3.3. a) Atrodi tādu divciparu skaitli, kas ir četras reizes lielāks nekā tā ciparu summa. Tad apmaini atrastā divciparu skaitļa ciparus vietām. Cik reizes iegūtais skaitlis ir lielāks nekā tā ciparu summa?

b) Dots patvaļīgs divciparu skaitlis, kas ir n reizes lielāks nekā tā abu ciparu summa (n – naturāls skaitlis). Cik reizes skaitlis, ko iegūst, samainot dotā divciparu skaitļa ciparus vietām, ir lielāks nekā tā ciparu summa?

3.3.4. Pārveido daļu $\frac{2010}{1996}$ formā $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$, kur a, b, c, d un e – naturāli skaitļi.

3.3.5. Dots trijstūris ABC; uz tā malas AC atlikts punkts D tā, ka $AD = DB$. Vēl zināms, ka $AB = BC = CD$. Aprēķināt leņķa BAC lielumu!

3.3.6. Dots taisnstūris, kas ar diviem taisnstūra malām paralēliem nogriežņiem sadalīts četros mazākos taisnstūros. Trijiem no tiem perimetri ir zināmi (skat. U3.8. zīm.). Kāds ir ceturtā taisnstūra perimetrs?

2009 cm	2010 cm
2010 cm	**?**

U3.8.zīm.

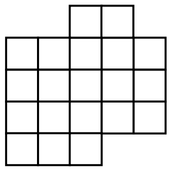
3.3.7. Zvaigžņu ielejas ģimnāzijā mācās 300 skolēni. Katrs ģimnāzijas skolēns nodarbojas ar vienu vasaras un vienu ziemas sporta veidu. Vasarā 60% skolēnu spēlē volejbolu, bet pārējie – spēlē futbolu. Ziemā katrs skolēns nodarbojas vai nu ar distanču slēpošanu, vai spēlē hokeju. Zināms arī, ka 56% no visiem distanču slēpotājiem vasarā spēlē volejbolu, bet 30% no volejbolistiem ziemā spēlē hokeju. Cik skolēni vasarā spēlē futbolu, bet ziemā – hokeju?

3.3.8. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2010. Kā pierakstīt tiem priekšā „+” un „–” zīmes, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

3.3.9. Burvju salā dzīvo tikai bruņinieki, kas vienmēr saka patiesību, un laupītāji, kas vienmēr melo. Kādu dienu 25 salas iedzīvotāji nostājās rindā viens aiz otra. Pirmais rindā stāvošais apgalvoja, ka visi aiz viņa stāvošie ir bruņinieki. Pārējie rindā stāvošie apgalvoja, ka viņiem tieši priekšā stāvošā persona ir laupītājs. Cik bruņinieku stāvēja rindā?

3.3.10. U3.9. zīmējumā attēlots rūķīšu ciema plāns – katrā kvadrātiņā dzīvo pa vienam rūķītim. Kādu dienu rūķītis Centis nolēma apciemot visus pārējos rūķīšus, katru tieši vienu reizi, un atgriezties mājās, pie tam no katra rūķīša viņš tālāk devās pie tāda rūķīša, kura zemes gabalam ir kopīga mala ar to zemes gabalu, kurā viņš šobrīd atrodas (arī pirmajā gājienā no savas mājas Centis devās pie sava kaimiņa un mājās atgriezās no kaimiņa, ar kura zemes gabalu viņam ir kopīga robeža).

Cik dažādos veidos Centis to var izdarīt?



U3.9.zīm.

3.4. CETURTĀ KĀRTA

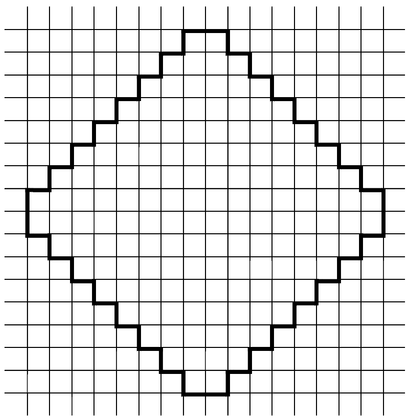
3.4.1. Ievietojiet U3.10. attēlā burtu P vietā pāra ciparus, bet burtu N vietā – nepāra ciparus tā, lai veidotos pareizs reizināšanas piemērs (cipari, protams, drīkst atkārtoties)! Pietiek uzrādīt vienu pareizu piemēru!

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}\mathrm{P\;P\;N}\\ \mathrm{N\;N}\end{array}\\ \hline \mathrm{P\;N\;P\;N}\\ \mathrm{P\;N\;N\;\;\;}\\ \hline \mathrm{N\;N\;N\;N\;N}\end{array}$$

U3.10.zīm.

3.4.2. Dots, ka k ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $13k+9$ un $4k+7$ ciparu summas nav vienādas.

3.4.3. Vai U3.11. zīmējumā redzamo figūru var sagriezt 5 daļās, no kurām var salikt kvadrātu?



U3.11.zīm.

3.4.4. Vai var U3.12. zīmējumā redzamajās tukšajās rūtiņās ierakstīt katrā pa naturālam skaitlim tā, ka visās trīspadsmit rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 2011, savukārt jebkurās trīs pēc kārtas ņemtās rūtiņās esošo skaitļu summas ir vienādas?

	101										21	

U3.12.zīm.

3.4.5. Rūtiņu papīra lapa, kuras izmēri ir $5\times n$ rūtiņas, aizpildīta ar kartītēm, kuru izmēri ir 1×2 rūtiņas. Katra kartīte aizņem divas blakus esošās rūtiņas; kartītes cita ar citu nepārsedzas. Uz katras kartītes vienā rūtiņā ierakstīts „+1”, otrā „-1”. Ir zināms, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums ir pozitīvs. Kādām n vērtībām tas iespējams?

3.4.6. Ievai ir divas sveces, kurām ir vienāds augstums, bet atšķirīgi degšanas ātrumi. Pirmā svece pilnībā nodeg 10 stundās, bet otrā – 8 stundās.

Ja Ieva tieši pusdienlaikā vienlaicīgi aizdedzinātu abas sveces, cikos pirmās sveces augstums būtu divas reizes lielāks nekā otrajai svecei?

3.4.7. Trīs vienādas riņķa līnijas ω_1, ω_2, ω_3 ar centriem O_1, O_2, O_3 krustojas vienā punktā A. Ar A_1, A_2, A_3 apzīmējam pārējos šo riņķa līniju krustpunktus. Pierādīt, ka $\Delta O_1O_2O_3$ un $\Delta A_1A_2A_3$ ir vienādi!

3.4.8. Rūķu ciemata AHAHA valodā ir tikai divi burti – „H” un „A”. Divi vārdi nozīmē vienu un to pašu, ja vienu no otra var iegūt ar šādu operāciju palīdzību: izdzēšot pēc kārtas sekojošu burtu virknes HA vai AAHH, kā arī vārda jebkurā vietā ierakstot AH.

Vai vārdi AHH un HAA nozīmē vienu un to pašu?

3.4.9. Pieci skolēni – Andris, Baiba, Edgars, Kristaps un Jana – visi ir dažāda vecuma. Ir zināms, ka no septiņiem apgalvojumiem –

1) Andris ir vecāks nekā Edgars,
2) Baiba ir jaunāka nekā Kristaps,
3) Jana ir jaunāka nekā Andris,
4) Edgars ir vecāks nekā Kristaps,
5) Andris ir jaunāks nekā Kristaps,
6) Edgars ir vecāks nekā Jana,
7) Kristaps ir jaunāks nekā Jana –

tieši viens ir nepareizs.

Kurš tas ir? Sakārto skolēnus vecuma pieaugšanas kārtībā.

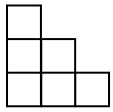
3.4.10. Planētas Orora iedzīvotājiem ir trīs rokas – labā, kreisā un vidējā. Katrai rokai ir vismaz viens pirksts, bet visām rokām kopā ir tieši 15 pirksti. Cik dažādiem cimdu komplektiem jābūt pārdošanā uz šīs planētas, lai katrs Ororas iedzīvotājs varētu iegādāties sev atbilstošu cimdu komplektu? (Uzskatām, ka visi pirksti ir vienāda garuma, t.i., vienam un tam pašam pirkstu skaitam labās, kreisās un vidējās rokas cimdi ir vienādi.)

3.5. PIEKTĀ KĀRTA

3.5.1. Kādā ciematā viena trešdaļa visu bērnu prot peldēt, divas trešdaļas prot braukt ar velosipēdu, bet viena septītā prot gan peldēt, gan braukt ar velosipēdu. Cik bērnu neprot ne peldēt, ne braukt ar velosipēdu, ja pavisam ciematā ir mazāk nekā 40 bērni?

3.5.2. Vienādojumā $\dfrac{E\cdot I\cdot G\cdot H\cdot T}{F\cdot O\cdot U\cdot R}=T\cdot W\cdot O$ katrs burts apzīmē vienu ciparu, turklāt dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari. Kādas ir iespējamās reizinājuma $T\cdot H\cdot R\cdot E\cdot E$ vērtības?

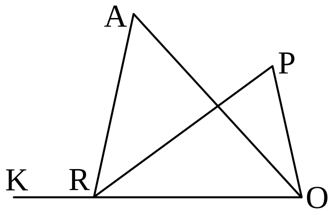
3.5.3. Dotajā figūrā, kas sastāv no 6 vienādiem kvadrātiem (skat. U3.13. zīm), jāiekrāso vismaz viens kvadrāts tā, lai figūrai būtu tieši viena simetrijas ass. Cik dažādos veidos to iespējams izdarīt?



U3.13.zīm.

3.5.4. Grāmatā ir 89 lappuses, bet lappušu numuri ir ierakstīti nepareizi – katras trešās lappuses numurs ir izlaists, līdz ar to lappuses ir numurētas šādi: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ... Kāds numurs ir grāmatas pēdējai lappusei?

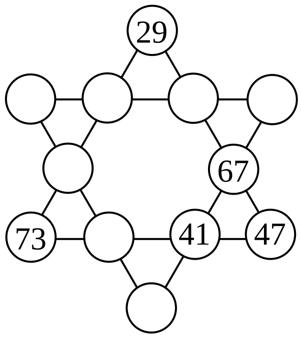
3.5.5. Aprēķini U3.14. zīmējumā redzamā leņķa RAO lielumu, ja zināms, ka nogrieznis AO sadala leņķi POR divos vienādos leņķos, nogrieznis AR sadala leņķi KRP divos vienādos leņķus un $\angle RPO = 80°$.



U3.14.zīm.

3.5.6. Kuba formas papīra kastīti bez vāka (t.i., bez vienas skaldnes) sagriez trīs daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu.

3.5.7. Maģiskajā zvaigznē (skat. U3.15. zīm.) aplīšos ieraksti divpadsmit dažādus pirmskaitļus tā, lai uz vienas taisnes esošajos aplīšos ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Pieci pirmskaitļi, tajā skaitā lielākais un mazākais no izmantotajiem pirmskaitļiem, jau ir doti. (Paskaidro savu risinājumu!)



U3.15.zīm.

3.5.8. Vai var izrakstīt pa apli skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tā, lai nekādu divu blakus esošo skaitļu summa nedalītos ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7?

3.5.9. Ir trīs pudeles, kuru kakliņiem, skatoties no augšas, ir šādas formas: vienai – riņķis ar diametru 2 cm, otrai – kvadrāts ar malas garumu 2 cm, bet trešajai – vienādsānu trijstūris, kuram gan pamata mala, gan augstums pret pamatu ir 2 cm gari. Jāizgatavo viens universāls korķis, ar kuru varētu cieši aiztaisīt jebkuru no šīm pudelēm. Kādam jābūt šim korķim?

3.5.10. Saimnieks pagrabā iekārtoja kvadrātveida skapi ar 9 nodalījumiem. Vidējo (iekšējo) nodalījumu viņš atstāja brīvu – tukšajām pudelēm. Pārējos nodalījumos novietoja 60 pudeles, katrā stūra nodalījumā bija 6 pudeles, katrā vidējā nodalījumā – 9 pudeles (skat. U3.16. zīm.). Tādējādi katrā kvadrāta malā bija 21 pudele. Kalps ievēroja, ka saimnieks pārbauda pudeļu skaitu, skaitot pudeles kvadrāta malās un sekojot, lai katrā malā būtu 21 pudele. Kalps paņēma sev 4 pudeles, bet atlikušās izvietoja tā, lai katrā malā atkal būtu 21 pudele. Saimnieks pārskaitīja pudeles pēc ierastā paņēmiena un nodomāja, ka pudeļu skaits ir tas pats, tikai kalps tās savādāk salicis. Kalps izmantoja saimnieka neattapību un piesavinājās vēl 4 pudeles, atlikušās izvietojot tā, lai katrā malā būtu 21 pudele. Tā viņš turpināja piesavināties katrreiz pa 4 pudelēm tik ilgi, cik vien iespējams.

Cik reižu kalps ņēma pudeles, un cik pudeles pavisam viņš piesavinājās?

6	9	6
9		9
6	9	6

U3.16.zīm.

3.6. SESTĀ KĀRTA

3.6.1. Ceļodams pa Angliju, vienā veikalā Kārlis atrada kliņģerus angļu alfabēta burtu formā, pie tam katram burtam bija cita cena. Kālis ievēroja, ka *vārds* ONE maksā 6 mārciņas, *vārds* TWO maksā 9 mārciņas, bet *vārds* ELEVEN maksā 16 mārciņas. Cik maksā vārdam TWELVE nepieciešamie kliņģeri?

3.6.2. Andris mēģina atrast tādu naturālu skaitli *n,* lai $n^2 = \overline{CAUCAU}$, kur *C, A, U* ir kaut kādi cipari un C ≠ 0. Vai Andrim izdosies atrast kaut vienu tādu skaitli *n*?

3.6.3. Māksliniekam ir 202 zīmuļi, tie ir salikti divu veidu kastītēs – pa 5 zīmuļiem vienā kastītē vai pa *x* zīmuļiem vienā kastītē. Noskaidro visas iespējamās *x* vērtības!

3.6.4. Lanlandē ir *n* pilsētas un vairāki ceļi. Katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas, pie tam no katras pilsētas iziet vismaz viens ceļš un katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viens ceļš. Kāds var būt *n*, ja Lanlandē ir

a) 7 ceļi,

b) 2011 ceļi?

3.6.5. Rokdarbu pulciņa vadītāja iedeva meitenēm naudu un palūdza nopirkt dziju adīšanas nodarbībai. Veikalā tobrīd bija akcija: uzrādot čeku par nopirktiem 20 kamoliem dzijas, tiek atdoti 25% no to vērtības, bet uzrādot čeku par 5 nopirktiem kamoliem, tiek atdoti 10% no to vērtības. Gudri rīkojoties un maksimāli izmantojot akcijas piedāvājumu, meitenes par iedoto naudu nopirka par 12 dzijas kamoliem vairāk, nekā bija lūgusi skolotāja. Cik kamolus skolotāja bija lūgusi nopirkt, nezinot akcijas piedāvājumu?

3.6.6. Vai dažādmalu trijstūri var sagriezt divās daļās, no kurām var salikt trapeci, tā, lai

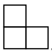
a) dotā trijstūra divas malas būtu trapeces pamati,

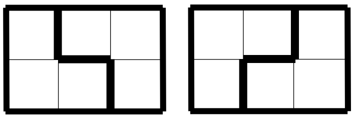
b) dotā trijstūra divas malas būtu trapeces sānu malas?

3.6.7. Regulāra deviņstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9, katrā virsotnē cits skaitlis. Pēc tam tika novilktas visas deviņstūra diagonāles. Uz katras diagonāles uzrakstīja tās galapunktos ierakstīto skaitļu reizinājumu. Vai skaitļus virsotnēs var ierakstīt tādā veidā, lai visi uz diagonālēm uzrakstītie skaitļi būtu dažādi?

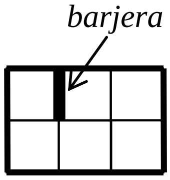
3.6.8. Zināms, ka trijstūrī *ABC* viena mala ir garāka nekā 1 cm. Vai šo trijstūri noteikti var sagriezt vairākos tādos trijstūros, kuriem katram vismaz viena mala ir tieši 1 cm gara? Pamato savus spriedumus!

3.6.9. Vai eksistē tāds daudzstūris, kuram pēc kārtas seši leņķi ir šauri?

3.6.10. Taisnstūrim 2 × 3 rūtiņas ir divi dažādi *V-sadalījumi*, t. i., sadalījumi figūrās „*stūrīšos*” , skat. U3.17. zīmējumu, bet ievietojot vienu *barjeru* (vienības nogriezni, ko nedrīkst šķērsot neviena V figūra), skat. U3.18. zīm., iegūst tikai vienu *V-sadalījumu*. Kāds mazākais barjeru skaits jāizvieto taisnstūrī 4 × 6, lai tam būtu tikai viens *V-sadalījums*?



U3.17. zīm.



U3.18. zīm.

4. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

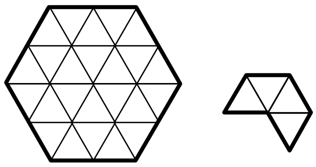
4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Atrisiniet skaitļu rēbusu – aizstājiet burtus ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem burtiem – dažādi cipari, pie tam zināms, ka burtam E atbilst nepāra cipars.
(Piezīme: skaitļa pirmais cipars nevar būt 0.)

```
  VIENS
   DIVI
+  DIVI
-------
  PIECI
```

4.5.2. **a)** Izmantojot visus ciparus, katru tieši vienu reizi, izveidojiet piecus divciparu skaitļus, kuru attiecība ir 1 : 2 : 3 : 4 : 5.
b) Izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9, katru tieši vienu reizi, izveidojiet piecus skaitļus, kuru attiecība ir 1 : 2 : 3 : 4 : 5.

4.5.3. Sagrieziet U4.1. zīm. attēloto sešstūri tādās figūriņās, kā parādīts U4.2.zīm.



U4.1.zīm.

4.5.4. No mucas, kas bija pilna ar ūdeni, visu ūdeni vienādās daļās izlēja trīs tukšos spaiņos. Izrādījās, ka pirmajā spainī ūdens aizņem tieši pusi, otrajā – $\frac{2}{3}$, bet trešajā – $\frac{3}{4}$. Gan mucas, gan katra spaiņa tilpums ir vesels skaits litru. Kāds ir mazākais mucas tilpums, pie kura iespējama aprakstītā situācija?

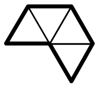
4.5.5. Jānim divās kabatās katrā ir pa 98 santīmiem. Labajā kabatā ir 49 monētas, bet kreisajā – 50 monētas. Vai vienmēr ir iespējams labās kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs, lai katrā kaudzītē būtu pa 49 santīmiem? Un kreisās kabatas saturu?

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Atrodiet tādu desmitciparu naturālu skaitli, kura decimālais pieraksts satur katru no cipariem 0, 1, …, 9 tieši vienu reizi un kas dalās ar skaitli 2010 bez atlikuma.

4.6.2. Dots regulārs sešstūris ar malas garumu 4. Sagrieziet to tādās figūrās, kā parādīts U4.2. zīmējumā; figūra sastāv no 4 regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1.

(*Piezīme:* par regulāru daudzstūri sauc tādu daudzstūri, kuram visas malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir vienādi.)



U4.2.zīm.

4.6.3. Noskaidrojiet, cik maksā 1 pildspalva, ja zināms, ka 16 šādas pildspalvas maksā tik latus, cik šādas pildspalvas var nopirkt par vienu latu!

4.6.4. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 11, bet katrs nākamais ir vienāds ar iepriekšējā skaitļa kvadrāta (reizinājuma pašam ar sevi) ciparu summu. Kāds skaitlis šajā virknē ir 2010. vietā?

4.6.5. Annai ir pa divām zilām, sarkanām, baltām un melnām bumbiņām, kā arī sviras svari bez atsvariem. Viņa uz svaru labā kausa uzlika dažas (varbūt vienu) dažādu krāsu bumbiņas, bet uz kreisā kausa – šo pašu krāsu otrās bumbiņas. Labais svaru kauss izrādījās smagāks. Vēl Anna ievēroja, ka, samainot vietām jebkuras divas vienas krāsas bumbiņas, svaru stāvoklis mainījās – vai nu iestājās līdzsvars, vai arī kreisais kauss kļuva smagāks. Kādu lielāko skaitu bumbiņu Anna var būt uzlikusi uz viena svaru kausa?

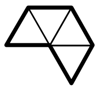
4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodiet visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība.

4.7.2. Uzzīmējiet 10-stūri, kuram uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas vismaz vēl viena tā mala.

4.7.3. Cik dažādos veidos skaitli 51 var izteikt kā divu vai vairāk pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? (Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskata par vienādiem.)

4.7.4. Pierādiet, ka regulāru sešstūri ar malas garumu n, kur n – pāra skaitlis, var sagriezt tādās figūrās, kā parādīts U4.3. zīmējumā; figūra sastāv no 4 regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1. (Piezīme: par regulāru daudzstūri sauc tādu daudzstūri, kuram visas malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir vienādi.)



U4.3.zīm.

4.7.5. Kārlim ir īpašs kalkulators, kas var izpildīt tikai divas operācijas:

1) ja tiek ievadīts skaitļu pāris (a, b), kalkulators izdod skaitļu pāri $(a + 1, b - 2)$;

2) ja tiek ievadīts skaitļu pāris (a, b), kalkulators izdod skaitļu pāri $(a + 2, b - 1)$.

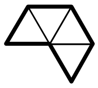
Vai ar šo kalkulatoru, lietojot to vairākkārt, no pāra (1, 30) var iegūt pāri (13, 17)?

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Dots, ka a un b – reāli pozitīvi skaitļi. Pierādiet, ka $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{a+b}{a+b+1}$.

4.8.2. Trijstūrī ABC malu AB, BC un AC viduspunkti ir attiecīgi punkti D, E un F. No punktiem D un E pret malu AC ir vilkti perpendikuli, kas krusto malu AC (vai tās pagarinājumu) attiecīgi punktos G un H. Pierādiet, ka $GF = CH$.

4.8.3. Kādiem n regulāru sešstūri ar malas garumu n var sagriezt tādās figūrās, kā parādīts U4.4. zīmējumā; figūra sastāv no 4 vienādmalu trijstūriem ar malas garumu 1.



U4.4.zīm.

4.8.4. Rindā uzrakstīti 2010 cipari tā, ka katrs divciparu skaitlis, ko veido divi blakus esošie cipari (tādā secībā, kā uzrakstīti), dalās vai nu ar 17, vai ar 23. Kāds šajā rindā ir

a) pēdējais cipars, ja pirmais cipars ir 9;

b) pirmais cipars, ja pēdējais cipars ir 1?

4.8.5. Pie sienas ir lampiņas, kas pēc kārtas sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz N. Vadības panelī ir slēdži, kuru numuri ir pēc kārtas sekojoši pirmskaitļi, sākot no 2 (pēdējā slēdža numurs ir pirmskaitlis, kas pārsniedz N). Kad pārslēdz slēdzi ar numuru K, visas lampiņas, kuru numuri dalās ar K, maina savu stāvokli (no ieslēgtas uz izslēgtu vai no izslēgtas uz ieslēgtu). Sākumā visas lampiņas ir izslēgtas. Zināms, ka ar slēdžu palīdzību var panākt, ka visas lampiņas vienlaicīgi ir ieslēgtas. Kādai lielākajai N vērtībai tas ir iespējams?

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Pierādiet, ka $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ visiem reāliem x un y.

4.9.2. Trijstūrī viena no mediānām perpendikulāra vienai no bisektrisēm. Pierādiet, ka viena no trijstūra malām ir divas reizes garāka par otru.

4.9.3. Zināms, ka skaitlis A dalās ar 7 un tā decimālais pieraksts satur tikai ciparus 1. Pierādiet, ka A dalās arī ar 13.

4.9.4. Pierādiet, ka izliektu 39-stūri nevar sadalīt deviņos izliektos sešstūros.

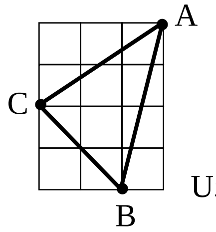
4.9.5. Dots kvadrāts ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai. Zaudē tas, pēc kura gājiena izveidojas iekrāsots kvadrāts 2×2 rūtiņas. Kurš no spēlētājiem vienmēr var panākt savu uzvaru? Aprakstiet uzvarētāja spēles stratēģiju.

5. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Vai skaitli 119 var izteikt kā vairāku naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo skaitļu reizinājums būtu 119?

5.5.2. Cik rūtiņas liels ir trijstūra *ABC* laukums (skat. U5.1. zīm.)?



U5.1.zīm.

5.5.3. Četrdesmitvietīgs autobuss veica reisu no pilsētas *A* uz pilsētu *G*, pa ceļam pieturot pilsētās *B, C, D, E* un *F* (iespējams, citā secībā). Katrā pilsētā iekāpušo un/vai izkāpušo pasažieru skaits parādīts tabulā:

Pilsēta	Izkāpa	Iekāpa
A	-	34
B	23	30
C	28	29
D	21	32
E	26	14
F	35	22
G	28	-

Noteikt, kādā secībā tika apmeklētas pilsētas *B, C, D, E* un *F*, ja zināms, ka nevienā brīdī autobusā netika pārvadāts vairāk pasažieru kā autobusā ir vietu!

5.5.4. Vai ir iespējams 5×5 rūtiņu kvadrātā izkrāsot dažas rūtiņas tā, ka katrā 3×3 rūtiņu kvadrātā, kas ir lielā kvadrāta daļa, ir iekrāsotas tieši

a) trīs,

b) četras rūtiņas?

5.5.5. Astoņas raganas katra ir iemācījusies jaunu burvestību (katra citu). Katrai raganai ir mobilais telefons. Kad viena ragana piezvana otrai, tās vienas minūtes laikā paspēj viena otrai iemācīt visas burvestības, ko māk pašas. Kāds ir mazākais iespējamais laiks, pēc kura visas raganas būs iemācījušās visas jaunās burvestības?

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 21 var sadalīt grupās tā, ka katrā grupā lielākais skaitlis ir vienāds ar pārējo skaitļu summu?

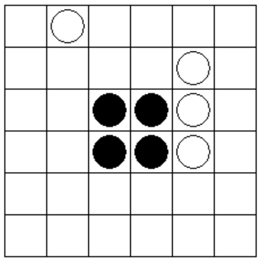
5.6.2. Visi piecciparu naturālie skaitļi, kuru pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5 izmantots tieši vienu reizi, ir uzrakstīti virknē augošā secībā: 12345, 12354, 12435, ... Kurš pēc kārtas šajā virknē ir skaitlis 45321?

5.6.3. Vai var atrast tādus veselus skaitļus *x* un *y*, ka

a) $12x - 8y = 2$;

b) $11x - 7y = 2$?

5.6.4. Sagriez U5.2. zīmējumā redzamo figūru pa rūtiņu malām četrās gan pēc formas, gan pēc laukuma vienādās daļās tā, lai katrā no tām būtu pa vienam melnam un pa vienam baltam aplītim.



U5.2.zīm.

5.6.5. Izkrāso 6×6 rūtiņu lielā kvadrātā sešas rūtiņas tā, lai no tā nevarētu izgriezt ne taisnstūri 1×6 rūtiņas, ne kvadrātu 3×3 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir neizkrāsotas.

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Atrodiet skaitļa $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2$ pēdējo ciparu.

5.7.2. Cik ir tādu naturāli skaitļu n no 1 līdz 2011 ieskaitot, ka skaitlis $(n+1)(n+2)(n+3)$ dalās ar 125?

5.7.3. Pa apli uzrakstīti pieci dažādi skaitļi, nekādu divu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājums nav pozitīvs. Aplūkojam visus piecus triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu reizinājumus. Cik no tiem ir pozitīvi?

5.7.4. Vai 8×8 rūtiņas lielā kvadrātā var aizkrāsot

a) 16 rūtiņas,

b) 17 rūtiņas tā, ka nekādas divas aizkrāsotās rūtiņas neatrodas blakus?

Par blakus rūtiņām sauksim rūtiņas, kurām ir kopīgs vismaz viens punkts.

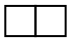
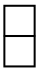
5.7.5. Pilsētā, kurā dzīvo godīgie iedzīvotāji (kas vienmēr runā tikai taisnību) un blēži (kas vienmēr melo), notika domes vēlēšanas, kurās piedalījās visi pilsētas iedzīvotāji. Balsot varēja par kādu no četrām partijām *A*, *B*, *C* un *D*, un katrs iedzīvotājs nobalsoja tieši par vienu partiju. Pirms rezultātu apkopošanas žurnālisti veica visu iedzīvotāju aptauju. Uz jautājumu „Vai jūs balsojāt par partiju *A*?” ar „Jā” atbildēja 22% pilsētas iedzīvotāju. Uz līdzīgu jautājumu par partiju „*B*” ar „Jā” atbildēja 33%, par partiju „*C*” – 44%, bet par partiju „*D*” – 55% iedzīvotāju. Cik procenti pilsētas iedzīvotāju ir godīgie iedzīvotāji un cik – blēži?

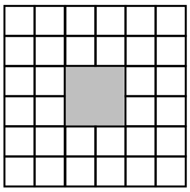
5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Piecciparu skaitlis *B* ir iegūts no mazāka piecciparu skaitļa *A*, samainot vietām tā ciparus. Pierādīt, ka $B - A$ dalās ar 9.

5.8.2. Zināms, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne. Ar ko ir vienāda summa $p + q$?

5.8.3. Trijstūrī *ABC* leņķis $\angle ABC = 30°$. Uz malas *AB* izvēlēts punkts *E*, bet uz malas *BC* punkts *F*, tā, ka trijstūris *CEF* ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts *F* ir malas *BC* viduspunkts.

5.8.4. Apskatām U5.3. zīmējumā parādīto figūru, kas sastāv no 32 rūtiņām. Kāds ir lielākais dažādu taisnstūru skaits, kuros to var sagriezt (griezumus jāveic tikai pa rūtiņu malām)? Atbildi pamato! (Divus taisnstūrus uzskata par atšķirīgiem, ja tiem atšķiras izmēri nevis tikai novietojums, piem.,  un  ir vienādi taisnstūri.)



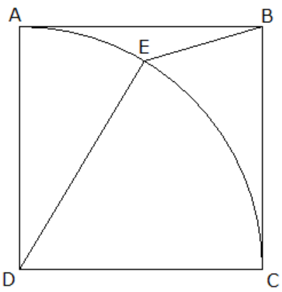
U5.3.zīm.

5.8.5. Pilsētā, kurā dzīvo godīgie iedzīvotāji (kas vienmēr runā tikai taisnību) un blēži (kas vienmēr melo), notika domes vēlēšanas, kurās piedalījās visi pilsētas iedzīvotāji. Balsot varēja par kādu no četrām partijām *A*, *B*, *C* un *D*, un katrs iedzīvotājs nobalsoja tieši par vienu partiju. Pirms rezultātu apkopošanas žurnālisti veica visu iedzīvotāju aptauju. Uz jautājumu „Vai jūs balsojāt par partiju *A*?” ar „Jā” atbildēja 33% pilsētas iedzīvotāju. Uz līdzīgu jautājumu par partiju „*B*” ar „Jā” atbildēja 44%, par partiju „*C*” – 55%, bet par partiju „*D*” – 0% iedzīvotāju. Kāds patiesībā bija balsu sadalījums, t.i., cik procenti iedzīvotāju nobalsoja par katru partiju?

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b – reāli skaitļi, pie tam $a + b = 2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

5.9.2. Kvadrātā *ABCD* ir ievilkts riņķa līnijas loks *AC* (riņķa līnijas centrs ir *D*, bet rādiuss *DA*; skat. U5.4. zīm.). Uz loka *AC* atzīmēts tāds punkts *E*, ka $\angle ADE = 2\angle ABE$. Aprēķināt $\angle ABE$ lielumu.



U5.4.zīm.

5.9.3. Pa apli uzrakstīti *k* dažādi naturāli skaitļi. Starp tiem pāra skaitļu ir trīs reizes vairāk nekā nepāra skaitļu. Tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, ir divreiz vairāk nekā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2. Kāda ir mazākā iespējamā *k* vērtība?

5.9.4. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu *a, x, y* un *z*, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

5.9.5. Sacensībās piedalījās deviņas kamaniņbraucējas. Sacensību uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tā ieņem augstāku vietu. Atsevišķu sportistu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām sportistēm bija atšķirīga. Kamaniņbraucēja Maija visos braucienos ieņēma vienu un to pašu – N-to vietu. Kādai lielākajai N vērtībai iespējams, ka Maija kopvērtējumā tomēr uzvarēs, t.i., iegūs 1. vietu?

6. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Doti 4023 kvadrātvienādojumi formā $x^2+ax+b=0$. Starp visu vienādojumu a vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no –2011 līdz 2011 (ieskaitot), tāpat arī starp b vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no –2011 līdz 2011 (ieskaitot). Vai var gadīties, ka visiem dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi?

6.9.2. Uz taisnleņķa trīsstūra garākās katetes kā diametra konstruēta riņķa līnija, kas no hipotenūzas atšķeļ nogriezni, kura garums vienāds ar īsākās katetes garumu. Aprēķināt hipotenūzas un īsākās katetes garumu attiecību!

6.9.3. Parādīt, ka no visiem trīsciparu skaitļiem, kuru pierakstā nav cipara 0, var izvēlēties 81 trīsciparu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas trīs īpašības:

1) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot pirmo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;
2) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot otro ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;
3) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot trešo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi.

6.9.4. Doti četri atsvari, kuru masas ir savā starpā atšķirīgas. Šie atsvari visos iespējamos veidos tika sadalīti pāros, un katrā gadījumā uz sviras svariem tika salīdzinātas abu pāru masas. Vai, zinot visu šo svēršanu rezultātus (nevienā svēršanā svaru kausi nebija līdzsvarā), iespējams noteikt:

a) vienu atsvaru, kurš ir **vai nu** vissmagākais, **vai** visvieglākais;
b) **gan** vissmagāko, **gan** visvieglāko atsvaru?

(Svari nerāda masu starpību, bet ļauj tikai noteikt, uz kura kausa ir lielāks smagums.)

6.9.5. Trīs spēlētāji sēž pie apaļa galda un spēlē kādu spēli, kas organizēta vairākās kārtās. Katrā kārtā viens no spēlētājiem uzvar un iegūst 3 punktus, nākamais spēlētājs pie galda pulksteņrādītāja virzienā zaudē divus punktus, bet trešais zaudē vienu punktu. Pēc visu kārtu punktu saskaitīšanas izrādījās, ka vienam no spēlētājiem summā ir 0 punktu. Vai var būt, ka kādam no pārējiem spēlētājiem summā ir

a) 48;
b) 49 punkti?

7. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Reizināšanas piemērā ciparus aizstāja ar burtiem un ieguva izteiksmi

$$AB \cdot CD = EEE \,.$$

Atjauno sākotnējo reizināšanas piemēru, ja zināms, ka vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus, pie tam ne *A*, ne *C* nav 0. Atrodi visus iespējamos atrisinājumus!

7.5.2. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi trīs rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. U7.1. zīm.). Aizpildi pārējās tabulas rūtiņas!

	15	
	11	
		18

U7.1.zīm.

7.5.3. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros!

7.5.4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 12, katru izmantojot tieši vienu reizi, var uzrakstīt pa apli tādā secībā, ka jebkuru divu blakus esošu skaitļu starpība ir

a) 2 vai 3;

b) 3 vai 4?

7.5.5. Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas jāizvieto *n* „stūrīšus" (U7.2. zīm. attēlotās figūras) tā, lai tajā vairāk nevarētu ievietot nevienu citu šādu „stūrīti". (Stūrīšu malām jāiet pa rūtiņu malām. Stūrīši var arī būt pagriezti citādāk.)

Parādi, kā to var izdarīt, ja

a) $n = 9$;

b) $n = 8$.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *a* un *b*, kuriem izpildās vienādība

$$a \cdot b \cdot (a + b) = 20102011?$$

7.6.2. Sešdesmit pensionāri katru dienu *sociālajā tīklā* sarakstās savā starpā. Katrs kungs sarakstās ar tieši 17 dāmām, bet katra kundze sarakstās ar tieši 13 kungiem. Cik starp šiem pensionāriem ir kungu un cik – dāmu? (Sarakstes ir abpusējas: ja kungs *K* sarakstās ar dāmu *D*, tad, bez šaubām, dāma *D* sarakstās ar kungu *K*.)

7.6.3. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds mazākais skaits rūtiņu šajā kvadrātā jānokrāso zaļas, lai tajā nevarētu atrast nevienu pilnībā baltu taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas (novietotu horizontāli vai vertikāli)?

7.6.4. U7.3. zīmējumā dota 3×3 rūtiņu tabula, kurā ierakstīti veseli skaitļi. Vienā gājienā atļauts izvēlēties divas dažādas tabulas rūtiņas – apzīmēsim tajās

ierakstītos skaitļus attiecīgi ar a un b, nodzēst šos divus skaitļus un to vietā ierakstīt: a vietā – skaitli $5 \cdot a - 2 \cdot b$, bet b vietā – skaitli $5 \cdot b - 2 \cdot a$.
Vai, vairākkārt veicot šādus gājienus, var iegūt tabulu, kāda attēlota U7.4. zīmējumā?

0	1	1
-1	1	2
1	0	-1

U7.3.zīm.

2	3	1
-5	3	8
1	7	-5

U7.4.zīm.

7.6.5. Betai bija 50 konfektes, bet Almai un Danai bija vienāds konfekšu skaits. Beta pazaudēja vienu konfekti un noskuma. Almai kļuva Betas žēl, un viņa atdeva māsai pusi no savām konfektēm. Beta nomierinājās un nolēma, ka viņai tagad konfekšu ir par daudz un atdeva pusi no savām Danai. Arī Dana izlēma padalīties ar Almu un atdeva pusi no savām konfektēm Almai. Tagad Almai un Betai ir vienāds konfekšu skaits. Cik konfekšu sākumā bija katrai no māsām?

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Uz tāfeles augošā secībā uzrakstīti seši dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka

- visu skaitļu pēdējie cipari ir atšķirīgi;
- sestais skaitlis ir par 14 lielāks nekā trešais;
- ceturtā skaitļa pirmais cipars ir vienāds ar otrā skaitļa pēdējo ciparu;
- piektā un sestā skaitļa pirmie cipari ir vienādi.

Atrodi visus šos skaitļus!

7.7.2. No pilsētas *A* uz pilsētu *B* vienlaicīgi izbrauca zaļa un sarkana automašīna. Sarkanā automašīna **visu** ceļu veica ar pastāvīgu ātrumu. Zaļā automašīna **tieši pusi** ceļa veica ar pastāvīgu ātrumu 30 *km/h*. Vai, otro ceļa pusi veicot ar lielāku ātrumu, zaļā automašīna var panākt sarkano automašīnu un pilsētā *B* ierasties vienlaicīgi ar to, ja sarkanās automašīnas ātrums bija

a) 40 *km/h*,
b) 60 *km/h*?

7.7.3. Atrodi naturālu skaitli, kuru, dalot ar 2010, atlikumā iegūst 13, bet, dalot ar 2011, atlikumā iegūst 3.

7.7.4. Kvadrāts sadalīts piecos taisnstūros tā, ka šo taisnstūru malu garumi centimetros ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Parādi vienu piemēru, kā to var izdarīt!

7.7.5. Taisne nokrāsota 10 dažādās krāsās. Pierādi, ka uz tās var atrast divus vienas krāsas punktus, starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. Starp skaitļiem

$$8 \quad 3 \quad 5 \quad 2,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu

a) 15;
b) 16.

7.8.2. Kvadrāta iekšpusē izvēlēts patvaļīgs punkts M, bet K, L, P, R ir kvadrāta malu viduspunkti. Pierādi, ka četrstūris, ko veido nogriežņu MK, ML, MP un MR viduspunkti, ir kvadrāts.

7.8.3. Kuba šķautņu viduspunktos ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 12, katrs tieši vienu reizi, tā, ka katrā skaldnē ierakstīto četru skaitļu summas ir vienādas. Nosaki visas iespējamās šo summu vērtības.

7.8.4. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa jauniegūtais skaitlis noteikti dalās ar

a) 17;

b) 23?

7.8.5. Jānis un Anna spēlē šādu spēli. Uz tāfeles ir uzrakstīts naturāls skaitlis. Spēlētāji pēc kārtas veic gājienu: no uzrakstītā skaitļa atņem kādu šī skaitļa ciparu (izņemot 0), nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un tā vietā uzraksta iegūto starpību. Uzvar tas, kurš pēc sava gājiena iegūst nulli.
Sākumā ir uzrakstīts skaitlis 2011, pirmo gājienu izdara Anna. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvarēs? Apraksti, kā uzvarētājam jārīkojas!

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Atrodi visus naturālu skaitļu pārus (x, y) tādus, ka $x \neq y$ un

$$\frac{1}{x^2+24}+\frac{1}{y^2+24}=\frac{2}{xy+24}.$$

7.9.2. Trijstūrī ABC $\angle ABC = 90°$, bet punkts P atrodas uz malas AB. M un N ir attiecīgi AC un PC viduspunkti. Pierādi, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

7.9.3. Dots vienādojums $\# x^2 - \# x + \# = 0$. Divi rūķīši spēlē spēli – pirmais nosauc trīs dažādus skaitļus, bet otrais tos kaut kādā secībā saliek „#" vietās. Vai pirmais rūķītis vienmēr var panākt, lai vienādojumam būtu vismaz viena racionāla sakne?

7.9.4. Kāds lielākais skaits pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var būt ar īpašību, ka katrs no tiem ir izsakāms kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpība?

7.9.5. Kvadrāta ar izmēriem 8×8 rūtiņas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. U7.5. zīmējumā attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek kvadrāta iekšpusē.
Kurās no pārējām trijām kvadrāta stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

			X
	X		
		A	
X			X

U7.5.zīm.

IETEIKUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?"

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Ievēro darbību secību – pirmās jāveic reizināšana un dalīšana.

1.1.2. Nosaki vienas iedaļas vērtību un ievēro, ka termometra stabiņš atrodas zem nulles.

1.1.3. Ievēro darbību secību.

1.1.4. Aprēķini sākotnējā taisnstūra laukumu. Ja jaunā taisnstūra vienas malas garums tagad būs 6 rūtiņas, cik ir jābūt otrās malas garumam?

1.1.5. Rūpīgi izpēti, cik un kādi cipari tajā sastopami.

1.1.6. Kuros zīmējumos torte sadalīta vienādos gabalos?

1.1.7. Pēc kārtas ievieto izteiksmē katrā atbilžu variantā dotos skaitļu pārus un pārbaudi, kura no atbildēm der par atrisinājumu.

1.1.8. Centies aprēķināt, cik sver Jānis Sprukts.

1.1.9. Cik minūtēs gaisma veic 152 miljonus kilometru?

1.1.10. Apskati, cik suņu ir istabā, ja tur ir viens kaķis; divi kaķi u.t.t.

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Ievēro darbību secību – pirmās jāveic reizināšanas, tikai pēc tam saskaitīšana un atņemšana.

1.2.2. Kuros datumos uz slidotavu nāks Anna un kuros – Zane?

1.2.3. Apskati, kāds var būt reizinājuma pēdējais cipars, ja viens otram sekojošo nepāra skaitļu pēdēji cipari ir 1 un 3; 3 un 5; 5 un 7; 7 un 9; 9 un 1.

1.2.4. Novelc taisnes pa *locījuma* līnijām un skaties, kurš no zīmējumiem atbilst iegūtajām daļām.

1.2.5. Abas nevienādību puses centies pārveidot vienādās mērvienībās.

1.2.6. Aizpildi aplīšus, sākot no beigām.

1.2.7. Izkritušā fragmenta pēdējās lappuses numurs būs pāra skaitlis, kas ir lielāks nekā pirmās lappuses numurs.

1.2.8. Katrai daļai jāsatur 12 rūtiņas.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Ievēro darbību secību; atceries, ka $1\,kg = 1000\,g$.

1.3.2. Centies patstāvīgi paveikt uzdevumā prasīto.

1.3.3. Apskati katras meitenes izteikto apgalvojumu atsevišķi – kādi skaitļi der katram no tiem.

1.3.4. Centies izteikt iekrāsotā taisnstūra malu garumus, izmantojot mazās pusriņķa līnijas rādiusa garumu.

1.3.5. Mēģini patstāvīgi atrast kurmja kustības maršrutu.

1.3.6. Uzmanīgi izlasi uzdevuma nosacījumus un aizpildi diagrammu atbilstoši tiem.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. **a)** Der jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 65;

b) Der jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 7;

c) Der jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 9.

1.4.2. Sākumā aprēķini, cik nedēļās Žanete sakrās 100 *Ls*.

1.4.3. Trešdaļā stundas ir trīs reizes mazāk minūšu nekā vienā pilnā stundā.

1.4.4. Cik stundu ir diennaktī? Cik minūšu ir stundā? Cik sekunžu ir minūtē?

1.4.5. Saulītes var aizpildīt, sākot no beigām un veicot uzrakstītajām darbībām pretējas darbības.

1.4.6. Viegli pārbaudīt, ka prasītais brīdis pienāks drīz pēc pusnakts.

1.4.7. Pārveido visus lielumu vienādās mērvienībās, piemēram, metros.

1.4.8. Pārveido katru lielumu pāri vienādās mērvienībās un salīdzini.

1.4.9. Sadali mazo iekrāsoto kvadrātiņu divās vienādās daļās pa diagonāli.

1.4.10. Cik loksnes nepieciešams, lai nolīmētu visu 9 *m* garo sienu?

1.4.11. Cik rūtiņas atbilst riņķa līnijas diametram un cik – kvadrāta malai?

1.4.12. Centies iedomāties, kāda varētu būt mājiņa katrai no sagatavēm.

1.4.13. Abus kvadrātu sagriez pa diagonāli uz pusēm.

1.4.14. Aplūko, kāda daļa figūras iekrāsota katrā gadījumā.

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Pārliecinies, ka virknē 2010 parādīsies tikai tad, kad rakstīs četrciparu skaitļus.

2.1.2. Pakāpeniski aprēķini, kāda daļa visu lapu paliks nenokrāsotas pēc katras krāsošanas.

2.1.3. Apzīmē Jāņa tagadējo vecumu ar burtu; sastādi un atrisini vienādojumu, izmantojot zināmās sakarības par Jāņa vecumu pirms 2 gadiem un pēc 2 gadiem. Līdzīgi izsaki un aprēķini arī Annas vecumu.

2.1.4. Prasītā kvadrāta malas garumam jābūt 7 rūtiņas.

2.1.5. Baibai jācenšas pēc katra Andra gājiena uzrakstīt tādu ciparu, kura summa ar Andra tikko uzrakstīto ciparu ir 6.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Centies patstāvīgi atrast atbilstošu piemēru.

2.2.2. Cik virsotnes var radīt taisne, krustojot desmitstūri?

2.2.3. Ievēro, ka $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, tātad dotajā izteiksmē iekavas jāsaliek tā, lai, pārveidojot tos par daļu, skaitļi 3, 7 un 11 būtu skaitītājā, savukārt visiem pārējiem skaitļiem jāsaīsinās.

2.2.4. Daudzstūrus (izņemot trijstūrus) ar vienu sarkanu virsotni var iegūt no daudzstūriem, kuriem visas virsotnes ir baltas.

2.2.5. Ja dārgakmeņus sadala divās kaudzītēs, tad ar ierīci var noteikt, kurā no tām ir burvju dārgakmens.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Apskati starpības starp blakusesošajiem virknes locekļiem.

2.3.2. Gan pirmajam, gan otrajam mēnesim jāsākas otrdienā; tātad pirmajā mēnesī jābūt tieši 4 pilnām nedēļām.

2.3.3. Prasīto var izdarīt, piemēram, lielāko no dotajiem kvadrātiem sagriežot trīs daļās, bet abus mazākos atstājot nesagrieztus.

2.3.4. Izmantojot mucu, ķipīti un vienu no spaiņiem var panākt, ka vienā spainī ir 6 litri ūdens.

2.3.5. Nepieciešamas vismaz 8 monētas. Apskati, cik monētu nepieciešams, lai samaksātu summu līdz 9 santīmiem.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Apskati katru iespējamo *B* vērtību. Ievēro, ka to zinot, var viennozīmīgi uzzināt arī *A* vērtību, kā arī dalījuma *AAAAAAAAA* : *B* vērtību.

2.4.2. Centies uzdevuma nosacījumus aprakstīt ar vienādojumu palīdzību, šķirojot gadījumus, vai ceļojums norisinās vienas diennakts vai divu dienu ietvaros.

2.4.3. Centies prasīto paveikt patstāvīgi.

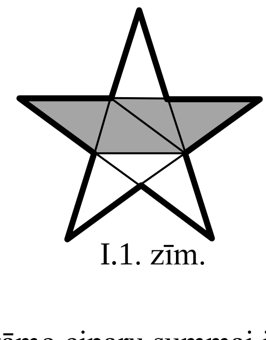
2.4.4. Apskati, cik no krustojumiem nepieciešams kādu ielas posmu slēgt.

2.4.5. Ja kāds cilvēks ir teicis patiesību, tad arī nākamais aiz viņa ir teicis patiesību.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. Apzīmē šos skaitļus ar n, $n+1$ un $n+2$; apskati šo skaitļu summu.

2.5.2. Sadali zvaigzni vairākos trijstūros, kā parādīts I.1. zīm. Ievēro, ka izveidojas vairāki vienādi trijstūri.



I.1. zīm.

2.5.3. Daudzpunktu vietās ierakstāmo ciparu summai jābūt 20.

2.5.4. Sadali kvadrātu 9 kvadrātiņos ar izmēriem 2 × 2 rūtiņas. Cik rūtiņas katrā mazajā kvadrātiņā vismaz jānokrāso, lai nevienu citu „stūrīti” tajā nevarētu iekrāsot?

2.5.5. Ja prasītais nav iespējams, tad Šallija kopā ar pilsētām, uz kurām no Šallijas var aizbraukt, veido noslēgtu sistēmu, kurā neietilpst Dallija. Apskati, cik *ceļa galu* tad būs Šallijas veidotajā sistēmā.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

3.1.1. Apskati, kādas ir iespējamās *E* vērtības.

3.1.2. Ja apzīmējam centrālajā rūtiņā esošo skaitli ar *x*, katras diagonāles, rindas un kolonnas visu skaitļu summa ir $x+20$.

3.1.3. Pakāpeniski apskati visus iespējamos divciparu, trīsciparu, četrciparu u.t.t. „neveiksmīgus" skaitļus. Pavisam ir trīs „neveiksmīgi" skaitļi.

3.1.4. Lielākais T-veida figūru skaits, kuras var ievietot 5×5 rūtiņu kvadrātā ir 5. Noteikti jāpierāda, ka 6 dotās figūras kvadrātā ievietot nevar.

3.1.5. Šādu naturālu skaitļu nav.

3.1.6. Doto figūru var sadalīt vairākās daļās: taisnstūrī, pusriņķī un divos ceturtdaļriņķos.

3.1.7. Apzīmē vienādsānu trijstūru malu garumus ar burtiem un, izmantojot uzdevumā dotās sakarības, izveido vienādojumus un atrisini tos.

3.1.8. **a)** Patiesais reizinājums varēja būt 15, 105 vai 150. Apskati, kā un vai var iegūt katru no tiem.

b) Patiesais reizinājums varēja būt 1005, 1050 vai 1500. Apskati katru no tiem.

3.1.9. Skolēni A un B abi vienlaicīgi nevarēja teikt patiesību.

3.1.10. Apzīmējot suņu skaitu pilsētā ar *x*, bet kaķu skaitu – ar *y* un izmantojot to, ka 20% no visiem dzīvniekiem sevi uzskata par kaķi, var sastādīt vienādojumu $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{x+y}{5}$.

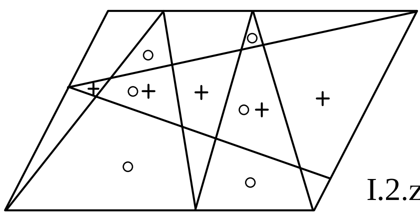
3.2. OTRĀ NODARBĪBA

3.2.1. Gan 8*a*, gan 12*b* dalās ar 2.

3.2.2. Šāda īpašība ir spēkā gan visām tām daļām, kurām skaitītājs un saucējs ir tādi divciparu skaitļi, kuriem abi cipari ir vienādi, gan arī vēl četrām citām daļām. Tos var atrast, piemēram, sastādot uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu.

3.2.3. Tā kā vienādojuma sakne ir skaitlis 7, tad, ievietojot nezināmā vietā 7, jāiegūst patiesa vienādība.

3.2.4. Uzdevuma atrisināšanai izmanto I.2. zīm. Papildus ar simboliem iezīmētās daļas neietekmē ar aplīšiem un krustiņiem iezīmēto daļu starpību.



I.2.zīm.

3.2.5. a) Skaitļus var sakārtot piecās grupās tā, lai no katras no tām var izvēlēties ne vairāk kā 2 skaitļus;

b) Skaitļus no katras no šīm grupām var izvēlēties 3 veidos.

3.2.6. Izmanto to, ka vienādmalu trijstūra visi leņķi ir $60°$ lieli, turklāt dotajā uzdevumā $EC = CB$.

3.2.7. Ja Lauras telefona PIN-kodu apzīmējam ar *x*, tad skaitlis $x-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9.

3.2.8. Centa celiņa diametra garumu apzīmē, piemēram, ar *c*, bet Baibas celiņa pirmā pusriņķa diametra garumu – ar *b*. Kāds būs otrā pusriņķa diametra garums? Kāds būs Centa un Baibas noskrietās distances garums?

3.2.9. Šo skaitli var izteikt formā $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1 = 1\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$.

3.2.10. Lai kļūtu par uzvarētāju, pirmajam spēlētājam jācenšas tikt pie skaitļa 89.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. Ja skaitlis $\overline{a543b}$ dalās ar 36, tas dalās gan ar 9, gan ar 4. Apskati atsevišķi dalāmības pazīmes ar skaitļiem 9 un 4.

3.3.2. Aprēķinot dažus nākamos virknes locekļus, var secināt, ka dotā virkne ir periodiska (tā satur tikai 4 dažādus skaitļus, kas atkārtojas noteiktā secībā).

3.3.3. a) Izdari uzdevumā prasīto, piemēram, skaitlim 12.

b) Skaitlis, ko iegūst, samainot dotā divciparu skaitļa ciparus vietām, ir $11-n$ reizes lielāks nekā tā ciparu summa.

3.3.4. Tā kā $1 < \frac{2010}{1996} < 2$, tad $a = 1$ un var iegūt daļu formā $1 + \frac{14}{1996}$. Apgriez daļu $\frac{14}{1996}$ un turpini aprēķinus analoģiski.

3.3.5. Uzdevuma atrisinājumā vairākas reizes izmanto, ka zīmējumā ir vienādsānu trijstūri, kā arī izmanto trijstūra ārējā leņķa īpašības.

3.3.6. Pierādi un izmanto, ka „pa diagonāli" novietoto taisnstūru perimetru summas ir vienādas.

3.3.7. Uzdevumu risinot iegūtos datus ērti izvietot tabulas veidā:

	Slēpošana	Hokejs	**Kopā**
Volejbols			
Futbols			
Kopā			

3.3.8. No 1 līdz 2010 ir nepāra skaits pāra skaitļu un nepāra skaits nepāra skaitļu, tāpēc iegūtās izteiksmes vērtība būs nepāra skaitlis. Centies salikt zīmes tā, lai iegūtu mazāko pozitīvo nepāra skaitli.

3.3.9. Pirmā rindā stāvošā persona nevarēja būt bruņinieks un teikt taisnību, jo tad visi aiz viņa stāvošie arī būtu bruņinieki. Kas ir otrā rindā stāvošā persona?

3.3.10. Apskati ciemata plāna stūra rūtiņas – cik ceļi tur ir iespējami?

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

3.4.1. Centies prasīto atrast patstāvīgi.

3.4.2. Ja šo skaitļu ciparu summas būtu vienādas, tad skaitļi, dalot ar 3, dotu vienādus atlikumus. Kā tas ietekmētu šo skaitļu starpību?

3.4.3. Prasīto var izdarīt. Iegūstamā kvadrāta malas garums ir 12 rūtiņas.

3.4.4. Ja pirmajā un trešajā rūtiņā ierakstāmos skaitļus apzīmējam attiecīgi ar x un y, tad kādam jābūt ceturtajā rūtiņā ierakstāmajam skaitlim?

3.4.5. Ja lapu var pārklāt ar kartiņām tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos, n noteikti jādalās ar 4. Jāpierāda arī, ka uzdevumā dotā izmēra papīra lapu noteikti varēs noklāt prasītajā veidā ar kartītēm.

3.4.6. Apzīmē sveču augstumus ar nezināmo, sastādi uzdevumam atbilstošus vienādojumus un tos atrisini.

3.4.7. Var pierādīt, ka $AO_2A_1O_3$ un $AO_1A_2O_3$ ir rombi, bet tad $O_1O_2A_1A_2$ ir paralelograms.

3.4.8. Izpildot jebkuru no divām operācijām, starpība starp burtu A un H daudzumiem vārdā nemainās.

3.4.9. Apgalvojumi 1), 4) un 5) vienlaicīgi nevar būt patiesi; tāpat arī apgalvojumi 3), 5) un 7) vienlaicīgi nevar būt patiesi.

3.4.10. Maksimālais vienas rokas pirkstu skaits ir 13. Apskati visas iespējas.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. Bērnu skaitam ciematā jādalās ar 21.

3.5.2. Sastopami pavisam 10 dažādi burti, tātad kādam no tiem noteikti atbilst cipars 0.

3.5.3. Ievēro, ka dotajai figūrai ir tikai viena iespējamā simetrijas ass.

3.5.4. Grāmatā ir izlaistas 44 lappuses.

3.5.5. Izmanto trijstūra ārējā leņķa īpašību: trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.

3.5.6. Uzzīmē kastītes izklājumu un centies to sadalīt prasītajā veidā.

3.5.7. Cik un kādi pirmskaitļi ir starp skaitļiem 29 un 73?

3.5.8. Prasīto var izdarīt; centies to izdarīt patstāvīgi.

3.5.9. Prasīto korķi var izveidot no cilindra.

3.5.10. Kalps zādzību varēja veikt pavisam 4 reizes.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. No *vārdu* TWO un ELEVEN burtiem noņemot *vārdu* ONE, paliek *vārdam* TWELVE nepieciešamie burti.

3.6.2. Izsaki, ka $n^2 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{CAU}$. Kādus pirmreizinātājus jāsatur skaitlim $\overline{CAU}$?

3.6.3. Izsaki $202 = 5a + x \cdot b$, kur a un b ir kastīšu skaits. Kādas ir iespējamās x vērtības?

3.6.4. **a)** $5 \le n \le 14$; **b)** $64 \le n \le 4022$.

3.6.5. Skolotāja lūdza nopirkt 49 kamolus. Kā meitenes rīkojās, lai kopumā nopirktu par 12 dzijas kamoliem vairāk?

3.6.6. a) Sagriez trijstūri *ABC* pa bisektrisi *CD*.

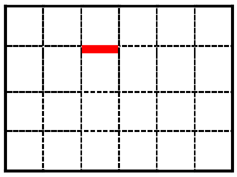
b) Sagriez trijstūri *ABC* pa tā augstumu *CD*.

3.6.7. Skaitļus prasītajā veidā var sarakstīt; centies to izdarīt patstāvīgi.

3.6.8. Prasīto var izdarīt. Pamato to, šķirojot gadījumus, kad dotajam trijstūrim ir mala, kuras garums ir vesels skaitlis, un kad dotajam trijstūrī nav malas, kuras garums ir vesels skaitlis.

3.6.9. Šāds daudzstūris eksistē; tas noteikti ir ieliekts daudzstūris.

3.6.10. Pietiek ievietot vienu barjeru, kā parādīts I.4. zīm. Pārliecinies, ka tad citu *V-sadalījumu* šim taisnstūrim nav.



I.4.zīm.

4. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Sāc uzdevuma risinājumu ar *I* un *S* vērtību noskaidrošanu.

4.5.2. Katrā piemērā atrodi mazāko no skaitļiem, veicot pārbaudi.

4.5.3. Sāc griešanu no figūras centra.

4.5.4. Noskaidro, ar ko ir jādalās katrā spainī ielietajam ūdens daudzumam litros.

4.5.5. Ar piemēru parādi, ka labās kabatas saturu ne vienmēr var sadalīt prasītajā veidā; kreisās kabatas saturu vienmēr iespējams sadalīt divās kaudzītēs pa 49 santīmiem katrā, pierādi to vispārīgā veidā.

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Skaitli 2010 sadali reizinātājos un meklē skaitli, kas dalās ar katru no reizinātājiem.

4.6.2. Sāc griešanu no figūras centra.

4.6.3. Vienas pildspalvas cenu apzīmē ar mainīgo un sastādi vienādojumu atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

4.6.4. Noskaidro, kā turpinās virkne, uzrakstot dažus nākamos virknes locekļus.

4.6.5. Pamato, ka uz svaru kausiem nevar būtu uzliktas trīs vai vairāk krāsu bumbiņas. Aplūko, kas notiktu, ja samainītu vietām bumbiņas, kuru masu starpība ir vismazākā.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Meklējamo divciparu skaitli uzraksti vispārīgā veidā kā $\overline{ab}=10a+b$, kur desmitu cipars ir *a* un vienu cipars ir *b*. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem sastādi vienādojumu.

4.7.2. Ievēro, ka meklējamais 10-stūris ir ieliekts, pie tam visas tā malas atrodas uz ne vairāk kā 5 taisnēm.

4.7.3. Ar mainīgo apzīmē saskaitāmo skaitu un noskaidro, kādas vērtības tas var pieņemt.

4.7.4. Sāc griešanu no figūras centra.

4.7.5. Ievēro, kā mainās viena pāra skaitļu starpība, izpildot atļautās operācijas ar kalkulatoru.

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Labās puses izteiksmi sadali divos saskaitāmajos un salīdzini tos ar kreisās puses saskaitāmajiem.

4.8.2. Savieno punktus *D*, *E* un *F* un pamato, ka *GF* un *HC* ir atbilstošie nogriežņi vienādos trijstūros.

4.8.3. Pamato, ka, ja *n* – nepāra skaitlis, uzdevuma prasības nav iespējams izpildīt.

4.8.4. Atrodi visus divciparu skaitļus, kas dalās ar 17 vai 23 un konstruē virkni.

4.8.5. Apskati lampiņas ar Nr. 2, 3 un 6. Vai tās visas var būt ieslēgtas vienlaicīgi?

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Sadali doto nevienādību reizinātājos, pārnesot visus saskaitāmos uz vienu nevienādības pusi un grupējot.

4.9.2. Ievēro, ka dotā mediāna un bisektrise nevar iziet no vienas virsotnes.

4.9.3. Pamato, ka dotais skaitlis *A* dalās ar 7 tikai tad, ja vieninieku skaits dalās ar 6.

4.9.4. Aprēķini daudzstūru iekšējo leņķu summu un ievēro, ka, ja prasītais ir iespējams, tad 39-stūra visus leņķus aizpilda deviņu izliekto sešstūru leņķi.

4.9.5. Otrais spēlētājs vienmēr var panākt uzvaru.

5. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Atceries, ka skaitlis 1 reizinājumu neietekmē, bet summu ietekmē.

5.5.2. Nogriežņi *AB*, *AC* un *BC* sadala taisnstūri četros trijstūros. Iegūsti trijstūra *ABC* laukumu kā taisnstūra laukuma un trīs pārējo trijstūru laukumu starpību.

5.5.3. Uz kurām pilsētām autobuss var doties no pilsētas *A*? Veic pilno gadījumu pārlasi.

5.5.4. Jā, ir iespējams abos gadījumos.

5.5.5. Mazākais laiks, kādā var panākt prasīto, ir 3 minūtes. Atliek parādīt piemēru, kā to var realizēt un pamatot, ka ar 2 minūtēm noteikti nepietiek.

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Nē, nevar. Aplūko, kāda būtu vienā grupā apvienoto skaitļu summas paritāte, ja skaitļus varētu sadalīt grupās.

5.6.2. Noskaidro, cik skaitļu pavisam ir dotajā virknē, un ievēro, ka 45321 ir lielākais skaitlis, kam pirmais cipars ir 4.

5.6.3. **a)** Nē; **b)** jā.

5.6.4. Vispirms atdali vienas krāsas aplīšus, un tad konstruē meklētās figūras, ievērojot, ka vienu no otras var iegūt, pagriežot ik pa $90°$.

5.6.5. Lai panāktu, ka nevar izgriezt taisnstūri 1×6 rūtiņas, nepieciešams izkrāsot pa vienai rūtiņai katrā rindiņā un katrā kolonnā: atliek pārliecināties, ka nevarēs izgriezt arī kvadrātu 3×3 rūtiņas.

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Sadali summu atsevišķās grupās un nosaki pēdējo ciparu katrā grupā ierakstīto skaitļu summai.

5.7.2. Sadali pirmreizinātājos skaitli 125.

5.7.3. Atceries, ka „reizinājums nav pozitīvs" nozīmē, ka reizinājums ir negatīvs vai 0.

5.7.4. **a)** Var; **b)** nevar.

5.7.5. Aplūko, kā veidojas aptaujas rezultāts par katru no partijām.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Uzraksti piecciparu skaitli vispārīgā veidā un pārveido par summu, kur viens no saskaitāmajiem ir skaitļa visu ciparu summa.

5.8.2. Skaitli 1 ievieto x vietā.

5.8.3. Pievērs uzmanību trijstūru leņķu summām.

5.8.4. Noskaidro, cik dažādus taisnstūrus, kuru laukums ir 1, 2, 3 u.t.t. rūtiņas, var izveidot.

5.8.5. Aplūko, kā veidojas aptaujas rezultāts par katru no partijām un ievēro, ka par partiju *D* balsoja tikai meļi.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Aprēķini funkcijas vērtības, ja $x=1$ un $x=-1$.

5.9.2. Pierādi, ka ΔDEC ir vienādmalu trijstūris.

5.9.3. Risini uzdevumu divās daļās: **I** atrodi, kāds ir mazākais pa apli uzrakstīto skaitļu skaits, izsakot to divos dažādos veidos, saskaņā ar uzdevuma prasībām un **II** parādi piemēru, kā skaitļus var uzrakstīt pa apli.

5.9.4. Ievēro, ka tā kā a, x, y, z – naturāli skaitļi, $a \ge x+1$, $a \ge y+1$ un $a \ge z+1$.

5.9.5. Lielākā iespējamā vērtība ir $N = 7$. Parādi piemēru, kā to var realizēt, un pamato, ka N nevar būt lielāks par 7.

6. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Aplūko vienādojumu, kur $b = 2011$ (2011 ir pirmskaitlis) un izdari secinājumus, izmantojot Vjeta teorēmu.

6.9.2. Noskaidro, kurš no nogriežņiem, ko riņķa līnija atšķeļ no hipotenūzas, ir vienāda ar īsāko kateti un izmanto taisnleņķa trijstūru līdzību, lai atrastu meklēto attiecību.

6.9.3. Konstruē 9 grupas pa 9 skaitļiem katrā grupā.

6.9.4. Cik svēršanu pavisam tika veiktas? Aplūko visu svēršanu iespējamos rezultātus.

6.9.5. Apzīmē ar mainīgo katra spēlētāja uzvaru skaitu un aplūko, cik punktus ir ieguvis katrs spēlētājs.

7. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Atrodi visus iespējamos atrisinājumus, aplūkojot, kādas vērtības var pieņemt skaitlis *EEE*.

7.5.2. Tukšajās tabulas rūtiņas ieraksti mainīgos un sastādi uzdevumam atbilstošus vienādojumus.

7.5.3. Sadali doto kvadrātu divos taisnleņķa trijstūros un katru no tiem sadali platleņķa trijstūros.

7.5.4. **a)** Var; nepieciešams parādīt piemēru. **b)** Nevar; aplūko katra skaitļa iespējamos „kaimiņus”.

7.5.5. Ievēro, ka „stūrīti” nevar ieviietot joslā ar platumu 1 rūtiņa.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Nē, neeksistē; pamato, ka vienādības kreisā puse vienmēr būs pāra skaitlis un ievēro, ka skaitlis 20102011 ir nepāra skaitlis.

7.6.2. Apzīmē kungu un dāmu skaitus ar mainīgajiem un apskati, cik „sarakste” pavisam notiek. Atceries, ka „sarakstes” ir abpusējas.

7.6.3. Sadali kvadrātu iespējami daudz taisnstūrīšos 1×3, kas nepārklājas, lai pamatotu, cik rūtiņas vismaz jāiekrāso. Parādi piemēru, kā to realizēt.

7.6.4. Aplūko, kā mainās visu tabulā ierakstīto skaitļu summa pēc viena gājiena izpildes un, kādas ir summas sākotnējā un beigu tabulās ierakstītajiem skaitļiem.

7.6.5. Apzīmē ar mainīgo Almai un Danai sākumā esošo konfekšu skaitu un izpēti, kā mainās katras meitenei piederošo konfekšu skaits pēc katras darbības.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Noskaidro, ar cik dažādiem cipariem var beigties pirmskaitļi un secini, kādi ir pirmie divi uzrakstītie skaitļi.

7.7.2. a) Atceries, ka $s = v \cdot t$, kur s – ceļš, v – ātrums un t – laiks; **b)** Cik tālu būs sarkanā mašīna, ja zaļā būs nobraukusi pusi ceļa?

7.7.3. Ievēro, ka $13 = 3 + 10$ un $2011 = 2010 + 1$.

7.7.4. Centies prasītajā veidā izveidot kvadrātu ar izmēriem vai nu 11×11, vai 13×13 centimetri.

7.7.5. Izvēlies uz taisnes 11 punktus, starp kuriem attālumi ir vesels skaits centimetru.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. b) Ievēro, ka dalīšanas darbību var uzrakstīt parastās daļas veidā.

7.8.2. Izmanto trijstūra viduslīnijas īpašības. Atceries, ka kvadrāta diagonāles ir vienādas un perpendikulāras.

7.8.3. Pamato, ka skaldnē ierakstīto skaitļu summa var pieņemt tikai vienu vērtību. Parādi piemēru, kā to realizēt.

7.8.4. a) Ne vienmēr; atrodi pretpiemēru;

b) Pamato, ka vienmēr iegūtais skaitlis dalīsies ar 23.

7.8.5. Uzvarēs Anna. Apraksti, kā viņai jāspēlē.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Pārveido doto vienādojumu, iegūstot $(xy - 24)(y - x) = 0$. Atrodi visus 8 tā atrisinājumus un pārbaudi, ka tie apmierina doto vienādojumu.

7.9.2. Izmanto taisnleņķa trijstūra mediānas, vienādsānu trijstūra un trijstūra viduslīnijas īpašības.

7.9.3. Pirmais rūķītis var panākt, lai iegūtajam vienādojumam būtu sakne $x = -1$. Noskaidro, kādu sakarību tad apmierina vienādojuma koeficienti.

7.9.4. Ievēro, ka, ja $N = x^2 - y^2$ ir pāra skaitlis, tas dalās ar 4.

7.9.5. Izkrāso kvadrātā 8×8 visas tās rūtiņas, kurās sienāzis var nonākt.

ATRISINĀJUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Atbilde: B.

Risinājums: $115-60+2=55+2=57$.

1.1.2. Atbilde: B.

Risinājums: Nosakām vienas iedaļas vērtību, tā ir $2°C$. Tātad, ja termometra stabiņš ir 2 iedaļas zem 0, tad temperatūra ir $-4°C$.

1.1.3. Atbilde: B.

Risinājums: 8 h 40 *min.* : 2 – 28 *min.* = 4 h 20 *min.* – 28 *min.* = 3 *h* 52 *min.*

1.1.4. Atbilde: C.

Risinājums: Sākumā taisnstūra laukums bija $3\cdot 8=24$ rūtiņas. Samazinot taisnstūra garāko malu, iegūstam, ka tās garums ir $8-2=6$ rūtiņas. Lai jaunizveidotā taisnstūra laukums būtu 24 rūtiņas, īsākajai malai jābūt 4 rūtiņas, jo $6\cdot 4=24$ rūtiņas. Tātad taisnstūra īsākā mala jāpagarina par 1 rūtiņu.

1.1.5. Atbilde: C.

Risinājums: Zīmējums sastāv no 8 vieniniekiem, 4 divniekiem, 8 trijniekiem, 1 četrinieka un 2 deviņniekiem. Tajā ir redzamas arī vairākas nulles, bet, tā kā tās summu nemaina, tad tās nav vērts skaitīt. Tātad vecmāmiņai paliek $1\cdot 8+2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 1+9\cdot 2=62$ gadi.

1.1.6. Atbilde: D.

Risinājums: Tieši $\frac{2}{8}$ no tortes būs iekrāsota tad, ja torte ir sadalīta 8 **vienādās** daļās un tad iekrāsoti 2 no šiem 8 gabaliņiem; tātad 2. zīmējumā būs iekrāsotas $\frac{2}{8}$ no tortes. Tā kā $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, tad prasītais tortes gabals būs iekrāsots arī 3. zīmējumā, jo tajā torte sadalīta 4 vienādos gabalos, no kuriem iekrāsots viens. Savukārt 1. un 4. zīmējumā torte nav sadalīta vienādos gabaliņos, bet 5. zīmējumā iekrāsotās daļas katra ir mazāka nekā $\frac{1}{8}$.

1.1.7. Atbilde: E.

Risinājums: Pēc kārtas ievietojot izteiksmē katrā atbilžu variantā dotos skaitļu pārus, redzam, ka vienādojumu apmierina tikai skaitļu pāris a = 22 un b = 11: tad $2\cdot 22-2\cdot 11=44-22=22$.

Piezīme. Burtu vietā var būt jebkuri skaitļi, kuriem izpildās vienādība $a-b=11$ jeb skaitlis a ir par 11 lielāks nekā b.

1.1.8. Atbilde: B.

Risinājums: No tā, ka Guntis Galviņš kopā ar Jāni Spruktu sver 184 kg un no tā, ka Jānis Sprukts ir par 10 kg smagāks nekā Guntis Galviņš seko, ka Jānis Sprukts sver $(184+10):2=97$ kg. Tā kā Mārtiņš Karsums ir par 7 kg vieglāks nekā Jānis Sprukts, tad Mārtiņš Karsums sver 90 kg.

1.1.9. Atbilde: B.

Risinājums: Ja gaisma vienā minūtē veic aptuveni 19 miljonus *km*, tad 152 miljonus *km* tā veiks 8 minūtēs. Tātad kaut arī saule vairs nebūtu, līdz tam izstarotā gaisma Zemi apgaismotu vēl 8 minūtes.

1.1.10. Atbilde: C.

Risinājums: Tā kā 4 kaķa kājām atbilst 2 suņu deguni, t.i., vienam kaķim atbilst divi suņi, tad kaķu ir divreiz mazāk nekā suņu.

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Atbilde: A.

Risinājums: $110+10-110=10$.

1.2.2. Atbilde: E.

Risinājums: Anna nāks uz slidotavu 15., 18., 21., 24., 27. un 30. decembrī, bet Zane – 15., 20., 25. un 30. decembrī. Redzam, ka viņas satiksies 30. decembrī.

1.2.3. Atbilde: B.

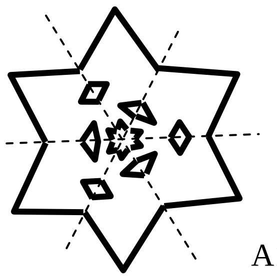
Risinājums: Divu skaitļu reizinājuma pēdējais cipars ir vienāds ar pēdējo ciparu reizinājuma pēdējo ciparu. Viens otram sekojoši nepāra skaitļi var beigties ar

- cipariem 1 un 3 – tad reizinājuma pēdējais cipars ir 3;
- 3 un 5 – tad reizinājums beidzas ar 5;
- 5 un 7 – tad reizinājums beidzas ar 5;
- 7 un 9 – reizinājums beidzas ar 3;
- 9 un 1 – reizinājums beidzas ar 9.

Viegli pamanīt, ka pēdējais cipars var būt 3, 5 vai 9.

1.2.4. Atbilde: C.

Risinājums: Novelkot taisnes pa locījuma līnijām (skat. A1.1. zīm.), viegli pamanīt, kurš no zīmējumiem atbilst vienai no iegūtajām daļām.

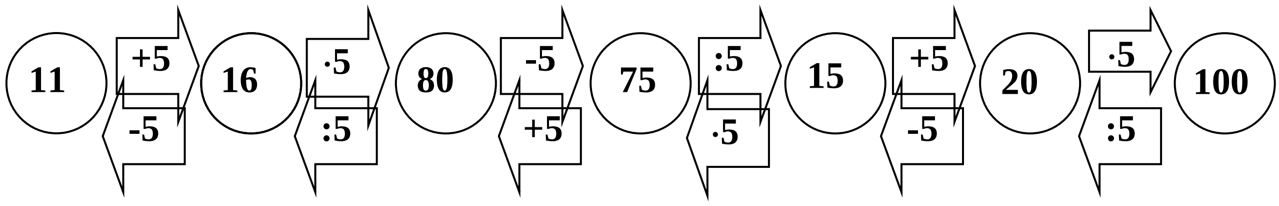


A1.1.zīm.

1.2.5. 1) 2010 *dm* = 201 *m* > 1000 *m* : 5 = 200 *m*

2) 600 *s* =10 *min.* < 305 *min.* – 3 *h* = 5 *h* 5 *min.* – 3 *h* = 2 *h* 5 *min.*

1.2.6. Aplīšus aizpilda, sākot no beigām.



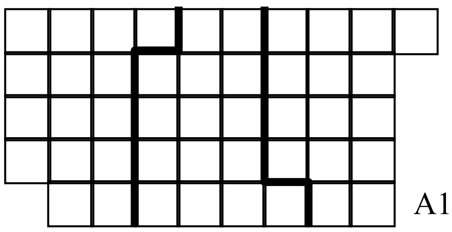
1.2.7. Atbilde*:* 50 lapas.

Risinājums: Ja no grāmatas ir izkritis vesels fragments, tad fragmentā pirmā lappuse noteikti ir nepāra skaitlis, bet pēdējā – pāra skaitlis, kas, bez šaubām, ir lielāks nekā pirmās lappuses numurs.

No cipariem 1, 4, 5 var izveidot tikai divus pāra skaitļus: 154 un 514. Tā kā 154 < 415, tad fragmenta pēdējās lappuses numurs ir 514.

Starp 415. un 514. lappusi (abas ieskaitot) ir $514-414=100$ lappuses. Katrai lapai ir tieši 2 lappuses, tātad lapu skaits ir $100:2=50$.

1.2.8. Skat., piem. A1.2. zīm.



A1.2.zīm.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Pakāpeniski veiksim pārveidojumus, ievērojot darbību secību:

$$(500\,g+25\,g)\cdot 3-1\,kg\,25\,g+2\,kg\,900\,g:2=$$

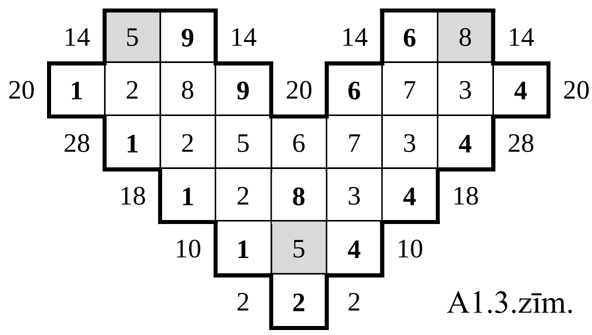
$$=1500\,g+75\,g-1025\,g+1450\,g=$$

$$=550\,g+1450\,g=$$

$$=2000\,g=$$

$$=2\,kg$$

1.3.2. Skat., piem., A1.3. zīm.



A1.3.zīm.

Iespējami daudzi citi atrisinājumi. Viennozīmīgi noteikti ir tikai skaitļi iekrāsotajās rūtiņās.

1.3.3. Apskatīsim katras meitenes apgalvojumus, un katram no tiem noteiksim iespējamās meklētā skaitļa vērtības.

Aija: Skaitļa 20 dalītāji ir skaitļi 1, 2, 4, 5, **10**, 20.

Maija: skaitlis 20 ir 5 reizes lielāks nekā 4;

skaitlis **10** ir 5 reizes lielāks nekā 2;

skaitlis 5 ir 5 reizes lielāks nekā 1;

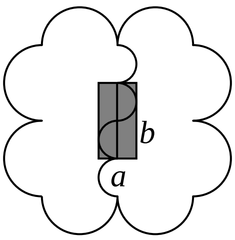
Paija: skaitlis **10** ir par 10 mazāks nekā 20.

Tātad meklētais skaitlis ir skaitlis **10**.

1.3.4. Tā kā lielās pusriņķa līnijas rādiuss ir 4 *cm*, tad mazās pusriņķa līnijas rādiuss ir 2 *cm* un diametrs ir 4 *cm* (A1.4. zīm.).

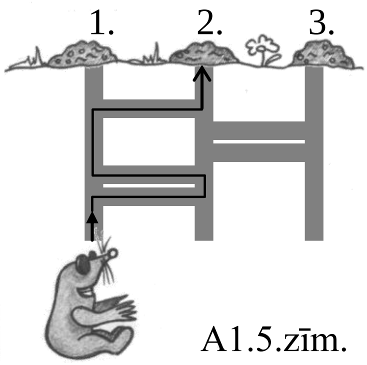
Iekrāsotā taisnstūra malas *a* garums atbilst divkāršotam mazās pusriņķa līnijas rādiusa garumam, tātad ir $2 \cdot 2 = 4\,cm$. Savukārt malas *b* garums vienāds ar četrkāršotu mazās pusriņķa līnijas rādiusa garumu jeb divkāršotu diametra garumu, tātad $b = 4 \cdot 2 = 8\,cm$.

Taisnstūra perimetrs vienāds ar divkāršotu blakus esošo malu garumu summu, tātad $P = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (4+8) = 24\,cm$.



A1.4.zīm.

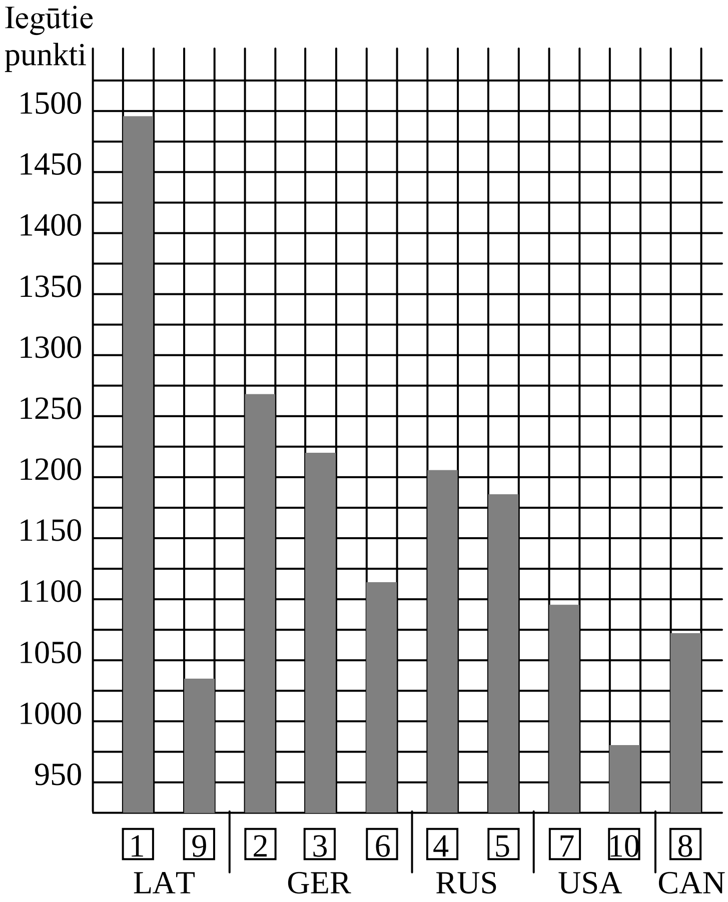
1.3.5. Tā kā kurmis grib ātrāk izkļūt virspusē, vertikālajos posmos viņš vienmēr rāpsies uz augšu. Tātad kurmis Frīdis virszemē izrāpsies pa 2. izeju. Kurmja kustības maršruts parādīts A1.5. zīmējumā.



A1.5.zīm.

1.3.6. Septiņos posmos maksimāli varēja iegūt 1494 + 81 = 1575 punktus.

Skeletonistu iegūtie punkti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem attēloti A1.6. zīm.



A1.6.zīm.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. a) Aprēķinot reizinājumu $13 \cdot 5$, iegūstam, ka der jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā 65.

b) Tā kā skaitlim x pieskaitot 138, jāiegūst skaitlis, kas lielāks nekā 145, tad x jābūt lielākam nekā $145 - 138 = 7$.

c) Der jebkurš skaitlis, kas lielāks nekā $72 : 8 = 9$.

1.4.2. Žanete 100 *Ls* sakrās $100 : 5 = 20$ nedēļās.

Ja pieņemam, ka mēnesī vidēji ir 4 nedēļas, tad Žanete 100 *Ls* sakrās $20 : 4 = 5$ mēnešos.

Ja rēķina precīzāk, 20 nedēļās ir 140 dienas, mēnesī vidēji ir 30 dienas, tātad Žanete pie kārotās summas tiks pēc 4 mēnešiem 20 dienām jeb 4 mēnešiem 3 nedēļām.

1.4.3. Trešdaļā stundas ir 60 *min.* : 3 = 20 *min*.

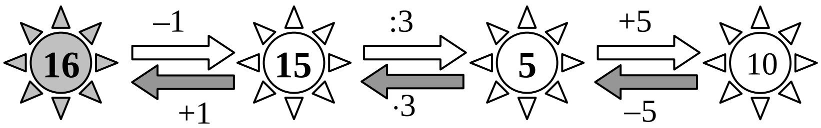
1.4.4. Atbilde: D.

Risinājums: Diennaktī ir 24 stundas, katrā stundā ir 60 minūtes, savukārt katrā minūtē ir 60 sekundes. Tātad diennaktī ir $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekundes.

Piezīme. Var ievērot, ka reizinājums noteikti beidzas ar divām nullēm, tāpēc neviens no dotajiem skaitļiem neder.

1.4.5. Saulītes aizpilda, sākot no beigām, veicot pretējas darbības.

Iekrāsotajā saulītē Gvido bija ierakstījis skaitli 16.



1.4.6. Ja vajadzīgais brīdis būtu pienācis pirms pusnakts, tad vienīgā iespēja ir, ka tiek mainīta cipara 7 atrašanās vieta. Bet tas nav iespējams, jo diennaktī nav 27 stundas, kā arī stundā nav 70 minūtes.

Tātad uzdevumā prasītais laiks pienāks pēc pusnakts. Tuvākais vajadzīgais brīdis tad būs plkst. 00:27, t.i., pēc 4 *h* 20 *min*.

1.4.7. Pārveidojam visus dotos lielumus vienādās mērvienībās – metros:

7000 *m*

77 *km* = 77 000 *m*

70 000 *m*

700 000 *cm* = 7000 *m*

7,7 *km* = 7700 *m*

7 *m*

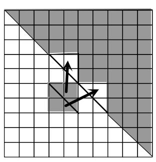
Tagad viegli lielumu sakārtot dilstošā secībā (t.i., *no lielākā uz mazāko*):

77 *km* > 70 000 *m* > 7,7 *km* > 7000 *m* = 700 000 *cm* > 7 *m*.

1.4.8. a) $\frac{3}{5}kg$ = 600 *g* un $\frac{1}{2}kg$ = 500 *g*. Tātad $\frac{3}{5}kg > \frac{1}{2}kg$, turklāt $\frac{3}{5}kg$ ir par 600 *g* – 500 *g* = 100 g vairāk nekā $\frac{1}{2}kg$.

b) $\frac{4}{5}h$ = 48 *min*. un $\frac{3}{10}h$ =18 *min*. Tātad $\frac{4}{5}h > \frac{3}{10}h$, turklāt $\frac{4}{5}h$ ir par 48 *min*. – 18 *min*. = 30 *min*. vairāk nekā $\frac{3}{10}h$.

1.4.9. Var ievērot, ka mazo iekrāsoto kvadrātiņu sadalot uz pusēm pa diagonāli, iegūtās daļas atbilst *izgrieztajiem robiņiem* (skat. A1.7. zīm.). Tāpēc iekrāsota $\frac{1}{2}$ kvadrāta.



A1.7.zīm.

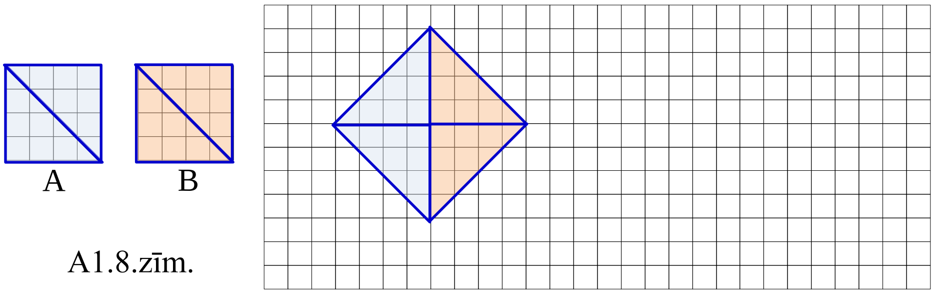
1.4.10. Tapešu loksnes platums ir 0,5 *m*, tāpēc uz 9 *m* platas sienas būs jālīmē 18 loksnes. No viena 10 *m* gara ruļļa var iegūt ne vairāk kā 3 loksnes, kuru garums ir 3 *m*. Tātad, lai aplīmētu visu sienu, jānopērk $18:3=6$ tapešu ruļļi.

1.4.11. Var ievērot, ka zīmējumā riņķa līnijas diametram atbilst 6 rūtiņas, bet kvadrāta malas garums ir 12 rūtiņas. Redzam, ka kvadrāta malas garums ir divreiz lielāks nekā riņķa līnijas diametrs, t.i., 16 *cm*. Tātad kvadrāta perimetrs ir $4 \cdot 16 = 64\ cm$.

1.4.12. Zīmējumā redzamo rūķīšu mājiņu var izveidot no b) sagataves.

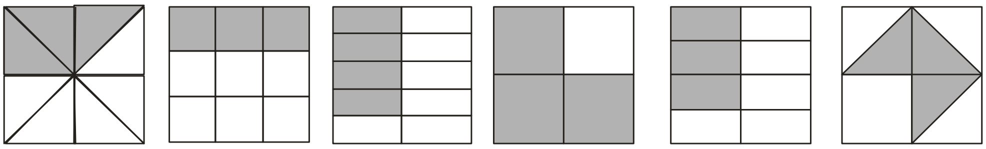
Piezīme. Ja pieņem, ka logi un durvis no sagataves ir izgriezti (to vietā ir caurumi), tad arī no d) sagataves var iegūt prasīto mājiņu. Taču parasti šādu mājiņu sagataves ir izkrāsotas no vienas puses, tāpēc paredzētas locīšanai tikai uz vienu pusi, līdz ar to pareizā atbilde ir tikai b).

1.4.13. Viens no veidiem, kā var izdarīt prasīto, attēlots A1.8. zīm.



A1.8.zīm.

1.4.14. Noteiksim, kāda daļa figūru iekrāsota katrā gadījumā:



a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Redzam, ka vienādi laukumi ir iekrāsoti kvadrātos a), e) un f).

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Atbilde: Uzrakstot skaitļus 1020 un 1021.

Risinājums: Redzam, ka 2010 neparādīsies, uzrakstot viencipara skaitļus. Ja 2010 parādītos, rakstot divciparu skaitļus, tad tas iespējams tikai rakstot pēc kārtas 20 un 10 (jo skaitlis nevar sākties ar ciparu 0), bet šie skaitļi neatrodas virknē blakus.

Apskatīsim, vai rakstot trīsciparu skaitļus, kādā virknes daļā būs virknīte 2010. Tā kā skaitlis nesākas ar ciparu 0, tad nevar būt, ka šie skaitļi ir 201 un 0** vai **2 un 010. Šie pēc kārtas esošie skaitļi nevar būt arī *20 un 10*, jo acīmredzot otrais skaitlis ir mazāks nekā pirmais.

Tātad atliek, ka 2010 parādās virknē, rakstot četrciparu skaitļus. Protams, virknīte 2010 parādīsies, uzrakstot skaitli 2010; tomēr pārbaudīsim, vai šis skaitlis virknē neparādās jau agrāk.

Līdzīgi kā iepriekš, tā kā skaitlis nevar sākties ar ciparu 0, vienīgā iespēja, ka pēc kārtas uzrakstītie skaitļi ir **20 un 10**. Mazākais iespējamais četrciparu skaitlis, ko var uzrakstīt formā **20, ir 1020; savukārt nākamajam skaitlim tad jābūt 1021. Tātad šajā posmā virknīte izskatās ...10**2010**21..., kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Esam atraduši prasīto virknes fragmentu, kā arī pamatojuši, ka agrāk šāds fragments virknē nav sastopams.

2.1.2. Atbilde: $\frac{343}{1000}$ jeb 34,3%.

Risinājums: Tā kā $30\% = \frac{3}{10}$, tad rūķītis dzeltenā krāsā nokrāsoja $\frac{3}{10}$ no visām lapām. Tātad nenokrāsotas palika $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ visu lapu.

Pēc tam $\frac{3}{10}$ no šīm lapām viņš nokrāsoja sarkanas, kas kopumā ir $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$ visu lapu. Tagad nenokrāsotas palika $\frac{7}{10} - \frac{21}{100} = \frac{70-21}{100} = \frac{49}{100}$ no visām lapām.

Tālāk viņš nokrāsoja $\frac{3}{10}$ no nenokrāsotajām lapām, tātad $\frac{3}{10} \cdot \frac{49}{100} = \frac{147}{1000}$ no visām lapām, tāpēc nenokrāsotas palika $\frac{49}{100} - \frac{147}{1000} = \frac{490-147}{1000} = \frac{343}{1000}$ jeb 34,3% visu lapu.

2.1.3. Atbilde: Abiem bērniem ir 6 gadi.

Risinājums: Apzīmēsim Jāņa pašreizējo vecumu ar x; pēc 2 gadiem viņam būs $x+2$ gadi, bet pirms 2 gadiem viņam bija $x-2$ gadi.

Tā kā pēc diviem gadiem viņš būs 2 reizes vecāks nekā bija pirms diviem gadiem, tad varam uzrakstīt vienādojumu

$x+2 = 2 \cdot (x-2)$ jeb

$$x+2=2x-4.$$

Šī vienādojuma atrisinājums ir $x=6$. Tātad šobrīd Jānim ir 6 gadi.

Līdzīgi aprēķināsim arī Annas vecumu. Apzīmēsim viņas šī brīža vecumu ar *y*; tad Annas vecums pēc 3 gadiem būs $y+3$ gadi, bet pirms 3 gadiem viņai bija $y-3$ gadi. Tā kā Anna pēc trīs gadiem būs 3 reizes vecāka nekā bija pirms 3 gadiem, tad šo sakarību izsaka vienādojums

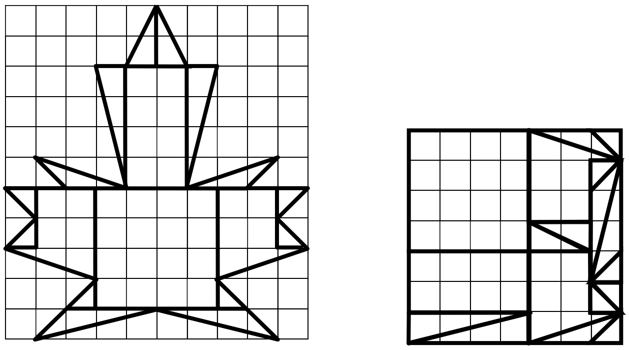
$y+3=3\cdot(y-3)$ jeb

$y+3=3y-9$, jeb

$2y=12$.

Arī šī vienādojuma atrisinājums ir $y=6$. Tātad abi bērni ir viena vecuma.

2.1.4. Dotās kļavas lapas laukums ir 49 rūtiņas, tāpēc iegūtā kvadrāta malas garumam jābūt 7 rūtiņas. Viens no veidiem, kā sagriezt kļavas lapu, lai saliktu kvadrātu, parādīts A2.1. zīmējumā.



A2.1. zīm.

2.1.5. Baiba vienmēr varēs panākt savu mērķi.

Katrā gājienā Baiba raksta tādu ciparu, kura summa ar Andra tikko uzrakstīto ciparu ir 6. Šādu ciparu Baiba var uzrakstīt vienmēr: ja Andris uzraksta 1, tad Baibai jāraksta 5; ja Andris uzraksta 2, tad Baibai jāraksta 4; ja Andris uzraksta 3, tad Baibai arī jāraksta 3; ja Andris uzraksta 4, tad Baibai jāraksta 2; ja Andris uzraksta 5, tad Baibai jāraksta 1.

Tā kā pavisam kopumā būs seši šādi Andra un Baibas gājienu pāri, tad beigās visu 12 uzrakstīto ciparu summa būs $6 \cdot 6 = 36$.

Atceramies dalāmības pazīmi ar 9: *skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9.*

Tā kā uzrakstītā skaitļa ciparu summa 36 dalās ar 9, tad viss iegūtais 12-ciparu skaitlis arī dalās ar 9.

2.2. OTRĀ KĀRTA

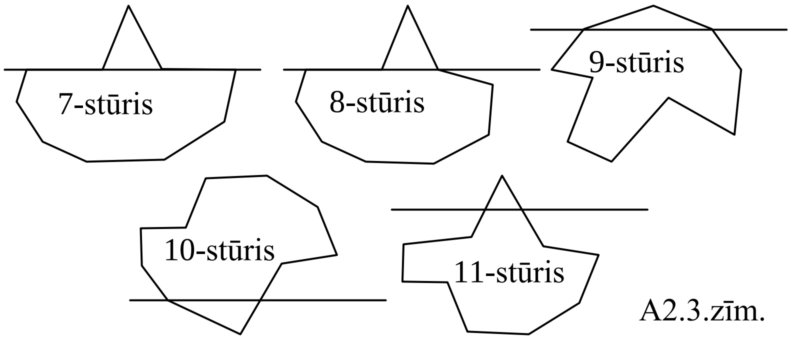
2.2.1. Par uzdevuma atrisinājumu der, piemēram, A2.2. zīm. redzamais piemērs.

$$\begin{array}{r} 5\,2\,4\,1\,0 \\ +\,3\,9\,0\,7\,6 \\ \hline 9\,1\,4\,8\,6 \end{array}$$

A2.2.zīm.

Varam ievērot, ka, tā kā $E+S=S$, tad $S=0$. Savukārt, tā kā simtu šķirā $I+0=I$, tad desmitu šķirā nerodas pārnesums un $Z+N=V$. No tūkstošu šķiras redzam, ka $M+U\le 9$. Pārējās burtu vērtības meklē mēģinājumu ceļā, ievērojot, ka jāizmanto visi desmit cipari.

2.2.2. Atbilde: Var būt 7, 8, 9, 10 vai 11 malas; skat., piem., A2.3. zīm.



A2.3.zīm.

Trijstūris noteikti saturēs vismaz vienu desmitstūra virsotni, bet taisne, krustojot desmitstūra malas, var radīt ne vairāk kā divas jaunas virsotnes, tāpēc atlikušajai daļai nevar būt vairāk par 10 – 1 + 2 = 11 virsotnēm un malām.

Tā kā Alise desmitstūri sagrieza divās daļās, no kurām viena bija trijstūris, tad viņa varēja *iznīcināt* ne vairāk kā 3 virsotnes, tātad atlikušajai daļai bija vismaz 10 – 3 = 7 virsotnes un malas.

2.2.3. Ievērojam šādas divas sakarības:

$$x:y:z=\frac{x}{y}:z=\frac{x}{y\cdot z}$$

$$x:(y:z)=x:\frac{y}{z}=\frac{x\cdot z}{y}$$

Pie tam *x* vienmēr būs skaitītājā, bet *y* – saucējā.

Turklāt ievērojam, ka $231=3\cdot 7\cdot 11$, tātad dotajā izteiksmē iekavas jāsaliek tā, lai, pārveidojot iegūto izteiksmi par daļu, skaitļi 3, 7 un 11 būtu skaitītājā, savukārt visiem pārējiem skaitļiem jāsaīsinās.

Viens no veidiem, kā, ievērojot visu augstāk minēto, panākt rezultātu 231, ir šāds:

$$1:(2:3:4:5):(6:7:8:9):(10:11):12=$$

$$=1:\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}:\frac{6}{7\cdot 8\cdot 9}:\frac{10}{11}:12=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 6\cdot 10\cdot 12}.$$

Izteiksmi saīsinot, skaitītājā paliek $3\cdot 7\cdot 11=231$.

2.2.4. Apzīmēsim ar *n* daudzstūru, kam visas virsotnes ir baltas, skaitu. Katram šādam daudzstūrim pievienojot sarkano virsotni, iegūstam daudzstūri, kam viena virsotne ir sarkana. Bez tam vēl ir trijstūri, kam viena virsotne ir sarkana un kurus nevar iegūt no daudzstūriem, kam visas virsotnes ir baltas. Tātad daudzstūru ar sarkano virsotni ir vairāk.

2.2.5. Atbilde: Sulainis paspēs atrast burvju akmeni.

Risinājums: Sulainis sākumā sadala visus 16 akmeņus divās kaudzītēs pa 8 akmeņiem katrā, un pārbauda vienu kaudzīti. Ja ierīce norāda, ka burvju akmens ir šajā kaudzītē, tad sulainis tālāk darbojas ar šo kaudzīti; ja ierīce norāda, ka burvju akmens nav šajā kaudzītē, tad skaidrs, ka akmens ir otrā kaudzītē, un sulainis tālāk darbojas ar otro kaudzīti.

Tālāk sulainis to kaudzīti, kurā ir burvju akmens, atkal sadala divās daļās pa 4 akmeņiem katrā un pārbauda vienu no tām. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, viņš var noteikt, kurā no abām kaudzītēm ir meklētais akmens.

Tālāk kaudzīti, kurā ir meklētais akmens, atkal sadala 2 daļās pa 2 akmeņiem katrā un atkal pārbauda vienu no tām. Beidzot pārbauda vienu no diviem akmeņiem, starp kuriem ir īstais akmens un noskaidro, kurš tieši tas ir.

Pavisam tika veiktas 4 pārbaudes, tātad patērētas 40 minūtes, kas ir mazāk nekā viena stunda.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

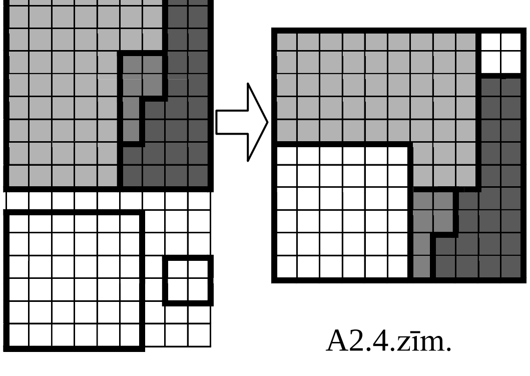
2.3.1. Apskatām starpības starp blakusesošiem virknes locekļiem: tās veido virkni $1 \cdot 10$, $2 \cdot 10$, $4 \cdot 10$, ... Tātad nākamajām starpībām būtu jābūt $8 \cdot 10$ un $16 \cdot 10$. Tiešām, $317 - 77 = 240 = 8 \cdot 10 + 16 \cdot 10$. Tātad „*” vietā ir jābūt skaitlim $77 + 80 = 157$.

Piezīme. Šīs virknes n-to locekli var aprēķināt pēc formulas $a_n = a_{n-1} + 2^{n-2} \cdot 10 = 7 + \left(2^{n-1} - 1\right) \cdot 10$.

2.3.2. Tā kā Notiņš mēneša pirmajā otrdienā un pirmajā otrdienā pēc pirmās pirmdienas bija dažādās vietās, tad abas šīs otrdienas bija dažādas dienas. Tas iespējams tad, ja mēneša 1. datums ir otrdienā. Tā kā divos mēnešos pēc kārtas 1. datumam jābūt otrdienā, tad pirmajā mēnesī ir jābūt tieši pilnām 4 nedēļām, tāds mēnesis ir tikai februāris *īsajā gadā*. Tātad Daugavpilī Notiņš bija 1. februārī, Stokholmā – 8. februārī, Valmierā – 1. martā un Berlīnē – 8. martā.

2.3.3. Visu trīs doto kvadrātu kopējais laukums ir $4 + 36 + 81 = 121$ rūtiņas, tātad jāizveido kvadrāts ar izmēriem 11×11 rūtiņas.

A2.4. zīm. attēlots, kā to izdarīt tā, lai jaunais kvadrāts būtu salikts no ne vairāk kā 5 daļām. Kvadrāti 2×2 un 6×6 rūtiņas netiek sagriezti, bet kvadrātu 9×9 rūtiņas jāsagriež 3 daļās.



A2.4.zīm.

2.3.4. Tabulā parādīta shēma, kā, izmantojot tikai mucu, ķipīti un vienu spaini, tajā var ieliet tieši 6 *l* ūdens. Otrā spainī 6 *l* iegūst, rīkojoties pēc tādas pašas shēmas, tikai mucā tad būs par 6 *l* mazāk ūdens.

muca	18	14	14	10	10	**17**	17	13	13	9	9	**16**	16	12	12
ķipītis (max 4 *l*)	0	**4**	0	**4**	1	1	0	**4**	0	**4**	2	2	0	**4**	0
spainis (max 4 *l*)	0	0	**4**	4	**7**	0	**1**	1	**5**	5	**7**	0	**2**	2	**6**

2.3.5. Atbilde: Pietiek ar 8 monētām: 1 sant., 2 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant.

Risinājums: Lai samaksātu jebkuru summu no 1 līdz 9 santīmiem, noteikti nepieciešamas 4 monētas. Tās var būt 1 sant., 2 sant., 2 sant. un 5 sant. monētas.

Visas summas, kas lielākas nekā 9 santīmi, var samaksāt, atsevišķi samaksājot desmitus un atsevišķi – vienus. Tātad vēl nepieciešamas monētas, ar kurām samaksāt 10, 20, 30, ..., 90 santīmus.

Apskatīsim, kā varam samaksāt 90 santīmus. Lai būtu nepieciešams pēc iespējas mazāk monētu, viena no tām būs 50 santīmu monēta. Ja pārējās būs 20 un 20 santīmu monētas, tad 90 santīmus varēsim samaksāt, bet nevarēsim samaksāt 80 santīmus. Tātad noteikti nepieciešama arī 10 santīmu monēta. Bet tad, lai varētu samaksāt 90 santīmus, noteikti nepieciešamas vēl vismaz divas monētas – vai nu abas 20 santīmu, vai arī vienu 10 santīmu un otru – 20 santīmu monētas. Tātad, lai samaksātu summu, kas izsakāma veselos desmitos, nepieciešamas 4 monētas.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Atbilde: A = 1 un B = 9 (skat. A2.5. zīm.).

$$\begin{array}{r} \mathbf{12345679} \\ \cdot \qquad \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{111111111} \end{array}$$

A2.5.zīm.

Risinājums: Skaidrs, ka $B \neq 1$. Tā kā reizinājuma $B \cdot B$ pēdējais cipars ir A un $A \neq B$, tad B nevar būt arī 5 vai 6.

Tad iespējamās B vērtības ir 2 (A = 4), 3 (A = 9), 4 (A = 6), 7 (A = 9), 8 (A = 4), 9 (A = 1).

Pārbaudīt, kura no šīm vērtībām der par uzdevuma atbildi, var, piemēram, katrā no gadījumiem izdalot skaitli *AAAAAAAAA* ar B un pārbaudot, vai dalījums atbilst uzdevuma prasībām (t.i., ir skaitlis, kura visi cipari ir dažādi un pirmais no tiem ir A, bet pēdējais – B). Piemēram, $444444444 : 2 = 222222222$, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Līdzīgā veidā pārbaudot visus dalījumus, iegūstam, ka der tikai $A = 1$ un $B = 9$ (pārbaude: $111111111 : 9 = 12345679$, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem).

2.4.2. Atbilde: x = 16 un y = 8.

Pēc uzdevuma nosacījumiem seko, ka

$$x\ \text{h}\ y\ \text{min.} + x\ \text{h}\ y\ \text{min.} = y\ \text{h}\ x\ \text{min.} \qquad (1)$$

vai $$x\ \text{h}\ y\ \text{min.} + x\ \text{h}\ y\ \text{min.} = (y + 24)\ \text{h}\ x\ \text{min.} \qquad (2)$$

Šeit vienādība (1) atbilst situācijai, kad Žaņa ceļojums notiek vienas diennakts ietvaros, savukārt vienādība (2) atbilst situācijai, kad ceļojuma laikā mainās dienas.

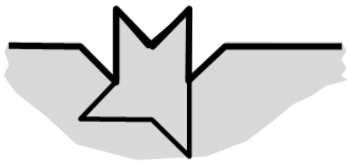
Tā kā gan x, gan y apzīmē arī stundas, un diennaktī ir 24 stundas (elektroniskais pulkstenis rāda tikai 23 stundas – pēc rādījuma 23:59 seko rādījums 00:00), tad gan $x < 24$, gan $y < 24$.

Ja būtu patiesa vienādība (1), iegūstam, ka $2y = x$ un $2x = y$. Tas iespējams tikai tad, ja $x = y = 0$ – tātad Žanis pusnaktī uzkāpa uz kuģa un acumirklī nokāpa – nekāda ceļojuma nebija.

Savukārt no vienādības (2) seko, ka $2y = x$ un $2x = y + 24$. Ievietojot $x = 2y$ otrajā vienādojumā, iegūstam $4y = y + 24$, no kurienes $y = 8$ un $x = 2y = 16$.

Tātad Žanis uzkāpa uz kuģa plkst. 16:08, ceļoja 16 stundas un 8 minūtes un no kuģa nokāpa nākamajā rītā plkst. 8:16.

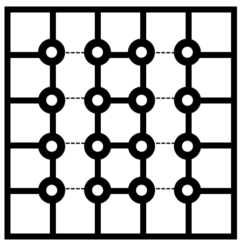
2.4.3. Skat. A2.6. zīmējumu. Akmeni pagriežot pretēji pulksteņa rādītāja virzienam par 90 grādiem, mūra augšējā mala kļūst taisna.



A2.6.zīm.

2.4.4. Atbilde: Pietiek slēgt 8 ielu posmus, skat., piem., A2.7. zīm.

Pavisam ir 16 „*sliktie*” krustojumi, no kuriem sākotnēji varēja aizbraukt 4 virzienos (šie krustojumi 2. zīm. attēloti ar aplīšiem). Slēdzot vienu ielas posmu, iespējamais virzienu skaits samazinās par 1 vienlaicīgi ne vairāk kā divos krustojumos (šos krustojumus savieno slēgtais posms). Tāpēc nepieciešams slēgt vismaz 16 : 2 = 8 ielu posmus.



A2.7. zīm.

2.4.5. Atbilde: 10 godīgie un 10 meļi.

Skaidrs, ka pirmais cilvēks meloja, bet pēdējais teica patiesību. Pie tam, ja kāds cilvēks bija teicis patiesību, tad arī nākamais aiz viņa ir teicis patiesību. Tiešām, ja ir ne vairāk kā n godīgi cilvēki, tad patiess ir arī apgalvojums, ka ir ne vairāk kā $(n+1)$ godīgi cilvēki.

Apskatīsim k-to cilvēku: viņš apgalvo, ir ne vairāk kā k - 1 godīgais cilvēks, tātad ir vismaz $20-(k-1)=21-k$ meļi. Lai k-tais cilvēks būtu godīgs, jāizpildās nevienādībai $k > 21-k$ jeb $k > 10$. Tātad patiesu apgalvojumu pirmais pateica vienpadsmitais cilvēks.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. Trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus varam apzīmēt ar n, $n + 1$ un $n + 2$. To summa ir $3n+3=3(n+1)$, tā dalās ar 3.

Tātad kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt visus tos un tikai tos naturālos skaitļus, kas dalās ar 3 un ir vismaz 6 (jo mazākā iespējama trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir $1+2+3=6$). Tātad $123 = 40 + 41 + 42$ var izteikt prasītajā veidā; bet 2011 nedalās ar 3, tāpēc to nevar izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu.

2.5.2. Atbilde: Puse no piecstaru zvaigznes.

Risinājums: Ievērojam, ka $\Delta JAB = \Delta BCD = \Delta DEF = \Delta FGH = \Delta HIJ$ (*mlm*), turklāt tie visi ir vienādsānu trijstūri (skat. A2.8. zīm.).

Tā kā $BJ = BD = DF = FH = HJ$ kā vienādu trijstūru vienādi elementi, un piecstūra *BDFHJ* visi leņķi ir vienādi, jo tie ir vienādo trijstūru ārējie leņķi, tad piecstūris *BDFHJ* ir regulārs. Tātad vienādi ir arī ΔJBD un ΔDFH (*mlm*), turklāt viens no tiem ir iekrāsots, bet otrs – nav.

Tagad pierādīsim, ka arī ΔJDH ir vienāds ar tiem pieciem trijstūriem, kas veido zvaigznes *starus*. Tā kā piecstūris *BDFHJ* ir regulārs un jebkura piecstūra visu leņķu summa ir $180°\cdot 3 = 540°$, tad katrs no tā leņķiem ir $540° : 5 = 108°$ liels. Tā kā trijstūris *JBD* ir vienādsānu ($JB = BD$), tad $\angle BJD = (180° - 108°) : 2 = 36°$. Tātad $\angle HJD = 108° - 36° = 72°$. Līdzīgi varam aprēķināt, ka arī $\angle JHD = 72°$.

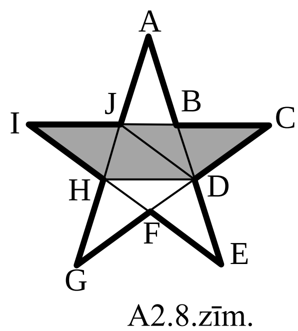
Savukārt $\angle JHI = \angle IJH = \angle IJB - \angle BJH = 180° - 108° = 72°$. Tātad vienādsānu trijstūriem ΔJIH un ΔJDH leņķi pie pamatiem ir vienādi, turklāt pamats *JH* tiem ir kopīgs. Tātad trijstūri ir vienādi pēc pazīmes *lml*.

Esam pierādījuši, ka dotā piecstaru zvaigzne, novelkot 1. zīm. redzamās līnijas, tiek sadalīta divu veidu vienādos trijstūros:

$$\Delta JAB = \Delta BCD = \Delta DEF = \Delta FGH = \Delta HIJ = \Delta JDH \text{ un}$$

$$\Delta JBD = \Delta DFH .$$

Varam ievērot, ka iekrāsoti trīs no sešiem pirmā veida trijstūriem un viens no diviem otrā veida trijstūriem. Tātad iekrāsota puse no dotajiem trijstūriem, tātad arī puse no piecstaru zvaigznes.



A2.8.zīm.

2.5.3. Varam ievērot, ka dotajā apgalvojumā kopumā cipari sastopami 20 reizes (katrā rindiņā divi cipari, kopā ir 10 rindiņas). Tātad daudzpunktu vietā ierakstāmo skaitļu summai jābūt 20.

Savukārt katrs no desmit cipariem sastopams vismaz vienu reizi – katra apgalvojuma sākumā, tātad visi daudzpunktu vietā esošie skaitļi noteikti ir vismaz

1. Turklāt, tā kā visi cipari ir sastopami vismaz vienu reizi, tad „*cipars 0 sastopams* tieši *1 reizi*” – pirmās rindiņas sākumā.

Viegli pārliecināties, ka cipari 8 un 9 šajā teikumā var būt sastopami katrs tikai 1 reizi. Tālāk mēģinājumu ceļā var iegūt, ka uzdevumam ir tieši viena atbilde:

„Šajā teikumā cipars 0 sastopams 1 reizi,

cipars 1 sastopams 7 reizes,

cipars 2 sastopams 3 reizes,

cipars 3 sastopams 2 reizes,

cipars 4 sastopams 1 reizes,

cipars 5 sastopams 1 reizes,

cipars 6 sastopams 1 reizes,

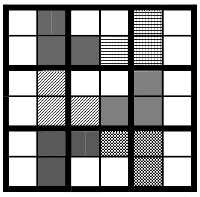
cipars 7 sastopams 2 reizes,

cipars 8 sastopams 1 reizes,

cipars 9 sastopams 1 reizes.”

2.5.4. Atbilde: Jāiekrāso vismaz 6 stūrīši, skat., piem., A2.9. zīm.

Risinājums: Sadalām kvadrātu 9 kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Katrā kvadrātiņā jābūt iekrāsotām vismaz 2 rūtiņām, pretējā gadījumā šajā kvadrātiņā varēs iekrāsot vēl vienu stūrīti. Tātad jāiekrāso vismaz $9 \cdot 2 = 18$ rūtiņas jeb $18 : 3 = 6$ „stūrīšus”.



A2.9. zīm.

2.5.5. Pieņemsim, ka tomēr nav iespējams no Šallijas aizbraukt līdz Dallijai. Tad pilsēta Šallija kopā ar vairākām citām pilsētām, no kurām no katras iziet pa 10 ceļiem, veido noslēgtu sistēmu (visi ceļi, kas iziet no šīs sistēmas pilsētām, beidzas tikai šīs sistēmas pilsētās, tātad neviens ceļš no šīs sistēmas neaiziet līdz pilsētai Dallijai).

Apskatīsim, cik *ceļa galu* ir ceļu sistēmā, kurā ietilpst pilsēta Šallija. Pieņemsim, ka šajā sistēmā ietilpst a pilsētas, no kurām iziet pa 10 ceļiem. Tad *ceļa galu* skaits šajā sistēmā ir $17 + 10a$ – nepāra skaitlis. Bet katram ceļam ir tieši divi *gali*, tāpēc kopējais *ceļa galu* skaits ir pāra skaitlis. Ir iegūta pretruna, tāpēc mūsu pieņēmums ir aplams, un pilsētas Šallija un Dallija atrodas vienā sistēmā, t.i., ir iespējams aizbraukt no vienas līdz otrai, braucot tikai pa esošajiem ceļiem.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ KĀRTA

3.1.1. Atbilde: Jā, to var izdarīt.

Risinājums: Pārveidosim summu par $\overline{ES}\cdot 4=\overline{TE}$ (pieraksts $\overline{ES}$ norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *E*, bet otrais – *S*; līdzīgi arī pieraksts $\overline{TE}$ nozīmē, ka skaitļa pirmais cipars ir *T*, bet otrais – *E*). Tā kā *E* ir reizinājuma $4\cdot S$ pēdējais cipars un $4\cdot S$ ir pāra skaitlis, tad *E* ir pāra cipars. Turklāt tas nedrīkst būt lielāks par 2, jo pretējā gadījumā $4\cdot\overline{ES}\geq 4\cdot 30>100$ būtu trīsciparu skaitlis. Turklāt $E\neq 0$, jo skaitļa pirmais cipars nevar būt 0. Tātad *E* ir 2.

Tā kā reizinājuma $4\cdot S$ vienu cipars ir 2, tad *S* var būt 3 vai 8. Ja *S* ir 8, tad reizinājums $4\cdot 28$ ir trīsciparu skaitlis, tāpēc *S* ir 3. Esam ieguvuši, ka $E=2$, $S=3$ un $T=9$ (skat. A3.1. zīm.).

$$\begin{array}{r} 2\ 3 \\ 2\ 3 \\ 2\ 3 \\ +2\ 3 \\ \hline 9\ 2 \end{array}$$

A3.1.zīm.

3.1.2. Apzīmēsim centrālajā rūtiņā esošo skaitli ar *x* (skat. A3.2. zīm.). Tā kā katrā diagonālē jau esošo skaitļu summa ir 20, katrā diagonālē un arī katrā kolonnā un rindā ierakstīto skaitļu summa ir $x+20$.

7		8
	x	
12		13

A3.2.zīm.

No tā seko, ka pirmajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(7+8)=x+5$, savukārt trešajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(12+13)=x-5$. Tātad vidējā kolonnā visu skaitļu summa ir $(x+5)+x+(x=5)=3x$. Bet tam ir jābūt vienādam ar $x+20$.

Sastādām vienādojumu $3x=x+20$, kuru atrisinot iegūstam, ka $x=10$. Tātad katrā diagonālē, kolonnā un rindā visu ierakstīto skaitļu summa ir 30, no kā iegūstam A3.3. zīm. redzamo aizpildīto maģisko kvadrātu.

7	**15**	8
11	**10**	**9**
12	**5**	13

A3.3.zīm.

3.1.3. Skaidrs, ka nav viencipara „neveiksmīga" skaitļa.

Apskatīsim „neveiksmīgu" divciparu skaitli $\overline{ab}$ (šis apzīmējums norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *a*, bet otrais – *b*).

Ja skaitļa cipari apzīmēti ar a un b, skaitli varam uzrakstīt formā $\overline{ab} = 10a + b$. No „neveiksmīga” skaitļa definīcijas iegūstam, ka $10a + b = 13(a + b)$, tātad $3a + 12b = 0$. Tā kā $a > 0$ un $b \geq 0$, šim vienādojumam nav atrisinājuma. Tāpēc neeksistē „neveiksmīgs” divciparu skaitlis.

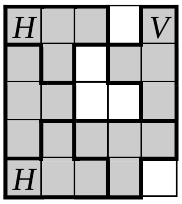
Apskatīsim „neveiksmīgu” trīsciparu skaitli $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $100a + 10b + c = 13(a + b + c)$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam $29a = b + 4c$. Ievērojam, ka a noteikti ir 1, jo gadījumā, ja a ir lielāks nekā 1, iegūstam $29a \geq 29 \cdot 2 = 58$. Bet vienādojuma labās puses lielākā iespējamā vērtība ir $b + 4c = 9 + 4 \cdot 9 = 45$ (tā kā b un c ir cipari, tie nevar būt lielāki nekā 9).

Ievietojam $a = 1$ iegūtajā vienādojumā un iegūstam $b + 4c = 29$. Pakāpeniski apskatot pēc kārtas visus iespējamos viencipara skaitļus, secinām, ka vienīgie šī vienādojuma atrisinājumi ir $b = 1$ un $c = 7$, $b = 5$ un $c = 6$, $b = 9$ un $c = 5$. Tātad vienīgie trīsciparu „neveiksmīgie” skaitļi ir 117, 156 un 195.

Apskatīsim, vai eksistē kāds „neveiksmīgs” četrciparu skaitlis. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $1000a + 100b + 10c + d = 13(a + b + c + d)$. Mazākā vienādojuma kreisās puses vērtība ir 1000, bet labās puses lielākā iespējamā vērtība ir $13 \cdot (9 + 9 + 9 + 9) = 13 \cdot 36 = 468$. Tāpēc nav „neveiksmīgu” četrciparu skaitļu. Līdzīgi pamato, ka neeksistē piecciparu, sešciparu u.t.t. „neveiksmīgi” skaitļi.

Tātad vienīgie „neveiksmīgie” skaitļi ir **117, 156** un **195**.

3.1.4. Lielākais T-veida figūru skaits, kuras var ievietot 5×5 rūtiņu kvadrātā ir 5. Vienu no iespējamiem veidiem, kā to var izdarīt, skat. A3.4. zīm.



A3.4.zīm.

Pierādīsim, ka vairāk prasīto figūru dotajā kvadrātā ievietot nevar. Tā kā katra no T-veida figūrām sastāv no 4 rūtiņām, dotajā 5×5 rūtiņu kvadrātā nevar ievietot 7 vai vairāk figūras (jo $4 \cdot 7 > 25$).

Pieņemsim, ka 5×5 rūtiņu kvadrātā var ievietot 6 T-veida figūras. Tad pāri paliktu tieši viena nepārklāta rūtiņa, tātad vismaz trīs no visām kvadrāta stūra rūtiņām būtu pārklātas ar T-veida rūtiņām. Apzīmēsim šīs stūra rūtiņas ar *H* vai *V* atkarībā no tā, vai to pārklājošā T-veida figūra ir novietota horizontāli vai vertikāli.

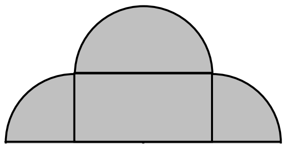
Pieņemsim, ka visas 4 stūra rūtiņas ir pārklātas ar T-veida figūrām. Nav iespējams, ka 3 vai 4 stūra rūtiņas pārklāj horizontālas figūriņas, jo tad vismaz gar vienu malu būtu blakus jānovietojas vismaz 2 no horizontālām (vertikālām) figūriņām, bet tad tās aizņemtu vismaz $2 \cdot 3 > 5$ vienas malas rūtiņas. Līdzīgi arī vertikālas figūriņas nevar noklāt 3 vai 4 stūra rūtiņas. Tātad vairāk kā 2 horizontālas un 2 vertikālas figūriņas stūra rūtiņās nevar būt, pie tam vienas malas viena stūra rūtiņa ir *H*, bet otra – *V*. Apskatot visus iespējamos šo figūru novietojumus pie malas, redzam, ka pie katras malas noteikti rodas vismaz 1 ne-stūra rūtiņas, ko nevar pārklāt, tātad kopā nenoklātas vismaz 4 rūtiņas. Ja vienīgā nenoklātā būtu stūra rūtiņa, līdzīgi izspriežam, ka visas trīs pārklātās nevar būt viena veida (*H* vai *V*). Tātad vismaz pie vienas malas veidosies vēl vismaz viena ne-stūra rūtiņa, ko nevar pārklāt, tātad vismaz 2 rūtiņas paliks nepārklātas tāpēc nevar ievietot 6 T-veida figūras.

3.1.5. Pierādīsim, ka tādu naturālu skaitļu x un y, nav; piedāvāsim divus šī uzdevuma risinājumus.

1.risinājums. Tā kā x naturāls skaitlis, tad $x^2 < x^2 + x < x^2 + 2x + 1$ jeb $x^2 < x^2 + x < (x+1)^2$. Skaitļi x un $x + 1$ ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi; starp to kvadrātiem nav citu naturālu skaitļu kvadrātu, jo starp x un $x + 1$ nav citu naturālu skaitļu. Tātad $x^2 + x$ nevar būt vienāds ar naturāla skaitļa y kvadrātu.

2.risinājums. Pieņemsim, ka naturāliem skaitļiem x un y pastāv vienādība $x^2 + x = y^2$. No tās pārveidojumu ceļā iegūstam $x = y^2 - x^2$ un tālāk $x = (y-x)(y+x)$. Tā kā $y - x$ ir vesels skaitlis, secinām, ka x dalās ar $y + x$. Bet tas nav iespējams, jo x un $x + y$ ir naturāli skaitļi un $x < x + y$. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.1.6. Sadalot iekrāsoto figūru, kā parādīts A3.5. zīm., tiek izveidots viens taisnstūris ar izmēriem 2×1, kā arī viens pusriņķis un divi ceturtdaļriņķi, kas kopā veido riņķi ar rādiusu 1. Tātad kopējais iekrāsotās figūras laukums ir $2 \cdot 1 + \pi \cdot 1^2 = 2 + \pi$.



A3.5.zīm.

3.1.7. Apzīmējam vienādsānu trijstūra pamatu ar *a*, bet vienādās malas ar *b*. Tad trijstūra perimetrs ir $a + 2b$, paralelograma perimetrs ir $2a + 2b$, bet romba perimetrs ir $4b$.

No dotā apgalvojuma par paralelograma perimetru iegūstam vienādojumu $2a + 2b = a + 2b + 3$, no kurienes aprēķinām, ka $a = 3$. Savukārt no apgalvojuma par romba perimetra garumu iegūstam vienādojumu $4b = a + 2b + 7$, ko pārveidojot iegūstam vienādojumu $2b = a + 7$. Tā kā $a = 3$, tad $2b = 10$ un $b = 5$. Tātad trijstūra perimetrs ir **13 cm**.

3.1.8. a) Mazākais viena viencipara un viena divciparu skaitļa reizinājums, ko Skaitlītis var aprēķināt ar savu kalkulatoru, ir $1 \cdot 11 = 11$; lielākais iespējamais reizinājums ir $9 \cdot 99 = 891$. Vienīgais veids, kā patiešām iegūt reizinājumu 15, ir $1 \cdot 15 = 15$, tātad tā ir viena no atbildēm (reizinājums $3 \cdot 5$ neder – abi reizinātāji ir viencipara skaitļi).

Vēl iespējams, ka patiesais reizinājums ir bijis 105 vai 150 (tā kā rezultāts ir mazāks nekā 891, reizinājums nevar būt, piemēram, 1005 u.c.).

Apskatīsim visas iespējas, kā, sareizinot vienu viencipara skaitli un vienu divciparu skaitli, varam iegūt reizinājumus 105 un 150:

$$105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$$

$$150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50(*) = 5 \cdot 30(*) = 6 \cdot 25 = 10 \cdot 15(*)$$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kuri neatbilst uzdevuma nosacījumiem (skaitļi satur ciparu 0, turklāt pēdējā reizinājumā ir sareizināti divi divciparu skaitļi).

Tāpēc Skaitlītis varēja aprēķināt šādus reizinājumus:

$1\cdot 15,\ 2\cdot 75,\ 3\cdot 35,\ 5\cdot 21,\ 6\cdot 25,\ 7\cdot 15$

b) Rīkojamies līdzīgi, kā iepriekšējā gadījumā. Ja sareizināti divi divciparu skaitļi, mazākais iespējamais reizinājums ir $11\cdot 11=121$, bet lielākais ir $99\cdot 99=9801$. Tad iespējams, ka patiesais reizinājuma rezultāts ir 150, 1005, 1050 vai 1500. Jau iepriekš apskatījām reizinājumu 150 – vienīgie divciparu skaitļi, kurus sareizinos iegūst 150, ir 10 un 15, bet tie neder, jo skaitlis 10 satur ciparu 0. Tāpēc skaitli 150 nevar iegūt atbilstoši uzdevuma prasībām.

Sadalīsim pirmreizinātājos pārējos skaitļus, t.i., 1005, 1050 un 1500:

$1005=3\cdot 5\cdot 67$

$1050=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7$

$1500=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5$

Redzam, ka kā divu skaitļu reizinājumu 1005 var iegūt 3 veidos:

$1005=(3\cdot 5)\cdot 67=(3\cdot 67)\cdot 5=3\cdot(5\cdot 67)$, t.i.,

$1005=15\cdot 67=201\cdot 5(*)=3\cdot 335(*)$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc Skaitlītis reizinājumu 1005 varēja iegūt tikai sareizinot skaitļus 15 un 67.

Apskatot skaitļus 1050 un 1500, līdzīgi apvienosim pirmreizinātājus divās grupās. Turklāt ievērojam, ka, apvienojot skaitļus 2 un 5 vienā grupā, iegūsim reizinātāju, kas beidzas ar 0, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc šādus sadalījumus neapskatīsim.

$1050=(2\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 7)=(2\cdot 7)\cdot(5\cdot 5\cdot 3)=(2\cdot 3\cdot 7)\cdot(5\cdot 5)=2\cdot(5\cdot 5\cdot 3\cdot 7)$

$1500=(2\cdot 2)\cdot(3\cdot 5\cdot 5\cdot 5)=(2\cdot 2\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)$

jeb

$1050=6\cdot 175(*)=14\cdot 75=42\cdot 25=2\cdot 525(*)$

$1500=4\cdot 375(*)=12\cdot 125(*)$

Atkal ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc, sareizinot divus divciparu skaitļus, Skaitlītis uz sava sabojātā kalkulatora rezultātu 15 varēja iegūt tikai šādi:

$15\cdot 67,\ 14\cdot 75,\ 42\cdot 25$

3.1.9. Skaidrs, ka A un B nevarēja vienlaicīgi teikt patiesību. Ja tieši viens no viņiem teica patiesību, tad C un D meloja. Savukārt ja gan A, gan B ir meļi, tad C teica patiesību, bet D meloja. Abos gadījumos tieši viens skolēns teica patiesību.

3.1.10. Apzīmēsim suņu skaitu pilsētā ar *x*, bet kaķu skaitu – ar *y*. Tad to suņu skaits, kas sevi uzskata par kaķi, ir $\frac{x}{10}$, bet kaķu skaits, kas sevi uzskata par kaķi (resp., neuzskata sevi par suni), ir $\frac{9y}{10}$.

Tā kā 20% no visiem dzīvniekiem sevi uzskata par kaķi, varam uzrakstīt vienādojumu $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{x+y}{5}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus: $x+9y=2x+2y$, no kurienes $x=7y$. Tātad $\frac{1}{8}=12{,}5\%$ no dzīvniekiem pilsētā ir kaķi.

3.2. OTRĀ KĀRTA

3.2.1. Atbilde: Tādu veselu skaitļu a un b nav.

Risinājums: Tā kā vienādības kreisajā pusē gan $8a$, gan $12b$ dalās ar 2, to starpība arī dalās ar 2. Tāpēc arī labajā pusē esošajai izteiksmei jādalās ar 2. Bet skaitlis 5 nedalās ar divi.

3.2.2. Atbilde: Skaidrs, ka šāda „saīsināšanas īpašība" ir spēkā visām daļām, kurām skaitītājs un saucējs ir tādi divciparu skaitļi, kuriem abi cipari ir vienādi. Bez tām šī „īpašība" ir spēkā arī daļām $\frac{16}{64}$; $\frac{19}{95}$; $\frac{26}{65}$; $\frac{49}{98}$.

Risinājums. Apzīmēsim ar a un b skaitītāja ciparus, bet ar b un c – saucēja ciparus. Iegūsim vienādojumu

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}.$$

Pārveidosim to:

$$(10a+b)c=a(10b+c)$$

$$10ac+bc=10ab+ac$$

$$10a(c-b)=c(a-b) \qquad (*)$$

Ievērosim, ka $a\neq 0$ un $b\neq 0$, jo tad skaitītājā un saucējā nebūtu divciparu skaitļa. Arī $c\neq 0$, jo tad nevarētu rakstīt daļu $\frac{a}{c}$.

Ja $c-b=0$, tad vienādojuma (*) kreisā puse ir vienāda ar 0. Arī labajai pusei jābūt vienādai ar 0. Tātad $a-b=0$, un der atrisinājums $c=b=a$ (visi cipari ir vienādi).

Tālāk aplūkosim tikai tos atrisinājumus, kuriem $c\neq b$ un $a\neq b$.

Vienādojuma kreisā puse dalās ar 10, tāpēc arī labajai pusei $c(a-b)$ jādalās ar 10. Tā kā $c\neq 0$, $c<10$, $a-b\neq 0$ un $a-b<10$, varam aplūkot 2 gadījumus:

a) c dalās ar 2, t.i., $c=2k$, kur k = 1; 2; 3; 4, un

$a-b$ dalās ar 5, t.i., $a-b=5$ vai arī $a-b=-5$.

b) c dalās ar 5, t.i., $c=5$, un

$a-b$ dalās ar 2, t.i., $a-b=2m$, kur m = ±1; ±2; ±3; ±4.

Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi.

a1) $a-b=5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $10a(2k-b)=2k\cdot 5$. Izdalot vienādojuma abas puses ar 10, iegūstam $a(2k-b)=k$. Tā kā $b=a-5$, tad $a>5$. Tāpēc kreisās puses vērtība pēc moduļa lielāka par labās puses vērtību, un atrisinājumu nav.

a2) $a-b=-5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $10a(2k-b)=2k\cdot(-5)$ un, līdzīgi kā iepriekš, $a(2k-b)=-k$. Tā kā $b=a+5$, tad $a(2k-a-5)=-k$. Skaidrs, ka $1\le a\le 4$ (jābūt $b\le 9$). Ievietojot šīs a vērtības, redzam:

- ja $a=1$, tad $k=2$;
- ja $a=2$, tad k nav vesels skaitlis;
- ja $a=3$, tad atkal k nav vesels skaitlis;
- ja $a=4$, tad $k=4$.

Tad attiecīgi iegūstam daļas $\frac{16}{64}$ un $\frac{49}{98}$.

b) $c=5$ un $a-b=2m$ (kur m = ±1; ±2; ±3; ±4). No (*) iegūstam

$$10a(5-b)=5\cdot 2m$$

$$a(5-b)=m$$

Ievietosim $a=2m+b$:

$$(2m+b)(5-b)=m$$

Ja $m>0$, tad $2m+b>m$ un atrisinājuma nav.

Aplūkosim gadījumus, kad m ir negatīvs skaitlis.

- Ja $m=-1$, tad $(b-2)(5-b)=-1$, bet $(b-2)(b-5)=1$ nav atrisinājuma.
- Ja $m=-2$, tad $(b-4)(5-b)=-2$ ir atrisinājums $b=6$ ($a=2$, $c=5$); neder atrisinājums $b=3$, jo tad a sanāk negatīvs.
- Ja $m=-3$, tad $(b-6)(b-5)=3$ nav atrisinājuma.
- Ja $m=-4$, tad $(b-8)(5-b)=-4$ ir atrisinājums $b=9$ ($a=1$, $c=5$); neder atrisinājums $b=4$, jo tad a sanāk negatīvs.

Tātad b) gadījumā ieguvām divas daļas: $\frac{26}{65}$ un $\frac{19}{95}$.

3.2.3. Tā kā vienādojuma sakne ir skaitlis 7, tad, ievietojot nezināmā vietā 7, jāiegūst patiesa vienādība. Tāpēc apzīmēsim tintes traipa vietā esošo skaitli ar a, savukārt x vietā ievietosim skaitli 7, un iegūto vienādojumu atrisināsim attiecībā pret a.

$$(7+a)(7+4)-(7+1)(7+2)=38$$

$$(7+a)\cdot 11-8\cdot 9=38$$

$$77+11a-72=38$$

$$11a=33$$

$$a=3$$

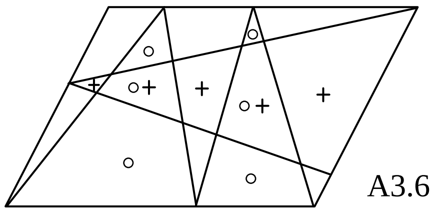
Tātad tintes traips aizsedzis skaitli 3.

3.2.4. Varam atzīmēt ar krustiņiem un ar aplīšiem tās divas daļas, kas atzīmētas A3.6. zīm., tādējādi saglabājot ar krustiņiem un aplīšiem apzīmēto daļu laukumu starpību nemainīgu (tā kā šīs abas iezīmētās daļas ir kopīgas, tad tās starpību neietekmē). Tātad, ja pierādīsim, ka tagadējo ar krustiņiem atzīmēto daļu laukumu summa ir mazāka nekā ar aplīšiem atzīmēto daļu laukumu summa, tad arī sākotnēji dotajā zīmējumā šī sakarība būs spēkā.

Zinām, ka paralelograma laukums vienāds ar augstuma un malas, pret kuru tas novilkts, reizinājumu (jeb $S = ah$). Savukārt trijstūra laukums vienāds ar pusi no augstuma un malas, pret kuru tas novilkts, reizinājumu (jeb $S_\Delta = \frac{1}{2}ah$).

Ievērojam, ka ar aplīšiem apzīmētās daļas veido divus trijstūrus, kuru augstumi pret apakšējo malu sakrīt ar vienu no paralelograma augstumiem; savukārt šo trijstūru pamati veido paralelograma malu, pret kuru šis augstums novilkts. Tātad abu trijstūru kopējais laukums vienāds ar $\frac{1}{2}a_1h + \frac{1}{2}a_2h = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2)$, kur a_1 un a_2 – trijstūru pamati, h – trijstūru augstums, kas vienāds arī ar paralelograma augstumu. Kā jau iepriekš izspriedām, trijstūru pamatu garumu summa vienāda ar paralelograma malu, pret kuru vilkts augstuma h, tātad šo divu trijstūru laukumu summa vienāda ar $\frac{1}{2}ah$ jeb pusi no dotā paralelograma laukuma.

Tagad apskatīsim ar krustiņiem apzīmētā trijstūra laukumu. Varam ievērot, ka šī trijstūra augstuma garums ir vienāds ar paralelograma otra augstuma garumu, bet trijstūra pamata malas garums ir īsāks nekā paralelograma otra mala. Tātad šī trijstūra laukums būs mazāks nekā puse no paralelograma laukuma. Tā kā iepriekš izspriedām, ka ar aplīšiem apzīmēto daļu laukums vienāds ar pusi no paralelograma laukuma, tad varam secināt, ka ar krustiņiem apzīmēto daļu laukums patiešām ir mazāks nekā ar aplīšiem apzīmēto daļu laukums.



A3.6.zīm.

3.2.5. a) Lai nekādu divu izvēlētu skaitļu starpība nebūtu 5, var izvēlēties ne vairāk kā divus skaitļus no šādām skaitļu grupām: $\{1; 6; 11; 16\}$; $\{2; 7; 12; 17\}$; $\{3; 8; 13; 18\}$; $\{4; 9; 14; 19\}$ un $\{5; 10; 15; 20\}$. Tātad pavisam var izvēlēties ne vairāk kā $2 \cdot 5 = \mathbf{10}$ skaitļus. Viens no veidiem, kā var izvēlēties 10 šādus skaitļus, ir:

1; 2; 3; 4; 5; 11; 12; 13; 14; 15.

b) No katras četru skaitļu grupas $\{a; a+5; a+10; a+15\}$ divus skaitļus var izvēlēties 3 veidos: a un $a+10$; a un $a+15$; $a+5$ un $a+15$. Tā kā ir pavisam 5 šādas grupas, tad šos 10 skaitļus var izvēlēties $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{243}$ dažādos veidos.

3.2.6. Atbilde: $\angle BED = 45°$

Risinājums:

1) Tā kā $ABCD$ ir kvadrāts, tad $\angle BCD = 90°$ (skat. A3.7. zīm.) un $DC = CB$.

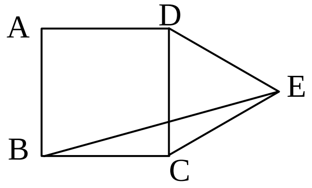
2) No tā, ka trijstūris CDE ir vienādmalu, seko, ka $\angle DCE = 60°$ un $EC = DC$.

3) Tātad trijstūris ECB ir vienādsānu ($EC = CB$) un
$\angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 90° + 60° = 150°$.

4) Trijstūrī pretī vienādām malām atrodas vienādi leņķi; tāpēc

$$\angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°.$$

5) Iegūstam, ka $\angle BED = \angle CED - \angle CEB = 60° - 15° = 45°$.



A3.7.zīm.

3.2.7. Tā kā prasītais skaitlis ir četrciparu, tas atrodas starp 1000 un 9999. Apzīmēsim šo skaitli ar *n*. Zināms, ka *n* ir kāda vesela skaitļa kvadrāts, turklāt skaitlis $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9. Tātad $n-1$ dalās ar šo skaitļu mazāko kopīgo dalītāju, kas ir vienāds ar $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Tāpēc ir tikai trīs iespējamās *n* vērtības: $2520+1=2521$; $2520 \cdot 2+1=5041$ un $2520 \cdot 3+1=7561$ ($2520 \cdot 4+1$ jau ir lielāks nekā 9999). No šiem trim skaitļiem tikai 5041 ir kāda skaitļa kvadrāts ($71^2 = 5041$). Tātad Lauras PIN-kods ir **5041**.

Piezīme. Uzdevumu ir iespējams arī atrisināt, apskatot tos visus četrciparu skaitļus, kas ir kāda vesela skaitļa kvadrāti, un tālāk katram iegūtajam skaitlim pārbaudot, vai izpildās punktā b) minētais nosacījums. Lai gan to var izdarīt, šī metode nav visai efektīva, jo jāveic pārbaudes pavisam 68 skaitļiem. Turklāt, ja izmanto šo metodi, katram skaitlim pārbaude jāveic ļoti rūpīgi, norādot, kāpēc tieši šis skaitlis neder (piemēram, skaitlim 5929 jānorāda, ka tas dalās ar 7 un tāpēc atlikums ir 0 nevis prasītais 1). Nepietiek tikai pateikt, ka šī pārbaude ir veikta, nenorādot sīkāku informāciju.

Protams, šo metodi var arī reducēt, uzreiz izslēdzot visus pāra skaitļus (jo tiem atlikums dalot ar 2 noteikti būs 0 nevis 1), tādējādi jāveic „tikai” 34 pārbaudes; vai arī apskatot tikai skaitļus, kas beidzas ar ciparu 1 (lai apmierinātu nosacījumus dalot ar 2 un 5). Tomēr, šo loģisko spriedumu veikšanas gaitā, risinātājs pats, iespējams, nonāks jau pie sākumā uzrādītā īsākā risinājuma.

3.2.8. Apzīmēsim diametra garumu Centa celiņam ar *c*, bet Baibas celiņa pirmā pusriņķa diametra garumu ar *b*; tad otrā pusriņķa diametra garums ir $c-b$. Līdzīgi arī, apzīmējot Aivara celiņa pirmā pusriņķa diametra garumu ar *a*, otrā pusriņķa diametra garums ir $c-a$.

Izmantojot to, ka riņķa līnijas garums vienāds ar diametra reizinājumu ar π, aprēķināsim katra sportista noskrietās distances garumu:

- Tā kā Centa noskrietā celiņa garums ir puse no riņķa līnijas ar diametru *c* garumu, Centa celiņa garums ir $\frac{1}{2}\pi c$.
- Viss Baibas celiņa garums ir vienāds ar abu pusriņķa līniju garumu summu, t.i., $\frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi(c-b) = \frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c - \frac{1}{2}\pi b = \frac{1}{2}\pi c$.
- Viss Aivara celiņa garums arī vienāds ar abu pusriņķa līniju garumu summu: $\frac{1}{2}\pi a + \frac{1}{2}\pi(c-a) = \frac{1}{2}\pi a + \frac{1}{2}\pi c - \frac{1}{2}\pi a = \frac{1}{2}\pi c$.

Redzam, ka visu sportistu noskrieto distanču garumi ir vienādi. Tā kā viņi visi trīs skrēja ar vienādu vienmērīgu ātrumu, tad viņi visi finišēja reizē.

3.2.9. Ierakstot starp skaitļa 121 cipariem nulles skaitā n (n – vesels pozitīvs skaitlis), iegūstam skaitli $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1$.

Šo skaitli var izteikt formā $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1 = 1\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$, no kurienes pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam:

$$1\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 10^{2(n+1)} + 2\cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= \left(10^{n+1}\right)^2 + 2\cdot 10^{n+1}\cdot 1 + 1^2 =$$

$$= \left(10^{n+1} + 1\right)^2$$

Tātad $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1 = \left(10^{n+1} + 1\right)^2$. Tā kā n – vesels pozitīvs skaitlis, tad 10^{n+1} arī ir vesels pozitīvs skaitlis, tad arī $\left(10^{n+1} + 1\right)^2$ vesels skaitlis, līdz ar to esam pierādījuši uzdevumā prasīto.

3.2.10. Lai kļūtu par uzvarētāju, pirmajam spēlētājam jācenšas tikt pie skaitļa 89. Ja viņš iegūs šo skaitli, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu pretinieks, viņš noteikti varēs atrast atbilstošu skaitli, kuru pieskaitot jau esošajam rezultātam, rodas summa 100 (jo otrajam spēlētājam jānosauc skaitlis ne mazāks kā 1 un ne lielāks kā 10; tātad pēc otrā spēlētāja gājiena tiks iegūts summā vismaz 90, bet noteikti ne 100).

Tālāk izspriedīsim, kā pirmajam spēlētājam iegūt summā skaitli 89.

Sāksim no 100 pakāpeniski atņemt 11. Iegūsim šādu skaitļu rindu – 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 (vai arī augošā secībā 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89).

Tagad ir skaidrs – ja pirmais spēlētājs nosauks „1”, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu otrs spēlētājs, tas netraucēs pirmajam spēlētājam iegūt 12. Tieši tāpat pirmais spēlētājs vienmēr varēs iegūt 23, bet pēc tam – 34, 45, 56, 67, 78 un visbeidzot 89. Un mēs jau iepriekš izspriedām, ka tad pirmais spēlētājs varēs iegūt summā precīzi 100.

3.3. TREŠĀ KĀRTA

3.3.1. Ja skaitlis $\overline{a543b}$ dalās ar 36, tas dalās gan ar 9, gan ar 4. Apskatīsim atsevišķi dalāmības pazīmes ar skaitļiem 9 un 4.

Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai arī jādalās ar 9, tāpēc $a+5+4+3+b$ dalās ar 9. Tā kā $5+4+3=12$, bet a un b ($0 \le a+b \le 18$) ir cipari, tad vai nu $a+b=6$, vai arī $a+b=15$.

Savukārt atbilstoši dalāmības pazīmei ar 4, skaitļa $\overline{a543b}$ pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim $\overline{3b}$ jādalās ar 4; tātad $\overline{3b}$ ir vai nu 32, vai arī 36, tātad $b=2$ vai $b=6$.

Ja $b=2$, tad nav iespējams, ka $a+b=15$ (jo a ir viencipara skaitlis); tāpēc atliek, ka $a+b=6$, no kurienes iegūstam $a=4$.

Līdzīgi arī, ja $b=6$, nav iespējams $a+b=6$ (jo tad $a=0$, bet tad $\overline{a543b}$ nav piecciparu skaitlis); tāpēc no $a+b=15$ iegūstam $a=9$.

Tātad $a=4$, $b=2$ un $a=9$, $b=6$ ir vienīgās iespējamās *a* un *b* vērtības.

3.3.2. Aprēķināsim dažus nākamos virknes locekļus:

- ceturtais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$;
- piektais virknes loceklis vienāds ar $\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$;
- sestais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{4}-\frac{5}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$;
- septītais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$.

Tātad pirmie septiņi virknes locekļi ir $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Tātad piektais, sestais un septītais virknes loceklis ir attiecīgi vienādi ar pirmajiem trim virknes locekļiem. Tā kā katra nākamā virknes locekļa vērtība ir atkarīga no iepriekšējo trīs virknes locekļu vērtībām, 8. loceklis būs vienāds ar ceturto, 9. loceklis – ar piekto (kas vienāds ar pirmo virknes locekli) utt. Tas nozīmē, ka virkne satur tikai 4 dažādus skaitļus, kas atkārtojas secībā $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \ldots$. (Šādas virknes sauc par periodiskām.)

Tātad gan desmitais, gan 2010. virknes loceklis būs vienāds ar otro virknes locekli, t.i., $\frac{1}{3}$.

3.3.3. a) Lai pareizi atbildētu uz šo uzdevuma daļu, pietiek parādīt vienu skaitli ar prasīto īpašību, apmainīt tā ciparus vietām un pateikt, cik reizes iegūtais skaitlis ir lielāks nekā tā ciparu summa. Savukārt mēs atradīsim visus skaitļus, kas ir četras reizes lielāki nekā tā ciparu summa, kā arī pierādīsim, ka visiem tiem attiecība pret tā ciparu summu ir viens un tas pats skaitlis (apzīmēsim to ar *k*).

Apzīmēsim meklēto skaitli ar $\overline{ab}=10a+b$. Atbilstoši uzdevuma prasībām, $10a+b=4(a+b)$. Vienkāršojot iegūstam, ka $2a=b$. Tātad visi divciparu skaitļi, kuriem vienu ir divreiz vairāk nekā desmitu, apmierina uzdevuma prasības. Ir četri šādi skaitļi: 12, 24, 36 un 48.

Apmainot atrastā skaitļa ciparus vietām, iegūstam skaitli $\overline{ba}=10b+a$. Pieņemsim, ka šis skaitlis ir *k* reizes lielāks nekā tā ciparu summa: $10b+a=k(a+b)$, ko pakāpeniski pārveidojot iegūstam $10b-kb=ka-a$ un $b(10-k)=a(k-1)$. Ievietojam $b=2a$ un izdalām abas vienādojuma puses ar *a* (to drīkst darīt, jo $a\neq 0$), un iegūstam $2(10-k)=(k-1)$ un tālāk $k=7$.

Piezīme. Protams, var apskatīt katru no četriem iespējamajiem skaitļiem un iegūt, ka visos gadījumos iegūst skaitli 7 (piemēram, $84=7\cdot(4+8)$).

b) Tagad zinām, ka $10a+b=n(a+b)$. Atkal pārveidojam un pakāpeniski iegūstam $10a-na=nb-b$ un $a(10-n)=b(n-1)$. Līdzīgi kā iepriekš no tā, ka skaitlis ir k reizes lielāks nekā tā ciparu summa, pakāpeniski iegūstam $b(10-k)=a(k-1)$. Izsakām, piemēram, no otrā vienādojuma $b=\frac{a(k-1)}{(10-k)}$, ievietojam pirmajā un izdalām abas vienādojuma puses ar *a*, tādējādi iegūstam $(10-n)(10-k)=(k-1)(n-1)$.

Atverot iekavas iegūstam $100-10n-10k+nk=nk-n-k+1$, ko vienkāršojot iegūstam $9n+9k=99$ un $k=11-n$. Tātad skaitlis, ko iegūst, samainot dotā divciparu skaitļa ciparus vietām, ir $11-n$ reizes lielāks nekā tā ciparu summa.

3.3.4. Tā kā $1<\frac{2010}{1996}<2$, tad $a=1$; iegūstam daļu formā $1+\frac{14}{1996}$.

Atņemot 1 un *apgriežot* daļu $\frac{14}{1996}$, iegūstam $\frac{14}{1996}=\frac{1}{\frac{1996}{14}}=\frac{1}{142+\frac{8}{14}}$. Tātad $b=142$. Līdzīgi rīkojamies tālāk, apgriežot daļu $\frac{8}{14}$ un iegūstam $\frac{8}{14}=\frac{1}{\frac{14}{8}}=\frac{1}{1+\frac{6}{8}}$, tātad $c=1$.

Tālāk $\frac{6}{8}=\frac{1}{\frac{8}{6}}=\frac{1}{1+\frac{2}{6}}$, tāpēc $d=1$ un $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, tātad $e=3$.

Esam ieguvuši, ka $\frac{2010}{1996}=1+\cfrac{1}{142+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$.

3.3.5. Atbilde: $\angle BAC=36°$.

Risinājums:

1) Apzīmēsim $\angle BAC=x$ (skat. A3.8. zīm.).

2) Tā kā ΔABC ir vienādsānu, un trijstūrī pretī vienādām malām atrodas vienādi leņķi, arī $\angle BCA=x$.

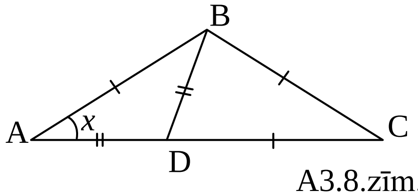
3) Arī ΔADB ir vienādsānu, tāpēc $\angle ABD=x$.

4) Tā kā $\angle CDB$ ir ΔADB ārējais leņķis, tad $\angle CDB=\angle DAB+\angle DBA=2x$

5) Tā kā $BC=CD$, tad arī ΔBCD ir vienādsānu, tāpēc $\angle CBD=\angle CDB=2x$.

6) Katra trijstūra visu leņķu summa ir vienāda ar $180°$, tāpēc, apskatot trijstūra ΔBCD leņķus, iegūstam, ka $2x+2x+x=180°$, tātad $5x=180°$ un $x=36°$.

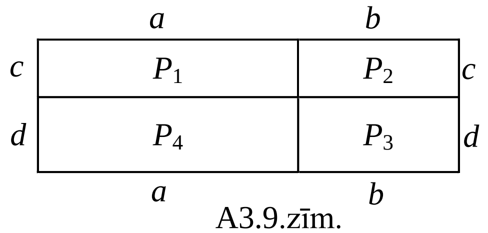
7) Tā kā sākumā apzīmējām $\angle BAC=x$, tāpēc $\angle BAC=36°$.



A3.8.zīm.

3.3.6. Atbilde: 2011 cm.

Risinājums. Apzīmēsim mazo taisnstūru perimetrus ar P_1, P_2, P_3, P_4 un to malas ar a, b, c, d (skat. A3.9.zīm.). Atcerēsimies, ka taisnstūra pretējās malas ir vienādas.



A3.9.zīm.

No perimetra definīcijas seko, ka

$$P_1 = 2a + 2c$$

$$P_2 = 2b + 2c$$

$$P_3 = 2b + 2d$$

$$P_4 = 2a + 2d$$

Saskaitot P_1 ar P_3 un P_2 ar P_4, iegūstam:

$$P_1 + P_3 = 2a + 2c + 2b + 2d = 2a + 2b + 2c + 2d \text{ un}$$

$$P_2 + P_4 = 2b + 2c + 2a + 2d = 2a + 2b + 2c + 2d\,.$$

Tātad „pa diagonāli" novietoto taisnstūru perimetru summas ir vienādas, t.i., $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$. Tātad $2009 + P_3 = 2010 + 2010$, no kā iegūstam, ka $P_3 = 2011$.

3.3.7. Varam izveidot tabulu, kurā attēlosim katrā aktivitātē iesaistīto skolēnu skaitu:

	Slēpošana	Hokejs	**Kopā**
Volejbols	126	54	**180**
Futbols	99		**120**
Kopā	**225**		

Ja no 300 skolēniem 60% spēlē volejbolu un pārējie jeb 40% spēlē futbolu, tad 180 skolēni spēlē volejbolu un 120 – futbolu. Ja 30% no visiem volejbolistiem ziemā spēlē hokeju, tad viegli aprēķināt, ka tie ir $180 \cdot \frac{3}{10} = 54$ skolēni. Tātad vasarā ar volejbolu, bet ziemā ar distanču slēpošanu nodarbojas 180 – 54 = 126 skolēni.

Ja 56% no visiem slēpotājiem vasarā spēlē volejbolu un mēs jau ieguvām, ka tie ir 126 skolēni, tad viegli aprēķināt visu slēpotāju skaitu: $56\%\, no\, x = 126$, $x = 126 : \frac{56}{100} = 225$ skolēni; tādējādi vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas $225 - 126 = 99$ skolēni. Tātad vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas 120 – 99 = **21** skolēns.

3.3.8. No 1 līdz 2010 ir nepāra skaits (1005) pāra skaitļi un nepāra skaits (1005) nepāra skaitļi. Visu pāra skaitļu summa un starpība noteikti būs pāra skaitlis; savukārt nepāra skaita nepāra skaitļu summa un starpība noteikti ir nepāra skaitlis. Bet, tā kā pāra skaitļa un nepāra skaitļa summa vai starpība ir nepāra skaitlis, tad, neatkarīgi no saliktajām zīmēm, visu skaitļu summa būs nepāra skaitlis.

Mazākais pozitīvais nepāra skaitlis ir 1.

Summas vērtību 1 var iegūt, piemēram, tā:

$$\underbrace{-1+2+3-4}_{=0}\underbrace{-5+6+7-8}_{=0}-\ldots\underbrace{-2005+2006+2007-2008}_{=0}-2009+2010=1.$$

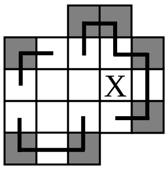
Te sagrupēti skaitļi no 1 līdz 2008 pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 2009 un 2010 priekšā liktas zīmes tā, lai to summa būtu 1.

3.3.9. Pirmā rindā stāvošā persona nevarēja būt bruņinieks un teikt taisnību, jo tad visi aiz viņa stāvošie arī būtu bruņinieki, bet tad viņu apgalvojumi, ka viņiem tieši priekšā stāvošā persona ir laupītājs, būtu aplami. Tātad pirmais rindā stāv laupītājs un melo.

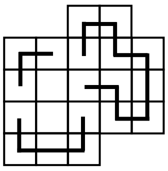
Otrā rindā stāvošā persona apgalvo, ka viņam priekšā stāv laupītājs, kas ir patiesība; tātad viņš ir bruņinieks. Trešā persona saka, ka viņam priekšā ir laupītājs un melo; tātad viņš pats ir laupītājs. Turpinot spriedumus iegūstam, ka bruņinieki un laupītāji nostājušies pamīšus, tāpēc rindā stāv **12 bruņinieki** un 13 laupītāji.

3.3.10. Tātad mums ir jāapskata, cik daudz dažādus noslēgtus ceļus var izveidot dotajā „kartē" atbilstoši uzdevuma nosacījumiem (uzskatīsim, ka nav nozīmes, kurā virzienā (pa vai pretēji pulksteņa rādītāja virzienam) dodas rūķītis).

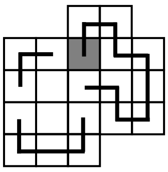
Redzam, ka caur katru stūra rūtiņu ir tieši viens iespējamais ceļš, tāpēc rūķītis cauri šīm rūtiņām dosies, kā parādīts A3.10.zīmējumā. Cauri rūtiņai, kas apzīmēta ar X, arī iespējams tikai viens ceļš, kas parādīts A3.11.zīm.

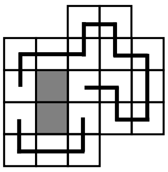


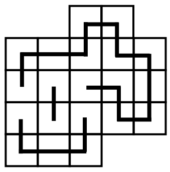
A3.10. zīm.


A3.11. zīm.

Tālāk apskatīsim rūtiņu, kas iekrāsota A3.12. zīmējumā.


A3.12. zīm.

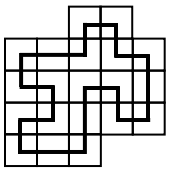

A3.13. zīm.


A3.14. zīm.

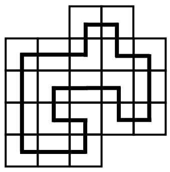
Ja ceļš no šīs rūtiņas tiktu savienots ar apakšējo rūtiņu, tad izveidotos atsevišķs noslēgts ceļš un rūķītis nevarētu apciemot pārējos rūķīšus. Tātad no šīs iekrāsotās rūtiņas rūķītim noteikti jādodas pa kreisi (skat. A3.13. zīm.).

Ir atlikušas tikai divas rūtiņas, kurās rūķītis vispār nav „ciemojies". Ja šīs divas rūtiņas netiktu savienotas ar ceļu, tad atkal izveidotos divi noslēgti ceļi. Tāpēc šīs divas rūtiņas noteikti savieno ceļš (skat. A3.14. zīm.).

Tālāk redzam, ka ir tikai divi veidi, kā var pabeigt šo rūķīša ceļu (skat. A3.15. zīm. un A3.16. zīm.).



A3.15. zīm.



A3.16. zīm.

Tātad, neatkarīgi no tā, kurā rūtiņā rūķītis dzīvo, ir iespējami tikai divi dažādi ceļi (neņemot vērā kustības virzienu), kā viņš var apstaigāt kaimiņus.

3.4. CETURTĀ KĀRTA

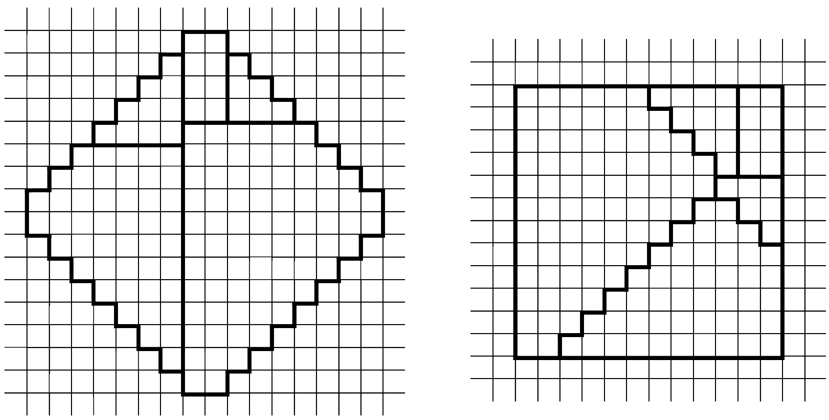
3.4.1. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$$\begin{array}{r} \times\, 285 \\ 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

3.4.2. Ja šo skaitļu ciparu summas būtu vienādas, tad skaitļi, dalot ar 3, dotu vienādus atlikumus; bet tad to starpība dalītos ar 3.

Tomēr šo skaitļu starpība ir $13k+9-4k-7=9k+2$. Tā kā $9k$ dalās ar 3, bet 2 ar 3 nedalās, tad arī iegūtā izteiksme nedalās ar 3.

3.4.3. Jā, to var izdarīt. Skat., piemēram, A3.17.zīm.



A3.17.zīm.

3.4.4. Atbilde: To nevar izdarīt.

Risinājums. Apzīmēsim skaitļus, kas atrodas pirmajā un trešajā rūtiņā ar x un y (skat. A3.18. zīm.). Tad pirmajās trīs rūtiņās esošo skaitļu summa ir $x+101+y$. Arī otrajā, trešajā un ceturtajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, tāpēc ceturtajā rūtiņā jāatrodas skaitlim x.

x	101	y									21	

A3.18.zīm.

Tā kā arī ceturtajā, piektajā un sestajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, iegūstam, ka piektajā rūtiņā jābūt skaitlim 101. Turpinot šādus spriedumus, iegūstam, ka skaitļi jāizvieto tā, kā parādīts A3.19. zīm. Tātad, ja skaitļus var izvietot rūtiņās atbilstoši prasībām, tad to var izdarīt tieši vienā veidā.

x	101	y	x	101	y	x	101	y	x	101	$\mathbf{y = 21}$	x

A3.19.zīm.

No izvietojuma redzams, ka $y = 21$. Tā kā visās trīspadsmit rūtiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt 2011, iegūstam vienādojumu $5x + 4 \cdot 101 + 4 \cdot 21 = 2011$. Veicot pārveidojumus iegūstam, ka $5x = 1523$, tātad x nav naturāls skaitlis un uzdevumā prasīto nevar izdarīt.

3.4.5. Pieņemsim, ka lapa pārklāta tā, ka uzdevuma nosacījumi izpildās. Acīmredzot katrā rindiņā jābūt pāra skaitam skaitļu „–1”. Tātad arī visā apskatāmajā lapā ir pāra skaits „–1”. Tātad uz lapas novietots pāra skaits kartiņu. Tā kā katra kartiņa nosedz divas rūtiņas, tad lapas rūtiņu skaits $5n$ dalās ar 4. Tā kā skaitļu 5 un 4 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad n dalās ar 4.

Mēs esam pierādījuši: **ja** lapu var pārklāt ar kartiņām tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos, n **noteikti** jādalās ar 4. Citiem vārdiem, mēs esam pierādījuši, ka tad, ja n nedalās ar 4, lapu prasītajā veidā apklāt nevar. Bet no tā vēl neseko, ka, ja n dalās ar 4, tad lapu, kuras izmēri ir $5 \times n$ rūtiņas, noteikti var pārklāt tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos; tas prasa papildus pierādījumu.

Pierādīsim to.

A3.20. zīmējumā redzams, kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var apklāt lapu, kuras izmēri ir 5×4 rūtiņas.

1	–1	–1	1
1	–1	1	–1
–1	–1	1	1
–1	1	–1	1
1	–1	1	–1

A3.20.zīm.

Ja lapas izmēri ir $5 \times 4k$ rūtiņas (k – jebkurš naturāls skaitlis), tad, saliekot vienu otram blakus k tādus taisnstūrus, kādi parādīti 4.zīmējumā, iegūstam lapas izklājumu ar kartiņām, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

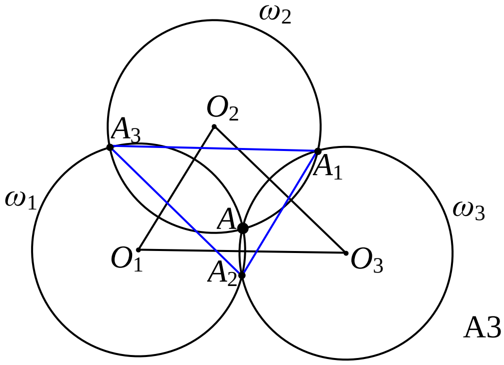
3.4.6. Apzīmēsim abu Ievas sveču augstumus centimetros ar h. Vienā stundā pirmā svece nodeg $\frac{h}{10}$ cm, bet otrā nodeg $\frac{h}{8}$ cm. Tādējādi x stundās katra svece būs nodegusi attiecīgi $\frac{hx}{10}$ cm un $\frac{hx}{8}$ cm.

Ja Ieva abas sveces iededzina tieši pusdienlaikā, tad pēc x stundām no tā brīža sveču augstumi būs attiecīgi $\left(h - \frac{hx}{10}\right)$ cm un $\left(h - \frac{hx}{8}\right)$ cm.

Mums jānoskaidro, pēc cik ilga laika pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums. Tātad mums jāatrod tāds laiks x, pēc kura abu sveču augstumi apmierina sekojošu vienādojumu $h - \frac{hx}{10} = 2\left(h - \frac{hx}{8}\right)$. Tā kā zinām, ka $h \neq 0$, varam vienādojuma abas puses izdalīt ar h, un, atverot iekavas, iegūstam vienādojumu $1-\frac{x}{10}=2-\frac{x}{4}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar 20, iegūstam $20-2x=40-5x$ un $x=6\frac{2}{3}$.

Tātad pēc 6 stundām un 40 minūtēm jeb **plkst. 18:40** pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums.

3.4.7. Pieņemsim, ka ω_1 un ω_2 otrs krustpunkts ir A_3, ω_1 un ω_3 krustpunkts ir A_2, ω_2 un ω_3 krustpunkts ir A_1 (skat. A3.21. zīm.).



A3.21.zīm.

Pierādīsim, ka $O_1O_2=A_2A_1$. Tā kā visas četrstūra $AO_2A_1O_3$ malas ir vienādas (tās ir vienādu riņķa līniju rādiusi), tad $AO_2A_1O_3$ ir rombs un nogriežņi O_2A_1 un AO_3 ir paralēli un vienādi. Līdzīgi pierāda, ka O_1A_2 un AO_3 ir paralēli un vienādi. Tātad O_2A_1 un O_1A_2 ir paralēli un vienādi, un $O_1O_2A_1A_2$ ir paralelograms, tāpēc arī $O_1O_2=A_2A_1$.

Līdzīgi pierāda, ka $O_2O_3=A_3A_2$ un $O_1O_3=A_3A_1$.

Tātad $\Delta O_1O_2O_3$ un $\Delta A_1A_2A_3$ ir vienādi, jo to malas ir pa pāriem vienādas (pazīme *mmm*).

3.4.8. Atbilde: Vārdiem AHH un HAA ir dažādas nozīmes.

Risinājums. Tātad jāpierāda, ka no vārda AHH nevar iegūt vārdu HAA.

Ja vārdā izdzēš pēc kārtas sekojošu burtu virknes HA vai AAHH, tad gan H, gan A burtu skaiti samazinās attiecīgi par 1 vai par 2. Savukārt, ja vārdā jebkurā vietā ieraksta AH, tad gan A, gan H burtu skaits palielinās par 1. Tātad, izpildot jebkuru no divām operācijām, starpība starp burtu A un H daudzumiem vārdā nemainās.

Bet dotajos vārdos AHH un HAA šī starpība ir attiecīgi +1 un –1. Tā kā, veicot atļautās darbības, šīs starpības nevar mainīties, tad šiem vārdiem ir dažādas nozīmes.

3.4.9. Apskatīsim apgalvojumus:

„Andris ir vecāks nekā Edgars”,

„Edgars ir vecāks nekā Kristaps”,

„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”.

Skaidrs, ka tie visi trīs vienlaicīgi nevar būt pareizi: ja Andris ir vecāks nekā Edgars un Edgars ir vecāks nekā Kristaps, tad Andrim jābūt vecākam nekā Kristapam. Tātad viens no šiem apgalvojumiem noteikti ir nepareizs.

Tagad apskatīsim apgalvojumus:

„Jana ir jaunāka nekā Andris”,

„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”,

„Kristaps ir jaunāks nekā Jana”.

Līdzīgi kā iepriekš izspriežam, ka arī vienam no šiem apgalvojumiem jābūt aplamam. Tā kā nepareizs ir tieši viens apgalvojums no visiem septiņiem dotajiem, tad nepareizais apgalvojums sastopams gan pirmajā, gan otrajā izdalītajā apgalvojumu grupā. Bet vienīgais apgalvojums, kas sastopams abās šajās grupās, ir „Andris ir jaunāks nekā Kristaps”. Tātad tas ir nepareizs, un sākumā doto 5.apgalvojumu aizstājam ar pareizu: „Andris ir vecāks nekā Kristaps”.

Tagad, pakāpeniski izmantojot 1., 6., 7. un 2.apgalvojumus (kas visi ir pareizi), secinām, ka Andris ir vecāks nekā Edgars, Edgars vecāks nekā Jana, Jana vecāka nekā Kristaps un Kristaps vecāks nekā Baiba.

3.4.10. Tā kā visi pirksti un visas rokas ir vienādas, tad komplektus 12; 1; 2 un 12; 2; 1 uzskatām par vienādiem. Tā kā katrai rokai ir vismaz viens pirksts, tad maksimālais vienas rokas pirkstu skaits ir 13.

Apskatīsim visus iespējamos variantus:

13; 1; 1	9; 2; 4	7; 2; 6
12; 1; 2	9; 1; 5	7; 1; 7
11; 2; 2	8; 3; 4	6; 3; 6
11; 1; 3	8; 2; 5	6; 4; 5
10; 2; 3	8; 1; 6	5; 5; 5
10; 1; 4	7; 4; 4	
9; 3; 3	7; 3; 5	

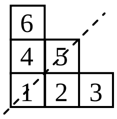
Tātad pavisam kopā ir **19** dažādi cimdu komplekti.

3.5. PIEKTĀ KĀRTA

3.5.1. Tā kā bērnu skaitam ciematā jādalās gan ar 3, gan ar 7 (jo bērnu skaitam, kas prot peldēt, braukt ar velosipēdu vai gan peldēt, gan braukt ar velosipēdu, jābūt veselam skaitlim). Tātad bērnu skaitam ciematā jādalās ar 21. Vienīgais skaitlis, kas ir mazāks nekā 40 un dalās ar 21, ir pats 21. Tātad ciematā ir 21 bērns. No šiem bērniem 7 prot peldēt, 14 – braukt ar velosipēdu, bet 3 – gan peldēt, gan braukt ar velosipēdu. Tāpēc bērnu, kas prot vismaz vienu no šīm aktivitātēm, ir $7+14-3=18$. Tātad ciematā ir 21 – 18 = **3** bērni, kas neprot ne peldēt, ne braukt ar velosipēdu.

3.5.2. Izsakām vienādību formā $E\cdot I\cdot G\cdot H\cdot T=(T\cdot W\cdot O)\cdot(F\cdot O\cdot U\cdot R)$. Tā kā vienādībā sastopami pavisam 10 dažādi burti, tad tiem atbilst visi cipari no 0 līdz 9. Tātad viens no tiem ir 0. Ja reizinājumā kāds no reizinātājiem ir 0, tad arī reizinājuma vērtība ir 0. Tātad vienas vienādības puses vērtība ir 0, bet tad, lai vienādība būtu patiesa, arī otras vienādības puses vērtībai jābūt 0, bet tas iespējams tikai gadījumā, ja arī otrā pusē viens no reizinātājiem ir 0. Tā kā katram ciparam atbilst tieši viens burts, tad ciparam 0 atbildīs tas burts, kas sastopams abās vienādības pusēs. Vienīgais tāds burts ir *T*. Tāpēc $T=0$ un reizinājums $T\cdot H\cdot R\cdot E\cdot E=\mathbf{0}$.

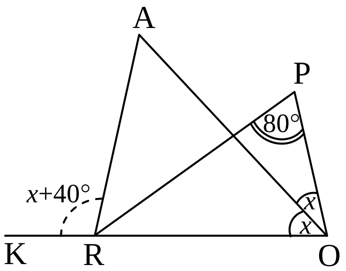
3.5.3. Sanumurēsim figūras kvadrātus, kā parādīts A3.22. zīm. Vienīgā iespējamā simetrijas ass ir „diagonāle”, kas novilkta cauri kvadrātiem 1 un 5. Simetrijas dēļ, ja kvadrāts 4 ir iekrāsots, tad arī kvadrātam 2 jābūt iekrāsotiem; tātad vai nu tie abi ir iekrāsoti, vai arī neviens no tiem (iegūstam 2 iespējas). Līdzīgi varam spriest arī par kvadrātiem 6 un 3 – vai nu tie abi ir iekrāsoti, vai arī neviens no tiem (iegūstam jau $2 \cdot 2 = 4$ iespējas). Skaidrs, ka tas, vai kvadrāts 1 ir iekrāsots vai nav (atkal 2 iespējas), neietekmēs figūras simetriju; līdzīgs spriedums ir spēkā arī par kvadrātu 5. Tā kā obligāti jāiekrāso vismaz viens kvadrāts, tad kopā ir $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 2^4 - 1 = \mathbf{15}$ dažādi veidi, kā iespējams izdarīt uzdevumā prasīto.



A3.22.zīm.

3.5.4. Ik pēc katrām divām lappusēm viena lappuse ir izlaista. Tā kā $89 = 2 \cdot 44 + 1$, tad grāmatā pavisam ir izlaistas 44 lappuses. Tāpēc grāmatas pēdējas lappuses numurs ir $89 + 44 = \mathbf{133}$.

3.5.5. Apzīmēsim $\angle AOP = x$, tad arī $\angle AOR = x$ (skat. A3.23. zīm.), jo *AO* sadala leņķi POR divos vienādos leņķos.

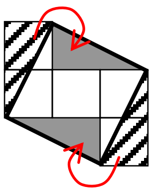


A3.23.zīm.

Atcerēsimies trijstūra ārējā leņķa īpašību: *trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi*.

Tā kā $\angle KRP$ ir trijstūra *RPO* ārējais leņķis, tad pēc iepriekš uzrakstītās īpašības $\angle KRP = 2x + 80°$. Tā kā *AR* sadala $\angle KRP$ divos vienādos leņķos, tad $\underline{\angle ARK = x + 40°}$. Savukārt $\angle ARK$ trijstūra *RAO* ārējais leņķis, tāpēc tā lielums izsakāms arī kā $\underline{\angle ARK = x + \angle RAO}$. No pasvītrotajām vienādībām izriet, ka $x + 40° = x + \angle RAO$, tātad $\angle RAO = 40°$.

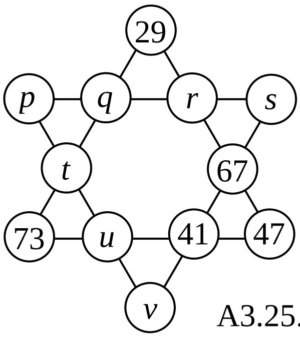
3.5.6. Lai izdarītu prasīto, uzzīmēsim papīra kastītes izklājumu (ievērojam, ka tai ir tikai 5 skaldnes). Viens no piemēriem, kā šo izklājumu var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu, attēlots A3.24. zīm.


A3.24.zīm.

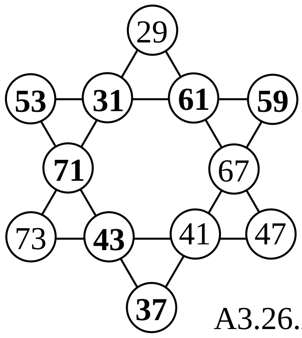
3.5.7. Starp skaitļiem 29 un 73 ir tieši 12 pirmskaitļi: 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.

Ar *p, q, r, s, t, u, v* apzīmēsim nezināmos pirmskaitļus (skat. A3.25. zīm.).

Apskatīsim summas pirmskaitļiem uz tām taisnēm, uz kurām esošajos aplīšos tieši viens pirmskaitlis nav zināms: $73 + u + 41 + 47 = 47 + 67 + r + 29$, tāpēc $u = r - 18$. Tātad vai nu $r = 71$, $u = 53$ un uz vienas taisnes esošo skaitļu summa ir 214, vai arī $r = 61$, $u = 43$ un summa ir 204.



A3.25.zīm.

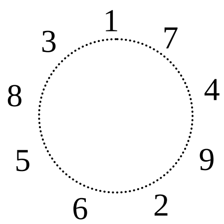


A3.26.zīm.

- Apskatīsim pirmo gadījumu: $r = 71$ un $u = 53$, tad vēl „brīvie” skaitļi ir 31, 37, 43, 59, 61. Tad $s + v = 214 - (41 + 67) = 106$. Bet no dotajiem pirmskaitļiem šādus *s* un *v* izvēlēties nevar. Tātad nevar būt, ka $r = 71$ un $u = 53$.
- Apskatīsim otro gadījumu: $r = 61$ un $u = 43$, tad vēl „brīvie” skaitļi ir 31, 37, 53, 59, 71. Tad $s + v = 204 - (41 + 67) = 96$. Tas ir iespējams, ja viens no skaitļiem *s* un *v* ir 37, bet otrs – 59. Savukārt vēl neizmantoti ir skaitļi 31, 53 un 71.
    - Ja $s = 37$ un $v = 59$, tad $p + q = 204 - (61 + 37) = 106$, bet šādus skaitļus no vēl atlikušajiem mēs nevaram izvēlēties.
    - Ja $s = 59$ un $v = 37$, tad $p + q = 204 - (61 + 59) = 84$. Tātad viens no skaitļiem *p* un *q* ir 31 un otrs – 53. Tātad *t* ir vienīgais neizmantotais skaitlis, t.i., 71. Tad $p = 204 - (71 + 43 + 37) = 53$ un $q = 31$ (pārbaudot secinām, ka šāda *q* vērtība apmierina uzdevuma nosacījumus).

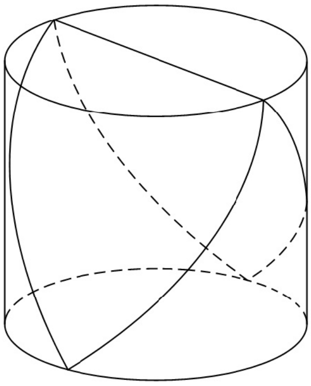
Atbilde: $p = 53$, $q = 31$, $r = 61$, $s = 59$, $t = 71$, $u = 43$, $v = 37$ (skat. A3.26. zīm.).

3.5.8. To var izdarīt, kā parādīts, piem., A3.27. zīm.



A3.27.zīm.

3.5.9. Iedomājieties cilindru, kura diametrs ir 2 cm un augstums – arī 2 cm. Nošķeļot šim cilindram divus sānus tā, kā parādīts A3.28. zīm., iegūstam vajadzīgo korķi (šķēlums uz augšējā pamata iet caur riņķa diametru).


A3.28.zīm.

Protams, pareizs ir arī korķis, kurš sastāv no viens otram galā piestiprinātiem cilindra, kuba un trijstūra prizmas (tieši šādā secībā). Tomēr A3.28. zīm. attēlotais korķis ir kompaktāks.

3.5.10. Kalps pudeles ņēma pavisam **4 reizes**, tātad kopā piesavinājās **16 pudeles**. Tas, kā viņš pēc katras zādzības varēja izkārtot pudeles, attēlots A3.29. zīm.

1. zādzība

7	7	7
7		7
7	7	7

2. zādzība

8	5	8
5		5
8	5	8

3. zādzība

9	3	9
3		3
9	3	9

4. zādzība

10	1	10
1		1
10	1	10

A3.29.zīm.

Pierādīsim, ka vairāk par 4 zādzībām kalps nevarēja veikt. Kalps ņēma pa pudelei no katra vidējā nodalījuma un, lai piemānītu saimnieku, pēc katras zādzības no tiem pašiem nodalījumiem pa pudelei pielika stūra nodalījumos. Pudeles varēja izvietot arī citādi, bet vienmēr divās pretējās kvadrāta malās vajadzēja atstāt 21 pudeli katrā. Tāpēc viņš nevarēja piesavināties vairāk par $60-2\cdot21=18$ pudelēm. Tā kā viņš katru reizi paņēma 4 pudeles, tad viņš nevarēja izdarīt vairāk par 4 zādzībām.

3.6. SESTĀ KĀRTA

3.6.1. Ievērojam, ka, no *vārdu* TWO un ELEVEN burtiem noņemot *vārdu* ONE, paliek *vārdam* TWELVE nepieciešamie burti. Tātad kliņģeris *vārdam* TWELVE kopā maksā $9+16-6=19$ mārciņas.

3.6.2. Apskatīsim, kā varam izteikt n^2:

$$n^2=\overline{CAUCAU}=$$
$$=\overline{CAU000}+\overline{CAU}=$$
$$=1000\cdot\overline{CAU}+\overline{CAU}=.$$
$$=1001\cdot\overline{CAU}=$$
$$=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{CAU}$$

Lai *n* būtu vesels skaitlis, skaitlim $\overline{CAU}$ jāsatur pirmreizinātāji 7, 11 un 13 nepāra pakāpē (vismaz pirmajā pakāpē), kā arī varbūt vēl kādi pirmreizinātāji pāra pakāpē. Tātad jābūt $\overline{CAU}\geq7\cdot11\cdot13=1001$, bet $\overline{CAU}\leq999<1001$, jo $\overline{CAU}$ – trīsciparu skaitlis, tātad Andra meklētais skaitlis *n* neeksistē.

3.6.3. Izsakām $202=5a+x\cdot b$, kur *a* un *b* ir kastīšu skaits.

Skaitļa $5a$ pēdējais cipars ir 0 vai 5 (atkarīgs no tā, vai *a* ir pāra vai nepāra). Tad starpības $202-5a$ pēdējais cipars ir 2 vai 7, tātad visi skaitļi, kas beidzas ar 2 vai 7 un nepārsniedz 202, var būt $x\cdot b$ vērtības.

Ar gadījumu pārlasi noskaidro, ka *x* var būt

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 71, 72, 76, 77, 81, 82, 86, 87, 91, 92, 96, 97, 101, 102, 107, 112, 117, 122, 127, 132, 137, 142, 147, 152, 157, 162, 167, 172, 177, 182, 187, 192, 197, 202

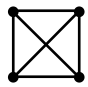
Gadījumu pārlasi var veikt pēc *a* vērtībām:

a	$5a$	$xb = 202 - 5a$	Iespējamās *x* vērtības
1	5	197	1, 197
2	10	192	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192
3	15	187	1, 187
4	20	182	1, 2, 91, 182
5	25	177	1, 3, 59, 177
6	30	172	1, 2, 4, 43, 86, 172
7	35	167	1, 167
8	40	162	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162
9	45	157	1, 157
10	50	152	1, 2, 4, 8, 19, 38, 76, 152
11	55	147	1, 3, 7, 21, 49, 147
12	60	142	1, 2, 71, 142
13	65	137	1, 137
14	70	132	1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132
15	75	127	1, 127
16	80	122	1, 2, 61, 122
17	85	117	1, 3, 9, 13, 39, 117
18	90	112	1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112
19	95	107	1, 107
20	100	102	1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102
21	105	97	1, 97
22	110	92	1, 2, 4, 23, 46, 92
23	115	87	1, 3, 29, 87
24	120	82	1, 2, 41, 82
25	125	77	1, 7, 11, 77
26	130	72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
27	135	67	1, 67
28	140	62	1, 2, 31, 62
29	145	57	1, 3, 19, 57
30	150	52	1, 2, 4, 13, 26, 52
31	155	47	1, 47
32	160	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
33	165	37	1, 37
34	170	32	1, 2, 4, 8, 16, 32
35	175	27	1, 3, 9, 27
36	180	22	1, 2, 11, 22

37	185	17	1, 17
38	190	12	1, 2, 3, 4, 6, 12
39	195	7	1, 7
40	200	2	1, 2
41	205	–3	*nav*

3.6.4. a) Pilsētu skaits *n* var būt no 5 līdz 14.

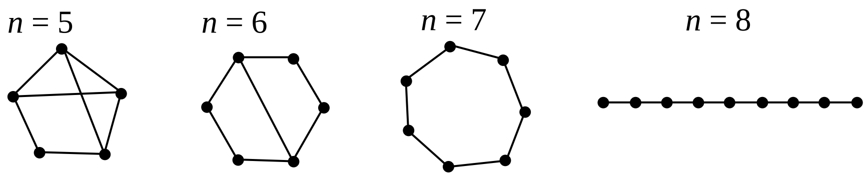
Lai pierādītu, ka nevar būt mazāk kā 5 pilsētas, pieņemsim pretējo: mums ir 4 pilsētas. Savienojot katru pilsētu ar katru, iegūstam ne vairāk kā 6 ceļus (skat. A3.30. zīm.), kas ir pretrunā ar uzdevumā doto. Skaidrs, ka, ja Lanlandē būtu vēl mazāk pilsētu, tad būtu arī vēl mazāk ceļu.



A3.30.zīm.

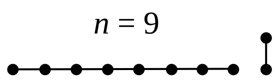
Pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 14 pilsētas: katrs ceļš savieno divas pilsētas, tāpēc 7 ceļi pavisam var savienot ne vairāk kā $2 \cdot 7 = 14$ pilsētas.

Uzdevuma nosacījumiem atbilstoši piemēri ar pilsētu skaitu *n* = 5; 6; 7; 8 parādīti A3.31. zīm.



A3.31.zīm.

Lai iegūtu piemērus pārējiem pilsētu skaitiem, rīkosimies šādi: piemērā, kad *n* = 8, „nojauksim" ceļu starp pēdējām divām pilsētām, izveidosim vēl vienu pilsētu un savienosim to ar pilsētu, uz kuru aizejošo ceļu nojaucām (skat. A3.32. zīm.).



A3.32.zīm.

Šo procesu turpinām, līdz paliek 7 pilsētu pāri (skat. A3.33. zīm.).

A3.33.zīm.

b) Vispirms pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 4022 pilsētas. Tā kā katram ceļam ir divi gali, tad, ja pavisam ir 2011 ceļi, tad pilsētu nevar būt vairāk kā $2 \cdot 2011 = 4022$.

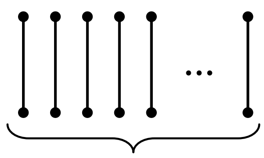
Ja $n \leq 63$, tad ceļu skaits $\leq \frac{63 \cdot 62}{2} = 1953 < 2011$.

Tātad pilsētu skaits varētu būt $64 \leq n \leq 4022$.

Vēl jāpierāda, ka šādas n vērtības ir iespējamas.

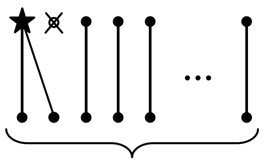
Pieņemsim, ka $n \geq 2012$. Gadījums, kad $n = 4022$, parādīts A3.34. zīm.

Augšējās rindas pirmo pilsētu apzīmēsim ar zvaigznīti un nosauksim par galvaspilsētu. Tālāk veiksim šādu operāciju: ņemsim pirmo nenosvītroto pilsētu no augšējās rindas (kas nesakrīt ar galvaspilsētu) un nosvītrosim to, bet ceļu, kas šo pilsētu savienoja ar apakšējās rindas pilsētu, vilksim uz galvaspilsētu (skat. A3.35. zīm.). Pēc katras šādas operācijas pilsētu skaits samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi var turpināt, kamēr augšējā rindā nenosvītrota palikusi tikai galvaspilsēta (skat. A3.36. zīm.). Tātad esam parādījuši, ka $2012 \leq n \leq 4022$.



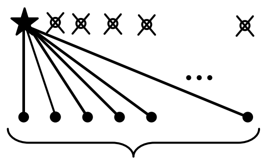
2011 ceļi

A3.34.zīm.



2011 ceļi

A3.35.zīm.



2011 ceļi

A3.36.zīm.

Tagad parādīsim, ka pilsētu skaits var būt no 64 līdz 2011.

Apakšējā rindā atdalīsim pirmās 63 pilsētas un tās neaiztiksim. Šīs 63 pilsētas kopā ar galvaspilsētu nosauksim par kodolu. Kodols ir grafs ar 64 virsotnēm, kurā jau ir novilktas 62 šķautnes. Tajā vēl var novilkt ne vairāk kā $\frac{64 \cdot 63}{2} - 63 = 1953$ šķautnes. Veiksim šādu operāciju: ņemsim patvaļīgu pilsētu, kas neatrodas kodolā un nosvītrosim to. Izdzēsīsim arī ceļu, kas šo pilsētu savieno ar galvaspilsētu. Lai nemainītos ceļu skaits, kodolā savienosim divas pilsētas, kas vēl nav savienotas ar ceļu. Tātad pilsētu skaits izpildot šādu darbību samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi procesu turpina, kamēr visas pilsētas, kas atrodas ārpus kodola, ir nosvītrotas. To vienmēr var izdarīt, jo pilsētu skaits, kas neatrodas kodolā, ir $2011 - 63 = 1948 < 1953$. Šādi iegūsim, ka $64 \leq n \leq 4022$.

3.6.5. Atbilde: 49 kamolus.

Ievērosim, ka 25% no 20 kamolu vērtības ir 5 kamolu vērtība, bet 10% no 5 kamolu vērtības ir puse no kamola vērtības. Tad varam sastādīt vienādojumu $5x + 0{,}5y = 12$, kas apraksta akcijas rezultātā nopirkto kamolu daudzumu. Visizdevīgāk meitenēm ir pirkt 20 kamolus un pēc tam apmainīt čeku un saņemt 25% no to vērtības. Lielākā iespējamā x vērtība ir 2, tātad meitenes divas reizes ir pirkušas pa 20 kamoliem. Tālāk iegūstam, ka y ir 4. Tas nozīmē, ka meitenes ir 4 reizes pirkušas pa 5 kamoliem.

Skolotāja meitenēm uzdeva nopirkt 49 dzijas kamolus. Parādīsim ar piemēru, kā meitenes rīkojās:

1) meitenes nopērk **40** kamolus un saņem atpakaļ 10 kamolu vērtību;

2) tagad meitenēm ir jānopērk vēl 9 skolotājas prasītie kamoli un no akcijas viņas vēl var nopirkt 10 kamolus;

3) meitenes pērk **15** kamolus un par katriem 5 kamoliem saņem atpakaļ pusi no viena kamola vērtības;

4) meitenēm tagad ir nauda 4 kamoliem, ko iedeva skolotāja un vēl 1,5 kamolu vērtība no akcijas;

5) meitenes pērk **5** kamolus (viņām vēl paliek puse no kamola vērtības) un uzrādot čeku saņem pusi no kamola vērtības;

6) meitenes nopērk vēl **1** kamolu.

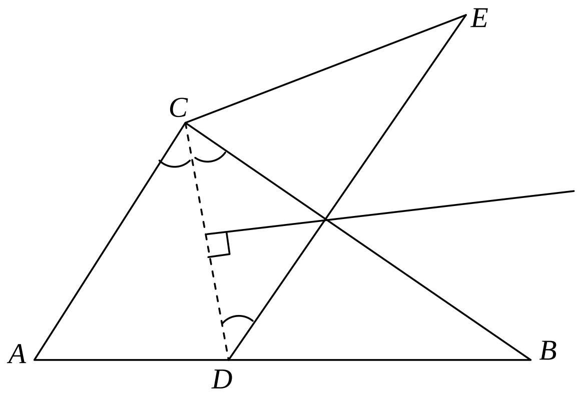
Tātad kopā meitenes nopirkušas $40+15+5+1=61$ kamolu, kas ir par 12 vairāk nekā 49.

Piezīme. Varam pārbaudīt, ka, gadījumā, ja skolotāja lūdza nopirkt 50 kamolus, meitenes, izmantojot akciju, varēja nopirkt, augstākais, 66 kamolus, t.i., par 16 vairāk; ja skolotāja lūdza nopirkt 48 kamolus, tad patiesībā meitenes varēja nopirkt, augstākais, 59 kamolus, t.i., par 11 vairāk.

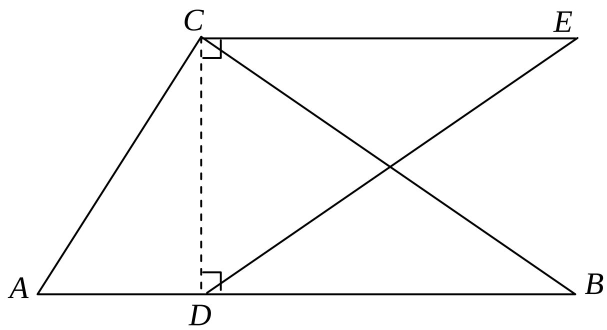
3.6.6. Atbilde: abos gadījumos uzdevumā prasīto var izpildīt.

a) Sagriezīsim trijstūri *ABC* pa bisektrisi *CD* (skat. A3.37. zīm.). Ieguvām divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski attiecībā pret bisektrises *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD = \angle CDE$, tad $AC \parallel DE$ (jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi) un *ACED* ir trapece ar pamatiem *AC* un *DE* (= *BC*).

b) Sagriezīsim doto trijstūri *ABC* pa tā augstumu *CD* (skat. A3.38. zīm.), kas atrodas trijstūra iekšpusē (vismaz viens trijstūra augstums atrodas tā iekšpusē). Iegūsim divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski pret novilktā augstuma *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD = \angle CDE = 90°$, tad $AD \parallel CE$ un *ACED* ir trapece ar sānu malām *AC* un *DE* (= *BC*).

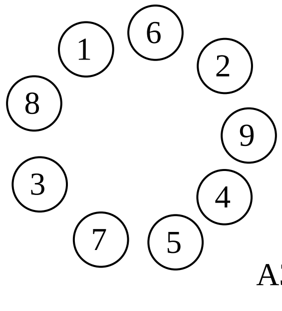


A3.37.zīm.



A3.38zīm.

3.6.7. Atbilde. Skaitļus prasītajā veidā var ierakstīt (skat. A3.39. zīm.).



A3.39.zīm.

Parādīsim vienu no veidiem, kā pakāpeniski var izveidot uzdevuma atrisinājumu.

Sastādīsim reizinājumu tabulu skaitļiem no 1 līdz 9:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	**6**	7	**8**	9
2			**6**	**8**	10	**12**	14	16	**18**
3				**12**	15	**18**	21	**24**	27
4					20	**24**	28	32	36
5						30	35	40	45
6							42	48	54
7								56	63
8									72
9									

Katru divu reizinātāju reizinājumu tabulā ierakstām vienu reizi, t.i., ja, piemēram, rūtiņā, kur jāraksta rezultāts reizinājumam 4×7, ierakstām 28, tad rūtiņu, kur jāraksta reizinājums 7×4, atstājam tukšu. Tāpat arī atstājam neaizpildītas rūtiņas, kur jāraksta reizinājumi 1×1, 2×2, 3×3 u.t.t. (tātad – skaitļu kvadrāti), jo šādi reizinājumi mums nav iespējami (pēc uzdevuma nosacījumiem, katrs skaitlis deviņstūra visās virsotnēs kopā sastopams tieši vienu reizi).

Redzam, ka daži reizinājumi tabulā sastopami divas reizes (piemēram, $1\cdot6=2\cdot3=6$; šie reizinājumi tabulā izcelti treknrakstā), bet pārējie – vienu reizi. Kopā ir 26 reizinājumi, kas neatkārtojas, un 5 – kas atkārtojas. Tā kā diagonāļu skaits deviņstūrim ir $\frac{9\cdot6}{2}=27<5+26$, tad uzdevumu, iespējams, var atrisināt.

Atcerēsimies, ka daudzstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra virsotnes, kas **nepieder pie vienas malas**. Tātad, lai skaitlis 6 uz diagonālēm neparādītos divas reizes, tā viens reizinātāju pāris, piemēram, 1 un 6, jānovieto blakus esošajās virsotnēs, kuras diagonāle nesavieno, bet otrs pāris – 2 un 3 – virsotnēs, kas neatrodas blakus (skaidrs, ka, ja gan 1 un 6, gan 2 un 3 atradīsies viens otram blakus, skaitlis 6 vispār netiks uzrakstīts ne uz vienas diagonāles). Līdzīgā veidā jānovieto arī pārējie skaitļu pāri, kurus sareizinot iegūst vienādus rezultātus. Visi šādi pāri ir:

$$6=1\cdot6=2\cdot3$$

$$8=1\cdot8=2\cdot4$$

$$12=2\cdot6=3\cdot4$$

$$18=2\cdot9=3\cdot6$$

$$24=3\cdot8=4\cdot6$$

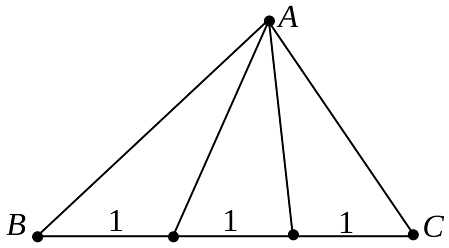
Tātad mums jānovieto dotie deviņi skaitļi tā, lai no katras rindiņas vismaz viens reizinātāju pāris atrastos blakus. Novietojot blakus pirmos reizinātāju pārus, varam iegūt šādu izkārtojumu:

– 3 – 8 – 1 – 6 – 2 – 9 – 4 – 5 – 7 –

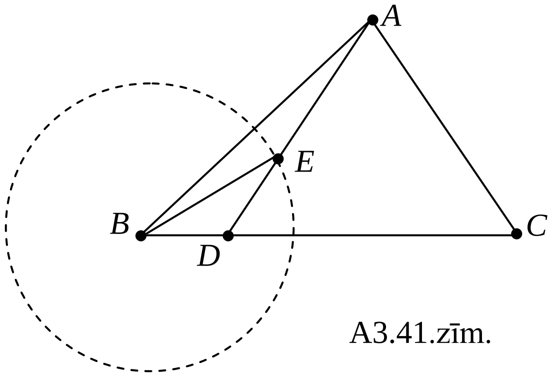
Sakārtojot šos skaitļus regulāra deviņstūra virsotnēs, iegūstam A3.39. zīm. attēloto situāciju.

3.6.8. Atbilde: doto trijstūri var sagriezt uzdevumā prasītajā veidā.

Ja dotajam trijstūrim ir mala, kuras garums ir vesels skaitlis, tad to var sagriezt vairākos trijstūros tā, kā parādīts A3.40. zīm.



A3.40.zīm.

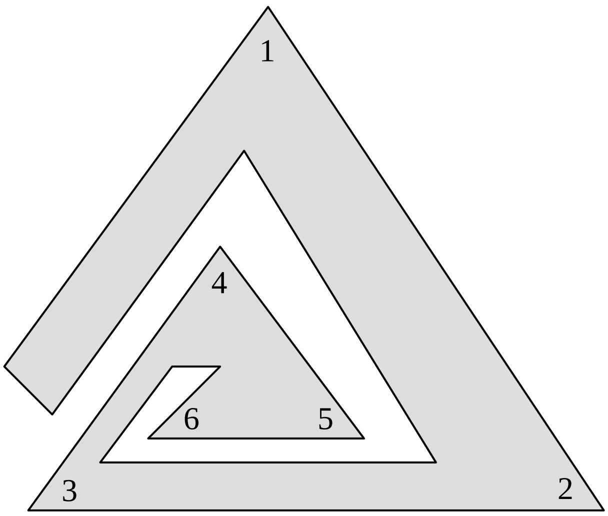


A3.41.zīm.

Ja dotajam trijstūrī nav malas, kuras garums ir vesels skaitlis, un mala *AB* ir garāka nekā 1 cm, tad uz malas *BC* atliksim tādu punktu *D*, lai *DC* garums būtu vesels skaitlis (ja $BC < 1$, tad uzskatīsim, ka punkts *D* sakrīt ar punktu *C*). Novilksim riņķa līniju ar centru punktā *B* un rādiusu 1 cm (skat. A3.41. zīm.). Tā kā punkts *D* atrodas riņķa iekšpusē, bet punkts *A* – ārpusē, tad riņķa līnija krusto nogriezni *AD* punktā *E*.

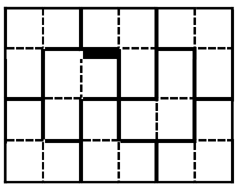
Esam ieguvuši trijstūrus *ABE* un *BED* ar malu $BE = 1$ cm, un trijstūri *ADC* (ja *C* un *D* nesakrīt) ar malas garumu *CD*, kurš ir vesels skaitlis. Trijstūri *ADC* var sagriezt tā, kā parādīts A3.40. zīm.

3.6.9. Atbilde: uzdevumā prasītais daudzstūris eksistē (skat., piem., A3.42. zīm.). Ar cipariem apzīmēti visi seši daudzstūra šaurie leņķi.



A3.42.zīm.

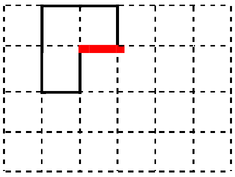
3.6.10. Atbilde: Pietiek ievietot 1 barjeru. Vienu piemēru, kā var iztikt ar 1 barjeru, var redzēt A3.43. zīm.



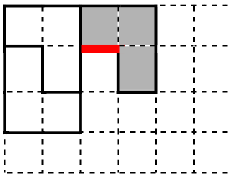
A3.43.zīm.

Pārliecināsimies, ka citu *V-sadalījumu* šim taisnstūrim nav.

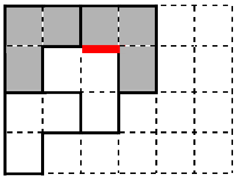
Ja mēs pirmo „stūrīti” ievietosim tā, kā parādīts A3.44. zīm., tad taisnstūri vispār nevarēsim sadalīt „stūrīšos”. Tātad pirmais stūrītis jānovieto, kā redzams A3.45. zīm. (skat. iekrāsoto „stūrīti”). Ja tālāk augšējā kreisajā stūrī ievietosim „stūrīti” tā, kā parādīts A3.45. zīm., tad redzam, ka atkal taisnstūri nevarēsim sadalīt prasītajā veidā. Tātad augšējā kreisajā stūrī „stūrītis jāievieto, kā parādīts A3.46. zīm., jo citos gadījumos radīsies viena izolēta rūtiņa.



A3.44.zīm.

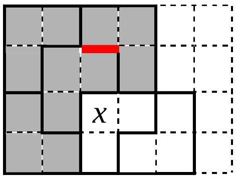


A3.45.zīm.

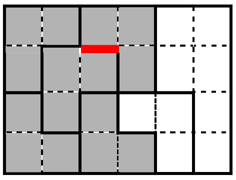


A3.46.zīm.

Nākamo apskatām kreiso apakšējo stūri. Ja tajā „stūrīti” ievietosim, kā parādīts A3.46. zīm., tad pa starp to un iepriekš iegūto izkārtojumu „stūrīti” varēs ievietot tikai vienā veidā (citos gadījumos radīsies vismaz viena izolēta rūtiņa), bet tad atkal tālāk taisnstūri sadalīt prasītajā veidā nevarēsim. Tātad kreisajā apakšējā stūrī „stūrīšu” izkārtojumam jābūt, kā parādīts A3.47. zīm.



A3.47.zīm.



A3.48.zīm.

Tālāk apskatām, kā var ievietot „stūrīti” vēl brīvajā taisnstūra apakšējā kreisajā malā – ja to darām, kā parādīts A3.47. zīm., tad nākamās rūtiņas izvietojums ir stingri noteikts un taisnstūri sadalīt „stūrīšos” tālāk nevar. Tātad šī „stūrīša” novietojumam jābūt, kā redzams A3.48. zīm. Ja tai blakus esošo stūrīti novietosim, kā redzams šajā zīmējumā, tad atkal tālāk sadalījumu iegūt nevaram. Tātad nākamie „stūrīši” jāievieto, kā bija redzams A3.43. zīm.

4. LATVIJAS 23. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Atbilde: $C = 0$, $D = 4$, $E = 3$, $I = 9$, $N = 5$, $P = 8$, $S = 1$, $V = 7$ (skat.A4.1.zīm.).

```
   79351
    4979
+   4979
--------
   89309
```

A4.1.zīm.

Risinājums: 1) Apskatot piekto kolonnu, redzam, ka $S+I+I=\overline{*I}$, tātad $S+I=10$. Savukārt no trešās kolonnas redzam, ka $E+I+I=\overline{*E}+x$ (x ir pārnesums no iepriekšējās šķiras, tāpēc tas var būt 0, 1 vai 2), tātad $I+I=\overline{*0}+x$. Savukārt zvaigznītes vietā var būt 1 vai 2. Redzam, ka iespējamās I vērtības ir 4 (ja $x=2$) vai 5 (ja $x=0$) vai 9 (ja $x=2$). Apskatīsim katru no šīm iespējām:

- Tā kā $S+I=10$ un dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tad $I \neq 5$.
- Pieņemsim, ka $I = 4$; tad no $S+I=10$ seko, ka $S = 6$. No otrās kolonnas redzams, ka pārnesums no trešās kolonnas noteikti ir 0 (jo ar I vērtību 4 tas nevar būt lielāks nekā 1). Tā kā E ir nepāra cipars, tad, lai no trešās kolonnas nerastos pārnesums, $E = 1$, bet no ceturtās kolonnas nevar rasties pārnesums. Tas iespējams tikai tad, ja N un V ir 2 un 3. Tā kā no otrās kolonnas pārnesums ir 1 (jo $I = 4$ un tad $D = 5$), tad pirmajā kolonnā iegūstam, ka, ja $V = 2$, tad $P = 3$ (tātad sakrīt ar N), bet, ja $V = 3$, tad $P = 4$ (tātad sakrīt ar I). Esam ieguvuši, ka $I \neq 4$.
- Tātad atliek, ka $\boldsymbol{I = 9}$ un $\boldsymbol{S = 1}$.

2) Apskatām otro kolonnu. Līdzīgi kā iepriekš, varam uzrakstīt sakarību $I+2D=\overline{*I}+y$, tātad $2D=\overline{*0}+y$. Tā kā pārnesums y no trešās kolonnas ir vismaz 1, tad D ir vai nu 4 vai 9. Tā kā cipars 4 jau ir izmantots, tad $\boldsymbol{D = 4}$ (skat. A4.2. zīm.)

```
   V9EN1
    49V9
+   49V9
--------
   P9EC9
```

A4.2.zīm.

3) Tā kā trešajā kolonnā $E+2\cdot 9=\overline{*E}+z$ jeb $18=\overline{*0}+z$, tad z pārnesumam no ceturtās kolonnas jābūt 2. Tātad ceturtajā kolonnā esošo sakarību varam pierakstīt: $N+2V+1=20+C$.

4) Apskatīsim, kāda ir mazākā iespējamā V vērtība. No iepriekšējās vienādības izsakām $2V=20-1+C-N$, tātad $2V=19+C-N$. Lai V būtu pēc iespējas mazs, arī C ir jābūt pēc iespējas mazākam, bet N – pēc iespējas lielākam. Mazākā iespējamā C vērtība ir 2 (jo 1 jau ir izmantots), bet lielākā iespējamā N vērtība ir 8 (jo 9 jau ir izmantots). Iegūstam, ka $2V \geq 19+2-8=9$, tātad $V \geq 4{,}5$; tā kā V ir jābūt veselam skaitlim, tad $V \geq 5$.

Jau iepriekš izspriedām, ka pārnesumam no ceturtās kolonnas ir jābūt 2, tas nozīmē, ka summai $N + 2V + 1$ ir jābūt vismaz 20, taču ievietojot summā $N = 8$ un $V = 5$, iegūstam, ka šīs summas vērtība ir 19, kas ir mazāk kā 20. Tā kā N vērtību palielināt vairs nevaram (jo 9 jau ir izmantots), tad palielinām V vērtību; tāpēc $V \geq 6$.

5) No pirmās kolonnas iegūstam, ka $P = V + 1$, pie tam $P \leq 8$ (jo cipars 9 jau ir izmantots), tātad $V \leq 7$.
6) Veicot pārbaudi (ir jāpārbauda tikai $V = 6$ un $V = 7$, redzam, ka der tikai $V = 7$; tad $P = 8$, $N = 5 + C$.
7) Vienīgie neizmantotie cipari, kuru starpība ir 5, ir 0 (= C) un 5 (= N).
8) Tā kā uzdevumā dots, ka E ir jābūt nepāra ciparam un vienīgais neizmantotais nepāra cipars ir 3, tad $E = 3$.

Piezīme. Ja uzdevums ir „Atrisiniet...”, tas nozīmē, ka jāatrod ***visi*** *atrisinājumi un jāpamato, ka citu nav. Šajā gadījumā atrisinājums ir viens vienīgais, kas seko no risinājuma.*

4.5.2. a) Atbilde: 18, 36, 54, 72, 90.

Risinājums: Skaitļi, kuru attiecība 1 : 2 : 3 : 4 : 5 nozīmē, ka otrais skaitlis būs 2 reizes lielāks kā pirmais skaitlis, trešais – 3 reizes lielāks kā pirmais skaitlis, ..., piektais – 5 reizes lielāks kā pirmais skaitlis.

Noskaidrosim, kāds var būt mazākis no pieciem izveidotajiem skaitļiem; mums jāaplūko skaitļi no 10 līdz 19, jo jau $20 \cdot 5 = 100$ nav divciparu skaitlis.

10 neder, jo $10 \cdot 2 = 20$, bet cipars 0 jau ir izmanots;

11 neder, jo cipars 1 nevar tikt izmantots vairāk kā vienu reizi;

12 neder, jo $12 \cdot 2 = 24$, bet cipars 2 jau ir izmantots;

13 neder, jo $13 \cdot 3 = 39$, bet cipars 3 jau ir izmantots;

14 neder, jo $14 \cdot 3 = 42$, bet cipars 4 jau ir izmantots;

15 neder, jo $15 \cdot 3 = 45$, bet cipars 5 jau ir izmantots;

16 neder, jo $16 \cdot 4 = 64$, bet cipars 6 jau ir izmantots;

17 neder, jo $17 \cdot 3 = 51$, bet cipars 1 jau ir izmantots;

18 der, jo $18 \cdot 2 = 36$, $18 \cdot 3 = 54$, $18 \cdot 4 = 72$ un $18 \cdot 5 = 90$.

Tātad meklētie skaitļi ir 18, 36, 54, 72, 90.

b) Atbilde: 9, 18, 27, 36, 45.

Risinājums: Noskaidrosim, kāds var būt pirmais skaitlis:

Tas nevar būt ≤ 4, jo tad otrais skaitlis būtu $\leq 4 \cdot 2 = 8$, trešais skaitlis – $\leq 4 \cdot 3 = 12$, ceturtais – $\leq 4 \cdot 4 = 16$ un piektais – $\leq 4 \cdot 5 = 20$, tātad kopā tiktu izmantoti ne vairāk kā 8 ciparu.

5 nevar būt, jo $5 \cdot 3 = 15$, bet cipars 5 jau ir izmantots;

6 nevar būt, jo $6 \cdot 2 = 12$, $6 \cdot 3 = 18$, bet cipars 1 var tikt izmantots tikai vienu reizi;

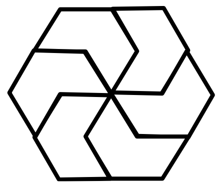
7 nevar būt, jo $7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 3 = 21$, bet cipars 1 var tikt izmantots tikai vienu reizi;

8 nevar būt, jo $8 \cdot 3 = 24$, $8 \cdot 4 = 32$, bet cipars 2 var tikt izmantots tikai vienu reizi;

9 der, jo $9 \cdot 2 = 18$, $9 \cdot 3 = 27$, $9 \cdot 4 = 36$, $9 \cdot 5 = 45$.

Tātad meklētie skaitļi ir 9, 18, 27, 36 un 45.

4.5.3. Skatīt, piemēram, A4.3.zīmējumu.



A4.3.zīm

4.5.4. Atbilde: 18 *l*.

Risinājums: Pieņemsim, ka katrā spainī ielietais ūdens daudzums ir *x l*, kur *x* ir vesels skaitlis. No tā, ka otrajā spainī ielietais ūdens aizņem $\frac{2}{3}$ spaiņa tilpuma, secinām, ka *x* ir jādalās ar 2, jo gan spaiņa tilpums, gan ielietais ūdens daudzums ir vesels skaits litru, tātad vesels skaits litru ir arī $\frac{1}{3}$ spaiņa, kurā nav ieliets ūdens, kas ir tieši puse no ar ūdeni piepildītās spaiņa daļas. Līdzīgi spriežam arī par trešo spaini, kur *x* ir jādalās ar 3. Ja *x* dalās gan ar 2, gan ar trīs, tad tam ir jādalās ar 6: tātad mazākais vienā spainī ielietais daudzums ir 6 *l*, bet mazākais mucas tilpums var būt 18 *l*.

Nepieciešams veikt pārbaudi, lai pārliecinātos, ka aprakstītā situācija ir iespējama. Pārbaude parāda, ka mucas tilpums var būt 18 *l*: tad pirmā spaiņa tilpums ir 12 *l*, otrā spaiņa tilpums ir 9 *l*, bet trešā spaiņa tilpums ir 8 *l*.

4.5.5. Labās kabatas saturu ne vienmēr var sadalīt divās vienādi vērtīgās kaudzītēs: var gadīties, ka kabatā ir, piemēram, viena 50 santīmu monēta un 48 viensantīma monētas (50 santīmu monētu vairs nevar sadalīt sīkāk).

Kreisās kabatas saturu vienmēr var sadalīt tādās kaudzītēs. Apskatīsim riņķa līniju, kas sadalīta 98 vienādās daļās; sauksim tās par vienībām. Uzskatīsim, ka viena šāda vienība atbilst 1 santīmam. Tad dažus dalījuma punktus nokrāsosim sarkanus tā, lai **katrs loks** starp diviem blakus esošiem sarkaniem punktiem **atbilst tieši vienai monētai** Jāņa kreisajā kabatā (t.i., ja Jānim ir viensantīma monēta, jābūt nokrāsotiem diviem blakusesošiem dalījuma punktiem, ja ir piecsantīma monēta, tad jābūt diviem blakusesošiem sarkaniem punktiem, starp kuriem ir 5 vienības utml.). Tā kā pavisam ir 50 monētas, tad ir nokrāsoti tieši 50 punkti. Tā kā pavisam ir 98 dalījuma punkti, tad noteikti var atrast divus tādus sarkanus punktus, kas ir viena diametra galapunkti. Tad vajadzīgās kaudzītes iegūstam, vienā ņemot monētas, kas atbilst pusriņķim uz vienu pusi no šī diametra, bet otrā – kas atbilst otram pusriņķim.

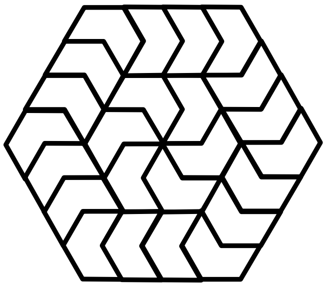
4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Atbilde: Piemēram, 5829134670 (pavisam šādu skaitļu ir 5454).

Risinājums: Tā kā $2010 = 10 \cdot 201 = 10 \cdot 3 \cdot 67$, tad meklētajam skaitlim jādalās ar skaitļiem 10, 3 un 67.

Aplūkosim dalāmības pazīmes: lai skaitlis dalītos ar 10, tā pēdējam ciparam ir jābūt 0; lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai ir jādalās ar 3. Visu desmit ciparu summa ir 45, kas dalās ar 3. Tātad jebkurš no visiem desmit cipariem sastāvošais skaitlis dalīsies ar 3. Atliek atrast skaitli, kas dalīsies ar 67. Šo skaitli var meklēt kā sastāvošu no atsevišķiem blokiem, kur katra bloka skaitis dalās ar 67, piemēram, 67, $134 = 67 \cdot 2$, $5829 = 67 \cdot 87$.

4.6.2. Skatīt, piemēram, A4.4.zīmējumu.



A4.4.zīm.

4.6.3. Atbilde: 25 santīmus.

Risinājums: Pieņemsim, ka viena pildspalva maksā *x* santīmus. Tad 16 pildspalvas maksā $16 \cdot x$ santīmus jeb 100 : *x* latus (pēc uzdevuma nosacījumiem). Lai varētu sastādīt vienādojumu, izsakām otro izteiksmi santīmos: iegūstam, ka 16 pildspalvas maksā 100 · (100 : *x*) = 10000 : *x* santīmus jeb $16 \cdot x$.

Tātad esam ieguvuši vienādojumu $16 \cdot x = 10000 : x$. Izmantojot proporcijas pamatīpašību, varam izteikt, ka $16 \cdot x \cdot x = 10000$ jeb $x \cdot x = 625$. Tā kā *x* ir vienas pildspalvas cena, tad tam jābūt pozitīvam skaitlim; tāpēc *x* = 25.

4.6.4. Virknes sākums ir 11, 4, 7, 13, 16, 13, 16, ... Redzam, ka sākot ar ceturto locekli, virkne ir periodiska: pāra vietās visi locekļi ir 13, bet nepāra – 16. Tā kā 2010 ir pāra skaitlis, tad šajā vietā virknē ir skaitlis 13.

4.6.5.Atbilde: divas bumbiņas.

Risinājums: Vispirms ievērosim, ka uz labā svaru kausa katra bumbiņa ir smagāka nekā tās pašas krāsas bumbiņa uz kreisā svaru kausa, pretējā gadījumā, samainot tās vietām, svaru stāvoklis nemainītos. Ja uz katra svaru kausa būtu uzliktas trīs vai vairāk bumbiņas, tad, samainot vietām divas vienas krāsas bumbiņas, kurām masas starpība ir vismazākā, atkal nekas nemainīsies. Tātad uz katra kausa var būt ne vairāk kā divas bumbiņas. Ja uz kausiem ir pa 2 bumbiņām, tad vienas krāsas bumbiņu masu starpībām jābūt vienādām.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Apzīmēsim meklējamos divciparu skaitļus ar $\overline{ab} = 10a + b$ (ar *a* un *b* apzīmējam attiecīgi katra skaitļa pirmo un otro ciparu). Atbilstoši uzdevumā dotajai sakarībai, iegūstam vienādojumu

$$(a+b) + ab = 10a + b.$$

Pārnesam visus saskaitāmos uz vienādojuma kreiso pusi un savelkam līdzīgos locekļus:

$$a + b + ab - 10a - b = 0$$

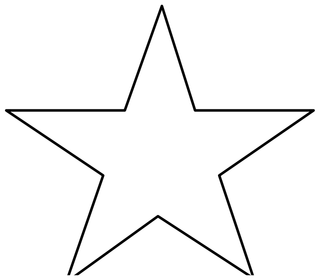
$$ab - 9a = 0$$

Iznesot pirms iekavām a, iegūstam $a(b-9)=0$.

Reizinājums var būt vienāds ar 0 tad un tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tā kā divciparu skaitļa pirmais cipars nevar būt 0, tad $a \neq 0$. Tātad atliek, ka $b-9=0$, no kurienes $b = 9$.

Esam ieguvuši, ka minētā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, t.i. 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. Viegli pārliecināties, ka visi šie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus.

4.7.2. Skatīt, piemēram, A4.5.zīmējumu.



A4.5.zīm.

4.7.3. Atbilde: Trīs dažādos veidos.

Visi dažādie sadalījumi atšķirsies ar saskaitāmo skaitu, tāpēc jānoskaidro, cik pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi summā var dot 51. Tā kā $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 > 51$, tad vairāk kā 9 saskaitāmie būt nevar.

Apskatīsim k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu, ar n apzīmēsim mazāko no šiem skaitļiem. Tad

$$n+(n+1)+(n+2)+...+(n+k-1)=51,$$

$$n\cdot k+\left(1+2+...+\left(k-1\right)\right)=51,$$

$$n\cdot k+\frac{k(k-1)}{2}=51.$$

Sareizinot abas vienādojuma puses ar 2, iegūstam

$$2n\cdot k+k(k-1)=102.$$

Iznesam k pirms iekavām:

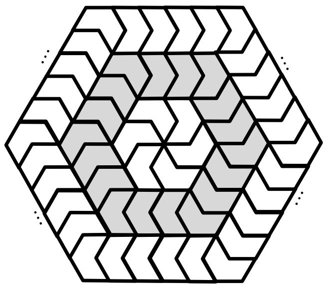
$$k(2n+k-1)=102.$$

Tātad 102 jādalās ar k.

Skaitlis 102 dalās ar 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102. Tā kā $2 \leq k \leq 9$, tad k var būt tikai 2, 3 un 6.

Ja $k = 2$, tad atbilstošā summa ir $51=25+26$; ja $k = 3$, tad atbilstošā summa ir $51=16+17+18$; ja $k = 6$, tad atbilstošā summa ir $51=6+7+8+9+10+11$.

4.7.4. Griešanu sāksim no sešstūra centra, kā parādīts A4.6. zīmējumā; katrā nākamajā joslā vienā rindā ir par 2 figūriņām vairāk nekā iepriekšējā slānī.



A4.6.zīm.

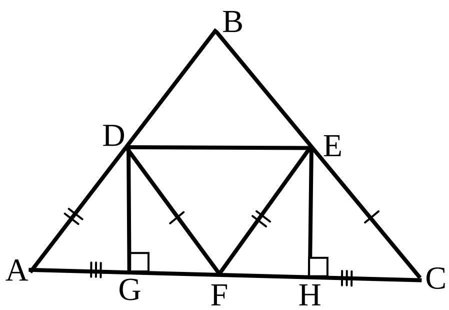
4.7.5. Atbilde: Prasīto izdarīt nevar.

Risinājums: Aplūkosim viena pāra skaitļu starpības iespējamo izmaiņu pēc kalkulatora vienas (jebkuras no abām) operācijas izpildes: ja pirms operācijas izpildes starpība ir $(b-a)$, tad pēc operācijas šī starpība ir $(b-2)-(a+1)=(b-1)-(a+2)=(b-a)-3$. Tātad pēc vairāku operāciju izpildes skaitļu starpība no sākotnējās var atšķirties tikai par skaitļa 3 daudzkārtni (t.i., dalot ar 3, šīs starpības visu laiku dod vienu un to pašu atlikumu). Ievadāmā skaitļu pāra starpība 30 – 1 = 29 dod atlikumu 2, dalot ar 3, savukārt iegūstamā skaitļu pāra starpība 17 – 13 = 4 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tātad no skaitļu pāra (1; 30) nav iespējams iegūt pāri (13; 17).

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Ja palielina daļas saucēju (skaitītāju nemainot), tad daļas vērtība samazinās, tāpēc $\frac{a}{a+1}>\frac{a}{a+b+1}$ un arī $\frac{b}{b+1}>\frac{b}{a+b+1}$. Saskaitām abas šīs nevienādības: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{a+b+1}=\frac{a+b}{a+b+1}$, k.b.j.

4.8.2. Savienojot punktus *D*, *E* un *F*, iegūstam visas trīs trijstūra *ABC* viduslīnijas (skat. A4.7. zīm.).



A4.7.zīm.

Tā kā trijstūra viduslīnija ir vienāda ar pusi no tās trijstūra malas garuma, kurai tā ir paralēla, tad *AD* = *FE*, *DF* = *EC* un *AF* = *FC*. Tātad $\Delta ADF=\Delta FEC$ (*mmm*). Nogriežņi *DG* un *EH* ir atbilstošie augstumi šajos trijstūros, tātad punkti *G* un *H* ir atbilstošie augstumu pamati, tātad *GF* un *HC* ir atbilstošie nogriežņi, tāpēc ir vienādi.

4.8.3. Atbilde: Var sagriezt tad un tikai tad, ja *n* ir pāra skaitlis.

Regulārs sešstūris ar malas garumu n sastāv no $6n^2$ vienādmalu trijstūrīšiem ar malas garumu 1. Ja n ir nepāra skaitlis, tad $6n^2$ nedalās ar 4. Tāpēc regulāru sešstūri, kura malas garums ir nepāra skaitlis, nevar sagriezt dotā veida figūriņās.

Regulāru sešstūri, kura malas garums ir pāra skaitlis, vienmēr var sagriezt dotā veida figūriņās: skat. 4.7.4. uzdevuma risinājumu.

4.8.4. Atbilde: a) 6; **b)** 4.

Risinājums: Uzrakstīsim visus divciparu skaitļus, kas dalās ar 17 vai 23. Tie ir 17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92.

a) Ja pirmais cipars rindā ir 9, tad nākamie cipari noteikti ir 92346... Pēc sešinieka var sekot vai nu 8 vai 9.

Aplūkosim šīs abas iespējas:

Ja 8, tad nākamie cipari ir ...8517 un virkni turpināt vairs nevar.

Tātad, ja aiz 6 ir vismaz 5 cipari, tad tie var būt tikai ...692346... Redzam, ka virkne ir periodiska ar periodu 5, tātad 2010. cipars, tāpat kā piektais cipars, ir 6.

b) Ja pēdējais cipars ir 1, tad iepriekšējie cipari var tikt noteikti vienā vienīgā veidā un šie cipari ir ...692346851. Redzams, ka ciparu virkne (92346) būs periods. Tātad pirmais skaitlis būs tāds pats, kā 2006., tas ir cipars 4.

4.8.5. Atbilde: $N = 5$.

Risinājums: Pamatojam, ka N nevar būt 6 (līdz ar to arī vairāk). Aplūkojam lampiņu ar kārtas numuru 6. Šo lampiņu ietekmē slēdžu ar numuriem 2 un 3 pārslēgšana. Lai būtu ieslēgta lampiņa ar numuru 2, slēdzis ar numuru 2 ir jāpārslēdz nepāra skaita reižu, tāpat arī, lai būtu ieslēgta lampiņa ar numuru 3, slēdzis ar numuru 3 ir jāpārslēdz nepāra skaita reižu. Ja lampiņas Nr. 2 un 3 ir ieslēgtas, tad slēdži ar numuriem 2 un 3 kopā ir slēgti pāra skaitu reižu. Katra no šīm pārslēgšanām ietekmē arī lampiņu ar numuru 6 un citi slēdži šo lampiņu neietekmē, tāpēc tā būs izslēgta.

Atliek parādīt piemēru, kā var realizēt slēgšanu pie $N = 5$: lai ieslēgtu visas lampiņas no 2 līdz 5, pa vienai reizei jāieslēdz slēdži 2 (ieslēgsies arī lampiņa ar numuru 4), 3 un 5.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Pārveidojam pierādāmo nevienādību:

$$x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0;$$

$$x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0;$$

$$(x-y)(x^3 - y^3) \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo izpildās pie visiem iespējamajiem gadījumiem:

1) ja $x > y$, tad $x^3 > y^3$, jo $y = x^3$ ir augoša funkcija un abi reizinātāji ir pozitīvi (divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs);

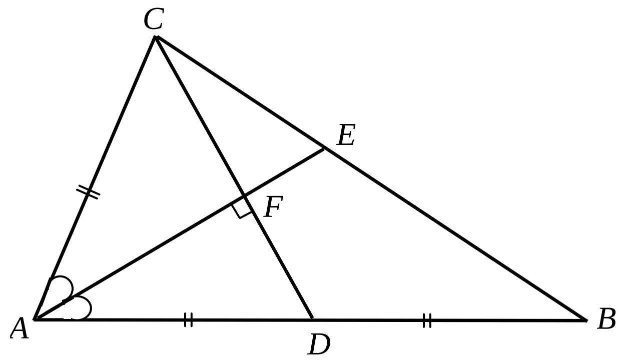
2) ja $x < y$, tad $x^3 < y^3$ un abi reizinātāji ir negatīvi (divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs);

3) ja $x=y$, tad $(x-y)(x^3-y^3)=0$.

4.9.2. Atzīmēsim, ka norādītās mediāna un bisektrise nevar iziet no vienas virsotnes, jo tad šīs virsotnes leņķim būtu jābūt lielākam par 180°, bet tā nevar būt, jo trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

Pieņemsim, ka trijstūrī *ABC* apskatāmā bisektrise ir *AD*, bet mediāna *CE*; tās krustojas punktā *F* (skat. A4.8. zīm.). Tad *AF* ir bisektrise un augstums trijstūrim *ACE*; tātad šis trijstūris ir vienādsānu ar sānu malām *AC* = *AE*.

Tā kā *CE* ir mediāna, tad $AB=2AE=2AC$.



A4.8.zīm.

4.9.3. Noskaidrojam, kādam ir jābūt skaitlim *A*. Apskatām skaitļus, kas sastāv tikai no vieniniekiem un dalām ar 7:

$1:7=0$, atl. 1;

$11:7=1$, atl. 4;

$111:7=15$, atl. 6;

$1111:7=158$, atl. 5;

$11111:7=1587$, atl. 2;

$111111:7=15873$;

$1111111=1111110+1=\underbrace{111111}_{:7}\cdot 10+1 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 1;

$11111111=\underbrace{1111111}_{:7}\cdot 100+11 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 4;

$111111111=\underbrace{1111111}_{:7}\cdot 1000+111 \quad \Rightarrow$ dalot ar 7, atlikums ir 6;

u.t.t.

Ievērojam, ka atlikumi periodiski atkārtojas, tāpēc nākamais skaitlis, kas dalās ar 7, ir 111111111111. Secinām, ka skaitļa *A* vieninieku skaits dalās ar 6. Skaitli *A* var pierakstīt formā

$$A=111111\cdot 10^{6(k-1)}+111111\cdot 10^{6(k-2)}+\ldots+111111\cdot 10^{6(k-k)}=$$
$$=111111\cdot\left(10^{6(k-1)}+10^{6(k-2)}+\ldots+10^{6(k-k)}\right).$$

Tā kā skaitlis *A* vienmēr satur reizinātāju 111111, kas dalās ar 13 ($111111:13=8547$), tad arī skaitlis *A* dalīsies ar 13.

4.9.4. Ja 39-stūri varētu sadalīt 9 izliektos sešstūros, tad izliektā 39-stūra visus leņķus aizpildītu deviņu izliekto sešstūru leņķi. Tātad 39-stūra leņķu summai būtu jābūt ne lielākai par 9 sešstūru leņķu summu. Taču 39-stūra leņķu summa ir

$(39-2)\cdot 180° = 37\cdot 180°$, bet deviņu sešstūru leņķu summa ir $9\cdot(6-2)\cdot 180° = 36\cdot 180° < 37\cdot 180°$. Tātad 39-stūri nav iespējams sadalīt deviņos izliektos sešstūros.

4.9.5. Atbilde: Otrais spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru.

Risinājums: Sadalām rūtiņas pāros, kā parādīts A4.9.zīmējumā (viena pāra rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem). Otrais spēlētājs katrā gājienā iekrāso rūtiņu, kurā ierakstīts tas pats burts, kāds bija rūtiņā, kuru pirms tam iekrāsoja pirmais spēlētājs. Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena nebija izveidojies iekrāsots 2 × 2 rūtiņu kvadrāts, tad arī pēc otrā spēlētāja gājiena tas neizveidosies.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

A4.8.zīm.

5. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (NOVADA) KĀRTA

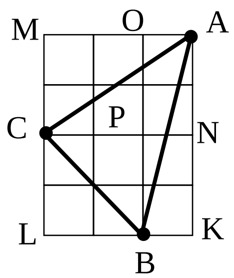
5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Atbilde: Jā, piemēram, skaitļi 7, 17, un 95 vieninieki.

Risinājums: Vienīgais veids, kā sadalīt skaitli 119 reizinātājos, ir $119 = 7 \cdot 17$. Tomēr šo reizinātāju summa ir $7 + 17 = 24 < 119$, tāpēc, lai būtu iespējama uzdevumā prasītā situācija, izmantosim skaitli 1 kā saskaitāmo $119 - 24 = 95$ reizes, jo skaitlis 1 kā reizinātājs iznākumu neietekmē.

5.5.2. Atbilde: 5 rūtiņas.

Risinājums: Ievērosim, ka trijstūra *ABC* laukumu var izteikt kā taisnstūra *AKLM* laukumu, no kura atņemti *nogriezto* trijstūru laukumi, t.i., $S_{ABC} = S_{AKLM} - S_{ACM} - S_{AKB} - S_{CBL}$ (skat. A5.1. zīm.).



A5.1.zīm.

$S_{AKLM} = 3 \cdot 4 = 12$ rūtiņas.

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot S_{ANCM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ rūtiņas.}$$

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot S_{AKBO} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ rūtiņas.}$$

$$S_{CBL} = \frac{1}{2} \cdot S_{CPBL} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ rūtiņas.}$$

Tātad $S_{ABC} = 12 - 3 - 2 - 2 = 5$ rūtiņas.

5.5.3. Atbilde: $A \to C \to F \to D \to B \to E \to G$**.**

Risinājums: Ievērojam trīs nosacījumus, kuriem jābūt spēkā visu ceļojuma laiku:

1. autobusā nevienā brīdī nedrīkst būt vairāk par 40 pasažieriem;
2. nevienā pieturā no autobusa nevar izkāpt vairāk pasažieru, nekā tobrīd ir autobusā (katrā pieturā pasažieri vispirms izkāpj un tikai tad iekāpj iekšā);
3. katru pilsētu var apmeklēt ne vairāk kā vienreiz.

Pirmā pilsēta ir *A* un, izbraucot no tās, autobusā ir 34 pasažieri, bet pēdējā pilsēta ir *G*, iebraucot tajā autobusā ir 28 pasažieri.

Otrā pilsēta var būt *C*, tad pēc maršruta *AC* veikšanas autobusā ir 35 pasažieri (apzīmēsim to *AC* (35)) vai arī otrā pilsēta var būt *E*, tātad *AE* (22).

Otrā pilsēta nevar būt *B*, jo *AB* (41) – pretruna ar 1.nosacījumu; otrā pilsēta nevar būt *D*, jo *AD* (45) – pretruna ar 1.nosacījumu; otrā pilsētta nevar būt *F*, jo *AF* (–1) – pretruna ar 2.nosacījumu.

Turpmāk aplūkojam, tikai iespējamos maršrutu turpinājumus:

1) *ACE* (23) → *ACEB* (30) vai *ACED* (34), neviens no šiem maršrutiem nav tālāk turpināms.

2) *ACF* (22) → *ACFD* (33) → *ACFDB* (40) → *ACFDBE* (28) → *ACFDBEG* (0)

3) *ACF* (22) → *ACFD* (33) → *ACFDE* (21) – maršruts nav turpināms.

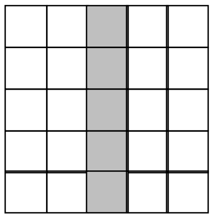
4) *AED* (33) → *AEDB* (40) →*AEDBF* (27) – maršruts nav turpināms.

5) *AED* (33) → *AEDC* (34) – maršruts nav turpināms.

Tātad vienīgais maršruts, kas apmierina visus noteikumus, ir $A \to C \to F \to D \to B \to E \to G$.

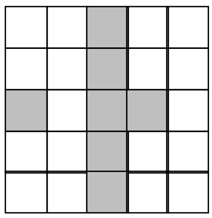
5.5.4. Jā, ir iespējams abos gadījumos.

a) Skatīt, piemēram, A5.2. zīmējumu.



A5.2. zīm.

b) Skatīt, piemēram, A5.3. zīmējumu.



A5.3. zīm.

5.5.5. Atbilde: Pēc 3 minūtēm.

Risinājums: Apzīmēsim raganas ar *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Ar trim minūtēm pietiek, ja sarunas raganu starpā notiek, piemēram, šādi:

1. minūte: *AB*, *CD*, *EF*, *GH*.

2. minūte: *AC*, *BD*, *EG*, *FH*; tagad raganas *A*, *B*, *C* un *D* zina visas viena otras burvestības, tāpat arī *E*, *F*, *G* un *H* iemācījušās viena otras burvestības.

3. minūte: *AE*, *BF*, *CG*, *DH*; tagad saruna notika starp 1. grupas un 2. grupas raganām, tādējādi visas raganas ir apguvušas visas burvestības.

Pamatosim, ka ar mazāk kā 3 minūtēm noteikti nepietiek. Katru burvestību pēc vienas minūtes var iemācīties augstākais 2 raganas, piemēram, raganas *A* burvestību pēc vienas minūtes prot pati ragana *A* un ragana, ar kuru sarunājas *A* – ragana *B*. Šo pašu burvestību pēc divām minūtēm prot augstākais 4 raganas – klāt vēl tādas divas raganas, kurām burvestību otrās minūtes laikā mācīja raganas *A* un *B*. Tā kā raganu ir $8 > 4$, tad ar 2 minūtēm noteikti nepietiek.

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Pieņemsim, ka ir iespējams naturālos skaitļus 1 līdz 21 sadalīt grupās tā, ka katrā grupā lielākais skaitlis ir vienāds ar pārējo skaitļu summu. Tad katrā grupā esošo skaitļu summa ir vienāda ar divkāršotu lielāko skaitli, tātad katrā grupā esošo skaitļu summa noteikti ir pāra skaitlis un, līdz ar to, arī visu skaitļu summa ir pāra skaitlis (vairāku pāra skaitļu summa). Taču $1+2+3+\ldots+21=231$ ir nepāra skaitlis, tātad pieņēmums ir nepareizs un skaitļus nav iespējams sadalīt grupās prasītajā veidā.

5.6.2. Atbilde: 96.

Risinājums: Noskaidrojam, cik skaitļu pavisam ir šajā virknē: tā kā katrs cipars ir izmantots tieši vienu reizi, tad desmittūkstošu cipars var būt jebkurš no pieciem dotajiem cipariem, tūkstošu – jebkurš no četriem neizmantotajiem cipariem, simtu – jebkurš no trim neizmantotajiem cipariem, desmitu – jebkurš no atlikušajiem diviem cipariem, bet vienu cipars ir tas cipars, kas nav ticis izmantots. Tātad pavisam virknē ir $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ skaitļi. Skaitlis 45321 ir lielākais no skaitļiem, kas sākas ar ciparu 4, tātad pēc šī skaitļa virknē ir tikai tādi skaitļi, kuru pirmais cipars ir pieci un tādu skaitļu pavisam ir $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. Tātad šajā virknē skaitlis 45321 atrodas $120-24=96$. vietā.

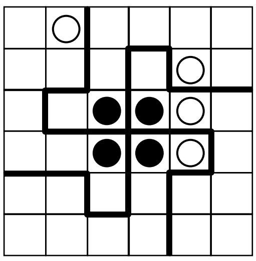
5.6.3. a) Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Gan 12, gan 8 dalās ar 4, tātad gan skaitļi $12x$ un $8y$, gan arī to starpība dalās ar 4. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 4, tad ar 4 ir jādalās arī vienādības labajai pusei, taču 2 ar 4 nedalās.

b) Jā, piemēram $x=4$ un $y=6$:

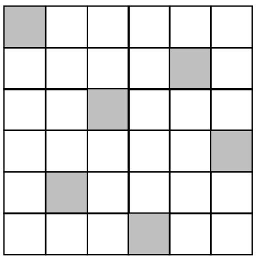
$$11\cdot4-7\cdot6=44-42=2.$$

5.6.4. Skatīt, piemēram, A5.4. zīmējumu.



A5.4.zīm.

5.6.5. Skatīt, piemēram, A5.5. zīmējumu.



A5.5.zīm.

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Atbilde: Summas pēdējais cipars ir 0.

Risinājums: Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas summas pēdējo ciparu šādā veidā:

$10^2+20^2+\ldots+90^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 0, saskaitāmo pavisam ir 9 un $0\cdot 9=0$.

$1^2+11^2+21^2+\ldots+91^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $1^2=1$, bet saskaitāmo pavisam ir 10, tātad $1\cdot 10=10$.

Līdzīgi $2^2+12^2+22^2+\ldots+92^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $2^2=4$, bet saskaitāmo ir 10, no kā $4\cdot 10=40$.

Tāpat secinām, ka arī visas pārējās saskaitāmo grupas ir 10 tādu skaitļu summas, kur visu saskaitāmo pēdējie cipari ir vienādi un visas summas pēdējais cipars ir 0.

Ir 10 grupas, katrai no tām summas pēdējais cipars ir 0, tātad uzdevumā dotās summas pēdējais cipars ir 0.

5.7.2. Atbilde: Tādu skaitļu ir 48.

Risinājums: Ievērojam, ka $125=5\cdot 5\cdot 5$. Tā kā skaitlis $(n+1)(n+2)(n+3)$ dalās ar 125, tad tam jādalās arī ar katru no skaitļa 125 dalītājiem, tatad vismaz vienam no reizinātājiem $n+1$; $n+2$; $n+3$ jādalās ar 5.

Skaitļi, kas dalās ar 5, viens no otra atšķiras vismaz par 5 (piemēram, apskatām skaitļus, kas dalās ar 5: 5, 10, 15, 20, 25 utt.). Savukārt $n+1$; $n+2$ un $n+3$ ir trīs pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tātad augstākais viens no tiem dalās ar 5, no kā secinām, ka tieši vienam no tiem jādalās ar 125. Skaitlis, kas dalās ar 125, ir uzrakstāms formā $125\cdot k$, kur $k=1,2,3,\ldots,16$, jo jau $125\cdot 17=2125>2011$.

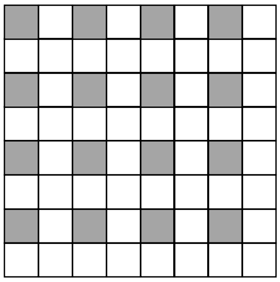
Skaitlis $125\cdot k$ var būt gan pirmais reizinātājs, gan otrais, gan trešais, tāpēc meklējamo skaitļu ir $16\cdot 3=48$.

5.7.3. Atbilde: Tieši viens no tiem.

Risinājums: Vispirms pierādām, ka kāds no skaitļiem ir 0. Ja neviens no tiem nav nulle, tad visu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājumi ir negatīvi, tātad jebkuri divi blakus esošie skaitļi ir ar pretējām zīmēm (jo vienīgi divu dažādzīmju skaitļu reizinājums ir negatīvs). Ja mēs skaitļus apzīmējam ar *a, b, c, d, e,* tad *a* un *b* ir ar pretējām zīmēm, *b* un *c* ir ar pretējām zīmēm, tātad *a* un *c* ir ar vienādām zīmēm. Līdzīgi varam pamatot, ka *c* un *e* arī ir ar vienādām zīmēm. Bet tātad arī *a* un *e* ir ar vienādām zīmēm un reizinājums $a\cdot e$ ir pozitīvs (jebkuru divu vienādzīmju skaitļu reizinājums ir pozitīvs) – pretruna.

Tātad, viens no skaitļiem ir 0, pieņemsim, ka $e=0$. Tad zīmes skaitļiem *a, b, c, d* var būt vai nu "+ - + -" vai "- + - +". Ievērojam, ka viens no reizinājumiem *abc*, *bcd* ir pozitīvs ("- + -") un viens negatīvs ("+ - +"). Pārējie trīs triju blakusstāvošu skaitļu reizinājumi satur reizinātāju *e*, tātad to vērtība ir 0. Tātad tieši viens no šiem reizinājumiem ir pozitīvs.

5.7.4. a) Jā, var. Skatīt, piemēram, A5.6. zīmējumu.



A5.6.zīm.

b) Nē, nevar. Kvadrātu 8×8 rūtiņas sadalām 16 kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Ja tiks aizkrāsotas 17 rūtiņas, tad noteikti atradīsies tāds 2×2 rūtiņu kvadrātiņš, kurā ir aizkrāsotas 2 rūtiņas, bet tās noteikti ir blakus rūtiņas, jo kvadrātiņā 2×2 katra rūtiņa ar katru ir blakusrūtiņas.

5.7.5. Atbilde: Godīgie iedzīvotāji ir 73%, blēži – 27% pilsētas iedzīvotāju.

Risinājums: Ieviešam apzīmējumus: ar g apzīmējam visus pilsētas godīgos iedzīvotājus, no tiem ar g_A (tāpat arī g_B, g_C, g_D) apzīmējam tos godīgos iedzīvotājus (% no visiem pilsētas iedzīvotājiem), kas balsoja par partiju *A* (attiecīgi *B*, *C*, *D*), tātad $g_A + g_B + g_C + g_D = g$; līdzīgi ar b, b_A, b_B, b_C, b_D apzīmējam blēžus (% no visiem pilsētas iedzīvotājiem).

Par partiju *A* ar „Jā" atbildēja tie godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par *A* un visi blēži, izņemot tos, kuri patiešām balsoja par partiju *A*. Tātad $g_A + b - b_A = 22\%$. Līdzīgi: $g_B + b - b_B = 33\%$, $g_C + b - b_C = 44\%$ un $g_D + b - b_D = 55\%$.

Saskaitām šīs vienādības:

$$g_A + b - b_A + g_B + b - b_B + g_C + b - b_C + g_D + b - b_D = 22\% + 33\% + 44\% + 55\%$$

Savelkaot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam

$g_A + g_B + g_C + g_D + 4\cdot b - b_A - b_B - b_C - b_D = 154\%$ jeb

$g + 4b - b = 154\%$,

$g + 3b = 154\%$,

$g + b + 2b = 154\%$.

No tā, ka katrs pilsētas iedzīvotājs ir vai nu godīgais vai blēdis un visi iedzīvotāji piedalījās pilsētas domes vēlēšanās, secinām, ka $g + b = 100\%$, tātad

$100\% + 2b = 154\%$ jeb $2b = 54\%$, no kurienes $b = 27\%$. Atliek, ka $g = 100\% - b = 100\% - 27\% = 73\%$.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Uzrakstām piecciparu skaitli A vispārīgā veidā kā $\overline{abcde}$, kur a ir desmittūkstošu šķiras cipars, b ir tūkstošu cipars, c – simtu, d – desmitu, bet e ir vienu cipars. Šo skaitli var izteikt $\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$. Vienādības labo pusi sadalām saskaitāmajos:

$$\overline{abcde} = 9999a + 999b + 99c + 9d + (a + b + c + d + e).$$

Samainām vietām skaitļa A ciparus, iegūstot skaitli B un līdzīgā veidā kā iepriekš sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu ciparu summa $a + b + c + d + e$ (noteikti citā secībā, bet, saskaitāmos mainot vietām, summa nemainās).

Saskaņā ar uzdevuma prasībām, skaitli A atņemam no skaitļa B un ievērojam, ka saskaitāmie $a + b + c + d + e$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās ar 9, jo satur kādu no reizinātājiem 9, 99, 999, vai 9999 (reizinājums dalās ar 9, ja ar 9 dalās kaut viens no reizinātājiem) un šī summa ir meklētā skaitļu A un B starpība.

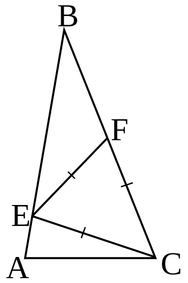
5.8.2. Tā kā $x = 1$ ir vienādojuma sakne, tad ievietojot vienādojumā x = 1, iegūstam pareizu vienādību $1 + p + q = 0$, no kurienes $p + q = -1$.

5.8.3. 1) Tā kā ΔCEF ir vienādmalu, tad $\angle FCE = \angle CEF = \angle EFC = 60°$ (skat. A5.7. zīm.).

2) Tad $\angle BFE = 180° - 60° = 120°$ (blakusleņķu summa ir $180°$).

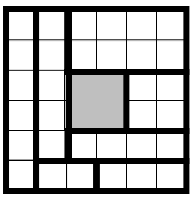
3) $\angle BEF = 180° - 30° - 120° = 30°$.

4) Tā kā $\angle BEF = \angle ABC$ un trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad ΔEBF ir vienādsānu un $BF = EF = FC$, no kurienes seko, ka punkts F ir malas BC viduspunkts, k.b.j.



A5.7.zīm.

5.8.4. Atbilde: Figūru var sagriezt, augstākais, 7 dažādos taisnstūros, skat., piemēram, A5.8. zīmējumu.



A5.8.zīm.

Risinājums: Aplūkojam, cik veidos var izgriezt dažāda lieluma taisnstūrus: taisnstūrus ar laukumu 1, 2, 3, 5 un 8 rūtiņas var izgriezt vienā vienīgā veidā; taisnstūrus ar laukumu 4 un 6 rūtiņas var izgriezt divos dažādos veidos; taisnstūri ar laukumu 7 rūtiņas nav iespējams izgriezt.

Ja doto figūru sagrieztu tādos taisnstūros, kuru laukums nepārsniedz 6 rūtiņas, tad to laukumu summa nepārsniegtu 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 < 32.

Figūru sagriežot kaut kādā skaitā taisnstūru, kāda iegūtā taisnstūra laukums būs vismaz 8 rūtiņas. Tāpēc, ja figūru sagrieztu vismaz 8 dažādos taisnstūros, tad to laukumu summa, ievērojot visu augstākminēto, būtu vismaz 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 8 = 33 > 32 – pretruna. Tāpēc 7 ir lielākais dažādo taisnstūru skaits, kuros figūru var sagriezt.

5.8.5. Atbilde: Par partiju *A* ir balsojuši 17%, par *B* – 28%, par *C* – 39%, par *D* – 16% iedzīvotāju.

Risinājums: Ieviešam apzīmējumus: ar g apzīmējam visus pilsētas godīgos iedzīvotājus, no tiem ar g_A (tāpat arī g_B, g_C, g_D) apzīmējam tos godīgos iedzīvotājus (% no visiem pilsētas iedzīvotājiem), kas balsoja par partiju *A* (attiecīgi *B, C, D*), tātad $g_A + g_B + g_C + g_D = g$; līdzīgi ar b, b_A, b_B, b_C, b_D apzīmējam blēžus (% no visiem pilsētas iedzīvotājiem).

Tā kā par partiju *D* neviens iedzīvotājs nav atbildējis ar „Jā”, tad par šo partiju ir balsojuši visi blēži, jo, ja kaut viens blēdis būtu balsojis par kādu citu partiju, tad uz jautājumu „Vai jūs balsojāt par partiju *D*?” viņš būtu atbildējis ar „Jā”, tātad $g_D = 0$. Par partiju *A* ar „Jā” atbildēja visi godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par *A* un visi blēži, tātad $g_A + b = 33\%$. Līdzīgi par partiju *B* balsoja $g_B + b = 44\%$ iedzīvotāju, bet par partiju C balsoja $g_C + b = 55\%$.

Saskaitot visas vienādības, iegūstam $g_A + g_B + g_C + 3b = 132\%$ jeb $g + b + 2b = 132\%$. Tā kā katrs pilsētas iedzīvotājs ir vai nu godīgais vai blēdis un visi iedzīvotāji tikai aptaujāti, tad $g + b = 100\%$. Tāpēc $100\% + 2b = 132\%$ jeb $2b = 32\%$ un $b = 16\%$, no kurienes $g = 100\% - b = 84\%$.

Tātad par partiju *A* ir balsojuši $33\% - 16\% = 17\%$ iedzīvotāju;

par partiju *B* ir balsojuši $44\% - 16\% = 28\%$ iedzīvotāju;

par partiju *C* ir balsojuši $55\% - 16\% = 39\%$ iedzīvotāju;

par partiju *D* ir balsojuši visi blēži, t.i., 16% iedzīvotāju.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Cenšamies atrast divas tādas argumenta vērtības, ar kurām funkcijas vērtības nav atkarīgas no koeficientiem *a* un *b*:

ja $x = 1$, tad $y = a + 1 + b = a + b + 1 = 2011 + 1 = 2012$,

ja $x = -1$, tad $y = a - 1 + b = a + b - 1 = 2011 - 1 = 2010$.

Tātad punkti $(1; 2012)$ un $(-1; 2010)$ pieder visu minēto funkciju grafikiem.

5.9.2. Atbilde: $\angle ABE = 15°$.

Risinājums: 1) Apzīmējam $\angle ABE = x$, tad $\angle ADE = 2x$,

2) $DA = DE$ (riņķa rādiusi ir vienādi), tātad ΔADE – vienādsānu (skat. A5.9. zīm.).

3) $\angle DAE = (180° - 2x) : 2 = 90° - x$

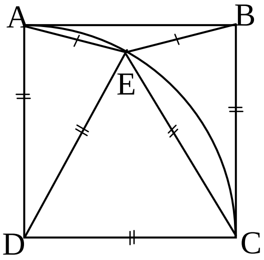
4) $\angle BAE = 90° - \angle DAE = 90° - (90° - x) = x$

5) ΔAEB – vienādsānu, jo $\angle BAE = \angle ABE$ un trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tātad $AE = BE$

6) $\angle EBC = 90° - x = \angle DAE$, tātad $\Delta AED = \Delta BEC$ (mlm).

7) $DE = CE$ (vienādu trijstūru atbilstošās malas ir vienādas), $DC = DE$ (riņķa rādiusi ir vienādi), tātad ΔDEC ir vienādmalu.

8) $\angle EDC = 60°$ (vienādmalu trijstūrī visi leņķi ir vienādi), tātad $\angle ADE = 90° - 60° = 30° = 2x$, no kā seko, ka $x = 30° : 2 = 15°$.



A5.9.zīm.

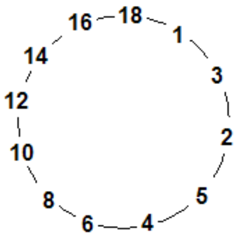
5.9.3. Atbilde: k = 12.

Risinājums: Apzīmējam pāra un nepāra skaitļu skaitu attiecīgi ar p un n. Tad, pēc uzdevuma nosacījumiem, iegūstam izteiksmi $p = 3n$ un visu aplī uzrakstīto skaitļu skaits ir $4n$ (n pāra un $3n$ nepāra skaits skaitļu).

Ar a apzīmējam vietu skaitu, kur divu blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2, tātad $2a$ ir vietu skaits, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, tāpēc skaitļu pāru pavisam ir $3a$. Tā kā katrs uzrakstītais skaitlis tiek ieskaitīts divos pāros pa vienai reizei, tad $3a$ ir pa apli uzrakstīto skaitļu skaits.

Tātad k var izteikt divos dažādos veidos – iegūstam vienādību $4n = 3a$, kur vienādības labā puse acīmredzami dalās ar 3, tātad ar 3 jādalās arī vienādības kreisajai pusei, tā kā 4 ar 3 nedalās, atliek, ka n dalās ar 3. Mazākais skaitlis, kas dalās ar 3 ir 3, tātad mazākais iespējamais k ir $3 \cdot 4 = 12$.

Piemērs (skat. A5.10. zīm.) parāda, ka 12 skaitļus var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.



A5.10.zīm.

5.9.4. Ja dotā vienādība izpildās un a, x, y un z ir naturāli skaitļi, tad $a > x$, $a > y$ un $a > z$. Ja a būtu mazāks vai vienāds par kādu no x, y vai z, tad vienādības labā puse noteikti būtu lielāka nekā vienādības kreisā puse.

Tā kā a, x, y un z ir naturāli skaitļi, tad ir spēkā nevienādības $a \geq x+1$, $a \geq y+1$ un $a \geq z+1$ jeb $a-1 \geq x$, $a-1 \geq y$ un $a-1 \geq z$.

Tā kā $a-1 \geq x$, tad $7^{a-1} \geq 7^x$, attiecīgi $7^{a-1} \geq 7^y$ un $7^{a-1} \geq 7^z$.

Tātad $7^a = 7 \cdot 7^{a-1} = 4 \cdot 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} > 7^x + 7^y + 7^z$ un nav tādu naturālu skaitļu a, x, y, z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

5.9.5. Atbilde: N = 7.

Risinājums: Ja Maija kādai sportistei būs zaudējusi visos četros braucienos, tad viņa būs zaudējusi šai sportistei arī kopvērtējumā. Tātad, lai Maija kopvērtējumā būtu pirmā, nedrīkst atrasties neviena tāda sportiste, kura būtu ātrāka par Maiju visos četros braucienos. Pie *N* = 7 tas ir iespējams, skatīt, piemēram, tabulu.

	1.brauciens		**2.brauciens**		**3.brauciens**		**4.brauciens**		**Kopvērtējums**	
	Laiks	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**
A	40	1	40,01	1	40,02	1	41	8	**161,03**	**2**
B	41,01	8	40,05	2	40,06	2	40,03	1	**161,15**	**3**
C	40,04	2	41,02	8	40,1	3	40,07	2	**161,23**	**4**
D	40,08	3	40,09	3	41,03	8	40,11	3	**161,31**	**5**
E	40,12	4	40,13	4	40,14	4	41,04	9	**161,43**	**6**
F	41,05	9	40,17	5	40,18	5	40,15	4	**161,55**	**7**
G	40,16	5	41,06	9	40,22	6	40,19	5	**161,63**	**8**
H	40,2	6	40,21	6	41,07	9	40,23	6	**161,71**	**9**
M	40,24	7	40,25	7	40,26	7	40,27	7	**161,02**	**1**

Pierādīsim, ka *N* nevar būt lielāks par 7. Ja *N* būtu 8, tad katrā braucienā tikai viena sportiste būtu zaudējusi Maijai un kopumā būtu ne vairāk kā četras sportistes no astoņām, kas kopvērtējumā varētu būt zaudējušas Maijai, tātad Maija kopvērtējumā varētu būt ieguvusi augstākais 5. vietu.

6. LATVIJAS 61. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Apskatām vienādojumu, kuram $b = 2011$, t.i., $x^2 + ax + 2011 = 0$. Pēc Vjeta teorēmas, ja x_1 un x_2 ir šī vienādojuma saknes, tad $x_1 x_2 = 2011$ un $x_1 + x_2 = -a$. Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, ja x_1 un x_2 ir veseli skaitļi, tad vai nu x_1 un x_2 ir 1 un 2011 (tad $a = -2012$), vai x_1 un x_2 ir -1 un -2011 (tad $a = 2012$). Tā kā $-2011 \leq a \leq 2011$, apskatāmajam vienādojumam nav veselu sakņu ne pie kādām pieļaujamajām a vērtībām. Tāpēc nav iespējams, ka **visiem** dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi.

6.9.2. 1) Pieņemsim, ka $\angle C = 90°$ un $AC > BC$ (skat. A6.1. zīm.).

2) $\angle CDA = 90°$ (ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru), tad CD ir ΔABC augstums un $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$.

3) Apzīmēsim $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h$.

4) Pēc Pitagora teorēmas $a^2 + b^2 = c^2$.

5) Nevar būt, ka $BD = BC$ (tad ΔCBD būtu vienādsānu ar taisnu leņķi pie pamata, kas nav iespējams), tāpēc atšķeltais nogrieznis $AD = BC = a$.

6) No $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ seko, ka $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{h}$. (1)

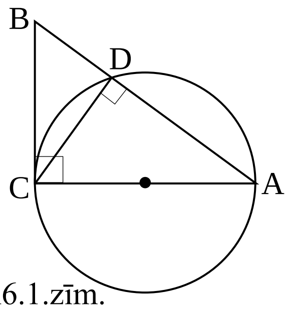
7) No $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ seko, ka $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{DA}{CD} \Rightarrow \dfrac{h}{c\text{-}a} = \dfrac{a}{h} \Rightarrow h^2 = a(c-a)$.

8) Ievietojot šo sakarību vienādībā (1), iegūstam

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{a(c-a)}} = \sqrt{\frac{(c-a)(c+a)}{a(c-a)}} = \sqrt{\frac{c}{a} + 1}.$$

9) Apzīmējot $\dfrac{c}{a} = k > 0$, iegūstam $k = \sqrt{k+1}$. Kāpinām vienādojuma abas puses kvadrātā, pārnesam visus saskaitāmos uz vienādojuma kreiso pusi un iegūstam $k^2 - k - 1 = 0$.

10) Iegūtā vienādojuma saknes ir $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Tā kā $k > 0$, tad meklētā attiecība ir $\dfrac{c}{a} = k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



A6.1.zīm.

Piezīme: *Iegūtā k vērtība ir „zelta šķēlums”.*

6.9.3. Meklēto 81 skaitli varam atrast, piemēram, šādā veidā konstruējot 9 grupas pa 9 skaitļiem katrā grupā.

1. grupa	**2.grupa**	**...**	***i*-tā grupa**	**...**	**9.grupa**
111	212		$\overline{i1i}$		919
122	223		$\overline{i2(i+1)}$, ja $i < 9$, vai $\overline{i2(i+1-9)}$, ja $i \geq 9$		921
133	234		$\overline{i3(i+2)}$, ja $i < 8$, vai $\overline{i3(i+2-9)}$, ja $i \geq 8$		932
...	...		...		...
199	291		$\overline{i9(i-1)}$, ja $i > 1$, vai 199, ja $i = 1$		998

Pārbaudi patstāvīgi, ka minētie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus.

6.9.4. Četrus atsvarus *A, B, C, D* pa pāriem var sadalīt trīs dažādos veidos: *AB* un *CD, AC* un *BD, AD* un *BC*. Tātad pavisam tika veiktas trīs svēršanas.

Pieņemsim, ka atsvaru masas ir $x > y > z > t$. Tad divu svēršanu rezultāti vienmēr ir noteikti viennozīmīgi: $x+y > z+t$ un $x+z > y+t$. Trešajā svēršanā ir iespējami abi rezultāti.

1) Ja $x+t > y+z$, tad atsvars ar masu x vienmēr ir bijis uz smagākā kausa, tāpēc ir vissmagākais, bet nevar noteikt visvieglāko atsvaru (visi pārēji ir 1 reizi bijuši uz smagākā kausa un 2 reizes – uz vieglākā).

2) Ja $x+t < y+z$, tad atsvars ar masu t vienmēr ir bijis uz vieglākā kausa, tāpēc ir visvieglākais atsvars, bet nevar noteikt vissmagāko atsvaru (visi pārēji ir 1 reizi bijuši uz vieglākā kausa un 2 reizes – uz smagākā).

Tātad, saskaitot cik reizes katrs atsvars ir bijis uz vieglākā kausa un cik reizes – uz smagākā, var atrast vai nu vissmagāko, vai visvieglāko atsvaru – to kurš visas trīs reizes bijis vai nu uz smagākā, vai vieglākā kausa. Taču abus divus atsvarus – gan smagāko, gan vieglāko – vienlaicīgi noteikt nevar.

6.9.5. Pieņemsim, ka spēlētāji ap galdu pulksteņrādītāja virzienā sēž secībā *A, B, C*. Saskaitīsim, cik kārtās katrs spēlētājs ir ieguvis 3 punktus. Spēlētājam *A* šo kārtu skaitu apzīmējam ar *a*, spēlētājam *B* – ar *b*, spēlētājam *C* – ar *c*. Tad kopējais spēlētāja *A* kopsummā iegūto punktu skaits ir $3a-2c-b$, spēlētāja *B* punktu skaits ir $3b-2a-c$, bet spēlētāja *C* punktu skaits ir $3c-2b-a$. Pieņemsim, ka spēlēs beigās spēlētājs *A* kopsummā ieguva 0 punktus (citos gadījumos spriedumi līdzīgi). Tātad $3a-2c-b=0$ jeb $b=3a-2c$. Tad spēlētāja *B* iegūto punktu kopsumma ir $3(3a-2c)-2a-c=7(a-c)$, bet spēlētāja *C* iegūto punktu kopsumma ir $3c-2b-a=3c-2(3a-2c)-a= \;=3c-6a+4c-a=7(c-a)$.

Tātad abu pārējo spēlētāju iegūto punktu kopsumma dalās ar 7, tāpēc nevienam spēlētājam nevar būt 48 punkti, jo 48 ar 7 nedalās. Spēlētāja B punktu summa var būt 49, ja, piemēram, A ir uzvarējis 7 kārtās, B ir uzvarējis 21 kārtā, bet C nav uzvarējis nevienā kārtā.

7. LATVIJAS 38. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Ievērojam, ka $EEE = E \cdot 111 = E \cdot 3 \cdot 37$. Tātad viens no skaitļiem AB vai CD ir 37 vai $37 \cdot 2 = 74$. Atrodam visus atrisinājumus, apskatot visas iespējamās E vērtības:

$E > 3$, lai $E \cdot 3$ iegūtu divciparu skaitli;

E = 4 ⇒	**AB = 12 un CD = 37**	**vai**	**AB = 37 un CD = 12**;
E = 5 ⇒	B = 5 (= E) – neder	vai	D = 5 (= E) – neder;
E = 6 ⇒	**AB = 18 un CD = 37**	**vai**	**AB = 37 un CD = 18**;
E = 7 ⇒	AB = 21 un CD = 37 (D = E) – neder vai		
	AB = 37 un CD = 21 (B = E) – neder;		
E = 8 ⇒	**AB = 24 un CD = 37**	**vai**	**AB = 37 un CD = 24 vai**
	AB = 12 un CD = 74	**vai**	**AB = 74 un CD = 12**;
E = 9 ⇒	AB = 27 un CD = 37 (B = D) – neder vai		
	AB = 37 un CD = 27 (B = D) – neder.		

7.5.2. Papildinām doto kvadrātu, tukšajās rūtiņās ierakstītos skaitļus apzīmējot ar *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f* (skat. A7.1. zīm.).

a	15	*b*
c	11	*d*
e	*f*	18

A7.1.zīm.

No tā, ka katrā katrā rindā un kolonnā ierakstīto skaitļu summām ir jābūt vienādām, iegūstam, ka $15+11+f=e+f+18$, no kurienes $e=15+11-18$, tātad $e=8$.

Līdzīgi $a+15+b=8+11+b$, no kurienes $a=8+11-15$, tātad $a=4$.

Ir zināmi visi trīs diagonālē ierakstītie skaitļi, tātad katrā rindiņā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $4+11+18=33$. No tā aprēķinām:

$b=33-4-15=14$,

$c=33-4-8=21$,

$d=33-11-21=1$,

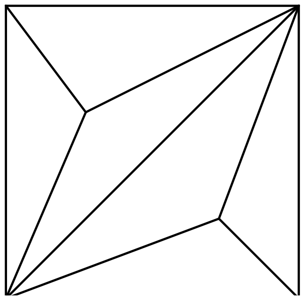
$f=33-8-18=7$.

Aizpildītā tabula parādīta A7.2. zīmējumā.

4	15	14
21	11	1
8	7	18

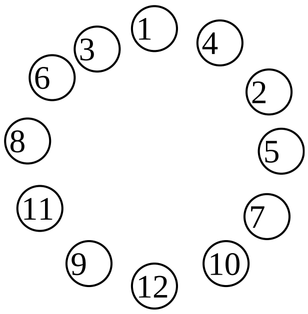
A7.2.zīm.

7.5.3. Prasīto var izdarīt, piemēram,kā parādīts A7.3. zīmējumā.



A7.3.zīm.

7.5.4. a) Jā, var. Skatīt, piemēram, A7.4. zīmējumu.



A7.4.zīm.

b) Atbilde: Nē, nevar.

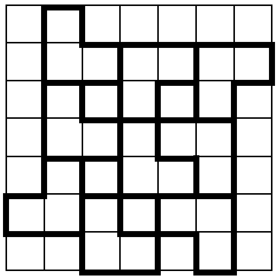
Risinājums: Izveidojam tabulu, kurā attēlojam, kādi skaitļi var atrasties blakus katram skaitlim 1 līdz 12:

1	4, 5
2	5, **6**
3	**6**, 7
4	1, 7, 8
5	1, 2, 8, 9
6	2, 3, 9, 10
7	3, 4, 10, 11
8	4, 5, 11, 12
9	5, 6, 12
10	**6**, 7
11	7, 8
12	8, 9

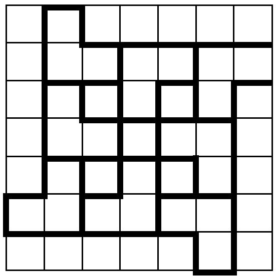
Pievēršam uzmanību skaitlim 6: tas ir viens no diviem iespējamajiem kaimiņiem trim skaitļiem – 2, 3 un 10, tātad katram no šiem skaitļiem noteikti ir jāatrodas blakus 6, bet tā kā katrs no skaitļiem (arī 6) ir izmantots tieši vienu reizi un katram skaitlim ir tieši divi kaimiņi, tad nav iespējams skaitļus 1 līdz 12 uzrakstīt pa apli tādā secībā, ka jebkuru divu blakus esošu skaitļu starpība ir 3 vai 4.

7.5.5. a) Skatīt A7.5. zīm.

b) Skatīt A7.6. zīm.



A7.5.zīm.



A7.6.zīm.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Atbilde: Nē, neeksistē.

Risinājums: Ja kaut viens no reizinātājiem ir pāra skaitlis, tad reizinājums arī ir pāra skaitlis. Aplūkojam, visus iespējamos gadījumus:

1) ja ***a*** un ***b*** – pāra skaitļi, tad ***a* + *b*** pāra;
2) ja ***a*** pāra skaitlis, *b* – nepāra, tad *a* + *b* nepāra;
3) ja *a* nepāra skaitlis, ***b*** – pāra, tad *a* + *b* nepāra;
4) ja *a* un *b* – nepāra skaitļi, tad ***a* + *b*** pāra;

Redzams, ka katrā no situācijām būs vismaz viens pāra reizinātājs, tātad reizinājums $a \cdot b \cdot (a+b)$ noteikti būs pāra skaitlis, un nav iespējams iegūt nepāra skaitli 20102011.

7.6.2. Atbilde: 26 kungi un 34 dāmas.

Risinājums: Aprēķinām, cik „sarakstes" pavisam notiek. Ja kungu skaitu apzīmējam ar *a*, bet dāmu skaitu ar *b*, tad ir spēkā sakarības $a + b = 60$ un $17a = 13b$. Otrās vienādības labā puse acīmredzami dalās ar 13, tātad ar 13 jādalās arī vienādības kreisajai pusei: tā kā 17 ar 13 nedalās, atliek, ka ar 13 jādalās reizinātājam *a*.

Pārbaudām *a* vērtības:

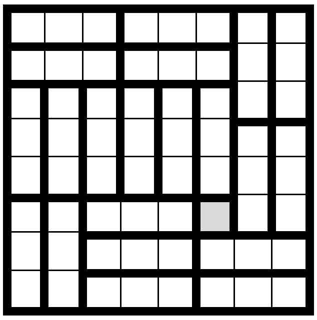
$a = 13$ (tad $b = 17$, bet $a + b = 30 < 60$),

$a = 26$ (tad $b = 34$ un $a + b = 60$ – der),

$a > 26$ (tad $b > 34$ un $a + b > 60$).

Redzam, ka visus uzdevuma nosacījumus apmierina tikai ***a* = 26** (kungi) un ***b* = 34** (dāmas).

7.6.3. Kvadrātā ar izmēriem 8 × 8 rūtiņas var izvietot 21 taisnstūri ar izmēriem 1 × 3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas (skat. A7.7. zīm.). Katrā no šiem taisnstūriem ir jābūt vismaz vienai zaļai rūtiņai. Tātad ir nepieciešams nokrāsot vismaz 21 rūtiņu.



A7.7.zīm.

Pierādīsim, ka ar 21 rūtiņu pietiek. Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1, 2 vai 3 tā, lai arī kā būtu novietots taisnstūrītis 1×3, tajā būtu ierakstīti visi skaitļi (skat., piemēram, A7.8. zīm). Ievērojam, ka „1” un „3” uzrakstīti 21 reizi, „2” ierakstīts 22 reizes. Tā kā jebkādā veidā novietotais taisnstūrītis 1×3 satur rūtiņu ar ciparu „1”, tad nokrāsojot zaļas visas rūtiņas ar ciparu „1”, nebūs iespējams atrast taisnstūri 1×3, kas nesatur nevienu zaļu rūtiņu.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

A7.8.zīm.

7.6.4. Aplūkojam, kā mainās tabulas skaitļu kopsumma pēc viena gājiena izpildes. Ja pirms gājiena visu skaitļu summa bija *S*, tad pēc gājiena tā ir $S-a-b+(5a-2b)+(5b-2a)=S+2(a+b)$. (Gājiena laikā no *S* tiek atņemti izvēlētie skaitļi *a* un *b*, bet to vietā tiek ierakkstīti jaunie skaitļi). Tātad summa ir izmainījusies par pāra skaitli. Tā kā sākumā tabulā visu skaitļu kopsumma ir pāra skaitlis 4, tad pēc vairāku gājienu izpildes, t.i., izmainot to par pāra skaitli, tā nevar kļūt vienāda ar nepāra skaitli 15.

7.6.5. Atbilde: Almai un Danai sākuma bija pa 14 konfektēm, Betai 50.

Risinājums: Pieņemsim, ka Almai un Danai sākumā bija *a* konfektes. Tabulā apkoposim informāciju par konfekšu skaita izmaiņām.

	Almai	Betai	Danai
Beta pazaudēja 1 konfekti	A	49	a
Alma atdeva pusi Betai	$\frac{a}{2}$	$49+\frac{a}{2}=\frac{98+a}{2}$	a
Beta atdeva pusi Danai	$\frac{a}{2}$	$\frac{98+a}{4}$	$a+\frac{98+a}{4}=\frac{5a+98}{4}$
Dana atdeva pusi Almai	$\frac{a}{2}+\frac{5a+98}{8}=\frac{9a+98}{8}$	$\frac{98+a}{4}$	$\frac{5a+98}{8}$

Tātad $\frac{9a+98}{8}=\frac{98+a}{4}\Rightarrow 9a+98=196+2a\Rightarrow 7a=98\Rightarrow a=14$.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Atbilde: 2, 5, 53, 59, 61 un 67.

Risinājums: Pirmskaitļi var beigties ar ciparu 1, 2 (tikai skaitlis 2), 3, 5 (tikai skaitlis 5), 7 un 9. Tā kā ir uzrakstīti seši skaitļi, tad starp šiem skaitļiem ir jāparādās visiem apskatītajiem pēdējiem cipariem. Tātad virknē noteikti ir skaitļi 2 un 5.

Tā kā mazākie pirmskaitļi ir 2, 3 un 5, tad mazākie skaitļi, kas uzrakstīti uz tāfeles ir vai nu **I)** 2, 3 un 5, vai **II)** 2 un 5.

Apskatīsim abus gadījumus:

I) Sestais skaitlis ir 5 + 14 = 19. Bet tad ceturtais skaitlis nevar sākties ar 3.

II) Ceturtais skaitlis sākas ar 5. Pirmskaitļi, kas sākas ar 5, ir 53 un 59. Ja ceturtais skaitlis ir 53, tad virkne izskatās šādi: 2, 5, x, 53, y, $x + 14$. Tad, lai visu skaitļu pēdējie cipari būtu atšķirīgi, vienīgā derīgā x vērtība ir 47. Bet tad $x + 14 = 61$ un y (piektais virknes loceklis) nevar sākties ar 6.

Ja ceturtais skaitlis ir 59, tad virkne izskatās šādi: 2, 5, x, 59, y, $x + 14$. Skaitlis $x = 47$ neder iepriekšminētā iemesla dēļ. Atliek $x = 53$. Iegūstam: 2, 5, 53, 59, y, 67. Vienīgā iespējamā y vērtība ir 61 un visa virkne: **2, 5, 53, 59, 61, 67**.

7.7.2. a) Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Ar $2s$ apzīmēsim attālumu starp pilsētām, ar t_1 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa pirmo pusi, ar t_2 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa otro pusi.

Tad $\frac{s}{t_1} = 30\ km/h$ jeb $s = 30t_1$;

$\frac{2s}{t_1 + t_2} = 40$ jeb $2s = 40t_1 + 40t_2$, t.i., $s = 20t_1 + 20t_2$ (ja zaļā mašīna visu ceļu veiks tikpat ilgi, cik sarkanā)

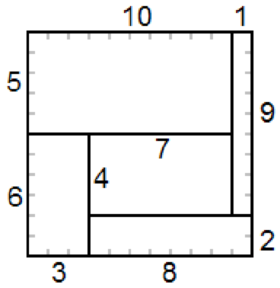
Tātad $30t_1 = 20t_1 + 20t_2$ un $t_2 = \frac{1}{2}t_1$, tāpēc otro ceļa pusi zaļajai mašīnai jāveic ar ātrumu $\frac{s}{t_2} = 2 \cdot \frac{s}{t_1} = 2 \cdot 30 = 60\ km/h$.

b) Atbilde: Nevar.

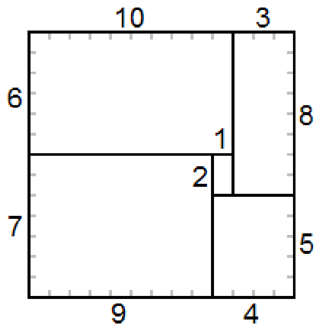
Risinājums: Brīdī, kad zaļā automašīna ir veikusi pusi ceļa, sarkanā automašīna jau ir veikusi visu ceļu un atrodas pilsētā *B*. Tātad zaļajai automašīnai ceļa otrā puse būtu jāveic momentāni, kas nav iespējams.

7.7.3. Ievērosim, ka $2011 = 2010 + 1$, un $13 = 3 + 10$. Tad uzdevuma prasības apmierinās skaitlis $20113 = 2010 \cdot 10 + 13 = 2011 \cdot 10 + 3 = (2010 + 1) \cdot 10 + 3 = $ $= 2011 \cdot 10 + 3$.

7.7.4. Kvadrāta malas garums var būt 11 cm vai 13 cm. Piemērus skatīt A7.9. un A7.10. zīm.



A7.9.zīm.

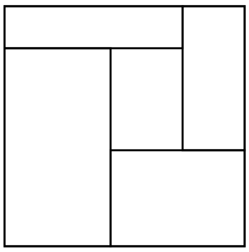


A7.10.zīm.

Uzdevumā prasīts tikai parādīt vienu piemēru, kā to var izdarīt, tad uzdevums ir atrisināts, ja ir uzzīmēts kāds no A7.9. vai A7.10. zīm. parādītajiem sadalījumiem.

Taču papētīsim šo uzdevumu sīkāk, mēģinot noskaidrot, kāds var būt iegūstamā kvadrāta malas garums.

Tā kā visu piecu taisnstūru malu garumi ir desmit dažādi skaitļi, tad katram taisnstūrim blakus malas ir dažāda garumu un nekādiem diviem taisnstūriem nav vienāda garuma malas. Tāpēc nevar gadīties, ka divi, trīs vai četri no šiem taisnstūriem veido lielāku taisnstūri. (Pārbaudiet to patstāvīgi!) Tātad, saliekot kvadrātu, taisnstūris izvietosies tā, kā parādīts A7.11. zīm.



A7.11.zīm.

Tātad kvadrāta katru malu veido divu taisnstūru malas, tāpēc iegūstamā kvadrāta malas garums var būt tikai skaitlis, ko var izteikt kā divu dažādu saskaitāmo summu četros veidos. Skaidrs, ka kvadrāta malas garums ir lielāks nekā 10 cm (jo vienam no tainstūriem vienas malas garums ir 10 cm, un tam blakus noteikti ir vēl vismaz viens cits taisnstūris).

$$11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6,$$

$$12 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7,$$

$$13 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7.$$

Skaitļus, kas lielāki nekā 13, nevar izteikt četros veidos kā divu saskaitāmo summu, kur neviens saskaitāmais nepārsniedz 10. Tātad meklējamā kvadrāta malas garums nepārsniedz 13 cm.

Kvadrātu ar malas garumu 12 cm arī nav iespējams salikt. Pieņemsim, ka tas izdevies un aplūkojosim, kā sadalītas kvadrāta pretējās malas. Skaitli 12 var iegūt kā divu pāra skaitļu summu vai divu nepāra skaitļu summu, pie tam ir tieši divas viena veida un divas otra veida summas.

a) Divas pretējās malas ir sadalītas pāra centimetrus garos nogriežņos. Tad otras divas malas ir sadalītas nepāra centimetrus garos nogriežņos. Tātad vidējā taisnstūra abi malu garumi ir pāra skaits centimetru, kas ir pretrunā ar to, ka starp visu piecu taisnstūru malu garumiem pavisam ir pieci pāra un pieci nepāra skaitļi.

b) Viena mala ir sadalīta pāra centimetrus garos nogriežņos, bet tai pretējā mala – nepāra centimetrus garos nogriežņos. Tad arī otru pretējo malu pārī viena mala ir sadalīta pāra centimetrus garos nogriežņos, bet otra – nepāra centimetrus garos nogriežņos. Šajā gadījumā vidējā taisnstūra abi malu garumi ir nepāra skaits centimetru un atkal iegūta pretruna.

Ir apskatītas visas iespējas, tātad kvadrātu ar malas garumu 12 cm nevar sadalīt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Kā sadalīt kvadrātus ar malas garumiem 11 cm un 13 cm, parādīts A7.9. un A7.10. zīm.

7.7.5. Uz taisnes izvēlamies 11 patvaļīgus punktus tā, lai attālums starp diviem blakus punktiem būtu 1 cm. Tad starp katriem diviem izvēlētajiem punktiem attālums centimetros ir vesels skaitlis. Tā kā katrs punkts ir nokrāsots vienā no desmit krāsām, tad no 11 punktiem vismaz divi ir nokrāsoti vienā krāsā (pēc Dirihlē principa). Tā kā attālums starp jebkuriem diviem izvēlētajiem punktiem ir vesels skaitlis centimetru, tad tie ir meklētie punkti.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. **a)** Piemēram, $8-3+5\cdot 2=15$.

b) Piemēram, $8:(3-5:2)=8:(3-\frac{5}{2})=8:\frac{1}{2}=8\cdot 2=16$.

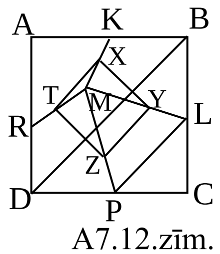
7.8.2. 1) Apzīmējam nogriežņu *MK*, *ML*, *MP* un *MR* viduspunktus attiecīgi ar *X*, *Y*, *Z* un *T* (skat. A7.12. zīm.).

2) $PL=\frac{1}{2}BD$ no viduslīnijas īpašības ΔBCD un $ZY=\frac{1}{2}PL$ no viduslīnijas īpašības ΔMPL, tātad $ZY=\frac{1}{2}PL=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BD\right)=\frac{1}{4}BD$.

3) Līdzīgi pierādām, ka $TX=\frac{1}{4}BD=ZY$ un $TZ=XY=\frac{1}{4}AC$.

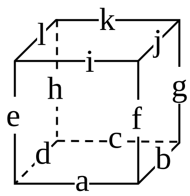
4) *AC* = *BD*, jo *ABCD* – kvarāts; tātad *TZ* = *XY* = *ZY* = *TX*, tātad *XYZT* – rombs.

5) Tā kā $BD\perp AC$ un $TX\parallel BD$, $XY\parallel AC$, tad $TX\perp XY$ un *TXYZ* ir kvadrāts, k.b.j.



A7.12.zīm.

7.8.3. Apzīmējam ierakstītos skaitļus kā parādīts A7.13. zīm.



A7.13.zīm.

Apzīmējam katrā skaldnē ierakstīto skaitļu summu ar S, tātad

$$S = a + b + c + d;$$

$$S = a + e + i + f;$$

$$S = b + g + j + f;$$

$$S = c + g + k + h;$$

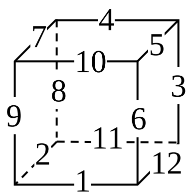
$$S = d + h + l + e;$$

$$S = i + j + k + l.$$

Saskaitot šīs vienādības abas puses, iegūstam

$$6S = 2(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l) =$$

$= 2 \cdot \dfrac{(1+12) \cdot 12}{2} = 12 \cdot 13$ un $S = 26$. Tātad vienīgā iespējamā uz skaldnēm uzrakstīto četru skaitļu summa ir 26. Kā to realizēt, parādīts A7.14. zīmējumā.



A7.14.zīm.

7.8.4. a) Atbilde: Nē, ne vienmēr.

Risinājums: Piemēram, ja Leonards izvēlējās skaitli 444, tad, pareizinot ar 2 un galā pierakstot sākotnējo skaitli, viņš ieguva skaitli 888444, bet tas ar 17 nedalās (888444 : 17 = 52261 atlikumā 7).

Piezīme: Jebkurš trīsciparu skaitlis, kas nedalās ar 17, der kā pretpiemērs.

b) Atbilde: Jā, dalās.

Risinājums: Apzīmējam sākotnējo skaitli ar x. Skaitlim $2x$ pierakstīt galā x ir tas pats, kas skaitlim $2x$ pierakstīt galā trīs nulles un tad tam pieskaitīt x. Bet trīs nulles pierakstīt ir tas pats, kas pareizināt ar 1000. Tātad Leonarda veikto operāciju var uzrakstīt kā: $2x \cdot 1000 + x$.

Tātad jauniegūtais skaitlis ir $2x \cdot 1000 + x = 2001x$. Skaitlis 2001 dalās ar 23 (2001 : 23 = 87), tātad arī jauniegūtais skaitlis $2001x$ noteikti dalās ar 23.

7.8.5. Atbilde: Uzvarēs Anna.

Risinājums: Uzvar pirmais spēlētājs, katrā gājienā atņemot no skaitļa tā pēdējo ciparu, tādējādi pēc sava gājiena iegūstot skaitli, kura pēdējais cipars ir 0. Tā kā otrais spēlētājs nedrīkst atņemt 0, tad pēc viņa gājiena noteikti paliek skaitlis, kura pēdējais cipars nav 0. Tāpēc pirmais spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu. Tā kā tiek iegūti tikai naturāli skaitļi un spēles gaitā tie samazinās, kādreiz tiks iegūts arī skaitlis 0. Tā kā tā pēdējais cipars ir 0, tas tiks iegūts pēc pirmā spēlētāja gājiena.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Vienādojumu pārveidojam kā:

$$\frac{1}{x^2+24}-\frac{1}{xy+24}=\frac{1}{xy+24}-\frac{1}{y^2+24}.$$

Vienādojam saucējus abās vienādojuma pusēs un iegūstam:

$$\frac{xy+24-x^2-24}{(x^2+24)(xy+24)}=\frac{y^2+24-xy-24}{(y^2+24)(xy+24)} \text{ jeb}$$

$$\frac{x(y-x)}{(x^2+24)(xy+24)}=\frac{y(y-x)}{(y^2+24)(xy+24)}.$$

Tā kā $x \neq y$, abas puses izdalam ar $(y-x)$ un pareizinām ar

$(xy+24)(x^2+24)(y^2+24) \neq 0$, jo x un y – naturāli skaitļi, iegūstot

$$x(y^2+24)=y(x^2+24).$$

Visus saskaitāmos pārnesam uz kreiso pusi un iegūstam

$$xy^2-x^2y+24x-24y=0.$$

Sagrupējam un iegūstam, ka

$$xy(y-x)-24(y-x)=0 \text{ jeb}$$

$$(xy-24)(y-x)=0.$$

Tā kā $x \neq y$, tad $y-x \neq 0$. Atliek, ka $xy-24=0$ jeb $xy=24$.

Šim vienādojumam naturālos skaitļos ir 8 atrisinājumi: (1; 24), (2; 12), (3; 8), (4; 6), (6; 4), (8; 3), (12; 2), (24; 1).

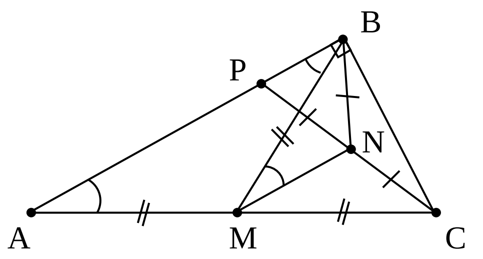
Veic pārbaudi patstāvīgi (nepieciešams pārbaudīt tikai pirmos četrus atrisinājumus, jo dotais vienādojums ir simetrisks attiecībā pret x un y) un pārliecinies, ka der visi atrisinājumi.

7.9.2. 1) Tā kā ΔABC un ΔPBC ir taisnleņķa, tad gan $AM = BM = CM$, gan $PN = BN = CN$ (skat. A7.15. zīm.), jo taisnleņķa trijstūrī mediānas, kas vilkta no taisnā leņķa virsotnes, garums ir puse no hipotenūzas (šo īpašību viegli pierādīt, izmantojot riņķī ievilktu taisnleņķa trijstūri).

2) ΔAMB ir vienādsānu, tātad $\angle MAB = \angle MBA$, jo pret vienādām malām atrodas vienādi leņķi.

3) MN ir ΔAPC viduslīnija, tāpēc $AP \parallel MN$ un $\angle ABM = \angle BMN$ kā iekšējie šķērsleņķi.

4) Tā kā $\angle BAM = \angle ABM$ un $\angle ABM = \angle BMN$, tad $\angle BAM = \angle BMN$, k.b.j.



A7.15.zīm.

7.9.3. Atbilde: Jā, var.

Risinājums. Aplūkojam vienādojumu $ax^2 - bx + c = 0$. Ievietojot $x = -1$ iegūst $a + b + c = 0$. Tātad, ja $a + b + c = 0$, tad $x = -1$ ir šī vienādojuma sakne. Ja pirmais rūķītis izvēlas tādus 3 skaitļus, kuru summa ir 0, tad, lai kā otrais rūķītis tos saliktu „#” vietās, vienādojumam noteikti būs vismaz viena racionāla sakne $x = -1$ un pirmais rūķītis vienmēr var panākt prasīto.

7.9.4. Atbilde: 3 skaitļi.

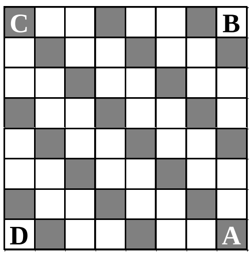
Risinājums: Apzīmējam kvadrātu starpību ar N tā, ka $x^2 - y^2 = N$. Pārveidojam vienādību, lietojot kvadrātu starpības formulu, iegūstot $(x - y)(x + y) = N$. Skaitļi $x - y$ un $x + y$ vienmēr būs vienas paritātes (abi pāra, vai abi nepāra), neatkarīgi no x un y vērtībām. Tātad, ja N ir pāra skaitlis, tad, gan $x - y$, gan $x + y$ ir pāra skaitļi un skaitlim N jādalās ar 4.

Ja N ir nepāra skaitlis, tad tas vienmēr ir izsakāms prasītajā veidā: izvēlamies x un y tā, lai $x + y = N$ un tie ir divi pāc kārtas sekojoši skaitļi, tātad to starpība ir 1.

Tātad, lielākais pēc kārtas sekojošu šādu skaitļu skaits ir trīs: $4k - 1$, $4k$, $4k + 1$.

Tādi skaitļi ir, piemēram, $11 = 6^2 - 5^2$, $12 = 4^2 - 2^2$ un $13 = 7^2 - 6^2$.

7.9.5. Lai atrisinātu uzdevutu starpību ar N. mu, noskaidrojam, kas raksturīgs *sienāža* gājieniem – iztēlojamies, ka *sienāzis* „sasmērējis pēdas” un, izdarot atļautos gājienus katrā rūtiņa kurā ir bijis, atstāj pēdu nospiedumus. Ievērojam, ka *sienāža* atstātie pēdu nospiedumi atrodas katrā trešajā diagonālē, kā parādīts A7.16. zīmējumā.



A7.16. zīm.

Kvadrāta stūra rūtiņas apzīmējam ar *B*, *C* un *D* un redzam, ka *sienāzis* no rūtiņas *A* nevar nonākt rūtiņās *B* un *D*, bet var nonākt rūtiņā *C*, ejot uz augšu pa diagonāli *AC*.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

Algebriski pārveidojumi – 1.1.1., 1.1.10., 3.1.5., 3.1.10., 3.3.4., 3.3.7., 3.5.4., 3.6.3., 4.7.3., 7.9.3.

Darbības ar mērvienībām – 1.1.3., 1.1.9., 1.2.5., 1.3.1., 1.4.3., 1.4.4., 1.4.7., 1.4.8.

Vienādojumi – 1.1.7., 1.1.8., 2.1.3., 2.4.2., 3.1.2., 3.1.3., 3.1.5., 3.1.7., 3.1.10., 3.2.3., 3.3.3., 3.3.4., 3.4.4., 3.4.6., 3.5.7., 4.6.3., 5.6.3., 5.7.3., 5.8.2., 5.9.3., 7.5.2., 7.9.1.

Vienādojumu sistēmas – 5.7.5., 5.8.5.

Nevienādības – 1.4.1., 1.4.7., 1.4.8., 3.4.10., 4.8.1., 4.9.1.

Ekstrēmu uzdevumi – 3.3.8.

Skaitļu virknes – 2.1.1., 2.3.1., 3.3.2., 4.6.4., 4.8.4.

Funkcijas un diagrammas – 1.3.6., 5.9.1., 6.9.1.

SKAITĻU TEORIJA

Aritmētika – 1.1.3., 1.1.8., 1.1.9., 1.2.1., 1.2.2., 1.2.6., 1.3.1., 1.3.1., 1.3.6., 1.4.2., 1.4.3., 1.4.4., 1.4.5., 1.4.7., 1.4.10., 2.1.2., 2.2.1., 2.2.3., 2.4.1., 3.1.1., 3.1.2., 3.3.4., 3.4.1., 3.4.5., 3.5.2., 3.5.4., 3.5.7., 4.5.1., 7.5.1., 7.8.1.

Naturālu skaitļu dalāmība – 1.2.2., 1.3.3., 2.1.5., 2.2.3., 2.5.1., 3.1.1., 3.2.1., 3.2.7., 3.3.1., 3.4.2., 3.5.1., 3.5.8., 4.5.2., 4.6.1., 4.9.3., 5.6.1., 7.9.4.

Pirmskaitļi, skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā – 3.1.8., 3.5.7., 3.6.2., 5.5.1., 7.7.1.

Skaitļa pieraksts – 1.1.2., 1.1.5., 1.2.3., 1.2.5., 1.2.7., 1.4.6., 2.1.1., 2.3.5., 2.5.1., 3.1.3., 3.1.8., 3.2.2., 3.2.9., 3.3.3., 3.6.2., 4.7.1., 5.8.1., 5.9.4., 6.9.3., 7.6.1., 7.7.3., 7.8.4.

Dirihlē princips – 3.2.5., 5.7.4., 7.7.5.

Invariantu metode – 3.4.4., 3.4.8., 4.7.5., 7.6.4.

Gadījumu pārlase – 2.2.1., 2.5.3., 3.2.2., 3.2.7., 3.4.10.

Skaitļi un kombinatorika – 3.3.8., 3.4.5., 5.7.1.

Skaitļi un ģeometrija – 1.1.6., 1.4.14., 7.8.3.

ĢEOMETRIJA

Figūru sagriešana un salikšana – 1.1.6., 1.2.4., 1.2.8., 1.4.9., 1.4.12., 1.4.13., 1.4.14., 2.1.4., 2.2.2., 2.3.3., 2.4.3., 2.4.4., 2.5.4., 3.1.4., 3.4.3., 3.5.6., 3.6.6., 3.6.8., 3.6.10., 4.5.3., 4.6.2., 4.7.4., 4.8.3., 4.9.4., 7.5.3., 7.7.4.

Invariantu metode, krāsošana – 2.4.4., 5.5.4., 5.6.5., 7.6.3.

Figūru sistēmas, to savstarpējais novietojums – 2.2.2., 3.5.9., 5.6.4.

Daudzstūri – 1.1.4., 1.3.4., 1.4.11., 2.3.3., 2.5.2., 3.1.6., 3.1.7., 3.2.4., 3.2.6., 3.3.5., 3.3.6., 3.4.7., 3.5.5., 3.6.6., 3.6.8., 3.6.9., 4.7.2., 4.8.2., 4.9.2., 5.5.2., 5.8.3., 6.9.2., 7.8.2., 7.9.2.

Riņķa līnija un riņķis – 1.3.4., 1.4.11., 3.1.6., 3.2.8., 3.4.7., 3.6.8., 5.9.2.

Ģeometriskie pārveidojumi – 1.2.4., 3.5.3.

Konstrukciju uzdevumi – 3.6.6., 3.6.8., 3.6.9., 7.5.5.

KOMBINATORIKA

Objektu skaitīšana – 3.2.5., 3.4.10., 3.5.3., 4.8.5., 5.5.3., 5.6.1., 7.6.2.

Grafi – 2.2.4., 2.5.5., 3.6.4.

Kombinatoriskās struktūras – 2.4.4., 3.3.10., 3.5.1., 3.6.7., 5.8.4., 7.5.4.

Invariantu metode – 3.5.10.

Interpretāciju metode – 4.5.5.

ALGORITMIKA

Matemātiskās spēles – 2.1.5., 3.2.10., 4.9.4., 6.9.5., 7.8.5.

Algoritma atšifrēšana – 7.6.5., 7.9.5.

Algoritmu un procesu analīze – 1.3.5., 4.5.4., 5.5.5., 5.9.5.

Algoritma izstrāde – 2.2.5., 2.3.4., 2.3.5., 3.5.10., 3.6.5., 4.6.5., 6.9.4., 7.7.2.

Loģiska rakstura uzdevumi – 2.3.2., 2.4.5., 2.5.3., 3.1.9., 3.3.9., 3.4.9., 3.6.1., 3.6.5., 3.6.10.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. Andžāns u.c. **Dirihlē princips.** Rīga: "Mācību grāmata", 1994.
2. Gailītis, A. Andžāns. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi**. Aizkraukle: Krauklītis, 1995.
3. Andžāns, I. Markusa. **Vai vari atrisināt?** Algebra. Rīga: Zvaigzne ABC, 1996.
4. A. Andžāns, M. Seile, Z. Zvirbule. **Profesora Cipariņa kluba uzdevumi un atrisinājumi.** Rīga: Zvaigzne ABC, 2000.
5. М. Б. Гельфанд, В. С. Павлович. **Внекласная работа по математике.** Просвещение, 1965.
6. А. Я. Котов. **Вечера занимательной арифметики.** Просвещение, 1967.
7. С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. **Ленинградские математические кружки.** Киров: АСА, 1994.
8. Р. М. Смаллиан. **Алиса в стране смекалки.** Москва: Мир, 1987.
9. А. Савин. **Занимательные математические задачи.** Москва: АСТ, 1995.
10. **The UK Mathematics Trust Yearbook 1998-1999.** UKMT, 1999.
11. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2002-2003.** UKMT, 2003.
12. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2004-2005.** UKMT, 2005.
13. **The UK Mathematics Trust Yearbook 2008-2009.** UKMT, 2009.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.– 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.
29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.
36. K.Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.
37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1984. – 1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.
38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.
39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.
40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.
41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.
42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.
43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993. – 2000. gados.** Rīga: LU, 2009.
44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.
45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
46. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.
47. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1986. – 1989. gadā.** Rīga: LU, 2011.
48. M. Avotiņa, L. Freija. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.
49. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2010./2011. mācību gadā.** Rīga: LU, 2012.